10.5 유한한 시간 동안 무한 번 튀어 오르기

학습지

문제

STEP III 2002, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/02-s3-q11

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

생각해 보기 입자가 반발계수 e인 매끄러운 벽에 부딪힐 때, 속도의 벽 방향 성분은 어떻게 되는가? 벽에 수직인 성분은 어떻게 되는가?

1단계 출발 각

다루는 내용: e와 v_1/u_1 구하기

생각해 보기 입자가 벽 OA와 각 φ를 이루며 M_1을 떠난다고 하자. 삼각형 OM_1N_1의 세 각을 더하여 φ를 θ로 나타내어라.

잠깐, 직접 해 보기 매끄러운 벽에서는 벽에 평행한 속도 성분(component of velocity)은 변하지 않고, 벽에 수직인 성분에는 반발계수(coefficient of restitution) e가 곱해진다. 이 사실과 각 θ, φ를 이용하여 e와 v_1/u_1을 구하여라.

2단계 반복되는 패턴

다루는 내용: 유한한 시간 안에 O에 도달하기

생각해 보기 N_1에서 입자는 벽 OB와 어떤 각을 이루며 부딪히는가? M_1에서 일어난 일과 비교해 보아라. 그 뒤의 모든 충돌에서는 어떤 일이 일어나는가?

3단계 두 비

다루는 내용: 유한한 시간 안에 O에 도달하기

잠깐, 직접 해 보기 삼각형 OM_1N_1에서 사인법칙(sine rule)을 이용하여, 경로의 각 구간이 바로 앞 구간보다 몇 배로 짧아지는지 구하여라. 속력은 충돌할 때마다 v_1/u_1배가 된다. 각 구간을 지나는 데 걸리는 시간은 몇 배로 변하는가?

4단계 등비급수

다루는 내용: 유한한 시간 안에 O에 도달하기

? **생각해 보기** 전체 시간은 등비급수(geometric series)이다. 공비가 0과 1 사이에 있는 것은 언제인가? $\sin X - \sin Y = 2\cos\frac{1}{2}(X+Y)\sin\frac{1}{2}(X-Y)$를 이용하여라.

숨은 수학

$\theta \geq 60°$일 때

$\theta = 60°$이면 비가 정확히 1이다. 모든 구간에 같은 시간이 걸리므로, 입자는 O에 한없이 가까워지기는 하지만 결코 도달하지 못한다. (속력과 구간의 길이가 같은 비율로 줄어들기 때문이다.) $\theta > 60°$이면 구간을 지나는 시간이 점점 길어진다. 어느 경우든 입자는 O에 가까워지며 무한히 많이 튕기지만, 유한한 시간 안에 도달하는 것은 $\theta < 60°$일 때뿐이다. 값 $e = \tan 30° / \tan 60° = \frac{1}{3}$이 그 경계이다.

튀는 공과 비탄성 붕괴

같은 현상의 가장 간단한 예는 다음과 같다. 바닥에 떨어뜨린 공은 높이 e^2H까지 올라가고, 그다음에는 e^4H까지 올라가며, 이런 식으로 계속된다. 튕김 사이의 시간은 각 튕김에서의 속력에 비례하고, 이 속력은 매번 e배로 줄어들므로 총시간은 등비급수가 된다. 첫 낙하에 걸리는 시간을 $T_0 = \sqrt{2H/g}$라 하면, 공은

$$T_0 + 2eT_0 + 2e^2T_0 + \cdots = T_0\,\frac{1+e}{1-e}.$$

뒤에 튀기를 멈춘다. 무한히 많이 튄 다음 정지하는 것이다. 1992년 Sean McNamara와 William Young은 한 직선 위에 놓인 많은 비탄성 입자의 시뮬레이션에서도 같은 일이 일어남을 보였다. 입자 무리가 유한한 시간 안에 무한히 많은 충돌을 겪을 수 있는데, 이것이 "비탄성 붕괴"이다. 모래와 입상 흐름의 시뮬레이션에는 이를 피하기 위한 특별한 규칙이 들어

가야 하며, 이 현상은 입상 기체가 저절로 덩어리를 이루는 이유를 설명하는 데 도움이 된다.

제논과 수렴

기원전 450년 무렵에 나온 제논의 역설은 이천 년 동안 철학자들을 괴롭혔다. 무한한 합이 유한한 값을 가질 수 있다는 수학적 해결은 19세기에 이르러서야 엄밀해졌는데, 이때 코시(Cauchy), 바이어슈트라스(Weierstrass) 등이 극한(제2장의 주제)을 이용하여 수렴을 정의하였다. 이 문제의 놀라운 점은 과정이 **물리적으로** 무한하다는 것이다. 유한한 시간 안에 실제로 무한히 많은 충돌이 일어난다. 다각형 안의 당구(billiards)와 충돌하는 입자의 운동을 연구하는 수학자들은 이러한 거동을 **제논 현상**(*Zeno phenomenon*)이라 부르며, 이는 충돌하는 단단한 구들의 계가 모든 시간에 대해 잘 정의된 운동을 가진다는 것을 증명할 때 나타나는 미묘한 문제 가운데 하나이다.

더 도전하기

1 **총 이동 거리.** M_1에서 O까지 이동한 총거리가 30°와 90° 사이의 모든 θ에 대해 유한함을 보이고, 이를 OM_1과 θ로 나타내어라.

2 **다른 쐐기.** 30° 대신 각이 α인 쐐기에 대해 문제를 다시 풀어라. $\varphi = \theta - \alpha$임을 보이고, 입자가 유한한 시간 안에 O에 도달하기 위한 θ의 조건을 구하여라.

3 **완전 탄성 벽.** $e = 1$이면 입자가 O에 도달할 수 있는가? (**힌트:** 쐐기를 그 벽에 대해 거듭 대칭이동하여 경로가 직선이 되게 하여라. O 둘레에 30° 쐐기가 몇 개 들어가는가?)

4 **튀는 공.** 공을 높이 1 m에서 $e = 0.8$로 떨어뜨린다. 공은 얼마 동안 튀며, 총 얼마의 거리를 이동하는가? ($g = 9.8\ \mathrm{m\,s^{-2}}$로 하여라.)

더 읽을거리

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics*** (Cambridge University Press), 5장. 튀는 공과 무한히 이어지는 충돌에 관한 문제가 여럿 실려 있다.
- **Sean McNamara & William Young, "Inelastic collapse and clumping in a one-dimensional granular medium"**, *Physics of Fluids A* 4 (1992). (1차원 입상 매질에서의 비탄성 붕괴와 뭉침)
- **Serge Tabachnikov, *Geometry and Billiards*** (American Mathematical Society; 온라인 무료 공개). 연습문제에 나온 펼치기 기법을 포함한 당구의 수학을 다룬다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 10.5절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch10/zeno-wedge.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com