10.2 포갠 공 효과

학습지

문제

STEP II 2010, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/10-s2-q10

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

생각해 보기 Section 10.1에서: 속력 u로 움직이는 질량 M이 정지해 있는 질량 m과 탄성 충돌(elastic collision)하면, 충돌 후 m의 속력은 얼마인가?

1단계 속력의 한계

다루는 내용: 소문항 (i)

생각해 보기 운동량 보존(conservation of momentum)과 탄성 충돌(elastic collision)의 조건(또는 움직이는 물체가 정지한 물체에 부딪힐 때의 결과)을 이용하여 A의 속력을 b와 u로 나타낸다.

잠깐, 직접 해 보기 $\frac{2b}{b+1}$을 2에서 어떤 양수를 뺀 꼴로 써 보자. $b \to \infty$일 때 어떻게 되는가?

2단계 사슬을 따라 전달하기

다루는 내용: 소문항 (ii)

생각해 보기 각 입자의 질량은 바로 다음 입자의 λ배이다. 따라서 각 충돌은 $b = \lambda$인 소문항 (i)과 같다. 충돌할 때마다 속력은 몇 배가 되는가?

잠깐, 직접 해 보기 n번 충돌한 뒤의 속력은 u에 그 배율의 n제곱을 곱한 값이다. $\lambda > 1$일 때 그 배율은 1보다 큰가, 작은가?

3단계 **스무 배 빠르게**

다루는 내용: $\lambda = 4$인 경우

> **생각해 보기** $\lambda = 4$이면 $1.6^n > 20$이어야 한다. $1.6 = 16/10$, $20 = 2 \times 10$으로 쓰고 밑이 10인 로그(logarithm)를 취한다.

숨은 수학

농구공과 테니스공

두 공이 높이 H에서 함께 떨어져 속력 $U = \sqrt{2gH}$로 바닥에 닿는다고 하자. 모든 것이 완전 탄성이고 농구공이 훨씬 더 무겁다고 가정한다. 농구공은 바닥에서 위쪽으로 속력 U로 튀어 오르고, 곧바로 여전히 속력 U로 내려오고 있는 테니스공과 만난다. 농구공의 기준틀(frame of reference)에서 보면 테니스공은 $2U$로 다가오고, 매우 무거운 물체에 튕겨 $2U$로 떠난다. 다시 지면의 기준틀로 돌아오면 이는 위쪽으로 $2U + U = 3U$이다(그림 10.2.1). 올라가는 높이는 발사 속력의 제곱에 비례하므로, 테니스공은 $9H$까지 올라간다.

실제 공은 완전 탄성이 아니다. 반발 계수(coefficient of restitution)가 e이고 질량비가 M/m이면, 테니스공은 속력 $\frac{Me(2+e)-m}{M+m}U$로 떠난다. 연습문제에 있는 STEP I 2014 Q10은 측정한 높이로부터 거꾸로 질량비를 구한다.

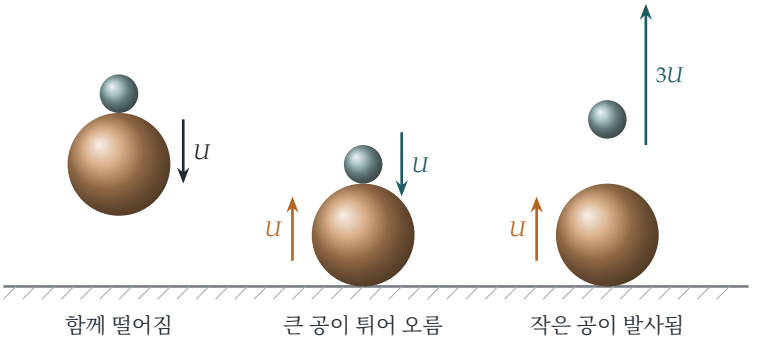

그림 10.2.1 아래쪽 공이 훨씬 무겁고 두 공이 완전 탄성일 때의 쌓인 공 효과. 큰 공은 속력 u로 튀어 올라, u로 내려오는 작은 공과 만난다. 큰 공에 대하여 작은 공은 $2u$로 도착하고 $2u$로 떠나므로, 지면의 기준틀에서는 $3u$로 떠나 처음 높이의 아홉 배에 이른다.

중력 새총 효과

행성 곁을 지나가는 우주 탐사선은 행성에 닿지 않지만, 중력은 매우 무거운 물체와의 아주 부드러운 탄성 충돌처럼 작용한다. 행성의 기준틀에서 탐사선은 행성 주위를 돌아 들어올 때와 같은 속력으로 떠난다. 행성이 속력 V로 탐사선을 향해 움직이고 있다면, 태양의 기준틀에서 탐사선은 테니스공과 꼭 마찬가지로 최대 $2V$만큼 속력을 얻을 수 있다. 1977년에 발사된 두 **보이저**(*Voyager*) 탐사선은 드물게 찾아온 외행성들의 정렬을 이용하여 목성에서 토성으로(**보이저 2호**는 다시 천왕성과 해왕성으로) 나아갔고, 만날 때마다 속력을 얻었다. 이러한 중력 도움(gravity assist)이 없었다면 해왕성까지의 여정은 12년이 아니라 약 30년이 걸렸을 것이다. 에너지는 행성에서 오며, 행성은 측정할 수 없을 만큼 아주 조금 느려진다.

슈퍼볼과 초신성

1968년 W. R. Mellen은 *American Journal of Physics*에서 크기가 점점 작아지는 공 여러 개를 쌓아 만든 "슈퍼볼 반동 발사체"를 소개하고, 맨 위의 공이 충돌 속력의 몇 배나 되는 속력으로 발사될 수 있음을 지적하였다. 천체물리학자들은 이것이 핵붕괴 초신성(core-collapse supernova)과 대략적으로 닮았다고 지적해 왔다. 별의 바깥층이 안쪽으로 떨어지다가 단단하고 밀도 높은 중심핵에 부딪혀 되튀고, 충격파(shock wave)가 운동량(momentum)을 점점 밀도가 낮아지는 물질 속으로 바깥쪽으로 실어 날라 그 물질을 엄청난 속력으로 가속한다. 쌓인 공 효과의 시연은 학생들에게 이 아이디어를 설명하는 데 쓰이지만, 실제 초신성에는 튀는 공보다 훨씬 많은 물리학이 관여하며, 중성미자(neutrino)도 그중 하나이다.

더 도전하기

1 **실제 상황.** STEP I 2014, 10번 문제 (step.maths.org/questions/14-s1-q10)을 풀어 보자. 실제 수치와 불완전한 튕김을 다루는 쌓인 공 문제이다.

2 **비탄성 사슬.** STEP I 2017, 10번 문제 (step.maths.org/questions/17-s1-q10)을 풀어 보자. 질량이 등비수열로 커지는 입자들의 사슬을 따라 충돌을 전달하는 문제이다. 각 입자가 정확히 두 번의 충돌에 관여하는 것은 언제인가?

3 **공 세 개.** 완전 탄성인 공 세 개를 쌓되, 각 공은 그 아래의 공보다 훨씬 가볍다. 맨 위의 공이 $7U$로 떠나 $49H$까지 올라감을 보여라. 공이 k개이면 맨 위의 공이 $(2^k - 1)U$로 떠남을 보여라.

4 **에너지는 어디에서 오는가?** 소문항 (ii)에서 A의 속력은 유계가 아니지만 전체 운동 에너지(kinetic energy)는 보존됨을 보여라. 무거운 입자들은 어떻게 되는가?

더 읽을거리

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics*** (Cambridge University Press), 쌓인 공 문제가 실린 5장.
- **W. R. Mellen, "Superball rebound projectiles"**, *American Journal of Physics* 36 (1968). 짧고 재미있다.
- **Gary Flandro, "Fast reconnaissance missions to the outer solar system utilizing energy derived from the gravitational field of Jupiter"**, *Astronautica Acta* 12 (1966). 보이저의 "그랜드 투어"를 제안한 논문이다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 10.2절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch10/stacked-balls.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com