$u_{n+1} = 4u_n(1-u_n)$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

$\pi^e < e^\pi$

$F_n = 2^{2^n} + 1$

$e^{i\pi} + 1 = 0$

STEP 대비 · 대학 수학

Beyond STEP

STEP I, II 및 III

견본 문제지 풀이

$R(3,3) = 6$

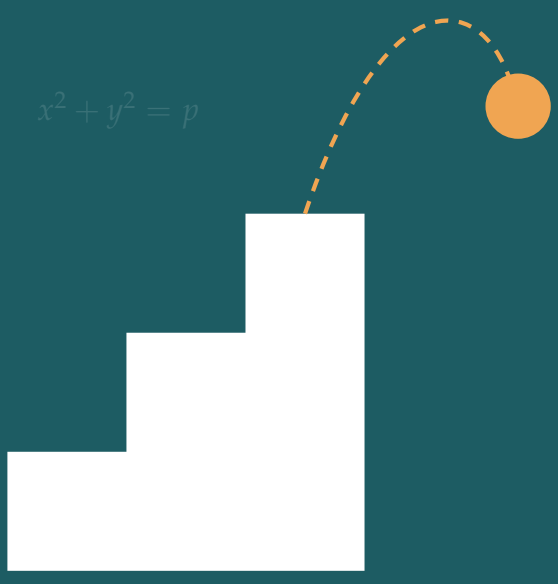
$\frac{22}{7} - \pi = \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,dx$

$x^2 + y^2 = p$

$P(A \mid B)$

$\ddot{x} = -\omega^2 x$

$\sin^2(2^n\theta)$



KEITH McNULTY

Beyond STEP

STEP 기출문제로 여는
대학 수학의 세계

STEP I, II 및 III

견본 문제지 풀이

Keith McNulty

Beyond STEP: STEP 기출문제로 여는 대학 수학의 세계

견본 문제지 풀이

STEP 견본 문제지(STEP I, II 및 III)의 48개 문제 전체에 대한 풀이. 견본 문제지 이후 모든 STEP 문제의 풀이와 *Beyond STEP* 책 전체, 그리고 각 장을 `beyondstep.keithmcnulty.org`에서 무료로 읽고 내려받을 수 있다.

풀이를 읽기 전에 먼저 문제를 제대로 풀어 보자. 모든 답은 수치적으로 검증하였지만, 풀이가 이렇게 많으면 실수가 어느 정도 있을 수밖에 없다. 무언가 잘못된 것처럼 보이면 자신의 풀이를 믿고 꼼꼼히 확인해 보자.

영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.

2026년 11월 온라인 초판 발행.

이 PDF에서 지은이가 직접 만든 모든 것, 곧 본문, 풀이, 그림, 연습문제와 해답은 크리에이티브 커먼즈 CC0 1.0 Universal 라이선스에 따라 퍼블릭 도메인(public domain)으로 공개한다. 누구든 허락을 구하지 않고 어떤 목적으로든 복사하고, 고쳐 쓰고, 공유할 수 있다. 자세한 내용은 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`을 보라.

여기에서 다루는 STEP 문제의 저작권은 Cambridge University Press & Assessment에 있다. 문제는 이 책에 싣지 않았으며, 각 문제마다 공식 출처인 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스나 OCR의 기출 시험지로 가는 링크를 달았다.

오류 제보는 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty에 이슈로 남겨 주기 바란다.

차례

STEP I

Q1 판별식과 부분분수 순수수학 3

Q2 삼각함수와 최적화 순수수학 7

Q3 2계 미분방정식 순수수학 10

Q4 치환적분 순수수학 13

Q5 자릿수와 계승 순수수학 16

Q6 활꼴의 넓이 순수수학 19

Q7 복소 지수급수 순수수학 23

Q8 적분방정식 순수수학 26

Q9 절댓값 부등식 순수수학 29

Q10 일률과 저항 역학 33

Q11 마찰과 구름 접촉 역학 36

Q12 마찰이 있는 충돌 역학 40

Q13 원운동 역학 44

Q14 기댓값 확률과 통계 48

Q15 확률변수의 합 확률과 통계 51

Q16 연속확률변수 확률과 통계 54

STEP II

Q1 부분분수 순수수학 58

Q2 대칭 연립방정식 순수수학 62

Q3 드무아브르 정리 순수수학 66

Q4 쌍곡선 함수 순수수학 69

Q5 급수와 적분을 이용한 한계 순수수학 73

Q6 상미분방정식으로부터 덧셈정리 유도 순수수학 77

Q7 계단함수의 적분 순수수학 80
Q8 모듈러 군에서의 위수 순수수학 84
Q9 구, 평면과 반사 순수수학 88
Q10 논리 퍼즐 순수수학 92
Q11 포물체와 충돌 역학 96
Q12 철사 위의 진동 역학 100
Q13 평형과 모멘트 역학 104
Q14 강체의 회전 역학 108
Q15 기댓값과 표본평균 확률과 통계 112
Q16 토너먼트의 확률 확률과 통계 116

STEP III

Q1 수학적 귀납법 순수수학 120
Q2 이항 부등식과 극한 순수수학 123
Q3 복소수의 삼각부등식 순수수학 126
Q4 포물선의 접선 순수수학 129
Q5 방정식의 근의 개수 세기 순수수학 133
Q6 쌍곡선 함수 점화 공식 순수수학 137
Q7 계수 내림법 순수수학 140
Q8 벡터와 코시-슈바르츠 부등식 순수수학 143
Q9 행렬의 군 순수수학 147
Q10 모듈러 산술 순수수학 150
Q11 일계 미분방정식 역학 153
Q12 막대의 평형 역학 157
Q13 굴러가는 고리 역학 161
Q14 회전이 있는 충돌 역학 165
Q15 무작위 네트워크의 연결성 확률과 통계 169
Q16 음이항분포 확률과 통계 173

풀이

STEP I 견본 문제지, 문제 1

순수수학 • 판별식과 부분분수

> **STEP I 견본 문제지, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/spec-s1-q1

핵심 아이디어

소문항 (i)에서 방정식은 각각의 고정된 x에 대하여 y에 관한 이차방정식(quadratic)이고, 실수 y는 판별식(discriminant)이 음이 아닐 때에만 존재한다. 이 조건이 바로 x에 대한 제한이 된다. 역할을 바꾸어 보면 방정식은 x에 관한 이차방정식이기도 하며, 이로부터 y에 대한 제한을 얻는다. 소문항 (ii)는 전형적인 부분분수(partial fractions) 문제이다. 분수를 이항전개(binomial expansion)를 알고 있는 조각들로 나눈 다음, x^n의 계수를 더하면 된다.

풀이

소문항 (i)

방정식을 계수가 x에 의존하는 y에 관한 이차방정식으로 보자.

$$y^2 + 16x\,y + (4x^2 + 24x) = 0.$$

주어진 실수 x에 대하여 이 식을 만족하는 실수 y가 존재할 필요충분조건은 판별식이 음이 아닌 것이다.

$$\begin{aligned}(16x)^2 - 4(4x^2 + 24x) &= 256x^2 - 16x^2 - 96x \\ &= 240x^2 - 96x = 48x(5x - 2) \geq 0.\end{aligned}$$

곱 $x(5x-2)$가 음이 아닌 것은 두 인수의 부호가 같을 때(또는 한 인수가 0일 때), 즉 $x \leq 0$ 또는 $x \geq \frac{2}{5}$일 때이고 그때뿐이다. 따라서 모든 실수해는

$$x \leq 0 \quad \text{또는} \quad x \geq \tfrac{2}{5},$$

을 만족하며, 이것이 증명하려던 것이다.

이제 방정식을 x에 관한 이차방정식으로 다루자.

$$4x^2 + (16y + 24)x + y^2 = 0.$$

실수 x가 존재할 필요충분조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}(16y+24)^2 - 16y^2 &= 256y^2 + 768y + 576 - 16y^2 \\ &= 240y^2 + 768y + 576 \\ &= 48(5y^2 + 16y + 12) = 48(5y+6)(y+2) \geq 0.\end{aligned}$$

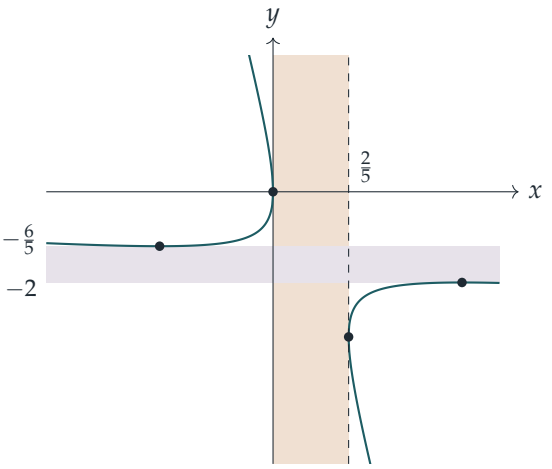
$(5y+6)(y+2)$의 근은 $y = -2$와 $y = -\frac{6}{5}$이고, 이 이차식은 두 근 사이에서만 음이다. 따라서

$$y \leq -2 \quad \text{또는} \quad y \geq -\tfrac{6}{5}.$$

생각해 보기 이 제한들이 가장 좋은 것일까, 아니면 실제 범위는 더 좁을 수 있을까?

이 제한들은 정확하다. 판별식을 이용한 논증은 "필요충분조건"이다. 즉 $x \leq 0$ 또는 $x \geq \frac{2}{5}$인 모든 x는 적어도 하나의 실수 y를 주며, y에 대해서도 마찬가지이다. 경곗값 역시 중근(double root)에 의해 실제로 얻어진다. x의 경계에 대해서는 $(x,y) = (0,0)$과 $(\frac{2}{5}, -\frac{16}{5})$, y의 경계에 대해서는 $(1,-2)$와 $(-\frac{3}{5}, -\frac{6}{5})$이다. 각 점이 원래 방정식을 만족하는지 확인해 볼 수 있다.

기하학적으로 이 곡선은 쌍곡선(hyperbola)이고($16^2 > 4 \cdot 4 \cdot 1$이므로), 제외된 두 띠는 쌍곡선의 두 가지 사이의 틈이다.



소문항 (ii)

다음과 같이 쓰자.

$$\frac{9}{(2-x)^2(1+x)} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{2-x} + \frac{C}{(2-x)^2},$$

그러면 $9 = A(2-x)^2 + B(2-x)(1+x) + C(1+x)$이다. $x=-1$을 대입하면 $9=9A$이므로 $A=1$이고, $x=2$를 대입하면 $9=3C$이므로 $C=3$이며, $x=0$을 대입하면 $9 = 4A + 2B + C = 7 + 2B$이므로 $B=1$이다. 따라서

$$\frac{9}{(2-x)^2(1+x)} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2-x} + \frac{3}{(2-x)^2}.$$

이제 각 조각을 전개한다. 이항급수(binomial series)가 $\frac{x}{2}$의 거듭제곱으로 나타나도록 인수 2를 밖으로 빼낸다.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x} &= \sum_{n\geq 0} (-1)^n x^n, && |x|<1,\\
\frac{1}{2-x} &= \frac{1}{2}\Big(1-\frac{x}{2}\Big)^{-1} = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{2^{n+1}}, && |x|<2,\\
\frac{3}{(2-x)^2} &= \frac{3}{4}\Big(1-\frac{x}{2}\Big)^{-2} = \frac{3}{4}\sum_{n\geq 0}(n+1)\frac{x^n}{2^n} = \sum_{n\geq 0}\frac{3(n+1)}{2^{n+2}}x^n, && |x|<2,
\end{aligned}$$

여기서 $|u|<1$일 때 $(1-u)^{-2} = \sum_{n\geq 0}(n+1)u^n$임을 이용하였다. 이들을 더하면 x^n의 계수(coefficient)는

$$(-1)^n + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{3(n+1)}{2^{n+2}} = (-1)^n + \frac{2+3n+3}{2^{n+2}} = (-1)^n + \frac{3n+5}{2^{n+2}}.$$

세 급수가 모두 수렴(converge)하는 것은 정확히 $|x|<1$일 때이다(첫 번째 급수는 $|x|<1$이 필요하고, 나머지는 $|x|<2$이면 충분하다). $1\leq |x|<2$이면 뒤의 두 급수는 여전히 수렴하지만 첫 번째 급수는 수렴하지 않으므로, 그 합도 수렴할 수 없다. 따라서 이 전개가 성립하는 범위는

$$-1 < x < 1.$$

검산

소문항 (i)에서 점 $(1,-2)$를 대입하면 $4-32+4+24=0$이고, $(-\frac{3}{5}, -\frac{6}{5})$를 대입하면 $\frac{36}{25} + \frac{288}{25} + \frac{36}{25} - \frac{360}{25} = 0$이므로, y의 두 경계가 모두 실제로 얻어짐을 확인할 수 있다. 소문항 (ii)에서 $n=0$이면 $1+\frac{5}{4} = \frac{9}{4}$이고, 이는 $x=0$에서의 값 $\frac{9}{4\cdot 1}$과 일치한다. 또 $n=1$이면 $-1+\frac{8}{8}=0$인데, 분모 $(2-x)^2(1+x) = 4-3x^2+x^3$에 x항이 없으므로 이것이 옳다. 수치적으로도 $x=0.9$에서 급수를 더하면 $3.914745\ldots$가 되어 $9/(1.1^2\times 1.9)$와 일치한다.

흔한 실수

- 부등식의 방향을 거꾸로 하여 $-2 \leq y \leq -\frac{6}{5}$라고 답하는 것. 판별식은 두 근 사이에서 음이므로, 이 구간은 제외되는 구간이다(또한 $(0,0)$은 곡선 위의 점인데, $y = 0$은 이 구간 밖에 있다).
- $(2-x)^{-1}$을 마치 $(1-x)^{-1}$인 것처럼 전개하여, 인수 $\frac{1}{2}$(제곱된 항에서는 $\frac{1}{4}$)를 빼내는 것을 잊는 것.
- 성립 범위를 $|x| < 2$라고 답하는 것. 전개는 모든 조각이 수렴하는 곳에서만 성립하므로 $|x| < 1$이다.

STEP 너머

소문항 (i)의 곡선은 원뿔곡선(conic)이며, 이것이 타원(ellipse), 포물선(parabola), 쌍곡선 중 무엇인지는 이차항 $ax^2 + bxy + cy^2$에 대한 $b^2 - 4ac$의 부호에 따라 결정된다. 대학에서는 이를 이차형식(quadratic form)의 대칭행렬(symmetric matrix)과 그 고윳값(eigenvalue)을 통해 이해한다. 소문항 (ii)는 수렴반지름(radius of convergence)의 개념과 맞닿아 있다. 전개는 함수가 발산하는 가장 가까운 점, 여기서는 $x = -1$까지 성립한다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 이차형식을 다루고, Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)는 멱급수(power series)와 그 수렴을 다룬다.

풀이

STEP I 견본 문제지, 문제 2

순수수학 • 삼각함수와 최적화

STEP I 견본 문제지, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/spec-s1-q2

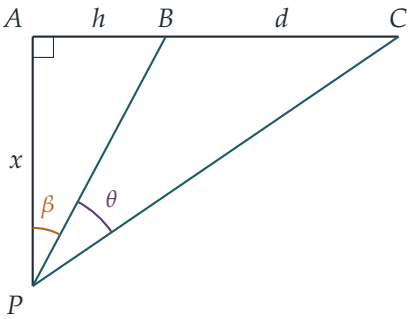
핵심 아이디어

각 θ는 P에서의 두 각의 차이고, 두 각은 각각 A에서 직각인 직각삼각형 안에 놓여 있다. 이 두 각의 탄젠트는 그림에서 바로 읽을 수 있으므로, tan의 뺄셈 공식(subtraction formula)이 일을 해 준다. 최댓값을 구할 때는 x가 한 곳에만 나타나도록 $\tan\theta$를 $x + (\text{상수})/x$ 꼴로 쓰면, 미적분 없이 산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)으로 마무리할 수 있다.

풀이

$\tan\theta$ 구하기

$\alpha = \angle APC$, $\beta = \angle APB$라 하자. B가 A와 C 사이에 있으므로 $\theta = \alpha - \beta$이다.



직각삼각형 PAC와 PAB(직각은 A)에서

$$\tan\alpha = \frac{AC}{AP} = \frac{h+d}{x}, \qquad \tan\beta = \frac{AB}{AP} = \frac{h}{x}.$$

뺄셈 공식에 의해

$$\tan\theta = \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \frac{\dfrac{h+d}{x} - \dfrac{h}{x}}{1+\dfrac{h(h+d)}{x^2}}.$$

분자와 분모에 x^2을 곱하면

$$\boxed{\tan\theta = \frac{dx}{x^2+h(h+d)}}$$

이다. (분모 $1+\tan\alpha\tan\beta$는 양수이므로 이 공식은 언제나 성립한다.)

θ를 최대로 하기

생각해 보기 $\tan\theta$를 최대로 하는 것은 θ를 최대로 하는 것과 같은가?

여기서는 그렇다. α와 β는 모두 0과 $\frac{\pi}{2}$ 사이에 엄격히 놓여 있고 $\alpha > \beta$이므로 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이다. 이 구간에서 tan는 순증가(strictly increasing)하므로, 가장 큰 θ는 가장 큰 $\tan\theta$에서 나온다.

분자와 분모를 $x > 0$으로 나누면

$$\tan\theta = \frac{d}{x+\dfrac{h(h+d)}{x}}.$$

이제 d는 고정되어 있으므로, $\tan\theta$는 분모 $x+h(h+d)/x$가 가장 작을 때 가장 크다. 두 항이 모두 양수이므로 산술-기하 평균 부등식에 의해

$$x+\frac{h(h+d)}{x} \;\geq\; 2\sqrt{x\cdot\frac{h(h+d)}{x}} = 2\sqrt{h(h+d)},$$

이고, 등호는 두 항이 같을 때, 즉 $x = h(h+d)/x$, 다시 말해 $x^2 = h(h+d)$일 때 정확히 성립한다. 따라서 분모는 최솟값을, θ는 최댓값을

$$\boxed{x = \sqrt{h(h+d)}}$$

에서 가지며, 이때 $\tan\theta = \dfrac{d}{2\sqrt{h(h+d)}}$이다.

미적분으로 풀 수도 있다. $k = h(h+d)$, $f(x) = dx/(x^2+k)$라 쓰면, 몫의 미분법(quotient rule)에 의해

$$f'(x) = \frac{d\,(k-x^2)}{(x^2+k)^2},$$

이다. 이는 $0 < x < \sqrt{k}$에서 양수이고 $x > \sqrt{k}$에서 음수이므로, f는 증가하다가 $x = \sqrt{k}$에서 유일한 최댓값에 이른 뒤 감소한다. 산술-기하 평균 부등식이 더 빠르고, 최댓값이 전역 최댓값(global maximum)임을 분명하게 보여 준다.

검산

- 극한: $x \to 0$ 또는 $x \to \infty$일 때 공식은 $\tan\theta \to 0$을 준다. 이는 옳다. A에 아주 가까이에서 보거나 아주 멀리서 보면, 선분 BC가 P에서 이루는 각은 거의 없다. 따라서 그 사이 어딘가에 최댓값이 있어야 한다.
- 대칭성: x를 $h(h+d)/x$로 바꾸어도 $\tan\theta$는 변하지 않으므로, 최댓값은 이 맞바꿈의 고정점 $x = \sqrt{h(h+d)}$에 있어야 한다. $h = 2$, $d = 1$일 때 점 $x = 2$와 $x = 3$은 같은 각(약 $11.31°$)을 주고, $x = \sqrt{6}$에서의 최댓값은 약 $11.54°$이다.
- $h = 1$, $d = 3$이면 $x = 2$이고 $\tan\theta = 6/8 = \frac{3}{4}$로, 3–4–5 삼각형의 각인 $36.87°$이다. 무작위로 고른 20 000개의 (h, d, x)에 대해 좌표로부터 θ를 직접 계산한 값은 공식과 10^{-14}까지 일치했고, 최댓값을 주는 x를 수치적으로 찾은 결과도 매번 $\sqrt{h(h+d)}$와 일치했다.

흔한 실수

- 마치 θ가 직각삼각형 안에 있는 것처럼 $\tan\theta = d/x$라고 쓰는 것. 그렇지 않다. 직각은 BC 위가 아니라 A에 있다.
- $\tan\theta$를 최대로 하면서 그것이 왜 θ를 최대로 하는지 설명하지 않는 것. 이를 위해서는 θ가 tan가 증가하는 구간 안에 머물러야 한다.

STEP 너머

이 답에는 아름다운 기하학적 해석이 있다. BC가 일정한 각을 이루어 보이는 점들은 B와 C를 지나는 원의 호 위에 놓인다. 가장 큰 각은 직선 AP와 여전히 만나는 그러한 원 가운데 가장 작은 원, 즉 P에서 그 직선에 **접하는** 원 위에서 얻어진다. 그러면 할선-접선 정리(tangent–secant theorem, 점 A의 방멱(power of a point))에 의해 $AP^2 = AB \cdot AC$이고, 이것이 바로 $x^2 = h(h+d)$이다. 이것은 레기오몬타누스(Regiomontanus)의 문제로, 흔히 "받침대 위의 조각상을 가장 잘 보려면 어디에 서야 하는가?"라는 형태로 제시된다. 어떤 양을 최적화할 때, 다루기는 더 쉬우면서 함께 증가하고 감소하는 다른 양으로 먼저 바꾸는 것은 대학 1학년 해석학 전반에 흐르는 주제이다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제집)에는 이런 정신의 문제가 훨씬 더 많이 실려 있다.

풀이

STEP I 견본 문제지, 문제 3

순수수학 • 2계 미분방정식

STEP I 견본 문제지, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/spec-s1-q3

핵심 아이디어

2계(second-order) 방정식은 어렵지만, 1계(first-order) 방정식 두 개는 쉽다. 제시된 치환(substitution) $z = y' - y$(y'는 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$를 나타낸다)는 좌변이 z와 z'만으로 이루어진 식으로 정리되도록 고른 것이다. 그러면 z에 대한 1계 선형 방정식(first-order linear equation)이 남고, 이어서 y에 대한 또 하나의 1계 선형 방정식이 남는다. 두 방정식 모두 적분인자(integrating factor)로 풀린다.

풀이

계수 낮추기

$z = y' - y$로 놓으면 $z' = y'' - y'$이다. 이에 맞추어 방정식의 좌변을 나눈다.

$$y'' + 2y' - 3y = (y'' - y') + 3(y' - y) = z' + 3z.$$

따라서 방정식은 다음과 같이 된다.

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + 3z = 2\mathrm{e}^x.$$

초기 조건(initial conditions)으로부터 $z(0) = y'(0) - y(0) = 2 - 1 = 1$이다.

? **생각해 보기** $(y'' - y') + 3(y' - y)$로 나누는 방법을 어떻게 알아낼 수 있었을까?

어떤 상수 k에 대하여 $y'' + 2y' - 3y$가 $z' + kz = y'' + (k-1)y' - ky$와 같아야 한다. y' 항을 비교하면 $k = 3$이고, 이때 $-ky = -3y$도 맞아떨어진다. (이것이 가능한 까닭은 1이 특성방정식(auxiliary equation) $m^2 + 2m - 3 = (m-1)(m+3) = 0$의 근이기 때문이다. 다른 근 -3이 $z' + 3z$에 나타나는 것이다.)

z 구하기

적분인자 e^{3x}를 곱하면

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(z\mathrm{e}^{3x}\right) = 2\mathrm{e}^{4x} \quad \Longrightarrow \quad z\mathrm{e}^{3x} = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{4x} + A.$$

$x = 0$에서 $1 = \frac{1}{2} + A$이므로 $A = \frac{1}{2}$이고

$$z = \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-3x}\right).$$

y 구하기

이제 $y' - y = z$, 즉

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y = \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-3x}\right).$$

적분인자는 e^{-x}이다.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y\mathrm{e}^{-x}\right) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-4x},$$

$$y\mathrm{e}^{-x} = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}\mathrm{e}^{-4x} + B.$$

$x = 0$에서 $1 = -\frac{1}{8} + B$이므로 $B = \frac{9}{8}$이다. 양변에 e^{x}를 곱하면

$$\boxed{y = \left(\frac{x}{2} + \frac{9}{8}\right)\mathrm{e}^{x} - \frac{1}{8}\mathrm{e}^{-3x} = \frac{(4x+9)\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-3x}}{8}}$$

여기서는 $y(0) = 1$만 사용했다는 점에 주목하자. 조건 $y'(0) = 2$는 $z(0)$을 구할 때 이미 사용했으므로, 두 조건이 모두 적용된 것이다.

검산

- $y(0) = (9-1)/8 = 1$이고, $y' = \left((4x+13)\mathrm{e}^{x} + 3\mathrm{e}^{-3x}\right)/8$에서 $y'(0) = 16/8 = 2$이다.
- 대입해 보면 e^{-3x}는 제차 방정식(homogeneous equation)의 해이고$(9 - 6 - 3 = 0)$, e^{x}도 마찬가지이다$(1 + 2 - 3 = 0)$. $x\mathrm{e}^{x}$에 대해서는 $y'' + 2y' - 3y = (x+2) + 2(x+1) - 3x = 4$에 e^{x}를 곱한 값이 되므로, $\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{x}$는 정확히 $2\mathrm{e}^{x}$를 만들어 낸다.
- 수치적으로, 룽게-쿠타 방법(Runge–Kutta method)으로 원래 방정식을 $x = 0$에서부터 단계적으로 계산하면 $y(1) \approx 4.41098$을 얻으며, 이는 $(13\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-3})/8$과 일치한다.

흔한 실수

- 마지막에 $y'(0) = 2$를 한 번 더 적용하거나, 이 조건을 $z(0) = 1$로 바꾸는 것을 잊는 실수.

- 치환을 쓰지 않고 "다른 방법으로" 특수해(particular integral) $c\,\mathrm{e}^x$를 시도하는 실수. e^x가 이미 제차 방정식의 해이므로 이 시도는 실패하며, 대신 $cx\mathrm{e}^x$가 필요하다. 치환을 쓰면 이 문제가 저절로 처리된다.

STEP 너머

이 치환은 사실 미분 연산자(differential operator)의 인수분해(factorisation)이다. $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$를 D로 나타내면 방정식은 $(D+3)(D-1)y = 2\mathrm{e}^x$이고, $z = (D-1)y$이다. 이런 식으로 연산자를 인수분해하면 상수 계수 선형 방정식(constant-coefficient linear equations)의 이론 전체를 설명할 수 있으며, 중근(repeated root)이나 "공명(resonant)"하는 근이 왜 x라는 추가 인수를 만들어 내는지도 알 수 있다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에서 이를 체계적으로 전개한다.

풀이

STEP I 견본 문제지, 문제 4

순수수학 • 치환적분

> **STEP I 견본 문제지, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/spec-s1-q4

핵심 아이디어

이차식의 제곱근이 나타나면 먼저 완전제곱식(completing the square)으로 고친다. 여기서는 근호 안의 이차식이 $(x+1)^2-3$이 되고, 근호 밖의 인수도 $x+1$이므로, $u=x+1$로 평행이동하면 $\dfrac{1}{u\sqrt{u^2-3}}$이라는 깔끔한 꼴이 남는다. 이 모양(변수에 그 변수의 제곱에서 상수를 뺀 것의 제곱근을 곱한 꼴)은 바로 시컨트 치환(secant substitution), 또는 마찬가지로 역수 치환(reciprocal substitution) $t=1/u$가 다루기 위해 만들어진 형태이다. 어느 치환을 쓰든 무한 구간이 유한 구간으로 바뀐다는 장점도 있다.

풀이

완전제곱식 만들기

다음이 성립한다.

$$x^2+2x-2=(x+1)^2-3,$$

$x\geq 1$이면 $(x+1)^2\geq 4>3$이므로 이 식은 양수이고, 따라서 피적분함수(integrand)는 $[1,\infty)$ 전체에서 정의된다. $u=x+1$로 놓으면 $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$이고, $x=1$일 때 $u=2$, $x\to\infty$일 때 $u\to\infty$이다:

$$I=\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+2x-2}}=\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2-3}}.$$

u가 클 때 피적분함수는 $1/u^2$처럼 행동하므로 이 적분은 수렴(converge)한다.

시컨트 치환

$0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$에 대하여 $u = \sqrt{3}\sec\theta$로 놓는다. 그러면

$$\mathrm{d}u = \sqrt{3}\sec\theta\tan\theta\,\mathrm{d}\theta, \qquad \sqrt{u^2-3} = \sqrt{3(\sec^2\theta - 1)} = \sqrt{3}\tan\theta,$$

이다. 여기서 이 범위에서 $\tan\theta \ge 0$임을 이용하여 절댓값 기호를 없앴다.

? **생각해 보기** 새로운 적분 구간의 끝값은 무엇인가?

$u = 2$에서는 $\sec\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$, 즉 $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$이어야 하므로 $\theta = \frac{\pi}{6}$이다. $u \to \infty$일 때 $\sec\theta \to \infty$이므로 아래쪽에서 $\theta \to \frac{\pi}{2}$이다. 이 치환은 $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$에서 증가하므로 적분 구간의 끝값의 순서가 그대로 유지된다.

이제 모든 것이 약분된다:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\sqrt{3}\sec\theta\tan\theta}{\sqrt{3}\sec\theta\cdot\sqrt{3}\tan\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\int_{\pi/6}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

따라서

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+2x-2}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{9}.$$

다른 방법: 역수 치환

시컨트가 떠오르지 않는다면 $t = 1/u$로 치환해도 똑같이 잘 되며, 적분 구간도 곧바로 유한해진다. $u = 1/t$이면 $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t/t^2$이고, $t > 0$일 때

$$u\sqrt{u^2-3} = \frac{1}{t}\cdot\frac{\sqrt{1-3t^2}}{t} = \frac{\sqrt{1-3t^2}}{t^2}.$$

이다. 끝값 $u = 2$와 $u \to \infty$는 각각 $t = \frac{1}{2}$와 $t \to 0$이 되고, 음의 부호 때문에 끝값의 순서가 뒤바뀐다:

$$I = \int_0^{1/2}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-3t^2}} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\left(\sqrt{3}\,t\right)\right]_0^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{3},$$

이는 첫 번째 방법의 결과와 일치한다.

검산

- 원시함수(antiderivative) $F(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arcsec}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)$를 미분하면 피적분함수가 다시 나온다. 그러면 $F(\infty) - F(1) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$이다.

- 대략적인 크기 확인: $[1,\infty)$에서 피적분함수는 $1/(x+1)^2$보다 조금 크고, 이 함수의 적분값은 $\frac{1}{2}$이다. 구한 답은 $\pi/(3\sqrt{3}) \approx 0.6046$으로 $\frac{1}{2}$보다 약간 크므로, 예상한 대로이다.
- 원래 적분을 수치적분(numerical quadrature)으로 계산하면(구간을 나누고 무한한 꼬리 부분은 $x = 1/w$로 바꾸어 처리하면) 0.604600을 얻으며, 이는 $\pi/(3\sqrt{3}) = 0.6045998\ldots$과 일치한다.

흔한 실수

- 적분 구간의 끝값을 바꾸는 것을 잊는 실수: 아래끝은 0이 아니라 $\theta = \frac{\pi}{6}$이다. 0을 쓰면 틀린 답 $\pi/(2\sqrt{3})$이 나온다.
- 사용하는 범위에서 $\tan\theta$의 부호를 확인하지 않고 $\sqrt{\sec^2\theta - 1} = \tan\theta$라고 쓰는 실수.
- 극한을 제대로 취하지 않고 $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arcsec}(\ldots)$에 "무한대를 대입"한 채로 답을 남겨 두는 실수.

STEP 너머

이것은 이상적분(improper integral)이다. 엄밀하게는 $\lim_{X\to\infty}\int_1^X$를 뜻하며, 대학 1학년 해석학 강의에서는 이러한 극한이 언제 존재하는지를 엄밀하게 다룬다($\int^\infty u^{-2}\,\mathrm{d}u$와 비교하는 것이 표준적인 판정법이다). 여기서 쓴 치환들은 유리함수 R에 대하여 $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$를 적분하는 일반 이론의 출발점이기도 하며, 이러한 적분은 언제나 유리함수(rational function)의 적분으로 바꿀 수 있다. 이상적분과 비교판정법(comparison test)에 대해서는 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해하기)를 참고하라.

풀이

STEP I 견본 문제지, 문제 5

순수수학 • 자릿수와 계승

> **STEP I 견본 문제지, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/spec-s1-q5

핵심 아이디어

두 소문항 모두 계산보다는 신중하게 세는 것이 핵심이다. (i)에서는 먼저 한 자리 수, 두 자리 수, 세 자리 수로 묶어 자릿수를 세어 1000번째 숫자가 정확히 어디에 오는지 찾은 다음, 일의 자리, 십의 자리, 백의 자리 순으로 자리마다 7의 개수를 센다. (ii)에서는 끝자리 0(trailing zero) 하나하나가 $10 = 2 \times 5$라는 인수에 해당하고, 5가 2보다 드물므로 365!에 들어 있는 인수 5의 개수만 세면 된다.

풀이

소문항 (i)

어디에서 멈추는가? 1부터 9까지의 수는 9개의 숫자를 쓴다. 두 자리 수 10부터 99까지 90개는 180개의 숫자를 쓰므로 지금까지 189개이다. 남은 숫자는

$$1000 - 189 = 811 = 3 \times 270 + 1$$

개이다. 처음 270개의 세 자리 수는 $100, 101, \ldots, 369$이고, 이들은 810개의 숫자를 쓴다. 마지막 숫자는 370의 첫째 숫자인 3이다. 따라서 $1, 2, \ldots, 369$를 모두 빠짐없이 쓴 뒤 3 하나를 더 쓴 것이다.

> ? **생각해 보기** 370에는 7이 들어 있다. 이것도 세어야 할까?

그렇지 않다. 첫째 숫자인 3을 쓴 뒤 멈추므로 7은 결코 쓰이지 않는다. 바로 이 때문에 멈추는 지점을 숫자 하나 단위까지 정확히 확정해야 한다.

1부터 369까지에서 7 세기. 자릿값(place value)별로 센다. 각각의 7은 정확히 한 자리에만 있으므로 중복해서 세는 일이 없고, 77 같은 수는 올바르게 두 번 세어진다.

- **일의 자리.** 열 개씩 이루어진 완전한 묶음 $10k, \ldots, 10k+9$마다 7로 끝나는 수가 정확히 하나 있다. 0부터 359까지의 수는 완전한 묶음 36개를 이루므로 7이 36개 나온다: $7, 17, \ldots, 357$. 불완전한 묶음 360부터 369까지에서 367 하나가 더해진다. 합계: 37.
- **십의 자리.** 완전한 백 단위마다 십의 자리가 7인 수가 정확히 열 개 있다: 70–79, 170–179, 270–279. 묶음 370–379는 369를 넘어선다. 합계: 30.
- **백의 자리.** 369 이하의 모든 수는 백의 자리가 많아야 3이다(또는 백의 자리가 아예 없다). 합계: 0.

마지막에 홀로 쓴 3은 아무것도 더하지 않는다. 따라서 숫자 7은

$$37 + 30 + 0 = 67 \text{ 번 쓰인다.}$$

소문항 (ii)

10진법에서 N의 끝자리 0의 개수는 $10^k \mid N$을 만족하는 가장 큰 k이다. $10 = 2 \times 5$이므로, 이는 N의 소인수분해(prime factorisation)에서 2의 지수와 5의 지수 중 작은 쪽이다.

5 세기. 365!을 나누는 5의 거듭제곱의 지수는 $j = 1, \ldots, 365$에 대하여 j에 들어 있는 인수 5의 개수를 모두 더한 것이다. 5의 배수는 인수를 적어도 하나, 25의 배수는 두 번째 인수를, 125의 배수는 세 번째 인수를 제공하며, 이런 식으로 계속된다. 각 층을 따로 세면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\left\lfloor \tfrac{365}{5} \right\rfloor &= 73 && (5\text{의 배수}),\\
\left\lfloor \tfrac{365}{25} \right\rfloor &= 14 && (25\text{의 배수}),\\
\left\lfloor \tfrac{365}{125} \right\rfloor &= 2 && (125\text{의 배수: } 125, 250),\\
\left\lfloor \tfrac{365}{625} \right\rfloor &= 0. &&
\end{aligned}$$

정확히 5^m으로 나누어떨어지는 수는 처음 m개의 줄에서 한 번씩 세어지므로, 마땅히 그래야 하듯 정확히 m만큼 기여한다. 그러므로 365!에 들어 있는 5의 지수는

$$73 + 14 + 2 = 89.$$

2는 병목이 아니다. 2에 대해 같은 논법을 적용하면 인수 2가 적어도 $\lfloor 365/2 \rfloor = 182 > 89$개 있다. (실제로는 $182 + 91 + 45 + 22 + 11 + 5 + 2 + 1 = 359$개이다.) 따라서 $2^{89} \cdot 5^{89} = 10^{89}$은 365!을 나누지만, $5^{90} \nmid 365!$이므로 10^{90}은 나누지 않는다.

따라서 365!은 정확히 **89**개의 0으로 끝난다.

검산

(i)에서 멈추는 지점을 빠르게 확인해 보자: $9 + 180 + 3 \times 270 = 999$개의 숫자로 369의 끝까지 가고, 그다음 숫자는 370의 맨 앞자리 3이다. 컴퓨터로 처음 1000개의 숫자를 써서 세어 보면 7이 67개임이 확인되며, 그중 20개는 1–99에, 47개는 100–369에 있다. (ii)에서는 365!을 정확히 계산하고(779자리 수이다) 끝자리 0의 개수를 세어 보면 된다. 89개로, 5의 개수와 일치한다. 손으로 방법을 시험해 볼 작은 예: 25!는 $\lfloor 25/5 \rfloor + \lfloor 25/25 \rfloor = 6$개의 0으로 끝나야 하는데, 실제로 $25! = 15\,511\,210\,043\,330\,985\,984\,000\,000$이다.

흔한 실수

- 370(심지어 371–379까지)을 쓴 것으로 세어 68 이상을 얻는 실수.
- $\lfloor 365/5 \rfloor = 73$만 사용하고, 25, 50, ... 에는 5가 두 개, 125, 250에는 세 개 들어 있다는 사실을 잊는 실수.
- 7을 숫자 단위가 아니라 수 단위로 세어, 77, 177, 277을 두 번이 아니라 한 번만 세는 실수.

STEP 너머

(ii)에서 층별로 센 방법은 르장드르의 공식(Legendre's formula)이다: $n!$에 들어 있는 소수 p의 지수는 $\sum_{k \geq 1} \lfloor n/p^k \rfloor$이며, 이는 $(n - s_p(n))/(p-1)$과도 같다. 여기서 $s_p(n)$은 n을 p진법으로 나타냈을 때 각 자리 숫자의 합이다. 이 경우 $365 = 2430_5$이고 자리 숫자의 합은 9이며, $(365 - 9)/4 = 89$이다. 이 공식은 이항계수(binomial coefficient)의 소인수에 관한 쿰머(Kummer)의 정리의 바탕이 된다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 이런 종류의 초등 정수론(elementary number theory)을 더 깊이 탐구하기에 아주 좋은 책이다.

풀이

STEP I 견본 문제지, 문제 6

순수수학 • 활꼴의 넓이

> **STEP I 견본 문제지, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/spec-s1-q6

핵심 아이디어

이 동전은 정칠각형(regular heptagon)의 각 변 바깥으로 원 모양의 "뚜껑"이 볼록하게 붙어 있는 도형이다. 따라서 그 넓이는 정칠각형의 넓이에 활꼴(circular segment) 일곱 개의 넓이를 더한 것이고, 활꼴 하나는 부채꼴(sector)에서 삼각형을 뺀 것이다. 그러면 모든 것이 두 각으로 귀결된다. 하나는 각 호가 그 중심에서 이루는 각(원주각 정리(inscribed angle theorem)로 곧바로 구할 수 있다)이고, 다른 하나는 정칠각형의 긴 대각선(diagonal)과 외접원(circumcircle)의 반지름이 이루는 각이다.

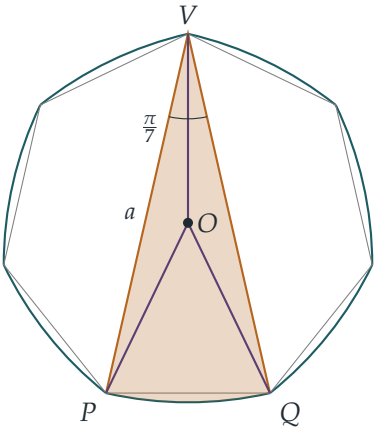
풀이

도형의 모양

각 꼭짓점은 자신의 맞은편에 있는 호의 두 끝점으로부터 거리 a만큼 떨어져 있다(두 끝점 모두 그 꼭짓점을 중심으로 하는 반지름 a인 원 위에 있기 때문이다). 따라서 한 꼭짓점과 세 자리 건너의 꼭짓점을 잇는 일곱 개의 "긴" 대각선은 모두 길이가 a이다. 반지름이 같은 원에서 같은 호는 중심에서 같은 각을 이루므로, 일곱 개의 변(호의 현(chord))도 모두 길이가 같다.

긴 대각선들을 차례로 이으면 모든 변의 길이가 a인 칠각 별 모양이 생긴다. 별의 각 꼭짓점에서의 각은 그 꼭짓점에서 나가는 두 대각선 사이의 각이고, 이 두 대각선과 맞은편 변은 세 변의 길이가 a, a와 공통의 변의 길이인 삼각형을 이룬다. 이러한 삼각형 일곱 개는 모두 합동(congruent)이므로, 이 별은 등변(equilateral)일 뿐 아니라 등각(equiangular)이기도 하며, 따라서 정다각형 별이다. 그러므로 일곱 꼭짓점은 정칠각형의 꼭짓점이다. 이 정칠각형의 중심을 O, 외접원의 반지름을 R라 하자.

한 꼭짓점을 V라 하고, V를 중심으로 하는 호의 두 끝점을 P와 Q라 하자. P와 Q는 정칠각형의 이웃한 두 꼭짓점이다.



각 호의 중심각

변 PQ는 중심 O에서 각 $2\pi/7$을 이룬다. V는 외접원 위, 우호(major arc) PQ 위에 있으므로 원주각 정리에 의해

$$\angle PVQ = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{7} = \frac{\pi}{7}.$$

따라서 각 호는 반지름이 a인 원의 일부로서 그 중심에서 각 $\pi/7$을 이루고, (색칠된) 부채꼴 VPQ의 넓이는

$$\tfrac{1}{2}a^2 \cdot \frac{\pi}{7} = \frac{\pi a^2}{14}.$$

넓이 합하기

동전의 면은 정칠각형과 각 변에 하나씩 붙은 활꼴 일곱 개로 이루어진다. 정칠각형은 OPQ와 같은 삼각형 일곱 개로 나뉘고, PQ 위의 활꼴은 부채꼴 VPQ에서 삼각형 VPQ를 뺀 것이다. 따라서

$$\begin{aligned} \text{넓이} &= 7\,[OPQ] + 7(\text{부채꼴}VPQ - [VPQ]) \\ &= \frac{\pi a^2}{2} - 7([VPQ] - [OPQ]), \end{aligned}$$

이다. 여기서 $[\cdot]$는 넓이를 나타낸다.

생각해 보기 두 삼각형의 넓이를 각각 따로 구하지 않고 $[VPQ] - [OPQ]$를 구하려면 어떻게 해야 할까?

중심 O는 삼각형 VPQ의 내부, 그 대칭축 위에 있으므로, 삼각형 VPQ에서 삼각형 OPQ를 제거하면 합동인 두 삼각형 OVP와 OVQ가 남는다.

$$[VPQ] - [OPQ] = [OVP] + [OVQ] = 2 \cdot \tfrac{1}{2} R\, a \sin \angle OVP.$$

대칭성에 의해 VO는 $\angle PVQ$를 이등분하므로 $\angle OVP = \pi/14$이다. 삼각형 OVP는 $OV = OP = R$인 이등변삼각형(isosceles triangle)이므로 두 밑각이 모두 $\pi/14$이고, O에서 VP에 수선(perpendicular)을 내리면

$$a = VP = 2R\cos\frac{\pi}{14}, \qquad \text{따라서} \qquad R = \frac{a}{2\cos(\pi/14)}.$$

그러므로

$$[VPQ] - [OPQ] = R\, a \sin\frac{\pi}{14} = \frac{a^2 \sin(\pi/14)}{2\cos(\pi/14)} = \frac{a^2}{2}\tan\frac{\pi}{14},$$

이고

$$\text{넓이} = \frac{\pi a^2}{2} - \frac{7a^2}{2}\tan\frac{\pi}{14} = \frac{a^2}{2}\left(\pi - 7\tan\frac{\pi}{14}\right),$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

검산

- 수치로 계산하면 $\frac{1}{2}(\pi - 7\tan\frac{\pi}{14}) \approx 0.7719$이므로 넓이는 약 $0.772a^2$이다. 일곱 개의 호 위에서 점을 촘촘하게 뽑아 신발끈 공식(shoelace formula)을 적용하면 소수점 아래 여섯째 자리까지 일치하며, 몬테카를로(Monte Carlo) 추정값도 마찬가지이다(어떤 점이 동전 안에 있을 필요충분조건은 그 점이 일곱 꼭짓점 모두로부터 거리 a 이내에 있는 것이다).
- 이 동전은 지름이 a인 원판처럼 모든 방향으로 폭이 a이고, 그 원판의 넓이는 $\pi a^2/4 \approx 0.785a^2$이다. 폭이 일정하게 a인 모든 도형 가운데 원판의 넓이가 가장 크므로 그보다 조금 작을 것으로 예상되며, 실제로 $0.772a^2 < 0.785a^2$이다.
- 같은 논법을 뢸로(Reuleaux) n각형(n은 홀수)에 적용하면 $\frac{a^2}{2}(\pi - n\tan\frac{\pi}{2n})$을 얻는다. $n \to \infty$일 때 $n\tan\frac{\pi}{2n} \to \frac{\pi}{2}$이므로 넓이는 원판의 넓이 $\pi a^2/4$로 수렴(converge)한다. $n = 3$이면 잘 알려진 뢸로 삼각형(Reuleaux triangle)의 넓이 $\frac{1}{2}(\pi - \sqrt{3})a^2$이 나온다.

흔한 실수

- 호의 각을 $\pi/7$(호의 중심이 실제로 있는 맞은편 꼭짓점에서의 각)이 아니라 $2\pi/7$(중심 O에서의 각)로 잡는 실수.
- a를 외접원의 반지름 R와 혼동하는 실수. a는 긴 대각선이며 $a = 2R\cos(\pi/14)$이다.

STEP 너머

50펜스(50p) 동전은 **정폭 곡선**(curve of constant width)이다. 즉 평행한 두 접선(tangent line)의 쌍은 어느 것이든 그 사이의 거리가 똑같이 a이며, 그래서 동전 투입구는 동전이 어떻게 돌아가 있든 같은 방식으로 그 크기를 잴 수 있다. 바르비에 정리(Barbier's theorem)에 따르면 이러한 곡선은 모두 둘레가 πa이고(여기서는 $7 \cdot a \cdot \pi/7$), 블라슈케-르베그 정리(Blaschke–Lebesgue theorem)에 따르면 그중 넓이가 가장 작은 것은 뢸로 삼각형이다. 이런 기하학을 더 알고 싶다면 쿠란트(Courant)와 로빈스(Robbins)의 *What Is Mathematics?*(수학이란 무엇인가)에 정폭 곡선을 다룬 멋진 절이 있다.

풀이

STEP I 견본 문제지, 문제 7

순수수학 • 복소 지수급수

> **STEP I 견본 문제지, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/spec-s1-q7

핵심 아이디어

$1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$를 보면 언제나 "반각(half-angle)" 인수 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}$를 묶어 낸다. 그러면 남는 것은 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}$이고, 이것은 실수이다. 급수에서는 이항계수(binomial coefficient) $\frac{n!}{r!(n-r)!}=\binom{n}{r}$가 이항정리(binomial theorem)를 떠올리게 한다. 그래서 각 사인을 지수함수의 허수부분(imaginary part)으로 쓰면, 합은 $1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}$의 거듭제곱의 허수부분이 되고, 이것은 첫 번째 부분에서 이미 극형식(polar form)으로 나타내 두었다.

풀이

절댓값과 편각

인수 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$를 묶어 내면

$$\begin{aligned}1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right)\\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\left[(\cos\alpha-\mathrm{i}\sin\alpha)+(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)\right]\\ &= 2\cos\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}.\end{aligned}$$

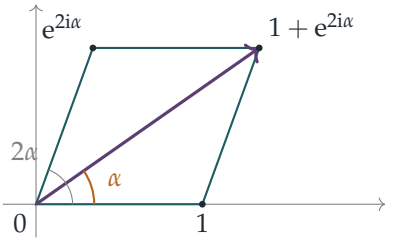
> **생각해 보기** 이제 곧바로 "절댓값(modulus)은 $2\cos\alpha$, 편각(argument)은 α"라고 읽어 내면 될까? α에 대한 제한은 무엇 때문에 있는가?

$r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 꼴이 절댓값 r와 편각 θ를 주는 것은 $r>0$일 때뿐이다. 여기서는 $-\frac{1}{2}\pi<\alpha<\frac{1}{2}\pi$이므로 $\cos\alpha>0$이고, 이 범위는 주치 구간(principal interval) $(-\pi,\pi]$ 안에도 들어 있다. 따라서

$$\left|1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\right|=2\cos\alpha,\qquad \arg\left(1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\right)=\alpha.$$

(만약 $\cos\alpha$가 음수라면 절댓값은 $-2\cos\alpha$가 되고 편각은 π만큼 달라진다.)

멋진 기하학적 그림도 있다. 점 0, 1, $1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}$는 점 $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}$와 함께 한 변의 길이가 1인 마름모(rhombus)를 이룬다. 0에서 나가는 대각선(diagonal)은 각 2α를 이등분하고, 그 길이는 $2\cos\alpha$이다.



급수

실수 θ에 대하여 $\sin\theta = \operatorname{Im}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$이고 이항계수는 실수이므로

$$\begin{aligned} S &= \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\sin(2r+1)\alpha = \operatorname{Im}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2r+1)\alpha} \\ &= \operatorname{Im}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\right)^r\right] = \operatorname{Im}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\left(1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\right)^n\right] \end{aligned}$$

이다. 여기서 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2r+1)\alpha} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\right)^r$를 이용한 다음 이항정리를 적용하였다. 이제 드무아브르 정리(de Moivre's theorem) $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\alpha}$와 함께 첫 번째 부분의 결과를 이용하면

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\left(1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\,2^n\cos^n\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\alpha} = 2^n\cos^n\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\alpha}.$$

$2^n\cos^n\alpha$는 실수이므로 허수부분을 취하면

$$\boxed{\sum_{r=0}^{n}\frac{n!}{r!\,(n-r)!}\sin(2r+1)\alpha = 2^n\cos^n\alpha\,\sin(n+1)\alpha.}$$

인수분해 $1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha} = 2\cos\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$는 **모든** 실수 α에 대하여 성립한다. $\cos\alpha > 0$이 필요했던 것은 절댓값과 편각을 말하기 위해서뿐이었으므로, 합의 공식은 주어진 범위만이 아니라 모든 실수 α에 대하여 성립한다.

검산

- $n=0$: 양변이 모두 $\sin\alpha$이다. $n=1$: 좌변은 합을 곱으로 바꾸는 공식(sum-to-product formula)에 의해 $\sin\alpha+\sin 3\alpha = 2\sin 2\alpha\cos\alpha$이고, 이것은 $2\cos\alpha\sin 2\alpha$와 일치한다.
- $n=3$, $\alpha=\frac{\pi}{6}$: 좌변은 $\frac{1}{2}+3+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$이고, 우변은 $8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9}{2}$이다.

- $\alpha = \frac{1}{2}\pi$: 모든 항이 $\sin(2r+1)\frac{\pi}{2} = (-1)^r$이므로 $n \geq 1$일 때 합은 $(1-1)^n = 0$이고, 이것은 $\cos\frac{\pi}{2} = 0$과 일치한다.
- $0 \leq n \leq 24$에 대하여 임의의 α 값에서 공식이 성립함을 수치적으로 확인하였다.

흔한 실수

- α의 범위 때문에 양수가 된다는 점을 언급하지 않고 절댓값을 $2\cos\alpha$라고 쓰는 것. 절댓값은 음수일 수 없다.
- 허수부분을 너무 일찍 취하는 것. $\mathrm{Im}(zw) \neq \mathrm{Im}\, z \cdot \mathrm{Im}\, w$이므로 마지막 순간까지 모든 것을 복소수로 유지해야 한다.
- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2r+1)\alpha}$를 $\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\right)^r$로 쓰면서 추가 인수 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$를 빠뜨리는 것. 그러면 $\sin(n+1)\alpha$가 $\sin n\alpha$로 바뀌어 버린다.

STEP 너머

$\sum \binom{n}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}r\theta}$를 닫힌 형태(closed form)로 구하는 같은 아이디어가 푸리에 해석(Fourier analysis)에도 등장한다. 그곳에서는 $\cos^n$ 꼴의 식을 여러 배각의 합으로 전개하거나 거꾸로 그런 합을 하나로 모으며, 이항 가중치 $\binom{n}{r}/2^n$은 이항분포(binomial distribution)가 된다. 반각을 묶어 내는 것은 또한 $1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$의 절댓값을 구하는 표준적인 방법이기도 한데, 이것은 등비급수(geometric series)와 1의 거듭제곱근(roots of unity)에서 만나게 된다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 마름모 그림을 포함하여 이러한 계산의 기하학적 관점을 아름답게 전개한다.

풀이

STEP I 견본 문제지, 문제 8

순수수학 • 적분방정식

STEP I 견본 문제지, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

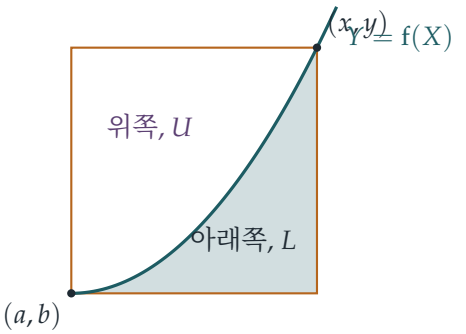
step.maths.org/questions/spec-s1-q8

핵심 아이디어

넓이 조건은 (x, y)의 **모든** 위치에 대하여 성립하므로, 이는 사실상 x에 대한 두 함수 사이의 등식이다. 한쪽은 f의 적분(integral)이고, 다른 쪽에는 $\mathrm{f}(x)$ 자체가 들어 있다. x에 대하여 미분하면 적분이 사라지고 일계 미분방정식(first-order differential equation)이 남는다. 이 방정식은 변수분리(separation of variables)로 풀 수 있고, 더 깔끔하게는 어떤 몫(quotient)의 도함수가 0이라는 식으로 바꿀 수 있다.

풀이

$\mathrm{f}'(x) \geq 0$이므로 곡선은 직사각형의 꼭짓점 (a, b)에서 마주 보는 꼭짓점 (x, y)까지 올라간다. 따라서 직사각형의 가로 길이는 $x - a$이고 세로 길이는 $y - b = \mathrm{f}(x) - b \geq 0$이다. 아래쪽 부분은 곡선과 아래 변 $Y = b$ 사이의 영역(아래 그림에서 색칠한 부분)이고, 위쪽 부분은 나머지 영역이다.



이제 x가 적분의 위끝이므로 적분변수로는 t를 쓰면

$$L = \int_a^x \big(\mathrm{f}(t) - b\big)\,\mathrm{d}t, \qquad L + U = (x-a)\big(\mathrm{f}(x) - b\big).$$

조건 $L = \frac{1}{2}U$는 $U = 2L$을 뜻하므로, 직사각형 전체의 넓이는 $3L$이다.

$$3\int_a^x \big(\mathrm{f}(t) - b\big)\,\mathrm{d}t = (x-a)\big(\mathrm{f}(x) - b\big) \qquad \text{모든} x \geq a. \tag{$*$}$$

생각해 보기 적분이 들어 있는 등식에서 어떻게 f에 대하여 풀 수 있는 식을 얻을 수 있을까?

$(*)$는 모든 $x \geq a$에 대하여 성립하므로 양변은 x에 대한 같은 함수이고, 따라서 도함수도 같다. 함수 f는 미분가능(differentiable)하므로(f′에 대한 정보가 주어져 있다) 연속(continuous)이고, 미적분학의 기본정리(fundamental theorem of calculus)에 의하여 좌변의 도함수는 $3(\mathrm{f}(x) - b)$이다. 우변을 곱의 미분법(product rule)으로 미분하면

$$3\big(\mathrm{f}(x) - b\big) = \big(\mathrm{f}(x) - b\big) + (x-a)\,\mathrm{f}'(x),$$

즉

$$(x-a)\,\mathrm{f}'(x) = 2\big(\mathrm{f}(x) - b\big).$$

이 식을 정리하기 위해 $g(x) = \mathrm{f}(x) - b$, $u = x - a$로 놓으면 $g' = \mathrm{f}'$이고 방정식은 $u\,g' = 2g$가 된다. 변수를 분리하여 $g'/g = 2/u$로 쓸 수도 있지만, 이는 0이 될 수도 있는 g로 나누는 것이다. 그보다는 $x > a$일 때($u > 0$이므로) 다음이 성립함에 주목하는 편이 깔끔하다.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{g}{u^2}\right) = \frac{u^2 g' - 2u\,g}{u^4} = \frac{u\,g' - 2g}{u^3} = 0.$$

따라서 g/u^2은 $x > a$에서 상수이고, 이 상수를 k라 하면

$$\mathrm{f}(x) - b = k(x-a)^2 \qquad (x > a),$$

이며, (a, b)가 곡선 위에 있으므로 이 식은 $x = a$에서도 성립한다. $x \geq a$일 때 $\mathrm{f}(x) \geq b$이므로(함수가 $\mathrm{f}(a) = b$에서 시작하여 감소하지 않는(non-decreasing) 함수이므로) $k \geq 0$이다. 또한 곡선이 수평선 $y = b$인 경우를 제외하면 $k > 0$인데, 이 예외적인 경우에는 모든 직사각형의 넓이가 0으로 줄어들어 조건이 아무 의미를 갖지 않는다.

따라서 곡선은 $x \geq a$에서 $y - b = k(x-a)^2$이다. 이는 축(axis)이 수직선 $x = a$이고 꼭짓점(vertex)이 (a, b)인 포물선(parabola)의 절반이다. $x \geq a$이므로 오른쪽 가지만 얻게 되고, 따라서 요구한 대로 이 곡선은 포물선의 호이다.

역으로, 이 곡선은 실제로 조건을 만족한다. $L = \int_a^x k(t-a)^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}k(x-a)^3$이고, 직사각형의 넓이는 $(x-a)\cdot k(x-a)^2 = k(x-a)^3$이므로 $U = \frac{2}{3}k(x-a)^3 = 2L$이다.

검산

$a = b = 0, k = 1, x = 3$으로 놓자. 직사각형은 3×9이고 넓이는 27이며, $\int_0^3 t^2 \, \mathrm{d}t = 9$이므로 두 부분의 넓이는 9와 18, 비는 $1 : 2$이다. 더 일반적으로 $y - b = k(x - a)^p$에 대하여 아래쪽 대 위쪽의 넓이 비는 $1/p$이다($p = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3$에 대하여 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 수치적으로 확인하였다). 따라서 비 $\frac{1}{2}$은 $p = 2$를 골라낸다. 직선($p = 1$)은 당연히 직사각형을 똑같이 둘로 나눈다.

흔한 실수

- x를 적분의 끝과 적분변수로 동시에 사용하여 미분하는 단계를 헷갈리게 만드는 것.
- 두 부분을 바꾸어 $U = \frac{1}{2}L$로 놓는 것. 그러면 $(x - a)\mathrm{f}' = \frac{1}{2}(\mathrm{f} - b)$가 되어 곡선 $y - b = k\sqrt{x - a}$를 얻는데, 이는 **수평인** 축을 가지고 방향도 잘못된 포물선이다.
- 아무 언급 없이 $\mathrm{f}(x) - b$로 나누는 것. 위의 몫을 이용한 논증은 이 문제를 피한다.

STEP 너머

방정식 $(*)$는 **적분방정식**(*integral equation*)이다. 즉 미지의 함수가 적분 안에 들어 있다. 미분하여 이를 미분방정식으로 바꾸고, 원래의 방정식이 초기값(initial value)도 정해 준다는 사실을 기억하는 것이 표준적인 첫 단계이다. 답의 유일성(uniqueness)은 어떤 구간에서 도함수가 0인 함수는 상수라는 사실에 기대는데, 이는 평균값 정리(mean value theorem)의 결과이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 미적분학의 기본정리와 평균값 정리를 모두 꼼꼼하게 증명한다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(미분방정식 입문서)는 $u\,g' = 2g$와 같은 방정식을 다룬다.

풀이

STEP I 견본 문제지, 문제 9

순수수학 • 절댓값 부등식

> **STEP I 견본 문제지, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/spec-s1-q9

핵심 아이디어

두 소문항 모두 절댓값(modulus) 기호 안의 식이 정확히 어디에서 부호가 바뀌는지, 또는 어떤 값을 지나는지를 찾아서 절댓값 기호를 없애는 문제이다. (i)에서는 $u = x + 1$로 놓으면 식이 $u - 2/u$가 되는데, 이 식은 $u = 0$의 양쪽에서 각각 증가하므로 부등식은 각 가지(branch)에서 u를 이차방정식의 두 근 사이로 제한할 뿐이다. (ii)에서는 $\cos x - \sin x$를 하나의 코사인으로 나타내면 부호가 바뀌는 곳이 드러나고, 그 점에서 적분을 나눈다.

풀이

소문항 (i)

식이 정의되려면 $x \neq -1$이어야 한다. $u = x + 1$로 놓으면 $u \neq 0$이고

$$x + \frac{x-1}{x+1} = \frac{x^2 + 2x - 1}{x+1} = \frac{(x+1)^2 - 2}{x+1} = u - \frac{2}{u}.$$

이것을 $f(u)$라 하자. 주어진 부등식은 $-2 < f(u) < 2$이다.

> **생각해 보기** 왜 그냥 양변에 $x + 1$을 곱하지 않는가?

$x + 1$은 음수일 수 있고, 음수를 곱하면 부등호의 방향이 바뀌기 때문이다. 이를 부주의하게 처리하는 것이 답의 절반을 잃는 전형적인 실수이다. 대신 f의 모양을 이용한다. 도함수(derivative)는 $f'(u) = 1 + 2/u^2 > 0$이므로, f는 $u < 0$에서, 그리고 따로 $u > 0$에서 순증가(strictly increasing)한다. 각 가지에서 함숫값은 $-\infty$부터 $+\infty$까지 움직인다. $u \to 0^-$일 때 $-2/u \to +\infty$이고, $u \to 0^+$일 때 $-2/u \to -\infty$이며, $|u| \to \infty$일 때 $f(u) \sim u$이다. 따라서 각 가지에서 f는 -2와 2를 각각 정확히 한 번씩 취하고, $-2 < f < 2$는 정확히 그 두 점

사이에서 성립한다.

$u \neq 0$일 때 u를 곱하면 다음 두 동치인 방정식을 얻는다.

$$f(u) = 2 \iff u^2 - 2u - 2 = 0 \iff u = 1 \pm \sqrt{3},$$
$$f(u) = -2 \iff u^2 + 2u - 2 = 0 \iff u = -1 \pm \sqrt{3}.$$

$u > 0$인 가지. 양수인 근은 $u = -1 + \sqrt{3}$($f = -2$인 점)과 $u = 1 + \sqrt{3}$($f = 2$인 점)이다. f가 증가하므로 $-2 < f(u) < 2$는 정확히 $-1 + \sqrt{3} < u < 1 + \sqrt{3}$일 때, 즉 $-2 + \sqrt{3} < x < \sqrt{3}$일 때 성립한다.

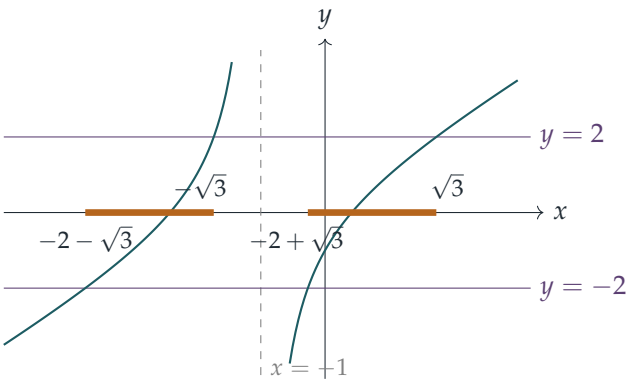
$u < 0$인 가지. 음수인 근은 $u = -1 - \sqrt{3}$($f = -2$인 점)과 $u = 1 - \sqrt{3}$($f = 2$인 점)이다. 이번에도 단조성(monotonicity)에 의해 $-2 < f(u) < 2$는 정확히 $-1 - \sqrt{3} < u < 1 - \sqrt{3}$일 때, 즉 $-2 - \sqrt{3} < x < -\sqrt{3}$일 때 성립한다.

어느 구간도 $x = -1$을 포함하지 않으므로($-\sqrt{3} < -1 < -2 + \sqrt{3}$임에 주의한다) 해집합은

$$\boxed{(-2 - \sqrt{3},\ -\sqrt{3}) \cup (-2 + \sqrt{3},\ \sqrt{3})}$$

이고, 문제에서 요구한 대로 모든 끝점이 $a + b\sqrt{3}$ 꼴이다. 끝점에서는 절댓값이 정확히 2가 되므로 끝점은 제외된다.

$y = x + (x-1)/(x+1)$의 그래프를 직선 $y = \pm 2$와 함께 그리면, 곡선이 두 직선 사이에 놓이는 두 구간(호박색)이 보인다.



소문항 (ii)

두 항을 하나의 코사인으로 합친다.

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right) = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

$0 \le x \le \pi$이면 $\pi/4 \le x + \pi/4 \le 5\pi/4$이고, 코사인은 $[\pi/4, \pi/2)$에서 양수, $(\pi/2, 5\pi/4]$에서 음수이다. 따라서 $0 \le x \le \pi/4$에서는 $\cos x - \sin x \ge 0$이고,

$\pi/4 \le x \le \pi$에서는 ≤ 0이다. 적분을 $\pi/4$에서 나누고, $\cos x - \sin x$의 부정적분(antiderivative) 하나가 $\sin x + \cos x$임을 이용하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} |\cos x - \sin x|\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\,\mathrm{d}x - \int_{\pi/4}^{\pi} (\cos x - \sin x)\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[\sin x + \cos x\Big]_0^{\pi/4} - \Big[\sin x + \cos x\Big]_{\pi/4}^{\pi} \\ &= (\sqrt{2} - 1) - (-1 - \sqrt{2}) \\ &= 2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

검산

- (i)에서 몇 가지 값을 대입해 본다. $x = 0$에서 식의 값은 -1로 절댓값 조건을 만족하고, 실제로 $0 \in (-2 + \sqrt{3}, \sqrt{3})$이다. $x = -2$에서는 $-2 + 3 = 1$이고 $-2 \in (-2 - \sqrt{3}, -\sqrt{3})$이다. $x = -1.5$에서는 $-1.5 + 5 = 3.5$로 조건을 벗어나며, 실제로 $-1.5 \in (-\sqrt{3}, -1)$은 어느 구간에도 속하지 않는다.
- 촘촘한 격자와 $[-50, 50]$ 안의 임의의 점 2×10^5개에서 부등식을 확인한 결과는 모든 곳에서 두 구간과 일치했고, 네 끝점 모두에서 절댓값은 2이다.
- (ii)에서 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 $2.828427\ldots$이 나와 $2\sqrt{2} \approx 2.828427$과 일치한다. 두 조각은 $\sqrt{2} - 1 \approx 0.4142$와 $\sqrt{2} + 1 \approx 2.4142$이다. 타당성 점검으로, 피적분함수(integrand)는 최대 $\sqrt{2}$이므로 적분값은 최대 $\sqrt{2}\,\pi \approx 4.44$이다.

흔한 실수

- $x + \frac{x-1}{x+1} < 2$의 양변에 $x + 1$의 부호를 고려하지 않고 곱하는 것. 이렇게 하면 $x = -1$ 왼쪽의 구간을 잃거나 잘못 포함하게 된다.
- $f < 2$만 풀거나 $f > -2$만 푸는 것. 절댓값 부등식은 두 조건을 동시에 요구한다.
- (ii)에서 $\cos x - \sin x$를 $[0, \pi]$ 전체에서 그대로 적분하는 것. 그러면 -2가 나온다(절댓값의 적분이 음수로 나왔다면 위험 신호이다).

STEP 너머

(i)의 요령은 대수적 부등식을 단조함수(monotonic function)에 관한 명제로 바꾸는 것이다. f가 어떤 구간에서 순증가하면, $a < f(u) < b$는 정확히 $f = a$인 점과 $f = b$인 점 사이에서 성립한다. 이를 엄밀하게 증명하려면 대학 해석학(analysis) 강의에서 처음 배우는 큰 결과 중 하나인 사잇값 정리(intermediate value theorem)가 필요하며, $|x - a| < \varepsilon$과 같은

절댓값 부등식은 그 강의의 일상 언어이다. Abbott, *Understanding Analysis*는 이 두 가지를 모두 만나 볼 수 있는 친절한 책이다.

풀이

STEP I 견본 문제지, 문제 10

역학 • 일률과 저항

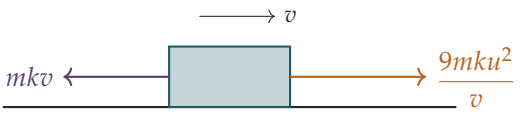
> **STEP I 견본 문제지, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/spec-s1-q10

핵심 아이디어

일률(power)은 힘과 속력의 곱이므로, 일정한 일률 P로 작동하는 기관차는 P/v의 구동력(driving force)으로 끈다. 그러면 뉴턴(Newton)의 제2법칙(second law)에서 v에 대한 변수분리형(separable) 1계 미분방정식(first-order differential equation)을 얻는다. 핵심은 가속도(acceleration)를 알맞은 꼴로 고르는 것이다. 문제가 시간을 물으면 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$를, 거리를 물으면 $v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$를 쓴다.

풀이

기관차를 수평 선로 위의 질량 m인 입자로 모형화한다. 그러면 무게와 수직항력(normal reaction)이 상쇄되므로 수평 방향의 힘만 생각하면 된다. 운동 방향을 양의 방향으로 잡는다.



최대 속력

속력이 v일 때 구동력은 $9mku^2/v$이므로, 뉴턴의 제2법칙에서

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{9mku^2}{v} - mkv \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{k\,(9u^2 - v^2)}{v}.$$

$v < 3u$인 동안에는 우변이 양수이므로 기관차는 빨라진다. 가속이 멈추는 것은 구동력과 저항(resistance)이 균형을 이루는 곳, 즉 $9u^2 = v^2$일 때뿐이다. 따라서 가능한 최대 속력은

$$v_{\max} = 3u.$$

? **생각해 보기** $v < 3u$인 동안 기관차는 항상 가속하는데, 왜 $3u$에 도달하지 못할까?

$v \to 3u$일 때 가속도는 0으로 줄어든다. 변수를 분리하면, 속력 v_1에서 속력 v_2까지 가는 데 걸리는 시간은

$$t = \frac{1}{k}\int_{v_1}^{v_2} \frac{v}{9u^2 - v^2}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2k}\ln\left(\frac{9u^2 - v_1^2}{9u^2 - v_2^2}\right),$$

이고, 이 값은 $v_2 \to 3u$일 때 무한대로 발산한다. 따라서 $3u$는 종단 속력(terminal speed)이다. 기관차는 이 속력에 원하는 만큼 가까워질 수 있지만, 유한한 시간 안에 실제로 도달하지는 못한다. (같은 말이지만, $v = 3u$는 이 미분방정식의 평형해(equilibrium)이고, 해의 유일성(uniqueness of solutions)에 의해 그보다 아래에서 출발한 해는 그 값에 도달할 수 없다.)

u에서 $2u$까지

위 식에 $v_1 = u$, $v_2 = 2u$를 대입하면

$$t = \frac{1}{2k}\ln\left(\frac{9u^2 - u^2}{9u^2 - 4u^2}\right) = \frac{1}{2k}\ln\left(\frac{8u^2}{5u^2}\right) = \frac{1}{2k}\ln\left(\frac{8}{5}\right),$$

이므로 요구된 결과를 얻는다.

동력 차단

이제 작용하는 힘은 두 저항 mkv와 mkB뿐이며, 둘 다 운동을 방해한다. 구하려는 것이 거리이므로 가속도를 $v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$로 쓴다.

$$mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -mk(v + B) \quad\Longrightarrow\quad \frac{v}{v + B}\,\mathrm{d}v = -k\,\mathrm{d}x.$$

$\dfrac{v}{v+B} = 1 - \dfrac{B}{v+B}$로 쓰고, x가 0에서 D까지 증가하는 동안 v가 $2u$에서 0으로 줄어드는 구간에서 적분하면

$$\begin{aligned} kD &= \int_0^{2u}\left(1 - \frac{B}{v+B}\right)\mathrm{d}v \\ &= \Big[v - B\ln(v+B)\Big]_0^{2u} \\ &= 2u - B\ln\left(\frac{2u+B}{B}\right). \end{aligned}$$

따라서 동력이 차단된 뒤 이동한 거리는

$$D = \frac{1}{k}\left[2u - B\ln\left(1 + \frac{2u}{B}\right)\right].$$

이번에는 기관차가 유한한 시간 안에 실제로 멈춘다. $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = -k(v+B) \le -kB < 0$이므로 감속도(deceleration)가 결코 kB 아래로 떨어지지 않기 때문이다. 바로 이 때문에 추가적인 상수 저항이 필요한 것이다.

검산

- $B \to 0$이면 $B\ln(1+2u/B) \to 0$이므로 $D \to 2u/k$이다. 이는 저항 mkv만 있는 경우와 일치한다. 이때 $v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x = -kv$이므로 v는 거리에 대해 비율 k로 일차적으로 감소한다.
- $y > 0$일 때 $\ln(1+y) < y$이므로 $B\ln(1+2u/B) < 2u$이고, 따라서 $D > 0$이다. 또한 B가 커질수록 D는 감소하는데, 당연히 그래야 한다.
- 수치적으로, $k = u = B = 1$로 놓고 운동 방정식을 단계별로 계산하면 정지 거리가 0.90139로 나와 $2 - \ln 3 \approx 0.90139$와 일치한다. 동력이 작용하는 구간을 $v = 1$에서 시작해 시간 $\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5} \approx 0.2350$ 동안 단계별로 계산하면 $v = 2.0000$에서 끝난다.

흔한 실수

- 구동력을 상수로 취급하는 것. 일률이 일정하면 힘은 P/v이고, 기관차가 빨라질수록 줄어든다.
- 마지막 소문항에서 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$를 쓰는 것. 그러면 거리가 아니라 정지 시간이 나온다.
- 기관차가 "결국에는" $3u$에 도달한다고 주장하는 것. 시간 적분이 발산하므로 결코 도달하지 못한다.

STEP 너머

속력 $3u$는 자율 미분방정식(autonomous equation) $\dot{v} = f(v)$의 안정 평형점(stable equilibrium)이다. 해는 지수적으로 이 값에 다가가지만 결코 만나지 않는데, 잘 정의된 미분방정식의 해들은 서로 교차하거나 합쳐질 수 없기 때문이다. 이것은 미분방정식 첫 강좌에서 배우는 유일성 정리(uniqueness theorem)와 위상선 분석(phase-line analysis)을 처음 맛보는 것이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에서 두 가지를 모두 다룬다. 일률과 저항력에 대해 더 알고 싶다면 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 읽어 보라.

풀이

STEP I 견본 문제지, 문제 11

역학 • 마찰과 구름 접촉

STEP I 견본 문제지, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/spec-s1-q11

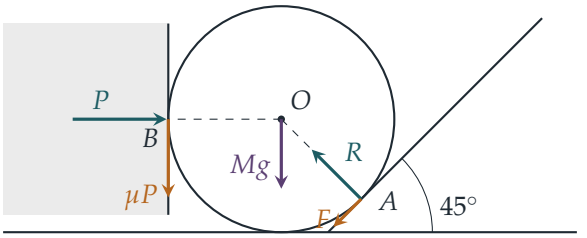
핵심 아이디어

원기둥이 막 움직이려는 순간에는 바닥이 더 이상 원기둥을 밀어 주지 않으므로, 중요한 것은 무게, 수직인 면, 경사면의 세 가지뿐이다. "구른다(roll)"는 것은 원기둥이 경사면 위에서 미끄러지지 않는다는 뜻이므로, 원기둥은 경사면과의 접점을 중심으로 회전하기 시작한다. 이때 수직인 면에 닿아 있는 점이 어떻게 움직이는지 계산해 보면, 원기둥이 그 면에 대해 미끄러질 수밖에 없음을 알 수 있다. 따라서 마찰(friction)이 한계에 이르는(limiting) 곳은 바로 그 면이다. 그러면 중심에 대한 모멘트(moment) 방정식에서 경사면의 마찰력이 별다른 수고 없이 바로 얻어진다.

풀이

모형. 원기둥은 반지름이 r인 균일한 강체(rigid body)이고, 문제를 그 중심 O를 지나는 수직 단면에서 다룬다. 장치의 면은 수직이고 수평으로 움직인다. 이 면과의 접점을 B라 하면 B는 O와 같은 높이에 있고, 경사면과의 접점을 A라 하자. 경사면의 기울기가 45°이므로 OA는 아래쪽 수직 방향과 45°를 이룬다. O를 원점으로 하여 x축은 오른쪽(경사면 쪽), y축은 위쪽으로 잡으면

$$B = (-r,\, 0), \qquad A = \tfrac{r}{\sqrt{2}}(1,\, -1).$$



어느 쪽 마찰이 한계에 이르는가

원기둥이 막 움직이려는 순간에는 바닥에서 막 떨어지려 하므로, 바닥의 수직항력(normal reaction)은 0이고 바닥의 마찰력도 함께 0이다. 경사면을 굴러 올라가려면 원기둥이 A에서 미끄러지지(slip) 않아야 하므로, 그 운동은 A를 중심으로 하는 회전으로 시작하고 중심은 경사면을 따라 $(1,1)$ 방향으로 올라간다. 이 회전은 시계 방향이다. 각속도(angular speed)를 ω라 하면, 원기둥 위의 점 X의 속도는 $X-A$를 시계 방향으로 90° 돌린 것에 ω를 곱한 것, 즉 $X-A=(x,y)$에 대하여 $\omega\,(y,-x)$이다. $X=B$일 때

$$B-A=r\left(-1-\tfrac{1}{\sqrt{2}},\ \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\quad\Longrightarrow\quad \mathbf{v}_B=\omega r\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}},\ 1+\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

면은 수평으로만 움직이는데 B는 위쪽 속도 성분을 가지므로, B는 면을 따라 미끄러져 올라간다. 원기둥이 두 면 위에서 동시에 구를 수는 없으므로 수직인 면에서는 반드시 미끄러지고, 따라서 **마찰이 한계에 이르는 곳은 수직인 면이다**. 마찰력은 미끄러짐을 방해하므로 원기둥에 **아래쪽으로** 크기 μP로 작용한다. 경사면에서는 미끄러짐이 없으므로 경사면의 마찰력 F는 평형(equilibrium)에 필요한 만큼의 값을 가지며, 조건은 $F\le \nu R$뿐이다. (경사면의 마찰 계수(coefficient of friction)를 ν로 쓴다. 문제에는 v로 인쇄되어 있다.)

> ? **생각해 보기** 왜 경사면 쪽 마찰이 한계에 이를 수는 없는가?

원기둥이 A에서 미끄러진다면 경사면을 구르는 것이 아니라 미끄러져 올라가는 것이다. 구른다는 것은 A에서 미끄러짐이 없다는 뜻이다. 위의 계산은 구름이 B에서의 미끄러짐을 강제한다는 것을 보여 주므로, 마찰력이 수직항력의 μ배에 이르는 접점은 B이다.

P 구하기

경사면의 수직항력을 R이라 하면 이는 AO 방향(방향 $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$)으로 작용하고, 경사면의 마찰력을 F라 하되 경사면을 따라 **아래쪽**(방향 $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-1)$)을 양으로 잡는다.

O에 대한 모멘트. 무게, P, R은 모두 O를 지난다. B에서의 마찰력 μP는 거리 r에서 작용하며 원기둥을 시계 반대 방향으로 돌린다. A에서의 마찰력 F는 접선 방향이므로 역시 거리 r에서 작용하고, 경사면 아래쪽을 향할 때 원기둥을 시계 방향으로 돌린다. 따라서

$$\mu P\,r=Fr\quad\Longrightarrow\quad F=\mu P.$$

그러므로 경사면의 마찰력은 실제로 경사면 아래쪽으로 작용하며, 그 크기는 면에서의 마찰력과 같다.

수평 방향으로 분해하면:

$$P-\frac{R}{\sqrt{2}}-\frac{\mu P}{\sqrt{2}}=0\quad\Longrightarrow\quad R=\sqrt{2}\,P-\mu P=P(\sqrt{2}-\mu).\tag{1}$$

수직 방향으로 분해하면:

$$\frac{R}{\sqrt{2}} - \frac{\mu P}{\sqrt{2}} - \mu P - Mg = 0. \tag{2}$$

(1)에서 얻은 $R/\sqrt{2} = P - \mu P/\sqrt{2}$를 (2)에 대입하면

$$\begin{aligned} P - \frac{\mu P}{\sqrt{2}} - \frac{\mu P}{\sqrt{2}} - \mu P &= Mg \\ P\left(1 - \mu - \sqrt{2}\,\mu\right) &= Mg, \end{aligned}$$

이고, 여기서 $2/\sqrt{2} = \sqrt{2}$를 이용했다. 따라서

$$P = \frac{Mg}{1 - \mu(1+\sqrt{2})},$$

이므로 요구하는 결과가 나온다.

μ와 ν에 대한 조건

μ에 대하여. P는 미는 힘의 크기이고 $Mg > 0$이므로 $1 - \mu(1+\sqrt{2}) > 0$이어야 한다. 즉

$$\mu < \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{2} - 1.$$

$\mu \geq \sqrt{2} - 1$이면 아무리 세게 밀어도 원기둥을 경사면 위로 굴려 올릴 수 없다. 면에서 아래쪽으로 작용하는 추가 마찰력이 들어 올리는 힘과 적어도 같은 빠르기로 P와 함께 커지므로, 원기둥이 꽉 끼어 버린다.

ν에 대하여. 원기둥은 경사면에서 미끄러지지 않으므로 $F \leq \nu R$이다. $F = \mu P$와 (1)을 이용하고, $\mu < \sqrt{2} - 1 < \sqrt{2}$이므로 $R > 0$임에 주의하면

$$\mu P \leq \nu P(\sqrt{2} - \mu) \quad \Longleftrightarrow \quad \nu \geq \frac{\mu}{\sqrt{2} - \mu},$$

이며, 여기서 $P(\sqrt{2} - \mu) > 0$으로 나누었다. 이로써 문제가 해결된다.

검산

- **매끄러운 면**, $\mu = 0$: 이때 $P = Mg$이고 경사면의 마찰은 필요 없다. 이는 수직인 벽과 45° 경사면 사이에 끼인 마찰 없는 원기둥과 일치한다. 경사면의 수직항력은 수평 성분과 수직 성분이 같으므로 P와 Mg를 똑같이 상쇄해야 한다.
- **수치**: $\mu = 0.2$이면 $P \approx 1.934\,Mg$이고 $\nu \geq 0.165$가 필요하다. 이 값들을 다시 대입하면 수평 방향 힘, 수직 방향 힘, O에 대한 모멘트가 모두 (반올림 오차 범위에서) 평형을 이루며, 임의의 M과 μ에 대해서도 마찬가지이다.
- $\mu \to \sqrt{2} - 1 \approx 0.414$일 때 $P \to \infty$이며, 이는 위에서 설명한 끼임 현상과 일치한다.

흔한 실수

- 경사면에서 마찰이 한계에 이른다고 놓는 것. "구른다"는 조건이 그곳에서의 미끄러짐을 배제한다.
- 바닥의 수직항력을 남겨 두는 것. 굴러 올라가기 시작하는 순간 원기둥은 바닥에서 막 떨어지려 하므로 바닥의 수직항력은 0이다.
- 면에서의 마찰력 방향을 잘못 잡는 것. B는 면에 대해 **위로** 움직이므로 원기둥에 작용하는 마찰력은 **아래로** 향한다. 이 때문에 P가 Mg보다 크다.

STEP 너머

순간 회전 중심(instantaneous centre of rotation)을 살펴서 어느 접점이 미끄러지는지 판단하는 핵심 단계는 강체 운동학(rigid-body kinematics)의 출발점이다. 대학 1학년 과정에서는 이것이 일반적인 규칙 $\mathbf{v}_X = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times (X - O)$와, 여러 거친 접점이 서로 경쟁하는 문제로 이어진다. $\mu \geq \sqrt{2} - 1$에서 일어나는 "끼임", 즉 더 세게 밀어도 전혀 도움이 되지 않는 현상은 자기 잠금(self-locking) 효과로, 공학자들이 쐐기와 클램프에서 일부러 활용한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 강체 운동과 마찰을 바로 이런 세심함으로 다룬다.

풀이

STEP I 견본 문제지, 문제 12

역학 • 마찰이 있는 충돌

STEP I 견본 문제지, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/spec-s1-q12

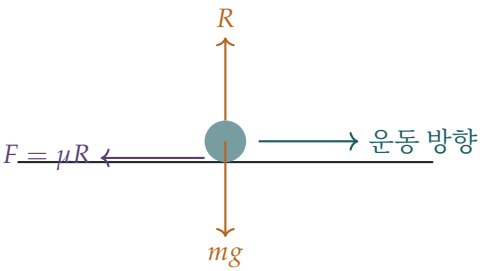
핵심 아이디어

이 문제에서는 마찰(friction)이 모든 일을 한다. 수평인 얼음 위를 미끄러지는 원판은 일정한 저항력을 받으므로 감속도(deceleration)가 일정하고, 사건과 사건 사이의 운동은 모양만 바뀐 "등가속도 운동(constant acceleration)"일 뿐이다. 끝에서부터 거꾸로 풀어 나간다. B의 정지 거리로부터 충돌 직후 B의 속력이 정해지고, 충돌 법칙을 쓰면 이것이 충돌 직전 A의 속력으로 바뀌며, 등가속도 단계를 한 번 더 거치면 출발점 O로 돌아간다.

풀이

모형

각 원판을 마찰 계수(coefficient of friction)가 μ인 수평의 거친 면 위에 놓인 질량 m의 질점으로 생각한다. 원판이 미끄러지는 동안 원판에 작용하는 힘은 아래 방향의 무게 mg, 위 방향의 수직 항력(normal reaction) R, 그리고 운동을 방해하는 최대 마찰력(limiting friction) F이다.



연직 방향으로 힘을 분해하면, 연직 방향의 가속도가 없으므로 $R = mg$이다. 원판이 미끄러

지고 있으므로 마찰력은 최대 마찰력이다: $F = \mu R = \mu mg$. 수평 방향으로 힘을 분해하면 $m\ddot{x} = -\mu mg$이므로, 미끄러지는 모든 원판은 질량에 관계없이 일정한 비율

$$a = \mu g,$$

로 감속한다. 또한 충돌(collision)은 순간적으로 일어난다고 가정하므로, 충돌하는 동안에는 마찰이 작용할 시간이 없다. 그때는 원판 사이의 충돌력만 중요하고, OC 방향의 운동량은 보존된다.

충돌 후 B의 속력

B는 O로부터 거리 d인 점에서 출발하여 O로부터 거리 $2d$인 C에서 멈추므로, 거리 d만큼 미끄러진다. 충돌 직후 B의 속력을 w라 하자. 나중 속력 0, 가속도 $-\mu g$, 변위 d를 $v^2 = u^2 + 2as$에 대입하면

$$0 = w^2 - 2\mu g d \quad \Longrightarrow \quad w = \sqrt{2\mu g d},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

충돌 직전 A의 속력

A가 속력 u로 B와 충돌하고, 충돌 직후 A의 속도를 v_A라 하자(둘 다 $O \to C$ 방향을 기준으로 잰다). 질량이 m으로 같으므로 운동량 보존(conservation of momentum)에 의해

$$mu = mv_A + mw \quad \Longrightarrow \quad u = v_A + w,$$

이고, 뉴턴(Newton)의 실험 법칙(Newton's experimental law)에 의해

$$w - v_A = eu.$$

이다. 두 식을 더하여 v_A를 소거하면 $2w = (1+e)u$이므로

$$u = \frac{2w}{1+e} = \frac{2\sqrt{2\mu g d}}{1+e}.$$

이다. (대신 두 식을 빼면 $v_A = \frac{1}{2}(1-e)u \geq 0$이므로, A는 더 느린 속력으로 같은 방향으로 계속 움직인다.)

생각해 보기 A가 다시 B를 따라잡아 계산을 망칠 수 있을까?

그렇지 않다. 충돌 후 두 원판은 같은 비율 μg로 감속하므로, 둘 다 움직이는 동안 속력의 차 $w - v_A = eu$는 일정하게 유지된다. B는 A보다 느려지는 일이 없으므로 계속 앞서 있고, 더 느린 속력으로 출발한 A가 먼저 멈춘다. 따라서 충돌은 정확히 한 번만 일어나고, d에서 $2d$까지 가는 B의 운동은 방해받지 않는다. ($e = 0$일 때는 두 원판이 멈출 때까지 함께 움직이며, 이 경우에도 더 이상의 충돌은 없다.)

처음 속력

A는 μg로 감속하면서 O에서 B까지 거리 d를 미끄러지므로, 다시 $v^2 = u^2 + 2as$에 의해

$$u^2 = U^2 - 2\mu g d \quad \Longrightarrow \quad U^2 = u^2 + 2\mu g d.$$

이다. u를 대입하면

$$\begin{aligned} U^2 &= \frac{4 \cdot 2\mu g d}{(1+e)^2} + 2\mu g d = \frac{2\mu g d}{(1+e)^2}\left(4 + (1+e)^2\right) \\ &= \frac{2\mu g d}{(1+e)^2}\left(5 + 2e + e^2\right). \end{aligned}$$

$U > 0$이고 $1 + e > 0$이므로 양의 제곱근을 택하면

$$U = \frac{\sqrt{2\mu g d}}{1+e}\left(5 + 2e + e^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

검산

- 완전 탄성(perfectly elastic) 충돌, $e = 1$: 똑같은 두 원판은 속도를 맞바꾸므로, A는 그 자리에 멈추고 B는 A가 도착할 때의 속력 $u = w$로 떠난다. 공식에 따르면 $U = \sqrt{2}\,\sqrt{2\mu g d} = \sqrt{2\mu g (2d)}$이고, 이는 원판 하나가 C까지 $2d$ 전체를 미끄러지는 데 필요한 속력과 정확히 같다. 운동량이 그대로 전달되므로 이는 타당하다.
- 완전 비탄성(perfectly inelastic) 충돌, $e = 0$: 공식에 따르면 $U = \sqrt{5}\,\sqrt{2\mu g d}$이고, 이는 $e = 1$일 때보다 크다. 충돌에서 운동 에너지(kinetic energy)가 손실되므로 당연히 그래야 한다. 더 일반적으로 $(5 + 2e + e^2)/(1+e)^2 = 1 + 4/(1+e)^2$은 e가 커질수록 감소한다.
- 차원(dimensions): μ와 e는 단위가 없는 수이고 $\sqrt{gd}$는 속력이다.
- 수치로 확인하면, $\mu = 0.1$, $g = 9.8\ \mathrm{m\,s^{-2}}$, $d = 1\ \mathrm{m}$, $e = 0.5$일 때 공식은 $U = \frac{7}{3} \approx 2.33\ \mathrm{m\,s^{-1}}$을 준다. 이 U에서 출발하여 작은 시간 간격으로 운동을 단계별로 진행시키면(μ, d, e를 무작위로 여러 번 골라 보아도) B는 O로부터 $2d$의 0.001% 이내에서 정지한다.

흔한 실수

- 충돌 전후에 에너지 보존을 적용하는 것. $e = 1$이 아니면 충돌에서 운동 에너지가 손실된다. 충돌에서는 운동량과 반발 법칙(restitution law)을 쓰고, 일–에너지(work–energy) 단계(또는 $v^2 = u^2 + 2as$)는 사건과 사건 사이에서만 쓴다.

- A도 충돌 전에 거리 d만큼 미끄러진다는 사실을 잊고 $U = u$라고 쓰는 것.
- 반발 법칙을 거꾸로 쓰는 것. 멀어지는 속력 $w - v_A$가 가까워지는 속력 u의 e배와 같다.

STEP 너머

이 문제의 깔끔한 점은 마찰이 질량에 관계없이 모든 원판에 같은 감속도를 준다는 것이다. 그래서 μg로 감속하는 기준틀(frame)에서 보면, 두 원판이 미끄러지는 동안 얼음은 사실상 마찰이 없는 면이 되고, 충돌은 교과서에 나오는 충돌처럼 보인다. 편리한 기준틀을 고르는 것은 대학 역학의 핵심 기법이며, 마찰 법칙 $F = \mu R$ 자체는 경험적 모형이므로 그 한계를 알아 둘 가치가 있다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 충돌과 마찰을 모두 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP I 견본 문제지, 문제 13

역학 • 원운동

> **STEP I 견본 문제지, 13번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/spec-s1-q13

핵심 아이디어

이 문제는 줄이 늘어날 수 있는 원뿔 진자(conical pendulum)이다. 훅의 법칙(Hooke's law)은 장력(tension)과 줄의 길이를 연결하고, 힘을 연직 방향과 수평 방향으로 분해(resolving forces)하면 장력이 g 및 ω와 연결된다. 줄이 연직선과 0이 아닌 각을 이루므로 장력은 mg보다 엄격하게 커야 하며, 바로 이 하나의 사실이 두 부등식을 모두 이끌어 낸다.

풀이

입자를 훅의 법칙을 따르는 가벼운 탄성 줄에 매달린 질점(point mass)으로 모형화하고, 공기 저항은 없다고 하자. λ를 탄성 계수(modulus of elasticity)라 하자.

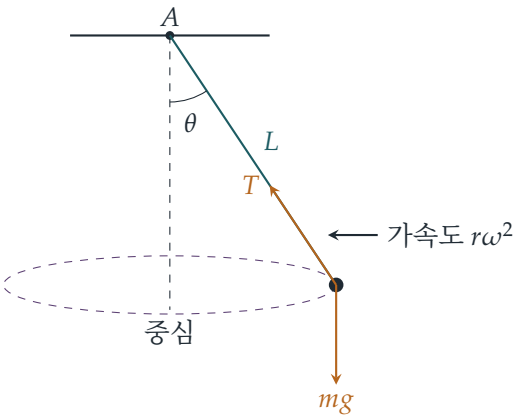
탄성 계수. 정지 상태로 매달려 있을 때 줄의 늘어난 길이(extension)는 $2a - a = a$이고 장력이 무게와 평형을 이룬다.

$$mg = \frac{\lambda a}{a} \quad \Longrightarrow \quad \lambda = mg.$$

따라서 줄의 길이가 L일 때 장력은 다음과 같다.

$$T = \frac{mg(L-a)}{a}.$$

원운동. 입자가 A 아래에서 수평면 위의 원을 그리며 움직이고, 길이가 L인 줄이 아래쪽 연직선과 각 θ를 이룬다고 하자. 운동이 A의 높이보다 아래에서 일어나는 진짜 원운동이므로 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이고, 따라서 $\sin\theta > 0$이며 $0 < \cos\theta < 1$이다. 원의 중심은 A의 바로 아래에 있고, 반지름은 $r = L\sin\theta$이다.



A를 지나는 연직선에 대한 입자의 각속도(angular speed)는 ω이므로, 입자의 가속도는 $r\omega^2 = L\omega^2 \sin\theta$이고 수평 방향으로 중심을 향한다. 연직 방향의 가속도는 없다.

연직 방향으로 분해하면

$$T\cos\theta = mg. \tag{1}$$

수평 방향으로, 중심을 향하는 쪽으로 분해하면

$$T\sin\theta = mL\omega^2\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad T = mL\omega^2, \tag{2}$$

이다. 여기서 $\sin\theta \neq 0$이므로 $\sin\theta$로 나눌 수 있다.

> **생각해 보기** 원운동이 진짜라는 사실(입자가 그냥 가만히 매달려 있는 것이 아니라는 사실)은 어디에서 쓰이는가?

두 번 쓰인다. (2)에서 $\sin\theta$로 나눌 때, 그리고 아래에서 $\cos\theta < 1$이라고 말할 때이다. 만약 $\theta = 0$이면 입자는 그냥 축 위에 정지한 채 매달려 있을 뿐이고, (2)는 아무것도 말해 주지 않으며, 어떤 ω든 "성립"하게 된다.

줄의 길이는 $2a$보다 길다. (1)에서 $0 < \cos\theta < 1$이므로

$$T = \frac{mg}{\cos\theta} > mg.$$

훅의 법칙을 쓰면 이는 다음을 뜻한다.

$$\frac{mg(L-a)}{a} > mg \quad\Longrightarrow\quad L - a > a \quad\Longrightarrow\quad L > 2a,$$

따라서 줄은 $2a$보다 긴 길이로 늘어난다.

ω의 범위. 훅의 법칙에서 얻은 T의 식과 (2)에서 얻은 식을 같다고 놓으면

$$mL\omega^2 = \frac{mg(L-a)}{a} \quad \Longrightarrow \quad \omega^2 = \frac{g}{a}\left(1 - \frac{a}{L}\right).$$

$L > 2a$이므로 $0 < \frac{a}{L} < \frac{1}{2}$이고, 따라서 $\frac{1}{2} < 1 - \frac{a}{L} < 1$이다. 그러므로

$$\frac{g}{2a} < \omega^2 < \frac{g}{a},$$

이고, 이것이 보여야 할 것이었다.

역(converse) (요구되지는 않지만 안심이 된다). ω가 이 범위에 있으면 $L = \dfrac{a}{1 - a\omega^2/g}$로 놓자. 이 값은 양수이고 $L > 2a$를 만족하며, $\cos\theta = \dfrac{mg}{T} = \dfrac{a}{L-a}$를 주는데, 이는 0과 1 사이에 엄격하게 놓인다. 따라서 그러한 모든 ω에 대하여 원뿔 운동이 실제로 존재한다.

검산

- 극한(limits): $L \to 2a$일 때 장력은 mg로 다가가고, $\theta \to 0$이며 $\omega^2 \to g/(2a)$인데, 이는 길이가 $2a$인 단진자(simple pendulum)의 작은 진동의 진동수이다. $L \to \infty$일 때 $\omega^2 \to g/a$이다.
- 수치 계산: $\omega^2 = \frac{3}{4}\,g/a$로 두면 $L = 4a$, $T = 3mg$, $\cos\theta = \frac{1}{3}$을 얻는다. 이 초기 조건에서 출발하여 3차원 운동 방정식 전체를 두 바퀴 동안 단계적으로 수치 적분해 보면, 입자는 예측한 원에서 10^{-13} 단위 이내로 머물렀다.
- 단위: g/a의 단위는 s^{-2}으로, ω^2의 단위와 같아야 하는 대로 같다.

흔한 실수

- 원의 반지름을 $L\sin\theta$가 아니라 L로 잡는 것. 그러면 (2)에서 $\sin\theta$가 약분되지 않는다.
- $T > mg$이려면 $\cos\theta < 1$, 즉 $\theta \neq 0$이어야 한다는 것을 잊는 것. 엄격한 부등식은 이 사실에 달려 있다.
- 늘어난 길이 L 대신 자연 길이(natural length) a(또는 평형 길이 $2a$)를 반지름으로 쓰는 것.

STEP 너머

아래 한계 $\omega^2 = g/(2a)$는 연직선 주위의 작은 진동의 진동수이며, 이는 우연이 아니다. 축 근처의 정상 원뿔 운동은 서로 수직인 두 개의 작은 진동이 4분의 1 주기만큼 위상이 어

긋난 것에 지나지 않기 때문이다. 위쪽 한계는 줄이 아무리 많이 늘어나더라도 줄의 강성(stiffness)이 더 이상 구심력(centripetal force)을 공급할 수 없게 되는 지점이다. 정상 운동과 그 안정성(stability)을 연구하는 것, 예를 들어 입자를 원에서 살짝 밀어내면 어떻게 되는지 묻는 것은 대학 1학년 동역학(dynamics)의 표준 주제이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 원뿔 진자와 회전하는 계에서의 운동 분석을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP I 견본 문제지, 문제 14

확률과 통계 • 기댓값

STEP I 견본 문제지, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/spec-s1-q14

핵심 아이디어

모든 것은 표 하나에 달려 있다. 바로 공정한 사면체 주사위 두 개의 눈의 합의 분포(distribution)이다. 이 표만 있으면 어떤 추측값 x에 대해서든 기대 이득(expected gain)은 그저 "상금 곱하기 이길 확률, 빼기 벌금 곱하기 질 확률"이다. 흥미로운 긴장 관계는 큰 수를 추측하면 상금은 크지만 이길 확률이 작다는 데 있으므로, 모든 경우를 비교해 보기 전까지는 최선의 추측이 무엇인지 분명하지 않다.

풀이

S를 눈의 합이라 하자. 각 주사위는 $1,2,3,4$가 각각 확률 $\frac{1}{4}$로, 서로 독립적으로(independently) 나오므로 16개의 순서쌍은 모두 같은 확률로 나타난다. 각 합을 만드는 순서쌍의 개수를 세면 다음을 얻는다.

s	2	3	4	5	6	7	8
$\mathrm{P}(S=s)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

(예를 들어 $S=5$는 $(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)$에서 나온다.)

B가 x를 추측하고 $p=\mathrm{P}(S=x)$라 하면, 펜스(pence) 단위의 이득 G는 확률 p로 $100x^2$이고 확률 $1-p$로 $-50x$이다. 따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(G) &= 100x^2p - 50x(1-p)\\ &= 50x\big[(2x+1)p-1\big].\end{aligned}$$

x를 만드는 방법의 수를 k라 하여 $p = \frac{k}{16}$로 쓰면

$$\mathrm{E}(G) = \frac{25x\left[k(2x+1) - 16\right]}{8}.$$

소문항 (i)

합이 8이 되는 것은 $(4,4)$뿐이므로 $p = \frac{1}{16}$이고

$$\mathrm{E}(G) = 6400 \cdot \frac{1}{16} - 400 \cdot \frac{15}{16} = 400 - 375 = 25,$$

이다. 따라서 8을 추측할 때 B의 기대 이득은 요구한 대로 25펜스이다.

소문항 (ii)

$2, 3, \ldots, 8$ 밖의 수를 추측하면 결코 이길 수 없으므로 (점수는 양수여야 하므로 x를 양수로 보면) 돈을 잃기만 한다. 가능한 일곱 가지 합에 대해 위의 공식으로 계산하면 다음과 같다.

x	2	3	4	5	6	7	8
k	1	2	3	4	3	2	1
$\mathrm{E}(G)$ (펜스)	−68.75	−18.75	137.5	437.5	431.25	306.25	25

예를 들어 $x = 5$일 때 $\mathrm{E}(G) = \frac{25\cdot 5\,(4\cdot 11 - 16)}{8} = \frac{125\cdot 28}{8} = 437.5$이다.

> ? **생각해 보기** 상금은 x^2처럼 커지는데, 왜 7이나 8 같은 큰 수를 추측하는 것이 최선이 아닐까?

상금은 실제로 빠르게 커지지만, 이길 확률은 5를 중심으로 양쪽으로 갈수록 줄어들고, 벌금은 훨씬 더 일어나기 쉬운 사건인 틀리는 경우에 치러야 한다. $x = 8$에서는 확률이 $\frac{1}{16}$까지 떨어져 큰 상금을 거의 정확히 상쇄해 버린다. 두 효과는 가운데 근처에서 가장 잘 균형을 이룬다. $x = 6$은 $x = 5$보다 상금이 크지만 이기는 방법이 네 가지가 아니라 세 가지뿐이어서 근소하게 뒤진다.

따라서 B에게 $\boxed{x = 5}$를 추측하라고 조언한다. 이때 기대 이득은 한 판에 437.5펜스, 즉 £4.375 (약 £4.38)이다.

검산

- 표의 확률을 모두 더하면 $\frac{16}{16} = 1$이다.
- 소문항 (i)의 결과가 정확히 25로 나오므로 표와 공식이 맞음을 확인할 수 있다.
- 5를 추측하는 게임을 400 000번 시뮬레이션한 결과 평균 이득은 약 437.2펜스로, 정확한 값 437.5와 비교된다.

흔한 실수

- 합 2부터 8까지가 모두 같은 확률이라고 생각하는 것: 같은 확률로 일어나는 결과는 16개의 **순서** 쌍이므로 그렇지 않다.
- B가 $50x$를 잃는 확률이 1이 아니라 $1 - p$라는 것을 잊는 것.
- 상금이 더 크다는 이유로 $x = 6$이나 $x = 7$에서 멈추는 것: 5와 6은 값이 가까우므로 모든 값을 계산해야 한다.

STEP 너머

이것은 기대 보수를 최대화하는 행동을 고르는 작은 의사결정 문제이다. 대학에서는 같은 아이디어가 결정 이론(decision theory)과 독립 확률변수(random variable)의 합에 대한 연구에서 나타난다. 합의 분포는 **합성곱**(convolution)으로 구하며(여기서는 표의 삼각형 모양이 그것이다), 주사위가 많아지면 중심극한정리(central limit theorem)에 의해 정규곡선(normal curve)에 가까워진다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)이 두 주제를 모두 다룬다.

풀이

STEP I 견본 문제지, 문제 15

확률과 통계 • 확률변수의 합

> **STEP I 견본 문제지, 15번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/spec-s1-q15

핵심 아이디어

C의 낯설어 보이는 분포(distribution)는, 가격의 마지막 자리 숫자가 $0, 1, \ldots, 9$ 중 어느 것이든 같은 확률로 나온다고 할 때, 가격 하나를 가장 가까운 10펜스 단위로 반올림하면서 생기는 오차와 정확히 같다. 그러면 쇼핑객의 전체 오차는 C의 독립(independent)인 복사본 36개의 합이므로 그 평균과 분산을 곧바로 구할 수 있고, 20펜스의 차이가 얼마나 놀라운 일인지는 중심극한정리(Central Limit Theorem)가 알려 준다.

풀이

C의 기댓값과 분산

모든 i에 대하여 $\mathrm{P}(C = i) = \mathrm{P}(C = -i)$이므로 분포는 0에 대하여 대칭이다. 따라서 항 $i\,\mathrm{P}(C = i)$들은 둘씩 짝지어 소거되고,

$$\mathrm{E}(C) = 0.$$

이다. (확률의 합은 실제로 1이다: $9 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{1}{20} = 1$.) 평균이 0이므로 분산(variance)은 그냥 $\mathrm{E}(C^2)$이다:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(C) = \mathrm{E}(C^2) &= 2 \cdot \frac{25}{20} + \frac{2}{10}\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2\right) \\ &= \frac{5}{2} + \frac{2 \cdot 30}{10} = \frac{17}{2}.\end{aligned}$$

쇼핑객의 어림셈

모형. 물건 하나에 대하여, 실제 가격에서 반올림한 가격을 뺀 값을 펜스 단위로 C라 하자. 이 값은 가격의 마지막 자리 숫자 d에만 의존한다. d가 $0, 1, \ldots, 9$ 중 어느 것이든 같은 확률로 나온다고 가정한다. 여기서 "무작위로" 산다는 말은 이런 뜻이어야 하지만, 이것은 실제 가격에 대한 하나의 가정이다.

- $d = 0$: 반올림이 일어나지 않으므로 $C = 0$이다.
- $d = 1, 2, 3, 4$: 가격이 d만큼 내려가므로 $C = d$이다.
- $d = 6, 7, 8, 9$: 가격이 $10 - d$만큼 올라가므로 $C = -(10 - d)$, 곧 $-4, -3, -2, -1$이다.
- $d = 5$: 가격이 같은 확률로 내려가거나 올라가므로 $C = 5$ 또는 -5이고, 각각의 확률은 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{20}$이다.

$-4, \ldots, 4$의 각 값은 정확히 한 숫자에서 확률 $\frac{1}{10}$로 나오고, ± 5는 각각 확률 $\frac{1}{20}$을 가진다. 이것은 바로 첫 부분의 분포이며, 그래서 처음에 그렇게 설정해 둔 것이다.

전체 오차. 36개 물건의 오차를 $C_1, \ldots, C_{36}$이라 하고,

$$S = C_1 + C_2 + \cdots + C_{36}$$

을 실제 청구액에서 쇼핑객의 어림값을 뺀 값이라 하자. 물건을 무작위로 고르므로 C_j들은 서로 독립이고 각각 C와 같은 분포를 따른다고 본다. 그러면

$$\mathrm{E}(S) = 36 \cdot 0 = 0, \qquad \mathrm{Var}(S) = 36 \cdot \tfrac{17}{2} = 306,$$

이다. 분산을 구할 때 독립성을 사용하였다. 따라서 S의 표준편차(standard deviation)는 $\sqrt{306} \approx 17.5$펜스이다.

> ? **생각해 보기** 20펜스는 큰 차이인가, 작은 차이인가?

이 값은 반올림 오차 하나의 크기가 아니라 표준편차와 비교해야 한다. 계산원의 청구액이 어림값보다 20펜스 많으므로 $S = 20$이다. 이는 평균보다

$$\frac{20}{\sqrt{306}} \approx 1.14$$

표준편차만큼 위에 있다. S는 독립이고 같은 분포를 따르는 변수 36개의 합이므로, 중심극한정리에 따라 S는 근사적으로 $\mathrm{N}(0, 306)$을 따른다. (S가 정숫값을 가지므로) 연속성 수정(continuity correction)을 하면

$$\mathrm{P}(S \geq 20) \approx \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{19.5}{\sqrt{306}}\right) = \mathrm{P}(Z \geq 1.11) \approx 0.13,$$

이다. 여기서 $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$이다. (어느 방향으로든) 적어도 이만큼 큰 오차는 약 26%의 경우에 일어난다.

따라서 쇼핑객은 실수를 의심할 이유가 **없다**. 20펜스의 차이는 반올림 오차의 정상적인 퍼짐 안에, 약 1 표준편차 안에 넉넉히 들어 있으며, 대략 장보기 일곱 번이나 여덟 번에 한 번꼴로 일어난다. 약 2 표준편차보다 큰 차이, 이를테면 35펜스 이상이어야 비로소 실제로 의심할 근거가 된다.

검산

- 가격을 가장 가까운 10펜스 단위로 반올림하면 많아야 5펜스가 바뀌므로, 물건 36개에 대한 최악의 경우는 180펜스이다. 전형적인 오차 약 17펜스는 이보다 훨씬 작은데, 당연히 그래야 한다. 양의 오차와 음의 오차가 대부분 서로 상쇄되기 때문이다.
- 컴퓨터로 확인한 결과, 반올림 오차는 정확히 C의 분포를 따르고 $\mathrm{E}(C) = 0$, $\mathrm{Var}(C) = \frac{17}{2}$이다. 이어서 분수를 써서 36개 복사본의 합성곱(convolution)을 정확히 계산하였다: $\mathrm{Var}(S) = 306$이고 $\mathrm{P}(S \geq 20) \approx 0.1330$이며, 정규근사(normal approximation)로는 0.1325, 2×10^5번의 장보기 모의실험으로는 0.132였다.

흔한 실수

- $\mathrm{Var}(S)$를 $36^2 \mathrm{Var}(C)$로 잡는 것. 이것은 하나의 오차가 36번 반복된 $36C$의 분산이다. 독립인 오차들의 분산은 그냥 더해진다.
- S가 정확히 20일 확률(약 0.012)을 놀라움의 척도로 삼는 것. S의 개별 값은 어느 것이나 꽤 일어나기 어렵다. 중요한 것은 관찰된 오차 이상으로 큰 오차가 나올 확률이다.
- 무엇을 가정하는지 밝히는 것을 잊는 것. 곧 가격의 마지막 자리 숫자가 균등분포(uniformly distributed)를 따르고 물건들의 오차가 서로 독립이라는 가정이다.

STEP 너머

이것이 가설검정(hypothesis test)의 바탕에 있는 추론이다. 아무 잘못도 없다고 가정하고(여기서는 S가 단지 반올림 오차라고 가정하고), 관찰된 결과 이상으로 극단적인 결과가 나올 가능성이 얼마나 되는지 묻는다. 반올림 오차에 대한 같은 분석이 수치해석(numerical analysis)에서도 쓰이는데, 여기서 많은 수를 반올림할 때 생기는 오차는 보통 수의 개수에 정비례하지 않고 그 제곱근처럼 커진다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)는 확률변수(random variable)의 합과 중심극한정리를 명료하게 다룬다.

풀이

STEP I 견본 문제지, 문제 16

확률과 통계 • 연속확률변수

STEP I 견본 문제지, 16번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/spec-s1-q16

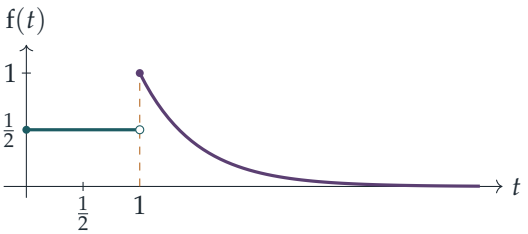
핵심 아이디어

미지수 k는 전체 확률이 1이라는 사실에서 정해지고, 나머지는 모두 밀도함수(density)의 두 조각을 따로 적분하면 얻어진다. 비용을 구할 때의 요령은 연속(continuous) 확률변수 T를 이산(discrete) 확률변수로 바꾸는 것이다. 동전의 개수는 완전히 지나간 30초 구간의 개수에만 의존하므로, T가 각 30초 구간에 들어갈 확률을 구하면 된다. 그다음은 등비급수(geometric series) 꼴의 급수가 해결해 준다.

풀이

k와 평균 구하기

밀도함수는 $[0,1)$에서 높이가 $\frac{1}{2}$인 평평한 조각과 그 뒤에 이어지는 지수함수 꼴의 꼬리(tail)로 이루어져 있으며, $t=1$에서 불연속적으로 뛴다.



첫 번째 조각이 확률 $\frac{1}{2}$을 차지하므로, 꼬리가 나머지 $\frac{1}{2}$을 차지해야 한다.

$$k\int_1^\infty \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t = k\left[-\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\right]_1^\infty = \tfrac{1}{2}k\mathrm{e}^{-2} = \tfrac{1}{2}, \qquad \text{따라서} \qquad k = \mathrm{e}^2.$$

(따라서 $t \geq 1$에서 밀도함수는 e^{2-2t}이고, 이는 그림에서처럼 $t = 1$에서 1이다.)

평균(mean)을 구하기 위해 $u = t$, $\mathrm{d}v = \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$로 두고 부분적분(integration by parts)을 하면

$$\int_1^\infty t\,\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t = \left[-\tfrac{1}{2}t\,\mathrm{e}^{-2t}\right]_1^\infty + \tfrac{1}{2}\int_1^\infty \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2} + \tfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-2} = \tfrac{3}{4}\mathrm{e}^{-2},$$

이다. 여기서 $t \to \infty$일 때 $t\,\mathrm{e}^{-2t} \to 0$임을 이용했다. 그러므로

$$\mathrm{E}(T) = \int_0^1 \tfrac{1}{2}t\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^2 \cdot \tfrac{3}{4}\mathrm{e}^{-2} = \tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4} = 1,$$

이 되어, 문제에서 요구한 대로 통화 시간의 기댓값(expected value)은 1분이다.

누적분포함수

$\mathrm{F}(t) = \mathrm{P}(T \leq t)$라 하자. $t < 0$이면 0이고, $0 \leq t < 1$이면 $\int_0^t \tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}s = \tfrac{1}{2}t$이며, $t \geq 1$이면

$$\mathrm{F}(t) = \tfrac{1}{2} + \int_1^t \mathrm{e}^{2-2s}\,\mathrm{d}s = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{2-2t}\right) = 1 - \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2-2t}.$$

이다. 따라서 누적분포함수(cumulative distribution function)는

$$\mathrm{F}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ \tfrac{1}{2}t & 0 \leq t < 1, \\ 1 - \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2-2t} & t \geq 1. \end{cases}$$

이다. f는 $t = 1$에서 뛰지만 F는 $t = 1$에서 연속이고(두 식 모두 $\tfrac{1}{2}$을 준다), $t \to \infty$일 때 $\mathrm{F}(t) \to 1$임에 주목하자. 앞으로 사용할 형태는 다음과 같다. $t \geq 1$이면 $\mathrm{P}(T > t) = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2-2t}$이다.

비용의 기댓값

통화를 시작할 때 동전 하나를 넣고, 30초가 완전히 지날 때마다 하나씩 더 넣는다. 따라서 통화가 T분 동안 이어지면 완전히 지난 30초 구간의 개수는 $\lfloor 2T \rfloor$이고

$$C = 10\big(1 + \lfloor 2T \rfloor\big).$$

이다. (통화가 정확히 30초 단위의 순간에 끝날 때 동전을 넣는지 여부는 상관없다. T는 연속 확률변수이므로 그런 일이 일어날 확률은 0이다.)

? 생각해 보기 연속인 T에서 C의 분포로 어떻게 넘어갈 수 있을까?

사건 $C = 10(n+1)$은 정확히 사건 $\tfrac{n}{2} \leq T < \tfrac{n+1}{2}$와 같으므로, 그 확률을 F에서 바로 읽어 낼 수 있다.

- $n = 0$: $\mathrm{P}(C = 10) = \mathrm{F}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$;
- $n = 1$: $\mathrm{P}(C = 20) = \mathrm{F}(1) - \mathrm{F}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$;
- $n \geq 2$: 두 끝점이 모두 1 이상이므로

$$\mathrm{P}\big(C = 10(n+1)\big) = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2-n} - \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2-(n+1)} = \tfrac{1}{2}\big(1 - \mathrm{e}^{-1}\big)\mathrm{e}^{2-n}.$$

$r = \mathrm{e}^{-1}$, $m = n - 2$로 두면 $\mathrm{e}^{2-n} = r^m$이고 $10(n+1) = 10(m+3)$이다. 그러면

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(C) &= 10 \cdot \tfrac{1}{4} + 20 \cdot \tfrac{1}{4} + \sum_{m=0}^{\infty} 10(m+3) \cdot \tfrac{1}{2}(1-r)\, r^m \\ &= \tfrac{15}{2} + 5(1-r)\left(\sum_{m=0}^{\infty} m r^m + 3\sum_{m=0}^{\infty} r^m\right).\end{aligned}$$

이다. $0 < r < 1$이므로 등비급수에서 $\sum r^m = \dfrac{1}{1-r}$이고, 이를 항별로 미분(differentiate term by term)한 뒤 r를 곱하면 $\sum m r^m = \dfrac{r}{(1-r)^2}$를 얻는다. 그러므로

$$\mathrm{E}(C) = \tfrac{15}{2} + 5(1-r)\left(\frac{r}{(1-r)^2} + \frac{3}{1-r}\right) = \tfrac{15}{2} + \frac{5r}{1-r} + 15.$$

이다. 마지막으로 $\dfrac{r}{1-r} = \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{1-\mathrm{e}^{-1}} = \dfrac{1}{\mathrm{e}-1}$이므로

$$\mathrm{E}(C) = 22\tfrac{1}{2} + \frac{5}{\mathrm{e}-1},$$

이 되어 요구한 결과를 얻는다. 수치로는 약 25.41펜스이다.

해석

1분에 20펜스라면 평균 길이가 1분인 통화는 평균 20펜스가 들어야 할 것 같지만, 실제로는 $\mathrm{E}(C) \approx 25.4$이다. 이런 차이가 생기는 까닭은 그 남자가 30초마다 **미리** 돈을 내기 때문이다. 동전 하나는 30초를 통째로 사지만, 마지막 동전으로 산 시간은 거의 언제나 다 쓰이지 않는다. 실제로 $\lfloor 2T \rfloor > 2T - 1$이므로 모든 통화에 대해 $C = 10(1 + \lfloor 2T \rfloor) > 20T$이다. 비용은 통화 시간을 다음 30초 단위로 **올림**하므로, $\mathrm{E}(C)$는 $20\,\mathrm{E}(T)$보다 돈을 내고도 쓰지 않은 시간의 기댓값의 20배만큼(여기서는 약 5.4펜스) 더 크다.

검산

- C의 확률을 모두 더하면 1이다: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \sum_{m \geq 0} \frac{1}{2}(1-r)r^m = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.
- 부등식 $20T < C \leq 20T + 10$에서 $20 < \mathrm{E}(C) \leq 30$이고, 25.41은 넉넉히 그 안에 들어간다. 마지막 30초 구간에서 쓰지 않은 시간이 균등분포(uniform distribution)를 따른다면 초과분은 약 5펜스로 예상되는데, 긴 꼬리 때문에 조금 더 커진다.

- 수치적으로 심프슨 공식(Simpson's rule)을 쓰면 전체 확률 1과 평균 1을 얻고, 통화 10^6건을 시뮬레이션하면(절반은 $[0,1)$에서 균등분포, 절반은 1에 비율 2인 지수분포(exponential distribution)를 더한 값) 평균 비용이 25.41펜스로 나와 $22.5 + 5/(\mathrm{e}-1) = 25.4099$와 일치한다.

흔한 실수

- 처음에 넣는 동전을 잊고 동전의 개수를 $1 + \lfloor 2T \rfloor$가 아니라 $\lfloor 2T \rfloor$로 잡는 실수. 이렇게 하면 답에서 정확히 10펜스가 빠진다.
- $t = \frac{1}{2}$에서 F에 $t \geq 1$일 때의 식을 쓰는 실수. 구간 $[0, \frac{1}{2})$와 $[\frac{1}{2}, 1)$은 균등한 조각으로 다루어야 한다.

STEP 너머

T의 꼬리는 무기억성(memoryless property)을 가진다는 점에 주목하자. $T \geq 1$이라는 조건 아래에서 남은 시간 $T - 1$은 비율 2인 지수분포를 따르며, 바로 이 때문에 $n \geq 2$에 대한 확률들이 등비수열을 이룬다. $N = \lfloor 2T \rfloor$로 두면 꼬리합 공식(tail-sum formula) $\mathrm{E}(N) = \sum_{n \geq 1} \mathrm{P}(N \geq n)$으로 같은 답을 훨씬 더 빨리 얻을 수 있다. 이처럼 이산적 성질과 연속적 성질이 섞인 경우는 Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)에서 꼼꼼하게 다루며, Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률 입문)에는 무기억성에 관한 예가 훨씬 더 많이 실려 있다.

풀이

STEP II 견본 문제지, 문제 1

순수수학 • 부분분수

> **STEP II 견본 문제지, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q1

핵심 아이디어

흔히 쓰는 부분분수(partial fractions) 분해 절차를 꺼내 들기 전에 분자를 살펴보자. 분자는 정확히 분모의 도함수(derivative)이다. 분모는 일차인수들의 곱으로 인수분해되므로 f는 로그 도함수(logarithmic derivative)이고, 곱의 로그 도함수는 각 인수의 로그 도함수의 합이다. 두 번째 부분에서는 방정식이 합이 1인 세 단위분수(unit fraction)의 합이 되며, 크기만 따져 보아도 x는 매우 작을 수밖에 없다.

풀이

부분분수

분모는 다음과 같이 인수분해된다.

$$D(x) = x^3 + (a+b)x^2 + abx = x\big(x^2 + (a+b)x + ab\big) = x(x+a)(x+b),$$

이를 미분하면

$$D'(x) = 3x^2 + 2(a+b)x + ab,$$

이고, 이것은 바로 분자이다. 따라서 $f(x) = D'(x)/D(x)$이다.

일반적인 경우, $a \neq b$. 세 인수 x, $x+a$, $x+b$는 서로 다르므로($a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq b$이기 때문이다) 세 개의 단순한 부분분수가 나올 것으로 예상된다. 곱의 미분법(product rule)을 쓰면

$$D'(x) = (x+a)(x+b) + x(x+b) + x(x+a),$$

이고, 각 항을 $D(x) = x(x+a)(x+b)$로 나누면

$$\boxed{\mathrm{f}(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b}} \qquad (a \neq b).$$

를 얻는다. (같은 말로, $\mathrm{f}(x) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|x(x+a)(x+b)|$이고, 곱의 로그는 합으로 나뉜다.) 물론 가리기 방법(cover-up rule)으로도 같은 결과를 얻는다. $x = 0$에서의 계수는 $ab/(ab) = 1$이고, $x = -a$에서는 $\big(3a^2 - 2a^2 - 2ab + ab\big)/\big((-a)(b-a)\big) = a(a-b)/\big(a(a-b)\big) = 1$이며, $x = -b$에서도 마찬가지이다.

생각해 보기 $a = b$일 때 이 꼴에는 어떤 문제가 생기는가?

특수한 경우, $a = b$. 이제 분모는 중복 인수를 가진 $x(x+a)^2$이므로 표준적인 꼴은 $\frac{A}{x} + \frac{B}{x+a} + \frac{C}{(x+a)^2}$가 될 것이다. 그런데 분자도 인수 $x+a$를 가진다.

$$3x^2 + 4ax + a^2 = (3x+a)(x+a),$$

따라서 약분되어

$$\mathrm{f}(x) = \frac{3x+a}{x(x+a)} = \boxed{\frac{1}{x} + \frac{2}{x+a}} \qquad (a = b),$$

가 남는다. 마지막 단계는 가리기 방법이다($x = 0$이면 $a/a = 1$, $x = -a$이면 $-2a/(-a) = 2$). $(x+a)^{-2}$ 항은 전혀 없으므로 $C = 0$이다. 이 결과는 일반적인 공식에서 b를 a로 바꾼 것과 일치하지만, 중복 인수가 제곱항을 만들어 내는 대신 사라져 버렸다는 점은 눈여겨볼 만하다.

a와 b는 0이 아니므로 인수 x는 결코 $x+a$나 $x+b$와 같아질 수 없다. 따라서 경우는 이 둘뿐이다.

$\mathrm{f}(x) = 1$일 때

이제 x, a, b를 양의 정수라 하자. 위의 두 경우 모두에서($a = b$일 때의 공식은 일반 공식에 $b = a$를 넣은 것일 뿐이다)

$$\mathrm{f}(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b},$$

이고, 세 항은 모두 양수이다. $a, b \geq 1$이므로 뒤의 두 항은 각각 $\frac{1}{x}$보다 엄밀하게 작다.

생각해 보기 각각 $\frac{1}{x}$ 이하인 세 분수의 합이 1이라면 x는 얼마나 클 수 있는가?

- $x = 1$이면 $\mathrm{f}(x) = 1 + (\text{양수}) > 1$이다.
- $x \geq 4$이면 $\mathrm{f}(x) < \frac{3}{x} \leq \frac{3}{4} < 1$이다.
- $x = 3$이면 $x + a \geq 4$이고 $x + b \geq 4$이므로 $\mathrm{f}(x) \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{6} < 1$이다.

따라서 $f(x) = 1$이려면 반드시 $x = 2$이어야 하고, 이때 필요한 조건은

$$\frac{1}{2+a} + \frac{1}{2+b} = \frac{1}{2}.$$

이다. 양변에 $2(2+a)(2+b)$를 곱하면 $2(2+b) + 2(2+a) = (2+a)(2+b)$, 즉 $8 + 2a + 2b = 4 + 2a + 2b + ab$이므로

$$ab = 4.$$

이다. a, b가 양의 정수이므로 가능한 경우는 $(a,b) = (1,4), (2,2), (4,1)$뿐이다. 그러므로 $f(x) = 1$이 되는 것은 정확히

$$(x,a,b) = (2,1,4), \quad (2,2,2), \quad (2,4,1),$$

일 때이고, 요구한 대로 유한 개(세 개)의 값이다. $(2,2,2)$는 특수한 경우 $a = b$에 해당한다는 점에 주의하자: $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} = 1$.

검산

세 해는 잘 알려진 단위분수 항등식 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$과 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$이다. 수치적으로는, 무작위로 고른 유리수 2000개의 점에서($a \neq b$인 경우와 $a = b$인 경우 모두) 부분분수 꼴을 원래의 f와 정확한 유리수 연산으로 비교하였고, $1 \le x, a, b < 200$인 모든 경우를 전수 탐색한 결과 위의 세 순서쌍만 정확히 나오고 다른 것은 나오지 않았다.

흔한 실수

- $a = b$인 경우에 $\frac{C}{(x+a)^2}$ 항을 넣고 무작정 계산하면서 약분을 알아채지 못하는 것. 계산하면 $C = 0$이 나와야 하며, 분자의 인수 $(x+a)$를 발견하면 그 수고를 덜 수 있다.
- $x = 1$과 $x = 3$을 배제하는 것을 잊는 것. 대략적인 부등식 $f < 3/x$로는 $x \ge 4$만 처리된다.
- "$ab = 4$"에서 멈추고 해를 나열하지 않거나, $(1,4)$만 쓰고 $(4,1)$과 $(2,2)$를 빠뜨리는 것.

STEP 너머

r_i가 다항식 D의 근일 때(중근은 중복도만큼 센다) 성립하는 항등식 $D'/D = \sum 1/(x - r_i)$는 매우 유용한 도구이다. 이 항등식은 근의 거듭제곱 합에 관한 뉴턴(Newton)의 항등식의 바탕이 되고, 복소해석학에서는 곡선을 따라 f'/f를 적분하여 그 곡선 내부에 있는 함수의 영점 개수를 세는 편각 원리(argument principle)의 바탕이 된다. 양의 정수에서 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$과 같은 방정식을 푸는 것은 이집트 분수(Egyptian fraction) 문제로, 디오판

토스 방정식(Diophantine equation)의 고전적인 한 분야이며, 우리가 쓴 것과 같은 크기 제한 논증이 모든 일을 해낸다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 편각 원리를 아름답게 기하적으로 설명하고, Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 디오판토스 방정식 공부를 시작하기에 좋은 책이다.

풀이

STEP II 견본 문제지, 문제 2

순수수학 • 대칭 연립방정식

> **STEP II 견본 문제지, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q2

핵심 아이디어

세 방정식은 순환적(cyclic)이므로 두 개씩 짝지어 빼 보는 것이 자연스럽고, 각 차는 $x+y+z$를 공통인수(common factor)로 하여 인수분해(factorise)된다. 그다음에는 차의 제곱의 합이 두 가지로 쓸모가 있다. x, y, z로 나타내면 이 합은 $a+b+c$의 배수이고, 한편 첫 번째 결과를 이용하면 이 합을 $a-b, b-c, c-a$와 $x+y+z$로 나타낼 수 있다. $x+y+z$와 두 변수끼리의 차를 알고 나면 세 개의 일차방정식으로 풀이가 끝난다.

풀이

같은 비

첫 번째 방정식에서 두 번째 방정식을 빼면

$$\begin{aligned} a-b &= x^2-y^2-yz+zx \\ &= (x-y)(x+y)+z(x-y) \\ &= (x-y)(x+y+z). \end{aligned}$$

똑같은 방법으로(또는 $x\to y\to z\to x, a\to b\to c\to a$로 순환시켜)

$$b-c=(y-z)(x+y+z), \qquad c-a=(z-x)(x+y+z).$$

$S=x+y+z$라 하자. $a\neq b$이므로 곱 $(x-y)S$는 0이 아니고, 따라서 $S\neq 0$이다(마찬가지로 x, y, z는 서로 다르다). a, b, c가 서로 다르므로 $a-b, b-c, c-a$와 S로 나눌 수 있고, 그러면

$$\frac{y-z}{b-c}=\frac{z-x}{c-a}=\frac{x-y}{a-b}=\frac{1}{x+y+z}$$

이므로 증명이 끝난다.

$x+y+z$ 구하기

문제에서 제시한 합을 전개하면

$$\begin{aligned}(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2 &= 2\big(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\big)\\ &= 2\big[(x^2-yz)+(y^2-zx)+(z^2-xy)\big]\\ &= 2(a+b+c).\end{aligned}$$

한편 앞 부분에서 $y-z=(b-c)/S$ 등을 얻었으므로, 같은 합은

$$\frac{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2}{S^2}=\frac{2\big(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab\big)}{S^2}$$

과 같다. 두 식을 같다고 놓고 $2(a+b+c)$로 나누면(a, b, c가 양수이므로 이 값은 양수이다)

$$S^2=\frac{a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab}{a+b+c}.$$

따라서 $\triangle^2$이 이 값일 때 $x+y+z=\triangle$이므로 증명이 끝난다. 여기서 $\triangle^2>0$임에 주의하자. 분자가 $(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2$의 절반이고, 이는 서로 다른 a, b, c에 대하여 양수이기 때문이다. 그러므로 $\triangle=\pm\sqrt{\triangle^2}$의 두 가지 가능성이 있고, 지금까지의 논의로는 그 중 하나를 고를 수 없다.

방정식 풀기

이제 다음을 안다.

$$x+y+z=\triangle,\qquad x-y=\frac{a-b}{\triangle},\qquad x-z=\frac{a-c}{\triangle}.$$

세 식을 모두 더하면

$$3x=\triangle+\frac{2a-b-c}{\triangle}=\frac{\triangle^2+2a-b-c}{\triangle}.$$

이 식은 깔끔하게 정리된다. $s=a+b+c$, $Q=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$라 두면 $\triangle^2=Q/s$이다. 그러면

$$\begin{aligned}s\big(\triangle^2+2a-b-c\big) &= Q+(a+b+c)(2a-b-c)\\ &= \big(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab\big)+\big(2a^2+ab+ca-b^2-c^2-2bc\big)\\ &= 3\big(a^2-bc\big).\end{aligned}$$

그러므로 $x=\dfrac{a^2-bc}{s\triangle}$이고, y, z는 순환시켜 얻는다. 이제 잘 알려진 인수분해

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\big(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab\big)$$

에 의하여 $(s\triangle)^2 = sQ = a^3+b^3+c^3-3abc$이다. $K = \sqrt{a^3+b^3+c^3-3abc} > 0$이라 쓰면 $s\triangle = \pm K$이고, 해는

$$(x,y,z) = \pm\frac{1}{K}\left(a^2-bc,\ b^2-ca,\ c^2-ab\right)$$

이다. 단, 부호는 모두 같은 것을 택한다.

> **생각해 보기** 우리는 해가 있다면 반드시 이 꼴이어야 한다는 것만 보였다. 이 둘이 정말로 해일까?

그렇다. 위의 논의는 모두 필요조건을 이어 간 것이었으므로, 원래 식에 다시 대입해 보아야 한다. 미지수의 제곱과 두 미지수의 곱만 나타나므로 전체 부호는 상관이 없고,

$$\begin{aligned}(a^2-bc)^2-(b^2-ca)(c^2-ab) &= a^4-2a^2bc+b^2c^2-\left(b^2c^2-ab^3-ac^3+a^2bc\right)\\ &= a\left(a^3+b^3+c^3-3abc\right) = aK^2.\end{aligned}$$

K^2으로 나누면 $x^2-yz=a$를 얻고, 나머지 두 방정식은 순환시켜 얻는다. 따라서 해는 정확히 두 개이며, 하나는 다른 하나의 부호를 바꾼 것이다.

검산

- $a=1, b=2, c=3$으로 놓자. 그러면 $a^3+b^3+c^3-3abc = 18$, $K = 3\sqrt{2}$이고, 양의 부호를 택한 해는 $(x,y,z) = \frac{1}{3\sqrt{2}}(-5,1,7)$이다. 예를 들어 $x^2-yz = \frac{25-7}{18} = 1$이고, $x+y+z = \frac{1}{\sqrt{2}}$이며 그 제곱은 $\frac{1}{2} = \frac{14-11}{6} = \triangle^2$이다.
- 컴퓨터로 서로 다른 양수 a, b, c의 무작위 순서쌍 20,000개를 두 부호 모두에 대하여 시험하였다. 공식은 세 방정식과 같은 비 조건을 모두 만족하였고, 상대 오차는 10^{-11} 미만이었다.

흔한 실수

- $\triangle$에 대하여 양의 제곱근만 택하는 것. 문제의 $\triangle$는 $\triangle^2$을 통해서만 정의되며, 두 부호 모두 실제 해를 준다.
- $x+y+z$가 0이 아닌 이유를 밝히지 않고 이것으로 나누는 것. 여기서는 $a \neq b$로부터 이 사실이 나온다.

STEP 너머

항등식(identity) $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$는 행이 (a,b,c), (c,a,b), (b,c,a)인 순환행렬(circulant matrix)의 행렬식(determinant)이며, 복소

수(complex numbers) 범위에서는 $\omega = e^{2\pi i/3}$일 때 $(a+b+c)(a+\omega b+\omega^2 c)(a+\omega^2 b+\omega c)$로 완전히 인수분해된다. 사실 사상 $(x,y,z) \mapsto (x^2-yz,\, y^2-zx,\, z^2-xy)$는 순환행렬의 수반행렬(adjugate)이며, 이것이 이 사상의 역을 그토록 쉽게 구할 수 있는 이유이다. 순환행렬과 그 고유벡터(eigenvector)는 이산 푸리에 변환(discrete Fourier transform)을 처음 만나기에 좋은 부드러운 입구이다. 더 읽어 보려면 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)가 좋은 출발점이다.

풀이

STEP II 견본 문제지, 문제 3

순수수학 • 드무아브르 정리

> **STEP II 견본 문제지, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q3

핵심 아이디어

드무아브르 정리(de Moivre's theorem)는 자연스럽게 귀납법(induction)으로 증명된다. 덧셈정리(compound-angle formulae)에 의해 $\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$를 한 번 더 곱할 때마다 각에 θ가 더해지기 때문이다. 방정식에서는 x^k 옆에 $\cos ky$, $\sin ky$가 놓인 모양이 "실수부와 허수부"를 강하게 암시한다. 첫 번째 방정식을 $z = x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$에 대한 하나의 복소수 방정식의 실수부(real part)로, 두 번째 방정식을 허수부(imaginary part)로 보면, 두 방정식은 쉽게 찾을 수 있는 근을 가진 z에 대한 삼차방정식(cubic) 하나로 합쳐진다.

풀이

드무아브르 정리

n에 대한 귀납법을 쓴다. $n = 1$일 때 양변은 모두 $\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$이므로 결과가 성립한다.

어떤 $n = k \geq 1$에 대하여 성립한다고 가정하자. 그러면

$$\begin{aligned}(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^{k+1} &= (\cos k\theta + \mathrm{i}\sin k\theta)(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \\ &= (\cos k\theta\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta) + \mathrm{i}(\sin k\theta\cos\theta + \cos k\theta\sin\theta) \\ &= \cos(k+1)\theta + \mathrm{i}\sin(k+1)\theta\end{aligned}$$

이다. 여기서 첫째 줄에서는 귀납 가정(induction hypothesis)을, 둘째 줄에서는 $\mathrm{i}^2 = -1$을, 셋째 줄에서는 $\cos(A+B)$와 $\sin(A+B)$의 덧셈정리를 이용하였다. 따라서 $n = k+1$일 때도 결과가 성립하고, 귀납법에 의해 모든 양의 정수 n에 대하여 성립한다.

방정식 풀기

x와 y를 실수라 하고

$$z = x(\cos y + \mathrm{i}\sin y).$$

로 놓자. 드무아브르 정리에 의해 $n = 1, 2, 3$에 대하여

$$z^n = x^n(\cos y + \mathrm{i}\sin y)^n = x^n \cos ny + \mathrm{i}\, x^n \sin ny.$$

이다. (이는 x의 부호와 관계없이 성립한다. 실수 인수 x는 그냥 x^n으로 나올 뿐이다.) x와 y가 실수이므로 두 방정식의 좌변은 정확히 $z^3 + 2z^2 + 2z$의 실수부와 허수부이다. 따라서 두 실수 방정식은 하나의 복소수 방정식

$$z^3 + 2z^2 + 2z = -1, \qquad \text{즉,} \qquad z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = 0.$$

과 동치이다.

? 생각해 보기 왜 하나의 복소수 방정식이 두 실수 방정식과 같은가?

두 복소수는 실수부끼리 같고 허수부끼리 같을 때, 그리고 그때에만 같다. 우변 -1의 실수부는 -1, 허수부는 0이며, 이것이 바로 주어진 두 방정식의 우변이다. 따라서 (x, y)가 두 실수 방정식을 모두 만족하는 것은 z가 삼차방정식을 만족하는 것과 동치이다.

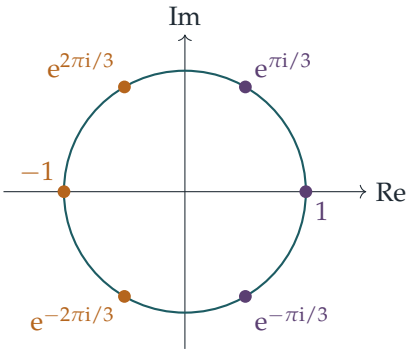
이제 $-1 + 2 - 2 + 1 = 0$이므로 $z = -1$은 근(root)이고, 이 인수로 나누면

$$z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = (z + 1)(z^2 + z + 1).$$

을 얻는다. 이차식의 근은 $z = \frac{1}{2}(-1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3})$이다. 따라서 세 근은

$$z = -1 = \cos \pi + \mathrm{i}\sin \pi, \qquad z = \cos \tfrac{2\pi}{3} \pm \mathrm{i}\sin \tfrac{2\pi}{3},$$

이며, 모두 단위원(unit circle) 위에 있다.



이제 각 근을 다시 실수 순서쌍 (x, y)로 바꾸는 일이 남았다. $|z| = |x|$이므로 모든 해는 $|x| = 1$을 만족한다. 특히 $x = 0$은 불가능하다($0 = -1$이 되기 때문이다).

- $x = 1$이면 $\cos y + \mathrm{i}\sin y = z$이므로 y는 세 근 중 하나의 편각(argument)이다. 즉 $y = \pi$, $\frac{2\pi}{3}$ 또는 $-\frac{2\pi}{3}$에 2π의 임의의 배수를 더한 값이다.
- $x = -1$이면 $\cos y + \mathrm{i}\sin y = -z$이고, 이는 $1, \cos\frac{\pi}{3} \mp \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}$ 중 하나이다(그림의 자주색 점). 따라서 $y = 0, -\frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{\pi}{3}$에 2π의 임의의 배수를 더한 값이다.

이들은 각각 삼차방정식의 근을 주므로 모두 해가 된다. k를 임의의 정수라 하면 해는

$$x = 1, \quad y = \pi + 2k\pi \text{ 또는 } y = \pm\tfrac{2\pi}{3} + 2k\pi; \qquad x = -1, \quad y = 2k\pi \text{ 또는 } y = \pm\tfrac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

이다. $[0, 2\pi)$에서는 여섯 개의 순서쌍 $(1, \frac{2\pi}{3})$, $(1, \pi)$, $(1, \frac{4\pi}{3})$, $(-1, 0)$, $(-1, \frac{\pi}{3})$, $(-1, \frac{5\pi}{3})$이다.

검산

$x = -1, y = 0$을 넣어 보자. 첫 번째 방정식은 $-1 + 2 - 2 = -1$이 되고 두 번째는 $0 = 0$이다. $x = 1, y = \frac{2\pi}{3}$을 넣어 보자. 코사인 값은 $1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$이므로 $1 - 1 - 1 = -1$이 되고, 사인 값은 $0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $0 - \sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$이 된다. $x \in [-3, 3]$, $y \in [0, 2\pi)$의 촘촘한 격자에서 컴퓨터로 탐색하면 (반올림 오차 범위에서) 위의 여섯 점에서만 근사해가 나타나므로, 빠뜨린 해는 없다.

흔한 실수

- x를 절댓값(modulus)으로 보고 $x \geq 0$이라고 가정하는 것. 문제는 임의의 실수 x를 허용하며, $x = -1$인 해도 똑같이 유효하다. 이들은 같은 점 z를 y를 π만큼 옮겨서 나타낸 것이다.
- $+2k\pi$를 빠뜨리는 것. y는 2π를 법으로 해서만 결정되므로 순서쌍 (x, y)는 무수히 많다.

STEP 너머

두 실수 방정식을 하나의 복소수 방정식으로 묶는 것은 표준적인 기법이다. $z = re^{\mathrm{i}\theta}$에 대한 다항식의 실수부와 허수부는 바로 이런 종류의 삼각방정식 연립을 만족하며, 인수분해(factorisation) $z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = (z + 1)(z^2 + z + 1)$는 근들을 단위원 위에 놓는다. 대학의 첫 강의에서는 $e^{\mathrm{i}\theta}$를 멱급수(power series)로 정의하게 되는데, 이렇게 하면 드무아브르 정리가 모든 정수에 대하여 성립하고 (분지(branches)에 주의한다면) 정수가 아닌 거듭제곱에도 의미를 부여할 수 있다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이 모든 내용을 기하학적으로 아름답게 설명한 책이다.

풀이

STEP II 견본 문제지, 문제 4

순수수학 • 쌍곡선 함수

STEP II 견본 문제지, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/spec-s2-q4

핵심 아이디어

이 항등식들은 모두 하나의 각(또는 하나의 쌍곡선(hyperbolic) "각")에 관한 명제이다. 우변에 이름을 붙이고, 그것의 한 함수를 읽어 낸 다음, 피타고라스 항등식(Pythagorean identities) $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$와 $1+\sinh^2 u=\cosh^2 u$를 이용해 나머지 함수를 구하면 된다. 정말로 주의해야 할 것은 제곱근의 부호뿐이다. 바로 여기에서 주값(principal value)의 범위가 중요해지고, 마지막 부분에서는 항등식이 더 이상 성립하지 않는 지점이 드러난다.

풀이

소문항 (i)

$\theta=\tan^{-1}(\sinh x)$라 하자. 그러면 $\tan\theta=\sinh x$이고, θ는 주값이므로 $-\frac{1}{2}\pi<\theta<\frac{1}{2}\pi$이다. 따라서

$$\sec^2\theta=1+\tan^2\theta=1+\sinh^2 x=\cosh^2 x.$$

$(-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi)$에서 $\cos\theta>0$이므로 $\sec\theta>0$이고, $\cosh x>0$은 항상 성립한다. 양의 제곱근을 취하면 $\sec\theta=\cosh x$이고, 따라서

$$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=\frac{\sinh x}{\cosh x}=\tanh x.$$

θ는 $\sin^{-1}$의 주값의 범위인 $[-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi]$에 있으므로, 이는 정확히 $\theta=\sin^{-1}(\tanh x)$임을 뜻한다. 그러므로 모든 실수 x에 대하여 $\sin^{-1}(\tanh x)=\tan^{-1}(\sinh x)$가 성립하며, 이것이 증명하려던 것이다.

? **생각해 보기** 왜 $\sin\theta=\tanh x$에서 논증이 이미 끝나는 것이 아닐까?

$\sin\theta = \tanh x$를 만족하는 해 θ는 무수히 많기 때문이다. 우리의 θ가 sin이 일대일(one-to-one)인 $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$에 있기 때문에 비로소 θ가 주값 $\sin^{-1}(\tanh x)$ 임을 결론지을 수 있다. 같은 범위가 $\sec\theta$의 부호도 정해 주었다.

소문항 (ii)

$u = \sinh^{-1}(\tan y)$라 하자. $-\frac{1}{2}\pi < y < \frac{1}{2}\pi$에서 $\tan y$는 유한하므로 이 값은 정의된다. 그러면 $\sinh u = \tan y$이고, (i)에 $x = u$를 대입하면

$$\sin^{-1}(\tanh u) = \tan^{-1}(\sinh u) = \tan^{-1}(\tan y) = y,$$

이다. 여기서 마지막 단계는 $\tan^{-1}$의 주값의 범위인 $-\frac{1}{2}\pi < y < \frac{1}{2}\pi$를 이용한 것이다. 양변에 sin을 취하면 $\tanh u = \sin y$이다. 이 구간에서 $|\sin y| < 1$이므로 $\tanh^{-1}(\sin y)$가 정의되고, tanh는 일대일이므로 $u = \tanh^{-1}(\sin y)$이다. 즉,

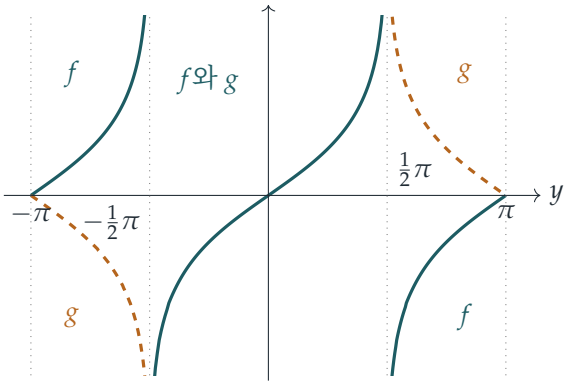
$$\sinh^{-1}(\tan y) = \tanh^{-1}(\sin y) \qquad \left(-\tfrac{1}{2}\pi < y < \tfrac{1}{2}\pi\right).$$

(직접 보이면: $\cosh u = \sqrt{1+\tan^2 y} = \sec y$이고, $\cos y > 0$이므로 이 값은 양수이다. 따라서 $\tanh u = \tan y \cos y = \sin y$이다.)

그래프의 개형 $f(y) = \sinh^{-1}(\tan y)$, $g(y) = \tanh^{-1}(\sin y)$라 하자. 두 함수 모두 $y = \pm\frac{1}{2}\pi$에서 정의되지 않는데, 이 점에서 $\tan y$는 무한대이고 $\sin y = \pm 1$이기 때문이다. 나머지 점에서의 성질은 tan과 sin의 대칭성으로부터 나온다.

- 두 함수는 모두 기함수(odd function)이고, $y = 0$과 $y = \pm\pi$에서 값이 0이다.
- tan의 주기(period)가 π이므로 f의 주기도 같다. 따라서 $(\frac{1}{2}\pi, \pi)$에서는 $(-\frac{1}{2}\pi, 0)$에서의 값을 그대로 반복한다. 즉 $-\infty$에서 0까지 증가한다.
- $\sin(\pi - y) = \sin y$이므로 g는 $y = \frac{1}{2}\pi$에 대하여 대칭이다. $(\frac{1}{2}\pi, \pi)$에서는 $(0, \frac{1}{2}\pi)$에서의 값을 거울에 비친 모양으로 반복한다. 즉 $+\infty$에서 0까지 감소한다.
- 미분하면 $f'(y) = \dfrac{\sec^2 y}{\sqrt{1+\tan^2 y}} = |\sec y|$이고 $g'(y) = \dfrac{\cos y}{1-\sin^2 y} = \sec y$이다. 따라서 f는 정의된 모든 구간에서 증가하는 반면, g는 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$에서 증가하고 그 바깥에서는 감소한다. 두 함수 모두 원점에서 기울기가 1이다. $y = \pi$에서 f의 기울기는 1이고 g의 기울기는 -1이다.

$(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$에서 두 그래프는 같은 곡선이고, 바깥쪽 구간에서는 각 그래프가 다른 그래프를 가로축에 대하여 대칭이동한 것이다.



실선: $f(y) = \sinh^{-1}(\tan y)$. 파선: $g(y) = \tanh^{-1}(\sin y)$ 중 f와 다른 부분. 점선 $y = \pm\frac{1}{2}\pi$는 점근선(asymptote)이다.

$\frac{1}{2}\pi < y < \pi$에서의 관계 개형을 보면 이 구간에서 $f = -g$일 것으로 보이며, 실제로 이를 증명할 수 있다. $\frac{1}{2}\pi < y < \pi$이면 $y - \pi$는 $(-\frac{1}{2}\pi, 0)$에 있으므로, 방금 증명한 항등식을 $y - \pi$에 적용할 수 있다:

$$\begin{aligned}\sinh^{-1}(\tan y) &= \sinh^{-1}\big(\tan(y-\pi)\big)\\ &= \tanh^{-1}\big(\sin(y-\pi)\big)\\ &= \tanh^{-1}(-\sin y) = -\tanh^{-1}(\sin y),\end{aligned}$$

여기서 $\tan(y-\pi) = \tan y$, $\sin(y-\pi) = -\sin y$와 $\tanh^{-1}$이 기함수라는 사실을 이용하였다. 따라서 $\frac{1}{2}\pi < y < \pi$에 대하여

$$\sinh^{-1}(\tan y) = -\tanh^{-1}(\sin y).$$

(기함수라는 성질에 의해 $-\pi < y < -\frac{1}{2}\pi$에서도 같은 관계가 성립한다.)

> ? **생각해 보기** $\frac{1}{2}\pi < y < \pi$일 때 (ii)의 논증은 어디에서 무너지는가?

$\tan^{-1}(\tan y) = y$인 단계에서이다. $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 바깥의 y에 대해서는 주값이 y가 아니라 $y - \pi$이다. 같은 말이지만, 직접 논증에서는 그 구간에서 $\cos y < 0$이므로 $\sqrt{1+\tan^2 y} = |\sec y| = -\sec y$이고, 이 음의 부호가 바로 답에 나타나는 부호이다.

검산

▶ $y = 1$에서: $\sinh^{-1}(\tan 1) = \tanh^{-1}(\sin 1) \approx 1.2262$. $y = 2$에서: $\sinh^{-1}(\tan 2) \approx -1.5235$인 반면 $\tanh^{-1}(\sin 2) \approx 1.5235$이므로, 부호가 바뀜을 확인할 수 있다.

- 부호: $\frac{1}{2}\pi < y < \pi$에서 $\tan y < 0$이지만 $\sin y > 0$이므로, 두 식은 부호가 반대여야 하며 같을 수 없다.
- 큰 x에서의 (i): 양변 모두 $\frac{1}{2}\pi$에 수렴하며, 당연히 그래야 한다.

두 항등식을 10^5개의 무작위 점에서, 그리고 관계 $f = -g$를 $\frac{1}{2}\pi < |y| < \pi$에서 수치적으로 검증하였다.

흔한 실수

- $\sqrt{1+\tan^2 y} = \sec y$라고 쓰면서 $\sec y$의 부호를 확인하지 않는 것. 이것이 바로 마지막 부분의 핵심이다.
- $\sin\theta = \tanh x$로부터 $\theta = \sin^{-1}(\tanh x)$라고 결론지으면서 θ가 왜 주값인지 설명하지 않는 것.
- g를 $\frac{1}{2}\pi$ 너머에서 f와 같은 모양으로 그리는 것: g는 tan의 주기성이 아니라 $\frac{1}{2}\pi$에 대한 sin의 대칭성을 물려받는다.

STEP 너머

함수 $\mathrm{gd}(x) = \tan^{-1}(\sinh x) = \sin^{-1}(\tanh x)$를 **구더만 함수**(Gudermannian function)라 한다. 이 함수는 복소수 없이 원함수와 쌍곡선함수를 연결하며, (ii)는 그 역함수가 $\sinh^{-1}(\tan y)$임을 보여 준다. 이 함수는 메르카토르 도법(Mercator map projection)에 등장하는데, 여기서 지도의 세로 좌표를 위도로 바꾸어 준다. 이 문제에서 항등식을 무너뜨린 역함수와 그 분지(branch)는 복소수 z에 대한 $\log z$와 $z^{1/2}$를 공부할 때 핵심 주제가 된다. Needham의 *Visual Complex Analysis*는 이를 살펴보기에 아름다운 책이다.

풀이

STEP II 견본 문제지, 문제 5

순수수학 • 급수와 적분을 이용한 한계

> **STEP II 견본 문제지, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q5

핵심 아이디어

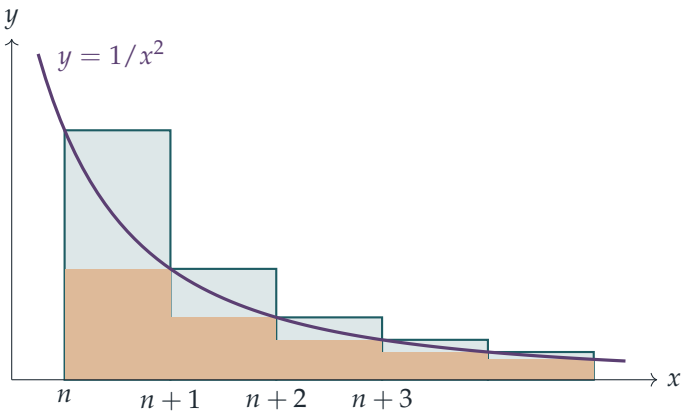
감소함수(decreasing function)의 함숫값들의 합은 폭이 1인 직사각형들을 한 줄로 늘어놓은 것으로, 적분(integral)은 곡선 아래의 넓이로 나타낼 수 있다. 직사각형을 각 표본점의 오른쪽에 놓으면 곡선 위로 삐져나오고, 왼쪽에 놓으면 곡선 아래에 쏙 들어간다. 이것으로 샌드위치가 만들어지고, 그 뒤는 모두 계산 정리일 뿐이다. 급수(series)의 꼬리(tail)가 두 간단한 분수 사이에 갇히므로, 꼬리에 대한 추측값을 더하면 추정이 엄청나게 좋아진다.

풀이

샌드위치

$f(x) = 1/x^2$이라 하자. 이 함수는 $x > 0$에서 양수이고 순감소한다. 또한 다음이 필요하다.

$$\int_n^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{M\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_n^M = \frac{1}{n}.$$



위쪽 직사각형(청록색 테두리). $[r, r+1]$ 위에 높이가 $f(r) = 1/r^2$인 직사각형을 놓는다. f가 감소하므로 $r < x \le r+1$에서 $f(x) < f(r)$이고, 따라서 이 직사각형의 넓이 $1/r^2$은 $\int_r^{r+1} f(x)\,\mathrm{d}x$보다 순전히 크다. 이것을 $r = n, n+1, \ldots$에 대하여 더하면 다음을 얻는다.

$$\sum_{r=n}^{\infty} \frac{1}{r^2} > \int_n^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}.$$

아래쪽 직사각형(호박색). $[r-1, r]$ 위에 높이가 $f(r) = 1/r^2$인 직사각형을 놓는다. 이번에는 $r-1 \le x < r$에서 $f(x) > f(r)$이므로 이 직사각형은 곡선 아래에 놓이고, 그 넓이 $1/r^2$은 $\int_{r-1}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x$보다 순전히 작다. 구간들이 $[n, \infty)$를 채우는 $r = n+1, n+2, \ldots$에 대하여 더하면

$$\int_n^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} > \sum_{r=n+1}^{\infty} \frac{1}{r^2}.$$

(세 양은 모두 유한하다. 적분은 $1/n$이고 두 합은 이 값으로 유계이다.) 이것이 요구된 두 부등식이며, 정리해 두면 다음과 같다.

$$\sum_{r=n}^{\infty} \frac{1}{r^2} > \frac{1}{n} > \sum_{r=n+1}^{\infty} \frac{1}{r^2}. \qquad (*)$$

꼬리 가두기

$S_n = \sum_{r=1}^{n} 1/r^2$이라 쓰자. 그러면 $A - S_n$은 정확히 꼬리 $T = \sum_{r=n+1}^{\infty} 1/r^2$이다.

$(*)$의 오른쪽 부등식에서 곧바로 $T < 1/n$을 얻는다.

> **생각해 보기** $(*)$의 왼쪽 부등식은 합이 $r = n$에서 시작하지만, 꼬리는 $r = n+1$에서 시작한다. T의 하계(lower bound)는 어떻게 얻을까?

부등식 $(*)$는 모든 양의 정수에 대하여 성립하므로, 그 왼쪽 절반에 n 대신 $n+1$을 대입한

다.

$$T = \sum_{r=n+1}^{\infty} \frac{1}{r^2} > \int_{n+1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{1}{n+1}.$$

두 결과를 합치면

$$\frac{1}{n} > A - \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r^2} > \frac{1}{n+1},$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다.

가장 작은 n

모든 항이 양수이므로 $S_n < A$이고, 오차는 $A - S_n$이다.

- $n \leq 9999$이면 $n+1 \leq 10^4$이므로 $A - S_n > \dfrac{1}{n+1} \geq 10^{-4}$이다. 즉 오차가 너무 크다.
- $n = 10^4$이면 $A - S_n < \dfrac{1}{n} = 10^{-4}$이다. 즉 오차가 충분히 작다.

따라서 가장 작은 값은 $n = 10\,000$이다. 여기서 두 부등식이 모두 순부등식이라는 점이 중요하다는 데 주목하자. $n = 9999$에서 하계는 정확히 10^{-4}이고, $n = 10^4$에서 상계(upper bound)는 정확히 10^{-4}이다.

개선된 추정값

가두는 부등식의 각 변에서 $\frac{1}{n+1}$을 빼면

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} > A - \left(\frac{1}{n+1} + \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r^2}\right) > 0.$$

따라서 $\frac{1}{n+1} + S_n$은 여전히 A보다 작지만, 그 차이는

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

보다 작다. $n = 10^4$일 때 이 값은 $\dfrac{1}{10^4 \times 10\,001} < \dfrac{1}{10^4 \times 10^4} = 10^{-8}$이므로, 개선된 추정값은 10^{-8}보다 작은 오차로 A를 근사하며, 이것이 요구된 결과이다.

추가된 항 $1/(n+1)$은 꼬리에 대한 추측값이며, 꼬리가 폭이 $1/(n(n+1))$밖에 되지 않는 구간에 갇혀 있으므로 이 추측은 크게 틀릴 수 없다.

검산

- 작은 경우: $n = 1$이면 $S_1 = 1$이고 $A = \pi^2/6 \approx 1.6449$이므로 $A - S_1 \approx 0.645$이며, 이 값은 실제로 $\frac{1}{2}$과 1 사이에 있다.

- $A = \pi^2/6$을 이용하여 수치적으로 합을 구하면 $A - S_{9999} \approx 1.00005 \times 10^{-4}$(아슬아슬하게 너무 큼)이고 $A - S_{10000} \approx 0.99995 \times 10^{-4}$(아슬아슬하게 충분히 작음)이므로 $n = 10\,000$이 확인된다.
- $n = 10^4$일 때 개선된 추정값의 오차는 약 5.0×10^{-9}로, 상계 $1/(n(n+1)) \approx 1.0 \times 10^{-8}$보다 작다. 그림에서 짐작할 수 있듯이(곡선이 각 직사각형의 삐져나온 부분을 대략 절반으로 자른다) 오차는 상계의 대략 절반이다.

흔한 실수

- 왼쪽 부등식을 $n+1$이 아니라 n에서 사용하는 것. 이렇게 하면 꼬리 $A - S_n$이 아니라 $\sum_{r=n}^{\infty}$의 하계를 얻게 된다.
- 순부등식을 등호가 있는 부등식처럼 다루거나 두 계 중 하나만 사용하여 $n = 9999$ 또는 $n = 10\,001$이라고 답하는 것. $n \leq 9999$를 배제하려면 하계가, $n = 10^4$을 받아들이려면 상계가 필요하다.
- 직사각형을 각 표본점의 엉뚱한 쪽에 그려서 부등식의 방향이 뒤바뀌는 것.

STEP 너머

이것은 수렴(convergence)에 대한 적분판정법(integral test)이며, 여기에 정량적인 덤까지 따라온다. 급수가 수렴함을 증명하는 바로 그 직사각형들이 꼬리의 크기도 추정해 주는 것이다. 이 아이디어를 다듬어 합을 적분과 비교하고 양 끝에서의 도함수로 보정하면 오일러-매클로린 공식(Euler–Maclaurin formula)에 이른다. 이 공식은 여기서 $A - S_n \approx \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3}$을 예측하며, 오일러(Euler)는 $\sum 1/r^2$이 $\pi^2/6$과 같음을 증명하기 전에 이 방법으로 그 값을 소수점 아래 여러 자리까지 계산했다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해)는 급수와 그 수렴판정법을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP II 견본 문제지, 문제 6

순수수학 • 상미분방정식으로부터 덧셈정리 유도

> **STEP II 견본 문제지, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q6

핵심 아이디어

"f는 e^x이다"라고 말하는 것은 허용되지 않으므로, 모든 것을 미분방정식(differential equation) 자체로부터 이끌어 내야 한다. 사용할 수 있는 유일한 도구는 도함수(derivative)가 모든 곳에서 0인 함수는 상수(constant)라는 사실이다. 따라서 요령은 도함수가 서로 상쇄되어 0이 되는 식을 만든 다음, $x = 0$을 대입하여 그 상수를 결정하는 것이다. $a - x$에서의 값과 x에서의 값을 짝짓는 것은 자연스러운데, 두 변수의 합이 언제나 a이고, 이것이 바로 덧셈정리(addition formula)의 꼴이기 때문이다.

풀이

지수함수의 덧셈 법칙

a를 고정하고 $p(x) = \mathrm{f}(a - x)\,\mathrm{f}(x)$라 하자. 연쇄법칙(chain rule)에 의해 $\mathrm{f}' = \mathrm{f}$를 이용하면 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\mathrm{f}(a - x)] = -\mathrm{f}'(a - x) = -\mathrm{f}(a - x)$이다. 따라서 곱의 미분법(product rule)에 의해

$$\begin{aligned} p'(x) &= -\mathrm{f}(a - x)\,\mathrm{f}(x) + \mathrm{f}(a - x)\,\mathrm{f}'(x) \\ &= -\mathrm{f}(a - x)\,\mathrm{f}(x) + \mathrm{f}(a - x)\,\mathrm{f}(x) = 0, \end{aligned}$$

이고, 이것이 첫 번째 결과이다.

모든 x에 대하여 $p'(x) = 0$이므로 함수 p는 상수이다. $\mathrm{f}(0) = 1$이므로 $x = 0$에서의 값은 $\mathrm{f}(a)\,\mathrm{f}(0) = \mathrm{f}(a)$이다. 그러므로

$$\mathrm{f}(a - x)\,\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(a) \qquad \text{모든 } x\text{와 모든 } a\text{에 대하여.}$$

이제 임의의 x와 y를 잡고 $a = x + y$로 택하자. 그러면 $a - x = y$이고, 위의 항등식은

$$\mathrm{f}(y)\,\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(x + y),$$

가 되어 증명이 끝난다.

코사인의 덧셈정리

같은 전략을 그대로 따라 한다. 따라서 $a-x$와 x에서 계산한 c와 s의 조합 가운데 도함수가 0이 되는 것이 필요하다.

? **생각해 보기** 어떤 조합을 미분해야 할까?

답이 우리를 이끌게 하자. $a = x+y$일 때 우리가 원하는 것은 $\mathrm{c}(x)\mathrm{c}(y) - \mathrm{s}(x)\mathrm{s}(y)$, 즉 $\mathrm{c}(a-x)\mathrm{c}(x) - \mathrm{s}(a-x)\mathrm{s}(x)$이다. 그러므로 이것이 시도해 볼 함수이다.

a를 고정하고

$$g(x) = \mathrm{c}(a-x)\,\mathrm{c}(x) - \mathrm{s}(a-x)\,\mathrm{s}(x).$$

라 하자. 연쇄법칙과 주어진 도함수에 의해

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\mathrm{c}(a-x)] = -\mathrm{c}'(a-x) = \mathrm{s}(a-x), \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\mathrm{s}(a-x)] = -\mathrm{s}'(a-x) = -\mathrm{c}(a-x).$$

이다. 따라서 곱의 미분법에 의해

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left[\mathrm{s}(a-x)\,\mathrm{c}(x) - \mathrm{c}(a-x)\,\mathrm{s}(x)\right] - \left[-\mathrm{c}(a-x)\,\mathrm{s}(x) + \mathrm{s}(a-x)\,\mathrm{c}(x)\right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

이다. 그러므로 g는 상수이고, 그 값은

$$g(0) = \mathrm{c}(a)\,\mathrm{c}(0) - \mathrm{s}(a)\,\mathrm{s}(0) = \mathrm{c}(a)\cdot 1 - \mathrm{s}(a)\cdot 0 = \mathrm{c}(a).$$

이다. 따라서 모든 x와 a에 대하여 $\mathrm{c}(a-x)\mathrm{c}(x) - \mathrm{s}(a-x)\mathrm{s}(x) = \mathrm{c}(a)$이다. 임의의 x와 y에 대하여 $a = x+y$로 두면 $a-x = y$이므로

$$\mathrm{c}(x+y) = \mathrm{c}(x)\,\mathrm{c}(y) - \mathrm{s}(x)\,\mathrm{s}(y),$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

$h(x) = \mathrm{s}(a-x)\,\mathrm{c}(x) + \mathrm{c}(a-x)\,\mathrm{s}(x)$에 같은 방법을 적용하면 $h' = 0$이고 $h(0) = \mathrm{s}(a)$이므로, $\mathrm{s}(x+y) = \mathrm{s}(x)\mathrm{c}(y) + \mathrm{c}(x)\mathrm{s}(y)$도 성립한다.

검산

- $y = 0$을 대입하자. $\mathrm{f}(0) = \mathrm{c}(0) = 1$과 $\mathrm{s}(0) = 0$을 이용하면 결과는 $\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(x)$와 $\mathrm{c}(x) = \mathrm{c}(x)$가 된다.
- 코사인 결과에 $y = -x$를 대입하면 $1 = \mathrm{c}(0) = \mathrm{c}(x)\mathrm{c}(-x) - \mathrm{s}(x)\mathrm{s}(-x)$인데, 이것은 모습을 바꾼 $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$이다.

- 미분방정식을 수치적으로 풀고(내장된 지수함수나 삼각함수를 쓰지 않는 룽게-쿠타 방법(Runge–Kutta method)을 사용하였다) $[-3,3]$에서 무작위로 고른 60개의 순서쌍에서 두 항등식을 확인하였다. 예를 들어 $x=0.7, y=1.1$일 때 코사인 결과의 양변은 소수점 아래 넷째 자리까지 모두 -0.2272이다. 모든 차이는 10^{-11}보다 작았다.

흔한 실수

- $\mathrm{f}(a-x), \mathrm{c}(a-x), \mathrm{s}(a-x)$를 미분할 때 연쇄법칙에서 나오는 음의 부호를 빠뜨리는 것.
- "도함수가 0이다"에서 멈추고, $x=0$에서 상수를 계산한 다음 $a=x+y$로 택하는 단계를 하지 않는 것.
- 문제에서 명시적으로 금지한 $\cos(x+y)$의 공식이나 $\mathrm{e}^{x+y}=\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y$를 그대로 인용하는 것.

STEP 너머

대학에서는 이것이 지수함수와 삼각함수를 정의하는 정직한 방법이다. 즉 이 함수들을 미분방정식의 해로(또는 거듭제곱급수(power series)로) 정의하고, 익숙한 모든 성질을 그 정의로부터 이끌어 낸다. 여기서 사용한 사실, 곧 도함수가 모든 곳에서 0이면 함수가 상수일 수밖에 없다는 사실은 평균값 정리(Mean Value Theorem)의 결과이며, 이 사실로부터 이러한 해가 유일(unique)하다는 것도 알 수 있다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 이 이론을 꼼꼼하게 쌓아 올린다.

풀이

STEP II 견본 문제지, 문제 7

순수수학 • 계단함수의 적분

STEP II 견본 문제지, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/spec-s2-q7

핵심 아이디어

피적분함수(integrand) $[\mathrm{e}^x]$는 계단함수(step function)이다. 즉 e^x가 연속한 두 정수 사이에 머무는 각 구간에서 상수이다. 따라서 그 구간들을 찾고, 각 구간에서 상수를 적분한 다음, 모두 더하면 된다. 이렇게 얻은 합은 다루기 어색해 보이지만, 같은 항끼리 맞추어 놓으면 대부분의 로그가 짝지어 소거된다.

풀이

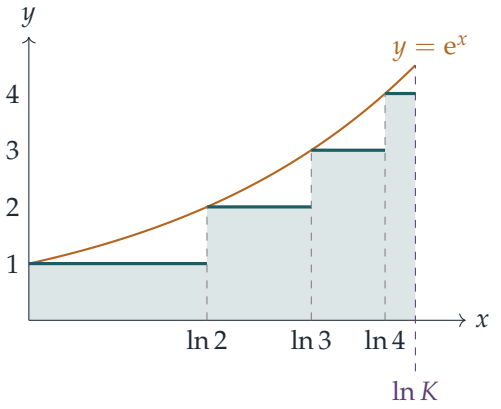
피적분함수가 상수인 곳

$K \geq 1$이라 하자. 그러면 $\ln K \geq 0$이고 $N = [K] \geq 1$이다. (만약 $0 < K < 1$이면 $\ln K$와 0 사이의 x에 대하여 $0 < \mathrm{e}^x \leq 1$이고, 한 점 $x = 0$을 제외하면 $[\mathrm{e}^x] = 0$이므로 $I = 0$이다. 또한 $N = 0$이고 $N \ln K - \ln 0! = 0$이다. 따라서 이 경우에도 결과가 성립한다.)

정수 $k \geq 1$에 대하여 ln이 증가함수이므로

$$k \leq \mathrm{e}^x < k+1 \iff \ln k \leq x < \ln(k+1),$$

이다. 그러므로 $[\ln k, \ln(k+1))$에서 $[\mathrm{e}^x] = k$이다. 적분 구간 $0 \leq x \leq \ln K$에서는 $1 \leq \mathrm{e}^x \leq K$이므로 $[\mathrm{e}^x]$는 $1, 2, \ldots, N$의 값을 갖고, 마지막 값 N은 $[\ln N, \ln K]$에서 성립한다. 그 구간에서는 $N \leq \mathrm{e}^x \leq K < N+1$이기 때문이다.



색칠한 넓이가 I이다($K = 4.5$로 그렸으므로 $N = 4$이다).

조각 더하기

각 구간에서 상수를 적분하면

$$I = \sum_{k=1}^{N-1} k\big(\ln(k+1) - \ln k\big) + N\big(\ln K - \ln N\big).$$

(을 얻는다. $N = 1$이면 합은 빈 합이고, $K = N$이면 마지막 항은 0이다. 어느 경우도 따로 다룰 필요가 없다.)

> **생각해 보기** $\sum k\big(\ln(k+1) - \ln k\big)$를 어떻게 간단히 할까? 이대로는 망원급수(telescoping sum)처럼 소거되지 않는다.

두 합으로 나누고, 첫 번째 합에서 $j = k + 1$로 놓아 첨자를 옮기면

$$\sum_{k=1}^{N-1} k\ln(k+1) = \sum_{j=2}^{N}(j-1)\ln j.$$

이다. 이제 두 합 모두 $\ln j$의 배수들의 합이므로, 각 $\ln j$의 계수를 모을 수 있다. $\ln 1 = 0$을 이용하면

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N-1} k\big(\ln(k+1) - \ln k\big) &= \sum_{j=2}^{N}(j-1)\ln j - \sum_{j=2}^{N-1} j\ln j \\ &= (N-1)\ln N + \sum_{j=2}^{N-1}\big((j-1) - j\big)\ln j \\ &= (N-1)\ln N - \sum_{j=2}^{N-1}\ln j.\end{aligned}$$

이다. 마지막 조각 $N\ln K - N\ln N$을 더하면

$$\begin{aligned} I &= N\ln K - \ln N - \sum_{j=2}^{N-1} \ln j \\ &= N\ln K - \sum_{j=1}^{N} \ln j \\ &= N\ln K - \ln(N!), \end{aligned}$$

이므로 요구된 결과를 얻는다.

더 매끄러운 관점

색칠한 영역을 세로 띠로 자르는 대신 가로 층으로 잘라 보자. $1 \le k \le N$에 대하여, 높이 $k-1$과 k 사이의 층은 정확히 $[\mathrm{e}^x] \ge k$인 곳, 즉 $\mathrm{e}^x \ge k$인 곳, 다시 말해 $\ln k \le x \le \ln K$에서 존재한다. 그 층의 넓이는 $\ln K - \ln k$이므로 곧바로

$$I = \sum_{k=1}^{N} (\ln K - \ln k) = N\ln K - \ln(N!)$$

을 얻는다. 엄밀하게는 $1 \le y < N+1$에 대하여 $[y] = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{1}[y \ge k]$임을 이용하고, 이를 항별로 적분하는 것이다. 이는 위의 첨자 옮기기와 같은 재배열을 기하학적으로 한 것이다.

검산

- $K = 1$: 적분 구간의 길이가 0이고, 공식은 $1\cdot 0 - \ln 1 = 0$을 준다.
- $K = \mathrm{e}$: 이때 $N = 2$이고, 직접 계산하면 $I = \ln 2 + 2(1 - \ln 2) = 2 - \ln 2 \approx 1.3069$이며, 이는 $2\ln \mathrm{e} - \ln 2$와 일치한다.
- $K = 10$이면 공식은 $10\ln 10 - \ln(10!) \approx 7.9214$를 주고, $[0, \ln 10]$에서 $[\mathrm{e}^x]$의 중점 구적법(midpoint quadrature) 값과 5×10^{-6} 이내로 일치한다. $[1, 40]$의 임의의 K 값에 대해서도 일치한다.

흔한 실수

- 구간 $[\ln N, \ln(N+1)]$까지 포함하여 합을 N까지 진행하는 것. 적분 구간의 위끝은 $\ln(N+1)$이 아니라 $\ln K$이므로, 마지막 조각은 따로 다루어야 한다.
- 첨자를 다시 매길 때 양 끝 항을 잘못 처리하는 것. $N = 3$일 때의 합을 직접 써서 확인하자.

STEP 너머

$\sum k(a_{k+1}-a_k)$를 $-\sum a_k$와 경계 항의 합으로 바꾸는 것을 **부분합산**(summation by parts, 아벨 합(Abel summation))이라 하며, 이는 부분적분(integration by parts)의 이산적 대응물이다. $K=N$으로 놓고 $\mathrm{e}^x-1<[\mathrm{e}^x]\le \mathrm{e}^x$를 이용하면 $N\ln N-N+1\le \ln(N!)\le N\ln N-N+1+\ln N$을 얻는데, 이는 스털링 근사(Stirling's approximation)를 향한 첫 걸음이다. 같은 아이디어를 리만-스틸체스 적분(Riemann–Stieltjes integral) $\int f\,\mathrm{d}[t]$로 쓰면, 해석적 정수론(analytic number theory) 전반에서 합을 적분으로 바꾸는 도구가 된다. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*(해석적 정수론 입문)를 참고하라.

풀이

STEP II 견본 문제지, 문제 8

순수수학 • 모듈러 군에서의 위수

> **STEP II 견본 문제지, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q8

핵심 아이디어

N을 법(modulo)으로 하면 수 $N-1$은 그냥 -1이고, $m+n=N$은 $n \equiv -m$이라는 뜻이다. 따라서 n의 모든 거듭제곱은 부호를 제외하면 m의 거듭제곱이다: $n^k \equiv (-1)^k m^k$. k가 짝수인지 홀수인지에 따라 그 부호가 의미를 갖는지가 결정되고, 세 소문항은 위수(order)의 홀짝성이 결합할 수 있는 세 가지 경우에 해당한다. 마지막 소문항에서는 이 사실들을 이용해 모든 거듭제곱을 계산하지 않고도 위수를 구한다.

풀이

이 풀이 전체에서 $\equiv$는 N을 법으로 하는 합동(congruent)을 뜻한다. 문제의 의도대로 G의 항등원(identity)은 1로 본다. (사실 $N-1 \in G$이면 이는 저절로 성립한다: e가 항등원이면 $e(N-1) \equiv N-1$, 즉 $-e \equiv -1$이므로 $e=1$이다.)

$N-1$의 위수

다음이 성립한다.

$$(N-1)^2 = N^2 - 2N + 1 \equiv 1,$$

또 $N \geq 3$이므로 $N-1 \neq 1$이다. 따라서 $(N-1)^1$은 항등원이 아니지만 $(N-1)^2$은 항등원이다. 즉 $N-1$의 위수는 2이다.

소문항 준비

$m+n=N$이므로 $n \equiv -m$이고, 따라서 모든 양의 정수 k에 대하여

$$n^k \equiv (-1)^k m^k, \qquad \text{동치로} \qquad m^k \equiv (-1)^k n^k.$$

이다. 또 G는 n과 m^{-1}을 포함하는 군(group)이므로 $N-1 \equiv -1 \equiv n\,m^{-1}$은 G에 속한다. 따라서 -1은 G의 원소이고, $N \geq 3$이므로 $-1 \neq 1$이다. 또한 x의 위수가 r이고 $x^k = 1$이면 $r \mid k$라는 잘 알려진 사실을 이용한다($0 \leq b < r$인 b로 $k = ar + b$라 쓰면 $x^b = 1$이므로, r의 최소성에 의해 $b = 0$이다).

소문항 (i)

p와 q가 모두 짝수라 하자. 그러면

$$n^p \equiv (-1)^p m^p = m^p \equiv 1,$$

이므로 $q \mid p$이다. 같은 방법으로 $m^q \equiv (-1)^q n^q = n^q \equiv 1$이므로 $p \mid q$이다. 서로를 나누는 두 양의 정수는 같으므로 $p = q$이다.

소문항 (ii)

p가 짝수이고 q가 홀수라 하자. p가 짝수이므로 $n^p \equiv m^p \equiv 1$이고, 따라서 $q \mid p$이다. 또 $2q$는 짝수이므로

$$m^{2q} \equiv n^{2q} = (n^q)^2 \equiv 1,$$

이고, 이로부터 $p \mid 2q$를 얻는다. $p = kq$라 쓰면 $kq \mid 2q$이므로 $k \mid 2$이고 $k = 1$ 또는 2이다. 그런데 $k = 1$이면 $p = q$가 홀수가 되는데, 그렇지 않다. 따라서 $k = 2$이고 $p = 2q$이다.

> ? **생각해 보기** 왜 단순히 $m^q \equiv -n^q \equiv -1$이므로 "$p$는 $2q$이어야 한다"고 논증할 수 없는가?

그 계산은 옳고 $m^q \neq 1$이면서 $m^{2q} \equiv 1$임을 보여 주지만, 그것만으로는 $p \mid 2q$이고 $p \nmid q$라는 것만 알 수 있을 뿐 p가 정확히 결정되지는 않는다(예를 들어 선험적으로는 $q = 3$일 때 p가 2일 수도 있다). 이 틈을 메우는 것은 p가 짝수라는 데서 나오는 추가적인 나누어떨어짐 $q \mid p$이다.

소문항 (iii)

모순을 이끌어 내기 위해 p와 q가 모두 홀수라고 가정하고, $r = pq$라 하자. r은 홀수이다. 그러면

$$n^r = (n^q)^p \equiv 1, \qquad \text{이지만 또한} \qquad n^r \equiv (-1)^r m^r = -(m^p)^q \equiv -1.$$

이다. 따라서 $1 \equiv -1$, 즉 $N \mid 2$인데, $N \geq 3$이므로 이는 불가능하다. 따라서 p와 q가 모두 홀수일 수는 없다.

(대칭성에 의해, 소문항 (ii)로부터 q가 짝수이고 p가 홀수이면 $q = 2p$임도 얻는다. 따라서 어느 경우에나 m과 $N - m$의 위수는 서로 같은 짝수이거나, 한쪽이 홀수인 다른 쪽의 두 배이다.)

21을 법으로 하는 군

2와 5의 거듭제곱을 차례로 21을 법으로 줄이면 다음과 같다.

k	1	2	3	4	5	6
2^k	2	4	8	16	11	1
5^k	5	4	20	16	17	1

(예를 들어 $2^5 = 32 \equiv 11$, $5^2 = 25 \equiv 4$, $5^4 \equiv 4^2 = 16$, $5^5 \equiv 80 \equiv 17$). 두 행 모두에서 처음으로 1이 나타나는 것은 $k = 6$일 때이므로, 2와 5의 위수는 모두 6이다.

이제 표에서 위수를 읽어 낸다. x의 위수가 6이면 x^k의 위수는 $6/\gcd(k,6)$이다. 따라서

- $11 = 2^5$와 $17 = 5^5$의 위수는 6이다.
- $4 = 2^2$와 $16 = 2^4$의 위수는 3이다.
- $8 = 2^3$과 $20 = 5^3$의 위수는 2이다($20 = N - 1$이므로 이는 첫 번째 소문항에서 이미 알고 있다).
- 1의 위수는 1이다.

남은 것은 10, 13, 19이고, 이들은 각각 이미 아는 원소와 짝을 지어 합이 21이 된다.

- $13 = 21 - 8$이고, 8의 위수는 짝수 2이다. (iii)과 그 뒤의 설명에 의해 13의 위수는 2(같은 짝수)이거나 1(2의 절반)이다. $13 \neq 1$이므로 위수는 1이 아니고, 따라서 13의 위수는 2이다. (확인: $13^2 = 169 = 8 \cdot 21 + 1$.)
- $19 = 21 - 2$이고 $10 = 21 - 11$이며, 2와 11의 위수는 6이다. 따라서 19와 10의 위수는 각각 6 또는 3이다.

그러므로 G의 모든 원소의 위수는 6 이하이다. 위수가 12인 순환군(cyclic group)에는 생성원(generator), 즉 위수가 12인 원소가 있고, 동형사상(isomorphism)은 원소의 위수를 보존한다. G에는 위수가 12인 원소가 없으므로, G는 위수가 12인 순환군과 동형이 아니다.

마무리하는 두 번째 방법도 있다. G에는 위수가 2인 원소가 8, 13, 20의 세 개 있지만, 위수가 12인 순환군에는 정확히 하나만 있다(g가 생성원이면 g^k의 위수가 2인 것은 $k = 6$일 때뿐이다).

검산

컴퓨터로 확인하면 G의 위수 전체 목록은 다음과 같다: 1의 위수는 1이고, 8, 13, 20의 위수는 2, 4, 16의 위수는 3, 2, 5, 10, 11, 17, 19의 위수는 6이다. (직접 계산하면 $10^3 = 1000 \equiv 13$이고 $19^3 \equiv (-2)^3 = -8 \equiv 13$이므로, 둘 다 위수가 3이 아니다.) 개수의 합 $1 + 3 + 2 + 6 = 12$는 G의 크기와 일치한다. 또한 소문항 (i)–(iii)을 $N < 60$인 모든 N에 대하여, 최대 두 원소로

생성되는 단원군(group of units)의 모든 부분군에서 모든 쌍 m, $N-m$에 대해 검사했다. 거의 1900개의 쌍에서 예외는 없었다.

흔한 실수

- 이유를 밝히지 않고 $N-1 \in G$라고 가정하는 것. 이는 주어진 조건이 아니지만, $N-1 \equiv n\,m^{-1}$이므로 $m, n \in G$로부터 따라 나온다.
- (ii)에서 $p \mid 2q$만 증명하는 것. 등식을 얻으려면 나누어떨어짐 하나가 더 필요하다.
- 특이한 경우에 항등원을 당연하게 여기는 것. 예를 들어 6을 법으로 하는 부분집합 $\{3\}$은 곱셈에 대해 닫혀 있고 항등원은 3이며, $m = n = 3$이면 (iii)에 어긋난다. 논증은 항등원이 1이라는 데 의존하고, 문제의 의도도 분명히 그렇다.

STEP 너머

G는 21을 법으로 하는 단원군이고, 중국인의 나머지 정리(Chinese remainder theorem)에 의해 3을 법으로 하는 단원군과 7을 법으로 하는 단원군의 곱, 즉 $C_2 \times C_6$과 동형이다. 이것이 G에 위수가 2인 원소가 세 개 있고 위수가 12인 원소는 없는 이유이다. N을 법으로 하는 단원들이 정확히 언제 순환군을 이루는지 결정하는 것(정확히 p가 홀수인 소수일 때 $N = 2, 4, p^k, 2p^k$인 경우, 즉 "원시근(primitive root)"이 존재하는 경우)은 대학 1학년 정수론의 고전적인 결과이다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 원시근을 다루고, Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 군론을 다룬다.

풀이

STEP II 견본 문제지, 문제 9

순수수학 • 구, 평면과 반사

STEP II 견본 문제지, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/spec-s2-q9

핵심 아이디어

두 소문항 모두 하나의 그림에 관한 것이다. 바로 평면(plane)과 그 평면에 내린 수선(perpendicular)이다. (i)에서는 구(sphere)의 중심이 원점이므로, 모든 것은 원점에서 평면에 내린 수선의 발(foot of the perpendicular)로 결정된다. 이 점과 O 사이의 거리가 둘이 만나는지를 정하고, 이어서 피타고라스(Pythagoras) 정리가 원을 알려 준다. (ii)에서는 $\mathbf{x}$를 $\mathbf{c}$ 방향 성분(component)과 $\mathbf{c}$에 수직인 성분으로 나누고, 주어진 식이 각 성분에 무엇을 하는지 살펴본다.

풀이

소문항 (i)

평면 $(\mathbf{x}-\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=0$은 점 $\mathbf{a}$를 지나고 법선(normal) 벡터가 $\mathbf{b}$이다. 원점 O에서 평면에 내린 수선의 발을 N이라 하자. ON은 법선 방향이므로 어떤 스칼라(scalar) λ에 대하여 $\mathbf{n}=\lambda\mathbf{b}$이고, N은 평면 위에 있으므로

$$(\lambda\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=0 \quad\Longrightarrow\quad \lambda=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2},$$

이다. $\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$이므로 이렇게 나눌 수 있다. 따라서

$$\mathbf{n}=\frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}, \qquad d=|\mathbf{n}|=\frac{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|}{|\mathbf{b}|},$$

이고, 여기서 d는 O에서 평면까지의 거리이다.

이제 평면 위의 임의의 점 $\mathbf{x}$를 잡자. 벡터 $\mathbf{x}-\mathbf{n}$은 평면 안에 있으므로 $\mathbf{b}$에 수직이고, 따라서

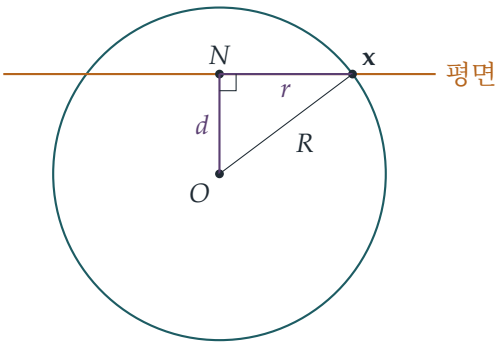
$\mathbf{n}$에도 수직이다. 피타고라스 정리에 의하여

$$|\mathbf{x}|^2 = |\mathbf{n}|^2 + |\mathbf{x}-\mathbf{n}|^2 = d^2 + |\mathbf{x}-\mathbf{n}|^2. \qquad (*)$$

그러므로 평면 위의 점은 $|\mathbf{x}| \geq d$를 만족하고, $|\mathbf{x}| \geq d$인 모든 값이 실제로 나타난다(평면 안에서 N으로부터 멀어지면 된다). 따라서 구 $|\mathbf{x}| = R$가 평면과 만날 필요충분조건은 $R \geq d$, 즉

$$\boxed{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \leq R\,|\mathbf{b}|} \qquad \text{또는 동치로} \qquad (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 \leq R^2|\mathbf{b}|^2.$$

이다. 등호가 성립하는 경우 평면은 접평면(tangent plane)이고, "원"은 한 점 N으로 줄어든다.



조건이 성립할 때, 두 곡면 위에 동시에 있는 점들은 $|\mathbf{x}| = R$를 만족하고, $(*)$에 의하여

$$|\mathbf{x}-\mathbf{n}|^2 = R^2 - d^2.$$

이다. 따라서 이 점들은 평면 안에서 평면 위의 점 N으로부터 일정한 거리에 있다. 즉 N을 중심으로 하는 원을 이룬다. 그 중심과 반지름은

$$\mathbf{n} = \frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}, \qquad r = \sqrt{R^2 - \frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}{|\mathbf{b}|^2}} = \frac{\sqrt{R^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}}{|\mathbf{b}|}.$$

이다.

소문항 (ii)

단위벡터(unit vector) $\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{c}/|\mathbf{c}|$를 쓰자($\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$이므로 문제없다). 그러면 주어진 관계식은

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - 2(\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{c}})\,\hat{\mathbf{c}}.$$

이다.

? **생각해 보기** $(\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{c}})\,\hat{\mathbf{c}}$는 기하학적으로 무엇인가?

이것은 $\mathbf{x}$의 $\mathbf{c}$ 방향 성분, 곧 O를 지나고 방향이 $\mathbf{c}$인 직선 위로의 $\mathbf{x}$의 정사영(projection)이다. 그러므로

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\parallel} + \mathbf{x}_{\perp}, \qquad \mathbf{x}_{\parallel} = (\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{c}})\,\hat{\mathbf{c}}, \qquad \mathbf{x}_{\perp} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\parallel},$$

로 나누면, $\mathbf{x}_{\perp}\cdot\mathbf{c} = \mathbf{x}\cdot\mathbf{c} - (\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{c}})(\hat{\mathbf{c}}\cdot\mathbf{c}) = 0$이다. 관계식은

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}_{\perp} - \mathbf{x}_{\parallel}.$$

이 된다. O를 지나고 $\mathbf{c}$에 수직인 평면 Π(평면 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{c} = 0$) 안의 성분은 그대로이고, Π에 수직인 성분은 방향이 뒤집힌다. 이것이 바로 거울이 하는 일이다. **$\mathbf{x}'$은 평면 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{c} = 0$에 대한 $\mathbf{x}$의 반사(reflection)이다**. 이 평면은 원점을 지나고 법선 벡터가 $\mathbf{c}$인 평면이다.

반사의 정의에 비추어 이를 확인하자.

- $\mathbf{x}' - \mathbf{x} = -2\mathbf{x}_{\parallel}$은 $\mathbf{c}$의 상수배이므로, $\mathbf{x}$에서 $\mathbf{x}'$까지의 선분은 Π에 수직이다.
- 중점 $\frac{1}{2}(\mathbf{x}+\mathbf{x}') = \mathbf{x}_{\perp}$은 $\mathbf{x}_{\perp}\cdot\mathbf{c} = 0$을 만족하므로 Π 위에 있다.

몇 가지 결과를 보면 그림이 더 구체적으로 다가온다. Π 위의 점($\mathbf{x}\cdot\mathbf{c} = 0$인 점)은 움직이지 않는다. $\mathbf{c}$ 자신은 $-\mathbf{c}$로 간다. $|\mathbf{x}'|^2 = |\mathbf{x}_{\perp}|^2 + |\mathbf{x}_{\parallel}|^2$이므로 $|\mathbf{x}'| = |\mathbf{x}|$이다. 그리고 두 번 반사하면 제자리로 돌아와야 하듯, 이 사상을 두 번 적용하면 $\mathbf{x}$가 다시 나온다. $\mathbf{c}$를 0이 아닌 임의의 상수배 $k\mathbf{c}$로 바꾸어도 관계식은 변하지 않는데, 이는 자연스럽다. 중요한 것은 평면뿐이고, 법선 벡터의 길이나 방향은 상관없기 때문이다.

검산

(i)에서 $\mathbf{a} = \mathbf{b} = (0,0,1)$, $R = 2$로 두자. 평면은 $z = 1$이고, 이 평면은 구 $x^2+y^2+z^2 = 4$와 원 $x^2+y^2 = 3$, $z = 1$에서 만난다. 공식은 중심 $(0,0,1)$, 반지름 $\sqrt{4-1} = \sqrt{3}$을 주므로 맞다. (ii)에서 $\mathbf{c} = (0,0,1)$로 두면, 식은 (x,y,z)를 $(x,y,-z)$로 보내고 이는 $z = 0$에 대한 반사이다. 또한 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, R와 $\mathbf{x}$, $\mathbf{c}$를 무작위로 20,000번 골라 두 소문항을 수치적으로 검사하였다. 예측한 원 위에 만든 점들은 오차 10^{-9} 이내에서 구와 평면 위에 동시에 있었고, (ii)의 사상은 Π 안의 벡터를 고정하고, 길이와 내적(dot product)을 보존하며, 자기 자신이 역사상(inverse)이었다.

흔한 실수

- 절댓값(modulus)을 빠뜨리는 것. 조건은 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \le R|\mathbf{b}|$가 아니라 $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \le R|\mathbf{b}|$이다. O의 반대편에 있는 평면은 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} < 0$이다.
- 원의 중심을 $\mathbf{a}$라고 답하는 것. 점 $\mathbf{a}$는 평면 위의 한 점일 뿐이고, 중심은 O에서 내린 수선의 발이다.

▶ (ii)에서 "$\mathbf{c}$에 대한 반사" 또는 "$\mathbf{c}$ 방향 직선에 대한 반사"라고 말하는 것. 그 직선에 대한 반사는 $\mathbf{x} \mapsto 2\mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{x}$이고, 이는 $-\mathbf{x}'$이다.

STEP 너머

(ii)의 사상은 **하우스홀더 반사**(*Householder reflection*) $\mathbf{x} \mapsto (I - 2\hat{\mathbf{c}}\hat{\mathbf{c}}^{\mathsf{T}})\mathbf{x}$이며, 직교(orthogonal)이면서 대칭(symmetric)이고 행렬식(determinant)이 -1인 선형사상(linear map)이다. 공간의 모든 회전(rotation)은 이러한 반사 두 개의 곱이며, 수치해석학자들은 이를 이용하여 행렬을 안정적으로 분해한다(QR 분해(QR decomposition)). Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 정확히 이런 관점에서 사영, 반사, 직교행렬을 다룬다.

풀이

STEP II 견본 문제지, 문제 10

순수수학 • 논리 퍼즐

> **STEP II 견본 문제지, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q10

핵심 아이디어

모든 것은 한 가지 번역에 달려 있다. 화자가 두꺼비라는 것은 그 화자의 말이 참이라는 것과 정확히 같다. 그러므로 각 등장인물에 대하여 "두꺼비일 수 있는가?"와 "개구리일 수 있는가?"를 묻고, 그 인물의 말이 잘못된 진리값(truth value)을 갖게 만드는 선택은 모두 버린다. 특히 화자 자신에 대한 말을 주의 깊게 보자. 그런 말 가운데 일부는 어느 한 종류의 생물은 결코 할 수 없는 말이며, 보통 그것이 실마리가 된다.

풀이

이 풀이 전체에서 "두꺼비"는 항상 참말을 하는 자, "개구리"는 항상 거짓말을 하는 자를 뜻한다. 따라서

$$\text{화자가 두꺼비이다} \iff \text{화자의 말이 참이다.}$$

각 장면에서 이 규칙과 모순되지 않는 배정을 모두 찾고, 정확히 하나만 살아남는지 확인한다.

소문항 (i)

A가 두꺼비라고 가정하자. 그러면 A의 말이 참이므로, 특히 A는 개구리여야 하는데 이는 모순(contradiction)이다. 따라서 A는 개구리이다.

그러므로 A의 말은 거짓이다. 즉 A와 B가 둘 다 개구리인 것은 아니다. A가 개구리이므로, 이 말이 거짓이 되는 유일한 방법은 B가 두꺼비인 것이다.

검산: A가 개구리이고 B가 두꺼비이면 "우리 둘 다 개구리이다"는 거짓이며, 개구리의 말은 마땅히 거짓이어야 한다. 따라서 **A는 개구리이고 B는 두꺼비이다**.

소문항 (ii)

이는 소문항 (i)을 거울에 비춘 것이다. C가 개구리라고 가정하자. 그러면 "D와 나 중 적어도 하나는 개구리이다"는 (C 하나만으로도) 참이 되는데, 개구리는 참말을 할 수 없다. 따라서 C는 두꺼비이다.

그러므로 C의 말은 참이다. 즉 C, D 중 적어도 하나는 개구리이다. C가 두꺼비이므로 D가 개구리여야 한다.

검산: C가 두꺼비이고 D가 개구리이면 그 말은 참이며, 두꺼비의 말은 마땅히 참이어야 한다. 따라서 **C는 두꺼비이고 D는 개구리이다**.

소문항 (iii)

E의 말 "G와 H는 둘 다 두꺼비이다"를 S라 하자. 그러면 G는 S가 참이라고 주장하고, H는 S가 거짓이라고 주장한다.

> ? **생각해 보기** 아직 누구에 대해서도 아는 것이 없다. 도대체 어디서부터 시작할 수 있을까?

E가 아니라 G와 H를 함께 보자. 두 사람의 말은 정확히 서로 반대이므로, 둘 중 정확히 하나만 참이다. 따라서 S가 무엇이 되든, G, H 중 정확히 하나는 두꺼비이고 나머지 하나는 개구리이다.

이것으로 S가 결정된다. G, H 중 하나는 개구리이므로 둘 다 두꺼비인 것은 아니고, 따라서 S는 거짓이다. 그러므로

- E는 거짓을 말했으므로 E는 개구리이다.
- G는 S가 참이라고 주장했는데 이는 거짓이므로 G는 개구리이다.
- H는 S가 거짓이라고 주장했는데 이는 참이므로 H는 두꺼비이다.

검산: G가 개구리이므로 "G와 H는 둘 다 두꺼비이다"는 실제로 거짓이며, 이는 모든 판정과 들어맞는다. 따라서 **E와 G는 개구리이고 H는 두꺼비이다**.

소문항 (iv)

여기서 "우리"는 I, J, K 세 명을 뜻한다.

I는 개구리이다. I가 두꺼비라면 "우리는 모두 개구리이다"가 참이 되어 I는 개구리여야 하므로 모순이다. 따라서 I는 개구리이고, I의 말은 거짓이다. 즉 셋 모두가 개구리인 것은 아니므로

$$J,\ K \text{ 중 적어도 하나는 두꺼비이다.} \qquad (*)$$

*J*는 **두꺼비이다**. 반대로 *J*가 개구리라고 가정하자. 그러면 (∗)에 의해 *K*는 두꺼비이고, 생물들은 *I* 개구리, *J* 개구리, *K* 두꺼비로서 두꺼비가 정확히 하나이다. 그러면 *J*의 말이 참이 되는데, 개구리는 그런 말을 할 수 없다. 따라서 *J*는 두꺼비이다.

*K*는 **개구리이다**. *J*가 두꺼비이므로 *J*의 말은 참이다. 즉 셋 중 두꺼비는 정확히 하나이다. 그 두꺼비는 *J*이므로 *K*는 개구리이다.

> ? **생각해 보기** *K*가 개구리인데도 (∗)가 여전히 성립하는가?

그렇다. (∗)는 *J*, *K* 중 하나만 두꺼비이면 되는데, *J*가 두꺼비이다. 따라서 전체 검산은 다음과 같다. *I*의 "우리는 모두 개구리이다"는 거짓이고(*J*가 두꺼비이므로), *J*의 "우리 중 정확히 하나가 두꺼비이다"는 참이다(*J*만 두꺼비이므로). 두 말 모두 올바른 진리값을 가지므로 ***I*와 *K*는 개구리이고 *J*는 두꺼비이다**.

검산

각 장면에서 가능한 배정은 2^2개 또는 2^3개뿐이므로, 완전한 검산은 짧은 진리표(truth table)로 할 수 있다. 각 배정에 대하여, 모든 화자의 말이 그 화자가 두꺼비일 때 그리고 그때에만 참인지 확인하면 된다. 네 장면 모두에 대해 이 전수 조사를 실행해 보았고, 각 장면마다 정확히 하나의 배정, 곧 위에서 찾은 배정만 살아남았다. (유일성이 중요하다. 문제는 우리에게 **판정하라**고 요구하므로, 들어맞는 배정 하나를 찾는 것만으로는 부족하고 나머지를 배제해야 한다.)

흔한 실수

- 모순 없는 배정 하나를 찾고 거기서 멈추는 것. 다른 어떤 배정도 성립하지 않음을 보여야 하며, "만약 그렇다고 가정하면..."으로 시작하는 모순 논증이 바로 그 역할을 한다.
- 소문항 (iii)에서 *G*의 "이것은 참이다"를 *E*의 주장이 아니라 *G* 자신에 대한 말로 다루는 것.
- 소문항 (iv)에서 아무 말도 하지 않는 *K*도 "우리 모두"와 "우리 중 정확히 하나"에 포함된다는 사실을 잊는 것.

STEP 너머

이런 퍼즐은 명제 논리(propositional logic)의 연습 문제이다. 각 생물은 불 변수(Boolean variable) *t*, 각 말은 논리식 *P*이며, 모든 화자는 제약 조건 $t \iff P$를 부과한다. 이러한 제약 조건의 체계에 해가 존재하는지 판정하는 문제를 **충족 가능성**(satisfiability) 문제라

하며, 이는 이론 컴퓨터 과학의 핵심 문제이다. 또 소문항 (i)의 자기 파괴적인 말은 거짓말쟁이 역설(liar paradox)의 온순한 사촌이다. 레이먼드 스멀리언(Raymond Smullyan)의 *What Is the Name of This Book?*(이 책의 이름은 무엇인가?)은 기사와 건달(knights and knaves) 퍼즐을 즐겁게 모아 놓은 책으로, 차근차근 나아가 괴델(Gödel)의 불완전성 정리(incompleteness theorem)에까지 이른다.

풀이

STEP II 견본 문제지, 문제 11

역학 • 포물체와 충돌

STEP II 견본 문제지, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

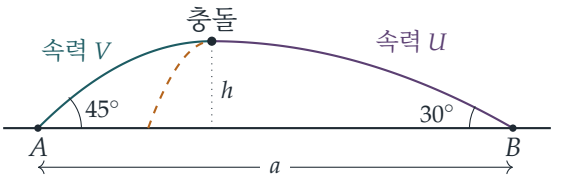
step.maths.org/questions/spec-s2-q11

핵심 아이디어

"두 입자가 충돌할 때 각 입자는 최고점에 있다"는 말에는 두 조건이 함께 들어 있다. 두 입자가 꼭대기에 이르는 데 걸리는 **시간이 같아야** 하고, 그때 두 입자가 **같은 위치에** 있어야 한다. 시간 조건은 U와 V를 연결하고, 이어서 두 수평 거리를 더하면 a가 된다. 충돌 후에 가장 중요한 관찰은 두 입자가 꼭대기에서 모두 수평으로 움직이고 있으므로, 합쳐진 입자는 연직 속도가 전혀 없는 상태에서 출발한다는 점이다.

풀이

두 입자를 모두 AB를 포함하는 연직 평면에서 중력만 받아 움직이는(공기 저항이 없는) 포물체(projectile)로 모형화한다. 수평 방향은 A에서 B로 향하는 쪽을 양의 방향으로, 연직 방향은 위쪽을 양의 방향으로 잡는다.



$U^2 = 2V^2$ 보이기

A에서 출발한 입자의 처음 속도 성분은 수평 방향으로 $\frac{V}{\sqrt{2}}$, 연직 방향으로 $\frac{V}{\sqrt{2}}$이다. B에서 출발한 입자의 성분은 수평 방향(A 쪽)으로 $\frac{\sqrt{3}}{2}U$, 연직 방향으로 $\frac{1}{2}U$이다.

포물체는 연직 속도가 0일 때 최고점에 있다. 처음 연직 속력이 w이면 이는 시각 w/g에 일

어난다. 두 입자는 같은 순간에 발사되므로, 충돌하는 순간 둘 다 최고점에 있으려면 이 시각들이 같아야 한다.

$$\frac{V}{\sqrt{2}g} = \frac{U}{2g} \quad \Longrightarrow \quad U = \sqrt{2}V \quad \Longrightarrow \quad U^2 = 2V^2,$$

이므로 원하는 결과를 얻는다. 이 공통의 시각을 $T = \dfrac{V}{\sqrt{2}g}$라 하자.

생각해 보기 두 최고점의 높이가 같은지도 확인해야 하지 않을까?

그렇다. 시각이 같은 것은 필요조건일 뿐이고, 두 입자가 실제로 만나야 한다. 처음 연직 속력이 w인 포물체는 높이 $w^2/(2g)$까지 올라간다. A의 입자는 $\frac{V^2}{2}/2g = \frac{V^2}{4g}$이고, B의 입자는 $\frac{U^2}{4}/2g = \frac{2V^2}{8g} = \frac{V^2}{4g}$이다. 두 값이 같으므로 $U^2 = 2V^2$이기만 하면 높이는 저절로 일치한다. (사실 이는 당연하다. 두 입자는 같은 가속도를 받으며 같은 시각 T에 연직 속도가 0이 되므로, 높이가 모두 $\frac{1}{2}gT^2$이다.) 충돌 높이를

$$h = \frac{V^2}{4g}$$

로 쓰자.

a 구하기

시각 T에 수평 위치도 같아야 한다. 수평 속도는 일정하므로, 시간 T 동안 A에서 출발한 입자는 B 쪽으로 $\frac{V}{\sqrt{2}}T$만큼, B에서 출발한 입자는 A 쪽으로 $\frac{\sqrt{3}}{2}UT$만큼 이동한다. 두 입자가 만나므로 이 거리들의 합은 a이다.

$$\begin{aligned} a &= \left(\frac{V}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{2}\,V\right)\frac{V}{\sqrt{2}g} \\ &= \frac{V^2}{g}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{V^2}{2g}(1+\sqrt{3}), \end{aligned}$$

이것이 구하는 결과이다.

충돌 후

충돌하는 순간 각 입자는 최고점에 있으므로 각각 **수평으로** 움직이고 있다. A의 입자는 속도 $+\frac{V}{\sqrt{2}}$로, B의 입자는 속도 $-\frac{\sqrt{3}}{2}U = -\frac{\sqrt{3}V}{\sqrt{2}}$로 움직인다.

생각해 보기 어떤 운동량이, 어느 방향으로 보존되는가?

매우 짧은 충돌 동안 큰 힘은 두 입자 사이에 작용하는 크기가 같고 방향이 반대인 힘뿐이다. 중력은 유한하고 무시할 만큼 짧은 시간 동안만 작용한다. 따라서 전체 운동

량(momentum)은 보존된다. 질량 $2m$인 합쳐진 입자의 속도를 v라 하면, 수평 방향으로

$$2m\,v = m\frac{V}{\sqrt{2}} - m\frac{\sqrt{3}\,V}{\sqrt{2}} \quad\Longrightarrow\quad v = -\frac{(\sqrt{3}-1)V}{2\sqrt{2}}.$$

음의 부호는 합쳐진 입자가 속력 $\dfrac{(\sqrt{3}-1)V}{2\sqrt{2}}$로 A 쪽으로 되돌아간다는 뜻이다. 연직 방향으로는 두 입자의 연직 속도가 모두 0이었으므로, 합쳐진 입자도 연직 속도 0에서 출발한다. 이제 합쳐진 입자는 높이 $h = \frac{V^2}{4g}$에서 수평으로 발사된 포물체이다. 수평 속도는 $|v|$로 유지된다. 평면에 닿을 때의 연직 속력 w는 $w^2 = 0 + 2gh$에서 얻는다.

$$w^2 = 2g\cdot\frac{V^2}{4g} = \frac{V^2}{2}, \qquad w = \frac{V}{\sqrt{2}}.$$

따라서 속도가 수평과 이루는 각 ϕ는 다음을 만족한다.

$$\begin{aligned}\tan\phi = \frac{w}{|v|} &= \frac{V}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-1)V} = \frac{2}{\sqrt{3}-1}\\ &= \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{2} = 1+\sqrt{3},\end{aligned}$$

여기서 둘째 줄에서는 분모를 유리화(rationalising)하였다. 이것으로 문제가 끝난다.

검산

- **단위.** V^2/g의 단위는 $(\mathrm{m\,s^{-1}})^2/(\mathrm{m\,s^{-2}}) = \mathrm{m}$로 거리에 맞는 단위이고, $\tan\phi$는 속력의 비이므로 차원이 없다(dimensionless). $\tan\phi$가 V나 g에 전혀 의존하지 않는다는 점도 좋은 신호이다.
- **기하적 타당성.** A의 입자는 A로부터 수평 거리 $\frac{V^2}{2g}$인 곳에서 꼭대기에 이르고, B의 입자는 B로부터 $\sqrt{3}\,\frac{V^2}{2g}$인 곳에서 꼭대기에 이른다. 더 큰 속력으로 더 낮은 30° 각도로 발사된 입자가 더 멀리 가며, 두 거리를 더하면 a가 된다.
- **수치 확인.** $V = 7.3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$로 두고 두 궤적을 시간에 따라 단계적으로 계산하였더니, $t = T$에서 두 입자가 미터 단위로 같은 점 $(2.719, 1.359)$에 있었고 두 연직 속도가 모두 0이었다. 합쳐진 입자를 평면까지 단계적으로 계산하였더니 $\tan\phi \approx 2.73205$가 나와 $1+\sqrt{3} = 2.732050\ldots$와 일치하였다.

흔한 실수

- 연직 속도가 0이 아닌 것으로 보고 연직 방향 운동량 보존을 적용하는 것. 각 궤적의 꼭대기에서는 연직 속도가 0이며, 바로 이 점 때문에 충돌이 이렇게 간단해진다.

- 수평 운동량을 빼지 않고 더하는 것. 두 입자는 반대 방향으로 움직이고 있다.
- $w/|v|$ 대신 $\tan\phi = |v|/w$(연직과 이루는 각)를 쓰는 것.

STEP 너머

합쳐지는 입자는 완전 비탄성 충돌(perfectly inelastic collision)의 가장 간단한 예이다. 운동량은 보존되지만 운동 에너지(kinetic energy)는 보존되지 않는다(여기서는 두 입자가 반대 방향으로 움직이고 있었으므로 상당히 많은 에너지가 손실된다). 대학에서는 이것이 질량중심계(centre-of-mass frame)에서의 충돌 연구로 이어진다. 질량중심계에서는 전체 운동량이 0이고, 손실되는 에너지는 질량중심에 대한 운동 에너지 전체이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 운동량과 충돌을 이런 방식으로 다루며 훌륭한 문제를 많이 담고 있다.

풀이

STEP II 견본 문제지, 문제 12

역학 • 철사 위의 진동

STEP II 견본 문제지, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

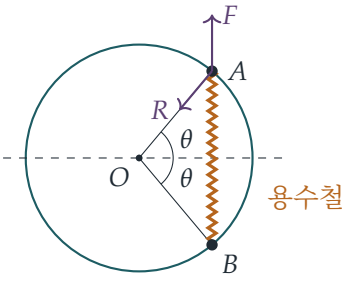
step.maths.org/questions/spec-s2-q12

핵심 아이디어

철사가 매끄러우므로 일을 하는 힘은 용수철의 힘뿐이고, 따라서 역학적 에너지(mechanical energy)가 보존된다. 필요한 것은 θ로 나타낸 용수철의 길이(원의 현(chord))와 각 구슬의 속력뿐이다. 잠시 생각해 볼 점이 두 가지 있다. 각 AOB를 이등분하는 직선은 왜 고정되어 있는가? 그리고 소문항 (ii)에서 구슬들이 지름의 양 끝에 도달할 만큼 충분한 에너지를 가지면 어떤 일이 일어나는가?

풀이

구슬들을 수평면 위에 놓인 매끄러운 원형 철사 위의 질점으로 모형화하고, 두 구슬은 훅의 법칙(Hooke's law)을 따르는 가벼운 용수철로 연결되어 있다고 하자. 중력은 연직 방향이고 철사의 반작용의 연직 성분과 평형을 이루므로, 수평 방향의 운동에는 아무 역할도 하지 않는다.



그림에서 F는 용수철이 A를 미는 힘이고(용수철이 처음에 압축되어 있으므로 BA 방향), R는 철사가 A에 작용하는 반작용의 수평 성분이다.

에너지 방정식 세우기

각 구슬의 위치를 원 위의 각으로 나타내자. A는 각 ϕ_A에, B는 각 ϕ_B에 있다.

> **생각해 보기** 두 구슬이 고정된 직선에 대해 대칭으로, 같은 속력으로 움직인다고 가정할 수 있는 이유는 무엇인가?

O를 지나는 연직축에 대한 모멘트(moment)를 생각하자. A와 B에 작용하는 용수철의 힘은 크기가 같고 방향이 반대이며 같은 직선 AB 위에서 작용하므로, 그 모멘트는 상쇄된다. 각 철사의 반작용의 수평 성분 R는 철사에 수직이므로 O를 지나는 반지름 방향을 향하고, 모멘트가 없다. 연직 방향의 힘들은 연직축에 대한 모멘트가 없다. 따라서 각운동량(angular momentum) $ma^2(\dot{\phi}_A + \dot{\phi}_B)$는 보존된다. 구슬들이 정지 상태에서 놓이므로 각운동량의 처음 값은 0이고, 따라서 $\phi_A + \phi_B$는 일정하게 유지된다. 즉 각 AOB의 이등분선(bisector)은 고정되어 있다. 이 이등분선을 그림의 점선으로 잡아 $\phi_A = \theta$, $\phi_B = -\theta$가 되게 하자. 그러면 각 구슬은 속력 $a\dot{\theta}$로 움직인다.

용수철은 현 AB이고, 그 길이는 $2a\sin\theta$이다. 자연 길이(natural length)는 $2a\sin\alpha$이므로 늘어난 길이(extension)는 $x = 2a(\sin\theta - \sin\alpha)$이고, 탄성 에너지(elastic energy)는

$$\frac{\lambda x^2}{2\cdot 2a\sin\alpha} = \frac{4\lambda a^2(\sin\theta-\sin\alpha)^2}{4a\sin\alpha} = \frac{\lambda a(\sin\theta-\sin\alpha)^2}{\sin\alpha}.$$

이다. x가 제곱되어 있으므로 이 식은 $x < 0$일 때(압축)에도 성립한다. 운동 에너지(kinetic energy)는 $2\cdot\frac{1}{2}m(a\dot{\theta})^2 = ma^2\dot{\theta}^2$이다. 철사는 매끄럽고 그 반작용은 항상 운동 방향에 수직이므로 일을 하지 않으며, 따라서 에너지가 보존된다. 놓는 순간 $\theta = \beta$이고 $\dot{\theta} = 0$이므로

$$ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{\lambda a(\sin\theta-\sin\alpha)^2}{\sin\alpha} = \frac{\lambda a(\sin\beta-\sin\alpha)^2}{\sin\alpha}.$$

이다. 양변에 $\sin\alpha/a$를 곱하면

$$ma\dot{\theta}^2\sin\alpha + \lambda(\sin\theta-\sin\alpha)^2 = \lambda(\sin\beta-\sin\alpha)^2,$$

를 얻으며, 이것이 보이려던 식이다. 용수철이 처음에 압축되어 있으므로 $\beta < \alpha$임에 주의한다.

소문항 (i)

에너지 방정식을 t에 대해 미분하면

$$2ma\sin\alpha\,\dot{\theta}\ddot{\theta} + 2\lambda(\sin\theta-\sin\alpha)\cos\theta\,\dot{\theta} = 0.$$

이다. $2\dot{\theta}$로 나누면(구슬이 움직이고 있는 동안에는 언제나 가능하고, 그 결과는 연속성에 의해 모든 t로 확장된다) 운동방정식(equation of motion)

$$ma\sin\alpha\,\ddot{\theta} = -\lambda(\sin\theta-\sin\alpha)\cos\theta.$$

을 얻는다. 평형점은 용수철이 자연 길이를 갖는 $\theta = \alpha$이다. $\beta - \alpha$가 작으면 θ는 α 가까이에 머무르므로(에너지 방정식에서 $|\sin\theta - \sin\alpha| \le |\sin\beta - \sin\alpha|$), 작은 ε에 대해 $\theta = \alpha + \varepsilon$로 쓰자. 1차 근사로 $\sin\theta - \sin\alpha \approx \varepsilon\cos\alpha$이고, $\cos\theta \approx \cos\alpha$인데 이 인수는 이미 작은 양에 곱해진다. 따라서

$$\ddot{\varepsilon} \approx -\frac{\lambda\cos^2\alpha}{ma\sin\alpha}\,\varepsilon,$$

이고, 이는 $\omega^2 = \lambda\cos^2\alpha/(ma\sin\alpha)$인 단진동(simple harmonic motion)이다. 그러므로 주기(period)는

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \approx 2\pi\sqrt{\frac{ma\sin\alpha}{\lambda\cos^2\alpha}}.$$

이다.

소문항 (ii)

$k = \sqrt{ma\sin\alpha/\lambda}$라 하자. 에너지 방정식으로부터

$$\dot{\theta}^2 = \frac{1}{k^2}\Big[(\sin\alpha - \sin\beta)^2 - (\sin\theta - \sin\alpha)^2\Big].$$

이다. 구슬들은 $\sin\theta - \sin\alpha = \pm(\sin\alpha - \sin\beta)$일 때, 즉 $\sin\theta = \sin\beta$이거나 $\sin\theta = 2\sin\alpha - \sin\beta$일 때 멈춘다. $\theta = \beta$에서 출발하면 θ는 증가하고(압축된 용수철이 구슬들을 서로 밀어낸다), $\sin\beta < \sin\theta < 2\sin\alpha - \sin\beta$인 동안 $\dot{\theta}^2 > 0$이다.

? **생각해 보기** 두 경우 중 어느 경우에 해당하는지는 무엇으로 결정되는가?

θ가 $2\theta = \pi$에 이르기 전에 두 번째 정지점에 도달할 수 있는지에 달려 있다. $2\theta = \pi$일 때 A와 B는 지름의 양 끝에 있고, $\sin\theta$는 최댓값 1에 이른다. 이는 $2\sin\alpha - \sin\beta$가 1보다 작은지 큰지에 따라 정해진다.

(a) $\sin\beta > 2\sin\alpha - 1$**.** 이때 $2\sin\alpha - \sin\beta < 1$이므로 $\sin\gamma = 2\sin\alpha - \sin\beta$인 예각 γ가 존재하고, $\gamma > \alpha$이다. 구슬들은 $\theta = \gamma$일 때 정지하며(이때 용수철은 처음에 압축되었던 만큼 늘어나 있다), θ는 β와 γ 사이에서 진동한다. 나아갔다가 되돌아오는 데 걸리는 시간이 같으므로

$$T = 2\sqrt{\frac{ma\sin\alpha}{\lambda}}\int_\beta^\gamma \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{(\sin\alpha - \sin\beta)^2 - (\sin\theta - \sin\alpha)^2}}, \qquad \gamma = \arcsin(2\sin\alpha - \sin\beta).$$

이다.

(b) $\sin\beta < 2\sin\alpha - 1$**.** 이제 $2\sin\alpha - \sin\beta > 1 \ge \sin\theta$이므로, θ가 β와 $\frac{1}{2}\pi$ 사이에 있는 동안 $\dot{\theta}$는 결코 0이 되지 않는다. 즉 구슬들은 여전히 움직이는 채로 지름의 양 끝을 지나간다. 그 뒤로 현은 다시 짧아진다. 에너지 방정식에는 θ가 $\sin\theta$를 통해서만 나타나고, 이는 $\frac{1}{2}\pi$에 대해 대칭이므로, $\frac{1}{2}\pi$에서 $\pi - \beta$까지의 운동은 β에서 $\frac{1}{2}\pi$까지의 운동을 거울에 비춘 것과 같다. 구슬들은 $\theta = \pi - \beta$에서 정지하고, 이때 용수철은 다시 처음 길이로 압축되어 있다.

그러면 용수철은 구슬들을 왔던 길로 되밀어 보낸다. ($\theta = \pi - \beta$에서는 $\sin\theta - \sin\alpha < 0$이고 $\cos\theta < 0$이므로 운동방정식에서 $\ddot{\theta} < 0$이다.) 한 번의 완전한 진동은 $\beta \to \pi - \beta \to \beta$이고, 이는 β에서 $\frac{1}{2}\pi$까지의 4분의 1 구간 네 개로 이루어진다.

$$T = 4\sqrt{\frac{ma\sin\alpha}{\lambda}}\int_{\beta}^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{(\sin\alpha - \sin\beta)^2 - (\sin\theta - \sin\alpha)^2}}.$$

$\sin\alpha < 1$이므로 $2\sin\alpha - 1 < \sin\alpha$이고, 따라서 두 경우 모두 $\beta < \alpha$와 모순되지 않는다. 경우 (b)는 $2\sin\alpha - 1 > 0$일 때, 즉 $\frac{1}{6}\pi < \alpha < \frac{1}{4}\pi$일 때에만 일어날 수 있다.

검산

- 경우 (a)에서 치환(substitution) $\sin\theta = \sin\alpha - (\sin\alpha - \sin\beta)\cos u$를 하면 적분은 $\int_0^{\pi}\mathrm{d}u/\cos\theta$가 된다. $\beta \to \alpha$일 때 이 값은 $\pi/\cos\alpha$로 수렴하며, 이로부터 소문항 (i)의 주기를 다시 얻는다.
- $m = 1.3$, $a = 0.7$, $\lambda = 2.1$로 두고 두 구슬이 철사 위에서 각각 독립적으로 움직이도록 시뮬레이션하였다. 에너지 방정식은 반올림 오차 범위 안에서 성립했고 이등분선은 고정되어 있었다. $\alpha = 0.6$, $\beta = 0.59$일 때 주기는 3.766이었고, 소문항 (i)에서 얻은 값은 3.7657이다. $\alpha = 0.7$, $\beta = 0.4$(경우 (a))일 때는 4.8847이었고, 적분으로 얻은 값은 4.8846이다. $\alpha = 0.75$, $\beta = 0.1$(경우 (b))일 때는 7.0553이었고 계산값도 7.0553이었으며, 예측대로 θ는 $\pi - \beta$에서 최댓값에 이르렀다.

흔한 실수

- 탄성 에너지로 $\lambda x^2/(2a)$를 쓰는 것. 분모는 **자연 길이**의 두 배인 $2 \cdot 2a\sin\alpha$이다.
- 경우 (b)에서 적분을 $\theta = \frac{1}{2}\pi$에서 멈추거나 구슬들이 그곳에서 정지한다고 주장하는 것. 구슬들은 0이 아닌 속력으로 지름의 양 끝을 지나가므로, 주기는 $2\int_{\beta}^{\pi/2}$가 아니라 $4\int_{\beta}^{\pi/2}$이다.

STEP 너머

소문항 (ii)의 주기 적분은 초등함수로 계산할 수 없다. 이 적분들은 단진자(simple pendulum)의 정확한 주기를 주는 **타원 적분**(elliptic integrals)과 가까운 친척이다. 소문항 (i)의 작은 진동의 주기는 진폭과 무관하지만, 정확한 주기는 그렇지 않다는 점에 주목하자. 선형화한 진동자와 비선형 진동자 사이의 이러한 대비는 고전역학 첫 강의의 중심 주제이다. 여기서 이등분선을 고정시켜 준, 내력이 있는 계의 각운동량 보존은 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)에서 자세히 다룬다.

풀이

STEP II 견본 문제지, 문제 13

역학 • 평형과 모멘트

STEP II 견본 문제지, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/spec-s2-q13

핵심 아이디어

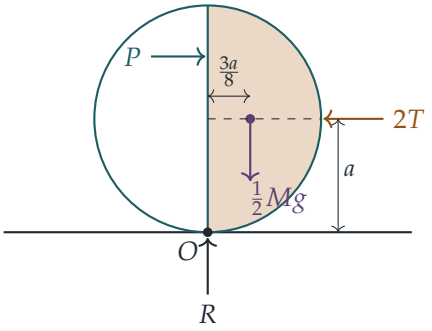
오렌지가 흩어진다면, 조각들이 바깥쪽으로 넘어지면서 흩어질 것이다. 이때 각 조각은 구가 탁자에 닿는 단 한 점을 중심으로 회전한다. 그래서 오렌지를 자르는 평면 중 하나를 따라 오렌지를 두 쪽으로 나누고, 한쪽 절반에 대하여 그 가장 낮은 점을 지나는 수평선에 대한 모멘트(moment)를 계산한다. 절반의 무게는 그것을 넘어뜨리려 하고, 이를 붙잡아 둘 수 있는 것은 다른 무엇도 아닌 오직 리본뿐이다. 다른 절반이 주는 힘은 상황을 더 나쁘게 만들 수만 있으며, 바로 여기서 "적어도"라는 말이 나온다.

풀이

모형

초콜릿은 균일한 강체(rigid body)로, 리본은 질량이 없고 둘레 전체에서 같은 장력(tension) T를 갖는 것으로 다룬다. 또 조각들은 크기가 모두 같고 그 개수가 짝수라고 가정한다(실제 초콜릿 오렌지는 스무 조각이다). 그러면 축을 지나는 자르는 평면 하나가 오렌지를 두 절반으로 나누고, 각 절반은 각이 π인 반구 모양의 쐐기가 된다. 마지막에는 자른 면이 매끄럽다면 이 논증이 어떤 조각 묶음에 대해서도 성립함을 확인한다.

구는 축의 맨 아래인 단 한 점 O에서만 탁자에 닿는다. O를 원점으로 하고, z축은 연직 위쪽으로, x축은 수평 방향으로 축에서 우리가 살펴볼 절반(그림의 오른쪽 절반) 쪽을 향하도록 좌표축을 잡는다. 두 절반을 나누는 평면은 $x = 0$이다. ℓ을 O를 지나고 그 평면 위에 있는 수평선(y축)이라 하자. ℓ에 대한 모멘트를 계산하되, 절반을 축에서 멀어지는 바깥쪽으로 넘어뜨리려는 모멘트를 양으로 센다.



한쪽 절반에 작용하는 힘

오른쪽 절반의 질량은 $\frac{1}{2}M$이고, 여기에 작용하는 외력은 다음과 같다.

- **무게** $\frac{1}{2}Mg$는 질량중심(centre of mass)에 작용한다. 주어진 결과에 $2\theta = \pi$를 대입하면 질량중심은 축으로부터
$$\frac{3\pi a \sin(\pi/2)}{16(\pi/2)} = \frac{3a}{8}$$
만큼 떨어진 곳, $x > 0$인 쪽에 있다. 이 힘의 ℓ에 대한 모멘트는 넘어뜨리는 방향으로 $\frac{1}{2}Mg \cdot \frac{3a}{8} = \frac{3}{16}Mga$이다.
- **탁자**: 수직항력(normal reaction)과 경우에 따라 마찰력(friction)이 있으며, 모두 O에 작용한다. O는 ℓ 위에 있으므로 이 힘들은 ℓ에 대한 모멘트를 갖지 않는다.
- **리본**은 적도의 절반을 감싸고 있다. 폭이 좁은 리본은 표면을 수직으로 누르며, 그 힘은 단위 길이당 T/a이다(매끄러운 곡선 위에 걸친 줄과 같다). 각 $-\frac{\pi}{2}$와 $\frac{\pi}{2}$ 사이의 호에서 x성분을 모두 더하면 축 쪽으로
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{T}{a} \cos\phi \; a \, \mathrm{d}\phi = 2T$$
이고, y성분은 대칭성에 의해 상쇄된다. (같은 말이지만, 리본이 나누는 평면을 지나는 곳에서 리본을 자르면 잘린 두 끝이 각각 $-x$ 방향으로 장력 T로 당기므로 역시 $2T$가 된다.) 이 힘은 모두 수평이고 높이 a에서 작용하므로, ℓ에 대한 모멘트는 **되돌리는** 방향으로 $2T \cdot a$이다.
- **다른 절반**은 평평한 면 $x = 0$을 통해 작용한다. 이것이 유일하게 다루기 까다로운 힘이지만, 이 힘이 어떻게 분포되어 있는지는 알 필요가 없다.

> ? **생각해 보기** 다른 절반이 주는 힘은 왜 절반이 넘어지는 것을 돕기만 할 수 있을까?

면의 각 작은 부분에 작용하는 힘을 면에 수직인 부분과 면을 따르는 부분(자른 면이 거칠다면 마찰력)으로 나눈다.

- 수직인 부분은 x 방향이다. 두 절반은 서로 눌려 있을 뿐 붙어 있지는 않으므로, 이 부분은 $+x$ 방향으로 미는 힘이다. 이 힘은 어떤 높이 $z \geq 0$에서 작용하므로, ℓ에 대한 모멘트는 z에 그 크기를 곱한 값이며 결코 음이 아니다. 즉 이 힘은 절반을 바깥쪽으로 넘어뜨리려 한다.
- 면을 따르는 부분은 모두 평면 $x = 0$ 위에 있고, 이 평면은 ℓ도 포함한다. 작용선이 ℓ과 같은 평면 위에 있는 힘은 ℓ과 만나거나 ℓ과 평행하므로, ℓ에 대한 모멘트를 갖지 않는다.

따라서 접촉의 세부 사항이 어떻든, 다른 절반은 넘어뜨리는 방향으로 전체 모멘트 $P_{\text{mom}} \geq 0$을 준다.

ℓ에 대한 모멘트

절반은 평형(equilibrium) 상태에 있으므로 ℓ에 대한 전체 모멘트는 0이다.

$$2Ta = \tfrac{3}{16}Mga + P_{\text{mom}}.$$

$P_{\text{mom}} \geq 0$이므로

$$2Ta \;\geq\; \tfrac{3}{16}Mga, \qquad \text{따라서} \qquad T \;\geq\; \tfrac{3}{32}Mg,$$

이고, 이것이 증명하려던 것이다. 등호는 두 절반이 서로를 전혀 누르지 않아서 간신히 붙어 있을 때에 정확히 성립한다.

조각의 개수가 짝수가 아닐 때

대신 자른 면이 매끄럽다면, 온전한 조각들로 이루어진 각 2θ의 어떤 쐐기에 대해서도 같은 계산이 성립한다. x축을 쐐기의 대칭면을 따라 잡고, ℓ을 O를 지나고 그 평면에 수직인 수평선으로 잡는다. 쐐기의 무게는 $\frac{\theta}{\pi}Mg$이고 거리 $\frac{3\pi a \sin\theta}{16\theta}$인 곳에 작용하므로, 넘어뜨리는 모멘트는 $\frac{3}{16}Mga\sin\theta$이다. 쐐기의 호 위에 있는 리본은 높이 a에서 $2T\sin\theta$로 안쪽으로 당긴다. 매끄러운 면은 면에 수직인 수평 방향으로 미는 힘만 주며, 이 힘들의 $+x$ 방향 성분은 음이 아니므로 이번에도 넘어뜨리는 모멘트를 늘리기만 한다. 따라서 $2Ta\sin\theta \geq \frac{3}{16}Mga\sin\theta$이고, $\sin\theta$가 약분되어 다시 $T \geq \frac{3}{32}Mg$를 얻는다. 어떤 조각 묶음을 고르든 한계는 같다.

검산

- 주어진 질량중심 결과에 $2\theta = \pi$를 넣으면 $\frac{3a}{8}$이 되는데, 이는 평평한 면에서 잰 속이 찬 반구의 질량중심으로 잘 알려진 값이다. 몬테카를로(Monte Carlo) 추정으로 절반에 대해 $0.376a$를 얻으며, 다른 쐐기 각에 대해서도 공식과 일치한다.
- 각 2θ인 호 위에서 리본의 수직 방향 힘을 수치적으로 더하면 $2T\sin\theta$가 나온다. 예를 들어 절반에 대해서는 $2T$이다.

- 한계 $\frac{3}{32}Mg \approx 0.094Mg$는 확인해 본 모든 쐐기 각($2\theta = 0.6,\ \pi,\ 2.4,\ 5$)에서 같게 나온다. 한계가 오렌지를 어떻게 자르느냐가 아니라 오렌지 전체에만 의존한다는 점은 안심이 된다.
- 단위: 모멘트는 힘 곱하기 길이이고, a가 약분되어 힘이 남는다.

흔한 실수

- 구의 중심이나 적도 위의 한 점에 대한 모멘트를 계산하는 것. 그러면 탁자나 다른 절반이 주는 미지의 힘이 식에 들어온다. 점 O를 고르는 이유는 바로 탁자가 주는 힘이 그 점을 지나는 직선에 대한 모멘트를 갖지 않기 때문이다.
- 리본이 절반에 주는 힘을 T라고 하는 것. 리본은 절반의 호 양 끝을 모두 당기므로 합력은 $2T$이다.
- 근거 없이 두 절반 사이의 힘을 0으로 두는 것. 그렇게 하면 등호가 나온다. "적어도"는 이 힘이 밀 수만 있다는 점을 알아차리는 데서 나온다.

STEP 너머

이것은 미지의 내력이 있는 정역학(statics) 문제로, 구할 수 없는 미지수를 없애 주는 축을 고른 다음, 나머지는 부등식(접촉력은 밀기만 하고 결코 당기지 않는다)으로 처리한다. 같은 추론이 석조 아치와 돔의 분석에도 깔려 있다. 이런 구조물은 재료 내부에 머무르는 추력선(line of thrust)을 찾을 수 있을 때에만 서 있을 수 있다. 질량중심 결과 자체는 구면 극좌표에서의 표준적인 삼중적분으로, 직접 유도해 볼 만한 가치가 충분하다. 강체 평형에 대해 더 알고 싶다면 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 읽어 보라.

풀이

STEP II 견본 문제지, 문제 14

역학 • 강체의 회전

> **STEP II 견본 문제지, 14번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q14

핵심 아이디어

원판과 입자는 모두 같은 고정된 연직축을 중심으로 회전하므로, 자연스러운 도구는 회전 운동 방정식, 즉 토크(torque) = 관성 모멘트(moment of inertia) × 각가속도(angular acceleration)를 각 물체에 따로 적용하는 것이다. 둘 사이의 마찰(friction)은 내력(internal force)의 쌍이다. 마찰은 한 물체를 (각운동량(angular momentum)의 관점에서) 늦추는 만큼 정확히 다른 물체를 빠르게 한다. 이로부터 보존되는 조합이 곧바로 나오고, 두 방정식을 빼면 **상대** 각속력에 대한 1계 미분방정식(first-order differential equation)을 얻는데, 이 상대 각속력은 지수적으로 감소한다.

풀이

모형

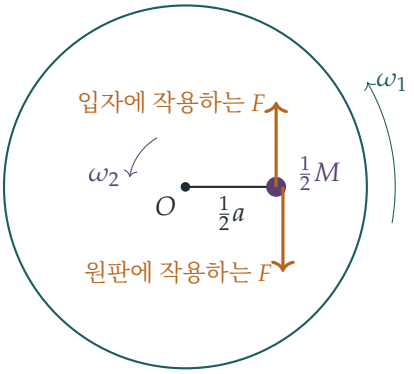
원판은 중심 O를 지나는 매끄러운 고정축을 중심으로 회전하는 균일한 박판(lamina)이므로, 축에 대한 관성 모멘트는

$$I_1 = \tfrac{1}{2}Ma^2.$$

이다. 질량이 $\frac{1}{2}M$인 입자는 가볍고 단단한 철사에 의해 축으로부터 일정한 거리 $\frac{1}{2}a$에 고정되어 있으므로, 반지름 $\frac{1}{2}a$인 원 위를 움직이고 축에 대한 관성 모멘트는

$$I_2 = \tfrac{1}{2}M\left(\tfrac{1}{2}a\right)^2 = \tfrac{1}{8}Ma^2.$$

이다. 처음에 $\omega_1 = \Omega$이고 $\omega_2 = 0$이므로, 접촉점에서 원판이 입자보다 빠르게 움직인다. 따라서 마찰은 입자에 그 운동 방향으로 (반지름 $\frac{1}{2}a$인 곳에서 접선 방향으로) 작용하고, 뉴턴(Newton) 제3법칙(third law)에 의해 크기가 같고 방향이 반대인 힘이 같은 점에서 원판에 작용한다.



(위에서 본 모습이며, $F = Mak(\omega_1 - \omega_2)$이다. 철사의 장력(tension)은 지름 방향이므로 축에 대한 모멘트가 없다.)

운동 방정식

마찰력 $F = Mak(\omega_1 - \omega_2)$는 축으로부터 거리 $\frac{1}{2}a$인 곳에서 반지름에 수직으로 작용하므로, 축에 대한 모멘트는

$$F \cdot \tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}Ma^2k(\omega_1 - \omega_2).$$

이다. 입자의 무게와 수직항력(normal reaction)은 연직 방향이므로 연직축에 대한 모멘트가 없고, 축 자체는 매끄럽다. 원판의 경우 마찰은 회전을 방해한다.

$$\tfrac{1}{2}Ma^2 \frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t} = -\tfrac{1}{2}Ma^2k(\omega_1 - \omega_2) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t} = -k(\omega_1 - \omega_2).$$

입자의 경우 마찰은 회전을 일으킨다.

$$\tfrac{1}{8}Ma^2 \frac{\mathrm{d}\omega_2}{\mathrm{d}t} = \tfrac{1}{2}Ma^2k(\omega_1 - \omega_2) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\omega_2}{\mathrm{d}t} = 4k(\omega_1 - \omega_2).$$

(입자에 대해서는 접선 방향으로 뉴턴 제2법칙(second law)을 써도 된다. $\frac{1}{2}M \cdot \frac{1}{2}a\,\dot{\omega}_2 = F$이며, 이는 같은 방정식이다.)

보존되는 조합

첫 번째 방정식에 4를 곱하고 두 번째 방정식을 더하면

$$4\frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\omega_2}{\mathrm{d}t} = -4k(\omega_1 - \omega_2) + 4k(\omega_1 - \omega_2) = 0,$$

이므로 $4\omega_1 + \omega_2$는 상수이다. $t = 0$에서 이 값은 $4\Omega + 0$이므로

$$4\omega_1 + \omega_2 = 4\Omega,$$

이고, 이것이 보이려던 식이다. 이는 축에 대한 각운동량 보존이다. $I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = \frac{1}{8}Ma^2(4\omega_1 + \omega_2)$이고, 외력은 (축에서의 반작용, 중력, 연직 방향의 반작용뿐이며) 모두 축에 대한 모멘트가 없다.

ω_1 구하기

> **생각해 보기** 서로 얽힌 방정식이 두 개 있다. 어떤 한 가지 양이 그것만으로 이루어진 방정식을 만족하는가?

두 변화율은 모두 차 $u = \omega_1 - \omega_2$에만 의존하므로, 이 양을 살펴본다. 두 방정식을 빼면

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\omega_2}{\mathrm{d}t} = -ku - 4ku = -5ku,$$

이고, $u(0) = \Omega - 0 = \Omega$이다. 변수분리(separation of variables)를 하면 (또는 지수적 감쇠(exponential decay)임을 알아보면)

$$\omega_1 - \omega_2 = u = \Omega\,\mathrm{e}^{-5kt}.$$

이다. 이것을 $4\omega_1 + \omega_2 = 4\Omega$에 더하면 ω_2가 소거된다.

$$5\omega_1 = 4\Omega + \Omega\,\mathrm{e}^{-5kt}, \qquad \text{따라서} \qquad \omega_1 = \frac{\Omega}{5}\left(4 + \mathrm{e}^{-5kt}\right),$$

이고, 이것이 보이려던 식이다. 이로부터 $\omega_2 = 4\Omega - 4\omega_1 = \frac{4}{5}\Omega\left(1 - \mathrm{e}^{-5kt}\right)$이다.

다른 방법으로, $\omega_2 = 4\Omega - 4\omega_1$을 원판의 방정식에 대입하면 선형(linear) 방정식 $\dot{\omega}_1 = -5k\omega_1 + 4k\Omega$를 얻고, $\omega_1(0) = \Omega$일 때 그 해는 위와 같다.

검산

- $t = 0$일 때: $\omega_1 = \frac{1}{5}\Omega(4+1) = \Omega$이고 $\omega_2 = 0$이다. 맞다.
- $t \to \infty$일 때: $\omega_1, \omega_2 \to \frac{4}{5}\Omega$로, 마찰이 결국 만들어 내야 하는 공통의 속력이 된다. 최종 운동 에너지(kinetic energy)는 $\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{8}Ma^2\cdot\frac{16}{25}\Omega^2 = \frac{1}{5}Ma^2\Omega^2$이고 처음에는 $\frac{1}{4}Ma^2\Omega^2$이므로, 에너지의 5분의 1이 마찰로 손실된다. 이는 "완전 비탄성(perfectly inelastic)" 결합에서 예상되는 결과이다.
- 수치적으로, $M = a = k = \Omega = 1$로 두고 두 운동 방정식을 $t = 1$까지 단계별로 계산하면 $\omega_1 = 0.80135$, $\omega_2 = 0.79461$을 얻는데, 이는 $\frac{1}{5}(4 + \mathrm{e}^{-5})$ 및 $\frac{4}{5}(1 - \mathrm{e}^{-5})$와 일치하며, $4\omega_1 + \omega_2$는 내내 4로 유지된다.

흔한 실수

- 입자의 관성 모멘트를 $\frac{1}{2}M(\frac{1}{2}a)^2$ 대신 (입자가 가장자리에 있는 것처럼) $\frac{1}{2}Ma^2$으로 잡는다.
- 회전 운동 방정식에 마찰력의 모멘트 $F\cdot\frac{1}{2}a$가 아니라 마찰력 자체를 쓴다.

- 두 방정식에서 마찰의 부호를 같게 둔다. 마찰은 원판을 느리게 하고 입자를 빠르게 한다.

STEP 너머

여기서 마찰은 내력이고, $4\omega_1 + \omega_2$의 보존은 충돌에서의 운동량 보존을 회전 운동으로 옮긴 것이다. 공통의 속력으로 지수적으로 다가가는 현상은 점성 저항(viscous drag)으로 결합된 두 물체와 같은 수학이다. 더 일반적으로, 선형계 $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$는 A의 고유벡터(eigenvector)로 나타내면 분리된다. 여기서 고유벡터는 조합 $4\omega_1 + \omega_2$ (고윳값(eigenvalue) 0)와 $\omega_1 - \omega_2$ (고윳값 $-5k$)이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 강체의 회전과 각운동량을 꼼꼼하게 전개하고, Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 고유벡터를 이용해 선형계를 다룬다.

풀이

STEP II 견본 문제지, 문제 15

확률과 통계 • 기댓값과 표본평균

STEP II 견본 문제지, 15번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/spec-s2-q15

핵심 아이디어

왕은 매일 엄청나게 많은 상인에게 벌금을 물리므로, 대수의 법칙(law of large numbers)에 따라 상인 한 명당 하루 수입은 사실상 벌금의 **기댓값**(*expected value*)과 같다. 따라서 각 방식에서 벌금의 기댓값을 구해야 한다. 처음 두 방식은 정규분포(normal distribution)를 따르는 확률변수들의 표본평균(sample mean)에 관한 것인데, 이 표본평균의 분포도 정규분포이며 분산(variance)이 더 작다. 세 번째 방식은 대기 시간 문제이므로 기하분포(geometric distribution)를 써야 한다.

풀이

선택된 상자에 든 훈제 청어들의 무게(그램 단위)를 $W_1, W_2, \ldots$라 하자. 상자에는 훈제 청어가 사실상 무작위로 담겨 있으므로 W_i들은 서로 독립(independent)이고, 각각 $W_i \sim \mathrm{N}(200, 10^2)$이다. 상자에서 훈제 청어를 무작위로 고르는 일은 그 무게와 무관하므로, 어떤 훈제 청어를 어떤 순서로 꺼내든 여전히 서로 독립인 $\mathrm{N}(200, 10^2)$ 확률변수이다.

$W_1, \ldots, W_m$이 서로 독립이고 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$를 따르면 그 평균은

$$\overline{W} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} W_i \sim \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{m}\right).$$

을 만족한다는 잘 알려진 사실을 이용한다.

소문항 (i)

여기서는 $m = 625$이므로 $\overline{W} \sim \mathrm{N}\left(200, \frac{100}{625}\right)$이고, 표준편차(standard deviation)는 $\frac{10}{25} = 0.4$이다. 그러면

$$\mathrm{P}(\overline{W} < 199) = \Phi\left(\frac{199 - 200}{0.4}\right) = \Phi(-2.5) = 1 - \Phi(2.5) \approx 1 - 0.99379 = 0.00621.$$

이다. 벌금의 기댓값은

$$1500 \times 0.00621 \approx 9.3 \text{ 크라운.}$$

이다.

소문항 (ii)

이번에는 $m = 25$이므로 $\overline{W} \sim \mathrm{N}\left(200, \frac{100}{25}\right)$이고 표준편차는 2이다. 그러면

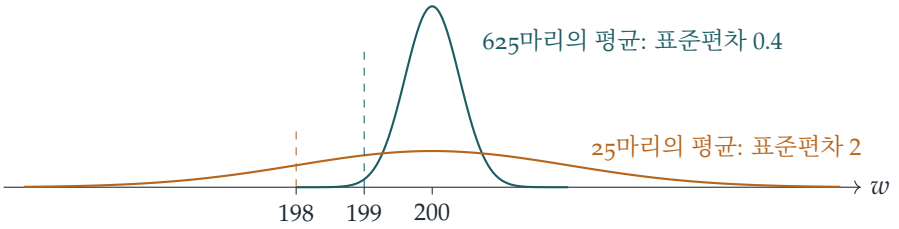
$$\mathrm{P}(\overline{W} < 198) = \Phi\left(\frac{198 - 200}{2}\right) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) \approx 1 - 0.84134 = 0.15866,$$

이고, 벌금의 기댓값은

$$100 \times 0.15866 \approx 15.9 \text{ 크라운.}$$

이다.

아래 그림은 벌금이 더 작은 쪽이 이기는 이유를 보여 준다. 평균보다 1그램 낮은 기준선은 훈제 청어 625마리의 평균에 대해서는 표준편차의 2.5배만큼 떨어져 있지만, 평균보다 2그램 낮은 기준선은 25마리의 평균에 대해서는 표준편차 하나만큼밖에 떨어져 있지 않다.



소문항 (iii)

꺼낸 훈제 청어의 수를 N이라 하자. 200은 대칭인 분포의 평균이고 $\mathrm{P}(W = 200) = 0$이므로, 각 훈제 청어의 무게가 200 g보다 클 확률은 $\frac{1}{2}$이다. 꺼내는 훈제 청어들은 서로 독립이므로, N은 성공 확률이 $\frac{1}{2}$인 독립 시행에서 첫 번째 성공까지(첫 번째 성공 포함)의 시행 횟수이다. 즉 N은 기하분포를 따른다.

$$\mathrm{P}(N = n) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

(엄밀히 말하면 625마리를 꺼내면 상자가 비지만, 그중 어느 것도 200 g을 넘지 않을 확률은 2^{-625}로, 완전히 무시할 수 있다.)

? 생각해 보기 $\mathrm{E}[N^2]$를 먼저 계산하지 않고 $\mathrm{E}[N(N-1)]$을 어떻게 구할 수 있을까?

기하급수(geometric series)를 두 번 미분한다. $|x| < 1$일 때

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

이다. 양변에 x^2을 곱하고 $x = \frac{1}{2}$을 대입하면($n = 1$인 항은 어차피 0이다)

$$\mathrm{E}[N(N-1)] = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)\left(\tfrac{1}{2}\right)^n = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = 4.$$

이다. (같은 방법으로, $p = \frac{1}{2}$일 때 $\mathrm{E}[N] = 2$, $\mathrm{Var}(N) = \frac{1-p}{p^2} = 2$이므로 $\mathrm{E}[N^2] = 6$이고 $\mathrm{E}[N^2] - \mathrm{E}[N] = 4$이다.) 따라서 벌금의 기댓값은

$$\mathrm{E}[3N(N-1)] = 3 \times 4 = 12 \text{ 크라운.}$$

이다.

결론

상인 한 명당 하루 벌금의 기댓값은 방식 (i), (ii), (iii)에 대해 각각 약 9.3, 15.9, 12크라운이다. 검사하는 상자의 수가 엄청나게 많으므로, 왕의 총수입은 검사 횟수에 벌금의 기댓값을 곱한 값에 매우 가깝다. 따라서 왕은 **방식 (ii)**를 택해야 한다. 이 방식은 방식 (i)보다 약 70%, 방식 (iii)보다 약 3분의 1만큼 더 많은 수입을 올린다.

검산

- 방식 (iii)은 표로 확인할 수는 없지만, 급수를 직접 더해 보기는 쉽다: $\frac{3\cdot 2}{4} + \frac{3\cdot 6}{8} + \frac{3\cdot 12}{16} + \cdots = 1.5 + 2.25 + 2.25 + 1.875 + \cdots$. 부분합(partial sum)이 12를 향해 빠르게 올라간다.
- 정규분포를 따르는 훈제 청어 625마리가 든 상자 10^5개를 세 방식 모두에 대해 모의실험한 결과, 평균 벌금은 약 10.2크라운(2×10^4개의 상자에서 얻은 값이라 오차가 크다), 15.9크라운, 11.9크라운이었다. 이는 9.31, 15.87, 12에 가깝다.

흔한 실수

- 표본평균의 표준편차로 $\frac{10}{625}$이나 $\frac{100}{25}$를 쓰는 것. m으로 나누어지는 것은 **분산**이므로, 표준편차는 $\sqrt{m}$으로 나누어진다.

- N이 0부터 시작한다고 보는 것(실패 횟수만 세는 것). 여기서 n은 무거운 훈제 청어까지 포함하므로 $\mathrm{P}(N = 1) = \frac{1}{2}$이고, 이때 벌금은 0이다.
- 벌금의 기댓값 대신 벌금을 물 확률을 비교하는 것. 방식 (iii)은 절반의 경우에 ($n \geq 2$일 때) 상인에게 벌금을 물리지만, 그 벌금은 대개 6크라운에 불과하다.

STEP 너머

"양이 엄청나게 많으므로 기댓값을 쓴다"는 정당화는 대수의 법칙이며, $\overline{W}$가 분산이 σ^2/m인 정규분포를 따른다는 사실은 중심극한정리(central limit theorem)와 연결된다. 중심극한정리에 따르면 개별 무게가 정규분포를 따르지 않더라도 이 사실은 근사적으로 성립한다. 신중한 왕이라면 흩어진 정도도 따져 볼 것이다. 드물게 큰 벌금을 물리는 방식 (i)은 분산이 단연 가장 크다. $\mathrm{E}[N(N-1)]$ 같은 계승 모멘트(factorial moment)를 급수를 미분하여 구하는 아이디어는 확률생성함수(probability generating function)로 이어지는데, 이는 대학 1학년 확률론의 핵심 도구이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)이 이 모든 내용을 명료하게 다룬다.

풀이

STEP II 견본 문제지, 문제 16

확률과 통계 • 토너먼트의 확률

STEP II 견본 문제지, 16번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/spec-s2-q16

이 문제는 *Beyond STEP*의 12.7 절 **토너먼트에서 누가 누구와 만나는가**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch12/knockout.html

핵심 아이디어

선택한 두 선수 A와 B를 라운드별로 따라간다. 두 선수가 모두 아직 남아 있고 아직 서로 만나지 않은 라운드에서는 두 가지만 중요하다. A가 B와 대진되는가, 그리고 그렇지 않다면 두 선수가 모두 이기는가? 각각은 간단한 확률(probability)이고, 이때 나타나는 곱들은 아름답게 연쇄적으로 소거된다(telescoping). 마지막 문항에는 깔끔한 대칭성(symmetry) 논법도 있다. 바로 토너먼트 전체의 경기 수를 세는 것이다.

풀이

$N = 2^n$이라 하자. 선택한 두 선수를 A와 B라 부른다. $r-1$개의 라운드가 끝나면 2^{n-r+1}명의 선수가 남으므로, 라운드 r에는 $M_r = 2^{n-r+1}$명의 선수가 있고, 라운드 n($M_n = 2$)이 결승전이다.

반복해서 사용할 사실은 다음과 같다. A와 B가 모두 무작위로 짝지어지는 M명의 선수 안에 있다면, A의 상대는 나머지 $M-1$명 중 누구든 같은 가능성으로 정해지므로

$$\mathrm{P}(A\text{가 }B\text{와 대진됨}) = \frac{1}{M-1}.$$

(결승전에서는 대진 추첨이 없지만, $M = 2$이면 이 공식은 1을 주므로 올바르다.)

소문항 (i)

첫 라운드에서 $M_1 = N$이므로

$$\mathrm{P}(A\text{와 }B\text{가 첫 라운드에서 만남}) = \frac{1}{2^n - 1}.$$

소문항 (ii)

S_r를 라운드 r가 시작될 때 A와 B가 모두 아직 토너먼트에 남아 있는 사건이라 하자(경기에서 진 선수는 탈락하므로, 이 경우 두 선수는 아직 만나지 않았어야 한다). S_r가 주어졌을 때, 두 선수가 함께 라운드 $r+1$에 진출하는 것은 라운드 r에서 서로 대진되지 **않고**, 각자의 (서로 다른) 경기에서 모두 이길 때이며, 그때뿐이다. 두 경기 결과는 독립(independent)이고 각각의 확률은 $\frac{1}{2}$이므로

$$\mathrm{P}(S_{r+1} \mid S_r) = \frac{M_r - 2}{M_r - 1} \cdot \frac{1}{4}.$$

? **생각해 보기** 이것을 실제로 계산할 수 있는 곱으로 어떻게 바꿀 수 있을까?

$M = 2^k$라 쓰고, $M - 2 = 2(2^{k-1} - 1)$임에 주목하면

$$\frac{M-2}{M-1} = \frac{2\,(2^{k-1} - 1)}{2^k - 1}.$$

한 라운드의 분자는 (인수 2를 제외하면) 다음 라운드의 분모이다. S_1은 확실한 사건이므로, $k = n, n-1, \ldots, n-r+2$인 라운드들에 대해 곱하면 연쇄적으로 소거되는 곱을 얻는다.

$$\mathrm{P}(S_r) = \frac{1}{4^{r-1}} \prod_{k=n-r+2}^{n} \frac{2\,(2^{k-1} - 1)}{2^k - 1} = \frac{2^{r-1}}{4^{r-1}} \cdot \frac{2^{n-r+1} - 1}{2^n - 1} = \frac{2^{n-r+1} - 1}{2^{r-1}\,(2^n - 1)}.$$

S_r가 주어졌을 때, 두 선수가 라운드 r에서 만날 확률은 $1/(M_r - 1) = 1/(2^{n-r+1} - 1)$이므로

$$\mathrm{P}(A\text{와 }B\text{가 라운드 }r\text{에서 만남}) = \frac{1}{2^{r-1}\,(2^n - 1)}.$$

이는 기분 좋을 만큼 간단한 공식이다. 라운드가 하나 지날 때마다 그 라운드에서 만날 확률이 절반으로 줄어든다. $r = 1$로 두면 소문항 (i)의 결과가 다시 나온다. 결승전은 $r = n$이므로

$$\mathrm{P}(A\text{와 }B\text{가 결승전에서 만남}) = \frac{1}{2^{n-1}\,(2^n - 1)}.$$

대칭성으로 이를 검증해 보자. 규칙은 모든 선수를 똑같이 다루므로, 결승 진출자 쌍은 $\binom{N}{2} = 2^{n-1}(2^n - 1)$개의 선수 쌍 중 어느 것이든 같은 가능성으로 정해지고, 이로부터 같은 답을 얻는다.

소문항 (iii)

$r = 1, \ldots, n$에 대하여 사건 "라운드 r에서 만남"들은 서로 배반(mutually exclusive)이다(진 선수는 떠나므로 두 선수는 많아야 한 번 만날 수 있다). 따라서 등비급수(geometric series)를 이용하여 더하면

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\text{와 }B\text{가 만남}) &= \frac{1}{2^n-1}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{2^{r-1}} = \frac{1}{2^n-1}\cdot 2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\\ &= \frac{2}{2^n}\cdot\frac{2^n-1}{2^n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}.\end{aligned}$$

생각해 보기 합을 전혀 계산하지 않고 이 답을 알아낼 방법이 있을까?

있다. 모든 경기는 정확히 한 명의 선수를 탈락시키고, 우승자를 제외한 모든 선수가 탈락하므로, 경기 수는 언제나 정확히 $2^n - 1$이다. 각 경기는 한 쌍의 선수가 치르며, 대칭성에 의해 $\binom{N}{2}$개의 쌍 각각이 경기를 치를 확률 p는 모두 같다. 경기 수의 기댓값은 모든 쌍에 대한 이 확률들의 합이므로

$$\binom{2^n}{2}p = 2^n - 1 \quad\Longrightarrow\quad p = \frac{2(2^n-1)}{2^n(2^n-1)} = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}},$$

이고, 이는 합으로 구한 결과와 일치한다.

검산

- $n = 1$: 선수가 두 명이고, 이들은 반드시 첫 라운드에서 만나며 그것이 곧 결승전이다. 세 공식 모두 1을 준다.
- $n = 2$: 선수가 네 명이다. 소문항 (i)은 $\frac{1}{3}$, 결승전은 $\frac{1}{6}$을 주고, 합은 소문항 (iii)의 말대로 $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$이다.
- $n = 3$: 모든 대진과 모든 결과를 정확히 나열하면 $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{28}$, $\frac{1}{4}$를 얻는다. 선수 16명으로 토너먼트 2×10^5회를 모의실험한 결과는 0.0664, 0.0085, 0.1247이었고, 정확한 값은 $\frac{1}{15} \approx 0.0667$, $\frac{1}{120} \approx 0.0083$, $\frac{1}{8}$이다.

흔한 실수

- 나중 라운드에서 만나려면 두 선수가 먼저 그 이전의 모든 라운드에서 서로를 **피해야** 한다는 점을 잊는 것. 인수 $\frac{M-2}{M-1}$를 빠뜨리기 쉽다.
- 소문항 (ii)의 답을 $\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2$로 쓰는 것. 이는 **두 선수가 독립이라면** 둘 다 결승전에 진출할 확률이다. 그러나 두 선수는 독립이 아니다. 일찍 서로 대진되면 많아야 한 명만 올라갈 수 있다.

STEP 너머

소문항 (iii)의 논법은 지시확률변수(indicator variable)를 이용한 **기댓값의 선형성**(*linearity of expectation*)이다. 경기 수의 기댓값은 사건들이 독립이든 아니든, 모든 쌍에 대하여 그 쌍이 경기를 치를 확률을 더한 것과 같다. 이는 확률론과 조합론에서 가장 강력한 도구 중 하나이며, 주어진 성질을 갖는 대상이 존재함을 증명하는 "확률론적 방법(probabilistic method)"의 바탕이 된다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)에는 지시확률변수 논법의 멋진 예들을 담은 장이 통째로 하나 있다.

풀이

STEP III 견본 문제지, 문제 1

순수수학 • 수학적 귀납법

STEP III 견본 문제지, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/spec-s3-q1

핵심 아이디어

(i)에서는 처음 몇 개의 곱을 직접 계산한 뒤 올바른 방식으로 바라보아야 한다. 각 값을 분모(denominator)가 $2n$이 되도록 쓰면 규칙이 한눈에 드러난다. $1-\frac{1}{m^2}=\frac{(m-1)(m+1)}{m^2}$로 인수분해(factorising)하면 그 까닭이 설명되고, 귀납 단계도 한 줄 계산으로 끝난다. (ii)에서는 n을 고정하고 k에 대한 수학적 귀납법(induction)을 쓴다. 합에 항을 하나 더 더하는 일은 사실 모습만 바꾼 파스칼의 법칙(Pascal's rule)이다.

풀이

소문항 (i)

$P_n=\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$이라 하자. 처음 몇 개의 값은 다음과 같다.

$$P_2=\frac{3}{4},\qquad P_3=\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}=\frac{2}{3},\qquad P_4=\frac{2}{3}\cdot\frac{15}{16}=\frac{5}{8},\qquad P_5=\frac{5}{8}\cdot\frac{24}{25}=\frac{3}{5}.$$

분모 4, 8을 보면 모든 값을 분모가 $2n$이 되도록 써 볼 생각이 든다. 즉 $P_2=\frac{3}{4}$, $P_3=\frac{4}{6}$, $P_4=\frac{5}{8}$, $P_5=\frac{6}{10}$이다. 따라서 다음과 같이 추측한다.

$$P_n=\frac{n+1}{2n}\qquad \text{단, } n\geq 2.$$

수학적 귀납법에 의한 증명. $S(n)$을 명제 $P_n=\dfrac{n+1}{2n}$이라 하자.

기저 단계(*base case*). $P_2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=\frac{2+1}{2\cdot 2}$이므로 $S(2)$는 참이다.

귀납 단계(*inductive step*). 어떤 $n\geq 2$에 대하여 $S(n)$이 참이라고 가정하자. 그러면

$P_{n+1} = P_n\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$이고 $1 - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$이므로

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= \frac{n+1}{2n} \cdot \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \\ &= \frac{n+2}{2(n+1)}, \end{aligned}$$

이 되고, 이것이 바로 $S(n+1)$이다. 수학적 귀납법에 의하여 모든 $n \geq 2$에 대하여 $S(n)$이 성립한다.

(인수분해는 추측의 이유도 설명해 준다. $P_n = \prod_{m=2}^{n} \frac{m-1}{m} \cdot \prod_{m=2}^{n} \frac{m+1}{m} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n+1}{2}$이며, 두 곱 모두 연쇄적으로 약분되는 망원 곱(telescoping product)이다.)

소문항 (ii)

양의 정수 n을 고정하고, $T(k)$를 다음 명제라 하자.

$$\sum_{r=0}^{k} (-1)^r \binom{n}{r} = (-1)^k \binom{n-1}{k}.$$

k에 대한 수학적 귀납법으로 $k = 0, 1, \ldots, n-1$에 대하여 $T(k)$를 증명한다.

기저 단계. $k = 0$이면 양변 모두 $\binom{n}{0} = \binom{n-1}{0} = 1$이다.

귀납 단계. $0 \leq k \leq n-2$인 어떤 k에 대하여 $T(k)$가 성립한다고 가정하자($k+1$이 여전히 범위 안에 있도록 하기 위함이다). 다음 항을 더하면

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{k+1} (-1)^r \binom{n}{r} &= (-1)^k \binom{n-1}{k} + (-1)^{k+1} \binom{n}{k+1} \\ &= (-1)^{k+1} \left[\binom{n}{k+1} - \binom{n-1}{k} \right]. \end{aligned}$$

? **생각해 보기** $\binom{n}{k+1} - \binom{n-1}{k}$는 무엇인가?

파스칼의 법칙에 따르면 $\binom{n}{k+1} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k+1}$이다. n개의 대상에서 $k+1$개를 고를 때, 특정한 대상 하나가 선택되거나(그러면 나머지 k개는 다른 $n-1$개에서 고른다) 선택되지 않는다(그러면 $k+1$개 모두를 다른 $n-1$개에서 고른다). 따라서 괄호 안은 $\binom{n-1}{k+1}$이고,

$$\sum_{r=0}^{k+1} (-1)^r \binom{n}{r} = (-1)^{k+1} \binom{n-1}{k+1},$$

이 되며, 이것이 바로 $T(k+1)$이다. 수학적 귀납법에 의하여 $k = 0, 1, \ldots, n-1$에 대하여 $T(k)$가 성립하므로 증명이 끝난다.

$n = 1$이면 가능한 경우는 $k = 0$뿐이고 이는 기저 단계에서 다루었으므로, 이때 따로 처리할 필요가 없다.

검산

- $P_{300} = \frac{301}{600} \approx 0.5017$이며, 컴퓨터로 분수를 써서 인수들을 정확히 곱해 본 결과 2부터 300까지의 모든 n에 대하여 $\frac{n+1}{2n}$과 일치하였다. $n \to \infty$일 때 이 곱은 $\frac{1}{2}$로 수렴한다.
- $n = 4$일 때 부분합(partial sum) $1, 1-4 = -3, -3+6 = 3, 3-4 = -1$은 $\binom{3}{0}, -\binom{3}{1}, \binom{3}{2}, -\binom{3}{3}$과 일치한다. 컴퓨터로 모든 $n \leq 79$와 모든 $k \leq n-1$에 대하여 (ii)를 정확히 확인하였다.
- $k = n-1$로 두고 마지막 항 $(-1)^n\binom{n}{n}$을 더하면 $(-1)^{n-1} + (-1)^n = 0$이 되는데, 이는 잘 알려진 사실 $\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r} = (1-1)^n = 0$이다.

흔한 실수

- 완전히 약분한 분수($\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{3}{5}$)만 보고 추측하다가 규칙을 놓치는 경우. 약분을 되돌려 공통된 꼴로 맞추는 것이 요령이다.
- (ii)에서 k 대신 n에 대한 귀납법을 쓰는 경우(가능하지만 더 번거롭다), 또는 k에서 $k+1$로 넘어가는 단계는 $k+1 \leq n-1$인 동안만 필요하다는 점을 잊는 경우.

STEP 너머

소문항 (i)은 무한곱(infinite product) $\prod_{m\geq 2}\left(1 - \frac{1}{m^2}\right) = \frac{1}{2}$의 출발점이다. 이는 오일러(Euler)의 곱 $\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \prod_{m\geq 1}\left(1 - \frac{x^2}{m^2}\right)$의 특수한 경우이다. 양변을 $m = 1$인 인수 $1 - x^2$으로 나누고 $x \to 1$로 보내면 된다. 무한곱의 의미를 이해하고 언제 수렴(converge)하는지 살피는 일은 대학 1학년 해석학(analysis)에서 다루는 주제이다. 소문항 (ii)는 파스칼의 법칙이나 생성함수(generating function)로부터 얻어지는 수많은 이항 항등식(binomial identity) 가운데 하나이다. 이는 $(1-x)^n \cdot \frac{1}{1-x} = (1-x)^{n-1}$에서 x^k의 계수(coefficient)이다. 무한급수와 무한곱의 수렴에 대해 읽어 보려면 Abbott의 *Understanding Analysis*가 좋은 출발점이다.

풀이

STEP III 견본 문제지, 문제 2

순수수학 • 이항 부등식과 극한

> **STEP III 견본 문제지, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/spec-s3-q2

핵심 아이디어

$x > 0$인 $y = 1 + x$로 쓰면 y의 거듭제곱은 이항전개(binomial expansion)가 되고, 이 전개의 모든 항은 음이 아니다. 따라서 한 항만 남기고 나머지를 모두 버려도 여전히 하계(lower bound)를 얻는다. x에 대한 항을 남기면 n처럼 커지는 하계를 얻고, 이것은 어떤 고정된 K보다도 커진다. 그런데 n으로 나눈 뒤에도 K를 넘으려면 n^2처럼 커지는 하계가 필요하므로, 대신 x^2에 대한 항을 남긴다.

풀이

부등식(inequality)

$x \geq 0$이고 n이 양의 정수라 하자. 이항정리(binomial theorem)에 의해

$$(1+x)^n = 1 + nx + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + x^n.$$

$x \geq 0$이므로 처음 두 항 이후의 모든 항은 음이 아니고, 따라서

$$(1+x)^n \geq 1 + nx > nx.$$

마지막 부등식이 등호 없이 성립하는 것은 1 때문이며, 바로 이 덕분에 $x = 0$일 때에도(이때 부등식은 $1 > 0$이 된다) 결과가 성립한다.

y^n이 결국 K를 넘음을 이끌어내기

$y > 1$이라 하고 $x = y - 1$로 두면 $x > 0$이다. 앞 부분에 의해 모든 양의 정수 n에 대해

$$y^n = (1+x)^n > n(y-1).$$

$K \le 0$이면 할 일이 없다. 모든 n에 대해 $y^n > 0 \ge K$이므로 $N = 1$이면 된다. $K > 0$이면 다음을 만족하는 정수 N을 고른다.

$$N > \frac{K}{y-1},$$

$y - 1 > 0$이므로 우변은 고정된 수이고, 따라서 이런 N을 고를 수 있다. 그러면 모든 정수 $n \ge N$에 대해

$$y^n > n(y-1) \ge N(y-1) > K,$$

이며, 가운데 단계에서 $y - 1 > 0$을 사용했다. 이것이 바로 필요한 결과이다. 하계 $n(y-1)$이 n에 따라 증가하므로, 같은 N이 $n = N$일 때뿐 아니라 **모든** $n \ge N$에 대해 통한다는 점에 주의하라.

y^n/n이 결국 K를 넘음을 보이기

하계 $y^n > n(y-1)$로부터는 $y^n/n > y - 1$밖에 얻지 못하는데, 이는 고정된 수이므로 큰 K에 대해서는 쓸모가 없다. n보다 빠르게 커지는 y^n의 하계가 필요하다.

생각해 보기 이번에는 이항전개의 어느 항을 남겨야 할까?

x^2 항을 남긴다. $x = y - 1 > 0$이면 전개의 모든 항이 양수이므로, 모든 양의 정수 n에 대해

$$y^n = (1+x)^n \ge 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 > \frac{n(n-1)}{2}x^2.$$

($n = 1$일 때는 x^2 항이 없지만, 마지막 부등식의 우변이 0이므로 여전히 성립한다.) $n > 0$으로 나누면

$$\frac{y^n}{n} > \frac{(n-1)(y-1)^2}{2}.$$

이제 우변은 n이 커짐에 따라 한없이 커지며, 이것이 바로 필요한 것이다. $K \le 0$이면 $y^n/n > 0$이므로 $N = 1$이면 된다. $K > 0$이면 다음을 만족하는 정수 N을 고른다.

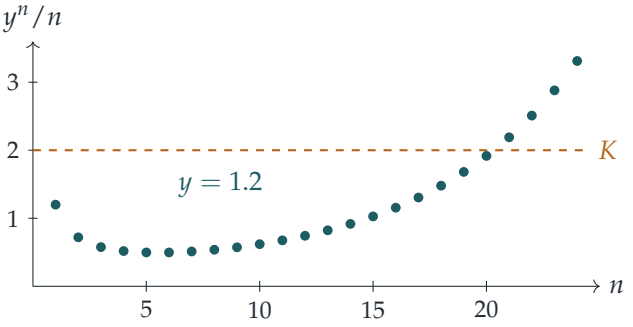
$$N > 1 + \frac{2K}{(y-1)^2}.$$

그러면 모든 정수 $n \ge N$에 대해 $n - 1 \ge N - 1 > 2K/(y-1)^2$이고, 따라서

$$\frac{y^n}{n} > \frac{(n-1)(y-1)^2}{2} > \frac{2K}{(y-1)^2} \cdot \frac{(y-1)^2}{2} = K,$$

이것이 구하는 결과이다.

이번에도 하계가 n에 따라 증가하므로 논증은 모든 $n \ge N$에 대해 통한다. 여기서는 이 점이 중요하다. y^n/n 자체는 항상 증가하는 것이 **아니다**. $y = 1.2$에 대한 그림에서 보듯이, y가 1에 가까우면 처음에는 감소한다(예를 들어 $y < 2$이면 항상 $y^2/2 < y$이다). 따라서 $y^n/n > K$인 n 하나를 찾고 그 뒤의 항들이 더 크다고 주장하는 것만으로는 안 된다.



검산

$y = 1.01$, $K = 1000$으로 시험해 보자. 위의 방법으로 $y^n > K$에 대해서는 $N = 100\,001$, $y^n/n > K$에 대해서는 $N = 20\,000\,002$를 얻는다. 직접 계산해 보면 $1.01^n/n > 1000$은 이미 모든 $n \geq 1424$에 대해 성립한다. 우리가 구한 N은 가능한 최솟값과는 거리가 멀지만, 문제는 **어떤** N이든 하나만 요구한다. 또한 무작위로 고른 수천 개의 x와 n에 대해 유리수 x로 두 부등식을 정확히 검사했고, 무작위로 고른 수천 개의 $y > 1$과 K에 대해 선택한 N(그리고 그보다 큰 많은 n)을 검사했다.

흔한 실수

- 하나의 N에 대해 $y^N > K$임만 보이고, 왜 **모든** $n \geq N$에 대해 $y^n > K$인지 설명하지 않는 것.
- 마지막 부분에 $y^n > n(y-1)$을 사용하는 것. n으로 나누면 상수가 남는데, 이것으로는 임의의 K를 넘을 수 없다.
- K가 음수이거나 0일 수 있음을 잊는 것. 이 경우 $K/(y-1)$ 자체는 적절한 하계가 아니다(물론 이때는 어떤 N이든 된다).

STEP 너머

이것은 대부분의 학생이 처음 만나는 엄밀한 "ε–N" 방식의 논증이다. 이 논증은 $y > 1$일 때 $y^n \to \infty$이고 $y^n/n \to \infty$임을 증명한다. x^{k+1} 항을 남기는 같은 기법으로, 임의의 고정된 k에 대해 $y^n/n^k \to \infty$임을 보일 수 있다. 즉 지수함수(exponential)는 모든 다항식(polynomial)보다 빠르게 커진다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 바로 이런 종류의 추론으로부터 수열(sequence)과 극한(limit)의 이론을 쌓아 올린다.

풀이

STEP III 견본 문제지, 문제 3

순수수학 • 복소수의 삼각부등식

STEP III 견본 문제지, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/spec-s3-q3

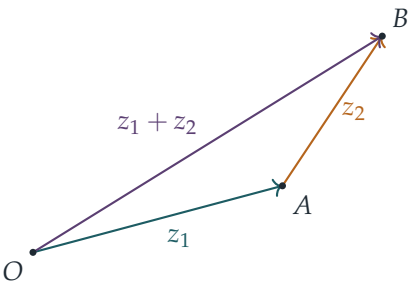
핵심 아이디어

이 부등식은 삼각부등식(triangle inequality)이다. 즉 삼각형의 어느 한 변도 나머지 두 변의 길이의 합보다 길지 않다. 이를 반복해서 적용하면 합 전체의 절댓값(modulus)을 각 항의 절댓값의 합으로 위에서 누를 수 있다. $|z| \leq \frac{1}{3}$일 때 방정식 좌변의 절댓값이 항상 1보다 엄격히 작다면 좌변은 결코 1이 될 수 없으며, 이 상계를 주는 것이 등비급수(geometric series)이다.

풀이

기하학적 의미

복소평면(Argand diagram)에서 z_1을 원점 O에서 점 A로의 변위로, z_2를 A에서 점 B로의 변위로 생각하자. 그러면 $z_1 + z_2$는 O에서 B로 곧바로 가는 변위이다.



삼각형 OAB의 세 변의 길이는 $|z_1|$, $|z_2|$, $|z_1 + z_2|$이다. 이 부등식은 O에서 B로 곧바로 가는 길이 A를 거쳐 가는 길보다 결코 길지 않다는 것, 즉 삼각형의 한 변의 길이는 나머지 두

변의 길이의 합 이하라는 것을 말한다. 등호는 삼각형이 납작해져 A가 선분 OB 위에 놓일 때, 곧 z_1과 z_2가 같은 방향을 가리킬 때(하나가 다른 하나의 음이 아닌 실수배이거나, 둘 중 하나가 0일 때) 그리고 그때에만 성립한다.

수학적 귀납법(induction)에 의해 유한 개의 항에 대해서도 같은 사실이 성립한다.

$$|w_1 + w_2 + \cdots + w_n| \leq |w_1| + |w_2| + \cdots + |w_n|,$$

왜냐하면 $|w_1 + \cdots + w_{k+1}| \leq |w_1 + \cdots + w_k| + |w_{k+1}|$이기 때문이다. 기하학적으로 보면, n개의 직선 걸음으로 이루어진 경로의 길이는 시작점에서 끝점까지의 직선 거리 이상이다.

$|z| \leq \frac{1}{3}$인 해는 없다

$|z| \leq \frac{1}{3}$이고 모든 i에 대해 $|a_i| \leq 2$라고 하자. 확장된 삼각부등식과 $|ab| = |a||b|$를 차례로 이용하면

$$\begin{aligned}\left|a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n\right| &\leq |a_1||z| + |a_2||z|^2 + \cdots + |a_n||z|^n \\ &\leq 2\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3^2} + \cdots + \tfrac{1}{3^n}\right),\end{aligned}$$

이다. 여기서 두 번째 단계에서는 각 k에 대해 $|a_i| \leq 2$와 $|z|^k \leq \left(\frac{1}{3}\right)^k$를 이용했다(관련된 양이 모두 음이 아니므로 항별로 상계를 줄 수 있다).

괄호 안은 첫째항이 $\frac{1}{3}$이고 공비가 $\frac{1}{3}$인 유한 등비급수이다.

$$2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} = 2 \cdot \frac{\frac{1}{3}\left(1 - 3^{-n}\right)}{1 - \frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{3^n} < 1.$$

생각해 보기 위의 각 단계에서는 $\leq$만 사용했는데, 왜 부등식이 엄격하게 성립하는가?

엄격한 부등호는 삼각부등식이 아니라 급수에서 나온다. 합이 n개의 항에서 멈추므로, 무한급수의 합 1에 정확히 $3^{-n} > 0$만큼 못 미친다. 따라서 a_i가 무엇이든, 그리고 $|z| \leq \frac{1}{3}$인 z가 무엇이든

$$\left|a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n\right| \leq 1 - 3^{-n} < 1.$$

이다. 그런데 z가 해라면 좌변은 $|1| = 1$이 되어야 한다. 이는 모순이므로, 구하는 대로 이 방정식은 $|z| \leq \frac{1}{3}$인 해를 갖지 않는다.

검산

- 가장 나쁜 경우는 $a_1 = \cdots = a_n = 2$이고 $z = \frac{1}{3}$일 때로, 이때 모든 부등식이 등식이 되어 좌변은 $1 - 3^{-n}$이다. $n = 10$이면 이 값은 0.99998…로, 1에 아주 조금 못 미친다.

- 상수 $\frac{1}{3}$은 더 개선할 수 없다. 모든 $a_i = 2$일 때 실함수 $2(x + x^2 + \cdots + x^n) - 1$은 $x = \frac{1}{3}$에서 음수이고, n이 크면 $\frac{1}{3}$을 살짝 넘는 곳에서 양수이므로, $\frac{1}{3}$에 원하는 만큼 가까운 실근이 존재한다.
- $n \le 30$, $|a_i| \le 2$인 a_i, $|z| \le \frac{1}{3}$인 z를 무작위로 200 000번 골라 수치 실험을 해 보았는데, 좌변의 절댓값이 1 이상이 된 경우는 한 번도 없었다.

흔한 실수

- 무한급수로 상계를 주어 ≤ 1을 얻는 것. 이것으로는 등호가 성립할 가능성을 배제할 수 없다. 엄격한 부등식이 필요하며, 그것은 급수가 유한하다는 데서 나온다.
- 이유를 밝히지 않고 $|a_1 z + \cdots + a_n z^n| \le |a_1 z| + \cdots$라고 쓰는 것. 이것은 n개의 항으로 확장된 삼각부등식이며, 바로 그 때문에 첫 번째 소문항이 있는 것이다.

STEP 너머

이것은 **근이 없는 영역**(*root-free region*)의 가장 간단한 예이다. 즉 다항식의 계수에 대한 상계가 그 근들을 어떤 원판 밖에 머물게 한다. 같은 어림을 반대 방향으로 적용하면 $z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \cdots + c_0$의 모든 근의 절댓값이 $1 + \max |c_k|$보다 작다는 코시(Cauchy)의 상계를 얻으며, 복소해석학(complex analysis)에서는 루셰(Rouché)의 정리가 이와 같은 논증을 원 안에 있는 근의 개수를 정확히 세는 방법으로 바꾸어 준다. 아름답도록 기하학적인 설명을 원한다면 Needham, *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)를 읽어 보라.

풀이

STEP III 견본 문제지, 문제 4

순수수학 • 포물선의 접선

STEP III 견본 문제지, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/spec-s3-q4

핵심 아이디어

직선이 포물선(parabola)에 접하는 것은 직선의 식을 포물선의 방정식에 대입하여 얻은 이차방정식이 중근(repeated root)을 가질 때이고, 그때뿐이다. 따라서 첫 번째 부분은 한 줄짜리 판별식(discriminant) 계산이며, 그 결과로 t로 매개화된 접선(tangent)들의 족을 얻는다. 두 번째 부분에서는 주어진 점에서 그은 접선들을 어떤 이차방정식을 만족하는 t의 값들로 생각한다. 그러면 L과 M에 관한 모든 것을 두 근의 합과 곱으로 나타낼 수 있고, 이것들은 계수에서 바로 얻어진다.

풀이

접선

주어진 직선에서 $x = ty - at^2$이다. 이를 $y^2 = 4ax$에 대입하면

$$y^2 = 4aty - 4a^2t^2 \quad \Longleftrightarrow \quad y^2 - 4aty + 4a^2t^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (y - 2at)^2 = 0.$$

이 y에 대한 이차방정식은 중근 $y = 2at$를 가지므로, 직선은 포물선과 정확히 한 점에서 만나고, 그것도 중복도(multiplicity) 2로 만난다. 즉 직선은 포물선에 접한다. (이 직선은 수평이 아니므로, 포물선과 역시 한 번만 만나는 축에 평행한 직선이 아니다. $t = 0$일 때 이 직선은 $x = 0$, 즉 꼭짓점(vertex)에서의 접선이다.) 이에 대응하는 x는 $x = t(2at) - at^2 = at^2$이므로, 접점(point of contact)은

$$(at^2,\ 2at).$$

이다. 검산으로, $y^2 = 4ax$를 음함수 미분(implicit differentiation)하면 이 점에서 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2a}{y} = \frac{1}{t}$이고, 이는 $ty = x + at^2$의 기울기(gradient)와 같다.

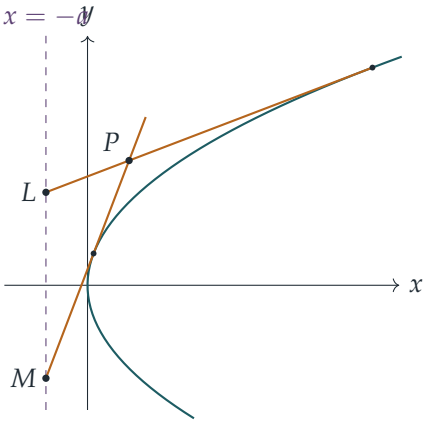
자취

포물선 위의 모든 점은 정확히 하나의 t에 대하여 $(at^2, 2at)$로 나타나므로, 모든 접선은 직선 $ty = x + at^2$ 중 하나이다. 주어진 점을 $P = (h, k)$라 하자. 매개변수가 t인 접선이 P를 지날 필요충분조건은

$$at^2 - kt + h = 0.$$

이다. 접선이 두 개이려면 서로 다른 두 실근 t_1, t_2가 필요하고, 이는 $k^2 > 4ah$ (P가 포물선의 바깥쪽에 있음)와 같다. 이때

$$t_1 + t_2 = \frac{k}{a}, \qquad t_1 t_2 = \frac{h}{a}.$$



매개변수가 t인 접선은 준선(directrix) $x = -a$와 $ty = -a + at^2$인 곳에서 만난다. $t \neq 0$이면

$$y = a\left(t - \frac{1}{t}\right).$$

이다. ($t = 0$이면 접선은 $x = 0$으로 준선과 평행하므로 교점이 없다. 이는 $h = t_1 t_2\, a = 0$일 때만 일어나므로, L과 M이 존재하려면 $h \neq 0$이어야 하고, 이때 $t_1, t_2 \neq 0$이다.) 따라서 L과 M은 $\left(-a,\ a(t_1 - \frac{1}{t_1})\right)$과 $\left(-a,\ a(t_2 - \frac{1}{t_2})\right)$이고, 두 점이 같은 수직선 위에 있으므로

$$\begin{aligned} LM &= \left|a(t_1 - t_2) - a\left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right)\right| = \left|a(t_1 - t_2) + a\,\frac{t_1 - t_2}{t_1 t_2}\right| \\ &= |a|\,|t_1 - t_2|\left|\frac{t_1 t_2 + 1}{t_1 t_2}\right|. \end{aligned}$$

생각해 보기 이차방정식을 풀지 않고 $t_1 - t_2$를 어떻게 구할 수 있을까?

그 제곱은 두 근에 대한 대칭식(symmetric expression)이다.

$$(t_1 - t_2)^2 = (t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2 = \frac{k^2}{a^2} - \frac{4h}{a} = \frac{k^2 - 4ah}{a^2}.$$

또한

$$\frac{t_1t_2+1}{t_1t_2} = \frac{h/a+1}{h/a} = \frac{h+a}{h}.$$

LM의 식을 제곱하고 대입하면

$$LM^2 = a^2 \cdot \frac{k^2-4ah}{a^2} \cdot \frac{(h+a)^2}{h^2} = \frac{(h+a)^2(k^2-4ah)}{h^2}.$$

$LM = \ell$이면 양변에 h^2을 곱하여

$$(h+a)^2(k^2-4ah) = \ell^2h^2,$$

을 얻는다. 따라서 $P=(h,k)$는 요구한 대로 $(x+a)^2(y^2-4ax) = \ell^2x^2$ 위에 있다.

검산

- 그림에서처럼 $a=1$, $P=(1,3)$으로 두자. 매개변수는 $t^2-3t+1=0$을 만족하므로 $t=\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{5})$이고, $t-\frac{1}{t}=\pm\sqrt{5}$이다($t_1t_2=1$이므로 $1/t_1=t_2$이기 때문이다). 따라서 $LM=2\sqrt{5}$, $LM^2=20$이고, 공식으로도 $(1+1)^2(9-4)/1^2=20$이다.
- 준선 위의 점, 즉 $h=-a$인 경우: 공식에 따르면 $LM=0$이다. 실제로 이러한 점에서 그은 접선들은 준선과 그 점 자체에서 만나므로 $L=M$이다.
- 14,000개가 넘는 무작위 a, h, k에 대하여 접선을 독립적인 방법($hm^2-km+a=0$을 만족하는 직선 $y=k+m(x-h)$)으로 구해 보았더니, 계산한 LM^2이 매번 $(h+a)^2(k^2-4ah)/h^2$과 일치했다. 예를 들어 $a=1$, $P=(2,5)$이면 두 방법 모두 $LM^2=38.25$를 준다.

흔한 실수

- 접선의 매개변수 방정식을 거꾸로 사용하는 것: P를 고정하고 t를 미지수로 보면 h와 k에 대한 방정식이 아니라 이차방정식 $at^2-kt+h=0$을 얻는다.
- $\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}=\frac{t_1-t_2}{t_1t_2}$라고 쓰는 것: 실제로는 $\frac{t_2-t_1}{t_1t_2}$이며, 바로 이 부호 때문에 두 항이 상쇄되지 않고 더해진다.

STEP 너머

한 점에서 이차곡선(conic)에 그은 접선들과 그 접점들을 잇는 직선(그 점의 **극선**(*polar*))은 사영기하학(projective geometry)의 출발점이다. 사영기하학에서는 극(pole), 극선, 준선이 하나의 그림 안에 들어맞는데, 준선은 초점(focus)의 극선이다. 여기서처럼 근을 대칭함수를 통해 다루는 것은 방정식론(theory of equations)과 갈루아(Galois) 이론으로 나아가

는 첫걸음이기도 하다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*에는 이런 형식의 좌표기하 문제가 더 실려 있다.

풀이

STEP III 견본 문제지, 문제 5

순수수학 • 방정식의 근의 개수 세기

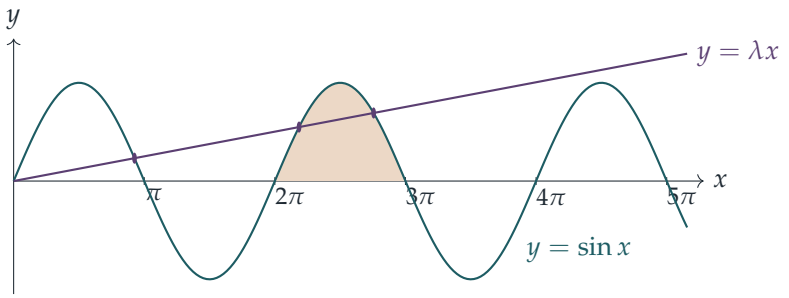
STEP III 견본 문제지, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/spec-s3-q5

핵심 아이디어

직선 $y = \lambda x$와 곡선 $y = \sin x$를 함께 그려 보자. 해는 두 그래프가 만나는 점이다. 직선은 $\sin x > 0$인 곳, 즉 양의 "아치(arch)" $\big((2n-2)\pi, (2n-1)\pi\big)$ 위에서만 곡선과 만날 수 있다. 또 각 아치에서 $\sin x$는 위로 볼록한 오목 함수(concave function)이므로, 직선은 (원점에서 시작하는 첫 번째 아치를 제외하면) 한 아치와 두 번 만나거나 전혀 만나지 않는다. ϵ이 작을 때의 근삿값은 매클로린 급수(Maclaurin series) $\sin x \approx x - \frac{1}{6}x^3$으로 구한다.



(여기서는 $\lambda = 0.08$이다. 첫 번째 아치에서 한 번, 색칠한 두 번째 아치에서 두 번 만나고, 세 번째 아치가 꼭대기에 이르기 전에 직선이 이미 높이 1보다 위로 올라가므로 $N = 3$이다.)

풀이

소문항 (i)

$\lambda > 1$이면 해가 없다. 곡선 $y = \sin x$의 기울기(gradient)는 $\cos x \leq 1$이고, 곡선은 원점을 지나며, 직선 $y = x$는 원점에서 이 곡선의 접선(tangent)이다. $x > 0$이면 $\sin x < x$이

다(함수 $x - \sin x$는 0에서 값이 0이고, 도함수(derivative) $1 - \cos x \geq 0$은 고립된 점에서만 0이 되므로 이 함수는 강한 증가 함수(strictly increasing function)이다). 그래프로 보면, $x > 0$에서 곡선은 접선 $y = x$보다 엄격히 아래에 있고, $\lambda > 1$이면 그 범위에서 직선 $y = \lambda x$는 $y = x$보다 위에 있다. 따라서

$$\sin x < x < \lambda x \qquad \text{모든} x > 0,$$

이므로 0이 아닌 해는 없다.

$\lambda = 1 - \epsilon^2$인 경우. $x > 0$에서 방정식은

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \epsilon^2.$$

과 동치이다. 먼저 해가 존재하고 그것이 유일함을 보이자. $(0, \pi]$에서 함수 $\frac{\sin x}{x}$는 연속(continuous)이고, $x \to 0^+$일 때 1에 가까워지며, $x = \pi$에서 값이 0이다. 따라서 $(0, \pi)$의 어딘가에서 값 $1 - \epsilon^2$을 갖는다. 또 이 구간에서 이 함수는 강하게 감소하므로(원점과 오목한 아치 위의 점을 잇는 직선은 그 점이 아치를 따라 움직일수록 완만해진다) 그런 점은 단 하나뿐이다. $x \geq \pi$에서는 더 이상 해가 없다. ϵ이 작으므로 $\lambda x \geq (1 - \epsilon^2)\pi > 1 \geq \sin x$이기 때문이다.

이제 해의 위치를 구하자. $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \cdots$를 이용하면

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \cdots = 1 - \epsilon^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + \cdots = \epsilon^2.$$

생각해 보기 왜 x^4 항을 버려도 될까? 아직 x가 작다는 것을 알지 못하는데 말이다.

$\epsilon \to 0$이면 $\frac{\sin x}{x} \to 1$이고, $\frac{\sin x}{x}$는 $(0, \pi)$에서 1부터 강하게 감소하므로 근은 0으로 수렴해야 한다. 따라서 ϵ이 작으면 근도 작고, 그러면 x^4은 x^2에 비해 무시할 수 있다. 최저차 근사로 $x^2/6 = \epsilon^2$이므로

$$x \approx \epsilon\sqrt{6}.$$

이다. (다음 항까지 남겨 $x^2 \approx 6\epsilon^2 + \frac{6}{120}(6\epsilon^2)^2$로 두면, 더 정밀한 근사 $x \approx \epsilon\sqrt{6}\left(1 + \frac{3}{20}\epsilon^2\right)$을 얻는다.)

소문항 (ii)

$g(x) = \sin x - \lambda x$라 하면, 해는 $x > 0$인 g의 영점이다. $x > 0$에서 $\lambda x > 0$이므로 모든 해에서 $\sin x > 0$이고, 따라서 모든 해는 다음 아치 중 하나 위에 있다.

$$A_n = \big((2n-2)\pi, (2n-1)\pi\big), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

첫 번째 아치. 원점에서 직선의 기울기는 $\lambda < 1$로 곡선의 기울기보다 작으므로, 직선은 곡선보다 아래에서 출발한다. $x = \pi$에서는 직선이 위에 있다($\lambda\pi > 0 = \sin\pi$). A_1에서

$\sin x$는 오목하고 직선은 곧으므로, 둘은 이 구간에서 정확히 한 번 만난다. 따라서 A_1에는 해가 정확히 하나 있고, 그것이 x_1이며 $0 < x_1 < \pi$이다.

그다음 아치들. $n \geq 1$일 때 $A_{n+1} = (2n\pi, (2n+1)\pi)$에서 $g''(x) = -\sin x < 0$이므로 g는 오목하고 영점은 많아야 두 개이다. 아치의 양 끝에서 $\sin x = 0 < \lambda x$이므로 그곳에서 $g < 0$이다. g의 최댓값은 $g'(x) = \cos x - \lambda = 0$인 점, 곧 $c_n = 2n\pi + \arccos\lambda$에서 나타나며, $\lambda > 0$이면 $\arccos\lambda < \frac{\pi}{2}$이므로 $c_n < (2n + \frac{1}{2})\pi$이다. 따라서 g는 $(2n\pi, c_n)$에서 증가하고 $(c_n, (2n+1)\pi)$에서 감소하므로 다음이 성립한다.

- $g(c_n) < 0$이면 직선은 그 아치와 만나지 않는다.
- $g(c_n) = 0$이면 직선은 아치에 한 점에서 접한다.
- $g(c_n) > 0$이면 해가 정확히 두 개 있으며, 하나는 $(2n\pi, c_n)$에, 다른 하나는 $(c_n, (2n+1)\pi)$에 있다.

또한 직선이 어떤 아치와 만나지 않으면 그 뒤의 모든 아치와도 만나지 않는다. $x \in A_{n+2}$이면 $x - 2\pi \in A_{n+1}$이므로 $\sin x = \sin(x - 2\pi) < \lambda(x - 2\pi) < \lambda x$이기 때문이다.

따라서 직선이 만나는 아치는 $A_1, A_2, \ldots$부터 어떤 마지막 아치까지이고, 각각 해를 $1, 2, 2, \ldots$개씩 제공하며, 그 뒤에 접하는 점이 하나 있을 수도 있다. $N = 2R + 1$은 홀수이므로 접점은 없고, 직선은 정확히 아치 $A_1, \ldots, A_{R+1}$과 만난다. 해를 크기순으로 나열하면 아치 A_{n+1} $(1 \leq n \leq R)$은 x_{2n}과 x_{2n+1}을 포함하고

$$2n\pi < x_{2n} < c_n < (2n + \tfrac{1}{2})\pi, \qquad 2n\pi < x_{2n+1} < (2n+1)\pi.$$

이다. 첫 번째 부등식에서 요구된 부등식의 둘째 줄을 얻는다. x_{2n+1}을 $x_{2(n+1)-1}$로 쓰면, 두 번째 부등식과 $0 < x_1 < \pi$로부터 $m = 1, \ldots, R+1$에 대하여 $(2m-2)\pi < x_{2m-1} < (2m-1)\pi$를 얻는다. 이것이 증명할 결과이다.

N의 어림. λ가 작으면 직선은 많은 아치와 만나므로 $R \geq 1$이다. x_{2R}에서 $\lambda x_{2R} = \sin x_{2R} \leq 1$이고, 위에서 보인 대로 $x_{2R} > 2R\pi$이므로

$$2R\pi\lambda < 1.$$

이다. 한편 직선은 $A_{R+2} = \big((2R+2)\pi, (2R+3)\pi\big)$와 만나지 않는다. 이 아치의 중점 $(2R + \frac{5}{2})\pi$에서 $\sin x = 1$이므로 $\lambda(2R + \frac{5}{2})\pi > 1$이어야 한다(그렇지 않으면 그곳에서 $g \geq 0$이 되어 직선이 아치와 만난다). 두 결과를 합하면

$$\frac{1}{2\pi\lambda} - \frac{5}{4} < R < \frac{1}{2\pi\lambda}, \qquad \text{따라서} \qquad \frac{1}{\pi\lambda} - \frac{3}{2} < N < \frac{1}{\pi\lambda} + 1.$$

이다. λ가 아주 작으면 $\frac{1}{\pi\lambda}$는 매우 크고 유계인 오차는 이에 비해 무시할 수 있으므로

$$N \approx \frac{1}{\pi\lambda}.$$

이다. 이는 직관과도 맞는다. 직선은 $x = 1/\lambda$에서 높이 1에 이르고, 그 전까지 $\sin x$의 완전한 주기가 약 $\frac{1}{2\pi\lambda}$개 있으며, 각 주기마다 교점이 두 개씩 생긴다.

검산

- $\epsilon = 0.01$ ($\lambda = 0.9999$)일 때 이분법(bisection)으로 구한 근은 0.0244953이고, $\epsilon\sqrt{6} = 0.0244949$와 비교하면 비는 1.000015로, 정확히 $1 + \frac{3}{20}\epsilon^2$ 보정과 일치한다.
- $\lambda = 0.001$일 때 컴퓨터로 찾은 근은 $N = 317$개로 $\frac{1}{\pi\lambda} \approx 318.3$과 비교되고, $\lambda = 0.01$일 때는 31.8에 대해 31개이다. 여러 λ에 대해 찾은 모든 근이 (ii)의 구간 부등식을 만족하며, N은 위의 범위 안에 있다.
- $\lambda = 1.0001, 1.1, 2, 5$에 대해서는 근이 하나도 발견되지 않았다.

흔한 실수

- 첫 번째 아치에는 x_1 하나만 있다는 점을 잊는 것. 원점도 교점이기 때문에 이 아치는 0이 아닌 해를 두 개가 아니라 하나만 제공한다.
- 아무 근거 없이 x_{2n}을 아치의 앞쪽 절반에 두는 것. 핵심은 g가 $c_n = 2n\pi + \arccos\lambda$ 이후에야 감소하기 시작하며, 이 점이 $\sin x$의 꼭대기보다 앞에 있다는 것이다.

STEP 너머

근사 $x \approx \epsilon\sqrt{6}$은 점근 전개(asymptotic expansion)의 첫 단계이며, 급수를 잘라내기 전에 근이 작아야 함을 먼저 보이는 논증은 해석학 강의에서 강조하는 바로 그런 엄밀함이다. 오목성, 단조성, 사잇값 정리(intermediate value theorem)로 해의 개수를 세는 것은 대학 1학년 해석학의 표준적인 방법이다. Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 참고하라. 이와 관련된 고전적인 문제로 $\tan x = x$가 있는데, 그 근은 $(n + \frac{1}{2})\pi$에 가까워지며 열전도와 진동 문제에 등장한다.

풀이

STEP III 견본 문제지, 문제 6

순수수학 • 쌍곡선 함수 점화 공식

STEP III 견본 문제지, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/spec-s3-q6

핵심 아이디어

피적분함수(integrand) $\operatorname{sech}^{n+2}u\,\sinh^2 u$는 자연스럽게 $\sinh u$와 $\sinh u\operatorname{sech}^{n+2}u$의 곱으로 나뉘고, 두 번째 인수는 상수배를 제외하면 $\operatorname{sech}^{n+1}u$의 도함수(derivative)이다. 그러므로 부분적분(integration by parts)이 가장 먼저 떠오르는 방법이다. 점화식(reduction formula)을 얻을 때는 항등식 $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$을 이용하여 같은 적분을 두 I의 차로 다시 쓸 수 있다.

풀이

적분 항등식

먼저 앞으로 필요한 도함수를 구한다. $\operatorname{sech} u = (\cosh u)^{-1}$이므로 연쇄법칙(chain rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\operatorname{sech}^{n+1}u = -(n+1)\cosh^{-n-2}u\,\sinh u = -(n+1)\operatorname{sech}^{n+2}u\,\sinh u.$$

따라서 다음과 같이 놓고 부분적분한다.

$$f = \sinh u, \qquad g' = \operatorname{sech}^{n+2}u\,\sinh u, \qquad \text{이므로} \qquad f' = \cosh u, \qquad g = -\frac{\operatorname{sech}^{n+1}u}{n+1}.$$

그러면

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \operatorname{sech}^{n+2}u\,\sinh^2 u\,\mathrm{d}u &= \left[-\frac{\sinh u\operatorname{sech}^{n+1}u}{n+1}\right]_0^\infty + \frac{1}{n+1}\int_0^\infty \cosh u\operatorname{sech}^{n+1}u\,\mathrm{d}u \\ &= -\frac{1}{n+1}\left[\tanh u\operatorname{sech}^n u\right]_0^\infty + \frac{1}{n+1}\int_0^\infty \operatorname{sech}^n u\,\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

이다. 여기서 $\sinh u \operatorname{sech}^{n+1} u = \tanh u \operatorname{sech}^n u$와 $\cosh u \operatorname{sech}^{n+1} u = \operatorname{sech}^n u$를 이용하였다.

? **생각해 보기** 경계항은 왜 사라지며, $n > 0$이라는 조건은 어디에서 쓰이는가?

$u = 0$에서 $\tanh 0 = 0$이다. $u \to \infty$일 때 $\tanh u \to 1$이고 $\operatorname{sech} u = 2/(\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u}) \to 0$이므로, $n > 0$이기 때문에 $\operatorname{sech}^n u \to 0$이다. ($n = 0$이면 이 항은 0이 아니라 1로 수렴한다.) 같은 사실, 곧 $\operatorname{sech}^n u < 2^n \mathrm{e}^{-nu}$로부터 $n > 0$일 때 I_n이 수렴(converge)함도 알 수 있다. 따라서 경계항은 0이고

$$\int_0^\infty \operatorname{sech}^{n+2} u \, \sinh^2 u \, \mathrm{d}u = \frac{1}{n+1} I_n,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

점화식

이제 같은 적분을 다른 방법으로 계산한다. $\sinh^2 u = \cosh^2 u - 1$이므로

$$\operatorname{sech}^{n+2} u \, \sinh^2 u = \operatorname{sech}^{n+2} u \cosh^2 u - \operatorname{sech}^{n+2} u = \operatorname{sech}^n u - \operatorname{sech}^{n+2} u.$$

($n > 0$이므로) 두 부분 모두 $[0, \infty)$에서의 적분이 수렴하고, 따라서

$$\int_0^\infty \operatorname{sech}^{n+2} u \, \sinh^2 u \, \mathrm{d}u = I_n - I_{n+2}.$$

첫 번째 결과와 비교하면

$$I_n - I_{n+2} = \frac{1}{n+1} I_n \quad \Longrightarrow \quad I_{n+2} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) I_n = \frac{n}{n+1} I_n,$$

즉 $(n+1) I_{n+2} = n I_n$이 되어 원하는 결과를 얻는다.

I_6의 값

점화식은 n을 2씩 늘리므로 n이 짝수인 시작값이 필요하다. 가장 쉬운 것은

$$I_2 = \int_0^\infty \operatorname{sech}^2 u \, \mathrm{d}u = \Big[\tanh u\Big]_0^\infty = 1 - 0 = 1.$$

이다. (I_0에서 시작할 수는 없다. I_0은 발산(diverge)하며, $n = 0$을 점화식에 대입하면 $I_2 = 0$이라는 틀린 결론이 나온다. 바로 이 지점에서 $n > 0$이 중요하다.) 그러면

$$I_4 = \frac{2}{3} I_2 = \frac{2}{3},$$
$$I_6 = \frac{4}{5} I_4 = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15}.$$

따라서

$$I_6 = \frac{8}{15}.$$



검산

- 수열 $I_2, I_4, I_6 = 1, \frac{2}{3}, \frac{8}{15}$는 감소하며, 이는 당연하다. $0 < \operatorname{sech} u \leq 1$이므로 거듭제곱의 지수가 클수록 값이 작다.
- 대신 $I_1 = \int_0^\infty \operatorname{sech} u \, \mathrm{d}u = \left[2 \arctan(\mathrm{e}^u)\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2}$에서 시작하면 점화식에 의해 $I_3 = \frac{1}{2} I_1 = \frac{\pi}{4}$를 얻으며, 이는 직접 수치적분한 결과와 일치한다.
- $[0, 60]$에서 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면 $I_6 \approx 0.5333333$으로 $\frac{8}{15}$와 일치한다. 적분 항등식과 점화식 모두 $n = 0.5$, $n = 2.5$처럼 정수가 아닌 n에 대해서도 수치적으로 성립함을 확인할 수 있다.

흔한 실수

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \operatorname{sech}^{n+1} u$에서 부호나 인수 $n+1$을 틀리는 실수. $u > 0$에서 $\operatorname{sech} u$는 감소하므로 도함수는 음수여야 한다.
- 무한대에서 경계항이 사라지는 이유를 밝히지 않는 실수. 조건 $n > 0$이 필요한 곳은 바로 이 한 군데이다.
- I_2를 계산하지 않은 채 답을 $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot I_2$로 쓰는 실수.

STEP 너머

이와 같은 점화식은 월리스 공식(Wallis's formula)과 같은 구조를 가진다. $t = \tanh u$로 치환하면(또는 구데르만 치환(Gudermannian substitution)인 $\sin\theta = \tanh u$로 치환하면) I_n은 $\int_0^{\pi/2} \cos^{n-1}\theta \, \mathrm{d}\theta$가 되고, 점화식은 바로 월리스의 점화식이 된다. 대학에서는 이 적분들이 베타 함수(Beta function)의 값 $I_n = \frac{1}{2} B\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$로 다시 등장하며, 이를 통해 점화식이 모든 실수 $n > 0$으로 확장된다. 또한 경계항을 신중하게 다룬 과정은 이상적분(improper integral) 이론의 출발점이다. 엄밀한 설명은 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를, 이런 형식의 문제를 더 많이 풀어 보려면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(STEP 대비 문제집)를 보라.

풀이

STEP III 견본 문제지, 문제 7

순수수학 • 계수 내림법

> **STEP III 견본 문제지, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/spec-s3-q7

핵심 아이디어

2계 선형 방정식에 x^2y'', xy', y가 들어 있을 때는 x의 거듭제곱을 대입해 보는 것이 자연스럽다. 그러면 각 항이 x^α의 상수배가 되어, 방정식은 α에 대한 조건으로 바뀐다. 해 하나 y_1을 알면 $y = y_1 v$로 놓는 것이 **계수 내림법**(*reduction of order*)이다. 이때 v 자체가 들어 있는 항은 소거되고, v'에 대한 1계 방정식만 남는다.

풀이

거듭제곱 꼴의 해

$y = x^\alpha$를 대입해 보자($x > 0$으로 두어 임의의 실수 α에 대해 x^α가 정의되도록 한다). 그러면 $y' = \alpha x^{\alpha-1}$, $y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$이므로

$$xy' - y = (\alpha - 1)x^\alpha, \qquad x^2y'' = \alpha(\alpha-1)x^\alpha.$$

이를 대입하면

$$x^2y'' + (x-2)(xy' - y) = \big[\alpha(\alpha-1) + (x-2)(\alpha-1)\big]x^\alpha = (\alpha-1)(\alpha + x - 2)\,x^\alpha.$$

이 식이 **모든** x에 대해 0이 되려면 괄호 부분이 항등적으로 0이어야 한다. 인수 $\alpha + x - 2$는 x에 따라 달라지므로 항등적으로 0일 수 없다. 따라서 $\alpha = 1$이다.

그러므로 $y = x$가 해이며, 이는 직접 확인할 수도 있다. $y'' = 0$이고 $xy' - y = x - x = 0$이기 때문이다. 그러면 임의의 상수배 $y = Ax$도 해가 되는데, 해가 "x^α에 비례한다"는 말은 이런 뜻이다.

일반해

힌트에 따라 $y = xv$로 놓자. 여기서 v는 x의 함수이다. 그러면

$$y' = v + xv', \qquad y'' = 2v' + xv'',$$

이고, 방정식에 나타나는 결합은 깔끔하게 정리된다.

$$xy' - y = xv + x^2v' - xv = x^2v'.$$

이를 방정식에 대입하면

$$\begin{aligned} 0 &= x^2(2v' + xv'') + (x-2)x^2v' \\ &= x^2\left(xv'' + 2v' + xv' - 2v'\right) \\ &= x^3\left(v'' + v'\right). \end{aligned}$$

? **생각해 보기** (미분하지 않은) v 자체가 들어 있는 항은 왜 모두 사라졌을까?

$y = x$가 해이기 때문이다. v가 상수라면 $y = xv$는 x의 상수배이므로 좌변이 0이 된다. 따라서 v'과 v''이 들어 있는 항만 남을 수 있다. 계수 내림법이 통하는 이유가 바로 이것이며, 계산을 검토하는 데에도 유용하다.

0을 포함하지 않는 구간에서는 x^3으로 나눌 수 있으므로

$$v'' + v' = 0.$$

이는 $w = v'$에 대한 1계 방정식 $w' = -w$이므로, 상수 B에 대해 $w = Be^{-x}$이다. 한 번 더 적분하면(부호는 상수에 흡수시킨다)

$$v = A + Be^{-x}.$$

따라서 일반해(general solution)는

$$\boxed{y = Ax + Bxe^{-x}}$$

이고, A와 B는 임의의 상수이다. 2계 선형 방정식의 일반해라면 마땅히 그래야 하듯 임의의 상수가 두 개 들어 있으며, 두 부분 x와 xe^{-x}는 서로의 상수배가 아니다.

새로 얻은 부분을 직접 확인해 보자. $y = xe^{-x}$이면 $y' = (1-x)e^{-x}$, $y'' = (x-2)e^{-x}$이므로

$$x^2y'' + (x-2)(xy' - y) = (x-2)e^{-x}\left[x^2 + x(1-x) - x\right] = 0.$$

$x = 0$에 관한 참고. y''의 계수는 $x = 0$에서 0이 되는데, 이 때문에 0이 아닌 곳에서만 x^3으로 나누었다. 원칙적으로는 $x > 0$과 $x < 0$에서 서로 다른 상수를 택할 수 있다. 그러나 이런 함수는 모두 $y(0) = 0$, $y'(0^{\pm}) = A_{\pm} + B_{\pm}$, $y''(0^{\pm}) = -2B_{\pm}$를 만족하므로, y가 0에서 두 번 미분가능하려면 $B_+ = B_-$이어야 하고, 그러면 $A_+ = A_-$이다. 따라서 $y = Ax + Bxe^{-x}$는 실수 전체에서도 일반해이다.

검산

- 위에서처럼 $y = x$와 $y = xe^{-x}$를 각각 방정식에 다시 대입하면 모두 0이 된다.
- 수치적 확인: $y(1) = y_0$, $y'(1) = y_1$로 두고 $x = 1$에서부터 방정식을 단계적으로 풀면, 공식은 $A = y_1$, $B = (y_0 - y_1)e$를 예측한다. $y_0 = 2$, $y_1 = 1$이면 $y(4) = 4 + 4e^{-3} \approx 4.199$이고, 4차 룽게–쿠타(Runge–Kutta) 적분으로 계산하면 여러 무작위 초깃값에 대해 10^{-8}보다 작은 오차로 일치한다.

흔한 실수

- 인수 $(\alpha + x - 2)$로부터 $\alpha = 2 - x$라고 결론 내리는 것. α는 상수여야 하므로 이 근은 허용되지 않는다.
- $y = xv$일 때 y''을 잘못 계산하는 것($v' + xv''$이 아니라 $2v' + xv''$이다). v가 들어 있는 항이 소거되지 않는다면 미분 과정이 잘못된 것이다.
- $v' = Be^{-x}$에서 멈추거나, v를 구하려고 적분할 때 두 번째 상수를 빠뜨리는 것.

STEP 너머

계수 내림법은 임의의 2계 선형 방정식 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$에 적용된다. 해 하나 y_1이 주어지면 $y = y_1 v$로 치환할 때 언제나 v'에 대한 1계 선형 방정식이 얻어지고, 두 번째 해는 y_1과 p를 포함하는 적분으로 나타낼 수 있다. 이는 론스키안(Wronskian) 및 아벨(Abel)의 공식과 밀접하게 연결되어 있으며, $x = 0$과 같은 점에서 x^{α}를 대입해 보는 것은 급수해를 구하는 프로베니우스 방법(Frobenius method)의 첫 단계이다. 이 내용은 모두 Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(미분방정식 입문서)에서 다룬다.

풀이

STEP III 견본 문제지, 문제 8

순수수학 • 벡터와 코시-슈바르츠 부등식

STEP III 견본 문제지, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/spec-s3-q8

핵심 아이디어

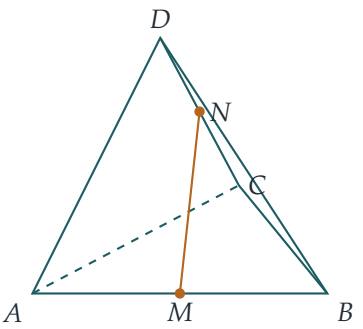
소문항 (i)에서는 네 꼭짓점에 위치벡터(position vector)를 준다. 필요한 길이는 모두 이 벡터들을 간단히 결합한 것의 크기(modulus)이고, 길이의 제곱은 전개할 수 있는 내적(dot product)이다. 그러면 양변이 같은 식으로 정리되고, 계산의 대부분은 대칭성(symmetry)이 정리해 준다. 소문항 (ii)에서는 좌변이 고정된 벡터 $(3,2,6)$과의 내적처럼 보이는데, 이 벡터의 길이는 정수이다. 이것이 바로 코시-슈바르츠 부등식(Cauchy–Schwarz inequality)이 쓰이는 상황이다.

풀이

소문항 (i)

사면체(tetrahedron)를 $ABCD$라 하고, 임의의 원점에 대한 위치벡터를 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$라 하자. 여섯 모서리는 맞모서리(opposite edges, 공통 꼭짓점이 없는 두 모서리) 세 쌍으로 나뉜다.

$$AB\text{와}CD, \qquad AC\text{와}BD, \qquad AD\text{와}BC.$$



AB, CD 쌍의 경우 중점(midpoint)은 $M = \frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$와 $N = \frac{1}{2}(\mathbf{c}+\mathbf{d})$이므로

$$MN^2 = \tfrac{1}{4}\,|\mathbf{c}+\mathbf{d}-\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2.$$

나머지 두 중점연결선도 같은 방법으로 구하므로, 세 중점연결선의 제곱의 합의 네 배는

$$S = |-\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}|^2 + |-\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}+\mathbf{d}|^2 + |-\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{d}|^2.$$

$|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$를 이용하여 각 항을 전개한다. 각 항은 $|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2+|\mathbf{d}|^2$에 교차항 $\pm 2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$를 더한 것이 되며, 그 항에서 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$의 부호가 같으면 교차항의 부호는 양이다.

? **생각해 보기** 세 항에 걸쳐 교차항을 모두 더하면 어떻게 되는가?

꼭짓점 쌍 하나, 예컨대 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$를 잡자. 이 둘은 첫째 항에서는 부호가 같고 나머지 두 항에서는 부호가 반대이므로, 교차항의 합은 $2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$이다. 모든 쌍에 대해 같은 결과가 성립한다. 세 항은 각각 네 꼭짓점을 두 쌍(한 꼭짓점 쌍과 그 맞은편 쌍)으로 나누고, 모든 꼭짓점 쌍은 세 항 가운데 정확히 한 항에서만 부호가 같기 때문이다. 따라서

$$S = 3\big(|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2+|\mathbf{d}|^2\big) - 2\big(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}\big).$$

이제 모서리를 보자. 예를 들어 $AB^2 = |\mathbf{b}-\mathbf{a}|^2 = |\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2-2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$이다. 여섯 모서리 전체에 대해 더하면, 각 꼭짓점은 세 모서리 위에 있으므로 각 $|\mathbf{a}|^2$는 세 번 나타나고, 각 쌍은 $-2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$를 한 번씩 준다.

$$AB^2+AC^2+AD^2+BC^2+BD^2+CD^2 = 3\sum|\mathbf{a}|^2 - 2\sum_{\text{쌍}}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = S.$$

따라서 모서리의 제곱의 합은 맞모서리의 중점을 잇는 세 선분의 제곱의 합의 네 배와 같다. 이로써 증명이 끝난다.

소문항 (ii)

다음과 같이 놓자.

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}, \qquad \text{따라서} \qquad \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 3x+2y+6,$$

이때 $|\mathbf{a}| = \sqrt{9+4+36} = 7$이고 $|\mathbf{b}| = \sqrt{x^2+y^2+1}$이다. 모든 실수는 그 절댓값보다 크지 않으므로

$$3x+2y+6 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \le |\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \le |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| = 7\sqrt{x^2+y^2+1},$$

이고, 이것이 구하는 부등식이다.

등호 조건. 두 단계 모두에서 등호가 성립해야 한다.

- $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$이고 $|\cos\theta| = 1$이어야 하므로, $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$는 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$가 평행(parallel)할 때, 그리고 그때에만 성립한다. $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$이므로 이는 어떤 λ에 대해 $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$라는 뜻이다. 셋째 성분에서 $1 = 6\lambda$이므로 $\lambda = \frac{1}{6}$이고 $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}$이다.
- $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|$이려면 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \geq 0$이어야 한다. 여기서는 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \lambda|\mathbf{a}|^2 = \frac{49}{6} > 0$이므로 이 조건도 성립한다.

직접 확인해 보면, $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}$에서 좌변은 $\frac{3}{2} + \frac{2}{3} + 6 = \frac{49}{6}$이고 우변은 $7\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + 1} = 7 \cdot \frac{7}{6} = \frac{49}{6}$이다. 따라서 등호는 다음과 같을 때, 그리고 그때에만 성립한다.

$$x = \tfrac{1}{2}, \qquad y = \tfrac{1}{3}.$$

검산

- 모서리의 길이가 1인 정사면체(regular tetrahedron)에서 여섯 모서리의 제곱의 합은 6이다. 이 정사면체를 한 변의 길이가 $\frac{1}{\sqrt{2}}$인 정육면체의 꼭짓점에 하나씩 건너 배치하면, 각 중점연결선은 정육면체의 마주 보는 면의 중심을 이으므로 길이가 $\frac{1}{\sqrt{2}}$이고, $4 \times 3 \times \frac{1}{2} = 6$이다.
- 무작위로 만든 사면체 10^4개에 대한 수치 실험에서 항등식은 반올림 오차 범위 안에서 일치했다. (ii)의 경우, $7\sqrt{x^2+y^2+1} - (3x+2y+6)$은 무작위로 고른 2×10^5개의 점에서 모두 양수였고, 촘촘한 격자에서의 최솟값은 $(0.5, 0.335)$에서 나타났는데, 이는 값이 0이 되는 점 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$에 가깝다.

흔한 실수

- $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \leq |\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|$ 단계를 빠뜨리거나, 등호 조건에서 이를 무시하는 실수. 여기서는 $\lambda > 0$이므로 문제가 생기지 않지만, 반드시 확인해야 한다. $\lambda < 0$이면 양변의 부호가 서로 달라진다.
- $(3,2,6)$과 $(x,y,1)$을 쓰면서 $|\mathbf{a}|$를 7이 아닌 다른 값으로 잡는 실수. 이 문제는 $3^2 + 2^2 + 6^2$이 완전제곱수(perfect square)가 되도록 만들어져 있다.

STEP 너머

소문항 (i)은 평행사변형 법칙(parallelogram law) $|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 = 2|\mathbf{u}|^2 + 2|\mathbf{v}|^2$의 3차원 판이라 할 수 있다. 실제로 세 중점연결선은 무게중심(centroid)에서 만나며 서로를 이등분한다. 소문항 (ii)는 코시-슈바르츠 부등식으로, 이 부등식은 함수 공간을 포함한 모든 내적공간(inner-product space)에서 성립하며, 함수 공간에서는 적분의 상계를 준

다. 두 아이디어를 더 넓은 맥락에서 살펴보려면 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수 입문)가 좋은 출발점이다.

풀이

STEP III 견본 문제지, 문제 9

순수수학 • 행렬의 군

> **STEP III 견본 문제지, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/spec-s3-q9

핵심 아이디어

모든 것은 한 번의 계산에서 나온다. 이런 모양의 일반적인 행렬 두 개를 곱해서 무엇이 나오는지 보는 것이다. 곱은 같은 모양이 되고 성분은 간단한 공식으로 주어진다. 이 공식만 있으면 닫혀 있음(closure), 항등원(identity), 역원(inverse), 정수 부분군(subgroup), 그리고 교환 조건이 거의 저절로 얻어진다. 다음과 같이 쓰자.

$$M(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ y & z & 1 \end{pmatrix}.$$

풀이

G는 군이다

곱셈 공식. 행과 열을 곱하면

$$M(a,b,c)\,M(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ y & z & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+x & 1 & 0 \\ b+cx+y & c+z & 1 \end{pmatrix},$$

즉

$$M(a,b,c)\,M(x,y,z) = M(a+x,\ b+cx+y,\ c+z). \qquad (*)$$

이다.

닫혀 있음. 성분 $a+x,\ b+cx+y,\ c+z$가 모두 실수이므로 곱은 G에 속한다.

결합법칙(associativity). 행렬의 곱셈에 대해서는 이것을 가정해도 된다.

항등원. 단위행렬 $I = M(0,0,0)$은 G에 속하고, 모든 행렬 M에 대해 $IM = MI = M$이다.

역원. $M(a,b,c)$가 주어졌을 때, 곱이 $M(0,0,0)$이 되는 $M(x,y,z)$를 찾는다. $(*)$에 의해 $a+x=0$, $c+z=0$, $b+cx+y=0$이어야 하므로 $x=-a$, $z=-c$, $y=-b-cx=ac-b$이다. 행렬의 곱셈은 교환법칙(commutative law)이 성립하지 않으므로 반대 순서도 확인한다.

$$M(-a,\ ac-b,\ -c)\,M(a,b,c) = M\big(0,\ (ac-b)+(-c)a+b,\ 0\big) = M(0,0,0).$$

따라서 $M(a,b,c)^{-1} = M(-a,\ ac-b,\ -c)$이고, 이것은 G에 속한다.

군의 네 가지 공리가 모두 성립하므로 G는 행렬의 곱셈에 대하여 군(group)이다.

정수 행렬

$x,y,z \in \mathbb{Z}$인 $M(x,y,z)$ 전체의 집합을 H라 하자. 이것은 G의 부분집합이고 $I = M(0,0,0)$을 포함한다. a,b,c,x,y,z가 정수이면 $a+x$, $b+cx+y$, $c+z$도 정수이므로, $(*)$에 의해 H는 곱셈에 대하여 닫혀 있다. 역원 $M(-a,\ ac-b,\ -c)$도 성분이 정수이므로 H는 역원에 대하여 닫혀 있다. 결합법칙은 G에서 그대로 물려받는다. 따라서 **그렇다**, H는 G의 부분군이다.

? 생각해 보기 왜 곱셈에 대하여 닫혀 있다는 것만으로는 충분하지 않을까?

무한 부분집합에서는 성립하지 않을 수 있다. x,y,z가 **음이 아닌** 정수인 행렬 $M(x,y,z)$들은 곱셈에 대하여 닫혀 있지만, $M(1,0,0)$의 역원 $M(-1,0,0)$은 그 집합에 속하지 않는다. 여기서는 역원 공식이 정수 범위를 벗어나지 않게 해 주며, 바로 그 덕분에 H가 부분군이 된다.

모든 원소와 교환하는 원소

$A = M(a,b,c)$와 일반적인 $B = M(x,y,z)$를 잡자. $(*)$에 의해 두 순서 모두에서

$$AB = M(a+x,\ b+cx+y,\ c+z), \qquad BA = M(x+a,\ y+za+b,\ z+c).$$

이다. 첫째와 셋째 성분은 항상 같으므로

$$AB = BA \iff cx = az.$$

이다. (특히 G는 아벨군(abelian group)이 아니다. $M(1,0,0)$과 $M(0,0,1)$은 교환하지 않는다.)

A가 **모든** B와 교환(commute)하려면 모든 실수 x와 z에 대해 $cx = az$여야 한다. $x=1$, $z=0$으로 잡으면 $c=0$이고, $x=0$, $z=1$로 잡으면 $a=0$이다. 역으로 $a=c=0$이면 모

든 x, z에 대해 $cx = 0 = az$이다. 따라서 G의 모든 원소와 교환하는 원소는 정확히

$$A = M(0,b,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b \in \mathbb{R}.$$

이다. **그렇다**, 그러한 A가 존재한다. $b \neq 0$이기만 하면 $A \neq I$이며, 예를 들어 $A = M(0,1,0)$이 그렇다. $(*)$에 의해 G의 모든 $B = M(x,y,z)$에 대해 $M(0,1,0)\,M(x,y,z) = M(x,\,1+y,\,z) = M(x,y,z)\,M(0,1,0)$이다.

검산

- G의 각 행렬은 대각성분이 모두 1인 하삼각행렬(lower triangular matrix)이므로 행렬식(determinant)이 1이고, 따라서 확실히 가역이다. 즉 역원은 반드시 존재하며, 그 역원도 다시 같은 모양이다.
- 수치로 확인하면, $A = M(2,3,5)$, $B = M(1,0,0)$일 때 $(*)$에 의해 $AB = M(3,8,5)$이지만 $BA = M(3,3,5)$이다. 따라서 $cx = 5 \neq 0 = az$가 예측하는 대로 A는 B와 교환하지 않는다. 또한 수천 개의 무작위 행렬에 대해 곱셈 공식, 역원 공식, 교환 조건을 분수로 정확히 계산하여 확인하였다.

흔한 실수

- 역원을 한쪽에서만 확인하는 것. 비가환인 상황에서는 두 곱을 모두 확인해 두는 것이 좋다(또는 정사각행렬에서는 한쪽 역원이 자동으로 양쪽 역원이 된다는 점을 언급한다).
- 마지막 문항에 "G는 아벨군이 아니므로 존재하지 않는다"라고 답하는 것. 비가환군에도 모든 원소와 교환하는, 항등원이 아닌 원소가 있을 수 있으며, 이 군이 바로 그런 예이다.
- 역을 잊는 것. $a = c = 0$이 필요조건임을 보인 뒤에는, 그러한 A가 정말로 모든 B와 교환하는지도 확인해야 한다.

STEP 너머

이 군은 **하이젠베르크 군**(Heisenberg group)이고, 모든 원소와 교환하는 원소들은 그 **중심**(centre) $Z(G)$를 이룬다. 여기서 중심은 행렬 $M(0,b,0)$들로, 덧셈에 대한 실수 전체와 똑같은 구조이다. 정수판 H는 이산 하이젠베르크 군으로, 군론과 기하학에서 즐겨 쓰이는 예이다. 하이젠베르크 군 자체는 양자역학에서 위치와 운동량의 교환 관계를 통해 나타난다. 군, 부분군, 중심에 대해서는 Allenby, *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)를 참고하라.

풀이

STEP III 견본 문제지, 문제 10

순수수학 • 모듈러 산술

> **STEP III 견본 문제지, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/spec-s3-q10

핵심 아이디어

두 소문항 모두 나머지에 관한 문제이므로, 잘 고른 수를 법(modulo)으로 하여 생각한다. (i)에서는 제곱수가 8을 법으로 할 때 가질 수 있는 값이 몇 개뿐이고, 그 값 세 개를 더해서는 결코 7이 될 수 없다. (ii)에서는 거듭제곱을 다시 써서 두 항이 17을 법으로 같은 밑을 갖도록 만든다. 그러면 두 계수의 합이 17의 배수가 된다.

풀이

소문항 (i)

홀수의 제곱. 홀수를 $2k+1$로 쓴다. 여기서 k는 정수이다. 그러면

$$(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1.$$

연속한 두 정수 k와 $k+1$ 중 하나는 짝수이므로 $k(k+1)$은 짝수이고, 따라서 $4k(k+1)$은 8의 배수이다. 그러므로 모든 홀수의 제곱은 8로 나눈 나머지가 1이다.

짝수의 제곱. 짝수를 $2k$로 쓴다. 그러면 $(2k)^2 = 4k^2$이다.

- k가 짝수이면, 즉 $k = 2j$이면 $4k^2 = 16j^2$은 8의 배수이다: 나머지는 0이다.
- k가 홀수이면 k^2도 홀수이므로 $k^2 = 2j+1$이라 하면 $4k^2 = 8j + 4$이다: 나머지는 4이다.

따라서 모든 짝수의 제곱은 8로 나눈 나머지가 0 또는 4이다.

결론 이끌어 내기. 모든 제곱수는 8을 법으로 $0, 1, 4$ 중 하나와 합동(congruent)이다. (여기에는 $0^2 = 0$도 포함되므로, 세 제곱수 중 일부가 0인 경우도 허용하고 있는 것이다.) $N = a^2 + b^2 + c^2$이라 하자. 그러면 $N \bmod 8$은 각각 $\{0,1,4\}$에서 고른 세 수의 합을 8로

나눈 나머지이다. 그중 4인 것이 몇 개인지에 따라 분류하면 다음과 같다.

4의 개수	나머지 수들의 가능한 합, 그리고 전체 합의 mod 8 값
0	$0, 1, 2, 3$
1	$4 + \{0, 1, 2\} = 4, 5, 6$
2	$8 + \{0, 1\} \equiv 0, 1$
3	$12 \equiv 4$

가능한 나머지는 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$이고, 7은 결코 나타나지 않는다. $8n + 7$ 꼴의 수는 8로 나눈 나머지가 7이므로, 세 제곱수의 합이 될 수 없다.

생각해 보기 그냥 7 자체가 세 제곱수의 합이 아님을 확인하면 안 되는 이유는 무엇인가?

주장이 $7, 15, 23, \ldots$처럼 무한히 많은 수에 관한 것이어서, 하나씩 확인해서는 결코 끝나지 않기 때문이다. 8을 법으로 생각하면 이들을 한꺼번에 다룰 수 있다. a, b, c가 무엇이든 그 나머지만 중요하며, 위의 표가 모든 경우를 다 포함한다.

소문항 (ii)

각 항이 상수와 n제곱의 곱이 되도록 거듭제곱을 떼어 낸다.

$$2^{3n+1} = 2 \cdot 8^n, \qquad 3\left(5^{2n+1}\right) = 15 \cdot 25^n.$$

이제 $25 = 17 + 8$이므로 $25 \equiv 8 \pmod{17}$이고, 따라서 모든 $n \geq 0$에 대하여 $25^n \equiv 8^n \pmod{17}$이다(합동식은 서로 곱할 수 있다). 그러므로

$$\begin{aligned} 2^{3n+1} + 3\left(5^{2n+1}\right) &= 2 \cdot 8^n + 15 \cdot 25^n \\ &\equiv 2 \cdot 8^n + 15 \cdot 8^n \\ &= 17 \cdot 8^n \equiv 0 \pmod{17}. \end{aligned}$$

따라서 요구한 대로, 모든 정수 $n \geq 0$에 대하여 17은 $2^{3n+1} + 3(5^{2n+1})$을 나눈다.

생각해 보기 합동식을 배운 적이 없다면 어떻게 하는가?

같은 아이디어를 수학적 귀납법(induction)으로도 쓸 수 있다. $f(n) = 2 \cdot 8^n + 15 \cdot 25^n$이라 하자. 그러면 $f(0) = 17$이고,

$$f(n+1) - 8f(n) = 15 \cdot 25^{n+1} - 15 \cdot 8 \cdot 25^n = 15 \cdot 25^n(25 - 8) = 17 \cdot 15 \cdot 25^n,$$

이므로 $f(n+1) = 8f(n) + 17 \cdot 15 \cdot 25^n$이다. $17 \mid f(n)$이면 $17 \mid f(n+1)$이므로, 수학적 귀납법에 의해 결과가 성립한다.

검산

작은 경우를 확인해 본다. $7 = 4+1+1+1$은 제곱수가 네 개 필요하고, $15 = 9+4+1+1$도 네 개가 필요하다. 반면 $6 = 4+1+1$과 $14 = 9+4+1$은 세 개로 충분하다. 컴퓨터로 탐색해 보면 5000 이하의 $8n+7$ 꼴의 수 중 세 제곱수의 합인 것은 하나도 없음을 확인할 수 있다. (ii)의 경우: $n = 0$이면 $2+15 = 17$이고, $n = 1$이면 $16+375 = 391 = 17\times 23$이다. 0부터 299까지의 모든 n에 대하여 이 식이 17로 나누어떨어짐을 확인하였다.

흔한 실수

- 0도 제곱수라는 사실을 잊는 것. 따라서 "세 제곱수의 합"이 실제로는 0이 아닌 제곱수를 한두 개만 쓸 수도 있다. 위의 논증은 0이 나머지(residue) 중 하나이므로 이 경우를 자동으로 포함한다.
- "$4k^2+4k$가 4로 나누어떨어지므로" 홀수의 제곱이 1 mod 8이라고 말하는 것. 이것으로는 1 mod 4밖에 얻지 못한다. $k(k+1)$에서 나오는 인수 2가 필요하다.

STEP 너머

소문항 (i)은 르장드르(Legendre)의 세 제곱수 정리(three-square theorem)의 쉬운 절반이다. 이 정리는 양의 정수가 $4^a(8n+7)$ 꼴이 아닐 **때, 그리고 그때에만** 세 제곱수의 합이 된다는 것이다. 역방향은 훨씬 어려우며 이차 형식(quadratic form) 이론이 필요하다. 이와 대조적으로 라그랑주(Lagrange)는 **모든** 양의 정수가 네 제곱수의 합임을 증명하였다. 소문항 (ii)는 $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$에서의 일상적인 산술이며, 대학 1학년 과정에서는 이를 군(group)과 환(ring)의 연구로 발전시킨다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 합동식과 제곱수의 합을 훌륭하게 다룬다.

풀이

STEP III 견본 문제지, 문제 11

역학 • 일계 미분방정식

STEP III 견본 문제지, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/spec-s3-q11

이 문제는 *Beyond STEP*의 11.13 절 **제설차 문제**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch11/snowplough.html

핵심 아이디어

각 제설차(snowplough)의 속력은 눈의 깊이로 주어지고, 그 깊이는 제설차가 어떤 지점에 **언제** 도착하는지에 따라 달라진다. 따라서 시간을 위치의 함수로 보고 속력의 역수(reciprocal)인 $\mathrm{d}t/\mathrm{d}x$를 세우는 것이 자연스럽다. 첫 번째 제설차의 경우 눈의 깊이는 처음 깊이에 그동안 내린 눈을 더한 것일 뿐이다. 두 번째 제설차의 경우 핵심 관찰은, 그 앞에 있는 눈은 첫 번째 제설차가 그 지점을 치운 뒤부터만 내려 쌓였다는 것이다.

풀이

각 제설차를 도로를 따라 움직이는 점으로 모형화하고, 거리는 공통 출발점에서부터 잰다. 풀이 전체에서 깊이의 단위는 미터, 시간의 단위는 초, 거리의 단위는 미터이다.

소문항 (i)

시각 t에 첫 번째 제설차가 만나는 눈은 $t = 0$부터 방해받지 않고 내려 쌓였으므로, 그 깊이는

$$z = h + kt.$$

이다. 따라서 속력은

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{k}{\alpha(h+kt)}, \qquad \text{이므로} \qquad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\alpha(h+kt)}{k} = \alpha t + \frac{\alpha h}{k}.$$

이다. (속력이 양수이므로 x는 t에 대한 순증가함수(strictly increasing function)이고, 따라서 역으로 바꾸어 써도 된다.) 이 식은 t에 대해 선형(linear)이며, 다음과 같이 쓰는 것이 가장 깔끔하다.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(t+\frac{h}{k}\right)=\alpha\left(t+\frac{h}{k}\right).$$

그러므로 어떤 상수 C에 대하여 $t+h/k=C\mathrm{e}^{\alpha x}$이다. $x=0$일 때 $t=0$이므로 $C=h/k$이고, x미터를 이동하는 데 걸리는 시간은

$$t_1(x)=\left(\mathrm{e}^{\alpha x}-1\right)\frac{h}{k}\text{ 초},$$

이다. 이것이 구하려던 결과이다.

소문항 (ii)

방정식 세우기. 시각 $t>T$에 두 번째 제설차가 위치 y에 있다고 하자. 첫 번째 제설차는 소문항 (i)에서 구한 시각 $t_1(y)$에 이 지점을 지나갔고, 그곳의 눈을 모두 치웠다.

? **생각해 보기** 두 번째 제설차 앞에 쌓인 눈의 깊이는 얼마인가?

$h+kt$가 아니다. 첫 번째 제설차가 지나간 뒤에는 맨 도로만 남았기 때문이다. 위치 y에서 눈은 시각 $t_1(y)$부터 0에서 시작하여 비율 k로 쌓였으므로, 그 깊이는

$$z=k\left(t-t_1(y)\right).$$

이다. (이를 위해서는 $t>t_1(y)$, 즉 두 번째 제설차가 아직 첫 번째 제설차 뒤에 있어야 하는데, 이는 둘이 만나기 전까지 성립한다.) 따라서 두 번째 제설차의 속력은

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{k}{\alpha k\left(t-t_1(y)\right)}\qquad\Longrightarrow\qquad\frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}=t-\left(\mathrm{e}^{\alpha y}-1\right)\frac{h}{k},$$

이고, 이것이 문제에서 주어진 방정식이다. 두 번째 제설차는 시각 T에 원점에서 출발하므로, 초기 조건(initial condition)은 $y=0$일 때 $t=T$이다.

해 확인하기. 제시된 해를 다음과 같이 쓰자.

$$t=t_1(y)+g(y),\qquad g(y)=\left(T-\frac{\alpha h y}{k}\right)\mathrm{e}^{\alpha y}.$$

그러면 $t-t_1(y)=g(y)$이므로, $\frac{1}{\alpha}\,\mathrm{d}t/\mathrm{d}y=g(y)$임을 보이면 된다. g에 곱의 미분법(product rule)을 써서 미분하면

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}&=\frac{\alpha h}{k}\mathrm{e}^{\alpha y}-\frac{\alpha h}{k}\mathrm{e}^{\alpha y}+\alpha\left(T-\frac{\alpha h y}{k}\right)\mathrm{e}^{\alpha y}\\&=\alpha\,g(y),\end{aligned}$$

이다. 여기서 첫째 항은 $t_1'(y)$이고, 나머지 두 항은 $g'(y)$이다. 따라서 미분방정식(differential equation)이 성립한다. 또한 $y = 0$에서 $t = 0 + T \cdot 1 = T$이므로 초기 조건도 성립한다.

왜 이것이 구하려는 **바로 그** 해인가? 이 방정식은 일계(first order) 선형 방정식이다. t와 $\tilde{t}$가 모두 이 방정식을 만족하면, 그 차 u는 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}y = \alpha u$를 만족하므로 $u = u(0)\mathrm{e}^{\alpha y}$이다. 둘 다 $t(0) = T$를 만족하므로 $u(0) = 0$이고 $u \equiv 0$이다. 그러므로 $(y, t) = (0, T)$를 지나는 해는 정확히 하나뿐이며, 우리는 그 해를 찾은 것이다.

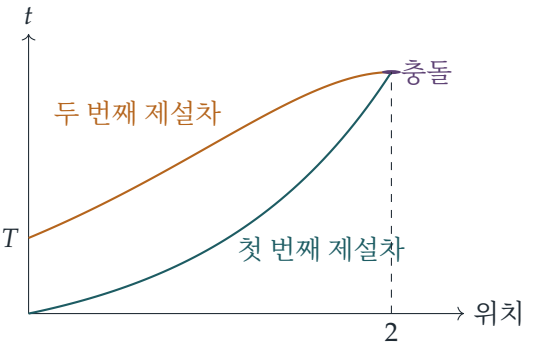
(직접 유도하고 싶다면, 적분인자(integrating factor) $\mathrm{e}^{-\alpha y}$를 곱하면 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(t\mathrm{e}^{-\alpha y}\right) = -\frac{\alpha h}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-\alpha y}\right)$를 얻고, 이를 0부터 y까지 적분하면 같은 식이 나온다.)

충돌. 두 제설차가 지점 y에 같은 시각에 도달하면, 즉 $t = t_1(y)$이면 그 지점에서 충돌하며, 이는 $g(y) = 0$을 뜻한다. $\mathrm{e}^{\alpha y} > 0$이므로, 이것은 정확히

$$T - \frac{\alpha h y}{k} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \frac{kT}{\alpha h}.$$

일 때 일어난다. $0 \le y < kT/(\alpha h)$이면 $g(y) > 0$이므로(속력이 양수여야 하므로 $\alpha, h, k > 0$으로 둔다), 두 번째 제설차는 그러한 각 지점에 첫 번째 제설차보다 엄격히 늦게 도달하고, 따라서 둘은 그 전에 만나지 않는다. 그러므로 두 제설차는 $kT/(\alpha h)$미터를 이동했을 때 충돌한다. ■

아래 그림은 $h = k = \alpha = 1$, $T = 2$일 때 (y, t) 평면에서 두 제설차의 경로를 보여 준다. 두 곡선 사이의 시간 차 $g(y)$는 $y = 2$에서 0으로 줄어든다.



검산

- 단위: $k/(\alpha z)$가 속력이므로 α의 단위는 m^{-1}이다. 따라서 αx는 무차원량이고, h/k는 시간이며, $kT/(\alpha h)$는 길이이다.
- $T = 0$이면 두 제설차가 함께 출발하고, 식은 거리 0에서 충돌한다고 알려 준다. 앞선 출

발 시간 T가 클수록 충돌 지점은 도로 더 먼 곳으로 밀려나는데, 마땅히 그래야 한다.

- 수치적으로, h, k, α, T의 여러 무작위 값에 대해 각 제설차의 운동을 시간에 따라 단계적으로 계산해 보면(두 번째 제설차는 $t = T$일 때 $y = 0$에서 시작하여 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = 1/\big(\alpha(t - t_1(y))\big)$), 결과가 공식과 10^{-8}보다 작은 오차로 일치한다. 그림에서처럼 $h = k = \alpha = 1$, $T = 2$이면 두 제설차 모두 시각 $\mathrm{e}^2 - 1 \approx 6.39\,\mathrm{s}$에 $y = 2$에 도달한다.

흔한 실수

- 두 번째 제설차에도 깊이 $h + kt$를 쓰는 것. 두 번째 제설차는 시각 $t_1(y)$에 이미 치워진 도로를 치우고 있으므로, 깊이는 $k(t - t_1(y))$이다.
- 해를 확인할 때 $y = 0$에서 $t = T$라는 초기 조건을 잊는 것. 미분방정식만 만족하는 해로는 충분하지 않다.
- $\mathrm{d}t/\mathrm{d}y$ 대신 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$를 쓰는 것. 시간을 종속변수(dependent variable)로 두면 방정식이 선형이 되어 쉬워진다.

STEP 너머

이 문제는 고전적인 "제설차 문제" 계열에 속하며, 방정식을 선형으로 만들기 위해 종속변수와 독립변수(independent variable)의 역할을 바꾸는 요령은 대학 1학년 미분방정식에서 끊임없이 쓰인다. 위의 유일성(uniqueness) 논증은 초기값 문제(initial value problem)에 대한 존재성과 유일성 정리(existence and uniqueness theorem)의 아주 간단한 경우이다. 또한 두 번째 제설차 앞의 눈이 얇아져 없어질수록 그 속력이 한없이 커진다는 점에 주목하자. 이는 현실이 그렇다기보다는 모형의 한계를 보여 주는 신호이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 일계 선형 방정식, 적분인자, 유일성을 다룬다.

풀이

STEP III 견본 문제지, 문제 12

역학 • 막대의 평형

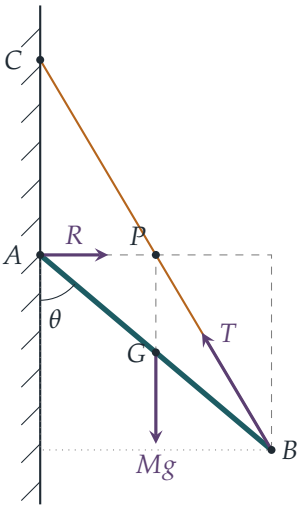
> **STEP III 견본 문제지, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/spec-s3-q12

핵심 아이디어

막대에는 정확히 세 힘이 작용한다. 막대의 무게, 매끄러운 벽의 반작용(reaction), 그리고 줄의 장력(tension)이다. 평행하지 않은 세 힘이 물체를 평형(equilibrium) 상태로 유지하려면 세 힘의 작용선이 한 점에서 만나야 하는데, 여기서는 그 점을 쉽게 찾을 수 있다. 이 점이 기하학적 배치를 완전히 결정하고, 그다음 한 방향으로 힘을 분해(resolving)하기만 하면 장력이 나온다.

풀이

모형. 막대는 균일(uniform)하므로 무게 Mg는 중점 G에 작용한다. 벽은 매끄러우므로(smooth) A에서의 반작용 R는 수평 방향(벽에 수직)이다. 줄은 가볍고 늘어나지 않으므로(inextensible) BC 방향의 장력 T로 B를 당긴다.



막대의 기울기

반작용 R는 A를 지나는 수평선을 따라 작용하고, 무게는 G를 지나는 연직선을 따라 작용한다. 두 직선은 A와 같은 높이에 있으면서 G의 바로 위(또는 아래)에 있는 점 P에서 만난다. 세 힘이 평형을 이루므로 P에 대한 모멘트(moment)의 합은 0이어야 한다. R와 Mg는 P에 대한 모멘트가 없으므로 T도 모멘트가 없어야 하고, 따라서 줄의 작용선은 P를 지나야 한다.

? **생각해 보기** 막대는 A에서 위쪽으로 뻗을까, 아래쪽으로 뻗을까?

수평 거리를 벽으로부터 잰다. 막대와 연직선 사이의 각을 θ라 하면 B는 벽으로부터 $L\sin\theta$만큼 떨어져 있고, G(따라서 P)는 그 절반인 $\frac{1}{2}L\sin\theta$만큼 떨어져 있다. 줄은 B에서 벽 위의 점 C까지 직선으로 이어지므로, 수평 방향으로 절반만큼 간 점은 줄의 절반 지점이다. 즉 P는 BC의 **중점**이다. 따라서 P의 높이는 B와 C의 높이의 평균이다. 그런데 P는 A와 같은 높이에 있고 C는 A보다 위에 있으므로, B는 A보다 정확히 AC만큼 **아래**에 있어야 한다.

따라서 막대는 A에서 아래쪽으로 늘어져 있다. 막대가 아래쪽 연직선과 이루는 각을 θ라 하자. 그러면 B는 A보다 $L\cos\theta$만큼 아래에 있고, 따라서 $AC = L\cos\theta$이다. B를 기준으로 하면 점 C는 수평 방향으로 $L\sin\theta$만큼 떨어져 있고, 높이는 $L\cos\theta + L\cos\theta = 2L\cos\theta$만큼 위에 있다. 줄의 길이가 αL이므로 피타고라스 정리(Pythagoras' theorem)에 의해

$$\alpha^2 L^2 = L^2\sin^2\theta + 4L^2\cos^2\theta = L^2\left(1 + 3\cos^2\theta\right),$$

이고, 따라서

$$\cos^2\theta = \frac{\alpha^2 - 1}{3}, \qquad \text{즉} \qquad \theta = \cos^{-1}\sqrt{\frac{\alpha^2 - 1}{3}},$$

이며, 막대는 A에서 연직선과 이 각을 이루며 **아래쪽으로** 향한다.

α의 가능한 값

C는 A보다 엄밀하게 위에 있어야 하므로 $\cos\theta > 0$이다. ($\cos\theta = 0$이면 C가 A와 일치하고 막대는 수평이 된다. 이때 A, B, C는 한 직선 위에 있다.) 또한 A, B, C가 한 직선 위에 있지 않아야(collinear가 아니어야) 하므로 막대는 연직이 아니다. 즉 $\sin\theta \neq 0$, 다시 말해 $\cos^2\theta < 1$이다. 따라서 $\alpha > 0$을 이용하면

$$0 < \frac{\alpha^2 - 1}{3} < 1 \iff 1 < \alpha^2 < 4 \iff 1 < \alpha < 2,$$

이다. 역으로 이 범위의 임의의 α에 대해 위의 각이 존재하고, 이 작도는 세 힘이 한 점에서 만나는(concurrent) 배치를 주므로 모멘트가 평형을 이루며, 아래에서 힘을 분해하면 양수인 T와 R가 얻어진다. 가능한 값의 집합은 $1 < \alpha < 2$이다.

장력

연직 방향으로 분해한다. 줄이 연직선과 이루는 각의 코사인은 (연직 높이 차)/(길이) $= 2L\cos\theta/(\alpha L)$이고 R는 수평이므로

$$T \cdot \frac{2\cos\theta}{\alpha} = Mg \quad \Longrightarrow \quad T = \frac{Mg\alpha}{2\cos\theta} = \frac{Mg\alpha}{2}\left(\frac{3}{\alpha^2 - 1}\right)^{\frac{1}{2}},$$

이다. 여기서 $\cos\theta = \sqrt{(\alpha^2-1)/3}$($\cos\theta > 0$이므로 양의 제곱근)을 대입했다. 이것이 구하는 결과이다.

덧붙여 수평 방향으로 분해하면 $R = T \cdot \dfrac{L\sin\theta}{\alpha L} = \frac{1}{2}Mg\tan\theta > 0$이므로, 벽은 막대를 바깥쪽으로 밀고 있다. 벽이라면 당연히 그래야 한다.

검산

- $\alpha \to 2^-$이면 $\cos\theta \to 1$이다. 막대는 A 아래로 연직으로 늘어지고 줄은 막대를 따라 겹쳐 되돌아오며, 줄이 무게 전체를 지탱하므로 $T \to Mg$이다. $\alpha \to 1^+$이면 $\theta \to 90^\circ$이고 $T \to \infty$이다. 거의 수평인 막대를 받치려면 매우 큰 장력이 필요하다.
- $\alpha = 1.5$이면 $\cos\theta \approx 0.6455$($\theta \approx 49.8^\circ$)이고 $T \approx 1.162\,Mg$이다. $(1,2)$에서 임의로 뽑은 수천 개의 α에 대해, A에 대한 모멘트가 정확히 한 각에서만 0이 되고 그 각과 장력이 공식과 일치함을 수치적으로 확인했다. 또한 $(1,2)$ 밖의 α에 대해서는 평형이 존재하지 않음도 확인했다.

흔한 실수

- 사다리 문제에서처럼 막대가 A에서 **위쪽으로** 기울어지게 그리는 것. 세 힘이 한 점에서 만난다는 논증에 의해 B는 A보다 아래에 있어야 하며, 그림을 잘못 그리면 방정식들이

모순 없는 해를 갖지 않는다.

- 매끄러운 벽의 반작용이 수평이라는 사실을 잊고, 불필요한 마찰력이나 연직 성분을 도입하는 것.
- $\alpha = 1$ 또는 $\alpha = 2$를 포함하는 것. 이 값들은 세 점이 한 직선 위에 놓이는 (퇴화된) 배치를 주며, 문제에서 이를 제외하고 있다.

STEP 너머

세 힘의 원리는 정역학(statics)의 일반적인 사실의 특수한 경우이다. 힘의 계가 평형 상태일 필요충분조건은 합력(resultant force)과 어느 한 점에 대한 합모멘트가 모두 0이 되는 것이다. 우리가 P를 고른 것처럼 점을 영리하게 고르는 것이 가장 빠른 길인 경우가 많다. 같은 아이디어가 공학 역학에서 트러스(truss), 케이블, 골조 구조를 분석하는 바탕이 된다. 힘과 토크를 철저하게 다룬 책으로는 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 보라.

풀이

STEP III 견본 문제지, 문제 13

역학 • 굴러가는 고리

STEP III 견본 문제지, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

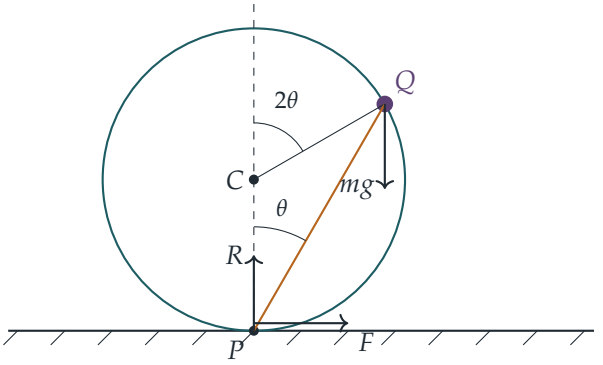
step.maths.org/questions/spec-s3-q13

핵심 아이디어

고리(hoop)가 가벼우므로 계의 운동 에너지(kinetic energy)는 오직 입자의 것뿐이고, 고리가 구르므로 마찰(friction)은 일을 하지 않는다. 따라서 에너지 보존(energy conservation)으로부터 속력이 곧바로 나온다. 구름(rolling)은 기하학적 배치도 완전히 결정한다. 고리가 2θ만큼 회전하면 중심은 $2a\theta$만큼 이동하므로, x와 y를 θ만으로 나타낼 수 있다. 끝으로, 가벼운 고리에는 알짜힘이 작용할 수 없으므로 탁자의 항력은 입자의 가속도가 요구하는 만큼일 뿐이며, 이 항력은 음수가 될 수 없다.

풀이

고리를 미끄러지지 않고 구르는(rolling without slipping) 가벼운 강체 원으로, 입자를 테두리에 고정된 질점(point mass)으로 모형화한다. 탁자와의 접점을 P, 중심을 C, 입자를 Q라 하자. 고리는 x축의 양의 방향으로 구르고, 따라서 θ는 0에서부터 증가한다고 하자.



여기서 R와 F는 P에서 탁자가 고리에 작용하는 수직 항력(normal reaction)과 마찰력이고, 현(chord) PQ는 연직선과 각 θ를 이룬다(중심각 2θ의 절반).

속력

R와 F는 모두 P에 작용하는데, 고리가 구르므로 P는 순간적으로 정지해 있다. 따라서 두 힘 모두 일을 하지 않는다. 고리가 가벼우므로 운동 에너지도, 위치 에너지의 변화도 오직 입자의 것뿐이다. 입자는 높이 $2a$에서 사실상 정지한 상태로 출발하며, 반지름 CQ가 위쪽 연직선과 각 2θ를 이룰 때 그 높이는 $a + a\cos 2\theta = 2a\cos^2\theta$이다. 에너지 보존에 의해

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mg\big(2a - 2a\cos^2\theta\big) = 2mga\sin^2\theta,$$

이므로 $v^2 = 4ga\sin^2\theta$이고, $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$에서 $\sin\theta \ge 0$이므로

$$v = 2(ga)^{1/2}\sin\theta,$$

가 되어 요구된 결과를 얻는다.

위치와 $\dot\theta$

고리는 각 2θ만큼 회전했고, 미끄러지지 않고 구르므로 중심은 호의 길이 $a\cdot 2\theta$만큼 앞으로 이동했다. C에 대하여 입자는 $a\sin 2\theta$만큼 앞에, $a\cos 2\theta$만큼 위에 있다. 따라서

$$x = 2a\theta + a\sin 2\theta, \qquad y = a + a\cos 2\theta = 2a\cos^2\theta.$$

시간에 대하여 미분하면

$$\dot x = 2a\dot\theta\,(1 + \cos 2\theta) = 4a\dot\theta\cos^2\theta,$$
$$\dot y = -2a\dot\theta\sin 2\theta = -4a\dot\theta\sin\theta\cos\theta,$$

이고, 따라서

$$v^2 = \dot x^2 + \dot y^2 = 16a^2\dot\theta^2\cos^2\theta\big(\cos^2\theta + \sin^2\theta\big) = 16a^2\dot\theta^2\cos^2\theta.$$

? **생각해 보기** $v = 4a\dot\theta\cos\theta$임을 더 빨리 알아내는 방법이 있을까?

있다. P는 순간 회전 중심(instantaneous centre of rotation)이고, 고리는 각속도 $2\dot\theta$로 회전한다. 현 PQ가 C에서 이루는 중심각은 $\pi - 2\theta$이므로 $PQ = 2a\cos\theta$이고, $v = PQ\cdot 2\dot\theta = 4a\dot\theta\cos\theta$가 되어 앞의 계산과 일치한다.

$\dot\theta > 0, \cos\theta > 0$이므로 에너지로부터 구한 속력과 비교하면

$$4a\dot\theta\cos\theta = 2(ga)^{1/2}\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad \dot\theta = \tfrac{1}{2}(g/a)^{1/2}\tan\theta,$$

이고, 이것이 첫 번째로 요구된 결과이다. (좌변은 θ가 아니라 변화율 $\dot\theta$여야 한다. 우변의 단위가 s^{-1}이기 때문이다.)

연직 방향 가속도

$\dot{\theta}$를 $\dot{y}$에 대입하면

$$\dot{y} = -4a\sin\theta\cos\theta\cdot\tfrac{1}{2}(g/a)^{1/2}\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -2(ga)^{1/2}\sin^2\theta.$$

다시 미분하고 $\dot{\theta}$를 한 번 더 이용하면

$$\ddot{y} = -4(ga)^{1/2}\sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta} = -4(ga)^{1/2}\sin\theta\cos\theta\cdot\tfrac{1}{2}(g/a)^{1/2}\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -2g\sin^2\theta,$$

가 되어 요구된 결과를 얻는다. 같은 방법으로 $\dot{x} = 4a\cos^2\theta\,\dot{\theta} = (ga)^{1/2}\sin 2\theta$이고,

$$\ddot{x} = 2(ga)^{1/2}\cos 2\theta\,\dot{\theta} = g\cos 2\theta\tan\theta.$$

구름을 멈추게 하는 것

고리가 가벼우므로 고리와 입자로 이루어진 계에 작용하는 전체 힘은 m에 입자의 가속도를 곱한 것과 같다. 외력은 아래쪽으로 mg, 위쪽으로 R, 수평 방향으로 F이다. 연직 방향으로 분해하면

$$R - mg = m\ddot{y} \quad\Longrightarrow\quad R = mg\left(1 - 2\sin^2\theta\right) = mg\cos 2\theta,$$

이고, 수평 방향으로는 $F = m\ddot{x} = mg\cos 2\theta\tan\theta$이므로 $R > 0$인 동안 $F/R = \tan\theta$이다.

? **생각해 보기** θ가 $\pi/4$를 넘어서면 무엇이 잘못되는가?

탁자는 밀 수는 있지만 당길 수는 없으므로 $R \geq 0$이다. 그런데 $R = mg\cos 2\theta$는 입자가 중심과 같은 높이에 오는 $\theta = \pi/4$에서 0이 되고, 그 이후에도 계속 구르려면 $R < 0$이어야 한다. 같은 말이지만, 계속 구르려면 $\ddot{y} = -2g\sin^2\theta < -g$여야 한다. 즉 입자가 자유 낙하(free fall)보다 더 빠르게 아래로 가속되어야 하는데, 중력만으로는 이것이 불가능하다. 따라서 $\theta = \pi/4$에서 접촉력이 사라지고 고리는 탁자에서 떨어진다. 그 뒤 입자는 앞쪽으로 $(ga)^{1/2}$, 아래쪽으로 $(ga)^{1/2}$의 속도 성분을 가지고 출발하는 포물체(projectile)로 운동하며, 가벼운 고리는 입자에 그대로 딸려 가면서 가장 낮은 점이 탁자에서 들어 올려진다.

마찰이 그보다 먼저 개입할 수도 있다. 구르려면 $|F| \leq \mu R$, 즉 $\tan\theta \leq \mu$여야 하는데, $\theta \to \pi/4$일 때 $\tan\theta$는 1까지 증가한다. 따라서 마찰 계수(coefficient of friction)가 $\mu < 1$을 만족하면, 고리는 $\theta = \pi/4$에 이르기 전 $\tan\theta = \mu$가 되는 순간 미끄러지기 시작한다. $\mu \geq 1$일 때에만 고리는 $\theta = \pi/4$까지 계속 구른 다음 뛰어오른다.

검산

- $\theta = 0$에서 $\dot{\theta} = 0$이다. 즉 꼭대기 위치는 평형(equilibrium) 상태이며, 그래서 고리를 살짝 밀어 주어야 한다.

- $\theta = \pi/4$에서 $v = (2ga)^{1/2}$이다. 이는 높이 a만큼 떨어졌을 때의 속력이며, 실제로 입자는 $2a$에서 a로 내려왔다.
- 컴퓨터로 $\phi = 2\theta$에 대한 운동 방정식(equation of motion)을 (라그랑지안(Lagrangian) $ma^2(1+\cos\phi)\dot{\phi}^2 - mga(1+\cos\phi)$로부터) 독립적으로 적분하고, 유한 차분(finite difference)으로 구한 속도와 가속도를 위의 공식들과 비교하였다. 속력, $\dot{\theta}$, $\ddot{y}$, $R = mg\cos 2\theta$, $F/R = \tan\theta$가 모두 10^{-6} 이내로 일치하였다. 예를 들어 $\theta = \pi/4$에서는 $R = 0$, $F/R = 1$을 준다.

흔한 실수

- 중심이 $2a\theta$가 아니라 $a\theta$만큼 이동한다고 보는 것. 고리는 θ가 아니라 2θ만큼 회전했다.
- 에너지 방정식에 마찰을 포함하는 것. 접점은 정지해 있으므로 고리가 구르는 동안 마찰은 일을 하지 않는다.
- 입자가 "떨어져 나간다"고만 말하는 것. 입자는 고정되어 있다. 탁자에서 떨어지는 것은 고리이며, 그 이유는 항력이 음수가 되어야 하기 때문이다.

STEP 너머

구르는 물체의 접점은 그 물체의 순간 회전 중심이며, 미끄러지지 않는 구름은 일을 하지 않으면서 자유도(degree of freedom)를 하나 없애는 구속 조건(constraint)이다. 이러한 구속 조건은 라그랑주(Lagrange) 역학에서 체계적으로 다루어진다. 거기서는 에너지를 θ와 같은 하나의 좌표로 쓰기만 하면 운동 방정식이 자동으로 따라 나오며, 위의 검산이 바로 이렇게 한 것이다. 구속력이 언제 사라지는가 하는 문제(구면에서 떨어지는 구슬, 둔덕에서 떠오르는 자동차)는 대학 1학년 역학의 전형적인 주제이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 구름 운동과 구속력을 자세히 다룬다.

풀이

STEP III 견본 문제지, 문제 14

역학 • 회전이 있는 충돌

> **STEP III 견본 문제지, 14번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/spec-s3-q14

핵심 아이디어

회전축(pivot)이 막대에 크기를 알 수 없는 충격량(impulse)을 가하므로 선운동량(linear momentum)은 보존되지 않는다. 그러나 그 충격량은 회전축에 대한 모멘트가 없으므로, 중점에 대한 각운동량(angular momentum)은 보존된다. 여기에 접촉점에서 뉴턴(Newton)의 반발 법칙(law of restitution)을 적용하면 모든 것이 결정된다. 충돌이 완전 탄성(perfectly elastic)이므로 반발 계수(coefficient of restitution)는 1이다. 두 번째 부분에서는 입자가 그다음에 어떻게 움직이는지 구하고 두 물체를 모두 따라가 본다. 그러면 막대의 반대쪽 절반이 돌아와서 입자가 움직이는 직선에 이르게 된다.

풀이

모형. 입자는 질점이고, 탁자는 매끄러우므로(smooth) 어느 물체에도 마찰이 작용하지 않는다. 막대는 균일하며 중점 O에서 매끄럽게 회전축에 고정되어 있다. 막대의 O에 대한 관성 모멘트(moment of inertia)는

$$I = \tfrac{1}{12}m(4a)^2 = \tfrac{4}{3}ma^2.$$

이다. 충돌하는 동안 충격량은 입자의 운동 직선을 따라 작용하므로(막대는 매끄럽고 입자는 막대에 수직으로 부딪힌다) 입자는 같은 직선 위에서 계속 움직인다. 충돌 후 입자의 속도를 처음 운동 방향을 양의 방향으로 하여 v라 하자.

각속력

O에 대한 각운동량. 계(입자와 막대)에 작용하는 외부 충격량은 O에 있는 회전축에서 오는 것뿐이고, 이것은 O에 대한 모멘트가 없다. 충돌 전 입자의 O에 대한 각운동량은 mua이고

막대는 정지해 있으므로

$$mua = mva + \tfrac{4}{3}ma^2\omega \qquad \Longrightarrow \qquad u = v + \tfrac{4}{3}a\omega. \tag{1}$$

이다.

반발. 막대에서 충돌한 점은 O로부터 거리 a에 있으므로, 충돌 직후 이 점은 입자의 처음 운동 방향으로 속력 $a\omega$로 움직인다. 반발 계수가 1이므로 멀어지는 속력은 가까워지는 속력과 같다.

$$a\omega - v = u. \tag{2}$$

생각해 보기 회전하는 물체에도 뉴턴의 반발 법칙을 쓸 수 있을까?

쓸 수 있다. 이 법칙은 접촉하는 두 점의 속도의 공통 법선 방향 성분에 적용된다. 원한다면 대신 에너지를 써도 된다. "완전 탄성"이란 운동 에너지(kinetic energy)가 보존된다는 뜻이므로 $\frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}ma^2\omega^2$이다. 이것을 $m(u-v)(u+v) = \frac{4}{3}ma^2\omega^2$으로 쓰고 (1)에서 얻은 $u - v = \frac{4}{3}a\omega$를 이용하면($\omega \neq 0$으로 나누어) $u + v = a\omega$를 얻는데, 이것이 바로 (2)이다.

(1)과 (2)를 더하면 v가 소거된다.

$$2u = \tfrac{7}{3}a\omega \qquad \Longrightarrow \qquad a\omega = \frac{6u}{7},$$

이것이 증명하려던 결과이다. 그러면 (2)에서

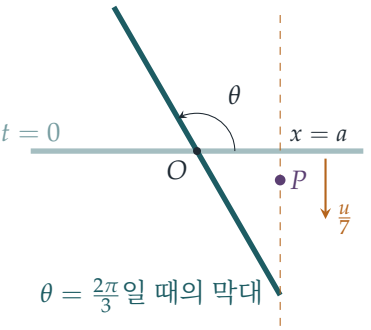
$$v = a\omega - u = -\frac{u}{7},$$

이므로 입자는 처음 직선을 따라 속력 $u/7$로 되튀어 돌아간다.

두 번째 충돌

탁자 위에 원점이 O인 좌표축을 잡되, x축은 막대의 처음 위치를 따르게 하고, 입자는 처음에 직선 $x = a$를 따라 양의 y 방향으로 움직여 시각 $t = 0$에 점 $(a, 0)$에서 막대에 부딪힌다고 하자. 그러면 $t > 0$에서

- 입자는 $\left(a,\ -\frac{u}{7}t\right)$에 있고, 음의 y 방향으로 일정하게 움직인다.
- 충돌한 점은 양의 y 방향으로 움직였으므로 막대는 시계 반대 방향으로 돌고, 시각 t에 x축과 각 $\theta = \omega t$를 이룬다. 두 물체가 다시 충돌할 때까지 어느 쪽에도 다른 힘이 작용하지 않으므로 두 운동은 모두 등속 운동이다.



막대의 반길이는 $2a$이므로, 막대가 직선 $x = a$에 닿으려면 막대 위에서 그 직선 위에 놓인 점, 즉 O로부터 거리 $a/|\cos\theta|$인 점이 O로부터 $2a$ 이내에 있어야 한다. 곧 $|\cos\theta| \geq \frac{1}{2}$일 때에만 닿는다. 닿는 경우 막대는 높이 $y = a\tan\theta$에서 그 직선과 만난다.

- $0 < \theta \leq \frac{\pi}{3}$이면 막대는 x축 위쪽인 $y = a\tan\theta > 0$에서 직선과 만나는데, 입자는 x축 아래에 있으므로 접촉하지 않는다.
- $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{2\pi}{3}$이면 막대는 직선에 아예 닿지 않는다.
- $\frac{2\pi}{3} \leq \theta < \pi$이면 막대의 **반대쪽** 절반이 입자와 같은 쪽인 $y = a\tan\theta < 0$에서 직선과 만난다.

이제 위치를 비교하자. $t = \theta/\omega = \frac{7a\theta}{6u}$이므로 각이 θ일 때 입자의 y좌표는 $-\frac{u}{7}t = -\frac{a\theta}{6}$이다. 다음 함수를 생각하자.

$$f(\theta) = (\text{막대의}\, y,\, \text{직선}\, x = a) - (\text{입자의}\, y) = a\tan\theta + \frac{a\theta}{6}, \qquad \frac{2\pi}{3} \leq \theta < \pi.$$

- $\theta = \frac{2\pi}{3}$일 때(막대의 끝이 직선에 이른다): $\frac{\pi}{9} < 1 < \sqrt{3}$이므로 $f = a\left(-\sqrt{3} + \frac{\pi}{9}\right) < 0$이다. 입자는 $y = -\frac{\pi}{9}a \approx -0.35a$에 있어서 x축과 $y = -\sqrt{3}a$에 있는 막대 끝 사이에 놓인다. 즉 막대의 끝은 입자를 **지나쳐서** 돌아와 있다.
- $\theta \to \pi^-$일 때: $\tan\theta \to 0$이므로 $f \to \frac{\pi}{6}a > 0$이다. 막대는 다시 x축 쪽으로 쓸고 올라가는 반면 입자는 약 $-0.52a$에 있다.

f는 $[\frac{2\pi}{3}, \pi)$에서 연속이므로 중간값 정리(intermediate value theorem)에 의해 그 사이의 어떤 θ에서 $f(\theta) = 0$이다. 그 순간 막대는 입자의 위치에 있으므로 둘은 다시 충돌한다. (위의 처음 두 항목에 의해 그보다 이른 접촉은 일어날 수 없다.) 이로써 증명이 끝난다.

수치적으로 보면, 충돌은 $\tan\theta = -\theta/6$인 $\theta \approx 2.716$(약 $155.6°$)에서, 시각 $t \approx 3.17\,a/u$에 일어나며, 이때 입자는 $y \approx -0.45a$, 즉 막대를 따라 O로부터 약 $1.10a$인 곳에 있다.

검산

- 에너지: $a\omega = \frac{6}{7}u$, $v = -\frac{1}{7}u$이면 나중 운동 에너지는 $\frac{1}{2}m\left(\frac{1}{49} + \frac{4}{3}\cdot\frac{36}{49}\right)u^2 = \frac{1}{2}m\cdot\frac{49}{49}u^2$으로, 처음 에너지와 정확히 같다.
- 관성 모멘트가 I인 물체의 거리 d인 곳을 친다고 하고 같은 논증을 되풀이하면 $d\omega = 2u/(1 + I/md^2)$를 얻는다. $I \to 0$이면 충돌한 점은 $2u$로 떨어져 나가는데, 이는 매우 가벼운 물체와 탄성 충돌할 때와 같다. $I \to \infty$이면 막대는 거의 돌지 않고 입자는 속력 u로 되튀어 나온다. 여기서는 $I/ma^2 = \frac{4}{3}$이므로 $\frac{6}{7}u$가 나온다.
- 정확한 분수로 $a\omega = \frac{6}{7}u$, $v = -\frac{1}{7}u$가 각운동량과 에너지를 모두 보존함을 확인한 다음, 두 운동을 시간에 따라 한 단계씩 진행시켜 보았다. 충돌 후 첫 접촉은 $\theta \approx 2.7165$에서 일어났으며, 이는 $\tan\theta + \theta/6 = 0$을 이분법(bisection)으로 푼 값과 일치한다.

흔한 실수

- 선운동량을 보존시키는 것. 회전축이 충격량을 주므로 보존되는 것은 회전축에 대한 각운동량뿐이다.
- $I = \frac{1}{3}m\ell^2$(한쪽 끝에 대한 값)을 쓰거나, 막대의 길이가 $2a$가 아니라 $4a$임을 잊는 것.
- 두 번째 충돌을 처음에 맞은 절반에서 찾는 것. 그 절반은 입자의 직선에서 멀어져 가고, 돌아와서 직선과 만나는 것은 반대쪽 절반이다.

STEP 너머

고정점에 대한 각운동량을 에너지 조건이나 반발 조건과 짝지어 쓰는 것은 강체(rigid body)의 충격 운동을 다루는 표준적인 방법이며, **타격 중심**(centre of percussion)이라는 개념으로 이어진다. 타격 중심이란 회전축에 고정된 물체를 쳤을 때 회전축에 충격량이 생기지 않는 점이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 강체의 충돌과 각운동량을 꼼꼼하게 다루며, 바로 이런 종류의 문제가 많이 실려 있다.

풀이

STEP III 견본 문제지, 문제 15

확률과 통계 • 무작위 네트워크의 연결성

> **STEP III 견본 문제지, 15번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/spec-s3-q15

핵심 아이디어

기하적인 배치는 잊어도 된다. 중요한 것은 여섯 개의 도로 가운데 어느 것이 열려 있는가뿐이다. 모든 마을에서 다른 모든 마을로 갈 수 있을 필요충분조건은 열린 도로들이 네 마을 위에서 **연결된**(*connected*) 망을 이루는 것이다. 따라서 가능한 열린 도로의 집합을 도로의 개수에 따라 분류하고, 각 개수마다 연결된 집합이 몇 개인지 센 다음, 각각에 그 확률을 가중치로 곱한다. 마을이 네 개뿐이므로 세는 과정은 짧고 깔끔하다.

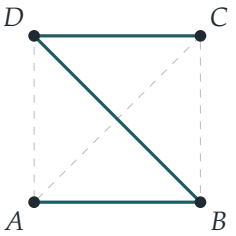
풀이

주어진 도로가 열려 있을 확률을 $q = 1 - p$로 쓰자. 눈이 내린 뒤 모든 마을에서 다른 모든 마을로 갈 수 있는 사건을 K라 하자.

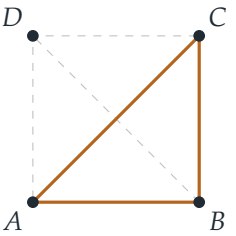
여섯 도로는 서로 독립(independent)이므로, k개의 도로가 열려 있고 나머지 $6 - k$개가 막혀 있는 특정한 집합의 확률은 $q^k p^{6-k}$이다. 따라서

$$\mathrm{P}(K) = \sum_{k=0}^{6} N_k \, q^k p^{6-k},$$

이고, 여기서 N_k는 네 마을을 모두 연결하는 k개 도로의 집합의 개수이다.



도로 세 개: 연결하는 나무



도로 세 개: 삼각형, D는 고립

연결된 도로 집합 세기

열린 도로가 두 개 이하인 경우. 열린 도로 하나는 두 마을을 잇는다. 따라서 한 마을에서 출발하면 도로 하나마다 새로운 마을을 많아야 하나씩만 더할 수 있다. 나머지 세 마을에 모두 닿으려면 도로가 적어도 세 개 필요하다. 따라서 $N_0 = N_1 = N_2 = 0$이다.

열린 도로가 세 개인 경우. 세 도로의 집합은 $\binom{6}{3} = 20$개이다. 이런 집합 하나가 마을들을 연결하지 못한다고 하자. 어떤 마을이 고립되어 있다면 세 도로는 모두 나머지 세 마을 사이에 놓인다. 그런데 그 세 마을을 잇는 도로는 세 개뿐이므로, 그 집합은 정확히 삼각형이다. 고립된 마을이 없다면 마을들은 두 쌍으로 나뉘고, 열릴 수 있는 도로는 많아야 두 개(각 쌍 안에 하나씩)이므로 모순이다. 따라서 연결에 실패하는 경우는 고립되는 마을을 고르는 방법마다 하나씩, 모두 4개의 삼각형뿐이고,

$$N_3 = 20 - 4 = 16.$$

? **생각해 보기** 열린 도로가 네 개이면 왜 망이 절대 끊어지지 않는가?

열린 도로가 네 개 이상인 경우. 앞의 두 가지 실패 방식을 그대로 쓴다. 고립된 마을이 있다면 열린 도로가 모두 나머지 세 마을 사이에 있어야 하는데, 거기에는 도로가 세 개뿐이다. 두 쌍으로 나뉘는 경우에는 열린 도로가 많아야 두 개이다. 열린 도로가 네 개 이상이면 어느 쪽도 일어날 수 없으므로, 그러한 집합은 모두 연결되어 있다.

$$N_4 = \binom{6}{4} = 15, \qquad N_5 = \binom{6}{5} = 6, \qquad N_6 = 1.$$

확률

센 값들을 모으면

$$\mathrm{P}(K) = q^6 + 6q^5p + 15q^4p^2 + 16q^3p^3, \qquad q = 1 - p.$$

이를 p의 거듭제곱으로 전개하면 다음과 같은 동치인 꼴을 얻는다.

$$\mathrm{P}(K) = 1 - 4p^3 - 3p^4 + 12p^5 - 6p^6.$$

$p = \frac{1}{2}$인 경우

이제 $p = q = \frac{1}{2}$이므로, 도로가 열리고 막히는 $2^6 = 64$가지 경우는 모두 확률이 $\frac{1}{64}$로 같다. 따라서

$$\mathrm{P}(K) = \frac{1 + 6 + 15 + 16}{64} = \frac{38}{64} = \frac{19}{32},$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

검산

- **극단적인 값.** $p = 0$이면 모든 도로가 열려 있고 공식은 1을 준다. $p = 1$이면 모든 도로가 막혀 있고 공식은 $1 - 4 - 3 + 12 - 6 = 0$을 준다.
- **여사건**(*complement*). 망이 끊어지는 것은 어떤 마을이 고립되거나, 마을들이 두 쌍으로 나뉘고 두 쌍 사이에 도로가 없을 때, 그리고 그때뿐이다. 한 마을이 고립될 확률은 p^3이다. 네 마을에 대해 포함배제의 원리(inclusion–exclusion)를 쓰면(특정한 두 마을이 고립되려면 막힌 도로가 다섯 개 필요하고, 세 마을이 고립되면 네 마을이 모두 고립된다) $4p^3 - 6p^5 + 3p^6$을 얻는다. 두 쌍으로 나누는 3가지 방법 각각에서 쌍 안의 두 도로가 모두 열려 있는 경우가 p^4q^2씩 더해진다. 1에서 이 합을 빼면 위의 공식과 일치한다. $p = \frac{1}{2}$일 때 끊어질 확률은 $\frac{32-12+3+3}{64} = \frac{13}{32}$이다.
- **전수 조사.** 컴퓨터로 도로 집합 64개를 모두 나열하면 개수 $16, 15, 6, 1$이 확인된다. $p = 0.3$으로 한 모의실험(simulation)은 0.893을 주었고, 정확한 값은 0.8925이다.

흔한 실수

- 네 개의 삼각형을 잇고, 세 도로의 집합 20개를 모두 연결된 것으로 세는 실수.
- 네 도로의 집합이라도 마을 하나를 고립시킬 수 있다고 가정하는 실수. 마을이 고립되려면 그 마을의 세 도로가 모두 막혀야 한다.
- $q^k p^{6-k}$를 쓸 때 p(막힘)와 $1 - p$(열림)를 혼동하는 실수.

STEP 너머

이것은 **무작위 그래프**(*random graph*)의 아주 작은 예이다. 망의 각 변이 독립적으로 살아남을 때, 그 결과가 연결되어 있는지를 묻는 것이다. p에 대한 이 다항식을 그 망의 **신뢰도 다항식**(*reliability polynomial*)이라 하고, 수 16은 케일리(Cayley)의 공식의 한 예이다. 즉, 이름이 붙은 n개의 점을 잇는 나무(tree)는 n^{n-2}개이다. 큰 망에 대해서는 에르되시(Erdős)와 레니(Rényi)가, 도로가 열릴 확률이 어떤 문턱값을 지나는 순간 연결성이 놀랄 만큼 갑작스

럽게 나타난다는 것을 발견하였다. 독립인 사건들로 만들어지는 무작위 구조에 대해 더 알고 싶다면 Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)을 보라.

풀이

STEP III 견본 문제지, 문제 16

확률과 통계 • 음이항분포

> **STEP III 견본 문제지, 16번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/spec-s3-q16

핵심 아이디어

아들 r명을 기다리는 것은 아들 한 명을 기다린 다음, 다시 처음부터 시작하여 다음 아들을 기다리는 일을 r번 되풀이하는 것과 같다. 따라서 C는 똑같은 대기 시간(waiting time) r개의 합으로 나뉘고, 나머지는 기댓값의 선형성(linearity of expectation)이 해결해 준다. 소문항 (ii)의 요령은 대통령이 멈춘 뒤에도 출생이 계속 이어진다고 상상하는 것이다. 그러면 주어진 시점까지 대통령이 멈추었는지는 **고정된** 수의 아이들에 관한 질문이 되고, 아들과 딸 사이의 대칭성(symmetry)이 이를 해결한다.

풀이

이 풀이 전체에서 각 출생은 다른 모든 출생과 독립적으로(independently) 확률 $\frac{1}{2}$로 아들이다.

소문항 (i)

$i = 1, 2, \ldots, r$에 대하여, X_i를 $(i-1)$번째 아들 다음부터 i번째 아들까지(그 아들 포함) 태어난 아이의 수라 하자. ($i = 1$이면 처음부터 센다.) 그러면

$$C = X_1 + X_2 + \cdots + X_r.$$

각 X_i는 새로 시작하는 독립적이고 공정한 출생의 연속에서 첫 아들까지의 출생 수를 세므로, 모든 X_i는 X와 같은 분포(distribution)를 가진다. 여기서

$$\mathrm{P}(X = k) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot \tfrac{1}{2} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

인데, $X = k$는 딸 $k-1$명 다음에 아들이 태어난다는 뜻이기 때문이다.

$\mathrm{E}(X)$를 구하기 위해 $|x| < 1$에서 기하급수(geometric series) $\sum_{k\geq 0} x^k = \dfrac{1}{1-x}$를 미분하여 $\sum_{k\geq 1} kx^{k-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$을 얻는다. 양변에 x를 곱하고 $x = \frac{1}{2}$를 대입하면

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k\left(\tfrac{1}{2}\right)^k = \frac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 2.$$

이는 납득할 만하다. 모든 아기의 절반이 아들이라면, 아들 한 명을 얻기까지 출생 두 번을 기다릴 것으로 기대된다.

기댓값의 선형성에 의하여 (X_i들이 독립이든 아니든 성립하지만, 여기서는 실제로 독립이다)

$$\mathrm{E}(C) = \mathrm{E}(X_1) + \cdots + \mathrm{E}(X_r) = 2r.$$

소문항 (ii)

끝없이 이어지는 아기들의 성별이 미리 독립적이고 공정하게 정해져 있고, 대통령은 이 수열에서 r번째 아들에 이를 때까지 아기를 낳는다고 상상하자. 이렇게 해도 C에 관해서는 아무것도 달라지지 않지만, 대통령이 더 일찍 멈추는 경우에도 "처음 $2r-1$명의 아기"에 대하여 이야기할 수 있게 된다.

> **생각해 보기** 사건 $C < 2r$를 수열의 처음 $2r-1$명의 아기만을 써서 어떻게 나타낼 수 있을까?

C는 정수이므로 $C < 2r$는 $C \leq 2r-1$, 즉 r번째 아들이 $2r-1$번째 자리 또는 그 이전에 태어난다는 뜻이다. 이는 처음 $2r-1$명의 아기 중 아들이 적어도 r명일 때, 그리고 그때에만 일어난다. 따라서

$$\mathrm{P}(C < 2r) = \mathrm{P}(\text{아들 수가 적어도}r\text{명 (처음}2r-1\text{명의 아기 중)}).$$

이제 B와 G를 이 $2r-1$명의 아기 중 아들과 딸의 수라 하면 $B+G = 2r-1$이다. $2r-1$은 홀수이므로 B와 G는 같을 수 없고, 둘 중 정확히 하나만 r 이상이다.

- $B \geq r$이면 $G = 2r-1-B \leq r-1$이다.
- $B \leq r-1$이면 $G \geq r$이다.

따라서 사건 $\{B \geq r\}$와 $\{G \geq r\}$는 서로 배반(mutually exclusive)이고 둘을 합하면 모든 경우를 포함하므로

$$\mathrm{P}(B \geq r) + \mathrm{P}(G \geq r) = 1.$$

그런데 매 출생에서 아들과 딸은 같은 확률로 태어나므로 "아들"과 "딸"이라는 이름표를 서로 바꾸어도 어떤 확률도 달라지지 않으며, $\mathrm{P}(B \geq r) = \mathrm{P}(G \geq r)$이다. 그러므로 각각은

$\frac{1}{2}$이고

$$\mathrm{P}(C < 2r) = \tfrac{1}{2},$$

이 되어 증명이 끝난다.

따라서 가족 수의 기댓값은 $2r$이지만, 가족 수가 $2r$보다 작은 경우는 정확히 절반이다. 가족 수의 분포는 한쪽으로 치우쳐(skewed) 있다. $2r$보다 조금 작은 값이 흔하고, 가끔 나타나는 매우 긴 딸의 연속이 평균을 끌어올린다.

검산

- $r = 1$일 때: $\mathrm{E}(C) = 2$이고, $C < 2$는 첫 아기가 아들이라는 뜻이므로 그 확률은 $\frac{1}{2}$이다.
- $r = 2$일 때: $C < 4$는 $C = 2$ 또는 3이라는 뜻이고, 그 확률은 각각 $\frac{1}{4}$와 $2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$이므로 합은 $\frac{1}{2}$이다.
- $r = 1, \ldots, 8$에 대하여 $c\binom{c-1}{r-1}2^{-c}$를 정확히 합하면 매번 $\mathrm{E}(C) = 2r$이고 $\mathrm{P}(C < 2r) = \frac{1}{2}$이다. $r = 3$이고 가족 200 000개로 한 시뮬레이션(simulation)에서는 평균이 6.00, $\mathrm{P}(C < 6) \approx 0.499$였다.

흔한 실수

- "아이들의 절반이 아들이므로 $C = 2r$이다"라고 주장하는 것. 평균적으로는 맞지만 C 자체는 확률적으로 정해진다. 소문항 (i)에는 단순한 추측이 아니라 대기 시간으로의 분해가 필요하다.
- 소문항 (ii)에서 대통령의 실제 자녀만 고려하는 것. $C < 2r - 1$일 때는 $2r - 1$명의 자녀가 **존재하지 않는다**. 멈추는 시점 이후로 출생의 수열을 연장하는 것이 바로 세기 논법을 타당하게 만든다.
- $2r - 1$이 홀수라는 사실을 잊는 것. 바로 이 점이 아들과 딸의 수가 같아지는 경우를 배제하고 두 사건을 서로의 여사건(complementary event)으로 만든다.

STEP 너머

C의 분포는 **음이항분포**(negative binomial distribution)이다. 즉 $c \geq r$에 대하여 $\mathrm{P}(C = c) = \binom{c-1}{r-1}2^{-c}$이다. 확률변수(random variable)를 더 간단한 조각들의 합으로 쓰고 기댓값의 선형성을 이용하는 것은 대학 1학년 확률론에서 가장 강력한 도구 가운데 하나이다. 그리고 소문항 (ii)에서 "대기 시간"을 "고정된 횟수의 시행에서의 개수"와 연결하는 요령은 음이항분포와 이항분포(binomial distribution)를 (그리고 연속 시간에서는 감마분

포(gamma distribution)와 푸아송분포(Poisson distribution)를) 이어 주는 것과 같은 쌍대성(duality)이다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)는 이 두 아이디어를 많은 예와 함께 다룬다.

Beyond STEP

STEP은 대부분의 학생이 학창 시절에 치르는 수학 시험 가운데 가장 어려운 시험이다. 또한 가장 훌륭한 시험 가운데 하나이기도 하다. 문제는 짧고 낯설며 깊이가 있고, 그중 가장 뛰어난 문제들은 대학 수학의 작은 조각이 모습을 감추고 있는 것이다.

이 책은 1987년 첫 시험에 앞서 나온 예시 시험지(specimen papers)부터 2025년 시험지까지 가운데 가장 흥미로운 STEP 문제들을 골라, 각 문제를 하나의 문으로 삼는다. 모든 문제는 뛰어난 학생이 풀어 가면서 던질 법한 질문들과 함께 꼼꼼하게 풀이하고, 그런 다음 책은 그 문을 지나 한 걸음 더 나아간다. 그 아이디어가 어디에서 왔는지, 대학에서는 무엇으로 발전하는지, 그리고 다음에는 무엇을 읽으면 좋은지를 살펴본다.

이 책은 STEP을 준비하면서 기출 문제 연습 이상의 것을 원하는 재능 있는 예비 수학자를 위해 쓰였다. 수학과 학부생처럼 생각하기 시작하고, 앞으로 무엇이 자신을 기다리고 있는지 알아보고 싶은 학생들을 위한 책이다.

- 순수수학(pure mathematics), 역학(mechanics), 확률(probability)과 통계(statistics)를 아우르는 13개의 장
- 이 36개의 STEP 기출 문제와 각 문제의 안내식 풀이
- 모든 문제 뒤에 숨은 대학 수학
- 답이 실린 후속 연습 문제와 더 읽을거리

견본 문제지 풀이. 책 전체와 모든 장,
모든 풀이를 다음 주소에서 무료로 읽고, 내려받고, 공유할 수 있다.

beyondstep.keithmcnulty.org

본문은 퍼블릭 도메인(CC0 1.0)으로 공개한다. STEP 문제 © Cambridge University Press & Assessment.

