11.3 실제 진자

학습지

문제

STEP III 1998, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/98-s3-q11

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

? **생각해 보기** 추는 반지름이 l인 원 위를 움직인다. θ와 $\dot{\theta}$로 나타내면 추의 속력과 (가장 낮은 점을 기준으로 한) 높이는 각각 얼마인가?

1단계 에너지

다루는 내용: 에너지 방정식

? **생각해 보기** 추(bob)의 속력과 높이를 θ와 $\dot{\theta}$로 나타내어라. $\theta = \gamma$일 때 추는 정지해 있다. 에너지 보존(conservation of energy)을 이용하여라.

2단계 적분으로 나타낸 주기

다루는 내용: 주기

생각해 보기 두 코사인 모두에 $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$를 적용하여라. $\theta = 0$에서 $\theta = \gamma$까지 가는 데 걸리는 시간은 주기(period)의 몇 분의 몇인가? 그 시간을 $\int \frac{\mathrm{d}\theta}{\theta}$로 나타내어라.

3단계 특이점 없애기

다루는 내용: 작은 진폭 근사

잠깐, 직접 해 보기 $k = \sin\frac{\gamma}{2}$로 두고 $\sin\frac{\theta}{2} = k\sin\phi$로 치환하여라. ϕ의 범위는 어떻게 잡아야 하는가? $\mathrm{d}\theta$를 $\mathrm{d}\phi$로 나타내어라. 어떤 인수들이 약분되는가?

4단계 첫 번째 보정

다루는 내용: 작은 진폭 근사

> **생각해 보기** k가 작을 때 $(1-k^2\sin^2\phi)^{-1/2}$를 이항정리(binomial theorem)로 전개하여 두 항까지 남겨라. 그다음 $\int_0^{\pi/2}\sin^2\phi\,\mathrm{d}\phi$와 $k\approx\tfrac{\gamma}{2}$를 이용하여라.

숨은 수학

타원적분

적분

$$K(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}$$

을 **제1종 완전타원적분**(*complete elliptic integral of the first kind*)이라 한다. 이런 이름이 붙은 것은 이와 가까운 적분이 타원의 둘레를 주기 때문이다. 정확한 주기는 $P=4\sqrt{l/g}\,K(\sin\tfrac{\gamma}{2})$이다. 피적분함수를 끝까지 전개하고 Section 4.4의 월리스 적분(Wallis integrals) $\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}\phi\,\mathrm{d}\phi$를 이용하여 항별로 적분하면

$$P=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\Big(1+(\tfrac{1}{2})^2k^2+(\tfrac{1\cdot3}{2\cdot4})^2k^4+(\tfrac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6})^2k^6+\cdots\Big).$$

을 얻는다. 익숙한 함수들을 유한 번 조합해서는 $K(k)$를 얻을 수 없다. 이것은 진정으로 새로운 함수이다.

가우스의 놀라운 공식

K를 계산하는 훨씬 더 좋은 방법이 있다. Section 2.6에서 **산술기하평균**(*arithmetic–geometric mean*)을 만났다. a와 b에서 시작하여, 이 둘을 산술평균과 기하평균으로 바꾸는 일을 되풀이하는 것이다. 가우스는 1799년에

$$K(k)=\frac{\pi}{2\,\mathrm{AGM}(1,\sqrt{1-k^2})},$$

임을 발견했다. 따라서 진폭이 γ인 진자의 주기는 정확히

$$P = \frac{2\pi\sqrt{l/g}}{\mathrm{AGM}(1, \cos\frac{\gamma}{2})}.$$

이다. AGM은 매우 빠르게 수렴(converge)하기 때문에, 약 160°까지의 흔들림에서는 서너 단계만으로 주기를 유효숫자 열 자리까지 얻을 수 있으며, 그림 11.3.1 (온라인 전체 절에 수록)의 값들도 이 방법으로 계산했다. 180°에 더 가까워지면 두 출발값 1과 $\cos\frac{\gamma}{2}$가 멀리 떨어져 있어 한두 단계가 더 필요하지만, 179°에서도 다섯 단계면 충분하다. 가우스는 일기에 이 발견이 "해석학의 완전히 새로운 분야를 연다"고 적었고, 그의 말은 옳았다. 타원적분의 역함수를 생각한 아벨(Abel)과 야코비(Jacobi)는 **타원함수**(*elliptic functions*)에 이르렀고, 타원함수는 다시 **타원곡선**(*elliptic curves*)으로 이어졌다. 타원곡선은 오늘날 수론(number theory)의 중심에 있으며(페르마(Fermat)의 마지막 정리를 증명하는 열쇠였다), 인터넷의 보안을 지키는 암호(cryptography)에서도 핵심적인 역할을 한다.

갈릴레이의 등잔과 하위헌스의 시계

진자의 주기가 진폭에 의존하지 않는다는 갈릴레이의 주장은 1602년 무렵에 나온 것으로, 그가 연구한 작은 흔들림에서는 좋은 근사였다. 하위헌스(Christiaan Huygens)는 이것이 정확하지 않다는 것을 깨달았고, 1659년에 주기가 진짜로 진폭과 무관해지는 곡선을 찾아냈다. 그것이 바로 Section 11.4의 주제인 사이클로이드(cycloid)이다. 1656년부터 만들어진 그의 진자시계는 시간 측정의 오차를 하루 약 15분에서 약 15초로 줄였다. 바다에서 경도를 구하는 문제를 해결한 항해용 크로노미터는 훗날 진자를 아예 쓰지 않게 되었지만, 진자시계는 1920년대까지 세계에서 가장 정확한 시계로 남아 있었다.

더 도전하기

1 **줄에 매인 입자.** STEP III 2015, 9번 문제 (step.maths.org/questions/15-s3-q9)에 도전해 보라. 작은 진동에서도 주기가 진폭에 의존하는 진동자를 다룬다. 진자의 주기는 그렇지 않은데, 이 진동자의 주기는 왜 그런가?

2 **다음 항.** 이항 전개를 한 항 더 진행하여 $P \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}(1 + \frac{\gamma^2}{16} + \frac{11\gamma^4}{3072})$임을 보여라.

3 **손으로 하는 AGM.** AGM을 세 단계 이용하여 진폭이 90°인 진자의 주기를 추정하고, 그림의 값 1.1803과 비교하라.

4 **시계.** 어떤 진자시계가 진폭 4°에서 정확한 시간을 가리키도록 맞추어져 있다. 진폭이 5°로 커지면 하루에 몇 초가 늦어지는가?

더 읽을거리

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics*** (Cambridge University Press), 4장. 진폭이 큰 진자를 다룬다.
- **Jonathan Borwein & Peter Borwein, *Pi and the AGM*** (Wiley). 가우스의 발견과 그 활용을 다루며, π를 계산하는 가장 빠른 방법들도 소개한다.
- **Dava Sobel, *Longitude*** (Fourth Estate). 진자를 넘어선, 바다 위에서의 시간 측정 이야기(경도).

안내에 따른 전체 풀이는 제 11.3절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch11/real-pendulum.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com