11.2 기준 진동

학습지

문제

STEP III 2014, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/14-s3-q10

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

> ? **생각해 보기** X가 P로부터 거리 $a+x$에 있고 Y가 Q로부터 거리 $a+y$에 있을 때, 가운데 용수철 XY의 길이는 얼마인가? x와 y가 양수일 때 어느 용수철이 늘어나고 어느 용수철이 압축되는가?

1단계 운동 방정식

다루는 내용: 운동 방정식

> ? **생각해 보기** $XP = a+x$이고 $YQ = a+y$일 때, XY의 길이는 얼마인가? 어느 용수철이 늘어나고 어느 용수철이 압축되는가? 방향에 주의하면서 각 용수철이 X에 작용하는 힘을 구하라. 그다음 대칭성을 이용하여 Y에 대한 식을 얻어라.

2단계 분리

다루는 내용: 결합 $x-y$와 $x+y$

잠깐, 직접 해 보기 각 방정식에는 x와 y가 모두 들어 있다. 두 식을 빼고, 또 더해 보라. $x-y$와 $x+y$는 각각 어떤 방정식을 만족하는가?

3단계 초기 조건

다루는 내용: 결합 $x-y$와 $x+y$

생각해 보기 처음에 x와 y의 값은 무엇이며, 입자들은 움직이고 있는가? 이를 이용하여 두 해에 들어 있는 상수를 결정하라.

4단계 결코 돌아오지 않음

다루는 내용: Y는 결코 돌아오지 않는다

> **잠깐, 직접 해 보기** y를 t에 대한 식으로 나타내라. Y가 처음 위치로 돌아오려면 두 코사인의 값이 각각 얼마가 되어야 하는가? 그것은 $\sqrt{3}$에 대해 무엇을 말해 주는가?

숨은 수학

정규 모드는 고유벡터이다

두 방정식을 행렬(matrix) 방정식으로 쓰면

$$m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix} = -\frac{\lambda}{a}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}.$$

방정식을 분리하는 결합은 이 행렬의 고유벡터(eigenvector)이다. 곧 고윳값(eigenvalue) 1에 대응하는 $(1,-1)$과 고윳값 3에 대응하는 $(1,1)$이다(Section 7.2). 첫 번째 모드에서는 $x=-y$이다. 두 입자는 직선을 따라 같은 방향으로 움직이고(x와 y는 서로 반대쪽 끝에서 잰다는 점을 기억하자), 가운데 용수철은 길이를 그대로 유지한다. 두 번째 모드에서는 $x=y$이다. 두 입자는 서로 반대 방향으로 움직이며 가운데 용수철을 압축하고 늘이므로 진동수가 더 높아진다. 진동수의 제곱은 고윳값에 $\frac{\lambda}{ma}$를 곱한 값이다.

이 방법은 질량과 용수철이 몇 개이든 통한다. 결합된(coupled) 진동자 N개로 이루어진 계는 정규 모드를 N개 가지며, 이들은 대칭행렬의 고유벡터로 주어진다. 스펙트럼 정리(spectral theorem)는 이 고유벡터들이 언제나 존재하고 서로 수직임을 보장한다. 분자는 정규 모드로 진동하며, 화학자들은 분자가 흡수하는 적외선을 통해 분자를 식별한다. 건물과 다리에도 정규 모드가 있으며, 공학자들은 이 진동수가 바람과 지진의 진동수와 겹치지 않도록 해야 한다. 그리고 질량의 개수가 무한대로 갈 때 정규 모드는 진동하는 현의 배음이 되는데, 이것이 바로 푸리에 해석(Fourier analysis)의 출발점이다.

도달하지 않고 가까이 다가가기

Y는 정확히 돌아오지는 않지만, 원하는 만큼 가까이 다가갈 수는 있다. 그 근거는 크로네커(Kronecker)의 정리이다. α가 무리수이면, 배수 $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots$를 1을 법으로 하여 취한 값들은 $[0,1]$의 모든 수에 얼마든지 가까이 다가간다. 따라서 ωt가 2π의 배수이면서 $\sqrt{3}\,\omega t$가 2π의 어떤 배수와 원하는 오차 이내로 가까운 시각을 찾을 수 있다. 이 운동은 **준주기적**(*quasi-periodic*)이다. 즉 토러스(torus)(각 모드마다 각 하나씩) 위를 감아 돌되 결코 닫히지 않는다. 진동수의 비가 유리수인가 무리수인가 하는 바로 이 구분이, 태양계의 안정성에 관한 KAM 정리의 핵심에 놓여 있다.

더 도전하기

1 **에너지.** 전체 에너지 $\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{\lambda}{2a}\left(x^2+y^2+(x+y)^2\right)$가 일정함을 보이고, 이것이 정규 모드마다 하나씩인 두 항의 합으로 나누어지며 각 항이 따로 일정함을 보여라.

2 **순수한 모드.** 운동이 주기 $\frac{2\pi}{\omega}$인 주기 운동이 되려면 입자들을 어떻게 출발시켜야 하는가? 주기가 $\frac{2\pi}{\sqrt{3}\,\omega}$이려면 어떻게 해야 하는가?

3 **더 단단한 가운데 용수철.** 가운데 용수철의 탄성 계수(modulus)가 λ 대신 μ이면, 두 정규 모드의 진동수를 구하여라. μ/λ가 어떤 값일 때 모든 운동이 주기적인가?

4 **세 질량.** 같은 질량 셋이 두 고정점 사이에서 똑같은 용수철 넷으로 한 줄로 연결되어 있다. 행렬과 그 고윳값$(2-\sqrt{2},\,2,\,2+\sqrt{2})$을 구하고, 세 정규 모드를 설명하여라.

더 읽을거리

- **A. P. French, *Vibrations and Waves*** (MIT Introductory Physics Series), 결합 진동자와 정규 모드를 다룬 5장.
- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra*** (Wellesley-Cambridge), 고윳값을 다룬 장. 용수철과 질량이 주요 예로 나온다.
- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*** (CRC Press), 토러스 위의 준주기 운동을 다룬 8장.

안내에 따른 전체 풀이는 제 11.2절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch11/normal-modes.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com