# 11.7 막대 속의 심프슨 공식

학습지

**문제**

**STEP II 1989, 13번 문제**

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/89-s2-q13

## 힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

? **생각해 보기** 두 계의 질량이 같고, 질량 중심(centre of mass)이 같으며, 질량 중심을 지나는 모든 축에 대한 관성 모멘트가 같다고 하자. 그러면 왜 평행축 정리에 의해 다른 모든 축에 대한 관성 모멘트도 같아지는가?

### 1단계 막대

다루는 내용: 균일한 막대

**생각해 보기** 양 끝에 질량 $p$를, 가운데에 질량 $q$를 놓는다. 전체 질량, 그리고 중심을 지나고 막대에 수직인 축에 대한 관성 모멘트(moment of inertia)가 서로 같아지도록 맞춘다.

**잠깐, 직접 해 보기** 이제 중심을 지나는 다른 모든 축을 확인한다. 막대를 따라 중심에서 거리 $r$만큼 떨어진 점은 각 $\psi$를 이루는 축으로부터 거리 $r\sin\psi$에 있다. 이 사실은 두 관성 모멘트에 각각 어떤 영향을 주는가?

### 2단계 직사각형

다루는 내용: 직사각형 박판

**잠깐, 직접 해 보기** 박판(lamina)을 한 변에 평행한 가는 띠들로 자른다. 각 띠를 그 띠에 해당하는 세 입자(particle)로 바꾼다. 각 직선 위에 놓인 입자들을 모두 합하면 무엇이 되는가? 이제 그 각각을 같은 방법으로 다시 세 입자로 바꾼다.

### 3단계 대각선에 대한 정사각형

다루는 내용: 대각선에 대한 정사각형

**생각해 보기** 아홉 개의 입자 중 어느 것이 대각선(diagonal) 위에 있는가? 나머지 입자들은 대각선으로부터 얼마나 떨어져 있는가?

### 4단계 균일하지 않은 막대

다루는 내용: 균일하지 않은 막대

**생각해 보기** 양 끝과 중점에 질량을 놓는다. 막대의 전체 질량, 그리고 한쪽 끝에 대한 1차 모멘트(first moment)와 2차 모멘트(second moment)를 구한다. 세 값을 모두 일치시키고 연립하여 푼다.

## 숨은 수학

### 심프슨 공식

질량 분포의 모멘트를 일치시키는 것은 수치 적분 공식을 설계하는 것과 같은 문제이다. $f = 1, x, x^2$에 대해 정확한 공식 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \approx w_0 f(-a) + w_1 f(0) + w_2 f(a)$는

$$w_0 + w_1 + w_2 = 2a, \qquad -aw_0 + aw_2 = 0, \qquad a^2 w_0 + a^2 w_2 = \tfrac{2}{3}a^3,$$

을 만족해야 하며, 이는 막대에 대한 조건과 정확히 같다($f = 1, x, x^2$이 각각 질량, 1차 모멘트, 관성 모멘트의 역할을 한다). 해는 $w = 2a(\tfrac{1}{6}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{6})$, 즉 심프슨 공식이다. 대칭성 덕분에 덤도 생긴다. $f = x^3$에 대해서도 양변이 모두 0이 되므로 공식이 정확하다. 따라서 심프슨 공식은 삼차식을 정확하게 적분하며, 매끄러운 함수에 대한 오차는 4계 도함수에 비례한다. 그러므로 막대는 질량, 중심, 관성 모멘트뿐만 아니라 3차 모멘트까지도 세 입자와 일치한다.

### 가우스 구적법과 관성 텐서

질량뿐만 아니라 위치도 자유롭게 정할 수 있다면 입자 두 개로 충분하다. 점 $\pm\frac{a}{\sqrt{3}}$ 각각에 질량의 절반을 놓으면 된다. 확인해 보면 $2 \cdot \frac{1}{2}m \cdot \frac{a^2}{3} = \frac{1}{3}ma^2$이다. 이것이 2점 **가우스–르장드르 공식**(*Gauss–Legendre rule*) $\int_{-a}^{a} f \approx a\big(f(-\frac{a}{\sqrt{3}}) + f(\frac{a}{\sqrt{3}})\big)$이며, 이 공식도 삼차식에 대해 정확하다. 가우스(Carl Friedrich Gauss)는 1814년에 교묘하게 배치한 $n$개의 점으로 $2n-1$차 다항식을 정확하게 적분할 수 있음을 보였고, 가우스 구적법(Gaussian quadrature)은 오늘날 수치해석의 표준적인 방법이다.

역학에서 물체의 중심을 지나는 모든 축에 대한 관성 모멘트는 $3 \times 3$ 대칭행렬 하나에 담기는데, 이를 **관성 텐서**(*inertia tensor*)라 한다. 질량, 질량 중심, 관성 텐서가 같은 두 물체는 모든 힘에 대해 똑같이 반응한다. 그래서 공학자들은 시뮬레이션에서 복잡한 부품을 몇 개의 점질량으로 바꿀 수 있다. 관성 텐서의 고유벡터(eigenvector)는 **주축**(*principal axes*)으로, 물체가 안정적으로 회전할 수 있는 축이다.

## 더 도전하기

1 **심프슨 공식.** 구간 하나로 심프슨 공식을 사용하여 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$의 값을 어림하고, $\frac{\pi}{4}$와 비교하여라. 이 공식이 $\int_{-1}^{1} x^3\,\mathrm{d}x$와 $\int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x$에 대해서는 정확하지만 $\int_{-1}^{1} x^4\,\mathrm{d}x$에 대해서는 그렇지 않음을 확인하여라.

2 **모든 축이 똑같다.** 정사각형 얇은 판의 중심을 지나고 그 평면 위에 있는 임의의 축에 대한 관성 모멘트가 $\frac{1}{3}Ma^2$임을 보여라. (**힌트:** 동등한 아홉 입자는 $90^\circ$ 회전에 대해 대칭이다. 이것은 $\cos\psi$와 $\sin\psi$에 대한 이차식에 관해 무엇을 말해 주는가?)

3 **삼각형.** 질량이 $M$인 균일한 삼각형 얇은 판이 세 변의 중점에 놓인 질량 $\frac{1}{3}M$인 세 입자와 동역학적으로 동등함을 보여라.

4 **속이 찬 정육면체.** 속이 찬 균일한 정육면체와 동역학적으로 동등한 27개 입자의 계를 찾고, 이를 이용하여 한 모서리의 길이가 $2a$인 정육면체의 한 모서리에 대한 관성 모멘트를 구하여라.

## 더 읽을거리

- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*** (Cambridge University Press). 강체와 관성 모멘트를 다루는 장.
- **Endre Süli & David Mayers, *An Introduction to Numerical Analysis*** (Cambridge University Press). 심프슨 공식과 가우스 구적법을 포함하여 수치 적분을 다루는 장들.
- **Philip Davis & Philip Rabinowitz, *Methods of Numerical Integration*** (Dover). 고전적인 참고서.

안내에 따른 전체 풀이는 제 11.7절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch11/simpsons-rod.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com