11.13 제설차 문제

학습지

문제

STEP III Specimen paper, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/spec-s3-q11

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

생각해 보기 첫 번째 제설차는 시각 t에 깊이 $h + kt$의 눈을 만난다. 이 제설차의 속력은 얼마인가? x를 t의 함수로 구하는 것과 t를 x의 함수로 구하는 것 가운데 어느 쪽이 더 쉬운가?

1단계 첫 번째 제설차

다루는 내용: 소문항 (i)

생각해 보기 시각 t에 첫 번째 제설차는 깊이가 $h + kt$인 눈을 만난다. 이 제설차의 속력을 식으로 써 보자. t를 x의 함수(function)로 구하는 편이 더 쉽다. 방정식의 양변을 뒤집은 다음 풀어 보자.

2단계 두 번째 제설차의 방정식

다루는 내용: 소문항 (ii), 방정식 세우기

잠깐, 직접 해 보기 두 번째 제설차는 시각 t에 위치 y에 있다. 첫 번째 제설차는 시각 $t_1(y)$에 그 지점의 눈을 치웠다. 지금 그곳에 쌓인 눈의 깊이는 얼마인가? 두 번째 제설차의 속력을 식으로 쓴 다음, 그 식을 뒤집어 보자.

3단계 풀기

다루는 내용: 소문항 (ii), 방정식 풀기

생각해 보기 t를 y의 함수로 보면 이 방정식은 t에 대해 선형(linear)이다. 적분인자(integrating factor) $e^{-\alpha y}$를 이용하고, 두 번째 제설차가 시각 T에 $y = 0$에서 출발한다는 조건을 쓰자.

4단계 충돌

다루는 내용: 소문항 (ii), 두 제설차가 만나는 곳

> **생각해 보기** 두 제설차는 같은 시각에 같은 지점에 도달할 때 만난다. $t_2(y) - t_1(y)$를 구하자. 이 값은 언제 0이 되는가?

숨은 수학

Agnew의 제설차

Ralph Palmer Agnew의 1942년 교과서 *Differential Equations*에 실린 원래 문제는 이렇다. 어느 날 아침 눈이 일정하게 많이 내리기 시작한다. 제설차 한 대가 정오에 출발하여 첫 한 시간 동안 2마일, 두 번째 한 시간 동안 1마일을 간다. 눈은 언제 내리기 시작했는가? 제설차의 속력은 눈 깊이에 반비례하고, 눈 깊이는 눈이 내리기 시작한 뒤로 흐른 시간에 비례한다. 답(아래 연습문제)에는 황금비(golden ratio)가 나온다. 눈은 정오보다 약 37분 전에 내리기 시작했다. 이 문제처럼 제설차가 두 대인 변형은 그 뒤에 나왔다.

전달되는 정보

두 번째 제설차의 운동은 도로에 기록된 이력, 즉 각 지점이 마지막으로 치워진 시각에 따라 정해진다. 이는 **기억**(memory)을 가진 계의 간단한 예로, 한 장소의 상태가 그곳에서 앞서 일어난 일에 따라 달라진다. 교통 흐름, 빙하의 움직임, 산불의 확산이 모두 이런 성격을 띠며, 그 수학인 1계 편미분방정식(partial differential equation)과 그 **특성곡선**(characteristics)의 이론은 대학 2학년의 표준 주제이다. 시간을 위치의 함수로 쓰는 발상("전선이 이곳에 언제 도착하는가?")은 바로 이런 문제에 쓰이는 **도착 시간**(arrival times) 방법이다.

더 도전하기

1 **Agnew의 문제.** 정오 이전의 알 수 없는 시각에 눈이 일정한 비율로 내리기 시작한다. 속력이 눈 깊이에 반비례하는 제설차가 정오에 출발하여 첫 한 시간 동안 2마일, 두 번째 한 시간 동안 1마일을 간다. 눈이 정오보다 t_0시간 전에 내리기 시작했다면 $(1+\frac{2}{t_0})^2 = (1+\frac{1}{t_0})^3$임을 보이고, 이로부터 $\frac{1}{t_0}$이 황금비임을 이끌어 낸 뒤, 눈이 언제 내리기 시작했는지 구하여라.

2 **확인.** $t_2(y)$가 소문항 (ii)의 미분방정식을 만족함을 미분하여 확인하여라.

3 **시간 간격.** $kT > h$이면 시간 간격 $t_2(y) - t_1(y)$가 처음에는 증가하다가 감소하여 0이 됨을 보이고, 간격이 가장 큰 곳을 구하여라. $kT \le h$이면 어떻게 되는가? 이를 해석하여라.

4 **제설차 세 대.** 세 번째 제설차가 시각 $2T$에 출발한다. 그 운동의 방정식을 써라. 세 번째 제설차는 두 번째 제설차가 첫 번째 제설차를 따라잡기 전에 두 번째 제설차를 따라잡는가, 아니면 그 뒤에 따라잡는가?

더 읽을거리

- **Ralph Palmer Agnew, *Differential Equations*** (McGraw-Hill, 1942). 원래의 제설차 문제가 실린 책이다.
- **George Simmons, *Differential Equations with Applications and Historical Notes*** (CRC Press). 여러 문제와 함께 제설차 문제를 다룬다.
- **Richard Haberman, *Mathematical Models*** (SIAM). 교통 흐름과 특성곡선을 쉽게 접근할 수 있는 수준으로 다룬다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 11.13절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch11/snowplough.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com