11.6 백스핀

학습지

문제

STEP III 1997, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/97-s3-q10

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

생각해 보기 구슬이 속도 v로 앞으로 움직이면서 각속도 ω로 뒤로 회전한다. 구슬의 가장 아래 점은 탁자 위에서 얼마나 빠르게 움직이는가? 마찰력은 어느 방향으로 작용하는가?

1단계 마찰력이 하는 일

다루는 내용: 두 소문항 모두를 위한 준비

생각해 보기 구슬의 가장 아래 점은 탁자 위에서 얼마나 빠르게, 어느 방향으로 미끄러지는가? 그렇다면 마찰력(friction)은 어느 방향으로 작용하는가?

잠깐, 직접 해 보기 마찰력의 크기를 F라 하자. $I = \frac{2}{5}ma^2$일 때 $m\dot{v}$와 $I\dot{\omega}$를 F로 나타내어라. 마찰력은 역회전(backspin)을 증가시키는가, 감소시키는가?

2단계 그 자리에 멈추기

다루는 내용: 소문항 (i)

생각해 보기 완전히 멈추려면 v와 ω가 같은 순간에 0이 되어야 한다. 각각은 언제 0이 되는가?

3단계 되돌아오기

다루는 내용: 소문항 (ii)

> **잠깐, 직접 해 보기** 역회전이 더 크면 v가 0이 될 때 구슬은 아직 회전하고 있으므로 마찰력이 계속 작용한다. 미끄러짐은 $v + a\omega = 0$일 때 멈춘다. 그때는 언제이고, 그때의 v는 얼마인가? 그 이후 구슬은 일정한 속력으로 구른다.

숨은 수학

보존량

최종 속력에 더 빨리 도달하는 방법이 있다. 구슬이 탁자와 닿는 접촉점에 대한 구슬의 각운동량(angular momentum)을 생각하자. 마찰력은 바로 그 점에서 작용하므로 그 점에 대한 모멘트가 없고, 수직항력(normal reaction)과 중력은 모두 그 점을 지나는 연직선을 따라 작용한다. 따라서 구슬이 미끄러지는 동안 이 각운동량은 보존된다. 그 값은 mva(중심의 운동에서 오는 부분)에서 $I\omega$(역회전은 음으로 센다)를 뺀 것이다.

$$L = mav - \tfrac{2}{5}ma^2\omega.$$

$a\omega = -V$인 상태로 속력 V로 구를 때 이 값은 $maV + \tfrac{2}{5}maV = \tfrac{7}{5}maV$이다. 이를 처음 값과 같게 놓으면

$$\tfrac{7}{5}maV = mav_0 - \tfrac{2}{5}ma^2\omega_0, \qquad V = \frac{5v_0 - 2a\omega_0}{7},$$

마찰력의 크기는 물론, 마찰력이 일정한지조차 언급하지 않고 같은 답을 얻는다. 최종 속력은 보존 법칙만으로 정해지며, 마찰력은 그 상태에 도달하는 데 걸리는 시간만을 결정한다.

스누커, 볼링, 테니스

같은 분석으로 많은 스포츠를 설명할 수 있다. 중심을 맞은 스누커 공은 처음에는 미끄러지다가 구르기 시작하며, 결국 처음 속력의 $\tfrac{5}{7}$로 굴러간다(공식에서 $\omega_0 = 0$으로 놓아라). 옆회전을 걸어 던진 텐핀 볼링공은 레인을 따라 미끄러지다가 구르기 시작할 때 "훅(hook)"을

그린다. 톱스핀을 걸어 친 테니스공은 급격히 떨어지는데, 이 경우 주된 효과는 공기역학적인 것이다. 회전하는 공이 주위의 공기를 휘게 하는 현상, 즉 **마그누스 효과**(*Magnus effect*)이다.

코리올리와 당구

오늘날 회전 좌표계(rotating frame)에서의 겉보기 힘(fictitious force)으로 기억되는 가스파르귀스타브 코리올리(Coriolis)(Section 11.5)는 1835년에 당구의 수학만을 다룬 책 *Théorie mathématique des effets du jeu de billard*(당구 효과의 수학적 이론)를 썼다. 그는 여러 가지 가운데 특히, 회전을 걸어 친 공은 미끄러지는 동안 포물선(parabola)을 그리다가 이후 곧게 굴러간다는 것을 보였고, 바로 이 문제의 스크루 샷을 분석했다. 이 책은 지금도 당구를 연구하는 물리학자들에게 인용된다.

더 도전하기

1 **톱스핀.** 구슬이 역회전 대신 앞쪽 회전 ω_0로 출발한다면 최종적으로 구르는 속력을 구하여라. $v_0/(a\omega_0)$가 어떤 값일 때 구슬이 빨라지는가?

2 **스누커 공.** 중심을 맞은 공이 회전 없이 v_0로 미끄러지기 시작한다. 공이 결국 $\frac{5}{7}v_0$로 구르게 됨을 보이고, 잃어버린 운동 에너지(kinetic energy)의 비율을 구하여라. (구르는 운동의 운동 에너지는 $\frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$이다.)

3 **고리.** $I = ma^2$인 얇은 고리가 자신의 평면 안에서 구르는 경우에 대해 문제를 다시 풀어라. 이제 어떤 비 $v_0/(a\omega_0)$일 때 고리가 $\frac{v_0}{7}$로 되돌아오는가?

4 **드로 샷.** 공이 처음부터 미끄러지지 않고 구르게 하려면 스누커 큐가 공의 어디를(중심보다 얼마나 높은 곳을, a로 나타내어) 쳐야 하는가? (**힌트:** 충격량(impulse)이 가해지는 동안 접촉점에 대한 각운동량을 생각하라.)

더 읽을거리

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics*** (Cambridge University Press), 8장. 각운동량과 미끄러짐을 동반한 구름 운동을 다룬다.
- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*** (Cambridge University Press), 강체(rigid body) 운동에 관한 장들.
- **David Alciatore, *The Illustrated Principles of Pool and Billiards*** (Sterling). 당구의 물리학을 많은 그림과 함께 설명한다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 11.6절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch11/backspin.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com