11.14 현수선이 아니라 포물선

학습지

문제

STEP I 1991, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/91-s1-q10

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

생각해 보기 각 이음점 A_i에는 세 힘이 작용한다. 이웃한 두 구간의 장력, 그리고 지지대에 매달린 무게 w이다. 무게가 영향을 줄 수 없는 장력의 성분은 무엇인가?

1단계 각 연결점에서의 방정식

다루는 내용: 평형 방정식

생각해 보기 각 연결점(joint)에서 무게는 연직 방향으로 작용한다. 그렇다면 이웃한 두 선분(segment)의 장력(tension)의 수평 성분(horizontal component)에 대해 무엇을 말할 수 있는가? 힘을 수평 방향과 연직 방향으로 분해(resolve)하라.

잠깐, 직접 해 보기 가운데 연결점에서는 다리의 대칭성(symmetry)을 이용하라. 그곳의 두 선분이 각각 버팀대(strut) 무게의 얼마만큼을 지탱하는가?

2단계 무게로부터 기울기 구하기

다루는 내용: 비

생각해 보기 가운데에서부터 바깥쪽으로 차례로 살펴보라. 각 선분에서 장력의 연직 성분은 얼마인가? 이를 공통인 수평 성분으로 나누어 기울기(slope)를 구하고, 각 기울기를 높이 y_i와 h로 나타내라.

3단계 포물선

다루는 내용: 포물선

생각해 보기 가운데에서부터 바깥쪽으로 연결점의 번호를 매겨라. 가운데 연결점으로부터 내려가는 높이를 모두 더하라. $1+3+5+\cdots+(2j-1)$은 얼마인가?

숨은 수학

포물선인가, 현수선인가?

이 논증의 연속 버전이 두 곡선을 모두 설명한다. 일정한 수평 장력 H를 받는 사슬 $y(x)$에서 장력의 연직 성분은 Hy'이고, 짧은 구간에서 이 값은 그 구간이 받는 하중만큼 변한다: $H\,\mathrm{d}y' = \mathrm{d}W$.

- 하중이 **수평 방향으로** 고르게 분포하면(도로의 단위 길이당 무게가 ρ인 무거운 도로), $Hy'' = \rho$이므로 y는 이차식, 곧 포물선이다.
- 하중이 사슬 자신의 무게로서 **사슬을 따라** 고르게 분포하면(사슬의 단위 길이당 ρ), $Hy'' = \rho\sqrt{1+y'^2}$이고, 그 해는 $c = H/\rho$인 현수선 $y = c\cosh\frac{x}{c}$이다.

사슬이 거의 수평인 바닥 근처에서는 두 곡선이 거의 같다. 둘은 지지점 근처에서 달라지는데, 그곳에서는 사슬이 가팔라서 같은 수평 거리 안에 더 많은 사슬이 들어가기 때문이다. 상판이 케이블보다 훨씬 무거운 실제 현수교는 포물선에 매우 가깝다.

거꾸로 된 사슬과 아치

사슬은 순수한 인장 상태에 있다. 그 모양을 위아래로 뒤집으면 순수한 압축(compression) 상태의 아치(arch)가 되며, 이 아치는 휘려는 경향이 전혀 없다. 로버트 훅(Robert Hooke)은 1675년에 이 사실을 애너그램으로 발표했는데, 이를 풀면 다음과 같다: "유연한 줄이 매달린 그대로, 다만 뒤집으면 단단한 아치가 서리라." 크리스토퍼 렌(Christopher Wren)과 훅은 이 아이디어를 세인트폴 대성당(St Paul's Cathedral)의 돔에 이용했고, 안토니 가우

디(Antoni Gaudí)는 천장에 추를 단 줄들을 매달고 그것을 거꾸로 사진 찍는 방법으로 바르셀로나의 사그라다 파밀리아(Sagrada Família)를 설계했다. 세인트루이스의 게이트웨이 아치(Gateway Arch)는 (무게가 가해진) 뒤집힌 현수선이다.

현수선 도전 문제

1690년 야코프 베르누이(Jakob Bernoulli)는 매달린 사슬의 모양을 구하라는 문제를 수학자들에게 냈다. 1년도 안 되어 그의 동생 요한(Johann), 라이프니츠(Leibniz), 그리고 하위헌스가 풀이를 발표했다. 요한 베르누이는 훗날, 문제를 낸 형이 정작 그 문제를 풀지 못했다고 고소해하며 회상했다. 현수선은 새로운 미적분학(calculus)이 거둔 첫 승리 가운데 하나였으며, 쌍곡선함수(hyperbolic functions) cosh와 sinh로 이어졌다. 이 함수들은 18세기에 Vincenzo Riccati와 람베르트(Johann Heinrich Lambert)가 체계적으로 연구했다.

더 도전하기

1 **짝수 개의 지지대.** 지지대가 $2n$개여서 사슬의 가장 낮은 부분이 가운데의 수평 구간이 되는 경우에 대해 문제를 다시 풀어라. 이음점들은 여전히 포물선 위에 있는가?

2 **장력.** 사슬에서 가장 큰 장력을 H, w, n으로 나타내어라. 그 장력은 어디에서 생기는가?

3 **현수선.** $y = c\cosh\frac{x}{c}$가 $y'' = \frac{1}{c}\sqrt{1+y'^2}$을 만족함을 확인하라. $x = 0$에서 $x = X$까지 현수선의 길이가 $c\sinh\frac{X}{c}$임을 보여라.

4 **갈릴레이의 오류.** 길이가 $2L$인 사슬이 $2d$만큼 떨어진 두 지지점 사이에 매달려 있다. L이 d보다 조금만 클 때, 현수선의 처짐이 포물선의 처짐과 근사적으로 같음을 보여라. 갈릴레이의 실험에서 그 차이가 드러나지 않은 이유는 무엇인가?

더 읽을거리

- **E. H. Lockwood, *A Book of Curves*** (Cambridge University Press). 현수선, 포물선, 그리고 그 친척 곡선들을 다룬다.
- **Jacques Heyman, *The Stone Skeleton*** (Cambridge University Press). 훅의 사슬에서 시작하여, 석조 아치와 돔이 어떻게 서 있는지를 설명한다.
- **David Billington, *The Tower and the Bridge*** (Princeton University Press). 다리의 예술과 공학을 다룬다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 11.14절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch11/bridge-parabola.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com