11.5 가속하는 기차 안의 중력

학습지

문제

STEP II 2021, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

? **생각해 보기** 기차가 서쪽(x의 음의 방향)으로 a의 가속도로 가속한다. 기차 안의 관찰자에게는 질량 m인 물체에 어떤 "가상의" 힘이 작용하는 것처럼 보이는가?

1단계 원점에서는 정지할 수 없다

다루는 내용: 소문항 (i)

? **생각해 보기** 구슬이 기차에 대해 원점에 머물러 있다면, 구슬은 기차와 같은 가속도를 가져야 한다. 그러려면 어떤 힘이 필요한가? 원점에서 철사는 수평이다. 철사의 반작용(reaction)은 어느 방향으로 작용할 수 있는가?

2단계 에너지 방정식

다루는 내용: 소문항 (ii)

잠깐, 직접 해 보기 기차의 기준틀(frame)에서 뉴턴(Newton)의 제2법칙을 쓰되, 기준틀의 가속도 때문에 생기는 힘 ma를 더하고 수직항력(normal reaction) $\mathbf{N}$도 포함한다. 속도 $(\dot{x}, \dot{y})$와 내적(dot product)을 취한다. 왜 $\mathbf{N}$이 사라지는가?

3단계 얼마나 높이?

다루는 내용: 소문항 (iii)

생각해 보기 구슬이 원점에서 정지 상태로 출발하므로 상수는 0이다. 가장 높은 점에서 구슬은 순간적으로 정지한다. $ky = x^2$을 이용한다.

4단계 가장 빠른 점

다루는 내용: 소문항 (iv)

생각해 보기 속력의 제곱을 x만의 함수로 나타낸다. 이 이차식은 어디에서 최댓값을 갖는가? 그런 다음 그 점에서 철사의 기울기(gradient)를 구한다.

숨은 수학

가상력

뉴턴 법칙은 **관성계**(inertial frame), 즉 가속하지 않는 좌표계에서 성립한다. 가속하는 좌표계에서는 가상력을 더하여 뉴턴 법칙을 되살릴 수 있다. 가속도가 $\mathbf{A}$인 좌표계에서는 $-m\mathbf{A}$를 더하고, 회전하는 좌표계에서는 원심력(centrifugal force)과 코리올리 힘(Coriolis force)을 더한다. 이 힘들은 어떤 물체도 작용하지 않으므로 가상력이라고 부르며, 좌표계 때문에 생겨나는 것이다. 그러나 그 좌표계 안에 있는 사람에게는 완벽하게 실재하는 힘이다. 원심력은 지구를 극 방향으로 납작하게 만들고, 코리올리 힘은 허리케인이 도는 방향(북반구에서는 시계 반대 방향)을 정하며 장거리 포탄의 경로를 휘게 한다.

등가 원리

일정한 가상력 $-m\mathbf{A}$는 중력과 똑같이 질량에 비례한다. 닫힌 상자 안에서 하는 어떤 실험으로도 상자가 행성 위에 놓여 있는지 빈 공간에서 가속하고 있는지 구별할 수 없다. 이것이 **등가 원리**(equivalence principle)이다. 아인슈타인은 이를 일반 상대성 이론(general relativity)의 출발점으로 삼았다. 가속하는 상자를 가로지르는 빛은 휘어 보이므로, 중력장에서도 빛은 휘어야 한다. 또 가속하는 로켓의 앞쪽과 뒤쪽에 있는 시계는 서로 다른 빠르기로 가므로, 중력장에서 높이가 다른 시계들도 그래야 한다. 두 예측은 모두 확인되었으며, 두 번째 효과는 모든 GPS 위성에서 보정해야 한다. 이 효과만으로도 위성의 시계는 지상의 시계보다 하루에 약 45마이크로초씩 빨리 가기 때문이다.

아인슈타인의 가장 행복한 생각

1907년, 베른의 특허청에서 일하던 아인슈타인은 특수 상대성 이론(special relativity)에 관한 총설 논문을 쓰고 있었다. 그때 훗날 그가 회상한 대로 "내 생애 가장 행복한 생각"이 떠올랐다. 지붕에서 자유 낙하하는 사람은 자신의 무게를 느끼지 못한다는 것이다. 낙하하는 좌표계를 택하면 중력을 "변환하여 없앨" 수 있다. 이 생각을 1915년의 일반 상대성 이론으로 완성하기까지는 8년의 시간과 많은 새로운 수학(가우스(Gauss)와 리만(Riemann)이 발전시킨 휘어진 공간의 미분기하학(differential geometry))이 더 필요했다.

더 도전하기

1 **기차 안의 대포.** STEP I 2000, 9번 문제 (step.maths.org/questions/00-s1-q9) 문제를 풀어 보자. 가속하는 객차 안에서 발사한 포탄을 다루는데, 여기서 가속도는 중력이 기울어진 것처럼 작용한다.

2 **맞바람.** STEP II 2006, 11번 문제 (step.maths.org/questions/06-s2-q11) 문제를 풀어 보자. 일정한 맞바람을 받는 포물체를 다루는데, 바람 때문에 포물체가 땅에 떨어지기 전에 발사한 쪽으로 되밀려 올 수도 있다.

3 **기차 안의 커피.** 가속하는 기차 안에서 커피 잔의 수면은 수평면과 $\arctan(a/g)$의 각을 이루는 평면임을 보여라.

4 **작은 진동.** $x = \frac{ak}{2g}$를 중심으로 한 구슬의 작은 진동의 주기를 구하라. (힌트: 새로운 바닥 근처에서 철사는 반지름이 곡률 반지름(radius of curvature)과 같은 원으로 근사된다.)

더 읽을거리

- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*** (Cambridge University Press). 비관성 좌표계와 가상력을 다룬 장.
- **Albert Einstein, *Relativity: The Special and the General Theory*** (여러 판본). 가속하는 상자 이야기를 포함한, 아인슈타인이 직접 쓴 대중적인 해설서.
- **Pedro Ferreira, *The Perfect Theory*** (Little, Brown). 일반 상대성 이론의 일대기.

안내에 따른 전체 풀이는 제 11.5절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch11/accelerating-frame.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com