11.10 나에게로 되돌아오는 공

학습지

문제

STEP II 2019, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

생각해 보기 왜 OP보다 OP^2을 다루는 것이 더 쉬울까? "OP가 증가한다"는 것은 "OP^2이 증가한다"는 것과 같은가?

1단계 거리의 제곱

다루는 내용: 소문항 (i), OP가 증가하는 경우

생각해 보기 OP 대신 $OP^2 = x^2 + y^2$을 다룬다. 이를 t에 대한 식으로 쓰고 $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$을 이용해 간단히 한다.

잠깐, 직접 해 보기 t에 대해 미분(differentiate)하고 t를 인수로 묶어 낸다. 그러면 t에 대한 이차식(quadratic)이 남는다. 이 이차식이 모든 t에 대해 양수가 되는 것은 언제인가?

2단계 더 가파른 투사

다루는 내용: 소문항 (i), 더 가파르게 던지는 경우

생각해 보기 $\sin\alpha > \frac{2\sqrt{2}}{3}$이면 이차식은 서로 다른 두 실근(real root)을 가진다. 두 근의 합과 곱을 이용해 두 근이 모두 양수임을 보인다. 작은 근은 입자(particle)가 땅에 떨어지기 전인가?

3단계 움직이는 관찰자

다루는 내용: 소문항 (ii)

생각해 보기 Q는 $(-vt, 0)$에 있으므로 수평 거리는 $x + vt$이다. QP^2을 써 본다. 이것은 OP^2과 어떻게 다른가? 판별식(discriminant)을 이용한 논증을 다시 적용한다.

숨은 수학

기하학적 관점

OP는 P의 속도(velocity)가 "안쪽"을 향할 때, 즉 벡터 $\overrightarrow{OP}$와 둔각(obtuse angle)을 이룰 때, 다시 말해 $\overrightarrow{OP} \cdot \mathbf{v} < 0$일 때 정확히 그때에만 감소한다. 가파르게 던지면 비행의 꼭대기 근처에서 입자는 던진 사람의 높은 위쪽, 약간 앞에 있으며, 거의 수평으로 멀어지고 있지만 떨어지기 시작한다. $\overrightarrow{OP}$의 방향을 기준으로 속도의 아래쪽 성분이 바깥쪽 성분보다 커지면 입자는 가까워진다. 완만하게 던지면 입자는 항상 충분히 앞쪽에 있으므로 속도가 O 쪽을 향하는 일이 결코 없다. 임계 경우는 속도가 정확히 한순간 $\overrightarrow{OP}$에 수직(perpendicular)이 되는 경우이며, 이때가 그림 11.10.1 (온라인 전체 절에 수록)에서 거리가 멈추는 순간이다.

단조성은 저절로 주어지지 않는다

"당연히" 증가할 것 같은 많은 양이 실제로는 그렇지 않다. 지구와 달 사이의 거리는 진동한다. 구불구불한 길 위의 두 자동차 사이의 거리는 한 차가 항상 앞서 있더라도 줄어들 수 있다. 먹이가 늘어나는 동안에도 포식자의 개체 수는 줄어들 수 있다. 어떤 양이 단조임을 증명한다는 것은 보통 도함수의 부호가 일정함을 보이는 것이고, 여기서 쓴 기법(다항식으로 바꾼 뒤 그 근이나 판별식을 확인하는 것)이 이를 위한 표준적인 방법이다. 해석학(analysis)에서 단조성은 수렴(convergence)을 증명하는 열쇠가 되는 경우가 많다. 2장에서 보았듯이, 유계(bounded)인 단조 수열(sequence)은 수렴한다.

더 도전하기

1 **얼마나 가까워지는가?** $\alpha = 80°$일 때 OP가 극대와 극소가 되는 시각과 그때의 거리를 u^2/g 단위로 구하라.

2 **경사면 위에서.** 수평면과 각 β를 이루는 경사면 위쪽으로 공을 던져 경사면에 떨어지는 경우에 대하여 (i)번 문항을 다시 풀어라. (경사면으로부터 잰) 임계각은 달라지는가?

3 **공기 저항이 있을 때.** 공이 속도에 비례하는 저항도 받는다고 하자. 계산하지 않고, 임계각이 $70.5°$보다 클 것이라고 예상하는가, 작을 것이라고 예상하는가? 그 이유는 무엇인가?

4 **높은 곳에서 던지기.** 공을 절벽 꼭대기에서 던져 훨씬 아래에 떨어진다면, 어떤 각도로 던지든 OP가 결국에는 증가함을 보이고, 어느 단계에서 OP가 감소하는 각도가 있는지 알아보라.

더 읽을거리

- **James Walker, *The Flying Circus of Physics*** (Wiley). 일상에서 만나는 놀라운 물리 퍼즐 수백 개를 담고 있다.
- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics*** (Cambridge University Press), 3장. 포물체(projectile)를 다루며, 직관에 어긋나는 문제가 여러 개 있다.
- **J. M. Steele, *The Cauchy–Schwarz Master Class*** (Cambridge University Press). 어떤 것이 다른 것보다 항상 크다는 것을 증명하는 기술을 다룬다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 11.10절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch11/coming-back.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com