10.6 두 물체가 하나가 되다

학습지

문제

STEP III 2004, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/04-s3-q11

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

> ? **생각해 보기** 각 입자에 대해 뉴턴의 제2법칙을 써 보라. 각 힘은 어느 방향으로 작용하는가?

1단계 두 입자 사이의 거리

다루는 내용: z에 대한 방정식

> ? **생각해 보기** P와 Q 각각에 대하여 뉴턴(Newton)의 운동 제2법칙(Newton's second law)을 세운다. 이때 각 힘의 방향에 주의한다. 그런 다음 두 식을 빼서 z만의 방정식을 얻는다.

2단계 거리에 대한 에너지

다루는 내용: z 구하기

생각해 보기 $\ddot{z} = v\frac{dv}{dz}$로 쓰고, 변수를 분리(separation of variables)하여 적분(integration)한다. $t = 0$일 때 z와 $\dot{z}$의 값은 무엇인가?

3단계 뜻밖에 간단한 해

다루는 내용: z 구하기

잠깐, 직접 해 보기 답은 z^2에 관한 것이므로 $w = z^2$으로 놓는다. $\dot{w}^2$을 w로 나타낸 다음 미분한다. $\ddot{w}$는 무엇인가? w와 $\dot{w}$의 초기값을 이용한다.

4단계 질량중심

다루는 내용: x_1과 x_2 구하기

생각해 보기 두 운동 방정식(equations of motion)을 더하여 힘이 상쇄되도록 한다. 이로부터 $2x_1 + x_2$에 대하여 무엇을 알 수 있는가? 이것을 $x_2 - x_1 = z$와 결합한다.

숨은 수학

z^2이 이차식인 이유

$\ddot{z} = k/z^3$ 꼴의 어떤 힘의 법칙에 대해서도, 같은 계산으로 $\frac{d^2}{dt^2}(z^2) = 2\dot{z}^2 + 2z\ddot{z} = 2\dot{z}^2 + \frac{2k}{z^2} =$ 상수를 얻는다. $\frac{1}{2}\dot{z}^2 + \frac{k}{2z^2}$이 보존되는 에너지이기 때문이다. 따라서 z^2은 언제나 t에 대한 이차식이다. 왜 그럴까?

숨은 이유는 이렇다. **평면** 위에서 자유롭게, 즉 일정한 속력으로 직선을 따라 움직이는 입자를 생각하자. $r^2 = (x_0 + at)^2 + (y_0 + bt)^2$이므로 원점으로부터의 거리 r는 $r^2 =$ (이차식, 변수는t)를 만족한다. 그리고 극좌표(polar coordinates)에서 이 입자의 지름 방향 운동 방정식은 $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0$이다. 각운동량(angular momentum) $h = r^2\dot{\theta}$가 일정하므로 이 방정식은 다음이 된다.

$$\ddot{r} = \frac{h^2}{r^3}.$$

역세제곱 척력은 정확히 숨은 회전 운동의 **원심**(centrifugal) 효과이다. 우리 문제에서 $z^2 = 4t^2 - 2t + 1 = (2t - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$은 원점에서 거리 $\frac{\sqrt{3}}{2}$만큼 떨어져 지나가는 직선 위를 속력 2로 움직이는 점의, 원점으로부터의 거리의 제곱이다. 서로 밀어내는 일차원의 두 입자는 이차원 자유 운동의 그림자이다.

이체 문제

이 문제의 방법은 두 물체 사이의 힘이 상대 거리에만 의존하고 두 물체를 잇는 직선을 따라 작용하기만 하면, 일차원뿐 아니라 삼차원에서도 통한다. 질량중심은 등속으로 움직이고,

상대 위치 벡터(vector) $\mathbf{r}$는 $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$에 대해 $\mu\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$를 따른다. 중력의 경우 이것이 뉴턴이 *Principia*에서 푼 **케플러 문제**(Kepler problem)이다. 상대 위치는 타원, 포물선 또는 쌍곡선을 그린다. 지구와 태양은 둘 다 공통의 질량중심 둘레를 도는데, 이 점은 태양 내부에 있다. 지구와 달은 지구 중심에서 약 4700 km 떨어진 점 둘레를 도는데, 이 점은 지구 내부에 있지만 중심에서 꽤 떨어져 있으며, 그래서 지구는 한 달 주기로 흔들린다. 천문학자들은 별에서 바로 이 흔들림을 검출하여 다른 별 둘레의 행성을 찾는다.

적분가능계

1969년 Francesco Calogero는 직선 위의 많은 입자가 역제곱 퍼텐셜(즉 역세제곱 힘)로 서로 밀어내는 계를 연구하여, 놀랍게도 이 계가 입자의 개수와 상관없이 정확히 풀린다는 것을 발견했다. 1975년 Jürgen Moser는 시간에 따라 변해도 고윳값(eigenvalue)이 일정하게 유지되는 행렬, 곧 Section 7.7의 **락스 쌍**(Lax pairs)을 이용하여 그 이유를 설명했다. *Calogero–Moser* **계**(Calogero–Moser system)는 이제 **적분가능계**(integrable system), 즉 완전히 풀 수 있을 만큼 보존량이 충분히 많은 계의 중심적인 예이며, 역학을 무작위 행렬, 양자장론, 솔리톤 이론과 연결한다.

더 도전하기

1 **끈으로 연결된 두 질량.** STEP III 2023, 9번 문제 (OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 시험지 묶음, www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip)을 풀어 보라. 끈으로 연결된 두 입자를 따라가며, 질량중심을 이용해 운동을 분리한다. 한 입자가 언제 뒤로 움직이는지 살펴보라.

2 **인력.** 인력 $\frac{2}{z^3}$으로 이 문제를 다시 풀어 보라. z^2이 여전히 t에 대한 이차식임을 보이고, 두 입자가 언제 충돌하는지 구하라.

3 **숨은 평면.** 이 문제의 운동에 대해, 원점으로부터의 거리가 $z(t)$인 평면 위의 직선과 쓸고 지나간 각 $\theta(t)$를 구하라. $z^2\dot{\theta}$가 일정하고 $(z^2\dot{\theta})^2 = 3$임을 확인하라.

4 **케플러의 제3법칙.** 질량이 m_1, m_2인 두 별이 서로 거리 a만큼 떨어져 중력에 의해 질량중심 둘레를 원운동한다. 주기 T가 $T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m_1+m_2)}$을 만족함을 보여라.

더 읽을거리

- **John Taylor, *Classical Mechanics*** (University Science Books), 8장. 이체 문제, 환산질량, 궤도.
- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*** (Cambridge Univer-

sity Press), 10장, 중심력에 관한 내용.

- **Francesco Calogero,** ***Classical Many-Body Problems Amenable to Exact Treatments*** (Springer). 의욕 있는 독자를 위한 책으로, 정확히 풀리는 계의 세계를 다룬다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 10.6절에 있다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch10/two-body.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com