11.12 고무줄 위의 개미

학습지

문제

STEP II 2018, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/18-s2-q10

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

생각해 보기 줄은 고르게 늘어난다. 즉 줄의 모든 부분이 같은 배율로 늘어난다. 시각 t에서 줄의 길이는 $a + ut$이다. 말뚝으로부터 거리 x인 점이 전체의 $\frac{x}{a+ut}$만큼의 비율에 있다면, 이 점은 얼마나 빨리 움직이는가?

1단계 개미의 방정식

다루는 내용: 개미의 방정식

생각해 보기 개미는 줄에 대해 상대적으로 v의 속력으로 움직이고, 여기에 개미 아래에 있는 줄 부분의 속력이 더해진다. $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$를 식으로 써 보아라.

잠깐, 직접 해 보기 몫의 미분법(quotient rule)으로 $\frac{x}{a+ut}$를 미분하고, 앞에서 구한 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$에 대한 식을 대입하여라. 무엇이 남는가?

2단계 끝에 도달하기

다루는 내용: 끝에 도달하는 시간

생각해 보기 0부터 t까지 적분하여라. 비율 $\frac{x}{a+ut}$가 1이 될 때 개미가 끝에 도달한다.

3단계 돌아오는 길

다루는 내용: 돌아오는 여정

생각해 보기 되돌아 걸을 때, 줄을 따라 움직이는 개미의 속력은 $-v$이다. 이제 비율의 변화율은 무엇인가? 비율은 시각 T에서 1로 시작한다. 언제 0에 도달하는가?

숨은 수학

조화급수 버전

이 퍼즐은 보통 띄엄띄엄 늘어나는 형태로 소개된다. 밧줄의 길이는 1 km이고, 개미는 첫 1초 동안 1 cm를 걷는다. 그다음 밧줄이 1 km 늘어나고, 다시 개미가 1센티미터를 걷고, 이런 식으로 계속된다. n번째 초에 개미는 길이 n km인 밧줄에서 1 cm를 가므로, 비율로는 $\frac{1}{100\,000\,n}$만큼 간다. 늘어남은 비율을 바꾸지 않으므로 N초 뒤에 개미는 밧줄의

$$\frac{1}{100\,000}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N}\right)\approx\frac{\ln N+0.577}{100\,000}$$

만큼을 지나왔다. 개미는 $H_N\approx 100\,000$일 때, 즉 약 $e^{100\,000}$초 뒤에 도착한다. 이 수는 43 000자리가 넘는다. (비교하자면 우주의 나이는 약 4×10^{17}초이다.) 연속 버전의 답도 이와 일치한다. $k=\frac{u}{v}=100\,000$이고 $T\approx\frac{a}{u}e^{k}$이다.

팽창하는 우주 속의 빛

밧줄 위의 개미는 팽창하는 우주를 가로지르는 빛의 모형이다. 먼 은하들은 공간 자체의 팽창에 실려 우리에게서 멀어지고, 그 은하에서 나온 빛은 개미가 늘어나는 밧줄 위를 걷듯이 팽창하는 공간을 **통과하여** 속력 c로 우리를 향해 온다. 먼 은하의 빛이 언젠가 우리에게 도달하는지는 팽창 속도가 시간에 따라 어떻게 변하는지에 달려 있다. 밧줄처럼 일정한 비율로 팽창하는 우주에서는 빛이 언젠가는 반드시 도착한다. 우리 우주처럼 팽창이 가속되는 것으로 보이는 우주에서는 빛이 결코 우리에게 도달하지 못하는 은하들이 있다. 즉 **우주의**

사건 지평선(cosmic event horizon)이 존재한다. 개미의 경우 이에 해당하는 것은 지수적으로 늘어나서 끝의 속력이 길이에 비례하여 커지는 밧줄이다(연습문제에서 직접 해 보라).

가드너의 개미

이 퍼즐은 1972년 프랑스 수학자 Denys Wilquin이 고무줄 위의 벌레 문제로 처음 고안한 것으로 보이며, 마틴 가드너(Martin Gardner)가 *Scientific American*의 칼럼과 그의 책 *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments*에서 소개하여 널리 알려졌다. 직관에 어긋나지만 증명은 쉬운 결과의 가장 잘 알려진 예 가운데 하나이며, 조화급수의 발산을 보여 주는 예로 즐겨 쓰인다.

더 도전하기

1 **절반 지점.** 개미는 언제 밧줄의 절반 지점에 있는가? 그것은 시각 $\frac{T}{2}$보다 이전인가, 이후인가?

2 **지수적으로 늘어나는 밧줄.** 이번에는 밧줄의 길이가 $ae^{\lambda t}$라고 하자. 개미가 끝에 도달하는 것은 $v > \lambda a$일 때뿐임을 보여라. (이것이 우주의 사건 지평선이다.)

3 **가속하는 밧줄.** 길이가 $a + \frac{1}{2}bt^2$이면 개미는 반드시 도착하는가?

4 **띄엄띄엄 늘어나는 퍼즐.** 띄엄띄엄 늘어나는 버전에서 개미가 밧줄의 1%를 지나는 데 몇 초가 필요한가? $H_N \approx \ln N + 0.577$을 이용하라.

더 읽을거리

- **Martin Gardner, *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments*** (W. H. Freeman). 고무 밧줄 위의 개미 이야기가 실려 있다.
- **Julian Havil, *Gamma: Exploring Euler's Constant*** (Princeton University Press). 조화급수와 개미 이야기를 다룬다.
- **Barbara Ryden, *Introduction to Cosmology*** (Cambridge University Press). 팽창하는 공간, 지평선, 동행 좌표를 학부 수준에서 다룬다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 11.12절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch11/rubber-rope.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com