10.4 분자 하나와 피스톤

학습지

문제

STEP I 2002, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/02-s1-q10

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

? **생각해 보기** 속력 w로 움직이는 공이 속력 u로 자신을 향해 다가오는 벽에 부딪혀 탄성적으로(elastically) 튕겨 나온다. 튕겨 나온 뒤 공의 속력은 얼마인가? (벽의 기준틀에서 생각해 보라.)

1단계 n번 튕긴 뒤의 속력

다루는 내용: 속력

? **생각해 보기** 충돌 한 번을 피스톤(piston)의 기준틀(frame of reference)에서 생각해 보자. 충돌 전후에 피스톤에 대한 입자의 상대 속력은 각각 얼마인가? 이를 다시 지면 기준틀로 바꾸면 얼마인가? 고정된 끝에서 튕기는 것은 속력을 바꾸는가?

2단계 길이에 대한 점화식

다루는 내용: 거리

잠깐, 직접 해 보기 n번째 충돌과 $(n+1)$번째 충돌 사이의 시간 t_n 동안 피스톤은 얼마나 움직이는가? 입자는 얼마나 이동하는가? 두 값을 모두 d_n과 d_{n+1}로 나타내고, 한쪽을 다른 쪽으로 나누어 t_n을 소거하자.

3단계 망원 소거

다루는 내용: d_n에 대한 공식

생각해 보기 점화식(recurrence relation)을 거듭 적용하여 d_n을 d_1에 분수들의 곱을 곱한 꼴로 나타내자. 무엇이 약분되는가?

4단계 $v = u$인 경우

다루는 내용: $v = u$인 경우

> **생각해 보기** d_n에 대한 공식에 $v = u$를 대입하자. 그다음 $ut_n = d_n - d_{n+1}$을 이용하고 부분분수(partial fractions)로 분해하자.

숨은 수학

단열 불변량

속력에 길이를 곱해 보자.

$$v_n d_n = (v + 2nu) \cdot \frac{v+u}{v+(2n-1)u}\, d_1 \approx (v+u)d_1$$

이 근사는 n이 크거나 u가 v보다 훨씬 작을 때 성립한다. 따라서

$$\text{속력} \times \text{길이} \approx \text{상수}.$$

피스톤이 분자에 비해 천천히 움직이면, 피스톤이 아무리 멀리 움직여도 곱 vd는 거의 변하지 않는다. 이처럼 계를 천천히 변화시킬 때 거의 일정하게 유지되는 양을 **단열 불변량**이라 한다. 일반적으로 왕복 운동의 단열 불변량은 $\oint p\,\mathrm{d}q$, 즉 운동량(momentum)을 한 주기 동안 적분한 값이다. 여기서는 그 값이 $mv \times 2d$이다.

분자 하나에서 기체로

$v \propto 1/d$이므로 운동 에너지 $\frac{1}{2}mv^2$은 $1/d^2$에 비례한다. 한 방향으로 움직이는 많은 분자로 이루어진 기체에서 온도는 평균 운동 에너지에 비례하므로 $T \propto 1/d^2$이다. 즉 길이를 절반으로 줄이면 온도는 네 배가 된다. 3차원에서는 에너지가 세 운동 방향에 나누어지며, 같은 논증(파인먼(Feynman)이 그의 **강의록**에서 제시한다)으로부터 단원자 기체(monatomic gas)의 단열 압축 법칙을 얻는다.

$$TV^{2/3} = \text{상수}, \qquad \text{또는 동치로} \qquad pV^{5/3} = \text{상수}.$$

지수 $\frac{5}{3}$은 단원자 기체의 유명한 비열비(ratio of specific heats) γ이다. 자전거 펌프 속 공기를 부피의 5분의 1로 압축하면, 빠르게 하여 열이 전혀 빠져나가지 않는다고 할 때 절대 온도가 $5^{0.4} \approx 1.9$배로 올라간다(공기 분자는 원자 두 개로 이루어져 있어 대신 $\gamma = 1.4$가 된다). 즉 20°C에서 약 280°C까지 오른다. 펌프가 그만큼 뜨거워지지 않는 것은 오로지 압축이 느리고 열이 새어 나가기 때문이다.

페르미의 우주선

1949년 엔리코 페르미(Enrico Fermi)는 우주에서 엄청난 에너지를 지니고 날아오는 입자인 우주선(cosmic rays)이 바로 이 문제의 분자와 똑같은 방식으로 가속된다고 제안하였다. 성간 기체 구름 속에서 움직이는 자기장에 거듭 튕기면서 매번 에너지를 조금씩 얻는다는 것이다. 오늘날 "페르미 가속(Fermi acceleration)"은 초신성 잔해의 충격파에서 일어나는 것으로 여겨지는데, 그곳에서 입자들은 피스톤과 벽 사이의 분자처럼 충격파를 앞뒤로 가로지른다. 단열 불변량은 양자역학의 탄생에도 한몫을 하였다. 1916년 파울 에렌페스트(Paul Ehrenfest)는 느린 변화로는 계가 양자 상태 사이를 건너뛸 수 없으므로, 양자화되는 양은 단열 불변량이어야 한다고 주장하였다.

더 도전하기

1 **정확한 불변량.** $v_n d_n - (v+u)d_1 = \frac{u(v+u)d_1}{v+(2n-1)u}$임을 보이고, 이로부터 $n \to \infty$일 때 $v_n d_n \to (v+u)d_1$임을 유도하라.

2 **피스톤을 당겨 빼기.** 피스톤을 속력 $u < v$로 빼내는 경우에 대해 문제를 다시 풀어라. 입자가 느려짐을 보이고, $v_n d_n$을 구하라. (팽창하는 기체는 식는다.)

3 **에너지.** $v = u$인 경우, 피스톤이 끝에 가까워질수록 분자의 속력은 한없이 커진다. n번째 주기 동안 피스톤에 작용하는 평균 힘(운동량의 변화를 t_n으로 나눈 값)을 구하고, 그것이 n^3처럼 커짐을 보여라. 이것은 피스톤을 끝까지 밀어 넣는 데 필요한 일에 대해 무엇을 말해 주는가?

4 **튀는 공.** 중력 아래에서 공이 바닥에 탄성적으로 튀고, 바닥을 천천히 들어 올린다. 이 운동의 단열 불변량을 추측해 보라. (**힌트:** vd에 해당하는 것은 평균 속력과 튀어 오르는 높이의 곱, 또는 동치로 에너지와 튀는 사이의 시간의 곱이다.)

더 읽을거리

- **Richard Feynman, Robert Leighton & Matthew Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. I** (온라인 무료 공개), 39장 "The kinetic theory of gases"(기체 운동론). 같은 피스톤 논증을 3차원으로 확장한다.

- **Stephen Blundell & Katherine Blundell, *Concepts in Thermal Physics*** (Oxford University Press). 대학 1학년 수준에서 다루는 단열 과정과 기체 운동론.
- **Lev Landau & Evgeny Lifshitz, *Mechanics*** (Butterworth-Heinemann), §49. 단열 불변량을 간결하게 다룬다. 나중을 위한 책이다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 10.4절에 있다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch10/piston.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com