11.11 야수는 어떻게 공을 잡는가

학습지

문제

STEP II 1998, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/98-s2-q11

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

생각해 보기 타자(batsman)를 원점에, 수비수를 거리 D인 곳에 둔다. 공이 (x, y)에 있을 때 $\tan\theta$는 무엇인가?

1단계 완벽한 위치에 선 야수

다루는 내용: 가만히 서 있는 야수

생각해 보기 타자를 원점(origin)에, 야수를 거리 D인 곳에 두자. 공이 (x, y)에 있을 때 $\tan\theta$는 얼마인가?

잠깐, 직접 해 보기 공이 시각 T에 야수가 있는 곳의 눈높이에 도달한다고 하자. y와 $D - x$를 t와 T로 나타내어라. 무언가가 약분되도록 y를 인수분해(factorise)할 수 있는가?

2단계 달리는 야수

다루는 내용: 달리는 야수

생각해 보기 이번에는 야수가 거리 D에서 출발하여 속력 v로 타자를 향해 달린다. 야수가 시각 T에 공을 잡는다면 D는 얼마인가? 같은 계산을 다시 해 보아라.

잠깐, 직접 해 보기 역(converse)을 보이려면 $\tan\theta$가 일정한 비율 c로 증가한다고, 즉 $\tan\theta = ct$라고 가정하자. 분모를 없애고 t의 계수(coefficient)와 상수항을 비교하여라. 이로부터 D에 대해 무엇을 알 수 있는가?

숨은 수학

광학적 가속도 상쇄

Chapman의 규칙은 오늘날 **광학적 가속도 상쇄**(optical acceleration cancellation)라 불린다. 수비수는 "광학적 가속도" $\frac{d^2}{dt^2}\tan\theta$를 0으로 유지하도록 움직인다. 공의 상이 위로 가속하면 공이 머리 위로 넘어갈 것이므로 뒤로 물러나고, 감속하면 공이 못 미쳐 떨어질 것이므로 앞으로 달려 나간다(그림 11.11.1 (온라인 전체 절에 수록)). 이 전략은 공이 어디에 떨어질지 알려 주지는 않지만, 수비수를 그곳으로 데려다 준다. 이것은 유도 미사일을 조종하는 것과 같은 피드백 제어 법칙(feedback control law)이다. 미사일은 **비례 항법**(proportional

navigation)을 사용하여 목표물에 대한 시선각(line-of-sight angle)을 일정하게 유지하는데, 이는 같은 아이디어의 옆 방향 버전이다.

수비수가 실제로 하는 일

실제 수비수들은 Chapman의 규칙을 사용할까? 1990년대에 야구 외야수의 머리에 카메라를 달고 한 실험들은 엇갈린 결과를 보였다. Michael McBeath와 동료들은 1995년 *Science*에서, 한쪽 옆으로 날아가는 공의 경우 수비수가 공의 상이 시야를 가로질러 직선으로 움직이도록("선형 광학 궤적(linear optical trajectory)") 곡선 경로를 따라 달리며, 이 방법 역시 공을 잡게 해 준다고 주장했다. 이후의 연구는 두 전략과 그 혼합이 모두 사용되며, 수비수가 일정한 속력으로 달리지 않는 경우가 많다는 것을 시사했다. 2004년의 한 연구는 프리스비를 잡는 개들이 같은 광학적 규칙에 부합하는 경로를 따른다는 것을 발견했다. 세부 사항이 어떻든, 놀라운 결론은 변함없다: 공을 잡는 데에는 예측이 필요하지 않고, 올바른 피드백만 있으면 된다.

Chapman의 논문

1968년 *American Journal of Physics*에 실린 Seville Chapman의 "Catching a baseball"은 세 쪽 분량이며, 본질적으로 이 문제의 계산을 담고 있다. 그는 이 전략이 공기 저항(air resistance)이 없을 때에만 통하며, 실제 야구공의 궤적은 항력(drag)과 회전(spin) 때문에 왜곡되어 상황이 복잡해진다고 지적했다. 그럼에도 불구하고, 뇌가 복잡한 제어 문제를 풀기 위해 시야의 단순한 불변량(invariant)을 이용한다는 아이디어는 심리학과 로봇공학에서 중요해졌다.

더 도전하기

1. **뒤로 달리기.** 공이 수비수의 출발 위치보다 뒤에 떨어질 경우, 수비수는 타자에게서 멀어지는 방향으로 달려야 하며 같은 규칙이 적용됨을 보여라.

2. **θ 자체는 아니다.** 완벽한 위치에 있는 수비수에게 $\frac{d\theta}{dt}$는 상수가 아님을 보여라. 왜 $\tan\theta$가 지켜봐야 할 올바른 양인가?

3. **눈높이.** 공이 수비수의 눈높이보다 h만큼 낮은 높이에서 쳐진다면, 알맞은 위치에 있는 수비수에게 $\tan\theta$는 여전히 t의 일차식인가? (수비수는 눈높이에서 공을 잡는다고 가정한다.)

4. **공기 저항.** 선형 공기 저항이 있으면 수평 속도는 지수적으로 감소한다. 알맞은 위치에 있는 수비수에게 $\tan\theta$는 여전히 t의 일차식인가?

더 읽을거리

- **Seville Chapman, "Catching a baseball"**, *American Journal of Physics* 36 (1968). (야구공 잡기)
- **Michael McBeath, Dennis Shaffer & Mary Kaiser, "How baseball outfielders determine where to run to catch fly balls"**, *Science* 268 (1995). (야구 외야수는 뜬공을 잡기 위해 어디로 달릴지 어떻게 결정하는가)
- **Dennis Shaffer et al., "How dogs navigate to catch Frisbees"**, *Psychological Science* 15 (2004). (개는 프리스비를 잡기 위해 어떻게 길을 찾는가)

안내에 따른 전체 풀이는 제 11.11절에 있다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch11/fielders.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com