10.8 삼각형을 이룬 세 별

학습지

문제

STEP I 1999, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/99-s1-q11

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

? **생각해 보기** 별 하나가 반지름 R인 원 위를 각속도(angular velocity) ω로 움직이려면 그 별에 작용하는 힘의 합은 어떠해야 하는가?

1단계 기하

다루는 내용: 세 별

? **생각해 보기** 한 변의 길이가 a인 정삼각형(equilateral triangle)의 각 꼭짓점은 중심에서 얼마나 떨어져 있는가? 중심이 각 중선(median)을 꼭짓점으로부터 3분의 2 되는 지점에 있다는 사실을 이용한다.

2단계 한 별에 작용하는 힘

다루는 내용: 세 별

잠깐, 직접 해 보기 나머지 두 별은 각각 한 변을 따라 크기 $\frac{\gamma m^2}{a^2}$의 힘으로 끌어당긴다. 두 인력 사이의 각은 얼마인가? 두 힘의 합력(resultant)을 구하고, 그 방향이 어디를 향하는지 말해 본다.

3단계 각속도

다루는 내용: 세 별

생각해 보기 R를 중심까지의 거리라 할 때 합력을 $m\omega^2 R$와 같다고 놓고 ω에 대하여 푼다. 이렇게 구한 ω가 각속도(angular velocity)이다.

4단계 중심에 놓인 네 번째 별

다루는 내용: 중심에 네 번째 별을 추가하기

> **생각해 보기** 중심에 있는 별은 알짜힘(net force)을 받는가? 이 별은 꼭짓점에 있는 각 별을 얼마만큼 더 끌어당기는가? 이 힘을 합력에 더하고 다시 ω에 대하여 푼다.

숨은 수학

모습을 바꾼 케플러 법칙

답을 $\omega^2 a^3 = \gamma(3m)$로 써 보자. 거리 a만큼 떨어져 원 궤도를 도는 두 물체에 대해 케플러 제3법칙(Kepler's third law)(Section 10.6의 연습문제)은 $\omega^2 a^3 = \gamma(m_1 + m_2)$, 즉 전체 질량을 준다. 세 별도 전체 질량을 $3m$으로 하여 같은 법칙을 따른다. 사실 라그랑주는 질량이 같은 경우뿐 아니라 **임의의** 세 질량에 대해서도 정삼각형 해가 존재함을 보였다. 이때 삼각형은 질량중심을 중심으로 $\omega^2 a^3 = \gamma(m_1 + m_2 + m_3)$를 만족하며 회전한다. 오일러(Euler)는 그보다 몇 년 앞서 세 물체가 회전하는 한 직선 위에 놓이는 두 번째 해의 족을 발견했다. (이름 붙이는 방식의 차이를 무시하면) 이 다섯 가지 배치, 즉 공선(collinear) 배치 세 가지와 삼각형 배치 두 가지가 세 물체가 같은 모양을 유지하는 유일한 경우이다.

라그랑주 점

m_1을 태양, m_2를 행성, m_3을 아주 작은 소행성이라 하자. 정삼각형 해에 따르면 소행성은 태양 및 행성과 정삼각형을 이루는 세 번째 꼭짓점, 즉 궤도에서 행성보다 앞이나 뒤에 머무를 수 있다. 이 지점들이 **라그랑주 점**(Lagrange points) L_4와 L_5이며, 오일러의 공선 해는 L_1, L_2, L_3을 준다. 목성의 L_4와 L_5 점 주변에는 알려진 것만 만 개가 넘는 "트로이" 소행성이 모여 있다. 제임스 웹 우주 망원경은 태양–지구 L_2 점 근처, 지구 너머 1.5백만 km 떨어진 곳을 돌고 있으며, 그곳에서는 태양, 지구, 달을 모두 차광막 뒤쪽에 둘 수 있다.

안정성

별을 만드는 이들(Starmakers)의 삼각형은 오래 유지될까? 질량이 같으면 그렇지 않다. 아주 작은 교란도 점점 커져서 별들은 흩어지거나 충돌한다. 에드워드 라우스(Edward Routh)는 1875년 라그랑주의 삼각형이 한 질량이 압도적으로 클 때에만 안정(stable)하다는 것, 정확히는

$$27(m_1m_2 + m_2m_3 + m_3m_1) < (m_1 + m_2 + m_3)^2.$$

일 때에만 안정하다는 것을 보였다. 태양과 목성에 대해서는 이 조건이 넉넉히 성립하며, 그래서 트로이 소행성들이 살아남는다. 질량이 같은 세 별에 대해서는 $27 \times 3m^2 > 9m^2$이므로 이 배치는 불안정하다.

푸앵카레의 실수와 8자 궤도

1887년 스웨덴 국왕 오스카르 2세(King Oscar II)는 다체 문제의 해에 상금을 걸었다. 앙리 푸앵카레는 1889년 삼체 문제에 관한 긴 논문으로 상을 받았지만, 논문이 인쇄되는 동안 한 편집자가 허점을 발견했다. 이를 바로잡는 과정에서 푸앵카레는 어떤 해들이 "너무나 놀랍도록 복잡해서 그려 볼 엄두조차 낼 수 없는" 거동을 보인다는 사실을 발견했다. 이것이 혼돈을 처음 엿본 순간이다. 이미 인쇄된 사본들은 푸앵카레의 비용으로 회수되어 폐기되었다. 새로운 특수해는 지금도 발견되고 있다. 1993년 Cristopher Moore는 질량이 같은 세 물체가 8자 모양의 곡선을 따라 서로를 쫓아 돌 수 있음을 수치적으로 발견했고, 2000년 Alain Chenciner와 Richard Montgomery가 이를 증명했다. 그 뒤로 컴퓨터를 이용해 수천 개의 주기 궤도가 더 발견되었다.

더 도전하기

1 **정사각형을 이루는 네 별.** 질량 m인 네 별이 한 변의 길이가 a인 정사각형의 꼭짓점에 놓여 있다. 이 별들이 $\omega^2 = \frac{(4+\sqrt{2})\gamma m}{2a^3}$로 중심 둘레를 모양을 유지한 채 회전할 수 있음을 보여라.

2 **질량이 같은 두 별과 행성 하나.** 질량 M인 두 별이 거리 a만큼 떨어져 질량중심 둘레를 돈다. 질량을 무시할 수 있는 행성 하나가 중심에 놓여 있다. 이 행성은 평형(equilibrium) 상태인가? 두 별을 잇는 직선을 따른 작은 변위에 대해 안정한가? 그 직선에 수직인 방향의 변위에 대해서는 어떠한가?

3 **질량이 다른 경우.** 질량이 m_1, m_2, m_3인 세 별이 한 변의 길이가 a인 정삼각형의 꼭짓점에 놓여 질량중심 G 둘레를 회전한다. m_1에 작용하는 중력이 $\frac{\gamma m_1(m_1+m_2+m_3)}{a^3}\overrightarrow{P_1G}$임을 보여라. 여기서 P_1은 m_1의 위치이다. (**힌트:** 힘을 벡터로 쓰고 질량중심의 정의를 이용하라.) 이로부터 라그랑주의 결과를 이끌어 내라.

4 n**개의 별.** 질량이 같은 n개의 별이 반지름 R인 원에 내접하는 정n각형의 꼭짓점에 놓여 있다. 모양을 유지한 채 회전하기 위한 ω^2을 $\frac{1}{\sin(k\pi/n)}$의 k에 대한 합으로 나타내라.

더 읽을거리

- **June Barrow-Green,** ***Poincaré and the Three Body Problem*** (American Mathematical Society). 상금 이야기와 푸앵카레가 혼돈을 발견한 과정을 다룬다.
- **Richard Montgomery, "A new solution to the three-body problem",** *Notices of the American Mathematical Society* 48 (2001). 8자 궤도를 발견자 중 한 사람이 직접 설명한다. 온라인에서 무료로 볼 수 있다.
- **Florin Diacu & Philip Holmes,** ***Celestial Encounters*** (Princeton University Press). 삼체 문제와 혼돈의 역사를 다룬 대중서이다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 10.8절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch10/three-stars.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com