11.1 공명

학습지

문제

STEP II 1991, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/91-s2-q12

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

? **생각해 보기** 입자는 늘어난 길이(extension)가 c인 상태로 평형(equilibrium)을 이루며 매달려 있다. 끈의 탄성계수(modulus)가 λ이면 λ, a, c, m, g 사이에는 어떤 관계가 있는가? 위쪽 끝이 $b\sin pt$만큼, 입자가 x만큼 아래로 움직였을 때 늘어난 길이는 얼마인가?

1단계 운동 방정식

다루는 내용: 운동 방정식

? **생각해 보기** 아래쪽을 양의 방향으로 잡는다. 위쪽 끝이 $b\sin pt$만큼, 입자가 x만큼 아래로 움직였을 때 늘어난 길이(extension)는 얼마인가? 뉴턴(Newton)의 제2법칙을 쓰고, 평형 조건(equilibrium condition)을 이용하여 mg를 소거한다.

2단계 풀기

다루는 내용: $x(t)$ 구하기

생각해 보기 방정식을 $\ddot{x} + n^2 x = n^2 b \sin pt$ 꼴로 쓴다. 특수해(particular integral) $x = C \sin pt$를 시도한 다음, 여함수(complementary function)를 더한다.

잠깐, 직접 해 보기 입자는 평형 상태에서 정지한 채로 출발하므로 $x(0) = 0$이고 $\dot{x}(0) = 0$이다. 이 조건을 이용하여 두 상수를 구한다.

3단계 팽팽하게 유지되기

다루는 내용: 줄이 팽팽하게 유지되는 조건

생각해 보기 늘어난 길이 $c + x - b\sin pt$가 양수일 때 줄은 팽팽하다(taut). 이를 t에 대한 식으로 쓰고 간단히 정리한다.

잠깐, 직접 해 보기 $p\sin pt - n\sin nt$는 최대 얼마나 작은 음수가 될 수 있는가? 이를 이용하여 늘어난 길이가 항상 양수로 유지되는 조건을 구한다.

숨은 수학

공명 극한

해에서 $p \to n$으로 보내 보자. 분자와 분모가 모두 0으로 수렴하는데, 극한 계산(또는 p에 대하여 미분하는 로피탈(l'Hôpital)의 정리)을 하면

$$x(t) \to \frac{b}{2}(\sin nt - nt\cos nt).$$

을 얻는다. 항 $nt\cos nt$는 한없이 커진다. 정확히 고유진동수로 구동하면 매번 미는 힘이 운동과 박자를 맞추어 더해지므로 진폭이 시간에 대해 선형으로 증가한다. 공명보다 조금 아래에서는 두 진동수가 박자가 맞았다 어긋났다 하면서 **맥놀이**(beats)가 생긴다. 진폭이 느

린 진동수 $n - p$로 커졌다 잦아들기를 반복하는 것이다(그림 11.1.1). 거의 같은 음으로 조율된 두 기타 줄에서도 같은 맥놀이가 들린다.

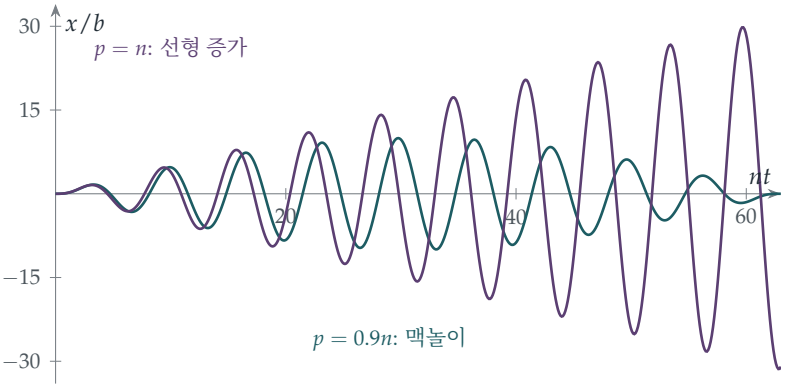

그림 11.1.1 입자의 응답(끈이 느슨해지는 것은 무시함)을 흔드는 진폭 b를 단위로 나타낸 그래프. $p = 0.9n$일 때(청록색) 응답은 b의 약 10배까지 커졌다가 다시 잦아들며, 맥놀이 주기는 $\frac{2\pi}{n-p}$이다. 정확한 공명 상태인 $p = n$일 때(자주색) 진폭은 한없이 커진다.

감쇠와 공명 곡선

실제 계는 마찰이나 공기 저항으로 에너지를 잃고, 이 때문에 진폭의 증가가 제한된다. 감쇠(damping)가 있으면 진동수 p의 구동력에 대한 정상 상태(steady-state) 응답의 진폭은 고유진동수 근처에서 최대가 된다. 봉우리가 뾰족할수록 감쇠가 작다. 공학자들은 이를 **품질 계수**(quality factor) Q로 나타낸다. 대략 말하면, 계가 에너지의 대부분을 잃기 전까지 진동하는 횟수이다. 와인 잔의 Q는 수천에 이르므로, 정확히 고유진동수의 음을 지속해서 내면 잔이 깨질 수 있다. 자동차의 서스펜션은 일부러 Q를 낮게 만들어 요철을 지나도 차가 계속 튀지 않게 한다.

움직이는 다리

1831년, 맨체스터 근처의 브로턴 현수교(Broughton Suspension Bridge)를 발맞추어 행진하던 군인들의 대열이 다리를 진동시켜 결국 무너뜨렸다. 그 뒤로 군대는 다리 위에서 발을 맞추지 말라는 명령을 받게 되었다. 2000년 6월에 개통한 런던 밀레니엄 브리지(Millennium Bridge)는 사람들이 건너자마자 옆으로 흔들리기 시작했다. 보행자들이 무의식적으로 흔들림에 발걸음을 맞추어 박자에 맞게 에너지를 공급했기 때문이며, 다리는 감쇠 장치를 설치하는 2년 동안 폐쇄되었다. 1940년의 유명한 타코마 내로스 다리(Tacoma Narrows Bridge) 붕괴는 흔히 공명으로 설명되지만, 실제로는 바람의 힘이 다리 자체의 운동에 따라 달라지는 다른 현상인 **공기탄성 플러터**(aeroelastic flutter)였다. 이를 분석하려면 자려 진동(self-excited oscillation)과 리밋 사이클(limit cycle)의 개념이

필요하다(Section 8.4).

더 도전하기

1 **떨어지는 엘리베이터.** STEP II 1996, 11번 문제 (step.maths.org/questions/96-s2-q11)에 도전해 보자. 가속하기 시작했다가 가속을 멈추는 엘리베이터 안에서 탄성 끈에 매달린 질량에 관한 문제이다. 최종 진폭이 가속 지속 시간에 따라 어떻게 달라지는지 살펴보자.

2 **공명 상태.** 특수해 $x = Ct\cos nt$를 시도하여, $x(0) = \dot{x}(0) = 0$인 $\ddot{x} + n^2x = n^2 b\sin nt$를 직접 풀어라. 그 결과가 위의 극한과 일치하는지 확인하여라.

3 **맥놀이.** $n\sin pt - p\sin nt$를 두 항의 합으로 쓸 수 있고, p가 n에 가까울 때 그중 한 항이 근사적으로 $2n\cos\frac{(n+p)t}{2}\sin\frac{(p-n)t}{2}$임을 보여라. 이를 이용하여 맥놀이 주기 $\frac{2\pi}{n-p}$를 설명하여라.

4 **감쇠가 있는 공명.** 작은 $k > 0$에 대하여 $\ddot{x} + 2k\dot{x} + n^2x = F\cos pt$의 정상 상태 진폭을 구하고, 이 진폭이 $p^2 = n^2 - 2k^2$일 때 최대임을 보여라.

더 읽을거리

- **A. P. French, *Vibrations and Waves*** (MIT Introductory Physics Series). 강제 진동과 공명을 다룬 4장은 고전적인 설명이다.
- **Steven Strogatz, *Sync*** (Penguin). 반딧불이에서 밀레니엄 브리지까지, 사물이 어떻게 박자를 맞추게 되는지를 다룬다.
- **Henry Petroski, *To Engineer Is Human*** (Vintage). 역사 상자에 나온 다리들을 포함하여 공학의 실패 사례를 다룬다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 11.1절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch11/resonance.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com