1.8 유리수 세기

학습지

문제

STEP III 2020, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2020년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

생각해 보기 무엇이든 증명하기 전에 처음 열다섯 항 정도를 계산해 보자. 비 u_n / u_{n+1}에 대해 무엇을 알 수 있는가?

1단계 홀수 번째가 짝수 번째를 이긴다

다루는 내용: 소문항 (i)

생각해 보기 $(u_k, u_{k+1}) = (a, b)$이면 (u_{2k}, u_{2k+1})과 (u_{2k+1}, u_{2k+2})를 a와 b로 나타내면 무엇인가?

생각해 보기 $n \geq 2$인 쌍 (u_n, u_{n+1})은 위치 $k = \lfloor n/2 \rfloor$에 있는 쌍에서 나온다. $n = 2k$인 경우와 $n = 2k+1$인 경우를 따로 다룬다.

잠깐, 직접 해 보기 각 경우에 쌍의 한 항은 $u_k + u_{k+1}$이다. 이 항이 왜 다른 항보다 큰가? 모든 항이 양수라는 사실을 이용한다.

2단계 연속한 두 항은 서로소이다

다루는 내용: 소문항 (ii)

생각해 보기 d가 u_{2k}와 u_{2k+1}을 나누면 d는 또 무엇을 나누어야 하는가? u_{2k+1}과 u_{2k+2}에 대해서도 같은 방법으로 생각한다.

잠깐, 직접 해 보기 따라서 어떤 쌍의 공약수(common factor)는 더 앞에 있는 쌍의 공약수이기도 하다. 1보다 큰 공약수를 갖는 첫 번째 쌍을 잡고 모순(contradiction)을 찾는다.

3단계 어떤 쌍도 두 번 나타나지 않는다

다루는 내용: 소문항 (iii)

생각해 보기 가장 먼저 반복되는 쌍 (a, b)를 잡는다. 이 쌍이 $(1, 1)$일 수 있는가?

잠깐, 직접 해 보기 소문항 (i)에 따르면 a와 b를 비교하면 그 위치가 홀수인지 짝수인지 알 수 있다. 이를 이용해 두 복사본을 모두 한 단계 뒤로 돌려 더 앞에서 반복되는 쌍을 얻는다.

4단계 서로소인 쌍은 모두 나타난다

다루는 내용: 소문항 (iv)

생각해 보기 왜 $a - b$와 b는 서로소(coprime)인가? 이 둘의 공약수는 또 무엇을 나누는가?

잠깐, 직접 해 보기 수열의 어딘가에서 $a - b$ 다음에 b가 온다면, 그 뒤에 어떤 쌍이 나타나겠는가? $a < b$인 경우에는 두 수의 역할을 바꾼다.

5단계 모든 분수의 목록

다루는 내용: 소문항 (v)

생각해 보기 모든 양의 유리수(rational number)는 p와 q가 서로소인 p/q 꼴로 쓸 수 있다. (p, q)가 연속한 쌍으로 나타남을 보여야 한다.

잠깐, 직접 해 보기 서로소인 어떤 쌍이 한 번도 나타나지 않는다고 가정하고, 그런 쌍 가운데 합이 가장 작은 것을 고른다. 소문항 (iv)에서 모순이 나온다. 그다음 소문항 (ii)와 (iii)으로부터 f가 같은 값을 두 번 갖지 않음을 알 수 있다.

숨은 수학

Calkin–Wilf 트리

양의 분수를 트리 모양으로 배열하자. 맨 위에 $\frac{1}{1}$을 놓고, 각 분수 $\frac{a}{b}$에 두 자식, 즉 왼쪽에 $\frac{a}{a+b}$, 오른쪽에 $\frac{a+b}{b}$를 준다. 트리를 한 줄씩 왼쪽에서 오른쪽으로 읽으면 정확히 이 문제의 목록 $f(1), f(2), f(3), \ldots$이 된다(그림 1.8.1). 3단계는 모든 분수가 유일한 부모를 가진다는 것이고, 4단계는 모든 분수가 트리 안에 있다는 것이다. 2003년에 Moshe Newman은 트리조차 필요 없다는 것을 발견했다. 목록의 각 분수는 바로 앞의 분수로부터 다음과 같

이 계산할 수 있다.

$$x_{n+1} = \frac{1}{2\lfloor x_n \rfloor - x_n + 1}.$$

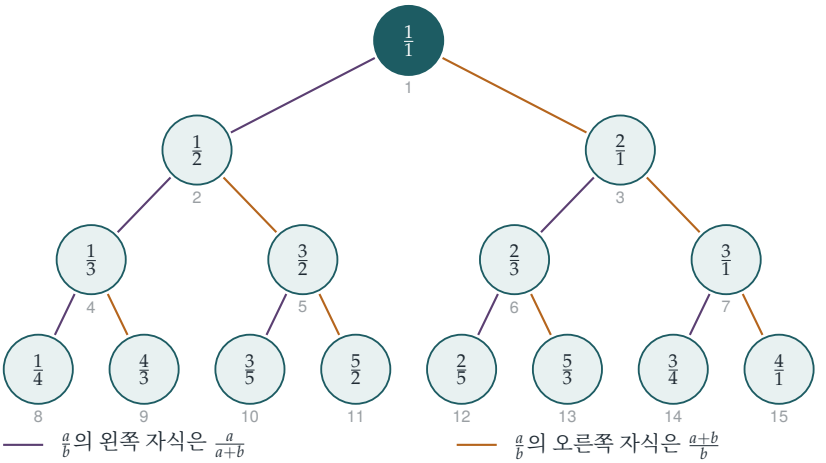

그림 1.8.1 Calkin–Wilf 트리의 처음 네 줄. 한 줄씩 왼쪽에서 오른쪽으로 읽으면 $f(1), f(2), f(3), \ldots$이 된다. 작은 회색 숫자는 위치 n이다. 모든 양의 분수가 기약분수로 정확히 한 번씩 나타난다.

무한의 서로 다른 크기

이처럼 나열할 수 있는 집합을 **가산**(countable) 집합이라 한다. 분수는 가산인데, 분수가 자연수보다 훨씬 많아 보이므로 이는 놀라운 일이다. 대학 첫 학기에는 칸토어의 **대각선 논법**(diagonal argument)도 배우게 되는데, 이 논법은 **실수**(real number)가 가산이 아님을 보여 준다. 즉 실수의 어떤 목록이든 반드시 빠뜨리는 실수가 있다. 따라서 무한에는 정말로 서로 다른 크기가 있으며, 실수는 유리수보다 진짜로 더 큰 무한을 이룬다. 이것은 대학 1학년 과정에서 만나게 될 가장 놀라운 결과 중 하나이다.

Stern 수열

수열 u_n은 *Stern*의 **이원자 수열**(Stern's diatomic sequence)이며, 다른 곳에서도 여러 모습으로 등장한다. 예를 들어 u_{n+1}은 각 거듭제곱을 많아야 두 번 사용하여 n을 2의 거듭제곱의 합으로 나타내는 방법의 수이다. 이 수열은 *Stern–Brocot* **트리**(Stern–Brocot tree), 그리고 무리수에 대한 최良의 유리수 근삿값을 주는 연분수(continued fraction)와도 밀접하게 관련되어 있다.

더 도전하기

1 **분수 찾기.** 어떤 n에 대하여 $f(n) = \frac{3}{5}$인가? 또 $f(n) = \frac{5}{3}$인 n은? 부모 규칙을 이용해 $\frac{1}{1}$까지 거슬러 올라가 보라.

2 **Newman의 공식.** $x_1 = 1$에서 시작하여 Newman의 공식이 목록의 처음 열 개의 분수를 만들어 냄을 확인하라.

3 **칸토어의 대각선 논법.** 0과 1 사이의 모든 실수를 소수로 적은 목록이 있다고 하자. 목록의 n번째 수와 n번째 자리가 다른 소수를 만들어라. 이것이 왜 목록이 불완전함을 보여 주는가? ($0.0999\ldots = 0.1$과 같은 소수에는 어떤 주의가 필요한가?)

4 **가산 합집합.** 심화 양의 정수의 모든 쌍 (m, n)의 집합이 가산임을, 양의 정수와의 전단사 함수를 명시적으로 제시하여 보여라. ($2^{m-1}(2n-1)$을 시도해 보라.)

더 읽을거리

- **Neil Calkin & Herbert Wilf, "Recounting the rationals"** (*American Mathematical Monthly*, 2000). 유리수 다시 세기. 네 쪽 분량이며, 전부 읽을 만하다.
- **Aigner & Ziegler, *Proofs from THE BOOK*,** 제 17장 "Sets, functions, and the continuum hypothesis"(집합, 함수, 연속체 가설). Calkin–Wilf 트리를 다룬다.
- **Ian Stewart & David Tall, *The Foundations of Mathematics*** (Oxford University Press). 대학 1학년 과정에서처럼 가산성, 칸토어, 실수를 다룬다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 1.8절에 있다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch01/counting-rationals.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com