10.1 뉴턴의 요람

학습지

문제

STEP II 1990, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/90-s2-q14

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

생각해 보기 질량이 m이고 속력 u로 움직이는 구슬이 정지해 있는 질량 M의 구슬에 부딪히고, 운동 에너지(kinetic energy)가 보존된다. 충돌 후의 속도는 각각 얼마인가? $M = m$이면 어떻게 되는가?

1단계 마지막 두 구슬만 움직이는 경우

다루는 내용: 소문항 (i)

생각해 보기 충돌 후에 A_n과 A_{n+1}만 움직인다고 가정하자. 운동량 보존(conservation of momentum)과 운동 에너지(kinetic energy) 보존의 식을 써 보자. 이 식들은 질량이 m과 λm인 두 물체 사이의 한 번의 충돌을 나타내는 식과 같다.

잠깐, 직접 해 보기 A_n의 속도를 구해 보자. $\lambda > 1$이면 A_n은 어느 방향으로 움직이는가? 그 바로 뒤에는 무엇이 있는가?

2단계 세 구슬

다루는 내용: 소문항 (ii)

생각해 보기 이번에는 A_{n-1}, A_n, A_{n+1}만 각각 속도 a, b, c로 움직인다. A_{n-1} 뒤에 정지해 있는 구슬은 어느 것인가? 어떤 구슬도 앞에 있는 구슬을 지나칠 수 없으므로, 0, a, b, c 사이에는 어떤 부등식이 성립하는가?

잠깐, 직접 해 보기 운동량 식을 제곱한 다음 에너지 식을 빼 보자. $\lambda > 1$일 때 각 항의 부호는 무엇인가? 그로부터 어떤 결론이 강제되는가?

3단계 움직일 수 있는 두 구슬

다루는 내용: 소문항 (iii)

생각해 보기 소문항 (ii)의 논증에 따르면 움직이는 구슬이 모두 앞으로 나아가는 결과는 불가능하다. 따라서 어떤 구슬은 뒤로 움직여야 한다. 뒤에 아무것도 없는 구슬은 어느 것인가? 그 구슬과 A_{n+1}만 움직인다고 놓고 시도해 보자.

숨은 수학

왜 공 하나가 튀어 나오는가

같은 공들로 이루어진 뉴턴의 요람에서 공 k개가 함께 속력 w로 떠난다고 하자. 운동량 보존에서 $kw = u$이고 에너지 보존에서 $kw^2 = u^2$이다. 나누면 $w = u$이고 $k = 1$이다. 따라서 떠나는 공들이 함께 움직이는 결과 중에서 두 법칙을 모두 만족하는 것은 "공 하나가 처음 속력으로 떠나는 것"뿐이다. 공 두 개가 절반의 속력으로 떠나면 운동량은 맞지만 에너지는 절반뿐이고, 공 하나가 두 배의 속력으로 떠나면서 운동량이 맞으려면 그 공이 반쪽짜리 공이어야 한다.

그러나 이것으로 문제가 해결되지는 않는다. 공이 n개이면 미지의 속도는 n개인데 보존 법칙은 두 개뿐이므로, 두 법칙을 모두 만족하는 결과는 무수히 많다(세 공이 서로 다른 속력으로 움직이는 결과를 하나 찾아보라). 실제로 어떤 결과가 일어나는지는 접촉하는 동안 공이 어떻게 변형되는지에 달려 있다. 1980년대 초 Frank Herrmann과 동료들은 우리에게 익숙한 현상이 충격이 **퍼지지 않고** 줄을 따라 전달되는 데 달려 있으며, 이는 단단한 강철 공들 사이에 아주 작은 틈이 있을 때 일어난다는 것을 보였다. 공이 무르거나 공들이 서로 꽉 눌려 있으면 요람은 덜 깔끔하게 움직이며, 정밀하게 측정해 보면 다른 공들도 늘 조금씩 움직인다.

보존 법칙과 대칭

보존 법칙은 어디에서 오는가? 1918년 에미 뇌터(Emmy Noether)는 현대 물리학의 토대 중 하나가 된 정리를 증명했다. 물리계의 모든 연속적인 대칭(symmetry)에는 보존되는 양이 하나씩 대응한다는 것이다. 물리 법칙이 여기에서나 1미터 왼쪽에서나 같다면(공간 평행이동에 대한 대칭) 운동량이 보존된다. 오늘이나 내일이나 같다면(시간 평행이동에 대한 대칭) 에너지가 보존된다. 모든 방향에서 같다면(회전 대칭) 각운동량(angular momentum)이 보존된다. 뇌터 정리는 대학 2학년의 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics) 과목에서 배우게 되며, 이 장에서는 그 결과를 곳곳에서 사용한다.

하위헌스, 렌, 윌리스

1668년 왕립학회(Royal Society)는 물체의 충돌 문제에 대한 해답을 공모했다. 존 윌리스(John Wallis)는 비탄성 충돌(inelastic collision)을 다루었고, 크리스토퍼 렌(Christopher Wren)과 크리스티안 하위헌스(Christiaan Huygens)는 각자 독립적으로 탄성 충돌의 경우를 풀었다. 하위헌스의 핵심 통찰은 기준틀을 바꾸는 것이었다. 질량중심(centre of mass)과 함께 움직이는 배 위에서 충돌을 바라보면, 같은 두 공은 속력이 그대로 반대 방향으로 바뀌어 튕겨 나갈 뿐이다. 그런 다음 다시 강가의 기준틀로 변환하면 된다. 그는 또한 어떤 양, 곧 질량과 속력의 제곱을 곱한 것의 합이 충돌 전후에 같다는 것도 알아차렸다. 다만 운동 에너지가 그 자체로 보존되는 양으로 인정받기까지는 그 후로 한 세기가 더 걸렸다.

더 도전하기

1 **같은 문제 다시 보기.** STEP I 2006, 11번 문제 (step.maths.org/questions/06-s1-q11)을 풀어 보라. 홈통 안에 입자들이 한 줄로 놓여 있고 끝에 더 무거운 입자가 있다. 가능한 최종 상태는 무엇인가?

2 **충돌을 따라가기.** 소문항 (iii)의 충돌을 A_0이 A_1에 부딪히는 것으로 시작하는, 두 구슬 사이의 개별 충돌이 차례로 일어나는 과정으로 모형화하라. 이 과정을 끝까지 따라가서 소문항 (iii)에서 구한 운동으로 끝난다는 것을 보여라.

3 **두 공을 보내기.** 같은 공 다섯 개로 이루어진 요람에서 공 두 개를 함께 놓아 나머지 세 공에 속력 u로 부딪히게 한다. "공 두 개가 속력 u로 떠난다"는 결과가 두 보존 법칙을 모두 만족함을 보이고, 두 법칙을 만족하는 다른 결과를 하나 찾아라.

4 **가벼운 끝.** $\lambda < 1$일 때 두 구슬 사이의 충돌이 차례로 일어나는 과정을 따라가 보라. A_n과 A_{n+1} 이외의 구슬 중에 결국 움직이게 되는 것이 있는가?

더 읽을거리

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics*** (Cambridge University Press), 5장. 운동량 보존과 에너지 보존을 다루며, 충돌에 관한 문제가 많이 실려 있다.
- **Frank Herrmann & Peter Schmälzle, "Simple explanation of a well-known collision experiment"**, *American Journal of Physics* 49 (1981). 뉴턴의 요람이 왜 그렇게 작동하는지 설명한다.
- **Dwight Neuenschwander, *Emmy Noether's Wonderful Theorem*** (Johns Hopkins University Press). 대칭과 보존 법칙 사이의 관계를 알기 쉽게 설명한다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 10.1절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch10/newtons-cradle.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com