10.7 구 껍질 안의 중력

학습지

문제

STEP III 1999, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/99-s3-q9

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

? **생각해 보기** 고리에서 지름의 양 끝에 서로 마주 보는 작은 두 조각을 생각하자. 이 두 조각이 입자에 작용하는 힘을 그려 보자. 어떤 성분은 상쇄되고, 어떤 성분은 더해지는가?

1단계 고리

다루는 내용: 고리

? **생각해 보기** 고리(ring)의 모든 부분은 입자(particle)로부터 같은 거리에 있고, 입자와 그 부분을 잇는 선분은 축(axis)과 같은 각을 이룬다. 작은 조각 하나가 입자를 끌어당기는 힘의 축 방향 성분(component)은 얼마인가? 그것들을 모두 더한다.

2단계 껍질을 고리로 자르기

다루는 내용: 껍질

생각해 보기 입자를 축 위, 중심으로부터 거리 b인 곳에 놓는다. 중심에서의 각 ϕ를 기준으로 껍질(shell)을 얇은 고리들로 자른다. 각 고리의 반지름, 축 방향으로 입자까지의 거리, 그리고 그 질량은 각각 얼마인가?

3단계 알맞은 변수

다루는 내용: 껍질

잠깐, 직접 해 보기 분모(denominator)에 $a^2 - 2ab\cos\phi + b^2$가 들어 있다. 이것을 s^2이라 하자. s는 무엇을 나타내는가? 적분변수(variable of integration)를 ϕ에서 s로 바꾼다. 적분 구간(limits)은 어떻게 되는가?

4단계 사라진다

다루는 내용: 껍질

> **생각해 보기** s에 대한 적분을 계산하고 정리한다.

숨은 수학

뉴턴의 원뿔 논증

뉴턴 자신의 증명(**프린키피아**, 제1권, 명제 70)에는 적분이 전혀 쓰이지 않는다. 입자를 꼭짓점으로 하는 좁은 이중 원뿔을 그리면, 이 원뿔은 껍질을 작은 두 조각으로 잘라 낸다(그림 10.7.1). 두 조각의 넓이는 입자로부터의 거리의 제곱 r_1^2과 r_2^2에 비례한다(현은 양 끝에서 원과 같은 각으로 만나므로, 두 조각은 원뿔과 같은 각을 이룬다). 따라서 두 조각의 질량은 r_1^2과 r_2^2에 비례하고, 질량을 거리의 제곱으로 나눈 값에 비례하는 두 조각의 인력은 크기가 같고 방향이 반대이다. 입자를 지나는 모든 이중 원뿔에서 힘이 상쇄되므로 전체 힘은 0이다. 바로 역제곱 법칙(inverse-square law) 덕분에 이러한 상쇄가 일어난다. 거리의 다른 거듭제곱을 따른다면 껍질은 입자를 밀거나 끌어당길 것이다.

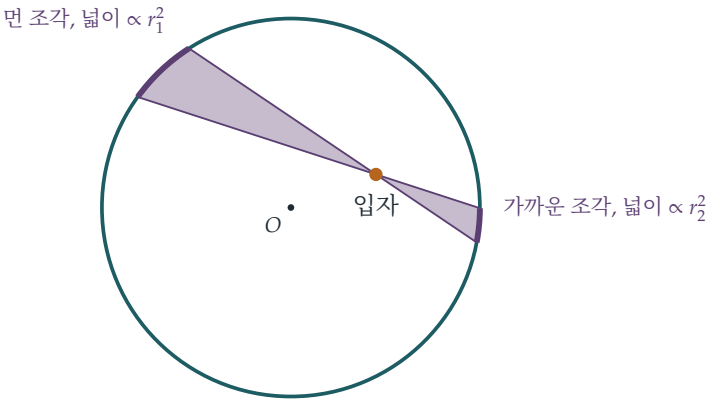

그림 10.7.1 뉴턴의 논증. 입자에서 뻗어 나간 가는 이중 원뿔이 껍질을 두 조각으로 잘라 낸다. 먼 조각은 거리의 제곱의 비만큼 더 크지만, 그 인력은 정확히 같은 비만큼 더 약하다. 두 인력은 상쇄되고, 다른 모든 쌍도 마찬가지이다. 껍질 내부에서 중력은 사라진다.

붕괴하는 구름

STEP III 1987 Q14는 이 정리를 반대 방향으로 이용한다. 균일한 구의 바깥에서, 표면에 있는 입자에 작용하는 인력은 전체 질량이 중심에 있는 것처럼 GMm/r^2이다. 이제 정지해 있는 반지름 R, 질량 M인 균일한 구 모양의 먼지 구름을 생각하고, 이 구름이 자체 중력으로 붕괴하게 하자. 표면의 입자는 자신보다 안쪽에 있는 질량만 느끼는데, 모든 것이 안쪽으로 떨어지므로 이 질량은 계속 M이다. 따라서 안쪽으로 향하는 속력 $v = -\dot{r}$는 다음을 만족한다.

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -\frac{GM}{r^2}, \qquad \text{따라서} \qquad v^2 = 2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right).$$

$r = R\cos^2\alpha$로 치환하면(연습 문제 중 하나이다) 반지름 r에 이르기까지 걸리는 시간은 $\sqrt{\frac{R^3}{2GM}}\left(\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)$이다. 구름 전체는 $\alpha = \frac{\pi}{2}$일 때 한 점으로 붕괴하며, 이는 다음 **자유 낙하 시간**(*free-fall time*)이 지난 뒤이다.

$$t_{\mathrm{ff}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R^3}{2GM}} = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho}},$$

여기서 ρ는 밀도이다. 놀랍게도 이 시간은 밀도에만 의존하므로, 구름의 모든 껍질이 같은 순간에 중심에 도달한다(그림 10.7.2). 세제곱미터당 약 10^{-17} kg인 전형적인 성간 구름의 경우 t_{ff}는 약 700 000년이며, 이것이 별이 형성되는 시간 규모를 정한다.

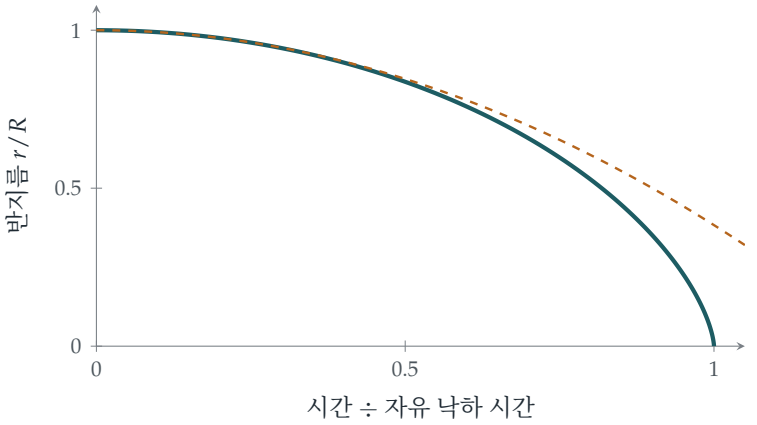

그림 10.7.2 붕괴하는 균일한 먼지 구름의 반지름을 시간에 대하여 나타낸 그래프(청록색). 처음에는 떨어뜨린 돌처럼 천천히 시작하고(호박색 점선 포물선은 등가속도 근사 $r = R - \frac{1}{2}\frac{GM}{R^2}t^2$이다), 그다음 급격히 빨라져서 $t = t_{\text{ff}}$일 때 0에 이른다. 이 곡선은 사이클로이드(cycloid)의 절반이다.

뉴턴의 지연과 가우스 법칙

뉴턴은 1660년대에 이미 역제곱 법칙을 알고 있었지만, 중력 이론은 1687년에야 발표했다. 일부 역사가들에 따르면 그 이유 중 하나는, 껍질 정리를 증명하기 전까지는 지구를 질점으로 취급하는 것을 정당화할 수 없었기 때문이다. 일단 증명하고 나자 **프린키피아**의 나머지 내용이 뒤따랐다. 오늘날 이 정리는 **가우스**(*Gauss*) **법칙**(*Gauss's law*)의 간단한 결과이다. 가우스 법칙은 임의의 닫힌곡면을 통해 바깥으로 흘러 나가는 중력장의 총량이 그 안의 질량에 비례한다는 법칙이다. 껍질 내부에 중심이 같은 구를 하나 잡자. 이 구는 질량을 하나도 둘러싸지 않으므로, 이 구를 통과하는 총 흐름은 0이다. 이것만으로 장이 0이 되지는 않지만(균일한 장은 한쪽으로 흘러 들어와 다른 쪽으로 흘러 나가므로, 어떤 닫힌곡면을 통과하는 총 흐름도 0이다), 여기서는 대칭성이 도움이 된다. 장은 중심을 곧장 향하거나 중심에서 곧장 멀어지는 방향이어야 하고, 구 위의 모든 곳에서 세기가 같아야 하므로, 총 흐름이 0이라는 것은 장이 0이라는 뜻이다. 같은 법칙이 전기장도 지배한다. 그래서 대전된 금속 껍질 내부에는 전기장이 없고, 자동차가 번개로부터 우리를 보호해 준다.

더 도전하기

1 **껍질의 바깥.** 잠깐 생각하기 상자의 내용을 완성하라. 즉, 껍질의 바깥에서 힘이 $\frac{GM}{b^2}$임을 보여라. 이로부터 질량 M인 속이 찬 균일한 구가 바깥의 입자를, 질량이 모두 중심에 있는 것처럼 끌어당김을 이끌어 내라.

2 **붕괴 시간.** STEP III 1987, 14번 문제 (step.maths.org/questions/87-s3-q14)에 도전해 보라. 먼지 구름이 자체 중력으로 붕괴하는 데 걸리는 시간을 구하는 문제이며, 삼각치환으로 적분을 계산할 수 있다.

3 **지구를 관통하는 터널.** 속이 찬 균일한 구의 내부에서, 중심으로부터 거리 b인 곳의 힘이 b에 비례하는 $\frac{GMb}{a^3}$임을 보여라. 이로부터 지구 중심을 지나는 터널에 떨어뜨린 공이 주기 $2\pi\sqrt{a^3/(GM)}$, 약 84분으로 진동함을 이끌어 내라. 이는 지표면을 스치듯 도는 인공위성의 주기와 같다.

4 **다른 힘의 법칙.** 중력이 역세제곱 법칙을 따른다면, 껍질 내부의 힘은 여전히 0일까? ($\frac{1}{s^2}$ 대신 $\frac{1}{s^3}$을 넣어 3단계를 다시 해 보라.)

더 읽을거리

- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*** (Cambridge University Press). 껍질 정리를 포함한 중력에 관한 장들.
- **찬 드 라 세 카 르(Subrahmanyan Chandrasekhar), *Newton's Principia for the Common Reader*** (Oxford University Press). 명제 70과 71을 포함한 뉴턴의 증명들을 노벨상 수상자가 해설한 책.
- **Andrew Pontzen, *The Universe in a Box*** (Riverhead). 중력, 붕괴, 시뮬레이션이 우주의 구조를 어떻게 설명하는지 다룬 책.

안내에 따른 전체 풀이는 제 10.7절에 있다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch10/shell-theorem.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com