1.3 가장 작은 반례

학습지

문제

STEP III 2015, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/15-s3-q5

힌트

먼저 혼자 힘으로 문제를 풀어 보자. 막히면 힌트를 **하나씩** 읽고, 힌트를 하나 읽을 때마다 다시 문제로 돌아가자. **잠깐, 직접 해 보기**라고 표시된 힌트가 핵심 단계이다. 각 힌트 뒤에는 풀이를 적을 공간이 있다.

> ? **생각해 보기** 4단계에서는 "k를 S에 속하는 가장 작은 양의 정수로 정의한다"고 한다. 왜 그렇게 할 수 있을까? S가 양의 **실수**의 집합이라도 이렇게 할 수 있을까?

1단계 3단계: S는 공집합이 아니다

다루는 내용: 소문항 (i)

> ? **생각해 보기** $\sqrt{2} = p/q$라면, $\sqrt{2}$에 곱했을 때 정수(integer)가 되는 양의 정수는 무엇인가?

2단계 5단계: 더 작은 원소

다루는 내용: 소문항 (i)

생각해 보기 $n = (\sqrt{2}-1)k$에 대하여 두 가지 사실이 필요하다. n은 양의 정수이고, $n\sqrt{2}$는 정수이다. 정수 m에 대하여 $k\sqrt{2} = m$이라 쓰고, n과 $n\sqrt{2}$를 모두 k와 m으로 나타내어라.

3단계 6단계: 모순(contradiction)

다루는 내용: 소문항 (i)

잠깐, 직접 해 보기 $\sqrt{2}-1$은 얼마나 큰가? $(\sqrt{2}-1)k$를 k와 비교하고, 4단계에서 k를 어떻게 골랐는지 떠올려라.

4단계 세제곱근(cube root): 두 수 연결하기

다루는 내용: 소문항 (ii)

생각해 보기 $a = 2^{1/3}$이라 하자. a가 유리수(rational)이면 a^2도 유리수인가? a^2이 유리수이면, a를 a^2과 $a^3 = 2$를 이용하여 나타낼 수 있는가?

5단계 논증 고쳐 쓰기

다루는 내용: 소문항 (ii)

생각해 보기 $\sqrt{2}-1$을 $a-1$로 바꾸어 소문항 (i)을 그대로 따라 해 보아라. 어디에서 그대로 따라 하는 것이 무너지는가?

잠깐, 직접 해 보기 더 많은 것을 기억하는 집합을 사용하라. na와 na^2이 **모두** 정수가 되는 양의 정수 n들의 집합이다. 이 집합이 공집합이 아님(non-empty)을 확인하고, k가 이 집합에 속할 때마다 $(a-1)k$도 이 집합에 속함을 확인하라.

숨은 수학

그림으로 그릴 수 있는 증명

소문항 (i) 뒤에는 Stanley Tennenbaum이 고안한 아름다운 그림이 있다. $\sqrt{2}=a/b$이면 $a^2=2b^2$이다. 즉 한 변이 a인 정사각형의 넓이는 한 변이 b인 정사각형 두 개의 넓이와 같다. 그림 1.3.1처럼 두 개의 b-정사각형을 a-정사각형의 서로 마주 보는 모서리에 놓자. 둘은 작은 정사각형 하나에서 겹치고, 작은 정사각형 두 개를 덮지 못한 채 남긴다. 넓이가 같으므로 겹친 부분은 덮이지 않은 두 정사각형을 합한 것과 넓이가 같아야 하고, 따라서 같

은 성질을 가진 **더 작은** 정수 쌍이 생긴다. 점점 더 작은 쌍이 끝없이 이어질 수는 없으므로 그런 정사각형은 존재하지 않는다. 더 작은 쌍은 정확히 $(2b - a,\ a - b)$이며, 이것은 바로 우리의 $(\sqrt{2} - 1)k$ 단계가 모습을 바꾼 것이다.

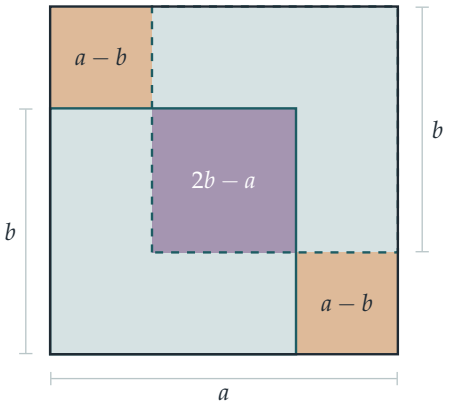

그림 1.3.1 Tennenbaum의 증명. 한 변이 b인 정사각형 두 개(청록색)가 한 변이 a인 정사각형의 마주 보는 모서리에 놓여 있다. $a^2 = 2b^2$이면 두 번 센 넓이(자주색으로 겹친 부분)는 빠진 넓이(호박색의 두 모서리)와 같아야 하므로 $(2b - a)^2 = 2(a - b)^2$이다. 즉 더 작은 해가 생긴다.

정렬성, 귀납법, 그리고 강하법

정렬성 원리와 귀납법의 원리는 논리적으로 동치이다. 즉 어느 하나로부터 다른 하나를 증명할 수 있다. 대학에서는 두 원리가 모두 자연수의 기초로 쓰이는 것을 보게 될 것이다. Section 1.5에서는 같은 원리를 다른 형태, 곧 페르마(Fermat)의 **무한 강하법**(method of infinite descent)으로 사용할 것이다. 양의 정수로 이루어진 무한한 순감소수열은 존재하지 않는다는 것이다.

어디까지 갈 수 있을까?

이 논증으로 N이 완전제곱수(perfect square)가 아닐 때마다 $\sqrt{N}$이 무리수임을 증명할 수 있으며(연습문제 참고), 더 일반적으로 자연수의 n제곱근은 자연수이거나 무리수임을 증명할 수 있다. 대학에서는 이것이 **대수적 정수**(algebraic integers)에 관한 명제가 된다. $x^3 - 2 = 0$처럼 정수 계수를 가지고 최고차항의 계수가 1인 다항식(monic polynomial) 방정식을 만족하는 유리수는 반드시 정수여야 한다. 이 아이디어는 Section 6.3에서 다시 만나게 된다.

피타고라스학파(Pythagoreans)가 $\sqrt{2}$의 무리성을 폭로했다는 이유로 히파소스(Hippasus)를 물에 빠뜨려 죽였다는 전설은 아마 사실이 아닐 것이다. 사실인 것

은 이 발견 때문에 그리스 수학자들이 수에 대한 연구와 길이에 대한 연구를 분리할 수밖에 없었다는 점이며, 이 분열은 19세기에 이르러 데데킨트(Dedekind)가 실수를 구성하고 나서야 비로소 메워졌다.

더 도전하기

1 **다른 제곱근.** 이 논증을 변형하여 $\sqrt{3}$이 무리수임을 보여라. 어떤 수가 $\sqrt{2}-1$의 역할을 하는가?

2 **완전제곱수가 아닌 모든 수.** N을 완전제곱수가 아닌 양의 정수라 하고, m을 $m < \sqrt{N} < m+1$을 만족하는 정수라 하자. $(\sqrt{N}-m)k$를 생각하여 $\sqrt{N}$이 무리수임을 증명하여라.

3 **결함을 찾아라.** 이 논증을 $\sqrt{4}$에 적용해 보아라. 정확히 어느 단계가 실패하는가?

4 **Tennenbaum의 그림.** 그림 1.3.1을 이용하여 $a^2 = 2b^2$이면 $(2b-a)^2 = 2(a-b)^2$임을 보여라. 이 항등식을 대수적으로도 확인하여라.

더 읽을거리

- **Daniel Velleman, *How to Prove It*** (Cambridge University Press). 귀납법과 정렬성을 포함하여 증명을 꼼꼼하게 소개하는 입문서이다.
- **R. P. Burn, *A Pathway into Number Theory*** (Cambridge University Press). 세심하게 순서를 정한 질문들로만 이루어진 책으로, 대학 1학년 강의를 준비하기에 이상적이다.
- **John Conway & Joseph Shipman, "Extreme proofs I: the irrationality of $\sqrt{2}$"** (*Mathematical Intelligencer*, 2013). 하나의 사실에 대한 여러 증명을 재치 있게 비교한다.

안내에 따른 전체 풀이는 제 1.3절에 있다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch01/well-ordering.html

매주 STEP 문제 하나를 끝까지 풀어 본다. The STEP Up은 이메일로 무료로 받아 볼 수 있다: keithmcnulty.substack.com