1.4 e는 무리수이고, e^2도 그렇다

학습지

이 절에서는 두 문제를 다룬다. 1997년의 첫 번째 문제는 e가 무리수(irrational number)임을 증명(proof)한다. 2024년의 두 번째 문제는 같은 아이디어를 더 교묘하게 변형하여 e^2이 무리수임을 증명하는데, 이것은 실제로 훨씬 어렵다.

준비 문제

STEP III 1997, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/97-s3-q7

본 문제

STEP III 2024, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2024년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

> **생각해 보기** $e = p/q$라고 가정하자. e에 q를 곱하면 정수가 된다. e의 급수의 각 항에 $q!$을 곱하면 어떻게 되는가?

1단계 준비 문제: e는 무리수이다

다루는 내용: 준비 문제, STEP III 1997

생각해 보기 b_n은 등비급수(geometric series)이다. 첫째항과 공비(common ratio)는 무엇이고, 따라서 그 합은 얼마인가?

잠깐, 직접 해 보기 a_n과 b_n을 항별로 비교하라. a_n의 각 분모는 모두 $n+1$ 이상인 인수들의 곱이다. 어느 급수가 더 큰가?

생각해 보기 e의 급수에 $n!$을 곱하라. $1/n!$까지의 항들은 정수(integer)를 준다. 나머지 항들은 어떤 급수를 이루는가? $e = p/q$라면, 어떤 n의 값에서 모순(contradiction)이 생기는가?

2단계 e^2이 더 어려운 이유

다루는 내용: 준비 문제에서 본 문제로 넘어가는 단계, STEP III 2024

? **생각해 보기** 준비 문제의 방법을 $e^2 = \sum \frac{2^r}{r!}$에 적용해 보라. 왜 이번에는 꼬리(tail)가 작아지지 않는가? $e^2 = \frac{p}{q}$라면, qe와 $\frac{p}{e}$에 대해 무엇을 말할 수 있는가?

3단계 두 꼬리

다루는 내용: 본 문제, 소문항 (i)과 (ii)

생각해 보기 소문항 (i)은 준비 문제의 비교를 a_n 대신 $f(n)$으로 다시 하는 것이다.

생각해 보기 $g(n)$의 항들은 부호가 번갈아 바뀐다. 항들이 점점 작아지는가?

잠깐, 직접 해 보기 항들을 두 가지 방법으로 둘씩 묶어라. 첫째 항부터 묶는 방법과 둘째 항부터 묶는 방법이다. 각각의 묶음에서 부등식(inequality) 하나씩을 얻는다.

4단계 다시 정수

다루는 내용: 본 문제, 소문항 (iii)

생각해 보기 $e = \sum_{r \geq 0} \frac{1}{r!}$로 쓰고 $m!$을 곱하라. 여기서 $m = 2n$이다. 어떤 항들이 정수가 되는가?

생각해 보기 남은 항들, 즉 $r > m$인 항들의 합은 무엇인가? 이를 $f(m)$의 정의와 비교하라.

잠깐, 직접 해 보기 $\frac{1}{e} = \sum_{r \geq 0} \frac{(-1)^r}{r!}$에 대해서도 같은 일을 하라. 꼬리를 $g(m)$과 맞출 때 $m = 2n$이 짝수라는 것이 왜 중요한가?

5단계 모순

다루는 내용: 본 문제, 소문항 (iv)와 (v)

생각해 보기 소문항 (iii)을 이용하여 $f(2n)$과 $g(2n)$을 각각 정수에 e 또는 $\frac{1}{e}$의 배수를 더하거나 뺀 꼴로 나타내라.

잠깐, 직접 해 보기 이것들을 $q\,f(2n) + p\,g(2n)$에 대입하라. $qe = \frac{p}{e}$는 어디에서 쓰이는가?

생각해 보기 $e^2 = \frac{p}{q}$라고 가정하자. 그러면 소문항 (iv)는 모든 n에 대해 성립한다.

잠깐, 직접 해 보기 소문항 (i)과 (ii)는 $q\,f(2n) + p\,g(2n)$을 0과 작은 값 사이에 끼워 넣는다. 그 정수가 0과 1 사이에 엄격하게 놓이려면 n이 얼마나 커야 하는가?

숨은 수학

e는 얼마나 무리수인가?

리우빌(Joseph Liouville)은 1840년에 e^2이 무리수임을, 더 나아가 정수 계수(coefficient)를 갖는 어떤 이차방정식(quadratic equation)도 만족하지 않음을 증명하였다. 1873년 에르미트(Charles Hermite)는 훨씬 더 나아가 e가 **초월수**(*transcendental number*)임을, 즉 정수 계수를 갖는 **어떤** 다항식(polynomial)의 근도 아님을 증명하였다. 그의 증명은 바로 위의 논증, 즉 정수를 만들고 그것이 0과 1 사이에 엄격하게 놓임을 보이는 논증을 정교하게 발전시킨 것이다. 9년 뒤 린데만(Ferdinand von Lindemann)은 에르미트의 방법을 응용하여 π가 초월수임을 보였고, 이로써 자와 컴퍼스로 "원을 정사각형으로 만드는" 고대의 문제가 불가능하다는 것이 마침내 증명되었다.

아직 모르는 것

이 방법들이 이토록 강력한데도, 민망할 정도로 간단한 질문들이 여전히 풀리지 않은 채 남아 있다. $e+\pi$는 무리수인가? $e\pi$는? 둘 중 적어도 하나는 초월수여야 하지만(연습문제 4), 아무도 모른다. $\zeta(3) = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \cdots$은 무리수인가? 그렇다. 아페리(Roger Apéry)가 1978년에 이를 증명하여 수학계를 놀라게 하였다. $\zeta(5)$는? 아무도 모른다.

근사

이 증명들의 바탕에는 더 깊은 아이디어가 있다. 어떤 수가 분수로 **지나치게 잘** 근사된다면 그 수는 무리수라는 것이다. e의 급수의 부분합(partial sum)은 매우 빠르게 e에 아주 가까워지는 분수들이다. 분수는 다른 분수들로 그만큼 잘 근사될 수 없다. 이것이 **디오판토스 근**

사(*Diophantine approximation*)의 출발점이다. 이 수론의 분야는 Section 2.9에서 더 탐구할 수 있는데, 그곳에서는 다른 적분들의 모임이 e에 더욱 가깝게 다가가는 분수들을 만들어 낸다.

더 도전하기

1 **$1/e$만 이용하기.** $1/e = p/q$라고 가정하고 $1/e$의 교대급수만을 이용하여 e가 무리수임을 증명하라.

2 **$\sin 1$은 무리수이다.** $\sin 1 = 1 - \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{5!} - \cdots$을 이용하여 $\sin 1$이 무리수임을 증명하라. (적당한 홀수의 계승을 곱하라.)

3 **π는 왜 안 되는가?** 이 방법이 π에 직접 적용되지 않는 이유를 설명하라. 그런 다음 급수 대신 적분을 이용하여 π가 무리수임을 보인 Ivan Niven의 한 쪽짜리 증명(1947)을 찾아보라. 실력 있는 A 레벨(A level, 영국의 대학 입학 자격 시험) 학생이라면 충분히 이해할 수 있다.

4 **둘 중 하나는 초월수이다.** 심화 e와 π가 $x^2 - (e+\pi)x + e\pi = 0$의 근임을 보여라. 계수가 대수적 수(algebraic number)인 다항식의 근은 그 자체로 대수적 수이며, π는 대수적 수가 아니라는 사실(린데만)을 가정해도 좋다. 이로부터 $e+\pi$와 $e\pi$ 중 적어도 하나는 초월수임을 이끌어 내라.

더 읽을거리

- **Aigner & Ziegler, *Proofs from THE BOOK***, 제8장 "Some irrational numbers"(몇 가지 무리수). 바로 이 아이디어들을 이용하여 e, e^2, e^4, π^2이 무리수임을 증명한다.
- **Ivan Niven, *Irrational Numbers*** (Mathematical Association of America). $\sqrt{2}$부터 초월성까지 모든 것을 다루는 짧은 고전이다.
- **Julian Havil, *The Irrationals*** (Princeton University Press). 무리수의 역사를 읽기 쉽게 풀어 쓴 책이다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 1.4절에 있다:

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch01/e-irrational.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com