10.3 로켓과 대포

학습지

문제

STEP III 2017, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/17-s3-q11

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

? **생각해 보기** 대포가 발사되기 전에 트럭은 V로 움직인다. 발사 후 발사체의 속도는 $V - v$이다(즉 뒤쪽으로 속력 $v - V$). **발사 전 트럭에 대한** 발사체의 상대 속도는 얼마인가?

1단계 한꺼번에 발사하기

다루는 내용: 소문항 (i)

? **생각해 보기** 처음에는 모든 것이 정지해 있으므로 전체 운동량(momentum)은 0이다. $V = 0$이면 각 발사체는 속도 $-v$로 떠난다. 운동량 식을 세워 u를 구한 다음, 운동 에너지(kinetic energy)를 모두 더한다.

2단계 하나씩 발사하기

다루는 내용: 소문항 (ii)

잠깐, 직접 해 보기 r번째 발사 직전에 수레(truck)에는 발사체가 몇 개 실려 있는가? 그렇다면 움직이는 질량은 얼마이고, 그 속력은 얼마인가? 발사 직후, 발사된 발사체의 속력은 얼마인가? 운동량 보존(conservation of momentum) 식을 세우고 정리하여 $(*)$를 얻는다.

생각해 보기 $(*)$에서 얻은 증가분 $u_r - u_{r-1}$을 모두 더한다. 각 항을 $\frac{mv}{M}$과 비교한다.

3단계 에너지 계산서

다루는 내용: 소문항 (iii)

생각해 보기 $K_r - K_{r-1}$을 써 본다. 속력이 바뀌는 것은 짐을 실은 수레와 방금 발사된 발사체뿐이다.

잠깐, 직접 해 보기 $u_r^2 - u_{r-1}^2$ 항을 두 제곱의 차(difference of two squares)로 인수분해하고, $(*)$를 이용하여 $(M+(n-r)m)(u_r-u_{r-1})$을 바꾸어 쓴다. 그다음 r에 대해 합하면 증가분들이 연쇄적으로 소거된다(telescope).

숨은 수학

무엇을 고정해야 할까?

실제 대포나 로켓 엔진은 발사체가 떠난 직후에 잰, **자기 자신**에 대한 일정한 상대 속력으로 발사체를 던진다. 이 문제에서는 기준이 **발사 전** 트럭의 속력이다. 발사체가 작으면 그 차이는 아주 작지만, 발사체 n개를 한꺼번에 쏠 때는 차이가 매우 크다. 소문항 (i)에서는 무거운 발사체 더미가 마치 트럭에 반동(recoil)이 전혀 없는 것처럼 속력 v로 뒤로 던져지는데, 여기에는 많은 에너지가 필요하다.

대신 모든 발사체가 **발사 후** 트럭에 대해 속력 v로 떠난다고 하면 결론이 뒤집힌다. 한꺼번

에 쏘면 $u = \frac{nmv}{M+nm}$이고, 하나씩 쏘면 $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{mv}{M+km}$인데, 각 항이 적어도 $\frac{mv}{M+nm}$이므로 이쪽이 더 크다. 이제는 하나씩 쏘는 쪽이 유리하다. 각 발사체는 이미 움직이고 있는 트럭을 밀어내고, 뒤에 발사되는 대포일수록 가속해야 할 질량이 적기 때문이다. (연습문제에서 확인해 보아라.)

로켓 방정식

이제 발사체들의 총질량 $\mu = nm$을 고정한 채 발사체를 아주 작고 아주 많게 하자. 이것은 연료를 연속적으로 태우는 로켓이다. u_n의 합은 적분(integral)이 된다(두 규약 모두 같은 극한(limit)을 준다).

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{mv}{M+km} \;\to\; \int_0^{\mu} \frac{v\,ds}{M+s} = v \ln \frac{M+\mu}{M}.$$

이것이 **치올콥스키의 로켓 방정식**이다. 배기가스가 로켓에 대해 속력 v로 분출되는 로켓이 얻는 속력은

$$\Delta u = v \ln \frac{m_{\text{처음}}}{m_{\text{나중}}}.$$

그림 10.3.1은 세 가지 답을 비교한다. 문제는 로그(logarithm)이다. 배기 속도(exhaust speed)가 약 4.5 km/s(좋은 화학 연료)일 때 약 7.8 km/s의 궤도 속도(orbital speed)에 도달하려면 질량비(mass ratio)가 $e^{7.8/4.5} \approx 5.7$이어야 하고, 공기 저항과 중력까지 고려하면 10 이상에 가까워진다. 로켓의 거의 전부가 연료인 것이다.

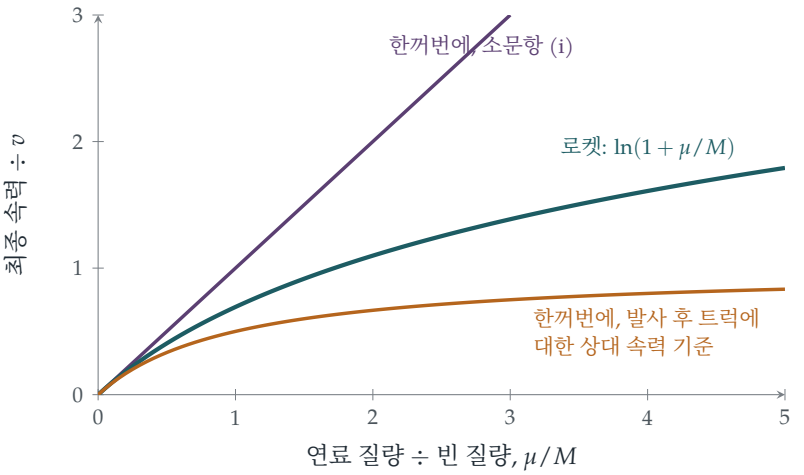

그림 10.3.1 연료 질량과 빈 질량의 비에 따른 최종 속력. 모든 것을 한꺼번에 쏘면 문제의 규약에서는 μ/M(자주색)이지만, 배기 속도를 반동하는 트럭에 대해 재면 $\frac{\mu/M}{1+\mu/M}$(주황색)에 불과하다. 연속적으로 분사하는 로켓은 그 사이인 $\ln(1+\mu/M)$(청록색)에 놓인다. 이 그림은 부등식 $\frac{x}{1+x} \le \ln(1+x) \le x$를 나타낸다.

로켓에 단이 있는 이유

로그는 단 분리(staging)도 설명해 준다. 올라가는 도중에 빈 연료 탱크를 떨어뜨리는 로켓은 더 이상 그 쓸모없는 질량을 가속할 필요가 없다. 연속된 단들이 얻는 속력은 (대포처럼) 더해지는 반면 각 단이 얻는 속력은 그 단의 질량의 비에 따라 정해지므로, 로켓을 여러 단으로 나누면 같은 총질량의 단일 단 로켓으로는 낼 수 없는 속력에 도달할 수 있다. 우주 비행사들을 달에 데려간 새턴 V(Saturn V)는 3단 로켓이었고, 그 1단은 3분이 채 안 되는 동안 약 2000톤의 연료를 태웠다.

치올콥스키

러시아의 지방 도시 칼루가(Kaluga)에서 학교 교사로 일하던 청각 장애인 콘스탄틴 치올콥스키(Konstantin Tsiolkovsky)는 1903년 "반작용 장치를 이용한 우주 공간 탐사(Exploration of outer space by means of reaction devices)"라는 제목의 논문에서 로켓 방정식을 발표했다. 그는 다단 로켓, 액체 수소와 산소 연료, 우주 정거장을 그 어느 것도 실제로 만들 수 있게 되기 수십 년 전에 구상했다. 이 방정식은 그보다 앞서 덜 알려진 곳에 등장한 적이 있지만(William Moore가 1810년에 한 형태를 유도했다), 그것이 우주 비행에 어떤 의미를 갖는지 처음 알아본 사람은 치올콥스키였다. 그는 이렇게 썼다. "지구는 인류의 요람이다. 그러나 사람이 언제까지나 요람 속에서 살 수는 없다."

더 도전하기

1 **다른 규약.** 각 발사체가 발사 후 트럭에 대해 속력 v로 떠난다고 가정하고 소문항 (i)과 (ii)를 다시 풀어 보아라. 이번에는 하나씩 쏘는 쪽이 더 큰 최종 속력을 준다는 것을 보여라.

2 **먼지 구름 속의 혜성.** STEP III 2009, 11번 문제 (step.maths.org/questions/09-s3-q11)에 도전해 보아라. 로켓과 같은 가변 질량(variable-mass) 문제이지만, 혜성은 질량을 잃는 대신 얻는다. 혜성의 속력이 어떤 값으로 다가가는지 눈여겨보아라.

3 **2단 로켓.** 배기 속도가 v이고 빈 질량이 M, 연료 질량이 $9M$인 로켓이 있다. 이 로켓의 최종 속력을 구하여라. 이제 이 로켓을 빈 질량이 각각 $\frac{1}{2}M$이고 연료가 각각 $4.5M$인 두 단으로 나누고, 1단은 연료가 바닥나면 떨어뜨린다고 하자. 두 최종 속력을 비교하여라.

4 **부등식.** 구간 $[0, x]$에서 $\frac{1}{1+s}$를 1 및 $\frac{1}{1+x}$와 비교하여, $x \geq 0$일 때 $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$임을 증명하여라.

더 읽을거리

- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*** (Cambridge University Press), 4장. 운동량, 가변 질량, 로켓 방정식을 다룬다.
- **George Sutton & Oscar Biblarz, *Rocket Propulsion Elements*** (Wiley). 표준적인 공학 교재로, 이 절을 공부한 뒤라면 앞부분의 장들을 읽을 수 있다.
- **Hermann Oberth, *Ways to Spaceflight*** (NASA 번역본, 온라인에서 무료). 선구자가 직접 쓴 기록이다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 10.3절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch10/rockets.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com