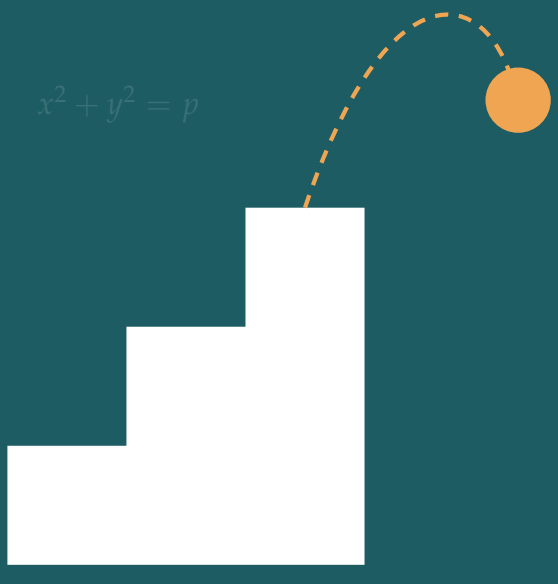
STEP 대비 · 대학 수학

Beyond STEP

STEP II 및 III

2025년 풀이



KEITH McNULTY

Beyond STEP

STEP 기출문제로 여는
대학 수학의 세계

STEP II 및 III

2025년 풀이

Keith McNulty

Beyond STEP: STEP 기출문제로 여는 대학 수학의 세계

2025년 풀이

2025년 STEP 문제지(STEP II 및 III)의 24개 문제 전체에 대한 풀이. 견본 문제지 이후 모든 STEP 문제의 풀이와 *Beyond STEP* 책 전체, 그리고 각 장을 `beyondstep.keithmcnulty.org`에서 무료로 읽고 내려받을 수 있다.

풀이를 읽기 전에 먼저 문제를 제대로 풀어 보자. 모든 답은 수치적으로 검증하였지만, 풀이가 이렇게 많으면 실수가 어느 정도 있을 수밖에 없다. 무언가 잘못된 것처럼 보이면 자신의 풀이를 믿고 꼼꼼히 확인해 보자.

영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.

2026년 11월 온라인 초판 발행.

이 PDF에서 지은이가 직접 만든 모든 것, 곧 본문, 풀이, 그림, 연습문제와 해답은 크리에이티브 커먼즈 CC0 1.0 Universal 라이선스에 따라 퍼블릭 도메인(public domain)으로 공개한다. 누구든 허락을 구하지 않고 어떤 목적으로든 복사하고, 고쳐 쓰고, 공유할 수 있다. 자세한 내용은 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`을 보라.

여기에서 다루는 STEP 문제의 저작권은 Cambridge University Press & Assessment에 있다. 문제는 이 책에 싣지 않았으며, 각 문제마다 공식 출처인 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스나 OCR의 기출 시험지로 가는 링크를 달았다.

오류 제보는 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty에 이슈로 남겨 주기 바란다.

차례

STEP II

Q1 구간별로 정의된 함수 순수수학 3

Q2 절댓값을 포함한 복소수 방정식 순수수학 8

Q3 거듭제곱의 비교 순수수학 13

Q4 바닥 함수 항등식 순수수학 18

Q5 치환적분 순수수학 22

Q6 포물선에 접하는 원 순수수학 26

Q7 비선형 미분방정식 순수수학 31

Q8 정수의 균형 분할 순수수학 36

Q9 충돌과 포물체 운동 역학 40

Q10 강체 막대의 정역학 역학 45

Q11 기댓값과 이항 합 확률과 통계 50

Q12 푸아송 분포 확률과 통계 54

STEP III

Q1 베타 함수 적분 순수수학 59

Q2 반복 함수와 주기성 순수수학 63

Q3 평균 부등식 순수수학 69

Q4 곡선의 변환 순수수학 73

Q5 3차원 벡터 순수수학 79

Q6 근의 대칭함수 순수수학 83

Q7 역탄젠트 함수 순수수학 87

Q8 복소수를 이용한 삼각함수의 합 순수수학 92

Q9 질량중심 역학 96

Q10 움직이는 널빤지 위의 마찰 역학 102

Q11 최댓값의 분포 확률과 통계 106
Q12 재귀적으로 정의된 확률변수 확률과 통계 110

풀이

STEP II 2025, 문제 1

순수수학 • 구간별로 정의된 함수

> **STEP II 2025, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

핵심 아이디어

Min으로 만든 함수는 구간마다 다른 식으로 주어지는 평범한 함수일 뿐이다. 그러므로 언제나 첫 번째 할 일은 두 인수가 교차하는 곳을 찾아 함수를 구간별로 정의된(piecewise) 형태로 쓰고, 구간마다 따로 풀되 그 식이 나온 구간 안에 들어가는 답만 남기는 것이다. 이음매에서 함수는 연속(continuous)이지만 보통 꺾인 점(corner)이 생기며, 바로 이 꺾인 점 때문에 (iv)의 점은 도함수(derivative)가 0이 아닌데도 극대가 된다.

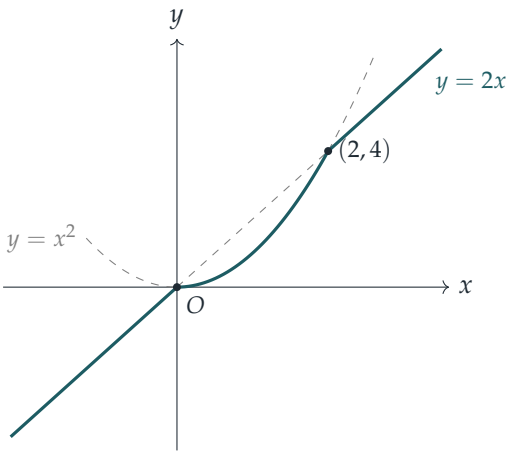
풀이

소문항 (i)

$x^2 \le 2x \iff x(x-2) \le 0 \iff 0 \le x \le 2$이다. 따라서

$$\mathrm{Min}(x^2, 2x) = \begin{cases} x^2 & 0 \le x \le 2, \\ 2x & x < 0 \text{ 또는 } x > 2. \end{cases}$$

그래프는 직선 $y = 2x$를 따라가다가 $x = 0$과 $x = 2$ 사이에서만 포물선(parabola)으로 내려가는데, 이 구간에서 포물선은 현(chord)보다 아래에 있기 때문이다. 두 직선 부분은 모두 **같은** 직선 위에 있다. 꺾인 점은 두 곳으로, 포물선의 기울기가 0이고 직선의 기울기가 2인 $(0,0)$, 그리고 기울기가 각각 4와 2인 $(2,4)$이다.



소문항 (ii)

(i)에서 구한 두 조각을 이용한다.

- $0 \le x \le 2$일 때: $2x^2 = 5x - 3 \iff 2x^2 - 5x + 3 = 0 \iff (2x-3)(x-1) = 0$이므로 $x = 1$ 또는 $x = \frac{3}{2}$이다. 둘 다 $[0,2]$에 속하므로 둘 다 해이다.
- $x < 0$ 또는 $x > 2$일 때: $4x = 5x - 3 \iff x = 3$이고, 이는 $x > 2$를 만족하므로 해이다.

해는 $x = 1, x = \frac{3}{2}, x = 3$이다.

소문항 (iii)

두 번째 함수도 필요하다. $x^3 \le 4x \iff x(x-2)(x+2) \le 0 \iff x \le -2$ 또는 $0 \le x \le 2$이다. 둘을 합치면

$$\mathrm{Min}(x^2, 2x) + \mathrm{Min}(x^3, 4x) = \begin{cases} x^3 + 2x & x \le -2, \\ 6x & -2 < x < 0, \\ x^3 + x^2 & 0 \le x \le 2, \\ 6x & x > 2. \end{cases}$$

$m = 2$인 경우.

- $x \le -2$: $x^3 + 2x = 2x$에서 $x = 0$이지만, 이는 구간에 속하지 않는다.
- $-2 < x < 0$과 $x > 2$: $6x = 2x$에서 $x = 0$이지만, 어느 구간에도 속하지 않는다.
- $0 \le x \le 2$: $x^3 + x^2 - 2x = x(x+2)(x-1) = 0$에서 $x = 0$ 또는 $x = 1$이다($x = -2$는

버린다).

따라서 $m = 2$일 때 해는 $x = 0$과 $x = 1$이다.

? 생각해 보기 방정식 $6x = 6x$는 어떻게 되는가?

이 식은 **모든** x에 대해 참이므로, $m = 6$일 때는 고립된 점들만이 아니라 구간 전체가 해가 된다.

$m = 6$인 경우.

- $x \le -2$: $x^3 + 2x = 6x \iff x(x-2)(x+2) = 0$이고, 구간에 속하는 것은 $x = -2$뿐이다.
- $-2 < x < 0$과 $x > 2$: $6x = 6x$는 항등적으로 성립하므로 이 구간의 모든 x가 해이다.
- $0 \le x \le 2$: $x^3 + x^2 - 6x = x(x+3)(x-2) = 0$에서 $x = 0$ 또는 $x = 2$이다($x = -3$은 버린다).

이를 종합하면 $m = 6$일 때 해집합은

$$-2 \le x \le 0 \quad \text{또는} \quad x \ge 2.$$

소문항 (iv)

여기서는 $x^3 \le x^2 \iff x^2(x-1) \le 0 \iff x \le 1$이다(인수 x^2은 결코 음이 아니며, $x = 0$이면 등호가 성립한다). 따라서

$$y = \begin{cases} 2x^3 - 5x & x \le 1, \\ 2x^2 - 5x & x > 1. \end{cases}$$

$x = 1$에서 두 식은 모두 $y = -3$을 주므로, 곡선은 그곳에서 연속이고 $(1, -3)$을 지난다.

점 $(1, -3)$. 이 점은 정류점(stationary point)이 아니다. $x = 1$에서 왼쪽 기울기는 $6x^2 - 5 = 1$이고 오른쪽 기울기는 $4x - 5 = -1$이다. 더 정확히 말하면

- $\sqrt{5/6} < x < 1$에서 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 6x^2 - 5 > 0$이므로 y는 -3까지 증가하고,
- $1 < x < \frac{5}{4}$에서 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 4x - 5 < 0$이므로 y는 -3에서부터 감소한다.

따라서 $x = 1$ 근처의 양쪽 모든 점에서 $y < -3$이고, $(1, -3)$은 곡선의 꺾인 점인 극대점(local maximum)이다.

나머지 극점. $x<1$에서 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 6x^2-5=0$이면 $x=\pm\sqrt{5/6}=\pm\frac{\sqrt{30}}{6}$이고, 둘 다 1보다 작다. $2x^2=\frac{5}{3}$을 이용하면

$$y = x(2x^2-5) = -\tfrac{10}{3}x = \mp\tfrac{10}{3}\cdot\tfrac{\sqrt{30}}{6} = \mp\tfrac{5\sqrt{30}}{9}.$$

$\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2 = 12x$이므로 $x<0$인 점은 극대, $x>0$인 점은 극소이다. $x>1$에서 $4x-5=0$이면 $x=\frac{5}{4}$이고 $y=\frac{25}{8}-\frac{25}{4}=-\frac{25}{8}$인데, 포물선이 위로 열려 있으므로 이는 극소이다. 따라서 나머지 세 극점(turning point)은

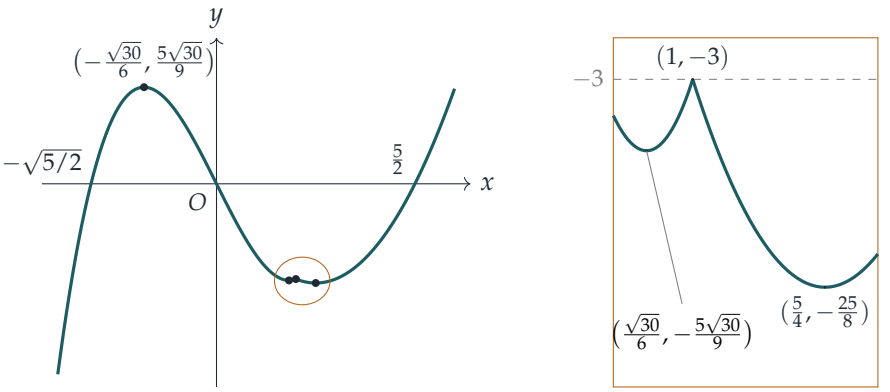
$$\text{극대}\left(-\tfrac{\sqrt{30}}{6},\ \tfrac{5\sqrt{30}}{9}\right), \qquad \text{극소}\left(\tfrac{\sqrt{30}}{6},\ -\tfrac{5\sqrt{30}}{9}\right)\text{와}\ \left(\tfrac{5}{4},\ -\tfrac{25}{8}\right).$$

개형. 삼차함수 $2x^3-5x$는 기함수(odd function)이므로, $-1\le x\le 1$인 곡선 부분은 원점에 대해 회전대칭이다. 곡선은 $x\le 1$에서 $x(2x^2-5)=0$인 곳, 즉 $x=0$과 $x=-\sqrt{5/2}\approx -1.58$에서, 그리고 $x>1$에서 $x(2x-5)=0$인 곳, 즉 $x=\frac{5}{2}$에서 축과 만난다. $x\to-\infty$이면 $y\to-\infty$이고, $x\to\infty$이면 $y\to\infty$이다.

$x=1$ 근처의 세 점은 서로 매우 가까우므로 그 순서를 정해 둘 필요가 있다. 양수 $\frac{5\sqrt{30}}{9}$와 $\frac{25}{8}$을 제곱하면 $\frac{750}{81}\approx 9.26$과 $\frac{625}{64}\approx 9.77$이므로

$$-\tfrac{25}{8} < -\tfrac{5\sqrt{30}}{9} < -3 :$$

$x=\frac{5}{4}$에서의 극소가 더 낮고, 두 극소 모두 꺾인 점보다 아래에 있다. 적당한 축척에서는 이 세부 사항이 보이지 않으므로, 확대한 작은 그림으로 보여 준다.



검산

- (ii): $x=\frac{3}{2}$에서 $\mathrm{Min}(\frac{9}{4},3)=\frac{9}{4}$이고 $2\cdot\frac{9}{4}=\frac{9}{2}=5\cdot\frac{3}{2}-3$이다. $x=3$에서 $\mathrm{Min}(9,6)=6$이고 $12=15-3$이다.
- (iii), $m=6$: $x=-1$을 넣으면 $\mathrm{Min}(1,-2)+\mathrm{Min}(-1,-4)=-2-4=-6=6x$이다. 해집합에 속하지 않는 $x=1$을 넣으면 $1+1=2\neq 6$이다.

- (iv): $[-3,3]$에서 10^{-5} 간격으로 y를 컴퓨터로 조사한 결과 극점은 정확히 네 개로, $x \approx -0.9129$ ($y \approx 3.0429$), 0.9129 (-3.0429), 1 (-3), 1.25 (-3.125)에 있었으며, 위에서 구한 값과 일치한다.

흔한 실수

- 해당 식이 적용되는 구간 밖에 있는 근을 남겨 두는 것. 예를 들어 (iii)에서 $m = 2$일 때의 $x = -2$가 그렇다.
- $6x = 6x$를 하나의 값을 주는 식처럼 풀고, 구간 전체에서 성립한다는 것을 알아차리지 못하는 것.
- (iv)의 곡선을 $(1,-3)$에서 매끄럽게 그리는 것. 그곳에는 왼쪽 기울기 1, 오른쪽 기울기 -1인 진짜 꺾인 점이 있다.

STEP 너머

$\mathrm{Min}(f,g) = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$ 같은 함수는 f와 g가 연속이면 언제나 연속이지만, 미분가능(differentiable)할 필요는 없다. 그리고 (iv)는 극대점이 반드시 정류점일 필요는 없음을 보여 준다. 해석학(analysis) 강의에서는 이로부터 **미분가능한** 함수의 극값은 도함수가 0이 되는 곳에서 나타난다는 결과를 신중하게 서술하게 되고, 한쪽 도함수(one-sided derivative)를 다루게 된다. 이런 종류의 구간별로 정의된 함수는 최적화(optimisation)에서도 핵심적인데, 여러 일차함수의 최솟값이 선형계획법(linear programming)에서 연구하는 꼭짓점을 만들어 낸다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)는 바로 이런 예를 염두에 두고 연속성과 미분가능성을 다룬다.

풀이

STEP II 2025, 문제 2

순수수학 • 절댓값을 포함한 복소수 방정식

STEP II 2025, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

핵심 아이디어

$z = x + \mathrm{i}y$로 놓고 방정식을 실수부(real part)와 허수부(imaginary part)로 나눈다. 절댓값(modulus)은 언제나 실수이므로 허수부에는 아무것도 기여하지 않고, 그러면 z^2(또는 z^3)의 허수부가 인수분해(factorise)된다. 이 인수분해를 보면 근이 아르강 도표(Argand diagram)의 어느 직선 위에 있어야 하는지 알 수 있고, 각 직선 위에서 문제는 변수가 하나인 실수 방정식으로 줄어든다.

풀이

소문항 (i)

(a) x, y가 실수일 때 $z = x + \mathrm{i}y$라 하자. 그러면 $z^2 = x^2 - y^2 + 2xy\,\mathrm{i}$이고, $|z + b|$는 실수이며 a도 실수이다. $z^2 + |z + b| = a$의 허수부를 비교하면

$$2xy = 0,$$

이므로 $x = 0$(z는 순허수(purely imaginary))이거나 $y = 0$(z는 순실수)이다. 이것이 보여야 할 내용이었다.

(b) y가 실수일 때 $z = \mathrm{i}y$라 하자. 그러면 $z^2 = -y^2$이고 $|z + \frac{5}{2}| = \sqrt{y^2 + \frac{25}{4}}$이므로

$$\sqrt{y^2 + \tfrac{25}{4}} = y^2 + \tfrac{7}{2}.$$

이어야 한다. 양변이 모두 양수이므로 이 식은 양변을 제곱한 방정식

$$y^2 + \tfrac{25}{4} = y^4 + 7y^2 + \tfrac{49}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad y^4 + 6y^2 + 6 = 0.$$

과 동치(equivalent)이다. 좌변은 모든 실수 y에 대해 6 이상이므로 해가 없다. 즉 이 방정식은 순허수인 근을 갖지 않는다.

(c) $z = x$가 실수라 하면 $x^2 + |x + \frac{7}{2}| = \frac{5}{2}$이어야 한다. $x + \frac{7}{2}$의 부호에 따라 경우를 나눈다.

- $x \geq -\frac{7}{2}$이면 $x^2 + x + \frac{7}{2} = \frac{5}{2}$, 즉 $x^2 + x + 1 = 0$이고, 판별식(discriminant)은 $1 - 4 = -3 < 0$이다. 실수해가 없다.
- $x < -\frac{7}{2}$이면 $x^2 - x - \frac{7}{2} = \frac{5}{2}$, 즉 $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2) = 0$이다. 근 3과 -2는 모두 조건 $x < -\frac{7}{2}$를 만족하지 않으므로 어느 것도 해가 아니다.

따라서 순실수인 근은 없다.

? **생각해 보기** $x^2 - x - 6 = 0$을 풀고 거기서 멈추면 왜 충분하지 않은가?

각 경우의 식은 자신에게 해당하는 x의 범위에서만 원래 방정식을 나타낸다. 경우별 방정식의 근이 그 범위 밖에 있으면 그것은 다른 방정식(절댓값 안의 부호가 잘못된 방정식)의 해이므로 버려야 한다.

(d) 이제 $\frac{1}{2} < b < \frac{3}{4}$이다. 특히 $b > 0$이다.

허수근. $z = \mathrm{i}y$로 놓고 $Y = y^2 \geq 0$이라 쓰자. 방정식은 $-Y + \sqrt{Y + b^2} = \frac{1}{2}$, 즉

$$\sqrt{Y + b^2} = Y + \tfrac{1}{2}.$$

가 된다. $Y \geq 0$이면 우변이 양수이므로 제곱해도 동치인 방정식을 얻는다.

$$Y + b^2 = Y^2 + Y + \tfrac{1}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad Y^2 = b^2 - \tfrac{1}{4}.$$

$b > \frac{1}{2}$이므로 $b^2 - \frac{1}{4} > 0$이고, 따라서 $Y = \sqrt{b^2 - \frac{1}{4}}$는 실제로 양수인 값이며

$$z = \pm \mathrm{i} \left(b^2 - \tfrac{1}{4}\right)^{1/4}$$

는 순허수인 근이다.

실근. $z = x$로 놓고 $|x + b| = x + b$가 되는 범위 $x \geq -b$에서 근을 찾자. 방정식은

$$x^2 + x + b - \tfrac{1}{2} = 0,$$

가 되고, 판별식은 $1 - 4(b - \frac{1}{2}) = 3 - 4b$인데 $b < \frac{3}{4}$이므로 양수이다. 큰 근

$$x_+ = \frac{-1 + \sqrt{3 - 4b}}{2}.$$

을 택한다. 이 근이 범위 $x \geq -b$ 안에 있는지 확인해야 한다. 그런데 $x_+ \geq -b$는 $\sqrt{3-4b} \geq 1-2b$와 동치이고, $b > \frac{1}{2}$이면 우변은 음수이고 좌변은 양수이므로 이 부등식은 확실히 성립한다. 따라서 x_+는 순실수인 근이다.

그러므로 $\frac{1}{2} < b < \frac{3}{4}$일 때 이 방정식은 순허수인 근을 적어도 하나, 순실수인 근을 적어도 하나 가지며, 이것이 증명할 내용이었다. (b에 대한 각 조건은 꼭 한 번씩 쓰였다. $b > \frac{1}{2}$는 허수근과 $x_+ \geq -b$에, $b < \frac{3}{4}$는 실근의 판별식에 쓰였다.)

소문항 (ii)

$z = x + \mathrm{i}y$라 하자. 그러면

$$z^3 = x^3 - 3xy^2 + \left(3x^2y - y^3\right)\mathrm{i}, \qquad |z+2|^2 = (x+2)^2 + y^2.$$

이다. 두 번째 식은 실수이므로 방정식의 허수부는

$$y\left(3x^2 - y^2\right) = 0,$$

이고, 따라서 $y = 0$ 또는 $y^2 = 3x^2$이다. (기하적으로 보면 z는 실수축 위에 있거나 직선 $y = \pm\sqrt{3}\,x$ 중 하나 위에 있다. 이는 정확히 편각이 $\frac{\pi}{3}$의 배수인 방향들로, z^3을 실수로 만드는 방향이다.)

$y = 0$인 경우. 실수부에서 $x^3 + (x+2)^2 = 4$, 즉

$$x^3 + x^2 + 4x = x\left(x^2 + x + 4\right) = 0.$$

을 얻는다. 이차식의 판별식은 $1 - 16 < 0$이므로 유일한 해는 $x = 0$이고, $z = 0$이다.

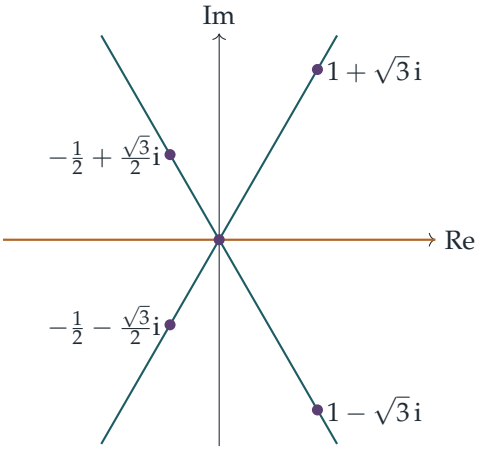
$y^2 = 3x^2$인 경우. 실수부 $x^3 - 3xy^2 + (x+2)^2 + y^2 = 4$에 $y^2 = 3x^2$을 대입하면

$$\begin{aligned} x^3 - 9x^3 + x^2 + 4x + 4 + 3x^2 &= 4 \\ -8x^3 + 4x^2 + 4x &= 0 \\ -4x\left(2x^2 - x - 1\right) &= 0 \\ -4x(2x+1)(x-1) &= 0. \end{aligned}$$

- $x = 0$이면 $y = 0$이어야 하므로 다시 $z = 0$이다.
- $x = 1$이면 $y^2 = 3$이므로 $z = 1 \pm \sqrt{3}\,\mathrm{i}$이다.
- $x = -\frac{1}{2}$이면 $y^2 = \frac{3}{4}$이므로 $z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}$이다.

모든 단계가 동치 변형이었으므로(대입과 인수분해만 했다) 이것들은 모두 실제로 해이다. 따라서 이 방정식의 근은 정확히 다섯 개이다.

$$z = 0, \qquad z = 1 \pm \sqrt{3}\,\mathrm{i}, \qquad z = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}.$$



근들은 허수부가 허용하는 세 직선 $y=0$과 $y=\pm\sqrt{3}\,x$ 위에 놓여 있다.

검산

- 극형식(polar form)으로 $1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$이므로 $z^3=8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}=-8$이고, $|3+\sqrt{3}\,\mathrm{i}|^2=9+3=12$이다. 실제로 $-8+12=4$이다.
- $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$은 1의 세제곱근(cube root of unity)이므로 $z^3=1$이고, $|\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}|^2=\frac{9}{4}+\frac{3}{4}=3$이다. 실제로 $1+3=4$이다.
- (d)에서 $b=\frac{5}{8}$로 해 보자. 그러면 $Y=\sqrt{\frac{25}{64}-\frac{16}{64}}=\frac{3}{8}$이고, $-\frac{3}{8}+\sqrt{\frac{3}{8}+\frac{25}{64}}=-\frac{3}{8}+\frac{7}{8}=\frac{1}{2}$이다. 실근은 $x_+=\frac{-1+\sqrt{1/2}}{2}\approx-0.146$이고, 필요한 대로 $-\frac{5}{8}$보다 크다.
- 소문항 (ii)의 방정식의 근을 영역 $|x|,|y|\le 3$ 전체에서 컴퓨터로 탐색하면 위의 다섯 근이 정확히 나온다.

흔한 실수

- $|z+b|$에 허수부가 있는 것처럼 다루거나, $|z+2|^2$을 $(z+2)^2$으로 전개하는 것. 절댓값의 제곱은 $(x+2)^2+y^2$으로, 실수이다.
- (c)와 (d)에서처럼, 경우별 방정식의 근이 그 경우가 적용되는 범위 안에 있는지 확인하는 것을 잊는 것.
- (ii)에서 허수부를 y로 나누어 실근 $z=0$을 잃어버리는 것.

STEP 너머

z와 $|z|$(또는 $\bar{z}$)가 섞인 방정식은 z에 대한 다항식이 아니므로, 대수학의 기본정리(fundamental theorem of algebra)는 그 근의 개수에 대해 아무것도 말해 주지 않는다. 여기서는 "삼차방정식"이 근을 다섯 개 갖는다. 이런 방정식은 두 실수 미지수에 대한 두 실수 방정식의 쌍으로 보는 것이 올바른 관점이며, 이 관점은 대학 1학년 복소해석학(complex analysis)에서 다시 만나게 된다. 그곳에서는 함수가 $\bar{z}$가 아니라 z에만 의존할 때에만 복소수의 의미로 미분가능(differentiable)하다는 사실을 배운다(코시(Cauchy)–리만(Riemann) 방정식). Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이 기하적 그림을 생생하게 보여 준다.

풀이

STEP II 2025, 문제 3

순수수학 • 거듭제곱의 비교

> **STEP II 2025, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

핵심 아이디어

a^b와 $b^a (a, b > 0)$를 비교하는 모든 문제는 양변에 로그(logarithm)를 취하고 ab로 나누면 $\frac{\ln a}{a}$와 $\frac{\ln b}{b}$를 비교하는 문제가 된다. 따라서 모든 것은 함수 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$의 그래프로 귀결된다. 이 그래프는 $x = \mathrm{e}$에서 단 하나의 최고점까지 올라갔다가 그 뒤로 내려간다. e의 같은 쪽에 있는 두 수는 쉽게 비교할 수 있지만, 서로 반대쪽에 있는 두 수를 비교하려면 $f(2) = f(4)$라는 절묘한 우연처럼 징검다리(stepping stone)가 필요하다.

풀이

이 풀이 전체에서 $x > 0$에 대하여 $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$로 둔다. ln은 증가함수이므로, 양수 a, b에 대하여

$$a^b > b^a \iff b \ln a > a \ln b \iff \frac{\ln a}{a} > \frac{\ln b}{b} \iff f(a) > f(b),$$

이다. 여기서 $ab > 0$으로 나누었다. 모든 소문항에서 이 변환을 사용한다.

소문항 (i)

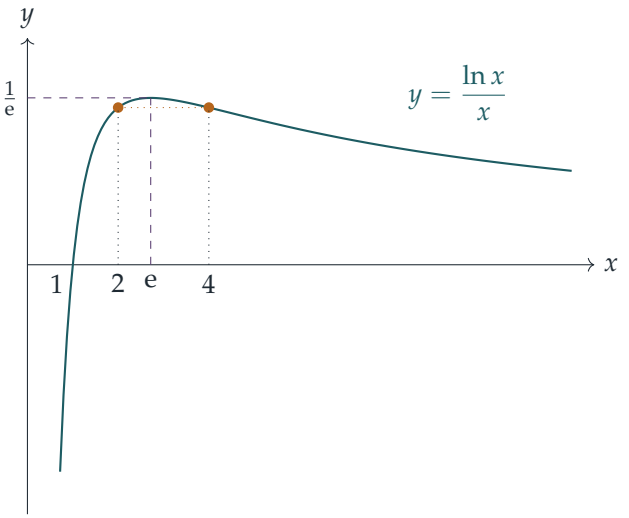
몫의 미분법(quotient rule)에 의해

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

이고, 이는 $0 < x < \mathrm{e}$에서 양수, $x > \mathrm{e}$에서 음수이다. 따라서 f는 $(0, \mathrm{e}]$에서 순증가(strictly increasing)하고 $[\mathrm{e}, \infty)$에서 순감소(strictly decreasing)하며, 최댓값은 $f(\mathrm{e}) = 1/\mathrm{e}$이다.

그 밖의 특징은 다음과 같다.

- $f(1) = 0$이고, $(0,1)$에서 $f < 0$, $(1,\infty)$에서 $f > 0$이다.
- $x \to 0^+$일 때 $\ln x \to -\infty$이고 $1/x \to +\infty$이므로 $f(x) \to -\infty$이다. 즉 y축이 점근선(asymptote)이다.
- $x \to \infty$일 때 $\ln x$가 x보다 느리게 증가하므로 $f(x) \to 0^+$이다. 즉 x축이 점근선이다.
- 한 번 더 미분하면 $f''(x) = \dfrac{2\ln x - 3}{x^3}$이므로 $x = \mathrm{e}^{3/2} \approx 4.48$에서 변곡점(point of inflection)이 있다.



호박색 점들은 $f(2) = \frac{\ln 2}{2} = \frac{2\ln 2}{4} = f(4)$를 나타내며, 이는 소문항 (iii)에서 사용한다.

소문항 (ii)

(a) 위의 변환에 의해 $3^\pi > \pi^3 \iff f(3) > f(\pi)$이다. 3과 π는 모두 e보다 크고, f는 $[\mathrm{e},\infty)$에서 순감소한다. $3 < \pi$이므로 $f(3) > f(\pi)$이고, 따라서 $3^\pi > \pi^3$이다.

(b) 여기서 부등식은 $\left(\frac{9}{4}\right)^{\sqrt{5}} > \sqrt{5}^{9/4}$이고, 이는 $f\left(\frac{9}{4}\right) > f(\sqrt{5})$와 동치이다. 이번에는 두 수가 모두 e보다 작다. 실제로 $\sqrt{5} < \frac{9}{4} = 2.25 < \mathrm{e}$이며, $5 < \frac{81}{16}$이므로 $\sqrt{5} < \frac{9}{4}$이다. $(0,\mathrm{e}]$에서 함수 f는 순증가하므로 더 큰 입력값이 더 큰 함숫값을 준다. 즉 $f\left(\frac{9}{4}\right) > f(\sqrt{5})$이고, 이것이 보이려던 것이다.

소문항 (iii)

$a = x, b = x+2$로 두면 위의 변환에 의해

$$x^{x+2} > (x+2)^x \iff f(x) > f(x+2).$$

이다. $1 < x < 2$이면 $x \in (1,2)$이고 $x+2 \in (3,4)$이므로 두 수는 e의 서로 반대쪽에 있다. 따라서 징검다리가 필요하다.

> **생각해 보기** e의 왼쪽에 있는 점에서의 f 값과 오른쪽에 있는 점에서의 f 값을 어떻게 비교할 수 있을까?

두 호박색 점을 지나는 수평선을 이용한다. $1 < x < 2 < \mathrm{e}$이고 그 구간에서 f는 증가하므로 $f(x) < f(2)$이다. $\mathrm{e} < x+2 < 4$이고 그 구간에서 f는 감소하므로 $f(x+2) > f(4)$이다. 그리고 $f(2) = f(4)$이므로

$$f(x) < f(2) = f(4) < f(x+2).$$

이다. 따라서 $f(x) < f(x+2)$이고, 그러므로 $(x+2)^x$가 더 크다. 즉 $(1,2)$의 모든 x에 대하여 $(x+2)^x > x^{x+2}$이다.

소문항 (iv)

첫 번째 부등식의 양변을 3과 $2\sqrt{2}$의 거듭제곱으로 다시 쓴다.

$$9^{\sqrt{2}} = \left(3^2\right)^{\sqrt{2}} = 3^{2\sqrt{2}}, \qquad \sqrt{2}^{\,9} = \left(\sqrt{2}^{\,3}\right)^3 = \left(2\sqrt{2}\right)^3.$$

따라서 두 부등식은 좌변끼리 같고 우변끼리 같다. 즉 두 부등식은 같은 명제이므로 동치이다.

위의 변환에 의해 $3^{2\sqrt{2}} > (2\sqrt{2})^3 \iff f(3) > f(2\sqrt{2})$이다. 이제 $\mathrm{e}^2 < 8$에서 (양의 제곱근을 취하면) $\mathrm{e} < \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$이고, $8 < 9$이므로 $2\sqrt{2} < 3$이다. 따라서

$$\mathrm{e} < 2\sqrt{2} < 3,$$

이고, f가 $[\mathrm{e}, \infty)$에서 순감소하므로 $f(2\sqrt{2}) > f(3)$이다. 그러므로 $(2\sqrt{2})^3 > 3^{2\sqrt{2}}$, 즉

$$\sqrt{2}^{\,9} > 9^{\sqrt{2}}: \quad \text{더 큰 쪽은} \sqrt{2}^{\,9}.$$

소문항 (v)

$a = \sqrt[3]{3}$으로 두자. 8^a와 a^8을 비교하려 하므로, $f(8)$과 $f(a)$를 비교하면 된다. $a < 2 < \mathrm{e} < 8$이므로 두 입력값은 이번에도 최고점의 서로 반대쪽에 있고, 게다가 두 값은 꽤 가깝다($f(a) \approx 0.254$, $f(8) \approx 0.260$). 따라서 소문항 (iii)의 기법보다 더 정밀한 방법이 필요하다.

> **생각해 보기** $f(a)$와 $f(8)$을 더 간단한 점에서의 f 값으로 나타낼 수 있을까?

유용한 항등식은 $f(x^k) = \dfrac{k \ln x}{x^k}$이다. 이로부터

$$f(a) = \frac{\frac{1}{3}\ln 3}{a} = \frac{f(3)}{a}, \qquad f(8) = \frac{3\ln 2}{8} = \frac{3}{4}f(2), \qquad f(2\sqrt{2}) = \frac{\frac{3}{2}\ln 2}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}f(2).$$

를 얻는다. 소문항 (iv)에서 $f(3) < f(2\sqrt{2})$이다. $a > 0$으로 나누면

$$f(a) = \frac{f(3)}{a} < \frac{f(2\sqrt{2})}{a} = \frac{3f(2)}{2\sqrt{2}\,a}.$$

이다. 마지막으로, 양변을 여섯제곱하면 $9 > 8$이 되므로 $a = 3^{1/3} > 2^{1/2} = \sqrt{2}$이다. 따라서 $2\sqrt{2}\,a > 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 4$이고, $f(2) > 0$이므로

$$f(a) < \frac{3f(2)}{2\sqrt{2}\,a} < \frac{3f(2)}{4} = f(8).$$

이다. 그러므로 $f(8) > f(a)$이고, 위의 변환에 의해 이는 $8^a > a^8$을 뜻한다. 즉 더 큰 쪽은 $8^{\sqrt[3]{3}}$이다.

검산

수치로 확인하면 $3^\pi \approx 31.54$ 대 $\pi^3 \approx 31.01$, $\left(\frac{9}{4}\right)^{\sqrt{5}} \approx 6.131$ 대 $\sqrt{5}^{9/4} \approx 6.114$, $x = 1.5$일 때 $1.5^{3.5} \approx 4.13$ 대 $3.5^{1.5} \approx 6.55$, $9^{\sqrt{2}} \approx 22.36$ 대 $\sqrt{2}^9 \approx 22.63$, 그리고 $8^{\sqrt[3]{3}} \approx 20.07$ 대 $\sqrt[3]{3}^8 \approx 18.72$이다. 모두 위의 결론과 일치한다. (ii)와 (iv)에서는 차이가 작은데, 바로 그 때문에 대략적인 어림이 아니라 그래프를 이용한 논증이 필요하다. 소문항 (iii)을 $(1, 2)$의 무작위 점 10^5개에서 컴퓨터로 확인한 결과 예외는 없었다.

흔한 실수

- e의 서로 반대쪽에 있는 두 점에서의 f 값을 마치 f가 단조(monotonic)인 것처럼 비교하는 것. (iii)과 (v)에서는 징검다리가 반드시 필요하다.
- $b\ln a > a\ln b$를 ab로 나누어도 부등호 방향이 유지되는 것은 오직 $ab > 0$이기 때문이라는 점을 잊는 것.
- (ii)(b)에서 $\frac{9}{4}$와 $\sqrt{5}$ 중 어느 쪽이 더 큰지, 또는 둘 다 e보다 작다는 것을 정당화하지 않는 것.

STEP 너머

$a \neq b$인 방정식 $a^b = b^a$는 정확히 $f(a) = f(b)$이며, $0 < c < 1/\mathrm{e}$인 모든 수평선 $y = c$는 그래프와 두 번 만난다. $a < b$인 해는 $t > 0$에 대하여 $a = (1 + \frac{1}{t})^t$, $b = (1 + \frac{1}{t})^{t+1}$로 매

개변수화(parametrise)할 수 있다. $t = 1$로 두면 $(2, 4)$를 얻는데, 이는 이러한 성질을 갖는 유일한 양의 정수 쌍이다. $t \to \infty$일 때 두 값은 모두 e로 수렴(converge)하며, 이는 대학 1학년 해석학(analysis)의 대표적인 극한 중 하나이다. 이와 같은 논증의 바탕에 있는 단조성과 평균값 정리(mean value theorem)를 엄밀하게 다룬 내용은 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 참고하라.

풀이

STEP II 2025, 문제 4

순수수학 • 바닥 함수 항등식

STEP II 2025, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

핵심 아이디어

모든 것은 한 가지 사실에 바탕을 둔다. $\lfloor x \rfloor = m$이라는 것은 정확히 m이 $m \leq x < m+1$을 만족하는 정수라는 뜻이다. 소문항 (i)은 정수만큼의 평행이동이 바닥함수(floor function)를 그대로 통과한다는 것을 말한다. 이를 이용하면 f_n이 주기(period) $\frac{1}{n}$인 주기함수(periodic function)임을 알 수 있으므로, 짧은 구간 하나에서만 함수를 살펴보면 된다. 그 구간에서는 모든 항을 쉽게 계산할 수 있다. 소문항 (iii)은 사실 $n = 2$인 경우가 모습을 바꾼 것이며, 이 덕분에 무한급수가 연쇄적으로 소거(telescoping)된다.

풀이

소문항 (i)

$m = \lfloor x \rfloor$라 하면 m은 정수이고 $m \leq x < m+1$이다. 여기에 정수 n을 더하면

$$m + n \leq x + n < (m+n) + 1.$$

$m+n$은 정수이므로 $x+n$을 넘지 않는 가장 큰 정수이다. 따라서 $\lfloor x+n \rfloor = m+n = \lfloor x \rfloor + n$이며, 이것이 증명하려던 것이다.

소문항 (ii)(a)

$\mathrm{f}_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor - \lfloor nx \rfloor$로 쓰자. x를 $x + \frac{1}{n}$으로 바꾸면 합의 각 항이 한 칸씩 밀린다.

$$\mathrm{f}_n\left(x + \tfrac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor x + \tfrac{k}{n} \right\rfloor - \lfloor nx + 1 \rfloor.$$

합의 마지막 항은 $\lfloor x+1\rfloor = \lfloor x\rfloor + 1$이고, $\lfloor nx+1\rfloor = \lfloor nx\rfloor + 1$이다. 둘 다 소문항 (i)에서 $n=1$로 둔 것이다. 따라서

$$\mathrm{f}_n\left(x+\tfrac{1}{n}\right) = \lfloor x\rfloor + 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left\lfloor x+\tfrac{k}{n}\right\rfloor - \lfloor nx\rfloor - 1 = \mathrm{f}_n(x).$$

소문항 (ii)(b)

$0 \le t < \frac{1}{n}$이라 하자. $0 \le k \le n-1$이면

$$0 \le t + \tfrac{k}{n} < \tfrac{1}{n} + \tfrac{n-1}{n} = 1,$$

이므로 $\left\lfloor t+\frac{k}{n}\right\rfloor = 0$이다. 또한 $0 \le nt < 1$이므로 $\lfloor nt\rfloor = 0$이다. 모든 항이 0이므로 $\mathrm{f}_n(t) = 0$이다.

소문항 (ii)(c)

> **생각해 보기** (a)에서는 $\frac{1}{n}$만큼 위로 올라가는 것만 할 수 있다. $[0, \frac{1}{n})$보다 아래에 있는 x에는 어떻게 닿을 수 있을까?

점 $x-\frac{1}{n}$에서 (a)를 적용하면 $\mathrm{f}_n(x) = \mathrm{f}_n\left(x-\frac{1}{n}\right)$을 얻으므로, 위로뿐 아니라 아래로도 이동할 수 있다. 수학적 귀납법(induction)에 의해, 양수이든 음수이든 모든 정수 m에 대하여 $\mathrm{f}_n\left(x+\frac{m}{n}\right) = \mathrm{f}_n(x)$이다.

이제 임의의 실수 x를 잡고 $m = \lfloor nx\rfloor$라 하면 $m \le nx < m+1$이다. $t = x - \frac{m}{n}$으로 두자. 양변을 $n>0$으로 나누면 $0 \le t < \frac{1}{n}$이다. 따라서 (b)에 의해

$$\mathrm{f}_n(x) = \mathrm{f}_n\left(t+\tfrac{m}{n}\right) = \mathrm{f}_n(t) = 0$$

이다. 그러므로 모든 x에 대하여 $\mathrm{f}_n(x) = 0$이며, 이는 다음 항등식(identity)이다.

$$\lfloor x\rfloor + \left\lfloor x+\tfrac{1}{n}\right\rfloor + \cdots + \left\lfloor x+\tfrac{n-1}{n}\right\rfloor = \lfloor nx\rfloor.$$

소문항 (iii)(a)

(ii)(c)에서 $n=2$로 두고 $\frac{x}{2}$에서 값을 구하면

$$0 = \mathrm{f}_2\left(\tfrac{x}{2}\right) = \left\lfloor \tfrac{x}{2}\right\rfloor + \left\lfloor \tfrac{x}{2}+\tfrac{1}{2}\right\rfloor - \left\lfloor 2\cdot\tfrac{x}{2}\right\rfloor,$$

이고, 이를 정리하면 $\left\lfloor \frac{x}{2}\right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2}\right\rfloor = \lfloor x\rfloor$이다.

소문항 (iii)(b)

? **생각해 보기** $+1$ 하나만 들어 있는 (iii)(a)가 어떻게 $\left\lfloor \frac{x+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor$ 항을 다루는 데 도움이 될까?

분자와 분모를 2^k로 나눈다. $y = x/2^k$라 하면, (iii)(a)에서 x 대신 y를 써서

$$\left\lfloor \frac{x+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{y+1}{2} \right\rfloor = \lfloor y \rfloor - \left\lfloor \frac{y}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2^{k+1}} \right\rfloor,$$

을 얻는다. 따라서 $k = 0, 1, \ldots, K$에 대한 항들의 합은 연쇄적으로 소거된다.

$$S_K = \sum_{k=0}^{K} \left\lfloor \frac{x+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2^{K+1}} \right\rfloor.$$

$K \to \infty$일 때 $x/2^{K+1} \to 0$이며, 답은 이 값이 0의 어느 쪽에서 다가가는지에 따라 달라진다.

- $x \geq 0$인 경우: $2^{K+1} > x$가 되는 순간부터 $0 \leq x/2^{K+1} < 1$이므로 마지막 바닥값은 0이고, 그 뒤로는 항상 $S_K = \lfloor x \rfloor$이다.
- $x < 0$인 경우: $2^{K+1} \geq -x$가 되는 순간부터 $-1 \leq x/2^{K+1} < 0$이므로 마지막 바닥값은 -1이고, 그 뒤로는 항상 $S_K = \lfloor x \rfloor + 1$이다.

어느 경우든 0이 아닌 항은 유한 개뿐이므로, 무한급수의 합은

$$\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+2}{2^2} \right\rfloor + \cdots = \begin{cases} \lfloor x \rfloor, & x \geq 0, \\ \lfloor x \rfloor + 1, & x < 0. \end{cases}$$

이다. 음이 아닌 정수 x에 대해서는 합이 그냥 x이다.

검산

$x = 7$을 넣어 보자. 항들은 $\lfloor 4 \rfloor = 4$, $\lfloor \frac{9}{4} \rfloor = 2$, $\lfloor \frac{11}{8} \rfloor = 1$, $\lfloor \frac{15}{16} \rfloor = 0$이고, 그 뒤의 항은 모두 0이다. 합은 $7 = \lfloor 7 \rfloor$이다. $x = -\frac{5}{2}$를 넣으면 항들은 $\lfloor -\frac{3}{4} \rfloor = -1$, $\lfloor -\frac{1}{8} \rfloor = -1$, $\lfloor \frac{3}{16} \rfloor = 0, \cdots$이다. 합은 $-2 = \lfloor -\frac{5}{2} \rfloor + 1$이며, 음수인 경우가 실제로 다르다는 것을 확인해 준다. (ii)에 대해서는 $n = 3$, $x = 1.5$일 때 $1 + 1 + 2 = 4 = \lfloor 4.5 \rfloor$이다. 무작위로 고른 유리수 x 2만 개와 $1 \leq n \leq 30$인 값들로 컴퓨터 검산을 해 본 결과, 문제의 모든 항등식과 연쇄 소거된 부분합이 모두 성립함을 확인하였다.

흔한 실수

- (ii)(c)에서 (a)를 위로 올라가는 데에만 사용하는 것. 이렇게 하면 $x \geq 0$인 경우는 다루지만 음수 x에 대해서는 아무것도 말해 주지 않는다.

- (iii)(b)에서 모든 x에 대해 $\lfloor x/2^{K+1} \rfloor \to 0$이라고 가정하는 것. 음수 x에 대해서는 이 값이 0이 아니라 -1로 고정된다.
- a와 b가 모두 정수가 아닌데 $\lfloor a+b \rfloor = \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor$라고 쓰는 것. 소문항 (i)이 바로 이것이 허용되는 경우이다.

STEP 너머

(ii)(c)의 항등식은 에르미트 항등식(Hermite's identity)이다. 이것은 초등 정수론(elementary number theory)의 핵심을 이루는 바닥함수 관련 결과들 가운데 하나이며, 그런 예로 $N!$을 나누는 소수(prime) p의 거듭제곱 지수를 구하는 르장드르 공식(Legendre's formula) $\sum_{k\geq 1} \lfloor N/p^k \rfloor$이 있다. (iii)(b)의 합도 무언가를 세고 있다. 양의 정수 x에 대하여 k번째 항은 1부터 x까지의 정수 가운데 2^k로는 나누어떨어지지만 2^{k+1}로는 나누어떨어지지 않는 정수의 개수이며, 각 정수는 정확히 한 번씩 세어진다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 이러한 아이디어가 실제로 쓰이는 모습을 보기에 좋은 책이다.

풀이

STEP II 2025, 문제 5

순수수학 • 치환적분

STEP II 2025, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

핵심 아이디어

여기서 다루는 적분은 모두 0에서 ∞까지의 적분이며, $x = u^{-m}$ 꼴의 치환(substitution)은 $[0, \infty)$를 양 끝을 서로 바꾸면서 자기 자신으로 옮긴다. $\mathrm{d}x$에서 나오는 음의 부호가 적분 구간의 뒤바뀜을 되돌리므로, 결국 다시 $[0, \infty)$ 위의 적분을 얻는다. 새 피적분함수(integrand)가 원래 피적분함수에 음의 부호를 붙인 것이라면, 적분은 자기 자신의 음수와 같으므로 0이다. 새 피적분함수가 같은 꼴의 다른 피적분함수의 상수배라면, 실제로 값을 계산하지 않고도 두 적분 사이의 관계를 얻는다. 소문항 (iii)과 (iv)에서는 지수(exponent)를 일반적인 문자로 두고, u의 거듭제곱이 상쇄되도록 그 값을 정한다.

풀이

이 풀이 전체에서, $m > 0$일 때 $x = u^{-m}$이라 하면 $u \to \infty$일 때 $x \to 0$이고 $u \to 0$일 때 $x \to \infty$이므로

$$\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\infty^0 f(u^{-m})\left(-mu^{-m-1}\right)\mathrm{d}u = \int_0^\infty f(u^{-m})\,mu^{-m-1}\,\mathrm{d}u.$$

이다. 이 식을 $m = 1$, $m = 2$일 때 사용하고, 이어서 일반적인 m에 대해 사용한다.

소문항 (i)

주어진 적분을 I라 하고 $x = u^{-1}$로 치환하자. 그러면 적분 구간을 다시 순서대로 놓았을 때 $\mathrm{d}x \to u^{-2}\,\mathrm{d}u$가 된다. $u > 0$에 대하여

$$x(x^3+1) = \frac{1}{u}\cdot\frac{1+u^3}{u^3} = \frac{u^3+1}{u^4}, \qquad \text{이므로} \qquad \sqrt{x(x^3+1)} = \frac{\sqrt{u^3+1}}{u^2},$$

이고

$$\sqrt{x}-1=\frac{1}{\sqrt{u}}-1=\frac{1-\sqrt{u}}{\sqrt{u}}.$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}I&=\int_0^\infty \frac{1-\sqrt{u}}{\sqrt{u}}\cdot\frac{u^2}{\sqrt{u^3+1}}\cdot\frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u=\int_0^\infty \frac{1-\sqrt{u}}{\sqrt{u(u^3+1)}}\,\mathrm{d}u\\&=-\int_0^\infty \frac{\sqrt{u}-1}{\sqrt{u(u^3+1)}}\,\mathrm{d}u=-I.\end{aligned}$$

마지막 적분은 변수의 이름이 중요하지 않으므로 다시 I이다. 그러므로 $2I=0$이고, 요구한 대로 $I=0$이다.

이것이 피적분함수가 0이라는 뜻은 아님에 주의하자. 피적분함수는 $(0,1)$에서 음수이고 $(1,\infty)$에서 양수이며, 치환이 두 넓이를 정확히 맞대응시킨다.

소문항 (ii)

이번에는 $x=u^{-2}$로 치환하자. 그러면 적분 구간의 순서를 바로잡은 뒤 $\mathrm{d}x\to 2u^{-3}\,\mathrm{d}u$가 된다. $u>0$에 대하여

$$x^3+1=u^{-6}+1=\frac{1+u^6}{u^6},\qquad \sqrt{x^3+1}=\frac{\sqrt{u^6+1}}{u^3}.$$

이다. 따라서

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+1}}=\int_0^\infty \frac{u^3}{\sqrt{u^6+1}}\cdot\frac{2}{u^3}\,\mathrm{d}u=2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^6+1}},$$

이고, u를 x로 바꾸어 쓰면 이것이 요구한 결과이다.

소문항 (iii)

소문항 (i)은 $s=1$, $p=3$, $r=\frac{1}{2}$인 경우이므로, 같은 방법을 문자로 되풀이한다. 주어진 적분을 J라 하고 $x=u^{-1}$로 치환하면

$$x^s(x^p+1)=u^{-s}\cdot\frac{1+u^p}{u^p}=\frac{u^p+1}{u^{s+p}},\qquad \text{이므로}\qquad \sqrt{x^s(x^p+1)}=u^{-(s+p)/2}\sqrt{u^p+1},$$

이고, 또한 $x^r-1=(1-u^r)/u^r$이다. 따라서

$$J=\int_0^\infty \frac{(1-u^r)\,u^{-r}\,u^{(s+p)/2}\,u^{-2}}{\sqrt{u^p+1}}\,\mathrm{d}u=-\int_0^\infty \frac{(u^r-1)\,u^{(s+p)/2-r-2}}{\sqrt{u^p+1}}\,\mathrm{d}u.$$

이것을 다음과 같이 쓴 J 자신과 비교하자.

$$J=\int_0^\infty \frac{(u^r-1)\,u^{-s/2}}{\sqrt{u^p+1}}\,\mathrm{d}u.$$

생각해 보기 무언가를 계산하지 않고 u의 거듭제곱만 맞추어도 충분한 이유는 무엇인가?

u의 두 거듭제곱이 같으면 치환에 의해 J가 $-J$로 바뀌고, 소문항 (i)에서와 똑같이 $J = 0$이 된다. 따라서

$$\frac{s+p}{2} - r - 2 = -\frac{s}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad r = s + \frac{p}{2} - 2.$$

이어야 한다. 이 r의 값에 대하여 $J = -J$이므로 $J = 0$이다. (문제에서 p와 s는 적분이 수렴(converge)하도록 주어진다고 했으며, $J = -J \Rightarrow J = 0$이라는 논증에 필요한 것은 그것뿐이다.) 검산으로, $s = 1$, $p = 3$이면 $r = 1 + \frac{3}{2} - 2 = \frac{1}{2}$이고, 이것은 소문항 (i)이다.

소문항 (iv)

소문항 (ii)는 $k = 2$, $p = 3$, $q = 6$인 경우였고, 이는 $x = u^{-2}$에서 나왔다. 그래서 $m > 0$에 대하여 $x = u^{-m}$으로 치환해 보면 $\mathrm{d}x \to mu^{-m-1}\,\mathrm{d}u$이다. $x^p + 1 = (1 + u^{mp})/u^{mp}$이므로

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^p+1}} = m\int_0^\infty \frac{u^{mp/2}\,u^{-m-1}}{\sqrt{u^{mp}+1}}\,\mathrm{d}u.$$

이다. 남는 u의 거듭제곱은

$$\frac{mp}{2} = m + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad p = 2 + \frac{2}{m},$$

일 때 사라지고, 이때 우변은 $q = mp = 2m + 2$에 대하여 $m\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^q+1}}$이다.

이제 $m = k$로 두자. 임의의 $k > 0$에 대하여

$$p = 2 + \frac{2}{k}, \qquad q = 2k + 2$$

로 택하면

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^p+1}} = k\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^q+1}}.$$

이다. $k > 0$이므로 두 지수는 모두 2보다 크다. 큰 x에서 피적분함수는 $x^{-p/2}$처럼 행동하므로, 이것이 바로 이 적분들이 수렴할 조건이다. 따라서 우리가 얻은 관계식의 적분들은 존재한다. $k = 2$이면 소문항 (ii)의 $p = 3$, $q = 6$을 다시 얻고, $k = 1$이면 자명한 경우인 $p = q = 4$가 된다.

검산

- 수치적으로 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+1}} \approx 2.8044$이고 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^6+1}} \approx 1.4022$이므로, 소문항 (ii)의 말대로 정확히 절반이다.

- 소문항 (i)의 적분은 기계 정밀도(machine precision) 수준에서 0으로 계산된다. 음의 기여는 대부분 $x = 0$ 근처에서 나오고 양의 기여는 $(1, \infty)$에 얇게 퍼져 있는데도 그렇다.
- 조건을 만족하는 임의의 p와 s에 대하여, $r = s + \frac{p}{2} - 2$일 때 소문항 (iii)의 적분을 컴퓨터로 확인하면 0이 나왔다. r을 0.3만큼 바꾸면 분명히 0이 아닌 값이 나왔다.
- $k = \frac{1}{2}$이면 $(p = 6, q = 3)$ 소문항 (iv)의 관계식은 당연히 그래야 하듯이 소문항 (ii)를 거꾸로 읽은 것이 된다.

흔한 실수

- 치환하면 적분 구간이 뒤바뀐다는 사실을 잊는 것. $\mathrm{d}x$에서 나오는 음의 부호와 뒤바뀐 적분 구간이 서로 상쇄되는데, 둘 중 하나를 빠뜨리면 소문항 (i)에서 부호가 틀린다.
- 소문항 (iii)에서 일반적인 거듭제곱을 다룰 때 $u^{-s/2}$ 대신 $\sqrt{u^{-s}} = u^{-s}/2$라고 쓰는 것.
- 소문항 (iv)에서 모든 $k > 0$에 대한 함수로 p와 q를 제시하지 않고, 특정한 k에 대한 순서쌍 (p, q) 하나만 찾는 것.

STEP 너머

이 적분들은 모두 닫힌 꼴(closed form)로 계산할 수 있다. $t = x^p/(1 + x^p)$로 치환하면 $\int_0^\infty (1 + x^p)^{-1/2}\,\mathrm{d}x$는 $\frac{1}{p}\,\mathrm{B}(\frac{1}{p}, \frac{1}{2} - \frac{1}{p})$가 되는데, 여기서 B는 오일러(Euler)의 베타 함수(Beta function)이다. 이것을 감마 함수(Gamma function)와 결합하면 소문항 (iv)의 비를 명시적으로 얻는다. 적분을 자기 자신의 음수로 보내는 대칭 $x \mapsto 1/x$를 이용하는 기법은 해석학(analysis)과 복소 경로 적분(contour integration)에서 거듭 등장한다. 이상적분(improper integral)을 엄밀하게 다루는 내용, 특히 여기서 건너뛰어도 되었던 수렴 문제까지 보려면 Abbott, *Understanding Analysis*를 참고하라. STEP 스타일의 치환 기법을 더 많이 보려면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*를 참고하라.

풀이

STEP II 2025, 문제 6

순수수학 • 포물선에 접하는 원

STEP II 2025, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

핵심 아이디어

여기서 다루는 원은 모두 중심이 y축 위에 있으므로 모든 것이 x에 대하여 대칭(symmetric)이고, "두 점에서 접한다"는 것은 $x_0 \neq 0$인 대칭인 한 쌍의 점 $(\pm x_0, y_0)$에서 접한다는 뜻이다. 접함(tangency)은 법선(normal)이 일치한다고 표현하면 가장 쉽게 다룰 수 있다. 즉 접점(point of contact)으로 가는 반지름이 다른 곡선의 법선 방향이어야 한다. 소문항 (i)과 (ii)에서 각각 r^2을 중심의 높이 a에 대한 식으로 얻고 나면, 소문항 (iii)은 두 근이 a_1과 a_2인 a에 대한 이차방정식(quadratic)에 관한 문제가 된다.

풀이

소문항 (i)

원이 포물선(parabola)에 $x_0 \neq 0$인 점 $P = (x_0, y_0)$에서 접한다고 하자. (포물선은 $x = 0$과 원점에서만 만나므로 서로 다른 두 접점이 모두 축 위에 있을 수는 없다. 또한 대칭성에 의해 (x_0, y_0)가 접점이면 $(-x_0, y_0)$도 접점이다.)

P에서 원의 법선은 반지름 방향, 즉 $(x_0,\, y_0 - a)$ 방향이다. 포물선을 $2ky - x^2 = 0$으로 쓰면, 그 법선은 기울기 벡터(gradient) $(-2x_0,\, 2k)$ 방향이다. 접한다는 것은 이 두 벡터가 평행하다는 뜻이다:

$$x_0 \cdot 2k - (y_0 - a)(-2x_0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2x_0\,(k + y_0 - a) = 0.$$

$x_0 \neq 0$이므로 $y_0 = a - k$를 얻는다. 그러면 P는 포물선 위에 있으므로 $x_0^2 = 2ky_0 = 2k(a - k)$이고, P는 원 위에 있으므로

$$r^2 = x_0^2 + (y_0 - a)^2 = 2k(a - k) + k^2 = k(2a - k),$$

이 되어 원하는 결과가 성립한다.

역(converse)으로, $a > k > 0$이고 $r^2 = k(2a-k)$라 하자. $y_0 = a-k > 0$, $x_0 = \sqrt{2k(a-k)} > 0$으로 놓는다. 두 점 $(\pm x_0, y_0)$는 만든 방법에 의해 포물선 위에 있고, $x_0^2 + (y_0-a)^2 = 2k(a-k)+k^2 = r^2$이므로 원 위에도 있다. 이 각 점에서 법선 $(\pm x_0, -k)$와 $(\mp 2x_0, 2k)$는 평행하므로, 두 곡선은 그 점에서 접선을 공유한다. 따라서 $x_0 \neq 0$이므로 원은 포물선과 서로 다른 두 점에서 접한다.

(검증 삼아, $x^2 = 2ky$를 원의 방정식에 대입하면 $y^2 - 2(a-k)y + (a-k)^2 = 0$, 즉 $(y-(a-k))^2 = 0$을 얻는다. 이는 중근(repeated root)이며, 접함을 나타내는 대수적 표지이다.)

소문항 (ii)

직선 $y = c + x$, 즉 $x - y + c = 0$은 중심 $(0, a)$로부터의 거리가 r과 같을 때, 그리고 그때에만 원에 접한다:

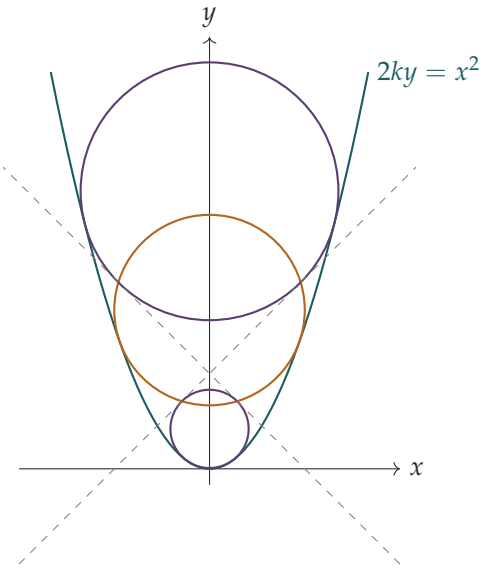
$$r = \frac{|0 - a + c|}{\sqrt{2}} \quad \Longrightarrow \quad r^2 = \frac{(a-c)^2}{2}.$$

직선 $y = c - x$는 y축에 대하여 대칭인 직선이므로 같은 조건을 준다.

접점은 $(0, a)$에서 내린 수선의 발(foot of the perpendicular)이다. 반지름은 직선에 수직이므로 방향이 $(1, -1)$이다. $(0, a)$에서 $t(1, -1)$만큼 이동하여 $y = c + x$ 위에 도달한다고 하면 $a - t = c + t$이므로 $t = \frac{a-c}{2}$이다. $y = c + x$와의 접점은

$$\left(\tfrac{a-c}{2},\ \tfrac{a+c}{2}\right),$$

이고, 대칭성에 의해 $y = c - x$와의 접점은 $\left(-\tfrac{a-c}{2},\ \tfrac{a+c}{2}\right)$이다.



$k = 1, c = 3$인 경우: 포물선, 이에 접하는 두 원 C_1, C_2(자주색)와 직선 $y = 3 \pm x$(점선), 그리고 소문항 $(iii)(b)$의 원(호박색).

소문항 (iii)(a)

각 원은 포물선과 두 점에서 접하므로 소문항 (i)에 의해 $r_i^2 = k(2a_i - k)$이다. 또 각 원은 직선 $y = c \pm x$에 접하므로 소문항 (ii)에 의해 $r_i^2 = \frac{1}{2}(a_i - c)^2$이다. 두 식을 같게 놓으면

$$(a_i - c)^2 = 2k(2a_i - k) \quad \Longrightarrow \quad a_i^2 - 2(c + 2k)\, a_i + c^2 + 2k^2 = 0.$$

따라서 a_1과 a_2는 모두 이차방정식 $a^2 - 2(c + 2k)a + c^2 + 2k^2 = 0$을 만족한다. $a_1 \neq a_2$이므로 이 둘이 이 방정식의 두 근(root)이고, 따라서

$$a_1 + a_2 = 2c + 4k, \qquad a_1 a_2 = c^2 + 2k^2.$$

이다. 그러면

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 &= (a_1 + a_2)^2 - 2a_1 a_2 \\ &= 4c^2 + 16kc + 16k^2 - 2c^2 - 4k^2 \\ &= 2c^2 + 16kc + 12k^2, \end{aligned}$$

이므로 (a)가 증명된다.

소문항 (iii)(b)

소문항 (ii)에 의해 C_i 위의 접점은 $\left(\pm\frac{a_i - c}{2},\ \frac{a_i + c}{2}\right)$이다. $u_i = a_i - c$로 쓰면 더 깔끔하다. 그러면 접점은 $\left(\pm\frac{u_i}{2},\ c + \frac{u_i}{2}\right)$이다.

> **?** **생각해 보기** 네 점을 지나는 원 하나를 찾아야 하는데, 미지수는 d와 p 두 개뿐이다. a_1과 a_2를 직접 구하지 않고 어떻게 이 값들을 결정할 수 있을까?

네 점은 대칭인 두 쌍이고, 중심이 y축 위에 있는 원은 모두 대칭이므로, $u = u_1$과 $u = u_2$에 대해 원이 $\left(\frac{u}{2}, c + \frac{u}{2}\right)$를 지나게 하면 충분하다. 이 조건은

$$\frac{u^2}{4} + \left(c - d + \frac{u}{2}\right)^2 = p^2 \quad \Longleftrightarrow \quad u^2 + 2(c - d)\, u + 2(c - d)^2 - 2p^2 = 0. \qquad (*)$$

이다. 한편 (a)의 이차방정식에 $a = u + c$를 대입하면

$$u^2 - 4k\, u + 2k^2 - 4kc = 0, \qquad (**)$$

를 얻는데, 이 방정식의 근이 바로 u_1과 u_2이며, $a_1 \neq a_2$이므로 이 둘은 서로 다르다. 원이 네 점을 모두 지나는 것은 u_1과 u_2가 모두 $(*)$의 근일 때, 그리고 그때에만이다. 서로 다른 두 근

이 같은, 최고차항의 계수가 1인 이차식(monic quadratic) 두 개는 서로 같으므로, $(**)$와 계수를 비교하면

$$2(c-d) = -4k \quad \Longrightarrow \quad d = c + 2k,$$

이고, 그러면 $2(c-d)^2 - 2p^2 = 8k^2 - 2p^2 = 2k^2 - 4kc$이므로

$$p^2 = 3k^2 + 2kc = k(3k + 2c).$$

이다.

소문항 (iii)(c)

소문항 (i)의 역을 이용한다. $d = c + 2k$이면

$$k(2d - k) = k(2c + 3k) = p^2,$$

이므로, 이 원은 a 대신 d를 넣은 $r^2 = k(2a - k)$의 꼴과 정확히 같다. 남은 것은 $d > k$임을 확인하는 일이다.

> **생각해 보기** (a)나 (b) 어디에서도 부등식이 언급되지 않았는데, $d > k$ 같은 부등식은 어디에서 나오는가?

이 부등식은 C_1과 C_2가 실제로 포물선과 두 점에서 접한다는 사실에서 나온다. 소문항 (i)에서 두 점에서 접한다는 조건 때문에 접점은 $y_0 = a - k$이고 $x_0^2 = 2k(a-k) > 0 (x_0 \neq 0$이므로)이어야 했으므로, $a_1 > k$이고 $a_2 > k$이다. 이 둘을 더하고 (a)를 이용하면

$$2c + 4k = a_1 + a_2 > 2k \quad \Longrightarrow \quad c > -k \quad \Longrightarrow \quad d = c + 2k > k.$$

따라서 $d > k > 0$이고 $p^2 = k(2d - k)$이므로, 소문항 (i)의 후반부에 의해 원 $x^2 + (y-d)^2 = p^2$은 포물선 $2ky = x^2$과 두 점, 즉 $\left(\pm\sqrt{2k(c+k)},\ c+k\right)$에서 접한다.

검산

$k = 1$, $c = 3$으로 놓자(위의 그림). (a)의 이차방정식은 $a^2 - 10a + 11 = 0$이므로 $a = 5 \pm \sqrt{14} \approx 8.742$와 1.258이다. 두 값의 합은 $10 = 2c + 4k$이고 제곱의 합은 $78 = 2 \cdot 9 + 16 \cdot 3 + 12$이다. (b)에서 $d = 5$, $p^2 = 9$를 얻는다. 원 $x^2 + (y-5)^2 = 9$는 $2y = x^2$과 $2y + (y-5)^2 = 9$, 즉 $(y-4)^2 = 0$인 곳에서 만난다. 이는 $y = 4$에서의 중근이므로, (c)의 예측대로 원은 $(\pm 2\sqrt{2}, 4)$에서 접한다. 네 접점 각각, 예를 들어 $\left(\frac{\sqrt{14}+2}{2}, \frac{\sqrt{14}+8}{2}\right)$은 $(0,5)$로부터 거리가 3이다. 또한 조건을 만족하는 임의의 k와 c 수백 쌍에 대해 컴퓨터로 모든 결과를 확인하였다.

흔한 실수

- (i)에서 접점이 $x_0 \neq 0$을 만족한다는 사실을 잊는 것. 이 사실 덕분에 x_0으로 나눌 수 있고, 또 이 사실에서 $a > k$가 나온다.
- (iii)(a)에서 $r^2 = k(2a - k)$만, 또는 $r^2 = \frac{1}{2}(a - c)^2$만 사용하는 것. a에 대한 이차방정식은 두 조건이 동시에 성립해야 한다는 데서 나온다.
- (iii)(c)에서 $p^2 = k(2d - k)$는 확인하고 $d > k$는 확인하지 않는 것. 이것이 없으면 그 "원"은 원점에서만 접하거나 아예 접하지 않을 수도 있다.

STEP 너머

소문항 (i)에 의해, 중심이 y축 위에 있고 포물선과 두 번 접하는 원은 $x^2 + y^2 - k^2 - 2a(y - k) = 0$이다. 이는 매개변수 a에 대해 **일차**(*linear*)인 방정식이다. 이러한 원들의 모임을 원다발(pencil of circles) 또는 공축원계(coaxal system)라 하며, C_1, C_2와 (b)의 원은 모두 여기에 속한다. 법선을 일치시키는 것은 곡선 사이의 **접촉**(*contact*)이라는 개념으로 나아가는 첫 걸음이다. 곡선과 2차까지 접하는 원이 그 곡선의 곡률원(circle of curvature)이며, 곡선의 미분기하학(differential geometry) 첫 강의에서 만나게 된다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제)에는 이러한 정신의 STEP 스타일 좌표기하 문제가 훨씬 더 많이 실려 있다.

풀이

STEP II 2025, 문제 7

순수수학 • 비선형 미분방정식

> **STEP II 2025, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

핵심 아이디어

우변 $2x\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$는 정확히 x^2을 t에 대해 미분한 도함수(derivative)이므로, 방정식을 한 번 적분하면 곧바로 1계 방정식(first-order equation) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2 + C$를 얻는다. 초기 조건(initial condition)이 C를 결정하며, 세 소문항은 C의 세 가지 가능한 부호, 즉 0, 양수, 음수에 각각 해당한다. 이렇게 얻은 각 1계 방정식은 변수분리(separation of variables)로 풀 수 있고, 입자의 움직임은 그 식에서, 또는 아예 $x^2 + C$의 부호만 보고도 읽어 낼 수 있다.

풀이

한 번 적분하기

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x^2\right) = 2x\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$이므로, 주어진 방정식은

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x^2\right), \qquad \text{따라서} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2 + C$$

를 뜻한다. 여기서 C는 상수이다. $t = 0$일 때 $x = a$이므로, C는 초기 속도에서 a^2을 뺀 값이다. 세 소문항에서 각각 $C = 0$, $C = p^2$, $C = -q^2$이다.

소문항 (i)

이 경우 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2$이다. $x \neq 0$이면 속도가 양수이므로, x는 $a > 0$에서부터 증가하고 결코 0에 도달하지 않는다. 따라서 x^2으로 나누어 변수를 분리할 수 있다.

$$\int_a^x \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = t \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{a} - \frac{1}{x} = t \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{a}{1 - at}.$$

t가 0에서 $\frac{1}{a}$을 향해 증가함에 따라 입자는 양의 방향으로 점점 더 빠르게 움직이며(속도가 x^2이다), $t \to \frac{1}{a}$일 때 $x \to \infty$이다. 입자는 유한한 시간 $\frac{1}{a}$ 안에 무한대로 달아나며, 그 시간 이후로는 해가 존재하지 않는다.

소문항 (ii)

이제 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2 + p^2$이고 이는 항상 양수이므로, 변수를 분리할 수 있다.

$$\int_a^x \frac{\mathrm{d}u}{u^2+p^2} = t \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{p}\left(\arctan\frac{x}{p} - \arctan\frac{a}{p}\right) = t.$$

$\alpha = \arctan\dfrac{a}{p}$로 놓으면, $a, p > 0$이므로 이 값은 $(0, \frac{\pi}{2})$에 속하고,

$$x = p\tan\left(pt+\alpha\right).$$

이 식은 $pt + \alpha < \frac{\pi}{2}$인 동안 성립한다. 입자는 이번에도 양의 방향으로 속력을 높여 가며 움직이고, $pt + \alpha \to \frac{\pi}{2}$일 때, 즉

$$t \to \frac{1}{p}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{a}{p}\right) = \frac{1}{p}\arctan\frac{p}{a},$$

일 때 $x \to \infty$이다. 여기서 $\theta > 0$일 때 $\arctan\theta + \arctan\frac{1}{\theta} = \frac{\pi}{2}$임을 이용하였다. 따라서 입자는 유한한 시간 안에 무한대로 달아나며, 초기 속도가 더 크므로 예상대로 (i)보다 더 빨리 달아난다.

소문항 (iii)

이제

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2 - q^2 = (x-q)(x+q).$$

$x = \pm q$에서 속도가 0이므로, 이 두 위치는 평형점(equilibrium)이다. $x^2 - q^2$의 부호만으로도 이미 전체 상황을 알 수 있다. 입자는 $x > q$일 때 오른쪽으로, $-q < x < q$일 때 왼쪽으로 움직인다. 따라서 답은 a와 q의 대소 관계에 따라 달라진다.

부분분수(partial fractions) $\dfrac{1}{x^2-q^2} = \dfrac{1}{2q}\left(\dfrac{1}{x-q} - \dfrac{1}{x+q}\right)$를 이용하여 변수를 분리하면

$$\frac{1}{2q}\ln\left|\frac{x-q}{x+q}\right| = t + \text{상수}.$$

양변에 지수함수를 취하고 $t = 0$에서 $x = a$라는 조건으로 상수를 정하면 다음을 예상할 수 있다.

$$\frac{x-q}{x+q} = Ke^{2qt}, \qquad K = \frac{a-q}{a+q}, \qquad \text{즉} \qquad x = q\,\frac{1+Ke^{2qt}}{1-Ke^{2qt}}.$$

모든 경우에 부호가 올바른지 확인하기 위해 이를 직접 검증하자. $E = Ke^{2qt}$로 놓으면 $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 2qE$이다. 그러면

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = q \cdot \frac{2\,\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}}{(1-E)^2} = \frac{4q^2E}{(1-E)^2}, \qquad x^2 - q^2 = q^2\,\frac{(1+E)^2 - (1-E)^2}{(1-E)^2} = \frac{4q^2E}{(1-E)^2},$$

이므로 두 식이 일치한다. $t = 0$에서 $1 + K = \frac{2a}{a+q}$, $1 - K = \frac{2q}{a+q}$이므로 $x = q \cdot \frac{a}{q} = a$이다. 따라서 $1 - E \neq 0$인 곳에서는 이 식이 해이다. $a > 0$이므로 $-1 < K < 1$임에 주목하자.

$a > q$인 경우. 이때 $0 < K < 1$이고 $E = Ke^{2qt}$는 K에서부터 증가한다. 입자는 양의 속도 $a^2 - q^2$으로 출발하여 양의 방향으로 점점 더 빠르게 움직인다. 분모 $1 - E$는 $e^{2qt} = \frac{1}{K}$일 때 0이 되므로

$$x \to \infty \quad \text{가 되는 것은} \quad t \to \frac{1}{2q}\ln\frac{a+q}{a-q}.$$

일 때이다. (i), (ii)에서와 마찬가지로 입자는 유한한 시간 안에 무한대로 달아난다.

$a = q$인 경우. 이때 $K = 0$이고 모든 t에 대해 $x = q = a$이다. 초기 속도가 0이고 가속도 $2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$도 0이므로, 입자는 $x = a$에 정지한 채로 머문다.

$0 < a < q$인 경우. 이때 $-1 < K < 0$이므로 $E < 0$이고, 분모 $1 - E > 1$은 결코 0이 되지 않는다. 따라서 해는 모든 $t \geq 0$에 대해 존재한다.

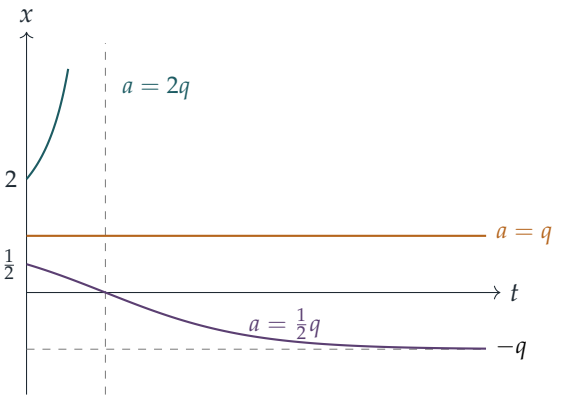
> **생각해 보기** 입자는 원점에서 멈추는가, 아니면 원점을 지나가는가? 그리고 결국 어디에 이르는가?

초기 속도 $a^2 - q^2$이 음수이므로 입자는 음의 방향으로 움직인다. 입자는 $E = -1$일 때, 즉 $t = \frac{1}{2q}\ln\frac{q+a}{q-a}$일 때 원점에 있으며, 그곳에서의 속도가 $-q^2 \neq 0$이므로 원점을 그대로 지나간다. $t \to \infty$일 때 $E \to -\infty$이고

$$x = q\,\frac{1+E}{1-E} \to -q.$$

이다. 전 과정에서 $|x| < q$이므로($E < 0$이면 $\frac{1+E}{1-E} \in (-1, 1)$이기 때문이다) 속도 $x^2 - q^2$은 계속 음수이다. 즉 입자는 꾸준히 왼쪽으로 움직이며 $x = -q$에 결코 도달하지 않은 채 그 값에 가까워진다. 입자의 속력 $q^2 - x^2$은 원점을 지날 때 최댓값 q^2이 되고, 그 뒤로는 점점 줄어 0에 가까워진다.

쌍곡선함수(hyperbolic function)로 나타내면 이 해들은 $a > q$일 때 $x = -q\coth\left(qt - \operatorname{arcoth}\frac{a}{q}\right)$, $a < q$일 때 $x = -q\tanh\left(qt - \operatorname{artanh}\frac{a}{q}\right)$이다. 아래 그림은 $q = 1$일 때 세 경우를 나타낸 것이다.



$a = 2q$와 $a = \frac{1}{2}q$에 대해 특별한 시각 $\frac{1}{2q}\ln 3$(점선으로 된 세로선)은 각각 폭발 시각과 원점을 지나는 시각이다.

검산

- (ii)에서 $p \to 0$으로 보내면 $p\tan(pt + \arctan\frac{a}{p}) \to \frac{a}{1-at}$이고 $\frac{1}{p}\arctan\frac{p}{a} \to \frac{1}{a}$이므로 (i)과 일치한다. $a > q$인 (iii)에서 $q \to 0$으로 보낼 때도 마찬가지이다.
- $x = \frac{a}{1-at}$를 미분하면 $\dot{x} = \frac{a^2}{(1-at)^2} = x^2$이고 $\ddot{x} = \frac{2a^3}{(1-at)^3} = 2x\dot{x}$이다.
- 원래의 2계 방정식을 수치적으로 한 단계씩 진행시켜 보면, 예를 들어 $a = 0.5, q = 1.4$일 때 $t = 1$에서 $x \approx -1.0814$, $t = 3$에서 $x \approx -1.3987$을 얻어 식과 일치하며, 예측한 대로 입자는 $t \approx 0.2669$에서 원점에 있다.

흔한 실수

- $2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$가 완전한 도함수라는 것을 알아차리지 못하고 $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$와 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ 같은 치환을 시도하는 것. 이 방법도 통하지만 시간이 더 걸린다.
- (iii)에서 로그 안의 절댓값을 빠뜨려 $a < q$일 때 K의 부호를 잘못 구하는 것.
- 평형 상태인 $a = q$인 경우를 놓치거나, 입자가 $-q$에 가까워질 뿐인데 "$-q$에서 멈춘다"고 말하는 것.

STEP 너머

여기서 본 유한 시간 폭발(finite-time blow-up)은 비선형(nonlinear) 방정식의 대표적인 특징이다. $\dot{x} = x^2$은 우변이 완벽하게 매끄러운데도 해가 제한된 시간 동안만 존재하는

데, 이런 일은 선형(linear) 방정식에서는 결코 일어나지 않는다. 소문항 (iii)은 위상선 분석(phase-line analysis)을 처음으로 맛보는 예이다. 평형점 $x = q$(불안정(unstable))와 $x = -q$(안정(stable))가 모든 운동을 결정하며, 아무것도 풀기 전에 $x^2 - q^2$의 부호만으로 운동을 예측할 수 있다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 해의 존재성과 유일성(existence and uniqueness)을 포함하여 이 두 가지 아이디어를 모두 다룬다.

풀이

STEP II 2025, 문제 8

순수수학 • 정수의 균형 분할

STEP II 2025, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

핵심 아이디어

집합의 모든 원소를 같은 양 c만큼 평행이동(shift)하면 그 합과 제곱합(sum of squares)은 통제된 방식으로 변한다. 변화량은 원소의 개수와 원소의 합에만 의존하고, (제곱의 경우) 그 밖의 것에는 의존하지 않는다. 따라서 크기가 같은 두 집합의 합과 제곱합이 이미 같다면, 각각의 복사본을 하나씩 평행이동한 뒤 서로 맞바꾸어 더 큰 균형 분할(balanced partition)을 만들 수 있다. 소문항 (ii)는 이 사실의 뒤에 있는 대수적 계산이고, 소문항 (iii)과 (iv)는 그것을 두 가지로 활용한 것이다.

풀이

소문항 (i)

$1, 2, \ldots, 8$의 합은 36이고 제곱의 합은 204이므로, 각 절반은 합이 18, 제곱합이 102여야 한다.

8을 B에 넣자. 그러면 B의 나머지 세 원소는 합이 10이고 제곱의 합이 $102 - 64 = 38$이어야 한다. 1부터 7까지의 서로 다른 수 세 개로 합이 10인 것은

$$\{1,2,7\},\ \{1,3,6\},\ \{1,4,5\},\ \{2,3,5\},$$

이고, 각각의 제곱합은 54, 46, 42, 38이다. $\{2,3,5\}$만 조건을 만족하므로

$$A = \{1,4,6,7\}, \qquad B = \{2,3,5,8\}.$$

검산: $1+4+6+7 = 18 = 2+3+5+8$이고 $1+16+36+49 = 102 = 4+9+25+64$이다. (이 탐색으로부터, A와 B를 맞바꾸는 것을 제외하면 네 개씩으로 나누는 균형 분할은 이것뿐임도 알 수 있다.)

소문항 (ii)

이항정리(binomial theorem)로 각 세제곱을 전개하면

$$\sum_{k=1}^{m}(c+b_k)^3 = mc^3 + 3c^2\sum_{k=1}^{m} b_k + 3c\sum_{k=1}^{m} b_k^2 + \sum_{k=1}^{m} b_k^3,$$

이고, b_k 대신 a_k를 넣어도 마찬가지이다. 따라서

$$\begin{aligned}&\left(\sum a_k^3 + \sum(c+b_k)^3\right) - \left(\sum b_k^3 + \sum(c+a_k)^3\right)\\ &\qquad = 3c^2\left(\sum b_k - \sum a_k\right) + 3c\left(\sum b_k^2 - \sum a_k^2\right),\end{aligned}$$

이다. mc^3 항들이 소거되고, 두 개씩 있는 $\sum a_k^3$과 $\sum b_k^3$도 소거되기 때문이다. 가정에 의해 두 괄호는 모두 0이므로, 모든 실수 c에 대해 양변이 같다. 이것이 증명하려던 것이다.

같은 전개를 한 차수 낮추어 하면

$$\sum a_k^2 + \sum(c+b_k)^2 - \sum b_k^2 - \sum(c+a_k)^2 = 2c\left(\sum b_k - \sum a_k\right) = 0,$$

을 얻고, 일차의 경우에는 $\sum a_k + \sum(c+b_k) = \sum b_k + \sum(c+a_k)$이다. 양변이 모두 $mc + \sum a_k + \sum b_k$와 같기 때문이다.

소문항 (iii)

(i)의 균형 분할을 택하여 a_k가 $1,4,6,7$을, b_k가 $2,3,5,8$을 차례로 지나게 하고, $c=8$로 두자. 그러면 $c+a_k$는 $9,12,14,15$를, $c+b_k$는 $10,11,13,16$을 지난다. 이제

$$A = \{1,4,6,7\}\cup\{10,11,13,16\}, \qquad B = \{2,3,5,8\}\cup\{9,12,14,15\}.$$

로 놓는다. $\{1,\dots,8\}$과 $\{9,\dots,16\}$이 각각 두 집합에 나뉘어 들어가므로, 두 집합은 서로소(disjoint)이고, 각각 원소가 8개이며, 합집합은 $\{1,2,\dots,16\}$이다.

> **생각해 보기** 왜 A의 평행이동한 복사본이 아니라 B의 평행이동한 복사본을 A에 넣을까?

그것이 바로 (ii)의 형태이기 때문이다. (ii)의 좌변은 $\sum a_k^3 + \sum(c+b_k)^3$으로, 우리가 만든 A의 세제곱합이고, 우변은 우리가 만든 B의 세제곱합이다. 따라서 $c=8$일 때의 (ii)로부터 세제곱합이 같다. (ii)의 끝에 있는 두 항등식으로부터 합과 제곱합도 같으므로, 이 분할은 균형 분할이기도 하다.

직접 계산하면, 두 절반 모두 합이 68, 제곱합이 748, 세제곱합이 9248이다.

소문항 (iv)

S의 원소를 $k = 0, 1, \ldots, 11$에 대해 $(n+k)^2$으로 쓰자. k 값들의 임의의 집합 K에 대해

$$\sum_{k\in K}(n+k)^2 = |K|\, n^2 + 2n\sum_{k\in K} k + \sum_{k\in K} k^2.$$

이다. 따라서 $\{0, 1, \ldots, 11\}$을 크기가 같고, 합이 같고, 제곱합이 같은 두 집합으로 나누면, 대응하는 제곱수들의 총합은 모든 n에 대해 같아진다.

주어진 $\{1, \ldots, 11\}$의 분할은 합이 같고(각각 33) 제곱합도 같지만(각각 253), 두 부분의 크기가 6과 5이다. 작은 쪽에 $k = 0$을 더하면 이 문제가 해결된다. 크기는 하나 늘어나고, 합과 제곱합에는 아무것도 더해지지 않기 때문이다. 그러므로

$$\{1, 3, 4, 5, 9, 11\} \quad \text{와} \quad \{0, 2, 6, 7, 8, 10\},$$

을 사용한다. 이 두 집합은 각각 크기가 6, 합이 33, 제곱합이 253이다. 따라서

$$C = \{(n+1)^2, (n+3)^2, (n+4)^2, (n+5)^2, (n+9)^2, (n+11)^2\},$$
$$D = \{n^2, (n+2)^2, (n+6)^2, (n+7)^2, (n+8)^2, (n+10)^2\}$$

의 원소의 합은 모두 $6n^2 + 66n + 253$이다. $n > 0$이므로 열두 개의 제곱수는 서로 다르고, 따라서 C와 D는 서로소이며 그 합집합은 S이다.

검산

- (iv)에서 $n = 1$이면 $C = \{4, 16, 25, 36, 100, 144\}$, $D = \{1, 9, 49, 64, 81, 121\}$이고, 둘 다 합이 $325 = 6 + 66 + 253$이다.
- (iii)에서 합 68과 제곱합 748은 1부터 16까지의 총합인 136과 1496의 절반이다. 세제곱합은 9248로, $136^2 = 18496$의 절반이다.
- $1, \ldots, 8$에서 네 개를 고르는 모든 경우를 컴퓨터로 탐색하면 (i)의 분할이 맞바꾸기를 제외하고 유일함을 확인할 수 있고, (iv)의 구성은 n이 499까지인 경우에 대해 확인하였다.

흔한 실수

- (iv)에서 주어진 A와 B를 그대로 쓰는 것: 크기가 6과 5로 다르므로 n^2 항이 소거되지 않는다. 빠진 원소 n^2(즉 $k = 0$)은 B 쪽에 들어가야 한다.
- (iii)에서 엉뚱한 절반을 평행이동하는 것: $\{9, 12, 14, 15\}$(평행이동한 a_k)를 $\{1, 4, 6, 7\}$과 묶어도 합과 제곱합은 여전히 같지만, 세제곱합은 $2\left(\sum b_k^3 - \sum a_k^3\right) = 2(672 - 624) =$ 96만큼 차이가 난다.

STEP 너머

이것은 프루에-태리-에스콧 문제(Prouhet–Tarry–Escott problem)이다. 즉 정수의 집합을 두 부분으로 나누어 $j = 1, \ldots, k$에 대해 j제곱의 합이 같아지도록 하는 문제이다. (iii)의 평행이동 후 맞바꾸기를 $c = 16, 32, \ldots$로 반복하면 $\{0, 1, \ldots, 2^{k+1} - 1\}$의 투에-모스 분할(Thue–Morse partition)을 얻는데, 이 분할은 k제곱까지의 모든 거듭제곱 합을 같게 만든다. 그 증명은 (ii)의 이항 전개를 수학적 귀납법(induction)으로 수행하는 것이다. 대븐포트(Davenport)의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 이런 종류의 초등 정수론을 공부할 때 좋은 길잡이이다.

풀이

STEP II 2025, 문제 9

역학 • 충돌과 포물체 운동

STEP II 2025, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

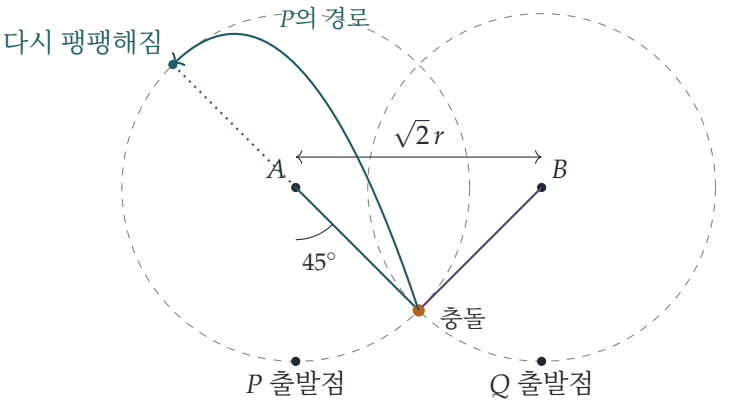
www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

핵심 아이디어

대칭(symmetry)이 대부분의 일을 해 준다. 두 입자는 AB의 수직이등분선(perpendicular bisector) 위에서 만나야 하므로, 충돌할 때의 위치와 속력이 정해진다. 충돌 직후 각 실은 느슨해지므로, 매달린 점으로부터의 거리가 다시 r이 될 때까지 각 입자는 보통의 포물체(projectile)이다. 이 거리 조건을 식으로 쓰면 t에 대한 사차방정식(quartic)이 나온다. 삼중근(triple root)에는 물리적 의미가 있다. 입자가 원을 따라 움직이면서 원에 도달하므로, 실이 충격 없이 팽팽해진다.

풀이

모형: P와 Q는 질량이 m인 입자이고(충돌에 대해서는 작고 매끄러운 구로 본다), 실은 가볍고 늘어나지 않으며, 공기 저항은 없다. A에 매달린 P를 왼쪽에 두고, A를 지나는 좌표축을 잡아 x는 수평 방향(B 쪽), y는 연직 위 방향으로 한다.



그림은 소문항 (iv)의 특수한 경우에 충돌 후 P가 날아가는 경로를 보여 준다. 이 경우 P는 반대쪽에서 수평보다 45° 위인 점에서 자신의 원으로 다시 돌아온다.

소문항 (i)

설정이 AB의 수직이등분선에 대해 대칭이므로, 두 입자는 그 위에서 만난다. 그때 각 입자는 가장 낮은 점에서 수평으로 $\frac{1}{2}\sqrt{2}\,r = r\sin 45^\circ$만큼 움직였으므로, 각 실은 연직 아래 방향과 45°를 이룬다. 각 입자는 $r - r\cos 45^\circ = r\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$만큼 올라갔다. 이 지점까지 실은 팽팽하고 장력(tension)은 일을 하지 않으므로, 에너지 보존(conservation of energy)에 의해 충돌 직전의 속력 v는 다음을 만족한다.

$$v^2 = u^2 - 2gr\left(1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = u^2 - gr(2 - \sqrt{2}).$$

(입자가 여기까지 오려면 $u^2 > gr(2-\sqrt{2})$이어야 한다.)

각 입자는 자신의 원을 따라 수평과 45°를 이루며 움직이므로

$$\text{속도}P = \left(\tfrac{v}{\sqrt{2}},\ \tfrac{v}{\sqrt{2}}\right), \qquad \text{속도}Q = \left(-\tfrac{v}{\sqrt{2}},\ \tfrac{v}{\sqrt{2}}\right).$$

두 입자는 같은 높이에서 만나므로 중심선은 수평이고, 둘 사이의 충격량(impulse)도 수평이다. 따라서 연직 성분은 변하지 않는다. 수평 방향으로는 운동량(momentum)의 크기가 같고 방향이 반대이므로, 충돌 전과 후 모두 합이 0이다. 그러면 뉴턴(Newton)의 반발 법칙(law of restitution)에 의해 각 입자는 다가올 때 속력의 e배로 튕겨 나간다. 충돌 직후

$$\text{수평 속력} = \frac{ev}{\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2}ev\sqrt{2}, \qquad \text{연직 성분} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,v\ (\text{위쪽}),$$

이고, 이제 P는 Q에서 멀어지며 왼쪽으로 움직인다.

> **생각해 보기** 충돌하는 동안 실도 충격량을 가할 수 있을까?

그렇지 않다. 실은 당기기만 할 수 있고, 그것도 실을 따라서만 당긴다. 충돌 직후 P는 A에 대해 $\left(\frac{r}{\sqrt{2}}, -\frac{r}{\sqrt{2}}\right)$에 있고 속도는 $\left(-\frac{ev}{\sqrt{2}}, \frac{v}{\sqrt{2}}\right)$이다. 이 속도의 $\overrightarrow{AP}$ 방향 성분은 $-\frac{1}{2}(1+e)v < 0$이므로 P는 A 쪽으로 움직이고 있다. 실은 곧바로 느슨해지며, 충격 장력은 전혀 필요하지 않다.

소문항 (ii)

t를 충돌 순간부터 잰다. 실이 다시 팽팽해질 때까지 P는 포물체이므로, A에 대해

$$x = \frac{r}{\sqrt{2}} - \frac{ev}{\sqrt{2}}\,t, \qquad y = -\frac{r}{\sqrt{2}} + \frac{v}{\sqrt{2}}\,t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

실이 팽팽한 것은 정확히 $x^2 + y^2 = r^2$일 때이다. $\sqrt{2}\,x$와 $\sqrt{2}\,y$가 나타나도록 양변에 2를 곱하면

$$(r - evt)^2 + \left(-r + vt - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,gt^2\right)^2 = 2r^2.$$

이 식은 $t = 0$에서 성립하는데, 충돌 순간에는 실이 아직 팽팽하기 때문이다. 따라서 구하는 시각은 O이 아닌 근이다. 대칭에 의해 Q도 같은 순간에 같은 일을 겪는다. 두 입자는 수평으로 서로 멀어지므로, 그 전에 다시 충돌할 수는 없다.

소문항 (iii)

전개하고 $2r^2$을 소거하면

$$\tfrac{1}{2}g^2t^4 - \sqrt{2}\,gv\,t^3 + \big((1+e^2)v^2 + \sqrt{2}\,rg\big)t^2 - 2(1+e)rv\,t = 0.$$

$t \neq 0$으로 나누면 삼차식이 남는다. 이제

$$\frac{z}{c} = \frac{vt}{r}\cdot\frac{rg}{\sqrt{2}\,v^2} = \frac{gt}{\sqrt{2}\,v}, \qquad \text{따라서} \qquad t = \frac{\sqrt{2}\,v}{g}\cdot\frac{z}{c}.$$

이것을 대입하고 삼차식 전체를 $\sqrt{2}\,v^3/g$로 나눈다. $w = z/c$로 쓰면 각 항은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}g^2t^3 &\longrightarrow w^3,\\
-\sqrt{2}\,gv\,t^2 &\longrightarrow -2w^2,\\
\big((1+e^2)v^2 + \sqrt{2}\,rg\big)t &\longrightarrow \Big(1+e^2+\frac{\sqrt{2}\,rg}{v^2}\Big)w = \Big(\frac{2}{c}+1+e^2\Big)w,\\
-2(1+e)rv &\longrightarrow -\frac{\sqrt{2}\,rg}{v^2}(1+e) = -\frac{2}{c}(1+e),
\end{aligned}$$

여기서 $\dfrac{2}{c} = \dfrac{2rg}{\sqrt{2}\,v^2} = \dfrac{\sqrt{2}\,rg}{v^2}$를 이용하였다. 이것이 구하는 방정식이다.

$$\Big(\frac{z}{c}\Big)^3 - 2\Big(\frac{z}{c}\Big)^2 + \Big(\frac{2}{c}+1+e^2\Big)\Big(\frac{z}{c}\Big) - \frac{2}{c}(1+e) = 0.$$

소문항 (iv)

w에 대한 삼차식이 삼중근 α를 가지면, 그 식은 반드시 $(w-\alpha)^3 = w^3 - 3\alpha w^2 + 3\alpha^2 w - \alpha^3$이다. 계수를 비교하면

$$3\alpha = 2, \qquad 3\alpha^2 = \frac{2}{c}+1+e^2, \qquad \alpha^3 = \frac{2}{c}(1+e).$$

따라서 $\alpha = \frac{2}{3}$이다. $k = 2/c$로 두자. 그러면 $k = \frac{4}{3} - 1 - e^2 = \frac{1}{3} - e^2$이고, 마지막 식은 다음과 같이 된다.

$$\Big(\tfrac{1}{3} - e^2\Big)(1+e) = \tfrac{8}{27} \iff 27e^3 + 27e^2 - 9e - 1 = 0 \iff (3e-1)(9e^2+12e+1) = 0.$$

이차 인수의 근은 $\frac{-2\pm\sqrt{3}}{3}$으로 둘 다 음수이므로 반발계수(coefficient of restitution)가 될 수 없다. 따라서 $e = \frac{1}{3}$이다. 그러면 $k = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$이므로 $c = 9$이고,

$$v^2 = \frac{c\,rg}{\sqrt{2}} = \frac{9rg}{\sqrt{2}} = \tfrac{9}{2}\sqrt{2}\,rg,$$

가 되어 요구한 결과를 얻는다.

생각해 보기 중근(repeated root)은 운동에 대해 무엇을 말해 주는가?

$D(t) = x^2 + y^2 - r^2$이라 하자. 양의 인수를 제외하면 D는 $w(w-\alpha)^3$과 같다. 이는 $0 < w < \alpha$에서 음수이므로, 실이 팽팽해질 때까지 P는 자신의 원의 엄격한 내부에 머문다. α가 중근이므로 그곳에서 $D' = 0$이기도 하다. 그런데 $D' = 2(x\dot{x} + y\dot{y})$이므로, 그 순간 속도의 실 방향 성분은 0이다. 즉 입자는 원을 따라 움직이면서 도착한다. 충격 장력은 실을 따라 작용하며, 실 방향의 속도 성분을 없앨 때만 필요하다. 여기서는 그런 성분이 없으므로 충격량이 없고, 속도는 변하지 않으며, 운동 에너지도 잃지 않는다.

소문항 (v)

에너지는 충돌에서만 손실된다. 충돌 후 원의 가장 낮은 점에 이르기까지는 중력만 일을 한다. 날아가는 동안에는 장력이 없고, 실이 팽팽해질 때 충격이 없으며, 그 뒤에는 장력이 운동 방향에 수직이기 때문이다. 충돌 직후 속력의 제곱은

$$\frac{e^2v^2}{2} + \frac{v^2}{2} = \frac{(1+e^2)v^2}{2},$$

이고, 입자는 가장 낮은 점보다 $r\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$만큼 위에 있다. 따라서

$$U^2 = \frac{(1+e^2)v^2}{2} + gr\left(2-\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{9rg}{\sqrt{2}} + gr\left(2-\sqrt{2}\right)$$
$$= \frac{5\sqrt{2}}{2}rg + (2-\sqrt{2})rg = \left(2+\tfrac{3}{2}\sqrt{2}\right)rg = \frac{4+3\sqrt{2}}{2}rg.$$

내려가는 동안 실이 팽팽하게 유지되는지도 확인해야 한다. $w = \frac{2}{3}$일 때 $t = \frac{2\sqrt{2}v}{3g}$이다. 대입하면 위치는 $\left(-\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$, 속도는 $\left(-\frac{v}{3\sqrt{2}}, -\frac{v}{3\sqrt{2}}\right)$이다. 따라서 P는 B의 반대쪽에서 수평보다 45° 위인 점에서 자신의 원으로 다시 돌아오고, 이때 속력의 제곱은 $\frac{v^2}{9} = \frac{rg}{\sqrt{2}}$이다. 그 점에서 A 방향으로 힘을 분해하면

$$T + mg\sin 45^\circ = \frac{m}{r}\cdot\frac{rg}{\sqrt{2}} \quad\Longrightarrow\quad T = 0,$$

이므로 실은 장력이 0인 상태로 팽팽해진다. P가 아래로 흔들려 내려가면서 속력은 커지고 중력의 안쪽 방향 성분은 작아지므로, 그 이후로는 $T > 0$이다. 입자는 원을 따라 가장 낮은 점까지 내려가며, 이 점에서부터 에너지를 계산해도 같은 U^2 값을 얻는다: $\frac{rg}{\sqrt{2}} + 2gr\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(2+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)rg$.

검산

- $r = 1$, $g = 9.81$로 두고 비행과 원운동을 단계별로 컴퓨터 시뮬레이션한 결과 $U^2 \approx 40.430$을 얻었다. 이는 $\frac{1}{2}(4+3\sqrt{2})g \approx 40.430$과 일치하며, 원운동 내내 장력은 음이 아

니었다.

- U^2를 구하는 두 경로(충돌 지점에서 시작하는 것과 실이 팽팽해지는 지점에서 시작하는 것)의 결과가 일치한다.
- $e = 1/3$이고 $c = 9$이면 $w^3 - 2w^2 + \frac{4}{3}w - \frac{8}{27} = \left(w - \frac{2}{3}\right)^3$이 정확히 성립한다.

흔한 실수

- 올라간 높이를 $r - r\cos 45°$가 아니라 $r\cos 45°$(매달린 점 아래로의 깊이)로 잡는 것.
- 반발 법칙을 속도 전체에 적용하는 것. 영향을 받는 것은 중심선 방향(여기서는 수평) 성분뿐이다.
- e에 대한 삼차식의 음수 근을 배제하는 것을 잊는 것.

STEP 너머

중근 조건은 두 곡선(포물체의 포물선과 원)이 높은 차수로 접한다는 뜻이다. 두 곡선은 만나고, 접선을 공유하며, 여기서는 곡률(curvature)까지 공유한다. 이 때문에 실이 팽팽해지는 순간 장력이 정확히 0이 된다. 접촉 차수(order of contact)와 접촉원(osculating circle)은 대학 1학년의 곡선론과 미분기하학(differential geometry) 강의에 등장한다. 충격 구속(impulsive constraint)과 그것이 언제 에너지를 소산하는지는 동역학의 표준 주제이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 아이디어가 전개되는 모습을 보기에 좋은 책이다.

풀이

STEP II 2025, 문제 10

역학 • 강체 막대의 정역학

STEP II 2025, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

핵심 아이디어

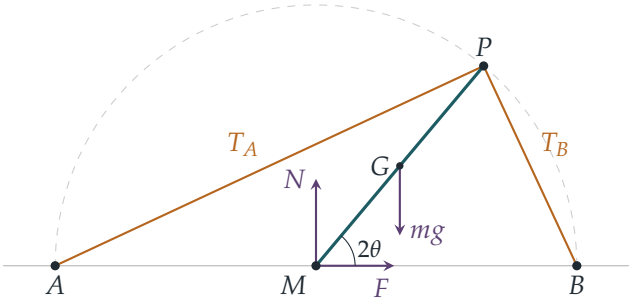
$MA = MB = MP = a$이므로 점 P는 AB를 지름으로 하는 원 위에 있고, 이 관찰 하나가 모든 것을 이끈다. 이로부터 P에서의 직각, θ로 나타낸 줄의 길이, 각 줄이 막대와 이루는 각이 모두 나온다. 훅의 법칙(Hooke's law)에 따르면 장력(tension)은 $\lambda(\text{길이} - \ell)/\ell$이고, 이는 자연스럽게 "$\lambda \times$ 길이$/\ell$" 부분과 상수 "$-\lambda$" 부분으로 나뉜다. 이 분해가 바로 (i)에서 요구하는 분해이다. 그 뒤에는 잘 고른 점에 대한 모멘트(moment)를 취하여 원하지 않는 힘들을 없앤다.

풀이

막대를 무게 mg가 중점 G에 작용하는 균일한 강체 막대(uniform rigid rod)로, 줄을 훅의 법칙을 따르는 가벼운 탄성줄(light elastic string)로 모형화한다. M을 원점에 두고 $B = (a, 0)$, $A = (-a, 0)$이라 하면

$$P = (a\cos 2\theta,\ a\sin 2\theta).$$

이다.



(그림에서 마찰력 F의 방향이 옳다는 것은 (iii)에서 확인한다.)

소문항 (i)

$MA = MB = MP = a$이므로 점 P는 중심이 M이고 AB를 지름으로 하는 원 위에 있다. 반원에 대한 원주각 정리에 의해 $\angle APB = 90°$이다.

줄의 길이. 삼각형 MPA는 $MP = MA$인 이등변삼각형(isosceles triangle)이고 꼭지각이 $\angle PMA = 180° - 2\theta$이므로, 밑각은 $\angle MPA = \angle MAP = \theta$이다. 마찬가지로 삼각형 MPB의 꼭지각은 2θ이므로 $\angle MPB = 90° - \theta$이다. 빗변(hypotenuse)이 $AB = 2a$이고 $\angle PAB = \theta$인 직각삼각형 APB에서

$$PA = 2a\cos\theta, \qquad PB = 2a\sin\theta.$$

이다. $\theta < 45°$이므로 $PB < PA$이다. 두 줄 모두 팽팽하게 당겨져 있으므로 $2a\sin\theta > \ell$이다.

힘의 분해. P에서 A와 B를 향하는 단위벡터(unit vector)를 각각 $\mathbf{u}_A$, $\mathbf{u}_B$라 하자. 훅의 법칙에 의해 줄 PA의 장력은 $\lambda(PA - \ell)/\ell$이므로, 이 줄이 P에서 막대에 작용하는 힘은

$$\frac{\lambda(PA-\ell)}{\ell}\,\mathbf{u}_A = \frac{\lambda}{\ell}\,PA\,\mathbf{u}_A - \lambda\mathbf{u}_A = \frac{\lambda}{\ell}\,\overrightarrow{PA} - \lambda\mathbf{u}_A,$$

이고, PB에 대해서도 마찬가지이다. 두 힘을 더하면

$$\text{줄의 합력} = \frac{\lambda}{\ell}\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}\right) - \lambda(\mathbf{u}_A + \mathbf{u}_B).$$

이다. 그런데 M이 AB의 중점이므로 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{PM}$이고, $|\overrightarrow{PM}| = a$이다. 따라서 첫째 항은 막대 방향($M$ 쪽)으로 작용하는 크기 $2a\lambda/\ell$의 힘이다.

둘째 항에서 $\mathbf{u}_A$와 $\mathbf{u}_B$는 서로 수직인 단위벡터이므로(P에서의 각이 직각이다) $\mathbf{u}_A + \mathbf{u}_B$는 단위정사각형의 대각선이다. 즉 길이가 $\sqrt{2}$이고 $\angle APB$의 이등분선(bisector) 방향을 향한다. 따라서 $-\lambda(\mathbf{u}_A + \mathbf{u}_B)$는 $\angle APB$의 이등분선 방향(AB에서 멀어지는 쪽)으로 작용하는 크기 $\sqrt{2}\,\lambda$의 힘이다. 이것이 요구된 분해이다.

소문항 (ii)

M에 대한 모멘트를 취한다. 그러면 M에서 작용하는 마찰력(friction)과 수직항력(normal reaction)은 모멘트가 없다. 반시계 방향을 양의 방향으로 잡는다(B는 오른쪽에 있다).

? 생각해 보기 M은 각 줄을 품은 직선으로부터 얼마나 떨어져 있는가?

직선 PA는 PM과 각 $\angle MPA = \theta$를 이루고 $PM = a$이므로, M에서 직선 PA까지의 수직 거리는 $a\sin\theta$이다. 마찬가지로 M에서 직선 PB까지의 거리는 $a\sin(90° - \theta) = a\cos\theta$이다. 무게는 M의 오른쪽으로 수평 거리 $\frac{1}{2}a\cos 2\theta$인 곳에 작용한다.

줄 PA는 P를 A 쪽으로 당기고(M에 대해 반시계 방향), PB와 무게는 막대를 시계 방향으로 돌린다. 장력을 T_A, T_B라 쓰면

$$T_A\, a\sin\theta \;=\; T_B\, a\cos\theta + mg\cdot \tfrac{1}{2}a\cos 2\theta.$$

이다. $T_A = \lambda(2a\cos\theta - \ell)/\ell$, $T_B = \lambda(2a\sin\theta - \ell)/\ell$이므로

$$\begin{aligned} T_A\sin\theta - T_B\cos\theta &= \frac{\lambda}{\ell}\big(2a\cos\theta\sin\theta - \ell\sin\theta - 2a\sin\theta\cos\theta + \ell\cos\theta\big) \\ &= \lambda(\cos\theta - \sin\theta). \end{aligned}$$

이다. (막대 방향의 힘은 M에 대한 모멘트가 없으므로, 이것은 바로 크기 $\sqrt{2}\lambda$인 이등분선 방향 힘의 모멘트이다.) 따라서 모멘트 방정식은

$$\lambda(\cos\theta - \sin\theta) = \tfrac{1}{2}mg(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = \tfrac{1}{2}mg(\cos\theta - \sin\theta)(\cos\theta + \sin\theta).$$

이 된다. $0 < \theta < 45°$이므로 $\cos\theta - \sin\theta > 0$이고, 따라서 이것으로 나눌 수 있다.

$$\cos\theta + \sin\theta = \frac{2\lambda}{mg}.$$

λ의 범위. $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\sin(\theta + 45°)$로 쓴다. 막대는 지면에 대해 기울어져 있으므로 $0 < \theta < 45°$이고, 따라서 $45° < \theta + 45° < 90°$이다. 이 구간에서 sin은 $\frac{1}{\sqrt{2}}$에서 1까지 순증가한다. 그러므로

$$1 < \cos\theta + \sin\theta < \sqrt{2} \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{1}{2}mg < \lambda < \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,mg,$$

이고, 이것이 이러한 평형(equilibrium)이 존재하기 위한 필요조건이다.

소문항 (iii)

? **생각해 보기** 어느 점을 택하면 모멘트 방정식에서 두 줄의 힘이 모두 사라지는가?

두 줄은 모두 P에서 작용하므로 P에 대한 모멘트를 취한다. 그러면 무게와 M에서 지면이 작용하는 두 힘만 나타난다. P를 기준으로 할 때 점 M은 수평 거리 $a\cos 2\theta$(왼쪽), 수직 거리 $a\sin 2\theta$(아래쪽)에 있고, G는 그 거리의 절반인 곳에 있다.

마찰력 F가 B 쪽으로 작용한다고 가정하자(아래에서 이를 확인한다). P에 대하여

- N(M에서 위쪽, P의 왼쪽)의 시계 방향 모멘트는 $N\,a\cos 2\theta$이다.
- F(M에서 B 쪽, P의 아래쪽)의 반시계 방향 모멘트는 $F\,a\sin 2\theta$이다.
- mg(G에서 아래쪽, P의 왼쪽)의 반시계 방향 모멘트는 $mg\cdot\frac{1}{2}a\cos 2\theta$이다.

평형이 되려면

$$Na\cos 2\theta = Fa\sin 2\theta + \tfrac{1}{2}mg\,a\cos 2\theta.$$

이어야 한다. $2\theta < 90^\circ$이므로 $\cos 2\theta > 0$이고, $a\cos 2\theta$로 나누면

$$N - F\tan 2\theta = \tfrac{1}{2}mg,$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다.

마찰력의 방향. 수평 방향으로 분해하면 F는 줄의 합력의 수평 성분과 평형을 이룬다. (i)로부터 $\mathbf{u}_A = (-\cos\theta, -\sin\theta)$, $\mathbf{u}_B = (\sin\theta, -\cos\theta)$이고 $\overrightarrow{PM} = (-a\cos 2\theta, -a\sin 2\theta)$이므로, 줄의 합력의 수평 성분은 $-\frac{2a\lambda}{\ell}\cos 2\theta + \lambda(\cos\theta - \sin\theta)$이다. 따라서 B 쪽으로 작용하는 마찰력은

$$F = \frac{2a\lambda}{\ell}\cos 2\theta - \lambda(\cos\theta - \sin\theta) = \lambda(\cos\theta - \sin\theta)\left(\frac{2a(\cos\theta + \sin\theta)}{\ell} - 1\right),$$

이고, $2a\sin\theta > \ell$(두 줄 모두 팽팽함)이므로 이 값은 양수이다. 따라서 마찰력은 실제로 B 쪽으로 작용하며, F는 그 크기이다.

검산

- (ii)의 극한은 타당하다. $\theta \to 0$이면 막대는 거의 평평하게 놓이고 $\lambda \to \frac{1}{2}mg$이다. $\theta \to 45^\circ$이면 막대는 수직이 되고 $\lambda \to mg/\sqrt{2}$이다.
- 수치로 확인하면, $a = 1$, $mg = 10$, $\theta = 20^\circ$, $\ell = 0.5$일 때 $\lambda = 5(\cos 20^\circ + \sin 20^\circ) \approx 6.408$이고, 장력은 $T_A \approx 17.68$, $T_B \approx 2.36$이며, 힘을 분해하면 $N \approx 18.26$, $F \approx 15.81$이므로 $N - F\tan 40^\circ \approx 5.00 = \frac{1}{2}mg$이다. M에 대한 모멘트도 평형을 이룬다. 수천 개의 무작위 배치에 대한 컴퓨터 검산으로 모든 결과가 반올림 오차 범위 안에서 확인되었다.

흔한 실수

- 장력을 $\lambda \times$ 늘어난 길이/ℓ이 아니라 $\lambda \times$ 늘어난 길이로 잡는 것.
- $\theta < 45^\circ$이므로 $\cos\theta - \sin\theta$나 $\cos 2\theta$가 양수라는 점을 언급하지 않고 이것으로 나누는 것.
- (iii)에서 M에 대한 모멘트를 취하는 것. 그러면 바로 우리가 구하려는 힘인 N과 F가 사라진다. P에 대한 모멘트를 취하면 대신 줄의 힘이 사라진다.

STEP 너머

(i)의 분해는 일반적인 사실의 깔끔한 예이다. 강체(rigid body)에 작용하는 힘들의 모임은 하나의 힘과 하나의 우력(couple)을 더한 것과 동등하며, 모멘트 계산이 가장 쉬워지도록 힘을 마음대로 묶어도 된다. 여기서 "줄마다 $-\lambda$"인 부분은 장력이 일정한 한 쌍의 줄처럼 행동하며, 그 합력은 기하만으로 정해진다. 강체의 정역학, 가상일(virtual work), 평형의 안정성은 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)에서 자세히 다룬다.

풀이

STEP II 2025, 문제 11

확률과 통계 • 기댓값과 이항 합

STEP II 2025, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

핵심 아이디어

두 게임 모두 처음으로 $2k$가 나오면 끝나므로, 각각은 주사위를 던진 횟수 r에 대한 합으로 나타난다. 알리(Ali)의 경우 그 합은 등비급수(geometric series)와 비슷한 꼴이며, 소문항 (i)이 바로 던진 횟수의 기댓값(expected value)을 구하는 도구이다. 젠(Zen)의 경우 이기는 게임은 $2k$ 이전에 어떤 수들이 나왔는지에 따라 결정된다. 그 집합을 알면 증가하는 순서는 저절로 정해지기 때문이다. 이러한 집합을 세면 이항계수(binomial coefficients)가 등장하고, 따라서 그 합은 소문항 (iii)의 합이 된다.

풀이

소문항 (i)

$|x| < 1$일 때 등비급수에 의해

$$\sum_{r=0}^{\infty} x^r = \frac{1}{1-x}$$

이다. 멱급수(power series)는 수렴 구간(interval of convergence) 안에서 항별로 미분할 수 있으므로, 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\sum_{r=1}^{\infty} r x^{r-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad |x| < 1,$$

을 얻고, 이것이 증명하려던 것이다.

소문항 (ii)

한 번 던질 때 결과는 세 종류이다.

$$\mathrm{P}(\text{눈}2k) = \frac{1}{2k}, \qquad \mathrm{P}(\text{짝수, 제외: } 2k) = \frac{k-1}{2k}, \qquad \mathrm{P}(\text{홀수}) = \frac{1}{2}.$$

던진 횟수를 R라 하자. 알리가 $R = r$로 이기는 것은 정확히 $1, \ldots, r-1$번째 결과가 $2k$가 아닌 짝수이고 r번째 결과가 $2k$일 때이다. 각 시행은 독립(independent)이므로 $x = \dfrac{k-1}{2k}$라 하면

$$\mathrm{P}(\text{알리가 이기고} R = r) = \frac{1}{2k}\, x^{r-1}$$

이다.

(a) 등비급수를 더하면 ($0 \le x < 1$임에 주의한다)

$$\mathrm{P}(\text{알리가 이김}) = \frac{1}{2k} \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{1}{2k} \cdot \frac{2k}{k+1} = \frac{1}{k+1}.$$

이를 빠르게 알아보는 방법이 있다. $2k$가 아닌 짝수는 결과에 영향을 주지 않으므로 무시한다. 게임은 홀수와 $2k$ 중 어느 것이 먼저 나오느냐로 결정된다. 홀수 면은 k개, $2k$가 적힌 면은 하나이고 모두 같은 확률로 나오므로, $2k$가 먼저 나올 확률은 $\frac{1}{k+1}$이다.

(b) 알리는 $R = r$로 이기면 £r를 받고 그렇지 않으면 아무것도 받지 못하므로, 소문항 (i)에 의해

$$\mathrm{E}(\text{알리의 수입}) = \sum_{r=1}^{\infty} r \cdot \frac{1}{2k}\, x^{r-1} = \frac{1}{2k} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{2k}\left(\frac{2k}{k+1}\right)^2 = \frac{2k}{(k+1)^2} \text{ 파운드.}$$

소문항 (iii)

주어진 식을 S라 하자. 일반항은 $r = 0, 1, \ldots, n$에 대하여 $(r+1)\binom{n}{r}x^r$이다. 인수 $r+1$을 보면 x^{r+1}을 미분하는 것을 떠올릴 수 있다.

$$S = \sum_{r=0}^{n} (r+1)\binom{n}{r}x^r = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^{r+1}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(x(1+x)^n\Big),$$

여기서 이항정리(binomial theorem)를 사용하였다. 곱의 미분법(product rule)에 의해

$$S = (1+x)^n + nx(1+x)^{n-1} = (1+x)^{n-1}\big(1 + (n+1)x\big).$$

소문항 (iv)

젠이 정확히 r번 던져서 이긴다고 하자. 마지막 결과는 $2k$이고, 처음 $r-1$번의 결과는 $\{1, 2, \ldots, 2k-1\}$에서 나온 순증가하는 수들이다. (게임은 처음 $2k$가 나올 때 멈추므로 이 수들은 어차피 모두 $2k$보다 작아야 한다.)

생각해 보기 길이가 r인 이기는 수열은 몇 개인가?

순증가 수열은 그 안에 어떤 수들이 나타나는지만 알면 결정된다. 서로 다른 수들의 집합을 증가하는 순서로 늘어놓는 방법은 하나뿐이기 때문이다. 따라서 길이가 r인 이기는 수열은 $\{1,\dots,2k-1\}$의 원소 $(r-1)$개짜리 부분집합(subset)과 일대일로 대응한다. 그러한 부분집합은 $\binom{2k-1}{r-1}$개이고, $1 \le r \le 2k$이다.

r번 던진 결과의 특정한 수열 하나의 확률은 $\left(\frac{1}{2k}\right)^r$이다. 따라서

$$\mathrm{E}(\text{젠의 수입}) = \sum_{r=1}^{2k} r\binom{2k-1}{r-1}\left(\frac{1}{2k}\right)^r = \frac{1}{2k}\sum_{j=0}^{2k-1}(j+1)\binom{2k-1}{j}\left(\frac{1}{2k}\right)^j,$$

이고, 여기서 $j = r-1$이다. 이것은 소문항 (iii)의 합에서 $n = 2k-1$, $x = \frac{1}{2k}$로 둔 것이며, 이때 $1+(n+1)x = 1+2k\cdot\frac{1}{2k} = 2$이다. 그러므로

$$\mathrm{E}(\text{젠의 수입}) = \frac{1}{2k}\left(1+\frac{1}{2k}\right)^{2k-2}\cdot 2 = \frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{2k}\right)^{2k-2} \text{ 파운드.}$$

소문항 (v)

젠의 수입의 기댓값을 알리의 것으로 나누면

$$\rho = \frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{2k}\right)^{2k-2}\cdot\frac{(k+1)^2}{2k} = \frac{(k+1)^2}{2k^2}\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{2k}\right)^{2k}}{\left(1+\frac{1}{2k}\right)^2}.$$

이제 k가 크다고 하자. 그러면

- $\dfrac{(k+1)^2}{k^2} = \left(1+\dfrac{1}{k}\right)^2 \approx 1$;
- $\left(1+\dfrac{1}{2k}\right)^2 \approx 1$;
- 주어진 근사식에서 $n = 2k$로 두면 $\left(1+\dfrac{1}{2k}\right)^{2k} \approx \mathrm{e}$이다.

따라서

$$\rho \approx \frac{\mathrm{e}}{2} \approx \frac{2.71828}{2} = 1.359\ldots,$$

이고, k가 클 때 젠의 수입의 기댓값은 알리의 약 1.359배, 즉 35%보다 조금 더 많으며, 이것이 보이려던 것이다.

검산

- $k = 1$이면 주사위는 면이 1, 2인 동전이다. 알리는 첫 결과가 2일 때만 이기며, 그 확률은 $\frac{1}{2} = \frac{1}{k+1}$이고 이때 £1을 받으므로 수입의 기댓값은 $\frac{1}{2} = \frac{2k}{(k+1)^2}$이다. 젠은 수열 2 (확률 $\frac{1}{2}$, 수입 £1)와 수열 1, 2 (확률 $\frac{1}{4}$, 수입 £2)로 이기므로 수입의 기댓값은 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$이다. 공식도 일치한다. $k = 1$이면 지수 $2k - 2$가 0이므로 공식은 $\frac{1}{1} \cdot 1 = 1$을 준다.
- $k = 3$이면 알리의 수입의 기댓값은 $\frac{3}{8}$이고 젠의 것은 $\frac{1}{3}\left(\frac{7}{6}\right)^4 = \frac{2401}{3888} \approx 0.618$이다. 두 값 모두 이기는 수열을 직접 모두 나열한 결과, 그리고 게임의 컴퓨터 시뮬레이션 결과와 일치한다.
- 비 ρ는 $k = 10$에서 약 1.456, $k = 100$에서 약 1.369, $k = 10^4$에서 약 1.3592이다. 이 값은 $\mathrm{e}/2 = 1.35914\ldots$를 향해 감소한다.

흔한 실수

- 소문항 (iv)에서 부분집합 대신 계승을 써서 순서 있는 수열을 세는 것. 각 집합을 증가하도록 배열하는 방법은 하나뿐이다.
- 젠의 게임에서 앞선 결과들에 $2k$가 포함될 수 없다는 것을 잊는 것. 이 때문에 범위는 $\{1, \ldots, 2k-1\}$이 되고, 따라서 n은 $2k$가 아니라 $n = 2k - 1$이다.
- 소문항 (ii)에서 게임이 계속될 확률로 $\frac{k-1}{2k}$ 대신 $\frac{k}{2k}$를 쓰는 것. $2k$도 짝수이지만 이 결과가 나오면 게임이 끝난다.

STEP 너머

소문항 (iii)은 **생성함수**(generating functions)의 작은 예이다. 수열을 멱급수의 계수로 부호화한 다음 그 급수에 미적분을 적용하는 것이다. 확률생성함수(probability generating functions)는 이를 한 걸음 더 나아가게 한다. $G(s) = \mathrm{E}(s^X)$이면 $\mathrm{E}(X) = G'(1)$이며, 이것이 바로 여기서 두 번 사용한 미분 기법이다. 극한 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to \mathrm{e}$는 확률론 곳곳에서 등장하는데, 예를 들어 이항분포의 푸아송 근사(Poisson approximation)에서 나타난다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)에는 생성함수에 관한 좋은 장이 있다.

풀이

STEP II 2025, 문제 12

확률과 통계 • 푸아송 분포

STEP II 2025, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

핵심 아이디어

푸아송 분포(Poisson distribution)에서는 이웃한 두 확률의 비가 $p_r/p_{r-1} = \lambda/r$로 간단하다. 따라서 모든 차분(difference) d_r를 이미 아는 확률과 r에 대한 간단한 유리식의 곱으로 나타낼 수 있다. d_r의 부호를 보면 p_r가 어디에서 증가하고 감소하는지 알 수 있다. 한 단계 더 나아가 이계 차분(second difference) $d_{r+1} - d_r$의 부호를 보면 d_r가 어디에서 증가하고 감소하는지 알 수 있는데, 이 부호는 r에 대한 이차식(quadratic)이 결정한다. 복잡해 보이는 수 $\lambda + \frac{1}{2} + \sqrt{\lambda + \frac{1}{4}}$는 그 이차식의 한 근(에 1을 더한 값)일 뿐이다.

풀이

풀이 전체에서 $p_r = \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^r/r!$이므로 $r \geq 1$에 대하여

$$p_r = \frac{\lambda}{r}\,p_{r-1}, \qquad p_{r-1} = \frac{r}{\lambda}\,p_r,$$

이고, 모든 p_r는 양수이다.

소문항 (i)

$r \geq 1$에 대하여

$$d_r = p_r - p_{r-1} = p_{r-1}\left(\frac{\lambda}{r} - 1\right) = \frac{p_{r-1}}{r}\,(\lambda - r).$$

$p_{r-1}/r > 0$이므로 d_r의 부호는 $\lambda - r$의 부호와 같고, λ가 정수가 아니므로 d_r는 결코 0이 아니다. λ보다 작은 가장 큰 정수를 $m = \lfloor \lambda \rfloor$라 하면 $\lambda - 1 < m < \lambda$이다($\lambda \notin \mathbb{Z}$이므로 두 부등식 모두 등호가 성립하지 않는다). 그러면

- $1 \leq r \leq m$이면 $r < \lambda$이므로 $d_r > 0$이고 $p_0 < p_1 < \cdots < p_m$이다.

▶ $r \geq m+1$이면 $r > \lambda$이므로 $d_r < 0$이고 $p_m > p_{m+1} > p_{m+2} > \cdots$이다.

($\lambda < 1$이면 $m = 0$이고 첫 번째 경우에 해당하는 r는 없다.) 따라서 $r \neq m$인 모든 r에 대하여 $p_r < p_m$이다. 즉 m은 가장 일어날 가능성이 큰 유일한 값이고, $\lambda - 1 < m < \lambda$이다.

소문항 (ii)

이제 d_r 자체가 어떻게 변하는지 살펴보자. $r \geq 1$에 대하여 $e_r = d_{r+1} - d_r = p_{r+1} - 2p_r + p_{r-1}$이라 하자. 모든 항을 p_r로 나타내면

$$e_r = p_r\left(\frac{\lambda}{r+1} - 2 + \frac{r}{\lambda}\right) = \frac{p_r}{\lambda(r+1)}\Big(\lambda^2 - 2\lambda(r+1) + r(r+1)\Big).$$

앞의 인수가 양수이므로 e_r의 부호는

$$Q(r) = r^2 + (1-2\lambda)r + \lambda^2 - 2\lambda.$$

의 부호와 같다. 이 이차식의 판별식(discriminant)은 $(1-2\lambda)^2 - 4(\lambda^2 - 2\lambda) = 1 + 4\lambda$이므로 두 근은

$$\alpha = \lambda - \tfrac{1}{2} - \sqrt{\lambda + \tfrac{1}{4}}, \qquad \beta = \lambda - \tfrac{1}{2} + \sqrt{\lambda + \tfrac{1}{4}},$$

이고, $Q(r) < 0$인 것은 정확히 $\alpha < r < \beta$일 때이다. 따라서

$$d_{r+1} < d_r \iff \alpha < r < \beta, \qquad d_{r+1} > d_r \iff r < \alpha \text{ 또는} r > \beta.$$

$\beta + 1 = \lambda + \frac{1}{2} + \sqrt{\lambda + \frac{1}{4}}$는 정수가 아니므로 β도 정수가 아니다. 그러므로 $k = \lfloor \beta + 1 \rfloor = \lfloor \beta \rfloor + 1$은 바로

$$k < \lambda + \tfrac{1}{2} + \sqrt{\lambda + \tfrac{1}{4}} < k + 1.$$

을 만족하는 정수이다.

생각해 보기 $r < \alpha$일 때에도 d_r가 증가한다는 점을 생각하면, d_r의 최솟값은 도대체 어디에서 찾아야 할까?

소문항 (i)에서 $r < \lambda$이면 $d_r > 0$이고 $r > \lambda$이면 $d_r < 0$이므로, 최솟값은 음수인 항들, 즉 $r \geq m+1$인 항들 가운데 있어야 한다. 또 $\beta > \lambda$이고($\sqrt{\lambda + \frac{1}{4}} > \frac{1}{2}$이므로) $\alpha < \lambda$이므로, $r \geq m+1$인 모든 r는 $r > \alpha$를 만족하며, $k > \beta > \lambda$에서 $k \geq m+1$이다. 따라서 $r \geq m+1$인 정수에 대하여 다음이 성립한다.

▶ $m+1 \leq r \leq k-1$이면 $r < \beta$이므로 $e_r < 0$이고, $d_{m+1} > d_{m+2} > \cdots > d_k$이다.

▶ $r \geq k$이면 $r > \beta$이므로 $e_r > 0$이고, $d_k < d_{k+1} < d_{k+2} < \cdots$이다.

($k = m+1$이면 첫 번째 경우에 해당하는 r는 없다.) 따라서 d_k는 다른 모든 음수 d_r보다 작고, 물론 모든 양수 d_r보다도 작다. 그러므로 d_r의 최솟값은 $r = k$에서 나타나며, 이것이 증명하려던 것이다. 말로 하면, p_r는 $r = k-1$과 $r = k$ 사이에서 가장 가파르게 감소한다.

소문항 (iii)

먼저 $\lambda < 1$이면 소문항 (i)에 의해 모든 d_r가 음수이다. 그런데 $r \to \infty$일 때 $d_r \to 0$이므로($p_r \to 0$이기 때문에), 어떤 r에 대해서도 그 뒤에 d_r보다 큰 항이 있다. 즉 최댓값이 아예 존재하지 않으며, 당연히 $r = 1$에서 최댓값을 갖지도 않는다. 따라서 $\lambda > 1$이어야 한다(λ는 정수가 아니므로 $\lambda = 1$은 제외된다).

이제 $\lambda > 1$이라 하면 $d_1 > 0$이다. 양수인 항은 $d_1, \ldots, d_m$이고, 최댓값은 이들 가운데 있다.

- 최댓값이 $r = 1$에서 나타나면 $d_2 < d_1$, 즉 $e_1 < 0$이다.
- 역으로 $e_1 < 0$이면 $\alpha < 1 < \beta$이므로 $1 \le r < \beta$인 모든 정수 r에 대하여 $e_r < 0$이다. $m < \lambda < \beta$이므로 $d_1 > d_2 > \cdots > d_m$이고, 그 뒤의 항은 모두 음수이다. 따라서 최댓값은 $r = 1$에서 나타난다.

그러므로 $\lambda > 1$일 때 최댓값이 $r = 1$에서 나타날 필요충분조건은 $e_1 < 0$, 즉 $Q(1) < 0$이다.

$$Q(1) = 1 + 1 - 2\lambda + \lambda^2 - 2\lambda = \lambda^2 - 4\lambda + 2 < 0 \iff 2 - \sqrt{2} < \lambda < 2 + \sqrt{2}.$$

이를 $\lambda > 1$과 합치면($2 - \sqrt{2} < 1$이므로) 구하는 조건은

$$1 < \lambda < 2 + \sqrt{2}.$$

소문항 (iv)

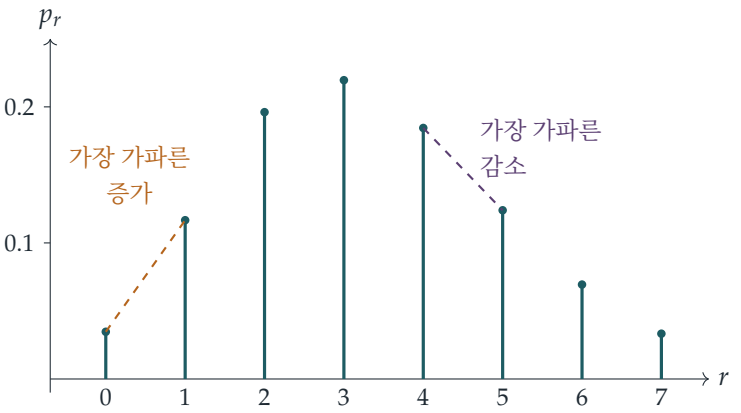
$\lambda = 3.36$이면 $\lambda + \frac{1}{4} = 3.61 = 1.9^2$이므로

- 소문항 (i)에 의해 최빈값(mode)은 $m = 3$이다.
- $\lambda + \frac{1}{2} + \sqrt{\lambda + \frac{1}{4}} = 3.86 + 1.9 = 5.76$이므로 $k = 5$이다. 즉 가장 가파른 감소는 p_4에서 p_5로 갈 때이다.
- $1 < 3.36 < 2 + \sqrt{2} \approx 3.41$이므로 가장 가파른 증가는 p_0에서 p_1로 갈 때이다(아슬아슬하게 그렇다. $\alpha = 0.96$이 1에 가까우므로 d_1과 d_2는 거의 같다).

$p_r = \frac{3.36}{r} p_{r-1}$과 $p_0 = \mathrm{e}^{-3.36} \approx 0.035$를 이용하면 다음 근삿값을 얻는다.

$$p_0, \ldots, p_7 \approx 0.035,\ 0.117,\ 0.196,\ 0.220,\ 0.185,\ 0.124,\ 0.069,\ 0.033.$$

그래프의 개형은 처음부터 가파르게 증가하다가 완만해지며 $r = 3$에서 최고점에 이르고, 이어서 점점 가파르게 감소하여 $r = 4$와 $r = 5$ 사이에서 가장 가파르게 감소한 뒤 다시 완만해지는 모양이어야 한다.



검산

- $\lambda \in (0, 40)$인 임의의 값 20,000개에 대하여 p_r와 d_r를 계산해 보면, 최빈값은 $\lfloor \lambda \rfloor$이고, d_r의 최솟값은 $\lfloor \lambda + \frac{1}{2} + \sqrt{\lambda + \frac{1}{4}} \rfloor$에서 나타나며, ($\lambda > 1$일 때) d_r의 최댓값이 $r = 1$에서 나타나는 것은 정확히 $\lambda < 2 + \sqrt{2} \approx 3.414$일 때임이 확인된다.
- $\lambda = 3.36$일 때: $d_1 \approx 0.0820$, $d_2 \approx 0.0794$이므로 d_1이 (근소한 차이로) 가장 크다. $d_4, d_5, d_6 \approx -0.035, -0.061, -0.055$이므로 예측대로 d_5가 가장 작다.
- λ가 작을 때: $\lambda \to 0$이면 $\lambda + \frac{1}{2} + \sqrt{\lambda + \frac{1}{4}} \to 1$이므로 $k = 1$이다. 실제로 이때 확률은 거의 모두 0에 몰려 있고, 가장 큰 감소는 첫 번째 감소인 $p_1 - p_0$이다.

흔한 실수

- $r < \alpha$일 때에도 d_r가 **증가**한다는 점을 잊고, 그 구간에 최솟값이 있을 수 없는 이유(그 구간에서는 $d_r > 0$이다)를 설명하지 않는 실수.
- 소문항 (iii)에서 $d_2 < d_1$만 확인하고, 모든 d_r가 음수여서 수열이 최댓값을 갖지 않는 $\lambda < 1$인 경우를 빠뜨리는 실수.
- $\lambda - 1 \leq m \leq \lambda$라고 쓰는 실수. λ가 정수가 아니기 때문에 바로 부등식에서 등호가 성립하지 않는다.

STEP 너머

차분 d_r와 e_r는 일계 도함수와 이계 도함수(second derivative)의 이산적인 유사물이며, k는 푸아송 분포의 이산적인 "변곡점(point of inflection)"을 나타낸다. λ가 크면 푸아송 분포는 평균(mean)이 λ이고 표준편차(standard deviation)가 $\sqrt{\lambda}$인 정규분포(normal

distribution)에 가까운데, 이 정규분포의 변곡점은 $\lambda \pm \sqrt{\lambda}$이다. 여기서 얻은 $\alpha, \beta \approx \lambda \pm \sqrt{\lambda}$와 비교해 보라. 비 p_r / p_{r-1}을 이용하는 기법은 이산 분포의 최빈값을 구하는 표준적인 방법이며, Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)이나 Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률 입문)에서 더 자세히 다룬다.

풀이

STEP III 2025, 문제 1

순수수학 • 베타 함수 적분

STEP III 2025, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

핵심 아이디어

여기서 쓰는 것은 모두 치환(substitution)이거나 항등식(identity) $x+(1-x)=1$이다. $x \mapsto 1-x$로 뒤집으면 p와 q의 역할이 서로 바뀌고, 피적분함수(integrand)를 $x+(1-x)$로 쪼개면 이웃한 값들 사이의 관계가 생긴다. $x=\sin^2\theta$로 놓으면 적분이 삼각함수의 적분으로 바뀌고, $x=t/(1+t)$로 놓으면 $[0,1)$이 $[0,\infty)$로 늘어난다. 마지막 적분은 앞의 결과들을 차례로 이어 붙여 계산하며, 결국 손으로 직접 계산할 수 있는 $\sin^4\theta$의 적분에 이른다.

풀이

소문항 (i)

$u=1-x$로 치환하면 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}u$이고, $x=0,1$은 각각 $u=1,0$에 대응한다.

$$\mathrm{b}(p,q)=\int_1^0 (1-u)^{p-1}u^{q-1}\,(-\mathrm{d}u)=\int_0^1 u^{q-1}(1-u)^{p-1}\,\mathrm{d}u=\mathrm{b}(q,p).$$

소문항 (ii)

우변의 두 적분을 더하면

$$\begin{aligned}\mathrm{b}(p+1,q)+\mathrm{b}(p,q+1)&=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\big[x+(1-x)\big]\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x=\mathrm{b}(p,q),\end{aligned}$$

이고, 이를 정리하면 $\mathrm{b}(p+1,q)=\mathrm{b}(p,q)-\mathrm{b}(p,q+1)$이다.

이제 $q = p$로 놓자. 소문항 (i)에 의해 $\mathrm{b}(p, p+1) = \mathrm{b}(p+1, p)$이므로

$$\mathrm{b}(p+1,p) = \mathrm{b}(p,p) - \mathrm{b}(p+1,p) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{b}(p+1,p) = \tfrac{1}{2}\mathrm{b}(p,p).$$

소문항 (iii)

$x = \sin^2\theta$로 놓으면 $\mathrm{d}x = 2\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$이고 $1 - x = \cos^2\theta$이다. θ가 0에서 $\frac{1}{2}\pi$까지 움직일 때 x는 0에서 1까지 증가하고, $\sin\theta$와 $\cos\theta$는 모두 음이 아니므로 부호 문제 없이 $x^{p-1} = (\sin\theta)^{2p-2}$, $(1-x)^{q-1} = (\cos\theta)^{2q-2}$이다. 따라서

$$\mathrm{b}(p,q) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin\theta)^{2p-2}(\cos\theta)^{2q-2} \cdot 2\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin\theta)^{2p-1}(\cos\theta)^{2q-1}\,\mathrm{d}\theta.$$

두 번째 결과를 얻기 위해 $q = p$로 놓고 $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$를 이용하면

$$\mathrm{b}(p,p) = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(\tfrac{1}{2}\sin 2\theta\right)^{2p-1}\mathrm{d}\theta = 2^{2-2p}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin 2\theta)^{2p-1}\,\mathrm{d}\theta = 2^{1-2p}\int_0^{\pi} (\sin\phi)^{2p-1}\,\mathrm{d}\phi,$$

이다. 여기서 $\phi = 2\theta$이다.

> ? **생각해 보기** $\mathrm{b}(p,\cdot)$처럼 생긴 $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 위의 적분으로 어떻게 되돌아갈 수 있을까?

$[0,\pi]$에서 $\sin\phi$의 그래프는 $\phi = \frac{1}{2}\pi$에 대하여 대칭(symmetric)이므로($\phi \mapsto \pi - \phi$로 치환해 보면 된다), $[0,\pi]$ 위의 적분은 $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 위의 적분의 두 배이다. 또 삼각함수 꼴에서 $q = \frac{1}{2}$로 놓으면 $(\cos\theta)^{2q-1} = (\cos\theta)^0 = 1$이므로

$$\mathrm{b}\left(p, \tfrac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin\theta)^{2p-1}\,\mathrm{d}\theta.$$

그러므로

$$\mathrm{b}(p,p) = 2^{1-2p}\cdot 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin\phi)^{2p-1}\,\mathrm{d}\phi = 2^{1-2p}\,\mathrm{b}\left(p,\tfrac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{2p-1}}\,\mathrm{b}\left(p,\tfrac{1}{2}\right),$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

소문항 (iv)

t가 0에서 ∞까지 갈 때 x는 0에서 1까지 가고, $1-x$는 간단한 꼴이 되기를 바란다. $x = \dfrac{t}{1+t}$는 두 조건을 모두 만족하며,

$$1 - x = \frac{1}{1+t}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{(1+t)-t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2}.$$

t가 0에서 ∞까지 증가할 때 x는 0에서 1을 향해 증가한다. 따라서

$$\mathrm{b}(p,q) = \int_0^{\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p-1}} \cdot \frac{1}{(1+t)^{q-1}} \cdot \frac{1}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,\mathrm{d}t.$$

소문항 (v)

피적분함수를 소문항 (iv)와 맞추어 보면 $p-1=\frac{3}{2}$이고 $p+q=6$이므로 $p=\frac{5}{2}, q=\frac{7}{2}$이다. 이 적분은 $\mathrm{b}\left(\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right)$이고, 이를 단계적으로 줄여 나간다.

$$\begin{aligned}\mathrm{b}\left(\tfrac{5}{2},\tfrac{7}{2}\right) &= \mathrm{b}\left(\tfrac{7}{2},\tfrac{5}{2}\right) && \text{(i)에 의해}\\ &= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{b}\left(\tfrac{5}{2},\tfrac{5}{2}\right) && \text{(ii)에서} p=\tfrac{5}{2}\\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^4}\,\mathrm{b}\left(\tfrac{5}{2},\tfrac{1}{2}\right) && \text{(iii)에서} p=\tfrac{5}{2}.\end{aligned}$$

마지막으로 삼각함수 꼴에서 $p=\frac{5}{2}, q=\frac{1}{2}$로 놓으면

$$\mathrm{b}\left(\tfrac{5}{2},\tfrac{1}{2}\right)=2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

$\sin^2\theta=\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$를 두 번 이용하면

$$\sin^4\theta=\tfrac{1}{4}\left(1-2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta\right)=\tfrac{1}{8}\left(3-4\cos 2\theta+\cos 4\theta\right).$$

코사인 항들은 $[0,\frac{1}{2}\pi]$에서 적분하면 0이 된다(그 부정적분(antiderivative)인 $\sin 2\theta$와 $\sin 4\theta$가 양 끝에서 모두 0이기 때문이다). 따라서 $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}\pi=\frac{3\pi}{16}$이고 $\mathrm{b}\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{3\pi}{8}$이다. 그러므로

$$\int_0^\infty\frac{t^{\frac{3}{2}}}{(1+t)^6}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{32}\cdot\frac{3\pi}{8}=\frac{3\pi}{256}.$$

검산

- $p=q=1$이면 정의에 의해 $\mathrm{b}(1,1)=1$이고, (ii)에 의해 $\mathrm{b}(2,1)=\frac{1}{2}$이다. 이는 $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$를 직접 계산한 값과 일치한다.
- 또 $p=1$이면 소문항 (iii)에 의해 $\mathrm{b}(1,1)=\frac{1}{2}\,\mathrm{b}(1,\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\int_0^1(1-x)^{-1/2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot 2=1$이다. 서로 일치한다.
- 수치적으로 $3\pi/256\approx 0.036816$이고, 컴퓨터로 $[0,\infty)$에서 $t^{3/2}/(1+t)^6$을 직접 수치 적분하면 소수점 아래 여러 자리까지 일치한다. 크기가 타당한지도 확인해 보자. 피적분함수는 $t=\frac{1}{3}$에서 최댓값 약 0.034를 가지며, 그 봉우리의 폭은 대략 1 정도이므로 값이 백분의 몇 정도라는 것은 그럴듯하다.

흔한 실수

- (iv)에서 $\mathrm{d}x$에서 나오는 인수 $(1+t)^{-2}$를 빠뜨려 지수를 $p+q-2$로 잘못 얻는 경우.

- (iii)에서 $(\sin 2\theta)^{2p-1}$을 θ에 대해 $[0, \frac{1}{2}\pi]$에서만 적분하면서, $\phi = 2\theta$로 놓으면 구간이 두 배가 되고 $\mathrm{d}\theta$가 절반이 된다는 것을 잊는 경우.
- (v)에서 p를 $\frac{3}{2} + 1$이 아니라 지수 $\frac{3}{2}$에 맞추는 경우.

STEP 너머

함수 $\mathrm{b}(p, q)$는 오일러(Euler)의 베타 함수(beta function)이며, 보통 $B(p, q)$로 쓴다. 베타 함수는 $B(p, q) = \Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p + q)$에 의해 감마 함수(gamma function)와 연결되며, 소문항 (iii)의 결과는 Γ에 대한 르장드르(Legendre)의 배적 공식(duplication formula)의 한 형태이다. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$를 이용하면 $3\pi/256$을 한 줄로 다시 얻을 수 있다. 베타 함수는 확률론에서도 베타 분포(beta distribution)의 정규화 상수(normalising constant)로 등장한다. 이러한 적분에 대해 더 알고 싶다면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*를, 베타 분포에 대해서는 Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*를 참고하라.

풀이

STEP III 2025, 문제 2

순수수학 • 반복 함수와 주기성

STEP III 2025, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

이 문제는 *Beyond STEP*의 8.8 절 **주기 3이면 혼돈이다**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch08/period-three.html

핵심 아이디어

이 문제에 나오는 함수는 모두 직선 조각으로 이루어져 있으므로, 문제 전체가 지금 어느 조각 위에 있는지를 놓치지 않는 일이다. 안쪽 함수의 부호를 이용해 절댓값(modulus) 기호를 하나씩 없애면서 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))$와 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)))$를 조각별로 구한다. 그다음 수열(sequence)에 관한 질문은 거꾸로 읽는다. $\mathrm{f}^n(x) = x$의 해는 n번 거친 뒤 자기 자신으로 돌아오는 시작값이고, 7보다 작은 모든 수는 f에 대한 원상(preimage)을 정확히 두 개 가지며, 그 둘은 서로 부호만 반대이다.

풀이

이 풀이 전체에서 $\mathrm{f}^2(x) = \mathrm{f}(\mathrm{f}(x))$, $\mathrm{f}^3(x) = \mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)))$로 쓴다. f는 $|x|$에만 의존하므로 세 함수는 모두 우함수(even function)이다. 따라서 $x \geq 0$에서만 다루고 y축에 대해 대칭이동하면 충분하다.

소문항 (i)

(a) $y = \mathrm{f}(x)$의 그래프는 꼭짓점이 $(0, 7)$이고 기울기가 ∓ 2인 뒤집힌 V자 모양이며, $x = \pm\frac{7}{2}$에서 x축과 만난다.

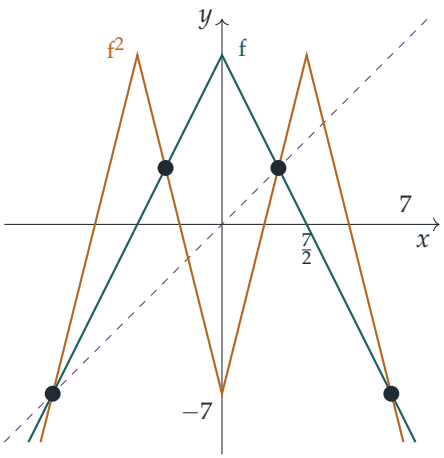
f^2를 구하려면 $\mathrm{f}(x)$의 부호를 알아야 한다. $0 \le x \le \frac{7}{2}$이면 $\mathrm{f}(x) = 7 - 2x \ge 0$이므로

$$\mathrm{f}^2(x) = 7 - 2(7 - 2x) = 4x - 7.$$

$x \ge \frac{7}{2}$이면 $\mathrm{f}(x) \le 0$이므로 $|\mathrm{f}(x)| = 2x - 7$이고

$$\mathrm{f}^2(x) = 7 - 2(2x - 7) = 21 - 4x.$$

따라서 $y = \mathrm{f}^2(x)$는 W자 모양이다. $x = 0$에서 값이 -7이고, $x = \pm\frac{7}{2}$(정확히 f의 값이 0이 되는 곳)에서 높이 7인 봉우리를 가지며, 기울기는 ± 4이고, x절편은 $\pm\frac{7}{4}$와 $\pm\frac{21}{4}$이다. $7 - 2x = 4x - 7$과 $7 - 2x = 21 - 4x$를 풀면 두 그래프가 $(\pm\frac{7}{3}, \frac{7}{3})$과 $(\pm 7, -7)$에서 만남을 알 수 있다.



(청록색: $y = \mathrm{f}(x)$, 호박색: $y = \mathrm{f}^2(x)$, 점선: $y = x$.)

(b) 네 조각 각각에서 방정식을 풀고, 알맞은 범위에 있는 근만 남긴다.

- $0 \le x \le \frac{7}{2}$: $4x - 7 = x$에서 $x = \frac{7}{3}$이고, 이는 범위 안에 있다.
- $x \ge \frac{7}{2}$: $21 - 4x = x$에서 $x = \frac{21}{5} = 4.2$이고, 범위 안에 있다.
- $-\frac{7}{2} \le x \le 0$: 여기서는 $\mathrm{f}^2(x) = -4x - 7$이고, $-4x - 7 = x$에서 $x = -\frac{7}{5}$이며, 범위 안에 있다.
- $x \le -\frac{7}{2}$: 여기서는 $\mathrm{f}^2(x) = 21 + 4x$이고, $21 + 4x = x$에서 $x = -7$이며, 범위 안에 있다.

따라서 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = x$의 해는 정확히 네 개이다.

$$x = -7, \quad -\frac{7}{5}, \quad \frac{7}{3}, \quad \frac{21}{5}.$$

(c) 수열의 주기(period)가 2인 것은 $u_2 = u_0$, 즉 $\mathrm{f}^2(a) = a$이면서 $u_1 \ne u_0$, 즉 $\mathrm{f}(a) \ne a$일 때와 정확히 같다.

? 생각해 보기 (b)의 네 답이 모두 주기가 2인 수열을 만드는가?

그렇지 않다. 그중 둘은 f 자체의 고정점(fixed point)이다. $\mathrm{f}(\frac{7}{3}) = 7 - \frac{14}{3} = \frac{7}{3}$이고 $\mathrm{f}(-7) = 7 - 14 = -7$이다. 이들은 주기가 1인 상수수열을 만든다. 나머지 둘은 서로 자리를 바꾼다.

$$\mathrm{f}\left(-\tfrac{7}{5}\right) = 7 - \tfrac{14}{5} = \tfrac{21}{5}, \qquad \mathrm{f}\left(\tfrac{21}{5}\right) = 7 - \tfrac{42}{5} = -\tfrac{7}{5}.$$

따라서 수열의 주기가 2인 것은 $a = -\frac{7}{5}$ 또는 $a = \frac{21}{5}$일 때와 정확히 같다.

(d) $a = \frac{28}{5}$이면

$$u_1 = 7 - \tfrac{56}{5} = -\tfrac{21}{5}, \qquad u_2 = 7 - \tfrac{42}{5} = -\tfrac{7}{5}, \qquad u_3 = \mathrm{f}\left(-\tfrac{7}{5}\right) = \tfrac{21}{5}.$$

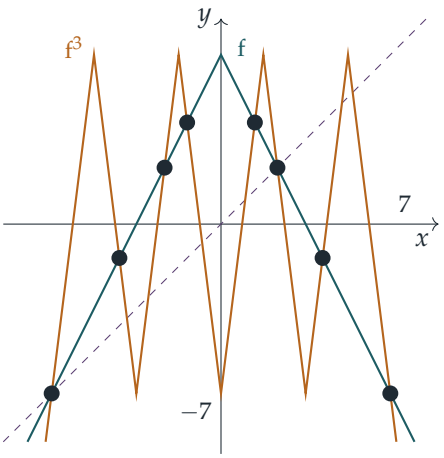
u_2부터는 이 수열이 (c)에서 $-\frac{7}{5}$로 시작하는 수열과 같으므로, $u_2, u_3, u_4, \ldots$는 $-\frac{7}{5}, \frac{21}{5}, -\frac{7}{5}, \ldots$이고 주기가 2이다. 마지막으로 $u_0 = \frac{28}{5}$와 $u_1 = -\frac{21}{5}$는 모두 $u_2 = -\frac{7}{5}$와도, $u_3 = \frac{21}{5}$와도 다르다. ($u_0 \neq u_2$와 $u_1 \neq u_3$만이 아니라 네 쌍을 모두 확인해야 한다.) 이것으로 요구한 바가 보여졌다.

소문항 (ii)

(a) 이제 $\mathrm{f}^2(x)$에 f를 적용하되, f^2의 각 조각을 부호가 바뀌는 지점인 $x = \frac{7}{4}$와 $x = \frac{21}{4}$에서 나눈다. $x \geq 0$일 때

$$\mathrm{f}^3(x) = 7 - 2\left|\mathrm{f}^2(x)\right| = \begin{cases} 7 + 2(4x - 7) = 8x - 7, & 0 \leq x \leq \frac{7}{4}, \\ 7 - 2(4x - 7) = 21 - 8x, & \frac{7}{4} \leq x \leq \frac{7}{2}, \\ 7 - 2(21 - 4x) = 8x - 35, & \frac{7}{2} \leq x \leq \frac{21}{4}, \\ 7 + 2(21 - 4x) = 49 - 8x, & x \geq \frac{21}{4}. \end{cases}$$

이다. 따라서 그래프는 기울기 ± 8로 -7과 7 사이를 지그재그로 오르내린다. 골은 $(0, -7)$과 $(\pm\frac{7}{2}, -7)$에, 봉우리는 $(\pm\frac{7}{4}, 7)$과 $(\pm\frac{21}{4}, 7)$에 있고, $|x| > \frac{21}{4}$에서는 아래로 내려간다. 각 조각과 $7 - 2x$를 같다고 놓고 풀면, 이 그래프는 $y = \mathrm{f}(x)$와 $(\pm\frac{7}{5}, \frac{21}{5})$, $(\pm\frac{7}{3}, \frac{7}{3})$, $(\pm\frac{21}{5}, -\frac{7}{5})$, $(\pm 7, -7)$에서 만난다.



(청록색: $y = \mathrm{f}(x)$, 호박색: $y = \mathrm{f}^3(x)$, 점선: $y = x$.)

(b) $a = 1$에서 시작하면 $u_1 = 7 - 2 = 5$, $u_2 = 7 - 10 = -3$, $u_3 = 7 - 6 = 1$이다. $a = -\frac{7}{9}$에서 시작하면

$$u_1 = 7 - \tfrac{14}{9} = \tfrac{49}{9}, \qquad u_2 = 7 - \tfrac{98}{9} = -\tfrac{35}{9}, \qquad u_3 = 7 - \tfrac{70}{9} = -\tfrac{7}{9}.$$

이다. 따라서 두 수열 모두 세 단계 뒤에 처음 값으로 돌아온다. 즉 이들은 3-주기 궤도(3-cycle) $1 \to 5 \to -3 \to 1$과 $-\frac{7}{9} \to \frac{49}{9} \to -\frac{35}{9} \to -\frac{7}{9}$이다.

3-주기 궤도의 모든 항은 시작값뿐 아니라 모두 $\mathrm{f}^3(x) = x$를 만족하므로, 이로부터 여섯 개의 해 1, 5, -3, $-\frac{7}{9}$, $\frac{49}{9}$, $-\frac{35}{9}$를 얻는다. 또한 f의 고정점(fixed point)은 모두 $\mathrm{f}^3(x) = x$를 만족하므로, 소문항 (i)에서 구한 $\frac{7}{3}$과 -7이 더해진다. 이렇게 해서 서로 다른 해가 여덟 개가 된다.

? **생각해 보기** 해가 더 없다는 것은 어떻게 알 수 있을까?

(ii)(a)의 식을 보면 f^3은 여덟 개의 직선 조각($x \geq 0$에서 네 개, 그리고 이들의 대칭상)으로 이루어져 있고, 각 조각의 기울기는 ± 8이다. 어떤 조각도 $y = x$와 평행하지 않으므로 각 조각은 직선 $y = x$와 많아야 한 번 만나고, 따라서 해는 많아야 여덟 개이다. 여덟 개를 모두 찾았으므로 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))) = x$의 해 전체는

$$x = -7, \quad -\tfrac{35}{9}, \quad -3, \quad -\tfrac{7}{9}, \quad 1, \quad \tfrac{7}{3}, \quad 5, \quad \tfrac{49}{9}.$$

이다. (그림도 이와 일치한다. 점선은 여덟 개의 호박색 선분과 각각 한 번씩 만난다.)

(c) (i)(d)의 아이디어를 그대로 따라 3-주기 궤도에서 거꾸로 거슬러 올라간다. $\mathrm{f}(y) = c$는 $|y| = \frac{1}{2}(7 - c)$를 뜻하므로, $c < 7$인 모든 c는 정확히 두 개의 원상(preimage) $\pm\frac{1}{2}(7 - c)$를 가진다. 궤도 $1 \to 5 \to -3 \to 1$에서 $u_3 = 1$로 잡자. 궤도 안에 있는 1의 원상은 -3이므로,

궤도를 벗어나기 위해 다른 원상 $u_2 = 3$을 택한다. 이 값은 궤도에 속하지 않는다. 그러면

$$\mathrm{f}(u_1) = 3 \;\Rightarrow\; |u_1| = 2, \quad u_1 = 2\text{로 택하고;} \qquad \mathrm{f}(u_0) = 2 \;\Rightarrow\; |u_0| = \tfrac{5}{2}, \quad u_0 = \tfrac{5}{2}\text{로 택한다.}$$

따라서 $a = \frac{5}{2}$가 조건을 만족한다. 앞으로 계산해 확인하면

$$\tfrac{5}{2},\ 2,\ 3,\ 1,\ 5,\ -3,\ 1,\ 5,\ -3,\ \ldots$$

이다. u_3부터 수열은 궤도 $1, 5, -3$을 돌며 주기가 3이고, $u_0, u_1, u_2 = \frac{5}{2}, 2, 3$은 모두 1, 5, -3과 다르다.

(다른 선택도 가능하다. 예를 들어 $a = -\frac{5}{2}$ 또는 $a = \pm\frac{9}{2}$는 $u_1 = -2$로 이어지고, $a = \frac{3}{2}$는 $u_2 = -1$을 거쳐 $u_3 = 5$에서 궤도에 들어간다.)

검산

- 주장한 각 해는 손으로 반복 계산해 볼 수 있다. 예를 들어 $\frac{49}{9} \to -\frac{35}{9} \to -\frac{7}{9} \to \frac{49}{9}$이고, $\frac{28}{5} \to -\frac{21}{5} \to -\frac{7}{5} \to \frac{21}{5} \to -\frac{7}{5}$이다.
- 컴퓨터로 $-30 \le x \le 30$ 범위에서 $\mathrm{f}^3(x) - x$를 조사하면 부호가 바뀌는 곳은 -7, -3.889, -3, -0.778, 1, 2.333, 5, 5.444 근처뿐이며, 이는 여덟 개의 해와 일치한다. 같은 방법으로 $\mathrm{f}^2(x) - x$를 조사하면 -7, -1.4, 2.333, 4.2만 나온다.
- 개수 확인: f^n은 기울기가 $\pm 2^n$인 일차 조각 2^n개로 이루어지므로 $\mathrm{f}^n(x) = x$의 해는 2^n개이다. $n = 2$이면 $4 = 2 + 2$(고정점 두 개와 2-주기 궤도 하나)이고, $n = 3$이면 $8 = 2 + 3 + 3$(고정점 두 개와 3-주기 궤도 두 개)이다.

흔한 실수

- (i)(c)에서 (i)(b)의 해 네 개를 모두 답하는 것. 고정점은 주기가 1이다.
- (ii)(b)에서 1과 $-\frac{7}{9}$만 적거나, 고정점 $\frac{7}{3}$과 -7도 $\mathrm{f}^3(x) = x$를 만족한다는 사실을 잊는 것.
- 그림에서 그래프가 만나는 위치를 잘못 그리는 것. 교점을 대수적으로 구하면 이를 바로잡을 수 있다.

STEP 너머

이 문제는 이산 동역학계(discrete dynamical system)를 처음 맛보는 경험이다. f는 기울기가 2인 텐트 사상(tent map)이므로 f^n은 2^n개의 조각으로 이루어지고, 따라서 모든 주기의 주기점이 존재하며, 이 사상은 혼돈(chaos) 현상의 대표적인 예이다. 샤르코프스키

정리(Sharkovskii's theorem)에 따르면 실직선 위의 연속 사상이 주기 3인 점을 가지면 모든 주기의 점을 가져야 한다. 이것이 바로 "주기 3은 혼돈을 뜻한다(period three implies chaos)"라는 유명한 표어이다. Strogatz의 *Nonlinear Dynamics and Chaos*(비선형 동역학과 혼돈)는 반복 사상을 읽기 쉽게 소개한다.

풀이

STEP III 2025, 문제 3

순수수학 • 평균 부등식

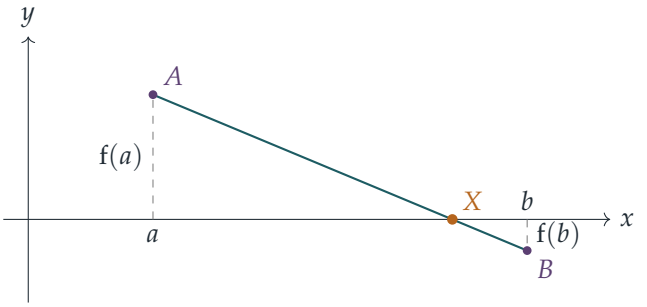
STEP III 2025, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

핵심 아이디어

A는 축 위에, B는 축 아래에 있으므로, 교점 X는 AB를 두 높이의 비 $\mathrm{f}(a) : \mathrm{f}(b)$로 나눈다. 따라서 m은 a와 b의 **가중평균**(*weighted average*)이다. 이후의 모든 내용은 f가 바뀔 때 가중치가 어떻게 변하는지에 관한 것이다. m을 하나의 비 $\mathrm{f}(a)/\mathrm{f}(b)$의 함수로 쓰고 나면, f의 두 가지 선택을 비교하는 일은 두 수를 비교하는 일이 된다.



풀이

소문항 (i)

A, 그 수선의 발 $(a, 0)$, X로 이루어진 삼각형과 B, 그 수선의 발 $(b, 0)$, X로 이루어진 삼각형은 닮음(similar)이다(X에서 맞꼭지각이고, 수선의 발에서 직각이다). 따라서

$$\frac{m-a}{b-m} = \frac{\mathrm{f}(a)}{\mathrm{f}(b)} \quad \Longrightarrow \quad m\,\mathrm{f}(b) - a\,\mathrm{f}(b) = b\,\mathrm{f}(a) - m\,\mathrm{f}(a),$$

이므로

$$\boxed{m = \frac{a\,\mathrm{f}(b) + b\,\mathrm{f}(a)}{\mathrm{f}(a) + \mathrm{f}(b)}}.$$

이다. (분모는 $\mathrm{f} > 0$이므로 양수이다. 직선의 방정식 $y - \mathrm{f}(a) = -\frac{\mathrm{f}(a)+\mathrm{f}(b)}{b-a}(x-a)$에 $y = 0$을 대입해도 같은 답을 얻는다.)

$r = \mathrm{f}(a)/\mathrm{f}(b) > 0$으로 두고 분자와 분모를 $\mathrm{f}(b)$로 나누어 이 식을 다시 써 두면 유용하다.

$$m = \frac{a + br}{1 + r} = b - \frac{b - a}{1 + r}. \qquad (*)$$

소문항 (ii)

$\mathrm{f}(x) = \sqrt{x}$일 때

$$m = \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}\sqrt{b}\,(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \sqrt{ab},$$

이므로 요구한 결과를 얻는다.

두 번째 목표에서는 분수를 정리한 뒤 $a\,\mathrm{f}(b) + b\,\mathrm{f}(a)$에서 분자 $a^{n+1} + b^{n+1}$이 나와야 하므로, $\mathrm{f}(b)$가 b^{-n}처럼 행동해야 한다고 짐작할 수 있다. $x > 0$에서 양수인 $\mathrm{f}(x) = x^{-n}$을 시도하면

$$m = \frac{ab^{-n} + ba^{-n}}{a^{-n} + b^{-n}} = \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{b^n + a^n},$$

이다. 여기서 분자와 분모에 $a^n b^n$을 곱했다. 따라서 $\mathrm{f}(x) = x^{-n}$이 조건을 만족한다(m은 비 $\mathrm{f}(a)/\mathrm{f}(b)$에만 의존하므로, 이것의 양의 상수배도 마찬가지이다). $n = -\frac{1}{2}$이면 첫 번째 결과가 다시 나온다는 점에 주목하자.

소문항 (iii)

$r_1 = \mathrm{g}_1(a)/\mathrm{g}_1(b), r_2 = \mathrm{g}_2(a)/\mathrm{g}_2(b)$로 두자. 둘 다 양수이다. $(*)$에 의해 $M_i = b - \dfrac{b-a}{1+r_i}$이다. $b - a > 0$이므로 식 $b - \frac{b-a}{1+r}$는 $r > 0$에서 r에 대해 순증가(strictly increasing)한다. 따라서 $r_1 > r_2$임을 보이면 충분하다.

생각해 보기 함수 $\mathrm{g}_1/\mathrm{g}_2$에 대한 조건이 어떻게 r_1과 r_2에 대한 조건으로 바뀌는가?

$h = \mathrm{g}_1/\mathrm{g}_2$로 두자. 그러면

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\mathrm{g}_1(a)\,\mathrm{g}_2(b)}{\mathrm{g}_1(b)\,\mathrm{g}_2(a)} = \frac{h(a)}{h(b)} > 1,$$

이다. h가 감소(decreasing)하고 $a < b$이므로 $h(a) > h(b) > 0$이기 때문이다. $r_2 > 0$이므로 $r_1 > r_2$이고, 따라서 $M_1 > M_2$이다.

따라서. m의 값이 세 평균이 되는 세 함수가 필요하다.

- $\mathrm{f}(x) = 1$ (상수)이면 $m = \dfrac{a+b}{2}$이다.
- $\mathrm{f}(x) = \sqrt{x}$이면 소문항 (ii)에 의해 $m = \sqrt{ab}$이다.
- $\mathrm{f}(x) = x$이면 $m = \dfrac{ab+ba}{a+b} = \dfrac{2ab}{a+b}$이다.

이제 방금 증명한 결과를 두 번 적용한다. $\mathrm{g}_1 = 1$, $\mathrm{g}_2 = \sqrt{x}$로 두면 비 $\mathrm{g}_1/\mathrm{g}_2 = x^{-1/2}$는 $x > 0$에서 감소하므로 $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$이다. $\mathrm{g}_1 = \sqrt{x}$, $\mathrm{g}_2 = x$로 두면 비는 다시 $x^{-1/2}$로 감소하므로 $\sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$이다. 종합하면

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}.$$

이다.

소문항 (iv)

곡선이 A와 B를 지나므로

$$\mathrm{f}(a) = p(c-a)^3, \qquad -\mathrm{f}(b) = p(c-b)^3, \ \text{즉 } \mathrm{f}(b) = p(b-c)^3.$$

이다. $\mathrm{f}(b) > 0$이므로 $p \neq 0$이고 $b \neq c$이다. 따라서 나눌 수 있다.

$$\frac{\mathrm{f}(a)}{\mathrm{f}(b)} = \left(\frac{c-a}{b-c}\right)^3.$$

모든 실수는 실수인 세제곱근(cube root)을 정확히 하나 가지므로, 세제곱근을 취하는 과정은 되돌릴 수 있고

$$\frac{c-a}{b-c} = \left(\frac{\mathrm{f}(a)}{\mathrm{f}(b)}\right)^{1/3},$$

이므로 요구한 결과를 얻는다. 우변을 k로 쓰면$(k > 0)$ $c - a = k(b-c)$이므로 $c(1+k) = a + kb$이고

$$c = \frac{a+kb}{1+k} = \frac{a\,\mathrm{f}(b)^{1/3} + b\,\mathrm{f}(a)^{1/3}}{\mathrm{f}(a)^{1/3} + \mathrm{f}(b)^{1/3}},$$

이다. 여기서 분자와 분모에 $\mathrm{f}(b)^{1/3}$을 곱했다.

? 생각해 보기 이 공식을 어디서 본 적이 있는가?

이것은 소문항 (i)의 공식에서 f를 $\mathrm{f}^{1/3}$으로 바꾼 것과 정확히 같으며, 이 함수 역시 $x > 0$에서 정의되고 양수이다. 따라서 c는 함수 $\mathrm{f}^{1/3}$에 대한 m의 값이다. $\mathrm{g}_1 = \mathrm{f}$, $\mathrm{g}_2 = \mathrm{f}^{1/3}$으로 두고 소문항 (iii)을 적용하자.

$$\frac{\mathrm{g}_1(x)}{\mathrm{g}_2(x)} = \mathrm{f}(x)^{2/3}.$$

f가 감소하고 양수이면 $\mathrm{f}^{2/3}$도 그러하다. $t \mapsto t^{2/3}$이 $t > 0$에서 증가하기 때문이다. 그러므로 소문항 (iii)에 의해 $M_1 > M_2$이고, 여기서 $M_1 = m$ (f 자신에 대한 값), $M_2 = c$이다. 따라서 $c < m$이다.

검산

- $a = 1, b = 4$로 두자. 세 평균은 $2.5 > 2 > 1.6$이고, $\mathrm{f} = \sqrt{x}$이면 $m = (1 \cdot 2 + 4 \cdot 1)/3 = 2 = \sqrt{4}$이다.
- $\mathrm{f}(x) = 1/x$, $a = 1$, $b = 4$일 때: $m = \frac{1/4+4}{5/4} = 3.4$이고, $k = 4^{1/3} \approx 1.587$이면 $c \approx 2.84 < 3.4$이므로 소문항 (iv)의 예측과 일치한다. m과 c는 가중평균이므로 당연히 둘 다 a와 b 사이에 있다.
- 소문항 (ii)에서 $n = 0$으로 두면 $\mathrm{f} = 1$이고 $m = \frac{a+b}{2}$이며, $n = -1$로 두면 $\mathrm{f} = x$이고 $m = \frac{2ab}{a+b}$이므로 소문항 (iii)과 일치한다.

이 결과들과, 여러 가지 a, b, f에 대해 모든 결과를 무작위로 시험한 결과는 컴퓨터로 확인하였다.

흔한 실수

- B의 높이가 $-\mathrm{f}(b)$임을 잊는 것. 그러면 분모가 $\mathrm{f}(b) - \mathrm{f}(a)$가 되고, a와 b 사이에 있지 않을 수도 있는 점이 나온다.
- 소문항 (iii)에서 하나의 비 r로 줄이지 않고, 네 함숫값을 한꺼번에 교차곱하여 M_1과 M_2를 비교하려는 것.
- 소문항 (iv)에서 $\mathrm{g}_1 = \mathrm{f}^{1/3}$, $\mathrm{g}_2 = \mathrm{f}$로 순서를 거꾸로 잡는 것. 이때 비 $\mathrm{f}^{-2/3}$는 **증가**하므로, 그 순서로는 소문항 (iii)을 적용할 수 없다.

STEP 너머

여기서의 모든 m은 가중평균 $\lambda a + (1-\lambda)b$이며, 소문항 (iii)은 n에 따라 증가하는 거듭제곱 평균족 $\left(a^{n+1} + b^{n+1}\right)/\left(a^n + b^n\right)$(레머 평균(Lehmer means)) 전체의 순서를 정하는 깔끔한 방법이다. 평균 사이의 부등식과 그 바탕에 있는 볼록성(convexity) 논증은 대학 1학년 해석학의 단골 주제이다. Abbott의 *Understanding Analysis*와 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*는 이런 유형의 논증을 더 많이 접할 수 있는 좋은 책이다.

풀이

STEP III 2025, 문제 4

순수수학 • 곡선의 변환

STEP III 2025, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

핵심 아이디어

평면의 사상(map) T가 역사상(inverse)을 가진다고 하자. 그러면 곡선 $f\left(T^{-1}(x,y)\right)=0$은 곡선 $f(x,y)=0$의 T에 의한 상(image)이다. 어떤 점이 새 곡선 위에 있는 것은 정확히 T^{-1}이 그 점을 옛 곡선 위로 보낼 때이기 때문이다. 소문항 (i)에서는 이를 회전(rotation)에 대하여 보이고, 소문항 (ii)에서는 $T^{-1}=T$인 반사(reflection)에 대하여 같은 일을 한다. 소문항 (iii)에서는 치환(substitution) $u=x-2y$를 하면 주어진 방정식이 $y=\sin x$를 수평 방향으로 층밀림(shear) 변환한 것이 된다는 점을 알아챈다. 그다음 매개변수화(parametrisation)를 이용하면 음함수 미분(implicit differentiation)의 번거로움 없이 접선(tangent)을 구할 수 있다.

풀이

소문항 (i)

행렬의 곱을 전개하면

$$x_2=\frac{x_1-y_1}{\sqrt{2}},\qquad y_2=\frac{x_1+y_1}{\sqrt{2}}.$$

G_2의 방정식에 있는 두 괄호에 $(x,y)=(x_2,y_2)$를 대입하면

$$\frac{x_2}{\sqrt{2}}+\frac{y_2}{\sqrt{2}}=\frac{(x_1-y_1)+(x_1+y_1)}{2}=x_1,$$
$$-\frac{x_2}{\sqrt{2}}+\frac{y_2}{\sqrt{2}}=\frac{-(x_1-y_1)+(x_1+y_1)}{2}=y_1.$$

따라서 (x_2,y_2)에서 G_2의 방정식의 좌변은 $\frac{x_1^2}{9}+\frac{y_1^2}{4}$이다. (x_1,y_1)이 G_1 위에 있으므로 이 값은 1이다. 그러므로 (x_2,y_2)는 G_2 위에 있다.

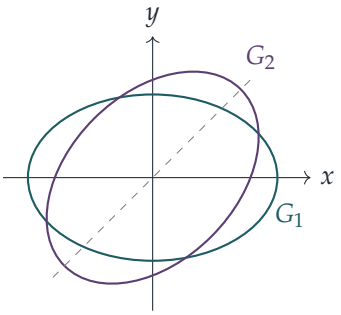
회전에 대해서는 $\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45^\circ = \sin 45^\circ$임에 주목하면, 행렬은

$$R = \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix},$$

즉 원점을 중심으로 시계 반대 방향으로 45° 회전하는 변환이다. 방금 R이 G_1의 모든 점을 G_2 위로 보낸다는 것을 보였다. G_2가 회전된 곡선과 **정확히** 같음을 보이려면 G_2의 모든 점이 G_1에서 온다는 것도 보여야 한다. G_2 위의 임의의 점 (x, y)를 잡고

$$x_1 = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}, \qquad y_1 = -\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}},$$

로 두자. 이것은 $R^{-1}(x, y)$(반대로 45° 되돌리는 회전)이다. G_2의 방정식은 바로 $\frac{x_1^2}{9} + \frac{y_1^2}{4} = 1$을 뜻하므로 $(x_1, y_1) \in G_1$이고, $R(x_1, y_1) = (x, y)$이다. 그러므로 $G_2 = R(G_1)$이다. 즉 타원(ellipse) G_2는 G_1을 원점을 중심으로 시계 반대 방향으로 45° 회전한 것이다.



소문항 (ii)(a)

행렬을 M이라 하자. 점 (x, y)가 불변점(invariant point)인 것은 $M\binom{x}{y} = \binom{x}{y}$일 때, 즉

$$-0.6x + 0.8y = x, \qquad 0.8x + 0.6y = y.$$

일 때이다. 첫째 식에서 $0.8y = 1.6x$, 즉 $y = 2x$를 얻고, 둘째 식에서 $0.8x = 0.4y$를 얻는데 이는 같은 식이다. 따라서 불변점들이 이루는 직선(거울 직선)은

$$y = 2x.$$

이다.

소문항 (ii)(b)

$(X, Y) = M(x, y) = (-0.6x + 0.8y,\ 0.8x + 0.6y)$로 쓰자. 둘째 방정식은 정확히

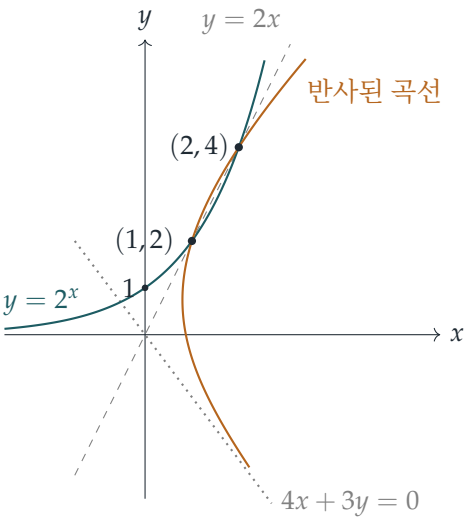
$$Y = 2^X.$$

을 말한다. 따라서 (x, y)가 둘째 그래프 위에 있을 필요충분조건은 $M(x, y)$가 $y = 2^x$ 위에 있는 것이다. 반사는 자기 자신을 되돌리므로($M^2 = I$이며, 직접 곱해 보면 확인할 수 있다) $(x, y) = M(X, Y)$이다. 이는 소문항 (i)의 논증과 같다. 즉 둘째 그래프는 $y = 2^x$를 직선 $y = 2x$에 대하여 반사한 것이다.

> **생각해 보기** 반사된 곡선의 점근선은 어디로 가며, 곡선은 어느 방향으로 무한히 뻗어 나가는가?

$y = 2^x$의 특징을 하나씩 반사해 보자.

- **점근선**(*asymptote*). $x \to -\infty$일 때 $y = 2^x$는 x축에 가까워진다. 방향 $(1, 0)$은 $M(1, 0) = (-0.6, 0.8)$로 반사되므로 x축은 직선 $4x + 3y = 0$, 즉 $y = -\frac{4}{3}x$로 반사된다. 같은 말로, $Y = 0.8x + 0.6y = 2^X > 0$이므로 반사된 곡선은 엄밀히 $4x + 3y > 0$인 쪽에 있고, $X \to -\infty$일 때 $4x + 3y = 0$에 가까워진다. 멀리 떨어진 곳에서 $y = 2^x$의 점들은 X가 절댓값이 큰 음수일 때 대략 $(X, 0)$이고, 이 점들은 대략 $(-0.6X, 0.8X)$로 반사된다. 따라서 반사된 곡선은 제4사분면에서 $x \to +\infty$, $y \to -\infty$로 가며 점근선에 가까워진다.
- **거울 위의 점**. 반사는 $y = 2x$ 위의 모든 점을 고정한다. 그런데 $2^x = 2x$는 $x = 1$과 $x = 2$에서 성립한다($2^x - 2x$가 볼록(convex)하므로 이 두 점에서만 성립한다). 따라서 두 곡선은 모두 $(1, 2)$와 $(2, 4)$를 지나며, 그 점들에서 교차한다. 컴퓨터로 $y = 2^x$를 따라 탐색해 보면 다른 공통점은 발견되지 않는다.
- **그 밖의 점**. $(0, 1)$은 $(0.8, 0.6)$으로 반사된다.
- **가장 왼쪽 점**. 반사된 곡선은 $\left(-0.6t + 0.8 \cdot 2^t,\ 0.8t + 0.6 \cdot 2^t\right)$이다. 이 곡선의 x좌표는 $0.8 \cdot 2^t \ln 2 = 0.6$일 때 최소이며, 그 점은 대략 $(0.80, 0.74)$이다. 그곳에서 접선은 수직이므로, 반사된 곡선은 x의 함수의 그래프가 아니다.
- **증가**. $X \to +\infty$일 때 점 $(X, 2^X)$는 대략 $2^X(0.8, 0.6)$으로 반사된다. 따라서 곡선은 대략 기울기 $\frac{3}{4}$인 방향으로 오른쪽 위로 뻗어 나간다.



소문항 (iii)

$0 \le x \le 2\pi$에서 그래프 $y = \sin x$는 익숙한 한 번의 물결 모양이다.

$y = \sin(x - 2y)$에 대해서는 $u = x - 2y$로 두자. 점 (x, y)가 곡선 위에 있을 필요충분조건은 $y = \sin u$이고, 이때 $x = u + 2y$이다. 따라서 곡선은 정확히

$$x = u + 2\sin u, \qquad y = \sin u.$$

이다. 이것은 $y = \sin x$의 모든 점을 그 높이의 두 배만큼 옆으로 민 것, 즉 수평 층밀림 $(u, v) \mapsto (u + 2v, v)$이다.

어떤 u가 $0 \le x \le 2\pi$를 주는가? $x(u) = u + 2\sin u$라 하자. 그러면 $x(-u) = -x(u)$이고 $x(u + 2\pi) = x(u) + 2\pi$이다. $x'(u) = 1 + 2\cos u$이므로 함수 $x(u)$는 $[0, \frac{2\pi}{3}]$에서 0부터 $\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} \approx 3.83$까지 증가하고, 그다음 $[\frac{2\pi}{3}, \pi]$에서 π까지 감소한다. 따라서 $0 < u \le \pi$에서 그 값은 $(0, 2\pi)$ 안에 있고, $[\pi, 2\pi]$에서는 대칭성 $x(2\pi - u) = 2\pi - x(u)$에 의하여 $(0, 2\pi]$ 안에 있다. $u > 2\pi$이면 수학적 귀납법(induction)에 의하여 $x(u) = x(u - 2\pi) + 2\pi > 2\pi$이고, $u < 0$이면 기함수(odd function) 성질에 의하여 $x(u) < 0$이다. 따라서 구하는 곡선 부분은 u가 0부터 2π까지 움직일 때 $(0, 0)$부터 $(2\pi, 0)$까지 정확히 한 번 그려진다.

접선. 곡선을 따라

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = 1 + 2\cos u, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} = \cos u, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\cos u}{1 + 2\cos u}.$$

$\cos u = 0$이면 $1 + 2\cos u = 1$이므로, 이 두 도함수가 동시에 0이 되는 일은 없다.

▶ 수평 접선은 $\cos u = 0$, 즉 $u = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$인 곳에서 생긴다.

$$\left(\tfrac{\pi}{2} + 2,\ 1\right) \quad \text{그리고} \quad \left(\tfrac{3\pi}{2} - 2,\ -1\right).$$

▶ 수직 접선은 $\cos u = -\frac{1}{2}$, 즉 $u = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$인 곳에서 생긴다.

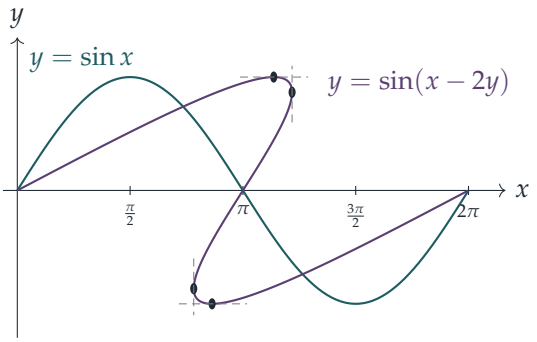
$$\left(\tfrac{2\pi}{3} + \sqrt{3},\ \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{그리고} \quad \left(\tfrac{4\pi}{3} - \sqrt{3},\ -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

수치로는 대략 $(3.57, 1)$, $(2.71, -1)$, $(3.83, 0.87)$, $(2.46, -0.87)$이다.

> **생각해 보기** 꼭대기의 수평 접선은 $x \approx 3.57$에 있는데, 곡선은 그 뒤에도 $x \approx 3.83$까지 간다. 곡선은 실제로 어떤 모양인가?

u를 0부터 2π까지 따라가 보자. 곡선은 기울기 $\frac{1}{3}$($u = 0$을 대입)으로 원점을 떠나는데, 이는 $y = \sin x$보다 완만하다. 곡선은 $(\frac{\pi}{2} + 2, 1)$의 최댓점까지 올라간 다음, 오른쪽 아래로 움직여 $(\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$의 수직 접선에 이른다. 그다음 왼쪽으로 꺾여 돌아오면서 기울기 $\frac{-1}{-1} = 1$로 $(\pi, 0)$을 지난다. $(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$에서 두 번째 수직 접선에 이르고, 오른쪽으로 돌아 최솟점 $(\frac{3\pi}{2} - 2, -1)$을 지나 $(2\pi, 0)$까지 올라간다. 곡선은 부서지는 파도처럼 앞으로 넘어가 있다. $x \approx 2.46$과 $x \approx 3.83$ 사이에서는 각 x에 대하여 y의 값이 세 개 있다. 전체 그림은 $(\pi, 0)$에 대하여 반 바퀴 회전 대칭(half-turn symmetry)이다.

참고로, 두 그래프는 $\sin x = \sin(x - 2\sin x)$인 곳에서 만난다. $\sin x = 0$이어서 $x = 0, \pi, 2\pi$이거나, $x - \sin x = \frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{3\pi}{2}$이어서 $x \approx 2.31$과 $x \approx 3.97$이다.



검산

▶ 소문항 (i): G_1의 꼭짓점 $(3, 0)$을 잡자. 이 점은 $(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}})$로 옮겨지고, G_2의 방정식의 두 괄호는 각각 3과 0이 되므로 좌변은 1이다.

▶ 소문항 (ii): $M\binom{1}{2} = \binom{-0.6+1.6}{0.8+1.2} = \binom{1}{2}$이며, 불변점이라면 마땅히 그래야 한다. 점 $(1, 2)$는 둘째 방정식도 만족한다: $0.8 + 1.2 = 2 = 2^{-0.6+1.6}$.

▶ 소문항 (iii): $(\frac{\pi}{2} + 2, 1)$에서 $x - 2y = \frac{\pi}{2}$이고, $\sin\frac{\pi}{2} = 1 = y$이다. 마찬가지로 $(\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$에서는 $x - 2y = \frac{2\pi}{3}$이고, $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$이다. 음함수 미분을 하면 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\cos(x-2y)}{1+2\cos(x-2y)}$를 얻는다. 이 식의 분자는 첫째 점에서 0이고, 분모는 둘째 점에서 0이다.

흔한 실수

- G_1이 G_2 안으로 옮겨진다는 것만 보이는 것. G_2가 회전된 곡선이다라고 말하려면 G_2의 모든 점이 G_1에서 온다는 것, 즉 역사상에 대한 논증도 필요하다.
- $y = \sin(x - 2y)$를 x의 함수로 취급하여, 곡선을 앞으로 넘어간 부분 없이 한 번의 물결로 그리는 것. 수직 접선이 있는 곳이 바로 곡선이 접혀 되돌아오는 곳이다.
- 반사된 지수함수가 비스듬한 점근선 $4x + 3y = 0$을 가지며 전체가 그 한쪽에만 놓인다는 것을 잊는 것.

STEP 너머

이 문제의 바탕에 있는 원리는, 역사상을 가지는 사상 T를 곡선 $f(x, y) = 0$에 적용하면 곡선 $f\left(T^{-1}(x, y)\right) = 0$이 된다는 것이다. 대학 1학년 선형대수(linear algebra) 과목에서 이는 기저 변환(change of basis)에 따라 이차형식(quadratic form)이 어떻게 바뀌는지에 대한 연구가 된다. 원뿔곡선(conic)에서 xy항을 없애기 위해 축을 회전하는 것은 대칭행렬(symmetric matrix)을 대각화(diagonalising)하는 일의 2차원 경우이다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수 입문)는 회전, 반사와 그 고유벡터(eigenvector)를 매우 읽기 쉽게 다룬다((ii)(a)의 불변 직선은 고윳값(eigenvalue) 1에 대응하는 고유벡터이다).

풀이

STEP III 2025, 문제 5

순수수학 • 3차원 벡터

STEP III 2025, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

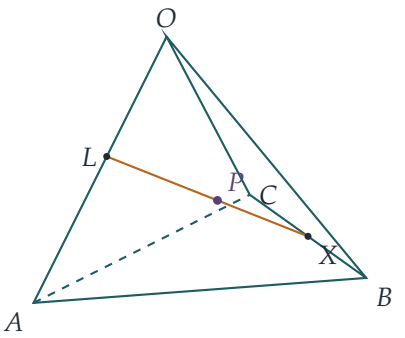
www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

핵심 아이디어

O가 한 직선 위에 있지 않은 세 점 A, B, C가 이루는 평면 위쪽에 있으므로 벡터 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$는 일차독립(linearly independent)이다. 따라서 이 벡터들로 쓴 벡터 방정식에서는 언제나 **계수를 비교**(*compare coefficients*)할 수 있다. 문제에 나오는 모든 점은 미지의 매개변수로 나타낸 뒤 계수를 맞추어 구한다. 평면으로부터의 높이는 계수에 일정한 수를 곱한 것일 뿐이므로 "수평"이라는 조건을 다루기 쉽다.

풀이

O는 평면 ABC 위에 있지 않으므로 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 중 어느 것도 나머지 두 벡터의 일차결합으로 나타낼 수 없다(예를 들어 $\mathbf{c} = p\mathbf{a} + q\mathbf{b}$이면 O, A, B, C가 한 평면 위에 있게 된다). 따라서 $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} = x'\mathbf{a} + y'\mathbf{b} + z'\mathbf{c}$이면 반드시 $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$이다. 또한 $k > 0$임에 주목한다.



소문항 (i)

$\overrightarrow{OL} = \lambda\mathbf{a}$, $\overrightarrow{OX} = (1-t)\mathbf{b} + t\mathbf{c}$로 놓는다. P가 LX 위에 있으므로 어떤 s에 대하여

$$\overrightarrow{OP} = (1-s)\lambda\,\mathbf{a} + s(1-t)\,\mathbf{b} + st\,\mathbf{c}.$$

이를 $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$와 비교하면

$$(1-s)\lambda = \alpha, \qquad s(1-t) = \beta, \qquad st = \gamma.$$

뒤의 두 식을 더하면 $s = \beta + \gamma$이고, 따라서 $t = \gamma/(\beta+\gamma)$이므로

$$\overrightarrow{OX} = \frac{\beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}}{\beta+\gamma}.$$

마지막으로 $1 - s = 1 - \beta - \gamma = k + \alpha$이고 이는 양수이므로

$$\overrightarrow{OL} = \frac{\alpha}{1-s}\,\mathbf{a} = \frac{\alpha}{k+\alpha}\,\mathbf{a},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. (계수가 하나로 정해지므로 L과 X는 유일하다. 또 $0 < s < 1$이고 $0 < t < 1$이므로 P는 L과 X 사이에 엄격하게 놓이고, X는 B와 C 사이에 엄격하게 놓인다.)

소문항 (ii)

문자를 순환시켜($\mathbf{a} \to \mathbf{b} \to \mathbf{c} \to \mathbf{a}$, $\alpha \to \beta \to \gamma \to \alpha$) 같은 논증을 적용하면

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\beta}{k+\beta}\mathbf{b}, \quad \overrightarrow{ON} = \frac{\gamma}{k+\gamma}\mathbf{c}, \quad \overrightarrow{OY} = \frac{\gamma\mathbf{c} + \alpha\mathbf{a}}{\gamma+\alpha}, \quad \overrightarrow{OZ} = \frac{\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}}{\alpha+\beta}.$$

생각해 보기 주어진 세 점을 지나는 평면이 수평인지 어떻게 알 수 있을까?

세 점의 높이가 모두 같을 때, 그리고 그때에만 평면은 수평이다. O가 평면 ABC로부터 높이 $h > 0$인 곳에 있다고 하자. 그러면 A, B, C는 각각 O보다 수직 거리 h만큼 아래에 있으므로, OA 위의 점 $\mu\mathbf{a}$는 O보다 μh만큼 아래에 있고, OB와 OC 위의 점도 마찬가지이다. 따라서 L, M, N(서로 다른 세 모서리 위에서 O가 아닌 곳에 있으므로 한 직선 위에 있지 않다)은 O보다 각각

$$\frac{\alpha h}{k+\alpha}, \qquad \frac{\beta h}{k+\beta}, \qquad \frac{\gamma h}{k+\gamma}$$

만큼 아래에 있다. 이제

$$\frac{\alpha}{k+\alpha} = \frac{\beta}{k+\beta} \iff \alpha k + \alpha\beta = \beta k + \alpha\beta \iff k(\alpha-\beta) = 0 \iff \alpha = \beta,$$

이며, 여기서 $k > 0$을 이용하였다. 다른 쌍에 대해서도 마찬가지이므로

$$\text{평면}LMN\text{이 수평이다} \iff \alpha = \beta = \gamma.$$

다음으로, OP는 평면 ABC와 어디에서 만나는가? 점 $x\mathbf{a}+y\mathbf{b}+z\mathbf{c}$가 그 평면 위에 있을 필요충분조건은 $x+y+z=1$이다(이때 그 점은 $\mathbf{a}+y(\mathbf{b}-\mathbf{a})+z(\mathbf{c}-\mathbf{a})$이고, 평면 위의 모든 점은 이 꼴이다). 점 $\mu\overrightarrow{OP}$의 계수의 합은 $\mu(\alpha+\beta+\gamma)$이므로 직선 OP는 평면과

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

에서 만난다. 계수를 비교하면 이것이 $\frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$와 같을 필요충분조건은

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{1}{3},$$

즉 $\alpha=\beta=\gamma$이다. 두 조건이 모두 $\alpha=\beta=\gamma$와 동치이므로, 평면 LMN이 수평일 필요충분조건은 OP가 평면 ABC와 삼각형 ABC의 무게중심(centroid) G에서 만나는 것이다. 이로써 "증명하라" 부분이 끝난다.

이 경우 $\overrightarrow{OX}=\frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c})$이고, Y와 Z에 대해서도 마찬가지이다. 즉 점 X, Y, Z는 각각 BC, CA, AB의 **중점(midpoint)**이다.

소문항 (iii)

다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\overrightarrow{OP}=k\,\mathbf{0}+\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c},\qquad k+\alpha+\beta+\gamma=1,$$

여기서 네 가중치 k,α,β,γ는 모두 양수인데, 이는 바로 $\alpha+\beta+\gamma<1$이기 때문이다. 따라서 P는 O, A, B, C의 가중치가 모두 양수인 가중평균이고, 이는 P가 사면체(tetrahedron) $OABC$의 **내부**에 엄격하게 놓인다는 뜻이다.

달리 말하면, α, β, γ가 양수라는 것만으로 P는 모서리 OA, OB, OC가 생성하는, 꼭짓점이 O인 무한한 삼면 뿔 안에 놓인다. P가 O보다 아래에 있는 깊이는 $(\alpha+\beta+\gamma)h$이므로, 조건 $\alpha+\beta+\gamma<1$은 P가 평면 ABC 위쪽, 즉 O와 같은 쪽에 있다는 뜻이다. (합이 1이면 P는 면 ABC 위에 있고, 1보다 크면 그 너머에 있다.)

검산

- $\alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{4}$로 놓으면 $k=\frac{1}{4}$이다. 그러면 $\overrightarrow{OL}=\frac{1}{2}\mathbf{a}$, $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\mathbf{b}$, $\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\mathbf{c}$이고, 소문항 (ii)가 예측하는 대로 LMN은 분명히 수평인 중간 단면이다.
- $k\to 0$일 때(P가 면 ABC에 가까워질 때) $\overrightarrow{OL}\to\mathbf{a}$이다. 즉 L이 A로 내려오는데, 이때 L, P, X가 모두 평면 ABC 위에 놓이므로 타당하다.
- 무작위로 만든 사면체 2000개와 무작위 α,β,γ로 컴퓨터 검사를 한 결과, P가 LX 위에 있음(잔차 약 10^{-15})과, G가 무게중심일 때 그리고 그때에만 LMN이 수평임을 확인하였다.

흔한 실수

- 왜 계수 비교가 허용되는지 말하지 않고 계수를 비교하는 것. 계수 비교에는 **a**, **b**, **c**가 일차독립이어야 하고, 바로 여기에서 "O가 평면 위쪽에 있다"는 조건이 쓰인다.
- $k(\alpha - \beta) = 0$에서 약분하려면 $k > 0$이 필요하다는 것을 잊는 것.
- "필요충분조건"의 한 방향만 증명하는 것.

STEP 너머

수 $(k, \alpha, \beta, \gamma)$는 사면체 $OABC$에 대한 P의 **무게중심 좌표**(*barycentric coordinates*)이다. 점이 내부에 있을 필요충분조건은 이 좌표가 모두 양수인 것이고, 그중 하나가 0이면 점은 면 위에 있다. 무게중심 좌표는 아핀 기하학(affine geometry)의 자연스러운 좌표이며, 선형대수학(linear algebra)(아핀 결합(affine combination)과 볼록 껍질(convex hull))과 컴퓨터 그래픽스에서 다시 등장한다. 컴퓨터 그래픽스에서는 무게중심 가중치로 보간하여 삼각형에 음영을 입힌다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 일차독립과 좌표가 이런 식으로 쓰이는 모습을 보기에 좋은 책이다.

풀이

STEP III 2025, 문제 6

순수수학 • 근의 대칭함수

> **STEP III 2025, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

핵심 아이디어

$a+b+c$, $a^2+b^2+c^2$, $a^3+b^3+c^3$에 대한 조건은 사실상 기본 대칭함수(elementary symmetric functions) $a+b+c$, $ab+bc+ca$, abc에 대한 조건이다. 이렇게 바꾸어 놓으면 (i)에서는 세 수가 아주 간단한 다항식의 근이 되고, (ii)와 (iii)에서는 잘 알려진 인수분해(factorisation)가 모든 일을 해 준다. 마지막 문항은 같은 대수 계산을 거꾸로 하는 것이다.

풀이

소문항 (i)

$a+b+c=0$의 양변을 제곱하면

$$0=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=2(ab+bc+ca),$$

이므로 $ab+bc+ca=0$도 성립한다.

모두 실수일 수는 없다. a, b, c가 모두 실수라면 a^2, b^2, c^2은 합이 0인 음이 아닌 실수이므로 $a=b=c=0$이어야 한다. 이는 세 수가 0이 아니라는 조건에 모순이므로, 세 수가 모두 실수일 수는 없다.

절댓값이 같다. $p=abc$라 하면 p는 0이 아니다. $a+b+c=0$이고 $ab+bc+ca=0$이므로

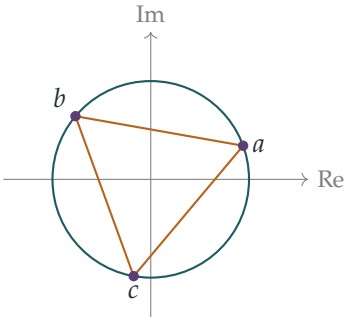
$$(z-a)(z-b)(z-c)=z^3-(a+b+c)z^2+(ab+bc+ca)z-abc=z^3-p.$$

따라서 a, b, c는 각각 $z^3=p$의 근이다. 즉

$$a^3=b^3=c^3=p.$$

절댓값(modulus)을 취하면 $|a|^3 = |b|^3 = |c|^3 = |p|$이고, 절댓값은 음이 아닌 실수이므로 $|a| = |b| = |c| = |p|^{1/3}$이다. 따라서 a, b, c의 절댓값은 모두 같다.

사실 a, b, c는 p의 세 세제곱근(cube roots)이며, 원점을 중심으로 하는 정삼각형의 꼭짓점에 놓인다.



소문항 (ii)

$a + b + c = 0$이라 하자. 그러면 $c = -(a + b)$이고

$$a^3 + b^3 + c^3 = a^3 + b^3 - (a + b)^3 = -3a^2b - 3ab^2 = -3ab(a + b) = 3abc.$$

여기에 $a^3 + b^3 + c^3 = 0$까지 성립하면 $abc = 0$이므로, 세 수 중 적어도 하나는 0이다. 따라서 두 성질을 모두 만족하는 0이 아닌 세 복소수는 존재하지 않는다.

소문항 (iii)

이번에 쓸모 있는 항등식(identity)은

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a),$$

이며, 전개하여 확인할 수 있다. 양변 모두 a^2b, ab^2 등을 각각 세 번씩, abc를 여섯 번 포함한다.

이제 $d = -(a + b + c)$이므로 $d^3 = -(a + b + c)^3$이고

$$0 = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = a^3 + b^3 + c^3 - (a + b + c)^3 = -3(a + b)(b + c)(c + a).$$

생각해 보기 곱이 0이라는 사실이 왜 절댓값에 대해 무언가를 알려 주는가?

복소수들의 곱이 0이 되는 것은 어느 한 인수가 0일 때뿐이다. 따라서 $a + b$, $b + c$, $c + a$ 중 하나는 0이다. $a + b = 0$이라 하자(나머지 경우는 문자의 이름만 바꾸면 같다). 그러면 $b = -a$이므로 $|b| = |a|$이다. 따라서 네 수 중 적어도 두 수는 절댓값이 같다.

(여기서는 $d \neq 0$이라는 조건도, 네 수가 0이 아니라는 조건도 쓰지 않았다. 결론은 단순히 네 수가 $a, -a, c, -c$처럼 서로 부호만 다른 두 쌍으로 나뉜다는 것이다.)

소문항 (iv)

$c=1, d=-2, e=3$으로 두면

$$c+d+e=2, \qquad c^3+d^3+e^3=1-8+27=20,$$

이므로 다음을 만족하는 실수 a, b가 필요하다.

$$a+b=-2, \qquad a^3+b^3=-20.$$

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$를 이용하면 두 번째 조건은

$$-20=-8+6ab \quad \Longrightarrow \quad ab=-2.$$

가 된다. 따라서 a와 b는 $t^2+2t-2=0$의 근, 곧

$$a=-1+\sqrt{3}, \qquad b=-1-\sqrt{3},$$

이며, 판별식(discriminant) $4+8=12$가 양수이므로 실수이다. 두 수의 크기는 $\sqrt{3}-1\approx 0.73$과 $\sqrt{3}+1\approx 2.73$이고, 어느 것도 1, 2, 3이 아니다(둘 다 무리수이다). 따라서

$$-1+\sqrt{3}, \quad -1-\sqrt{3}, \quad 1, \quad -2, \quad 3$$

은 크기가 서로 다르고, 합이 0이며, 세제곱의 합도 0인 다섯 실수이다.

검산

- (i)에서 1의 세제곱근 $1, \omega, \omega^2$은 $1+\omega+\omega^2=0$과 $1+\omega^2+\omega^4=1+\omega^2+\omega=0$을 만족한다. 예측대로 모두 절댓값이 1이고, 모두 실수인 것은 아니다.
- (iii)에서 $a=2, b=-2, c=\mathrm{i}, d=-\mathrm{i}$를 대입해 보면 두 합이 모두 0이고, 실제로 네 수는 부호만 다른 쌍으로 짝지어진다.
- (iv)에서 $(\sqrt{3}-1)^3=6\sqrt{3}-10$과 $(-1-\sqrt{3})^3=-6\sqrt{3}-10$을 이용하여 수치로 계산하면 $0.7320-2.7320+1-2+3=0$이고 $0.3923-20.3923+1-8+27=0$이다.

흔한 실수

- (i)에서 $a^3=b^3$으로부터 "세제곱근을 취하여" $|a|=|b|$라고 결론짓는 것. a와 b가 같을 필요는 없지만, 절댓값은 음이 아닌 실수이므로 절댓값은 같다.
- (iii)에서 $(a+b)(b+c)(c+a)=0$이면 **왜** 한 인수가 0이어야 하는지 밝히지 않는 것($\mathbb{C}$에는 영인자(zero divisor)가 없다).
- (iv)에서 a와 b의 크기가 1, 2, 3과 다르고 서로도 다르다는 것을 확인하지 않는 것.

STEP 너머

여러 변수의 대칭다항식(symmetric polynomial)은 모두 기본 대칭다항식으로 나타낼 수 있으며, 뉴턴 항등식(Newton's identities)은 거듭제곱 합 $a^k + b^k + c^k + \ldots$과의 관계를 명시적으로 알려 준다. 이 문제의 조건들이 수들을 그토록 강하게 결정하는 것은 이 때문이다. 이와 가까운 문제로 프루에–태리–에스콧 문제(Prouhet–Tarry–Escott problem)가 있다. 서로 다른 두 정수 집합 가운데 일제곱, 이제곱, ..., k제곱의 합이 모두 같은 것을 찾는 문제로, 아직 부분적으로 풀리지 않은 채 남아 있다. 다항식과 그 근의 대수학에 대해서는 Allenby, *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)를 참고하라.

풀이

STEP III 2025, 문제 7

순수수학 • 역탄젠트 함수

> **STEP III 2025, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

핵심 아이디어

모든 것은 하나의 사실에 달려 있다. $(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)=1$이므로 $\mathrm{f}(x)\,\mathrm{f}(-x)=1$이다. 이 사실과 $\mathrm{f}(x)>0$을 함께 쓰면 $\mathrm{g}(x)+\mathrm{g}(-x)$는 익숙한 $\tan^{-1}t+\tan^{-1}(1/t)$의 꼴이 된다. (c)에서 $\tan\frac{1}{2}\theta$는 반각(half-angle) 탄젠트이며, $\tan\theta=1/x$로 두면 이것은 $\mathrm{f}(x)$로 간단해진다. $x>0$에서 g와 k가 일치한다는 것을 알고 나면, (e)의 두 적분은 대칭성으로 서로 연결된다.

풀이

소문항 (i)

$x\neq 0$이면 $x^2=|x|^2$이므로

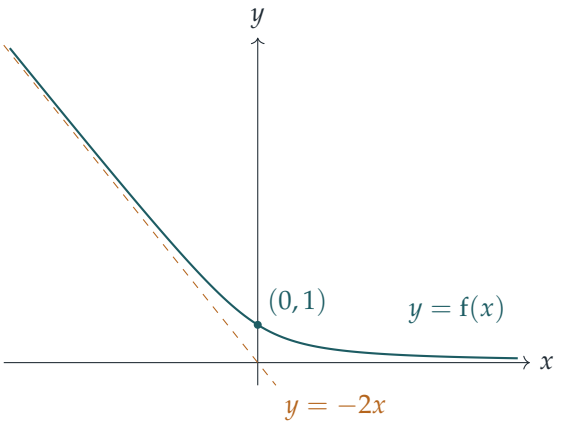
$$\sqrt{x^2+1}=|x|\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{1/2}=|x|\left(1+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{8x^4}+\cdots\right)=|x|+\frac{1}{2|x|}-\frac{1}{8|x|^3}+\cdots,$$

이다. 여기서 이항급수(binomial series)를 사용했는데, $|x|$가 클 때 $1/x^2<1$이므로 이 전개는 유효하다. $|x|^{-3}$ 차수의 항들을 버리면 요구한 대로 $\sqrt{x^2+1}\approx|x|+\dfrac{1}{2|x|}$를 얻는다.

그래프 그리기. 먼저 사실들을 모아 보자.

- $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|\geq x$이므로 모든 x에 대하여 $\mathrm{f}(x)>0$이다. 또한 $\mathrm{f}(0)=1$이다.
- $x<\sqrt{x^2+1}$이므로 $\mathrm{f}'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1<0$이고, 따라서 f는 감소함수(decreasing function)이다. 게다가 $\mathrm{f}''(x)=(x^2+1)^{-3/2}>0$이므로 곡선은 아래로 볼록(convex)하다.

- $x \to +\infty$일 때: $\mathrm{f}(x) \approx x + \frac{1}{2x} - x = \frac{1}{2x} \to 0^+$이므로 x축이 점근선(asymptote)이다.
- $x \to -\infty$일 때: $|x| = -x$이므로 $\mathrm{f}(x) \approx -2x + \frac{1}{2|x|}$이다. 직선 $y = -2x$는 사선 점근선(oblique asymptote)이고, 곡선은 그 바로 위에 놓인다.



소문항 (ii)(a)

제곱의 차(difference of two squares)를 전개하면

$$\mathrm{f}(x)\,\mathrm{f}(-x) = \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+1} + x\right) = (x^2+1) - x^2 = 1,$$

이므로 $\mathrm{f}(-x) = 1/\mathrm{f}(x)$이다. $t = \mathrm{f}(x)$로 두면, 소문항 (i)에 의해 t는 양수이다. 그러면

$$\mathrm{g}(x) + \mathrm{g}(-x) = \tan^{-1} t + \tan^{-1}\frac{1}{t}.$$

? **생각해 보기** $\tan^{-1} t + \tan^{-1}(1/t) = \frac{1}{2}\pi$가 성립하려면 왜 $t > 0$이 필요한가?

$\alpha = \tan^{-1} t$라 하자. $t > 0$이므로 $\alpha \in (0, \frac{1}{2}\pi)$이고, 따라서 $\frac{1}{2}\pi - \alpha$도 $(0, \frac{1}{2}\pi)$에 속하며 이 구간은 $\tan^{-1}$의 치역 안에 있다. 그 탄젠트 값은 $\cot\alpha = 1/t$이므로 $\tan^{-1}(1/t) = \frac{1}{2}\pi - \alpha$이다. 따라서 $\mathrm{g}(x) + \mathrm{g}(-x) = \frac{1}{2}\pi$이다. ($t < 0$이면 합은 대신 $-\frac{1}{2}\pi$가 되며, 이 때문에 f가 양수라는 사실이 중요하다.)

소문항 (ii)(b)

$\tan^{-1}$은 홀함수(odd function)이므로 $x \neq 0$에 대하여

$$\mathrm{k}(-x) = \tfrac{1}{2}\tan^{-1}\left(-\frac{1}{x}\right) = -\tfrac{1}{2}\tan^{-1}\frac{1}{x} = -\mathrm{k}(x),$$

이고, 이는 $\mathrm{k}(x) + \mathrm{k}(-x) = 0$을 뜻한다.

소문항 (ii)(c)

$x > 0$이고 $\theta = \tan^{-1}(1/x)$라 하면 $\theta \in (0, \frac{1}{2}\pi)$이고 $\mathrm{k}(x) = \frac{1}{2}\theta$이다. 대변이 1이고 이웃변이 x인 직각삼각형을 생각하면 $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$이다. 반각 공식 $\tan\frac{1}{2}\theta = \dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$($1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{1}{2}\theta$와 $\sin\theta = 2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta$에서 얻어진다)를 사용하면

$$\tan \mathrm{k}(x) = \frac{1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}} = \sqrt{x^2+1} - x = \mathrm{f}(x) = \tan \mathrm{g}(x).$$

이로써 결과가 증명된다.

더 말할 것이 있다. $x > 0$이면 $\mathrm{k}(x) \in (0, \frac{1}{4}\pi)$이다. 또한 $0 < \mathrm{f}(x) < \mathrm{f}(0) = 1$이므로 $\mathrm{g}(x) \in (0, \frac{1}{4}\pi)$이기도 하다. tan은 이 구간에서 일대일(one-to-one)이므로

$$\mathrm{k}(x) = \mathrm{g}(x) \quad \text{단, } x > 0.$$

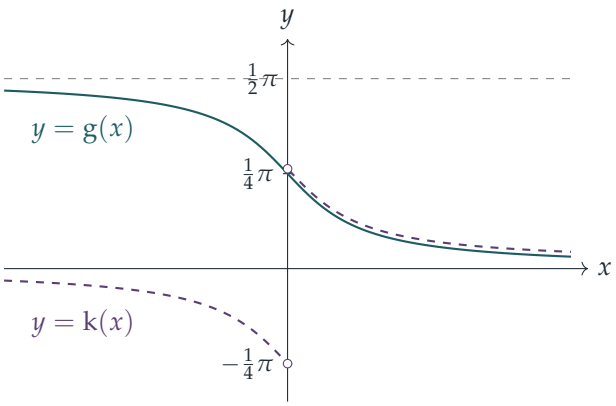
$x < 0$이면 $-x > 0$이므로, (b), 방금 얻은 결과, (a)를 차례로 적용하면

$$\mathrm{k}(x) = -\mathrm{k}(-x) = -\mathrm{g}(-x) = \mathrm{g}(x) - \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{단, } x < 0.$$

소문항 (ii)(d)

$\tan^{-1}$(증가)과 f(감소)가 모두 단조(monotonic)이므로 $\mathrm{g} = \tan^{-1}\circ\mathrm{f}$는 감소함수이다. $x \to -\infty$일 때 $\mathrm{f} \to \infty$이고 $\mathrm{g} \to \frac{1}{2}\pi$이다. $x \to +\infty$일 때 $\mathrm{f} \to 0^+$이고 $\mathrm{g} \to 0$이다. 또한 $\mathrm{g}(0) = \tan^{-1}1 = \frac{1}{4}\pi$이고, (a)에 의해 그래프는 점 $(0, \frac{1}{4}\pi)$에 대하여 회전대칭(rotational symmetry)이다.

(c)에 의해 $x > 0$에서 k의 그래프는 g의 그래프와 같으며, $\frac{1}{4}\pi$(이 값에 도달하지는 않는다)에서 0을 향해 내려간다. $x < 0$에서는 g의 그래프를 $\frac{1}{2}\pi$만큼 아래로 평행이동한 것으로, 0($x \to -\infty$일 때)에서 $x \to 0^-$일 때 $-\frac{1}{4}\pi$를 향해 내려간다. 따라서 k는 홀함수이고, 정의되지 않는 $x = 0$에서 $\frac{1}{2}\pi$만큼 불연속적으로 뛴다.



($x > 0$에서는 두 곡선이 일치한다. 그 구간에서 점선 곡선을 실선보다 약간 위에 그린 것은 두 곡선을 모두 볼 수 있게 하기 위해서일 뿐이다.)

소문항 (ii)(e)

$x > 0$에 대하여 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan^{-1}\dfrac{1}{x} = \dfrac{-1/x^2}{1+1/x^2} = -\dfrac{1}{1+x^2}$이다. $\tan^{-1}(1/x)$를 미분하고 1을 적분하는 방식으로 부분적분(integration by parts)을 하면

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{k}(x)\,\mathrm{d}x &= \tfrac{1}{2}\left[x\tan^{-1}\frac{1}{x}\right]_0^1 + \tfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{4}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\ln 2.\end{aligned}$$

아래끝에서는 $\tan^{-1}(1/x)$가 $\frac{1}{2}\pi$보다 작게 유지되므로 $x \to 0^+$일 때 $x\tan^{-1}(1/x) \to 0$이다. (피적분함수(integrand)가 유계이므로 이 적분은 이상적분(improper integral)이 아닌 온전한 정적분이다.)

따라서. (c)에 의해 $-1 \le x < 0$에서 $\mathrm{g}(x) = \mathrm{k}(x) + \frac{1}{2}\pi$이다. (b)에 의해 k는 홀함수이므로 $\int_{-1}^0 \mathrm{k}(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \mathrm{k}(x)\,\mathrm{d}x$이다. 그러므로

$$\int_{-1}^0 \mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\pi - \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\ln 2\right) = \frac{3\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2.$$

검산

- $[-1,0]$에서 g는 $\mathrm{g}(-1) = \tan^{-1}(\sqrt{2}+1) = \frac{3}{8}\pi \approx 1.178$에서 $\frac{1}{4}\pi \approx 0.785$로 감소하므로, 적분값은 이 두 값 사이에 있어야 한다. 우리의 답은 $\frac{3}{8}\pi - \frac{1}{4}\ln 2 \approx 1.0048$이고, 수치적분(numerical quadrature)으로도 소수점 아래 열 자리까지 같은 값을 얻는다. 마찬가지로 $\int_0^1 \mathrm{k}\,\mathrm{d}x \approx 0.56599$이다.

- 미분하면 $\mathrm{g}'(x) = -\dfrac{1}{2(1+x^2)}$이므로, 실제로 $\mathrm{g}(x) = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\tan^{-1} x$이다. 이 식을 보면 (a)는 자명하고, 이를 직접 적분하면 (e)의 답이 다시 나온다.
- $x = 1$에서: $\mathrm{f}(1) = \sqrt{2} - 1 = \tan\frac{1}{8}\pi$이고 $\mathrm{k}(1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{8}\pi$로, (c)가 예측한 대로이다.

흔한 실수

- 모든 큰 $|x|$에 대하여 $\sqrt{x^2+1} \approx x + \frac{1}{2x}$라고 쓰는 것. 음수 x에 대해서는 부호가 틀리며, 점근선 $y = -2x$를 가려 버린다.
- (c)로부터 모든 곳에서 $\mathrm{k} = \mathrm{g}$라고 결론짓는 것. 탄젠트 값이 같으면 각은 π의 배수 차이를 제외하고만 같으며, $x < 0$에서 두 함수는 $\frac{1}{2}\pi$만큼 차이 난다.
- 부분적분에서 0에서의 $x\tan^{-1}(1/x)$의 극한을 정당화하는 것을 잊는 것.

STEP 너머

$\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$이므로 함수 f는 $\mathrm{e}^{-\sinh^{-1} x}$이다. 역수 성질 $\mathrm{f}(-x) = 1/\mathrm{f}(x)$는 바로 $\sinh^{-1}$이 홀함수라는 사실이다. 탄젠트 값이 같아도 각이 같을 필요는 없다는 (c)의 함정은 역함수(inverse function)의 분지(branch) 문제를 실변수에서 본 모습이다. 이 문제는 복소로그(complex logarithm)와 편각(argument)에서 더 심각하게 다시 나타난다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이를 살펴보기에 아름다운 책이고, Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)는 극한과 이상적분을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP III 2025, 문제 8

순수수학 • 복소수를 이용한 삼각함수의 합

STEP III 2025, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

핵심 아이디어

(i)의 항등식(identity)은 점화식(recurrence)이다. 즉 $z^{m+1} - z^{-(m+1)}$을 두 단계 아래의 같은 꼴의 식으로 나타내므로, 이를 반복해서 적용하면 합이 연쇄적으로 소거되며(telescope) 정리된다. $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$로 두면 모든 $z^k \pm z^{-k}$가 $2\cos k\theta$ 또는 $2\mathrm{i}\sin k\theta$가 되어, 대수적 계산이 삼각함수 항등식으로 바뀐다. 수치를 구하는 부분은 $\sin 2n\theta$가 $\sin\theta$(또는 $\cos\theta$)와 같아져 약분되도록 θ를 고르면 얻어진다.

풀이

소문항 (i)

곱을 전개하면

$$\left(z - \frac{1}{z}\right)\left(z^m + \frac{1}{z^m}\right) = z^{m+1} + z^{1-m} - z^{m-1} - z^{-(m+1)}.$$

여기에 $z^{m-1} - z^{1-m}$을 더하면 가운데 두 항이 소거되고 $z^{m+1} - z^{-(m+1)}$이 남으므로, 구하는 항등식이 성립한다.

수학적 귀납법(*induction*). $n = 1$일 때 주장은 $z^2 - z^{-2} = (z - z^{-1})(z + z^{-1})$이고, 이는 제곱의 차(difference of two squares)이므로 성립한다. 어떤 $n \geq 1$에 대하여 성립한다고 가

정하자. $m = 2n+1$로 두고 항등식을 쓰면($m+1 = 2n+2$, $m-1 = 2n$이다)

$$\begin{aligned} z^{2n+2} - \frac{1}{z^{2n+2}} &= \left(z - \frac{1}{z}\right)\left(z^{2n+1} + \frac{1}{z^{2n+1}}\right) + \left(z^{2n} - \frac{1}{z^{2n}}\right) \\ &= \left(z - \frac{1}{z}\right)\left(z^{2n+1} + \frac{1}{z^{2n+1}}\right) + \left(z - \frac{1}{z}\right)\sum_{r=1}^{n}\left(z^{2r-1} + \frac{1}{z^{2r-1}}\right) \\ &= \left(z - \frac{1}{z}\right)\sum_{r=1}^{n+1}\left(z^{2r-1} + \frac{1}{z^{2r-1}}\right), \end{aligned}$$

이다. 둘째 줄은 귀납 가정(inductive hypothesis)에 의한 것이고, 마지막 줄은 추가된 항이 $r = n+1$인 항이기 때문이다. 따라서 결과는 $n+1$일 때도 성립하고, 수학적 귀납법에 의해 모든 $n \geq 1$에 대하여 성립한다.

$z + \frac{1}{z}$를 쓰는 경우. 같은 방법으로

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)\left(z^m - \frac{1}{z^m}\right) = z^{m+1} - z^{1-m} + z^{m-1} - z^{-(m+1)},$$

이므로 이번에는 $z^{m-1} - z^{1-m}$을 **빼야** 한다.

$$z^{m+1} - \frac{1}{z^{m+1}} = \left(z + \frac{1}{z}\right)\left(z^m - \frac{1}{z^m}\right) - \left(z^{m-1} - \frac{1}{z^{m-1}}\right).$$

이 빼기 부호 때문에 한 단계씩 내려갈 때마다 부호가 번갈아 바뀌며, 다음이 성립한다고 주장한다.

$$z^{2n} - \frac{1}{z^{2n}} = \left(z + \frac{1}{z}\right)\sum_{r=1}^{n}(-1)^{n-r}\left(z^{2r-1} - \frac{1}{z^{2r-1}}\right).$$

$n = 1$일 때 이는 역시 $(z+z^{-1})(z-z^{-1})$이다. n일 때 성립하면, $m = 2n+1$로 둔 항등식에서

$$z^{2n+2} - \frac{1}{z^{2n+2}} = \left(z + \frac{1}{z}\right)\left[\left(z^{2n+1} - \frac{1}{z^{2n+1}}\right) - \sum_{r=1}^{n}(-1)^{n-r}\left(z^{2r-1} - \frac{1}{z^{2r-1}}\right)\right],$$

를 얻는다. $-(-1)^{n-r} = (-1)^{n+1-r}$이고 첫째 항은 부호가 $(-1)^0 = 1$인 $r = n+1$ 항이므로, 대괄호 안은 정확히 $\sum_{r=1}^{n+1}(-1)^{n+1-r}\left(z^{2r-1} - z^{-(2r-1)}\right)$이다. 이로써 귀납법이 완성된다. 풀어 쓰면 다음과 같다.

$$z^{2n} - \frac{1}{z^{2n}} = \left(z + \frac{1}{z}\right)\left[\left(z^{2n-1} - \frac{1}{z^{2n-1}}\right) - \left(z^{2n-3} - \frac{1}{z^{2n-3}}\right) + \cdots \pm \left(z - \frac{1}{z}\right)\right].$$

소문항 (ii)

(a) $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$로 두면 $z^k + z^{-k} = 2\cos k\theta$이고 $z^k - z^{-k} = 2\mathrm{i}\sin k\theta$이다. (i)의 첫 번째 결과는

$$2\mathrm{i}\sin 2n\theta = 2\mathrm{i}\sin\theta\sum_{r=1}^{n} 2\cos(2r-1)\theta,$$

가 되고, 양변을 2i로 나누면 구하는 대로 $\sin 2n\theta = 2\sin\theta\sum_{r=1}^{n}\cos(2r-1)\theta$를 얻는다.

(b) $n = 2$로 두면 $\sin 4\theta = 2\sin\theta(\cos\theta + \cos 3\theta)$이다. $\sin 4\theta$가 $\sin\theta$와 같기를 원하는데, $\sin\frac{4}{5}\pi = \sin(\pi - \frac{1}{5}\pi) = \sin\frac{1}{5}\pi$이므로 $\theta = \frac{1}{5}\pi$가 이를 만족한다. $\sin\frac{1}{5}\pi \neq 0$이므로 이것으로 나눌 수 있다.

$$1 = 2\big(\cos\tfrac{1}{5}\pi + \cos\tfrac{3}{5}\pi\big).$$

그런데 $\cos\frac{3}{5}\pi = -\cos(\pi - \frac{3}{5}\pi) = -\cos\frac{2}{5}\pi$이므로 $\cos\frac{1}{5}\pi - \cos\frac{2}{5}\pi = \frac{1}{2}$, 즉 $\cos\frac{2}{5}\pi = \cos\frac{1}{5}\pi - \frac{1}{2}$이다.

(c) $n = 7, \theta = \frac{1}{15}\pi$로 두면 이번에도 $\sin 14\theta = \sin(\pi - \theta) = \sin\theta \neq 0$이므로

$$\sum_{r=1}^{7} \cos\frac{(2r-1)\pi}{15} = \frac{1}{2}.$$

생각해 보기 여기 나온 일곱 개의 각은 $\frac{1}{15}\pi$의 홀수 배인데, 목표 식에는 짝수 배가 들어 있다. 한쪽에서 다른 쪽으로 어떻게 넘어갈까?

$\frac{1}{2}\pi$보다 큰 각에 $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$를 쓰고, $\cos\frac{5}{15}\pi = \cos\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}$이며 $\cos\frac{3}{15}\pi = \cos\frac{1}{5}\pi$임에 주목한다.

$$\cos\tfrac{9}{15}\pi = -\cos\tfrac{2}{5}\pi, \qquad \cos\tfrac{11}{15}\pi = -\cos\tfrac{4}{15}\pi, \qquad \cos\tfrac{13}{15}\pi = -\cos\tfrac{2}{15}\pi.$$

합은 다음과 같이 된다.

$$\cos\tfrac{1}{15}\pi + \cos\tfrac{7}{15}\pi - \cos\tfrac{2}{15}\pi - \cos\tfrac{4}{15}\pi + \tfrac{1}{2} + \big(\cos\tfrac{1}{5}\pi - \cos\tfrac{2}{5}\pi\big) = \tfrac{1}{2}.$$

(b)에 의해 괄호 안은 $\frac{1}{2}$이므로

$$\cos\tfrac{2}{15}\pi + \cos\tfrac{4}{15}\pi - \cos\tfrac{7}{15}\pi - \cos\tfrac{1}{15}\pi = \tfrac{1}{2}.$$

마지막으로 $-\cos\frac{7}{15}\pi = \cos(\pi - \frac{7}{15}\pi) = \cos\frac{8}{15}\pi$이고 $-\cos\frac{1}{15}\pi = \cos(\pi + \frac{1}{15}\pi) = \cos\frac{16}{15}\pi$이므로

$$\cos\tfrac{2}{15}\pi + \cos\tfrac{4}{15}\pi + \cos\tfrac{8}{15}\pi + \cos\tfrac{16}{15}\pi = \tfrac{1}{2},$$

가 되어 증명이 끝난다.

소문항 (iii)

생각해 보기 목표 식은 θ의 홀수 배에 대한 사인 값들의 교대합이다. (i)의 어느 결과가 정확히 그런 꼴을 만들어 낼까?

$z + \frac{1}{z}$를 쓰는 경우이다. $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$로 두면

$$2\mathrm{i}\sin 2n\theta = 2\cos\theta \sum_{r=1}^{n} (-1)^{n-r}\, 2\mathrm{i}\sin(2r-1)\theta,$$

이므로

$$\sin 2n\theta = 2\cos\theta \sum_{r=1}^{n} (-1)^{n-r} \sin(2r-1)\theta.$$

$n = 3$으로 두면

$$\sin 6\theta = 2\cos\theta\,(\sin 5\theta - \sin 3\theta + \sin\theta).$$

이제 $\sin 6\theta = \cos\theta$이기를 원하는데, $\theta = \frac{1}{14}\pi$가 이를 만족한다. 실제로 $\sin\frac{6}{14}\pi = \cos(\frac{1}{2}\pi - \frac{6}{14}\pi) = \cos\frac{1}{14}\pi$이고, 이 값은 0이 아니다. 이것으로 나누면

$$\sin\tfrac{1}{14}\pi - \sin\tfrac{3}{14}\pi + \sin\tfrac{5}{14}\pi = \tfrac{1}{2}.$$

검산

- 간단한 값에서 항등식을 확인해 본다. $z = 2, n = 2$이면 $16 - \frac{1}{16} = \frac{255}{16}$이고, $(2 - \frac{1}{2})(2 + \frac{1}{2} + 8 + \frac{1}{8}) = \frac{3}{2} \cdot \frac{85}{8} = \frac{255}{16}$이며 $(2 + \frac{1}{2})(8 - \frac{1}{8} - 2 + \frac{1}{2}) = \frac{5}{2} \cdot \frac{51}{8} = \frac{255}{16}$이다.
- 수치로 계산하면 $\cos\frac{2}{5}\pi = 0.309017\ldots$와 $\cos\frac{1}{5}\pi - \frac{1}{2} = 0.809017\ldots - 0.5$가 일치한다. 이는 잘 알려진 $\cos\frac{1}{5}\pi = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, $\cos\frac{2}{5}\pi = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$이다.
- (ii)(c)와 (iii)의 합은 계산기로 계산하면 둘 다 0.500000이 나온다.

흔한 실수

- $z + \frac{1}{z}$ 점화식에서 부호를 잘못 쓰는 것. 아래 단계의 항은 빼는 것이므로 합은 부호가 번갈아 바뀌며, 가장 위의 항 $z^{2n-1} - z^{-(2n-1)}$에는 $+$ 부호가 붙어야 한다.
- 선택한 각에서 $\sin\theta$나 $\cos\theta$가 0이 아님을 밝히지 않고 그것으로 나누는 것.
- (ii)(c)에서 $\cos\frac{5}{15}\pi = \frac{1}{2}$임을 잊거나, 남은 두 항을 정리하는 데 (b)가 필요하다는 것을 놓치는 것.

STEP 너머

$z = e^{i\theta}$일 때 식 $z^k + z^{-k}$는 $2\cos k\theta$이며, (i)과 같은 점화식은 바로 체비쇼프(Chebyshev) 다항식(Chebyshev polynomials)이 만족하는 점화식이다. 체비쇼프 다항식은 $\cos k\theta$와 $\sin k\theta / \sin\theta$를 $\cos\theta$에 대한 다항식으로 바꾸어 준다. (ii)(c)와 (iii)의 깔끔한 합은 단위근(roots of unity)에서 비롯된다. 각 $\frac{2}{15}\pi$, $\frac{4}{15}\pi$, $\frac{8}{15}\pi$, $\frac{16}{15}\pi$는 반복해서 두 배를 하여 만들어지는데, 이는 가우스(Gauss)의 주기(Gauss's periods)와 갈루아 이론(Galois theory)을 처음 엿보는 것이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이러한 기하를 살펴보기에 아주 좋은 책이다.

풀이

STEP III 2025, 문제 9

역학 • 질량중심

STEP III 2025, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

이 문제는 *Beyond STEP*의 11.8 절 **기울어진 평형**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch11/tilted-equilibria.html

핵심 아이디어

탁자 위에 놓인 입체는 한 점에서 탁자와 닿고, 작용하는 힘은 두 가지뿐이다. 질량중심(centre of mass) G에 작용하는 무게(weight)와 접촉점에 작용하는 반력(reaction)이다. 이 두 힘은 같은 연직선 위에서 작용할 때에만 평형을 이룰 수 있으므로, 접촉점에서 곡면에 그은 법선(normal)은 반드시 G를 지나야 한다. 소문항 (i)에서는 G의 위치를 구하고, 소문항 (ii)에서는 곡면의 법선이 축과 어디에서 만나는지 알아내며, 소문항 (iii)에서는 이 둘을 결합한다. 즉 곡면 위의 점 가운데 법선이 G를 지나는 점의 개수를 센다.

풀이

이 풀이 전체에서 곡선을 $0 \le x \le r$에 대하여 $y = \dfrac{r^n - x^n}{r^{n-1}}$로 쓴다. 이 곡선은 y축 위의 점 $(0, r)$에서 x축 위의 점 $(r, 0)$까지 내려가며, 그 사이에서 $y \ge 0$이다.

소문항 (i)

입체를 y축을 중심으로 하는 얇은 원통 껍질(cylindrical shell)로 자른다. 반지름 x, 두께 δx, 높이 y인 껍질의 부피는 $2\pi x y\,\delta x$이고, 밀도(density)가 균일하므로 그 질량중심은 높이 $\frac{1}{2}y$에 있다. 따라서 부피와 xz평면에 대한 모멘트(moment)는 다음과 같다.

$$V = 2\pi \int_0^r x y \,\mathrm{d}x, \qquad V\bar{y} = 2\pi \int_0^r x \cdot \tfrac{1}{2}y^2 \,\mathrm{d}x.$$

첫 번째 적분은

$$\int_0^r x\,\frac{r^n - x^n}{r^{n-1}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{r^{n-1}}\left(\frac{r^{n+2}}{2} - \frac{r^{n+2}}{n+2}\right) = \frac{n\,r^3}{2(n+2)},$$

이므로 $V = \dfrac{\pi n r^3}{n+2}$이다. 두 번째 적분은 $(r^n - x^n)^2$을 전개하여 계산한다.

$$\begin{aligned}\int_0^r x\,\frac{(r^n - x^n)^2}{r^{2n-2}}\,\mathrm{d}x &= \frac{r^{2n+2}}{r^{2n-2}}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{2n+2}\right)\\ &= r^4 \cdot \frac{(n+2)^2 - 4(n+1)}{2(n+1)(n+2)} = \frac{n^2 r^4}{2(n+1)(n+2)},\end{aligned}$$

따라서 $V\bar{y} = \pi \cdot \dfrac{n^2 r^4}{2(n+1)(n+2)}$이다. 나누면

$$\bar{y} = \frac{\pi n^2 r^4}{2(n+1)(n+2)} \cdot \frac{n+2}{\pi n r^3} = \frac{nr}{2(n+1)},$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다. 대칭성에 의해 질량중심은 y축 위에 있다.

소문항 (ii)

미분하면 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{nx^{n-1}}{r^{n-1}}$이고, $x = rp$에서 이 값은 $-np^{n-1}$이다. $p > 0$이므로 이 값은 0이 아니며, 따라서 법선의 기울기(gradient)는 $\dfrac{1}{np^{n-1}}$이고 법선의 방정식은

$$y - r(1 - p^n) = \frac{x - rp}{np^{n-1}}.$$

이다. $x = 0$을 대입하면

$$Y = r(1 - p^n) - \frac{rp}{np^{n-1}} = r\left(1 - p^n - \frac{1}{np^{n-2}}\right),$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다.

$n = 4$일 때 $Y(p) = r\left(1 - p^4 - \frac{1}{4}p^{-2}\right)$이고

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}p} = r\left(-4p^3 + \frac{1}{2p^3}\right) = \frac{r(1 - 8p^6)}{2p^3}.$$

이다.

> **생각해 보기** 정류점(stationary point)이 단지 국소적인 최댓값이 아니라 전체에서 가장 큰 값을 준다는 것을 어떻게 알 수 있는가?

$p > 0$일 때 $\mathrm{d}Y/\mathrm{d}p$의 부호는 $1 - 8p^6$의 부호와 같다. 즉 $p^6 < \frac{1}{8}$이면 양수이고 $p^6 > \frac{1}{8}$이면 음수이다. 따라서 Y는 $p^6 = \frac{1}{8}$, 즉 $p^2 = \frac{1}{2}$, $p = 1/\sqrt{2}$($(0, 1]$에 속한다)까지 증가하고 그 뒤로는 감소한다. 그러므로 이 값은 구간 전체에서 최댓값이다.

$$Y_{\max} = r\left(1 - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\cdot 2\right) = \tfrac{1}{4}r.$$

소문항 (iii)

두 조각. 위쪽 경계 $r^3y = r^4 - x^4$는 소문항 (i)의 곡선에서 $n = 4$인 경우이므로, 위쪽 조각($y = 0$ 위쪽)은 소문항 (i)의 입체에서 $n = 4$인 경우이다. 아래쪽 경계 $ry = -(r^2 - x^2)$는 $n = 2$인 곡선 $ry = r^2 - x^2$를 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로, 아래쪽 조각은 $n = 2$인 입체를 뒤집어 놓은 것이다. 두 조각은 평면 $y = 0$ 위의 반지름 r인 원형 테두리에서 만난다. 소문항 (i)의 $V = \pi n r^3/(n+2)$를 이용하면 다음을 얻는다.

	부피	질량중심의 높이
위쪽 ($n = 4$)	$\frac{2}{3}\pi r^3$	$\frac{4r}{10} = \frac{2}{5}r$
아래쪽 ($n = 2$, 대칭이동)	$\frac{1}{2}\pi r^3$	$-\frac{2r}{6} = -\frac{1}{3}r$

(앞에서처럼 밀도가 균일하다고 가정하고) 모멘트를 계산하면

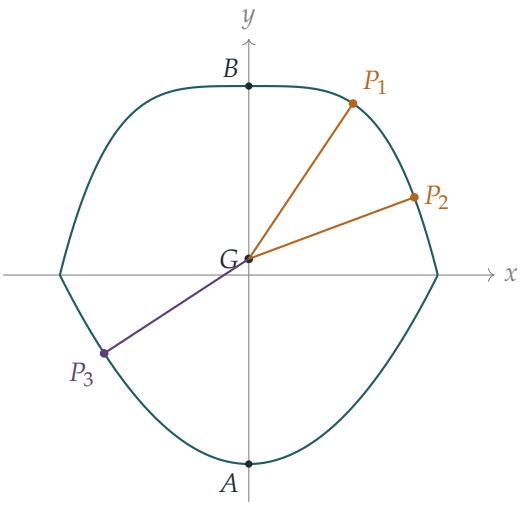
$$\bar{y} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}r - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}r}{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{10}r}{\frac{7}{6}} = \frac{3r}{35},$$

이므로 $G = \left(0, \frac{3}{35}r\right)$이고, 이는 테두리보다 약간 위에 있다.

평형 조건.

? **생각해 보기** 접촉점에서의 법선은 왜 반드시 G를 지나야 하는가?

입체가 한 점 P에서 곡면으로 놓여 있을 때, 입체에 작용하는 힘은 G에서 연직 방향으로 작용하는 무게와 P에서 작용하는 면의 반력뿐이다. 두 힘은 크기가 같고 방향이 반대이며 같은 직선 위에 있을 때에만 평형을 이루므로, G는 P의 바로 위에 있어야 한다. 탁자 면은 P에서의 접평면(tangent plane)이므로, P를 지나는 연직선은 그 점에서 입체에 그은 법선이다. 즉 P에서의 법선은 G를 지나야 한다. 역으로 법선이 G를 지나면 입체는 그곳에서 정지해 있을 수 있다. 입체가 볼록(convex)하므로(단면 곡선 $y = r - x^4/r^3$는 오목(concave)하고 $y = (x^2 - r^2)/r$는 볼록하다) P에서의 접평면의 한쪽에 입체 전체가 놓이기 때문이다. 회전면(surface of revolution)의 법선은 축을 포함하는 평면 위에 있으므로, xy평면에 의한 단면(cross-section)만 살펴보면 된다. G가 축 위에 있으므로, y축과 $Y = \frac{3}{35}r$에서 만나는 법선을 찾으면 된다.



위쪽 곡면에서의 접촉. $n = 4$일 때 소문항 (ii)에 의해($r(1-p^4)$는 그 점의 높이이다) 점 $\big(rp, r(1-p^4)\big)$에서의 법선은 축과 $r\big(1-p^4-\frac{1}{4}p^{-2}\big)$에서 만난다. 이 값을 $\frac{3}{35}r$와 같다고 놓고 양변에 $140p^2$을 곱하면

$$140p^2 - 140p^6 - 35 = 12p^2 \iff h(q) := 140q^3 - 128q + 35 = 0, \quad q = p^2.$$

이다. 이제 $h(0) = 35 > 0$, $h(\frac{1}{2}) = 17.5 - 64 + 35 = -11.5 < 0$, $h(1) = 47 > 0$이다. 따라서 h는 근 $q_1 \in (0, \frac{1}{2})$과 근 $q_2 \in (\frac{1}{2}, 1)$를 가지며, 이로부터 $0 < p_1 < 1/\sqrt{2} < p_2 < 1$인 위쪽 곡면 위의 두 점 P_1, P_2를 얻는다. (이는 소문항 (ii)가 예측하는 바와 같다. $\frac{3}{35}r$는 최댓값 $\frac{1}{4}r$보다 작으므로, 이 값은 최댓값의 양쪽에서 한 번씩 나타난다.)

아래쪽 곡면에서의 접촉. $n = 2$인 곡선에서 매개변수 p에 해당하는 점의 법선은 축과 $r(1-p^2-\frac{1}{2}) = r(\frac{1}{2}-p^2)$에서 만난다. 이를 x축에 대하여 대칭이동하면, 아래쪽 곡면 위의 점 $\big(rp, -r(1-p^2)\big)$에서의 법선은 축과 $r(p^2-\frac{1}{2})$에서 만난다. 이 값을 $\frac{3}{35}r$와 같다고 놓으면

$$p^2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{35} = \tfrac{41}{70}, \qquad p_3 = \sqrt{41/70} \in (0,1),$$

이 되어 세 번째 점 P_3를 얻는다(지금 사용하는 반쪽 단면에서는 $p > 0$이므로 양의 근을 택한다. 그림에는 이 점의 대칭점이 나타나 있는데, 대칭성에 의해 둘은 동등하다).

세 각은 서로 다르며 0이 아니다. 입체가 P에서 정지해 있을 때, 위쪽 연직 방향은 P에서 G를 향하는 방향, 즉 P에서의 안쪽 법선 방향이다.

- 아래쪽의 P_3에서 안쪽 법선 $(-2p_3, 1)$(곡선의 기울기는 $2p_3$이다)은 위를 향하며, 양의 y축 방향을 가리키는 $\overrightarrow{AB}$와 예각 $\arctan(2p_3)$를 이룬다.

- 위쪽의 P_1 또는 P_2에서 안쪽 법선 $(-4p^3, -1)$은 아래를 향하므로, $\overrightarrow{AB}$와 이루는 각은 둔각 $180^\circ - \arctan(4p^3)$이다.

$p_1 \neq p_2$이고 $\arctan(4p^3)$는 순증가하므로 두 둔각은 서로 다르며, 둘 다 예각과도 다르다. $p_1, p_2, p_3 > 0$이므로 어느 각도 0이 아니다. 따라서 입체는 $\overrightarrow{AB}$가 위쪽 연직 방향과 0이 아닌 서로 다른 세 각을 이루도록 평형(equilibrium) 상태로 놓일 수 있으며, 이로써 요구된 결과가 증명된다.

(사실 평형 위치는 이보다 더 많다. 입체는 테두리로 서서 균형을 이룰 수도 있고, $\overrightarrow{AB}$가 바로 아래를 향하도록 B로 서서 균형을 이룰 수도 있다. 문제에서 요구하는 것은 곡면 위의 세 위치로 충분하다.)

검산

- 소문항 (i)에서 $n = 2$로 두면 높이 r인 포물면(paraboloid)에 대하여 $\frac{1}{3}r$를 얻는다. 이는 속이 찬 포물면의 질량중심이 꼭짓점에서 밑면까지의 3분의 2 지점에 있다는 잘 알려진 결과와 일치한다. $n \to \infty$이면 입체는 높이 r인 원기둥이 되고, 마땅히 그래야 하듯 $\bar{y} \to \frac{1}{2}r$이다.
- 소문항 (ii)에서 $n = 4$, $p = 1$(테두리)이면 $Y = -\frac{1}{4}r$를 얻는다. 그 점에서 기울기는 -4이므로 법선의 기울기는 $\frac{1}{4}$이고, 수평 거리 r 동안 $\frac{1}{4}r$만큼 내려간다. 결과가 일치한다.
- $r = 1$일 때 근은 $p_1 \approx 0.552$, $p_2 \approx 0.876$, $p_3 \approx 0.765$이고, 각은 약 $146.1^\circ, 110.4^\circ, 56.8^\circ$이다. 탁자 위 G의 높이가 정류하는 기울기를 컴퓨터로 탐색한 결과, 0°와 180° 사이(양 끝 제외)에서 정확히 이 세 개와 테두리 위치(약 85.1°)가 발견되었다.

흔한 실수

- 아래쪽 조각의 질량중심을 $+\frac{1}{3}r$에 두는 것: 이 조각은 $n = 2$인 입체를 뒤집어 놓은 것이므로 질량중심은 테두리보다 아래에 있다.
- x를 y의 $\frac{2}{n}$ 거듭제곱으로 나타낸 채 원판(disc)의 부피 $\pi x^2\,\delta y$를 사용하는 것: 이 방법도 통하지만, 껍질 방법을 쓰면 다항식의 적분이 된다.
- $q = p^2$에 대한 3차식(cubic)을 구하고도 $0 < p < 1$인 근이 두 개 있음을 정당화하지 않는 것: $q = 0, \frac{1}{2}, 1$에서 부호를 확인하면 해결된다.

STEP 너머

법선이 G를 지난다는 조건은 물체가 구를 때 G의 높이가 정류한다는 뜻이며, 그 높이가 곧 위치 에너지(potential energy)이다. 안정한 위치는 위치 에너지의 극솟값이고 불안정한 위치는 극댓값이다. 매끄러운 볼록 물체는 적어도 두 개의 평형 위치를 가져야 하는데, 2006년에 발견된 "곰보츠(Gömböc)"는 안정한 위치와 불안정한 위치를 각각 하나씩만 갖는 볼록한 도형이다. 위치 에너지와 안정성(stability)의 일반적인 이론은 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)에 나와 있다.

풀이

STEP III 2025, 문제 10

역학 • 움직이는 널빤지 위의 마찰

STEP III 2025, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

핵심 아이디어

먼저 h에 대한 미분방정식(differential equation)을 푼다. 이것은 단진동(simple harmonic motion)이며, 판자의 경사각이 일정한 비율 ω로 증가한다는 것을 알려 준다. 각이 정해지면 입자의 위치는 판자를 따라 일정한 비율만큼 간 지점이므로, 두 번 미분하면 가속도를 얻는다. 그다음 힘은 뉴턴(Newton)의 제2법칙을 판자에 수직인 방향과 판자를 따른 방향으로 분해하여 구한다. 이렇게 하는 편이 수평 방향과 수직 방향으로 분해하는 것보다 훨씬 깔끔하다.

풀이

판자를 강체 막대(rigid rod)로, P를 입자로 모형화한다. 판자가 수평과 이루는 각을 θ라 하자.

소문항 (i)

방정식 $\ddot{\mathrm{h}} = -\omega^2 \mathrm{h}$의 일반해(general solution)는 $\mathrm{h} = a\cos\omega t + b\sin\omega t$이다. 조건 $\mathrm{h}(0) = 0$에서 $a = 0$이고, $\dot{\mathrm{h}}(0) = b\omega = \omega L$에서 $b = L$이므로

$$\mathrm{h}(t) = L\sin\omega t.$$

A의 높이가 h이고 판자의 길이가 L이므로 $\sin\theta = \mathrm{h}/L = \sin\omega t$이고, 따라서 $\theta = \omega t$이다($0 \le \omega t \le \frac{\pi}{2}$일 때이며, 이것이 운동 전체이다. 그 이후에는 A가 높이 L보다 높이 올라가야 하기 때문이다). 따라서 $A = (0, L\sin\omega t)$이고 $B = (L\cos\omega t, 0)$이다.

점 C는 A에서 B까지의 s배만큼 간 지점이므로 $C = A + s(B - A)$이다.

$$x = sL\cos\omega t, \qquad y = (1-s)L\sin\omega t.$$

첫 번째 식이 구하는 x좌표이고, 두 번째 식은 이에 대응하는 y좌표의 식이다.

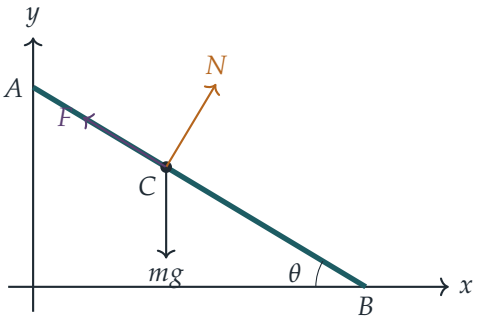
소문항 (ii)

t에 대하여 두 번 미분하면

$$\ddot{x} = -sL\omega^2 \cos \omega t, \qquad \ddot{y} = -(1-s)L\omega^2 \sin \omega t.$$

소문항 (iii)

P에 작용하는 힘은 아래 방향의 무게 mg, 판자에 수직인(위쪽) 수직항력(normal reaction) N, 그리고 판자를 따라 작용하는 마찰력(friction) F이다. 마찰력은 경사면 위쪽, 곧 A 쪽을 향할 때를 양으로 잡는다.



판자에 수직인(위쪽) 단위벡터(unit vector)는 $(\sin\theta, \cos\theta)$이고, 판자를 따라 A 쪽을 향하는 단위벡터는 $(-\cos\theta, \sin\theta)$이며, 여기서 $\theta = \omega t$이다. 운동방정식(equation of motion) $m(\ddot{x}, \ddot{y}) = N(\sin\theta, \cos\theta) + F(-\cos\theta, \sin\theta) + (0, -mg)$을 이 두 방향으로 분해하면(즉, 각 단위벡터와 내적(dot product)을 취하면) 다음과 같다.

판자에 수직인 방향.

$$\begin{aligned} N - mg\cos\theta &= m(\ddot{x}\sin\theta + \ddot{y}\cos\theta) \\ &= -mL\omega^2\big(s + (1-s)\big)\sin\theta\cos\theta = -mL\omega^2 \sin\theta\cos\theta. \end{aligned}$$

$L\omega^2 = kg$를 대입하면

$$N = mg\cos\theta - mgk\sin\theta\cos\theta = mg(1 - k\sin\omega t)\cos\omega t,$$

이고, 이것이 구하는 식이다.

판자를 따라 A 쪽으로 향하는 방향.

$$\begin{aligned} F - mg\sin\theta &= m(-\ddot{x}\cos\theta + \ddot{y}\sin\theta) \\ &= mL\omega^2\big(s\cos^2\theta - (1-s)\sin^2\theta\big) = mgk\big(s - \sin^2\theta\big), \end{aligned}$$

여기서 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$을 이용하였다. 따라서

$$F = mgsk + mg\sin\theta(1 - k\sin\theta) = mgsk + \underbrace{mg(1 - k\sin\theta)\cos\theta}_{N}\tan\theta,$$

즉 $F = mgsk + N\tan\omega t$이며, 이것이 구하는 식이다. $N > 0$이면 언제나 F가 양수가 됨에 주목하라. 따라서 P가 판자에 눌려 있는 동안 마찰력은 항상 판자 위쪽으로 작용한다.

소문항 (iv)

$\mu = \tan\alpha$라 쓰자. $N > 0$인 동안, 입자가 미끄러지지 않고 C에 머무를 필요충분조건은 $|F| \le \mu N$이다. 이때 $F > 0$이므로 이 조건은 $F/N \le \tan\alpha$이다. 소문항 (iii)의 결과를 N으로 나누면

$$\frac{F}{N} = \frac{sk}{(1 - k\sin\theta)\cos\theta} + \tan\theta.$$

처음에는 $\theta = 0$이므로 $N = mg > 0$이고 $F/N = sk$이다. 따라서 $sk < \tan\alpha$이면 입자는 처음에 미끄러지지 않는다.

> **생각해 보기** 왜 N이 0이 되기 전에 비율 F/N이 결국 $\tan\alpha$에 도달해야 하는가?

이제 $sk < \tan\alpha$라 가정하자. 인수 $\cos\theta$는 $\theta = \frac{\pi}{2}$에서 0이 되고, $k > 1$이면 인수 $1 - k\sin\theta$가 그보다 먼저 $\sin\theta = 1/k$에서 0이 된다. $N = 0$이 되는 첫 각을 θ_0이라 하자($\frac{\pi}{2}$ 또는 $\arcsin(1/k)$). $0 \le \theta < \theta_0$에서 $N > 0$이고, F/N은 연속(continuous)이다. $\theta \to \theta_0^-$일 때 분모 $(1 - k\sin\theta)\cos\theta$는 양의 값을 거치며 0으로 가고 분자 sk는 고정된 양수이므로, 첫째 항은 $+\infty$로 발산한다(그리고 $\tan\theta$는 유계(bounded)이거나 역시 $+\infty$로 발산한다). 따라서 $F/N \to +\infty$이다.

즉 F/N은 $sk < \tan\alpha$에서 시작하여 N이 0에 도달하기 전에 한없이 커진다. 중간값 정리(intermediate value theorem)에 의해 $F/N = \tan\alpha$가 되는 첫 각 $\theta_1 < \theta_0$이 존재하고, 입자는 그때 미끄러지기 시작한다. 이는 N이 아직 양수인 각에서 일어나며, 이것이 첫 번째 주장이다.

이 각에서 $sk > 0$이고 $(1 - k\sin\theta_1)\cos\theta_1 > 0$이므로

$$\tan\alpha = \frac{F}{N} = \frac{sk}{(1 - k\sin\theta_1)\cos\theta_1} + \tan\theta_1 > \tan\theta_1.$$

α와 θ_1은 모두 $[0, \frac{\pi}{2})$에 속하고, 이 구간에서 tan은 증가하므로 $\theta_1 < \alpha$이다. 즉, 미끄러지기 시작할 때 판자가 수평과 이루는 각은 α보다 작다. 이것이 두 번째 주장이다.

두 번째 주장은 보기만큼 놀랍지 않다. 고정된 판자 위에 정지해 있는 입자는 판자의 각이 마찰각(angle of friction) α에 도달할 때 비로소 미끄러진다. 여기서는 판자가 가속하고 있고, 입자를 판자와 함께 움직이게 하는 데 필요한 추가적인 힘($mgsk$ 항) 때문에 마찰력이 더 일찍 한계에 이른다.

검산

- $t = 0$에서 판자는 수평이고 입자의 가속도는 수평 방향의 $(-sL\omega^2, 0)$이다. 그러면 $N = mg$와 $F = msL\omega^2 = mgsk$가 정확히 그 가속도를 만들어 내야 하는데, 실제로 그렇다.
- $\omega \to 0$이면(따라서 $k \to 0$이면) 판자를 매우 천천히 들어 올리는 것이다. 이때 $N \to mg\cos\theta$이고 $F \to mg\sin\theta$로, 고정된 경사면에서의 익숙한 평형값이 되며, 미끄러짐은 우리 부등식의 경계인 $\theta = \alpha$에서 일어난다.
- 수치적으로 $s = \frac{1}{2}$, $k = \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$로 두고(따라서 $sk = \frac{1}{4} < 1$) $F/N = 1$을 풀면, $\theta \approx 0.545$ rad, 약 31°에서 미끄러짐이 일어나며, 이때 $N \approx 0.63mg > 0$이고 $\theta < 45°$이다. $sk < \tan\alpha$를 만족하는 s, k, α를 무작위로 수천 번 골라 컴퓨터로 확인한 결과, 매번 α보다 작은 각에서 $N > 0$인 채로 미끄러짐이 일어났다.

흔한 실수

- θ를 B에서의 각이 아니라 A에서의 각으로 잡는 것. 그러면 사인과 코사인이 서로 바뀌어 주어진 식이 나오지 않는다.
- 수평·수직 방향으로 분해한 뒤 곳곳에 $\sin\theta$와 $\cos\theta$가 들어간 연립방정식 두 개를 풀려고 하는 것. 판자를 따른 방향과 판자에 수직인 방향으로 분해하면 N과 F가 곧바로 분리된다.
- 소문항 (iv)에서 θ가 $\frac{\pi}{2}$에 가까워지는 경우만 따지고, $k > 1$일 때는 수직항력이 그보다 먼저 $\sin\theta = 1/k$에서 0이 된다는 것을 잊는 것.

STEP 너머

이 문제는 움직이는 좌표계(moving frame)에서의 힘에 관한 것이다. 판자의 관점에서 보면 입자는 점 C의 가속도에 $-m$을 곱한 것과 같은 추가적인 "가상의(fictitious)" 힘을 느끼며, 항 $mgsk$는 바로 처음 순간의 그 관성력이다. 대학에서는 이 아이디어가 원심력(centrifugal force)과 코리올리 힘(Coriolis force)을 포함하는, 가속 좌표계와 회전 좌표계에 대한 완전한 이론으로 발전한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 비관성 좌표계(non-inertial frame)를 많은 풀이 예제와 함께 다룬다.

풀이

STEP III 2025, 문제 11

확률과 통계 • 최댓값의 분포

STEP III 2025, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

이 문제는 *Beyond STEP*의 12.25 절 **여럿 가운데 가장 큰 값**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch12/extremes.html

핵심 아이디어

X_i 중 가장 큰 값이 y 이하인 것은 **모든** X_i가 y 이하인 것과 정확히 같은 사건이고, 독립성(independence)에 의해 그 확률은 곱으로 바뀐다. 그다음부터 이 문제는 G로부터 분위수(quantile)를 읽어 내고, n이 클 때 그 분위수가 어떻게 되는지 살펴보는 것이 전부이다. 핵심 역할을 하는 근사(approximation)는 단 하나, $\alpha^{1/n} = \mathrm{e}^{(\ln\alpha)/n} \approx 1 + \frac{\ln\alpha}{n}$이다. n이 크면 $(\ln\alpha)/n$이 작기 때문이다.

풀이

소문항 (i)

$x \geq 0$일 때

$$F(x) = \int_0^x \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

$Y = \max(X_1, \ldots, X_n)$이므로 사건 $\{Y \leq y\}$는 모든 i에 대하여 $X_i \leq y$인 사건과 같다. X_i들은 서로 독립이므로 $y \geq 0$일 때

$$G(y) = \mathrm{P}(Y \leq y) = \mathrm{P}(X_1 \leq y) \cdots \mathrm{P}(X_n \leq y) = F(y)^n = \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda y}\right)^n,$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

소문항 (ii)

Y는 연속확률변수(continuous random variable)이므로 $\mathrm{P}(Y < y) = \mathrm{P}(Y \le y) = G(y)$이다. 따라서 $L(\alpha)$에 대한 조건은 $G(L(\alpha)) = \alpha$이다.

$$\begin{aligned}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda L}\right)^n = \alpha &\iff 1 - \mathrm{e}^{-\lambda L} = \alpha^{1/n} \qquad (\text{양의 } n\text{제곱근을 취하면}) \\ &\iff \mathrm{e}^{-\lambda L} = 1 - \alpha^{1/n} \\ &\iff L(\alpha) = -\frac{1}{\lambda}\ln\left(1 - \alpha^{1/n}\right).\end{aligned}$$

$0 < \alpha < 1$이면 $0 < \alpha^{1/n} < 1$이므로 이 로그는 정의된다.

$U(\alpha)$의 경우, 조건 $\mathrm{P}(Y > U) = \alpha$는 $G(U) = 1 - \alpha$를 뜻하므로, 위와 같은 과정에서 α를 $1 - \alpha$로 바꾸면

$$U(\alpha) = -\frac{1}{\lambda}\ln\left(1 - (1-\alpha)^{1/n}\right).$$

$\alpha \le \frac{1}{2} \le 1 - \alpha$이고 G가 증가함수이므로 $L(\alpha) \le U(\alpha)$이며, 등호는 $\alpha = \frac{1}{2}$일 때에만 성립한다.

소문항 (iii)

$\alpha^{1/n} = \mathrm{e}^{(\ln\alpha)/n}$으로 쓰자. α를 고정하고 n이 크면 $t = (\ln\alpha)/n$은 작으므로, $\mathrm{e}^t \approx 1 + t$에서

$$1 - \alpha^{1/n} \approx -\frac{\ln\alpha}{n} = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

$\alpha < 1$이므로 이 값은 양수임에 주의한다. 이를 소문항 (ii)의 결과에 대입하면

$$\lambda L(\alpha) = -\ln\left(1 - \alpha^{1/n}\right) \approx -\ln\left(\frac{1}{n}\ln\frac{1}{\alpha}\right) = \ln(n) - \ln\left(\ln\frac{1}{\alpha}\right).$$

> **생각해 보기** 근삿값에 로그를 취해도 괜찮을까? $1 - \alpha^{1/n}$ 자체가 매우 작은 값이므로, $1 - \alpha^{1/n}$의 오차가 그 값에 비해 클 수도 있지 않을까?

중요한 것은 **상대오차**(*relative error*)이다. $t = (\ln\alpha)/n$이라 하면 $1 - \mathrm{e}^t = -t\left(1 + \frac{t}{2} + \cdots\right)$이므로, 정확한 값과 근삿값의 비는 $1 + O(1/n)$이다. 로그를 취하면 $\lambda L(\alpha)$의 오차는 $\ln(1 + O(1/n))$이고, 이는 0으로 수렴(converge)한다. 따라서 이 근사는 n이 클 때 좋은 근사일 뿐 아니라, 양변의 차이가 실제로 0으로 수렴한다.

소문항 (iv)

Y의 중앙값(median) m은 $G(m) = \frac{1}{2}$를 만족하므로 $m = L\left(\frac{1}{2}\right)$이다(이는 $U\left(\frac{1}{2}\right)$와도 같다). 소문항 (iii)에 의해

$$\lambda m \approx \ln n - \ln(\ln 2).$$

$\ln(\ln 2)$는 고정된 수(약 -0.37)이고 $\ln n \to \infty$이므로, n이 커지면 중앙값은 무한대로 발산한다.

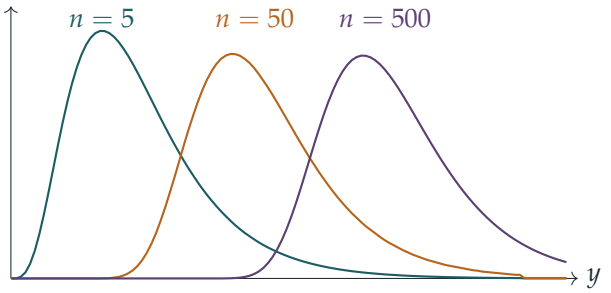
$U(\alpha)$에 대해서는 소문항 (iii)에서 α를 $1-\alpha$로 바꾸면

$$\lambda U(\alpha) \approx \ln n - \ln\left(\ln \frac{1}{1-\alpha}\right).$$

두 식을 빼면 $\ln n$ 항이 소거된다.

$$U(\alpha) - L(\alpha) \approx \frac{1}{\lambda}\left[\ln\left(\ln \frac{1}{\alpha}\right) - \ln\left(\ln \frac{1}{1-\alpha}\right)\right].$$

두 근사의 오차가 모두 0으로 수렴하므로(위의 상자에서 본 것처럼), 구간의 폭은 이 값으로 수렴하며, 이 값은 α와 λ에는 의존하지만 n에는 의존하지 않는다. 즉 n이 커질수록 Y의 분포는 퍼지지 않은 채 $\frac{1}{\lambda}\ln n$처럼 무한대 쪽으로 이동한다.



그림은 $\lambda = 1$일 때 Y의 확률밀도함수(density)를 나타낸다. n이 10배씩 커질 때마다 곡선은 오른쪽으로 약 $\ln 10 \approx 2.3$만큼 이동하고, 그 모양은 일정하게 자리 잡는다.

소문항 (v)

$\alpha = 0.05$로 잡자. 그러면

$$\mathrm{P}\big(L(\alpha) \le Y \le U(\alpha)\big) = 1 - \mathrm{P}(Y < L) - \mathrm{P}(Y > U) = 1 - 2(0.05) = 0.9,$$

이므로, n이 무엇이든 Y는 확률 정확히 0.9로 구간 $[L(0.05), U(0.05)]$에 속한다. n이 클 때, 소문항 (iv)에 의해 이 구간의 폭은 근사적으로

$$\frac{1}{\lambda}\left[\ln(\ln 20) - \ln\left(\ln \frac{1}{0.95}\right)\right].$$

이제 주어진 두 사실을 이용한다.

- $\mathrm{e}^3 \approx 20$이므로 $\ln 20 \approx 3$이고 $\ln(\ln 20) \approx \ln 3 \approx 1.1$이다.
- $t = -0.05$로 두고 $\ln(1+t) \approx t$를 이용하면 $\ln \frac{1}{0.95} = -\ln(1-0.05) \approx 0.05 = \frac{1}{20}$이다. 따라서 $\ln\left(\ln \frac{1}{0.95}\right) \approx \ln \frac{1}{20} = -\ln 20 \approx -3$이다.

그러므로 구간의 폭은 근사적으로

$$\frac{1}{\lambda}(\ln 3 + 3) \approx \frac{4.1}{\lambda} \approx 4\lambda^{-1},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

검산

- 소문항 (ii)에서 $L(\alpha)$를 G에 다시 대입하면 정확히 $\left(1-(1-\alpha^{1/n})\right)^n = \alpha$가 된다.
- $\alpha = 0.05$, $n = 10^4$일 때 $\lambda L(\alpha)$의 정확한 값은 8.11330이고 근삿값 $\ln n - \ln\ln 20$은 8.11315이다. $n = 10$일 때는 각각 1.35와 1.21이므로, "충분히 크다"는 조건이 정말 중요하다.
- 소문항 (v)에서 폭의 정확한 극한값은 $4.067/\lambda$로, $4/\lambda$에 충분히 가깝다. 또한 지수분포를 따르는 다섯 확률변수의 최댓값을 컴퓨터로 모의실험한 결과도 소수점 아래 셋째 자리까지 $G(y)$와 일치했다.

흔한 실수

- $G(y) = 1-(e^{-\lambda y})^n$으로 쓰는 실수: 이것은 최댓값이 아니라 **최솟값**의 누적분포함수(cumulative distribution function)이다.
- $P(Y > U) = \alpha$를 $G(U) = 1-\alpha$가 아니라 $G(U) = \alpha$로 놓는 실수.
- 소문항 (v)에서 $\alpha = 0.1$을 택하는 실수: 구간은 양쪽 꼬리에 각각 0.1이 아니라 0.05씩 남겨야 한다.

STEP 너머

이것은 **극값 이론**(*extreme value theory*)을 처음 엿보는 문제이다. 소문항 (iii)은 사실 $\lambda Y - \ln n$이 극한분포(limiting distribution)를 가지며 $P(\lambda Y - \ln n \le x) \to \exp(-e^{-x})$임을 보이는 것이다. 이 분포가 굼벨 분포(Gumbel distribution)로, 기록적인 홍수, 한 해 동안의 가장 강한 돌풍, 가장 큰 보험금 청구액 등을 모형화하는 데 쓰인다. 놀라운 정리에 따르면, 적절히 척도를 조정한 최댓값은 오직 세 가지 분포족 중 하나로만 수렴할 수 있다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)는 순서통계량(order statistics)을 다루고 있어 시작하기에 좋은 책이다.

풀이

STEP III 2025, 문제 12

확률과 통계 • 재귀적으로 정의된 확률변수

STEP III 2025, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2025년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

핵심 아이디어

소문항 (i)은 하나의 이중합(double sum)을 두 가지 방식으로 쓴 것에 불과하다. 양변 모두 같은 순서쌍 (r,s)들의 집합에 대하여 $\mathrm{f}(r)\,\mathrm{g}(s)$를 더한 것인데, 한쪽은 행별로, 다른 쪽은 열별로 센 것이다. 소문항 (ii)에서는 바로 앞의 값 X_{n-1}에 대하여 조건을 걸면(conditioning) 각 확률 $\mathrm{P}(X_n = r)$이 정확히 (i)의 좌변에 나타나는 꼴의 합으로 주어진다. 그런 다음 합의 순서를 바꾸면(swapping the order of summation) $\mathrm{E}(X_n)$을 $\mathrm{E}(X_{n-1})$로 알아볼 수 있는 꼴로 바꿀 수 있다.

풀이

소문항 (i)

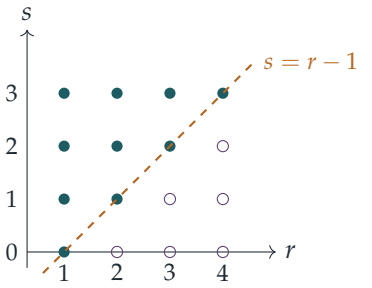
괄호를 전개하면 좌변은

$$\sum_{r=1}^{m+1}\ \sum_{s=r-1}^{m} \mathrm{f}(r)\,\mathrm{g}(s),$$

즉

$$1 \le r \le m+1 \quad \text{이고} \quad r-1 \le s \le m.$$

을 만족하는 모든 정수 순서쌍 (r,s)에 대하여 $\mathrm{f}(r)\,\mathrm{g}(s)$를 더한 합이다. 같은 순서쌍들의 집합을 이번에는 s를 먼저 고정하여 기술해 보자. 위의 조건에서 $0 \le s \le m$이어야 하고($s \ge r-1 \ge 0$이므로), 이러한 s가 주어졌을 때 가능한 r는 $1 \le r$이고 $r \le s+1$인 것들이다. 이때 $s+1 \le m+1$이므로 $r \le m+1$이라는 조건은 저절로 성립한다. 역으로 $0 \le s \le m$이고 $1 \le r \le s+1$인 순서쌍은 모두 원래 조건을 만족한다. 아래 그림은 $m=3$일 때 순서쌍들이 이루는 삼각형을 보여 준다.



열별로(r를 고정하여) 더하면 좌변이 되고, 행별로(s를 고정하여) 더하면

$$\sum_{s=0}^{m}\sum_{r=1}^{s+1} \mathrm{f}(r)\,\mathrm{g}(s) = \sum_{s=0}^{m}\Big(\mathrm{g}(s)\sum_{r=1}^{s+1}\mathrm{f}(r)\Big),$$

가 되는데, 이것이 바로 우변이므로 원하는 결과를 얻는다. 합이 유한하므로 순서를 바꾸는 것은 언제나 허용된다.

소문항 (ii)(a)

X_1은 0 또는 1일 확률이 같으므로 $\mathrm{E}(X_1) = \frac{1}{2}$이다.

X_2에 대해서는 X_1에 대하여 조건을 건다. $X_1 = 0$이면 X_2는 $\{0,1\}$ 위의 균등분포(uniform distribution)를 따르고, $X_1 = 1$이면 X_2는 $\{0,1,2\}$ 위의 균등분포를 따른다. 전확률 법칙(law of total probability)에 의하여

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X_2 = 0) &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3} = \tfrac{5}{12},\\
\mathrm{P}(X_2 = 1) &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3} = \tfrac{5}{12},\\
\mathrm{P}(X_2 = 2) &= \tfrac{1}{2}\cdot 0 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{6},
\end{aligned}$$

이므로 원하는 결과를 얻는다(세 값의 합이 1이라는 것도 유용한 검산이다). 따라서

$$\mathrm{E}(X_2) = 0\cdot\tfrac{5}{12} + 1\cdot\tfrac{5}{12} + 2\cdot\tfrac{1}{6} = \tfrac{3}{4}.$$

소문항 (ii)(b)

수학적 귀납법(induction)에 의하여 X_{n-1}은 $\{0,1,\ldots,n-1\}$의 값을 가진다(한 단계마다 가능한 최댓값이 하나씩 커진다). $X_{n-1} = s$가 주어지면 X_n은 $s+2$개의 값 $0,1,\ldots,s+1$ 위의 균등분포를 따르므로

$$\mathrm{P}(X_n = r \mid X_{n-1} = s) = \begin{cases} \dfrac{1}{s+2}, & 0 \le r \le s+1,\\[2mm] 0, & r > s+1. \end{cases}$$

이다. 값 $r = 0$은 언제나 가능하므로 전확률 법칙에 의하여

$$\mathrm{P}(X_n = 0) = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{\mathrm{P}(X_{n-1} = s)}{s+2}.$$

이다. $1 \le r \le n$인 경우에는 $s+1 \ge r$, 즉 $s \ge r-1$인 s만 기여하므로

$$\mathrm{P}(X_n = r) = \sum_{s=r-1}^{n-1} \frac{\mathrm{P}(X_{n-1} = s)}{s+2}, \qquad r = 1, 2, \ldots, n.$$

이다. ($r = 1$일 때 이 합은 $r = 0$일 때의 합과 같으므로, 모든 $n \ge 1$에 대하여 $\mathrm{P}(X_n = 0) = \mathrm{P}(X_n = 1)$이며, 이는 (a)에서 나온 두 값 $\frac{5}{12}$와 들어맞는다.)

소문항 (ii)(c)

$p_s = \mathrm{P}(X_{n-1} = s)$라 하자. $r = 0$인 항은 기댓값(expectation)에 아무것도 기여하지 않으므로, (b)에 의하여

$$\mathrm{E}(X_n) = \sum_{r=1}^{n} r\,\mathrm{P}(X_n = r) = \sum_{r=1}^{n} \Big(r \sum_{s=r-1}^{n-1} \frac{p_s}{s+2} \Big).$$

이다.

? **생각해 보기** 소문항 (i)을 여기에 어떻게 적용할 수 있을까?

이것은 $m = n-1$($n \ge 1$이므로 허용된다), $\mathrm{f}(r) = r$, $\mathrm{g}(s) = p_s/(s+2)$로 둔 (i)의 좌변이다. 합의 순서를 바꾸면

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X_n) &= \sum_{s=0}^{n-1} \Big(\frac{p_s}{s+2} \sum_{r=1}^{s+1} r \Big) = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{p_s}{s+2} \cdot \frac{(s+1)(s+2)}{2} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{n-1} (s+1)\, p_s = \frac{1}{2} \Big(\sum_{s=0}^{n-1} p_s + \sum_{s=0}^{n-1} s\, p_s \Big) \\
&= \tfrac{1}{2} \big(1 + \mathrm{E}(X_{n-1}) \big),
\end{aligned}$$

이다. 여기서 $\sum p_s = 1$을 이용하였다. 이것이 구하는 결과이다.

직관적으로 보면, $X_{n-1} = s$가 주어졌을 때 $\{0, \ldots, s+1\}$ 위의 균등분포를 따르는 확률변수의 평균은 $\frac{1}{2}(s+1)$이므로, 이 결과는 모습을 바꾼 탑 법칙(tower law)이다.

점화식(recurrence)을 풀기 위해 $e_n = \mathrm{E}(X_n)$이라 하자. 양변에서 1을 빼면

$$e_n - 1 = \tfrac{1}{2}\,(e_{n-1} - 1),$$

이므로 $e_n - 1$은 한 단계마다 절반이 된다. $e_0 = 0$이므로 $e_n - 1 = -\big(\frac{1}{2}\big)^n$, 즉

$$\mathrm{E}(X_n) = 1 - \frac{1}{2^n}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

이다.

검산

이 공식에서 $\mathrm{E}(X_1) = \frac{1}{2}$, $\mathrm{E}(X_2) = \frac{3}{4}$를 얻으며, 이는 (a)와 일치한다. $n = 15$까지 X_n의 정확한 분포를 단계별로 계산해 보면 (b)의 식과 $\mathrm{E}(X_n) = 1 - 2^{-n}$이 모두 확인된다. 예를 들어 $\mathrm{E}(X_5) = \frac{31}{32} \approx 0.969$이고, 200 000회 시행한 컴퓨터 시뮬레이션에서는 0.967을 얻었다. $n \to \infty$일 때 평균은 1에 수렴(converge)하는데, 이는 그럴듯하다. 각 단계에서 평균이 1 쪽으로 남은 거리의 절반만큼 끌려가기 때문이다.

흔한 실수

- $\mathrm{P}(X_n = r)$의 합을 $s = r - 1$이 아니라 $s = r$부터 시작하는 실수. X_n은 $X_{n-1} + 1$까지 올라갈 수 있으므로 값 r는 $s = r - 1$에서도 도달할 수 있다.
- (c)에서 순서를 바꿀 때 합의 범위를 잘못 잡는 실수. 순서를 바꾸고 나면 r는 1부터 $s + 1$까지 움직이므로 $\frac{1}{2}(s+1)(s+2)$가 되고, 인수 $s + 2$가 깔끔하게 약분된다.
- e_1을 초깃값으로 하여 점화식을 풀면서 $1 - 2^{-(n-1)}$로 쓰는 실수. $e_1 = \frac{1}{2}$과 비교하여 확인하라.

STEP 너머

여기서의 과정은 마르코프 연쇄(Markov chain)이다. X_n의 분포는 X_{n-1}에만 의존하며, (b)는 확률벡터(probability vector)에 전이행렬(transition matrix)을 한 번 곱하는 단계에 해당한다. (c)의 지름길은 전기댓값 법칙(law of total expectation) $\mathrm{E}(X_n) = \mathrm{E}\big(\mathrm{E}(X_n \mid X_{n-1})\big)$으로, 이와 같은 많은 문제를 선형 점화식(linear recurrence)으로 바꾸어 준다. 두 아이디어는 모두 Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)에서 전개된다.

Beyond STEP

STEP은 대부분의 학생이 학창 시절에 치르는 수학 시험 가운데 가장 어려운 시험이다. 또한 가장 훌륭한 시험 가운데 하나이기도 하다. 문제는 짧고 낯설며 깊이가 있고, 그중 가장 뛰어난 문제들은 대학 수학의 작은 조각이 모습을 감추고 있는 것이다.

이 책은 1987년 첫 시험에 앞서 나온 예시 시험지(specimen papers)부터 2025년 시험지까지 가운데 가장 흥미로운 STEP 문제들을 골라, 각 문제를 하나의 문으로 삼는다. 모든 문제는 뛰어난 학생이 풀어 가면서 던질 법한 질문들과 함께 꼼꼼하게 풀이하고, 그런 다음 책은 그 문을 지나 한 걸음 더 나아간다. 그 아이디어가 어디에서 왔는지, 대학에서는 무엇으로 발전하는지, 그리고 다음에는 무엇을 읽으면 좋은지를 살펴본다.

이 책은 STEP을 준비하면서 기출 문제 연습 이상의 것을 원하는 재능 있는 예비 수학자를 위해 쓰였다. 수학과 학부생처럼 생각하기 시작하고, 앞으로 무엇이 자신을 기다리고 있는지 알아보고 싶은 학생들을 위한 책이다.

- 순수수학(pure mathematics), 역학(mechanics), 확률(probability)과 통계(statistics)를 아우르는 13개의 장
- 이 36개의 STEP 기출 문제와 각 문제의 안내식 풀이
- 모든 문제 뒤에 숨은 대학 수학
- 답이 실린 후속 연습 문제와 더 읽을거리

2025년 풀이. 책 전체와 모든 장,
모든 풀이를 다음 주소에서 무료로 읽고, 내려받고, 공유할 수 있다.

beyondstep.keithmcnulty.org

본문은 퍼블릭 도메인(CC0 1.0)으로 공개한다. STEP 문제 © Cambridge University Press & Assessment.

