1.5 무한 강하법

학습지

문제

STEP III 2022, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

생각해 보기 소문항 (i)에서 $a^3 + 2b^3 + 4c^3 = 0$을 보자. 세 항 가운데 두 항은 분명히 짝수이다. 이것은 나머지 한 항에 대해 무엇을 알려 주는가?

1단계 첫 번째 강하(descent)

다루는 내용: 소문항 (i)

생각해 보기 $a = 2p$로 놓고 식을 정리한다. 새 방정식은 계수(coefficient)의 자리만 바뀌었을 뿐 같은 꼴이다. b에 대해, 이어서 c에 대해 같은 과정을 반복한다.

잠깐, 직접 해 보기 이제 $|p| < |a|$인 해 (p, q, r)를 얻었다. 이것이 왜 해가 전혀 없다는 뜻이 되는가? $|a|$가 가능한 한 가장 작은 해를 생각해 보아라.

2단계 다른 소수

다루는 내용: 소문항 (ii)

생각해 보기 여기서는 2로 나누는 방법이 통하지 않는다. 세 계수 중 두 개를 나누는 소수(prime)는 무엇인가?

잠깐, 직접 해 보기 차례로 대입하면서 3이 b를, 이어서 c를, 그다음 a를 나눔을 보여라. 정확히 같은 방정식으로 되돌아오는가?

3단계 3을 법으로 한(modulo 3) 제곱수

다루는 내용: 소문항 (iii)

생각해 보기 첫 번째 결과: 3의 배수가 아닌 수를 $3n \pm 1$로 쓰고 제곱해 보아라. 제곱수를 3으로 나눈 나머지(remainder)로 가능한 것은 무엇인가?

생각해 보기 그다음 $a^2 + b^2$의 나머지로 가능한 것을 모두 나열해 보아라. 언제 3의 배수가 되는가?

잠깐, 직접 해 보기 이를 이용하여 3이 a와 b를 나누고, 이어서 c도 나눔을 보여라. 그다음 소문항 (i)에서처럼 논증한다.

4단계 반전: 방정식이 바뀐다

다루는 내용: 소문항 (iv)

생각해 보기 4로 나눈 나머지를 생각한다. 짝수의 제곱과 홀수의 제곱은 각각 어떤 나머지를 남기는가?

생각해 보기 a, b, c가 모두 짝수이면 각각을 반으로 나눈다. 새 방정식은 원래 방정식과 같은가?

잠깐, 직접 해 보기 계수가 바뀌므로 더 강한 명제를 증명한다. 즉 $k \geq 2$인 어떤 k에 대해서도 $a^2 + b^2 + c^2 = 2^k abc$의 해가 없음을 보인다. 반으로 나누어도 이 방정식들의 모임 안에 머무는가?

숨은 수학

페르마, 강하법, 그리고 마지막 정리

페르마는 무한 강하법을 이용하여 $x^4 + y^4 = z^2$이 양의 정수해를 갖지 않음을 증명하였다. 이것은 그 유명한 "마지막 정리"(Last Theorem) 가운데 그가 증명을 남긴 유일한 경우이며, $x^n + y^n = z^n$의 $n = 4$인 경우를 해결한다. 이후 오일러(Euler)가 강하법을 써서 $n = 3$인 경우를 증명했는데, 그 증명에 있던 빈틈은 나중에 메워졌다. 강하법은 지금도 현대 이론의 출발점이다. Section 1.9에 나온 것과 같은 곡선에 관한 모델-베유 정리(Mordell–Weil theorem)의 증명은 정교한 강하법이다.

국소적 장애

이 절의 모든 증명은 어떤 수를 법으로 한 나머지를 살펴보는 방식이었다. 어떤 방정식이 어떤 n에 대해 n을 법으로 해를 갖지 않거나 실수해를 갖지 않는다면, 당연히 정수해도 갖지 않는다. 이러한 이유를 **국소적 장애**(local obstructions)라 하며, 대학에 가면 $p, p^2, p^3, \ldots$를 법으로 한 모든 나머지를 한꺼번에 연구하는 방법인 p-**진수**(p-adic numbers)를 만나게 된다.

하세(Hasse)와 민코프스키(Minkowski)의 멋진 정리에 따르면, $a^2 + b^2 = 3c^2$과 같은 **이차 방정식**에서는 국소적 장애가 유일한 장애이다. 즉 실패할 "국소적" 이유가 없다면 실제로 유리수해가 존재한다. 삼차 방정식에서는 이것이 극적으로 무너진다. 1951년 Ernst Selmer는

$$3x^3 + 4y^3 + 5z^3 = 0$$

이 모든 정수를 법으로 해를 갖고 실수해도 갖지만, 0이 아닌 정수해는 갖지 않음을 보였다. "국소-대역" 원리(local-to-global principle)가 언제, 왜 실패하는지 설명하는 것은 현대 정수론의 주요 주제이다.

해를 갖는 방정식

소문항 (iv)에는 유명한 사촌이 있다. 바로 $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$, 곧 **마르코프 방정식**(Markov equation)이다. 이 방정식은 $(1,1,1)$, $(1,1,2)$, $(1,2,5)$, $(1,5,13)$, $(2,5,29)$로 시작하는 양의 정수해를 무한히 많이 가지며, 이 해들은 무리수가 분수로 얼마나 잘 근사될 수 있는지와 관련되어 있다. 연습문제 4를 보라.

더 도전하기

1 **STEP I 준비 운동.** (*STEP I 2010 8*번 문항.) $a^3 + 3b^3 = 9c^3$의 유일한 정수해가 $a = b = c = 0$임을 보여라. 그다음, 일의 자리 숫자를 생각하여 $p^4 + 2q^4 = 5r^4$에 대해서도 같은 사실을 보여라.

2 **강하가 필요 없는 법.** 4를 법으로 생각하는 것만으로 $x^2 + y^2 = 4z + 3$이 정수해를 전혀 갖지 않음을 보여라.

3 **유리점.** 소문항 (iii)을 이용하여 원 $x^2 + y^2 = 3$ 위에 **유리수** 좌표를 갖는 점이 없음을 보여라. ($(1,1)$을 지나는 $x^2 + y^2 = 2$와 비교해 보라.)

4 **마르코프 세쌍.** (x, y, z)가 $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$를 만족하면 $(x, y, 3xy - z)$도 이를 만족함을 보여라. $(1,1,1)$에서 시작하여 위에 나열한 세쌍들을 만들어 보라. (이 "도약" 요령은 강하와 반대 방향이다.)

더 읽을거리

- **Harold Davenport, *The Higher Arithmetic,*** 2장과 5장.
- **Joseph Silverman, *A Friendly Introduction to Number Theory*** (Pearson). 매우 읽기 쉽다. $x^4 + y^4 = z^2$에 대한 페르마의 강하법 증명이 실려 있다.
- **Simon Singh, *Fermat's Last Theorem*** (Fourth Estate). 페르마가 여백에 남긴 메모부터 와일스(Wiles)의 증명까지의 이야기를 일반 독자를 위해 풀어낸 책이다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 1.5절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch01/infinite-descent.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com