11.4 등시 곡선

학습지

문제

STEP III 1994, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/94-s3-q9

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

? **생각해 보기** 그릇은 매끄럽다. 입자에 작용하는 힘은 무엇이며, 그중 어느 힘이 일을 하는가?

1단계 곡선을 따른 에너지

다루는 내용: 상수

? **생각해 보기** 그릇은 매끄럽다. 어떤 힘들이 작용하고, 그중 어느 힘이 일을 하는가? 곡면을 따른 속력은 $\left|\frac{ds}{dt}\right|$이다. 에너지 보존(conservation of energy) 식을 써 보아라.

2단계 s에 대한 단진동

다루는 내용: V에 도달하는 시간

잠깐, 직접 해 보기 $s = 2\sqrt{ky}$를 이용하여 y를 s의 함수로 바꾸어라. 에너지 식을 t에 대하여 미분(differentiate)하여라. 어떤 종류의 운동이 나오는가?

3단계 바닥까지 걸리는 시간

다루는 내용: V에 도달하는 시간

생각해 보기 입자가 $s = 0$에 도달하는 데 주기(period)의 몇 분의 몇이 걸리는가? 그 답은 h에 의존하는가?

4단계 두 입자

다루는 내용: 두 입자

생각해 보기 각 입자는 언제 V에 도달하는가? V에서의 속력은 출발 높이에 어떻게 의존하는가? 두 입자의 운동량(momentum)을 비교하여라.

잠깐, 직접 해 보기 충돌 순간의 전체 운동량은 0이므로 계속 0으로 유지된다. 반발계수(coefficient of restitution) α를 이용하여 충돌 직후의 두 속력을 구하여라.

5단계 **전체 운동**

다루는 내용: 두 입자

생각해 보기 이제 각 입자는 얼마나 높이 올라가는가? 두 입자는 다음에 언제 V에 도달하는가? 그 충돌에서, 그리고 그 이후의 모든 충돌에서 어떤 일이 일어나는가?

숨은 수학

왜 사이클로이드인가?

직선 아래에서 굴러가는 반지름 R인 바퀴는 사이클로이드 $x = R(t + \sin t)$, $y = R(1 - \cos t)$를 그린다. 그러면 $\frac{dx}{dt} = R(1 + \cos t)$이고 $\frac{dy}{dt} = R\sin t$이므로, 곡선을 따른 속력은 $R\sqrt{2 + 2\cos t} = 2R\cos\frac{t}{2}$이다. 적분하면 바닥으로부터의 호의 길이는 $s = 4R\sin\frac{t}{2}$이고, 한편 $y = 2R\sin^2\frac{t}{2}$이다. 따라서 $s^2 = 8Ry$이다. 즉 사이클로이드는 정확히 $k = 2R$일 때 $s = 2\sqrt{ky}$를 만족하는 곡선이다. 역으로, 복원력이 s에 비례해야 한다는 조건은 곡선이 사이클로이드일 것을 강제한다.

최단강하곡선

1696년 요한 베르누이(Johann Bernoulli)는 유럽의 수학자들에게 문제를 냈다. 한 점에서 그보다 낮은(바로 아래는 아닌) 점까지 구슬이 **가장 짧은** 시간에 미끄러져 내려가는 곡선은 무엇인가? 그 답인 **최단강하곡선**(*brachistochrone*) 역시 사이클로이드이다. 뉴턴(Newton)은 문제를 받은 뒤 하룻저녁 만에 풀었다고 전해진다. 그는 풀이를 익명으로 발표했지만, 베르누이는 "발톱을 보고 사자를 알아보듯" 저자를 알아보았다. 이 문제는 Section 4.7에서 만난 **변분법**(*calculus of variations*), 즉 적분으로 정의된 양을 최소화하는 곡선을 찾는 분야의 출발점이 된 예이다.

하위헌스의 사이클로이드 시계

하위헌스는 단진자의 주기가 진폭에 의존하기 때문에 단진자가 시간을 정확히 맞추지 못한다는 것을 알고 있었다. 그는 『*Horologium Oscillatorium*』(1673)에서 추가 사이클로이드를 따라 움직이게 하는 방법을 보였다. 사이클로이드 모양으로 휜 두 개의 "볼판" 사이에 줄을 매달면, 줄이 볼판을 감으면서 추가 스스로 사이클로이드를 그리게 된다(사이클로이드의 **신개선**(*involute*)은 또 다른 사이클로이드이다). 실제로는 볼판이 마찰로 일으키는 오차가 없애는 오차보다 커서, 시계 제작자들은 대신 진폭을 작게 유지했다. 그러나 하위헌스의 분석은 축폐선(evolute)과 신개선의 이론을 창시했고, 그의 책은 17세기 역학의 위대한 저작 가운데 하나가 되었다.

더 도전하기

1 **다른 높이.** 등시곡선 그릇에서 높이 h에서 입자를 놓는다. V에서의 속력이 에너지 보존에 따라 당연히 그래야 하듯 $\sqrt{2gh}$임을 보이고, 이것이 ωs_0와 일치하는지 확인하여라.

2 **보통의 그릇.** 반지름 R인 반구형 그릇에서, 낮은 높이에서 바닥까지 가는 시간과 가장자리에서 바닥까지 가는 시간을 비교하여라. 어느 쪽이 더 긴가? (Section 11.3의 결과를 이용하여라.)

3 **같은 질량.** 질량이 모두 m으로 같은 두 입자를 높이 h_1과 h_2에서 놓고 반발 계수가 e일 때, 문제의 둘째 부분을 다시 풀어라. 두 입자는 여전히 항상 V에서 충돌하는가?

4 **사이클로이드의 호의 길이.** 사이클로이드의 한 아치의 길이가 $8R$이고, 그 아래 넓이가 굴러가는 원 넓이의 세 배인 $3\pi R^2$임을 보여라.

더 읽을거리

- **George Simmons, *Differential Equations with Applications and Historical Notes*** (CRC Press). 등시곡선과 최단강하곡선을 그 역사와 함께 다룬다.
- **E. A. Whitman, "Some historical notes on the cycloid"**, *American Mathematical Monthly* 50 (1943). 사이클로이드가 왜 "기하학자들의 헬레네"라고 불렸는지 설명한다.
- **Paul Nahin, *When Least Is Best*** (Princeton University Press). 최단강하곡선을 비롯한 최적화 문제들을 역사와 함께 들려준다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 11.4절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch11/tautochrone.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com