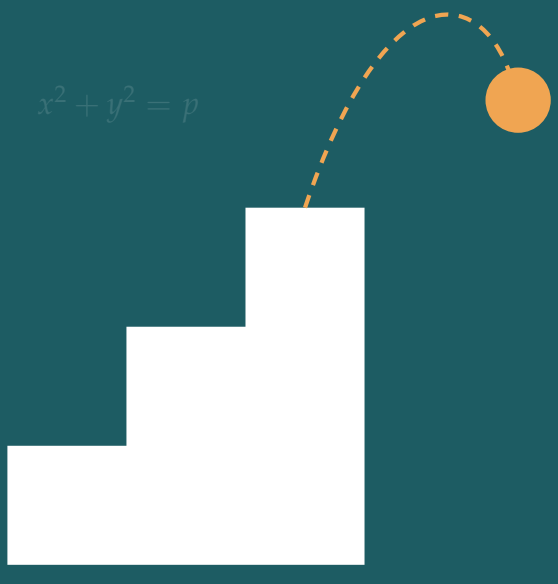
STEP 대비 · 대학 수학

Beyond STEP

STEP II 및 III

2024년 풀이



KEITH McNULTY

Beyond STEP

STEP 기출문제로 여는
대학 수학의 세계

STEP II 및 III

2024년 풀이

Keith McNulty

Beyond STEP: STEP 기출문제로 여는 대학 수학의 세계

2024년 풀이

2024년 STEP 문제지(STEP II 및 III)의 24개 문제 전체에 대한 풀이. 견본 문제지 이후 모든 STEP 문제의 풀이와 *Beyond STEP* 책 전체, 그리고 각 장을 `beyondstep.keithmcnulty.org`에서 무료로 읽고 내려받을 수 있다.

풀이를 읽기 전에 먼저 문제를 제대로 풀어 보자. 모든 답은 수치적으로 검증하였지만, 풀이가 이렇게 많으면 실수가 어느 정도 있을 수밖에 없다. 무언가 잘못된 것처럼 보이면 자신의 풀이를 믿고 꼼꼼히 확인해 보자.

영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.

2026년 11월 온라인 초판 발행.

이 PDF에서 지은이가 직접 만든 모든 것, 곧 본문, 풀이, 그림, 연습문제와 해답은 크리에이티브 커먼즈 CC0 1.0 Universal 라이선스에 따라 퍼블릭 도메인(public domain)으로 공개한다. 누구든 허락을 구하지 않고 어떤 목적으로든 복사하고, 고쳐 쓰고, 공유할 수 있다. 자세한 내용은 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`을 보라.

여기에서 다루는 STEP 문제의 저작권은 Cambridge University Press & Assessment에 있다. 문제는 이 책에 싣지 않았으며, 각 문제마다 공식 출처인 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스나 OCR의 기출 시험지로 가는 링크를 달았다.

오류 제보는 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty에 이슈로 남겨 주기 바란다.

차례

STEP II

Q1 연속한 정수의 합 순수수학 3

Q2 급수와 적분 순수수학 7

Q3 반각 탄젠트 치환 순수수학 11

Q4 벡터와 각의 이등분선 순수수학 16

Q5 치역과 디오판토스 방정식 순수수학 20

Q6 이항급수의 계수 순수수학 24

Q7 곡선 그리기 순수수학 28

Q8 산술-기하 평균 순수수학 33

Q9 포물체 운동 역학 37

Q10 가속하는 쐐기 위의 마찰 역학 41

Q11 그룹 검사의 기댓값 확률과 통계 45

Q12 이산 순서통계량 확률과 통계 49

STEP III

Q1 망원급수 순수수학 53

Q2 부등식과 절댓값 순수수학 57

Q3 단조함수와 도함수 순수수학 62

Q4 포물선의 접선 순수수학 66

Q5 행렬 미분방정식 순수수학 70

Q6 선형 미분방정식 순수수학 75

Q7 e 제곱의 무리성 순수수학 79

Q8 교차하는 이차곡선 순수수학 83

Q9 비스듬한 충돌 역학 88

Q10 넘어짐과 미끄러짐 역학 93

Q11 이항분포의 기댓값 확률과 통계 98
Q12 기하학적 확률 확률과 통계 101

풀이

STEP II 2024, 문제 1

순수수학 • 연속한 정수의 합

> **STEP II 2024, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2024년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

핵심 아이디어

양변은 모두 등차급수(arithmetic series)이므로, 각각 (항의 개수) × (항의 평균)으로 나타낼 수 있다. 두 값을 같다고 놓으면 n, k, c 사이의 이차(quadratic) 관계식 하나를 얻고, 문제의 나머지 부분은 이 관계식에 대한 정수론(number theory)이다. k를 고정하면 c에 대해 쉽게 풀 수 있고, 홀짝성(parity)이나 나머지(remainder)를 보면 c가 언제 양의 정수가 되는지 판단할 수 있다. 반대로 $c = 1$로 고정하면 펠(Pell) 형 방정식을 얻으며, (iv)(b)의 사상은 이미 아는 해로부터 새로운 해를 만들어 내는 표준적인 방법이다.

풀이

소문항 (i)

c부터 시작하는 $n+k$개의 정수는 $c, c+1, \ldots, c+n+k-1$이다. 이들의 합은

$$S_1 = (n+k)c + \frac{(n+k)(n+k-1)}{2}.$$

그다음 n개의 정수는 $c+n+k, \ldots, c+2n+k-1$이고, 그 합은

$$S_2 = n(c+n+k) + \frac{n(n-1)}{2}.$$

두 합을 각각 두 배하여 전개하면

$$2S_1 = 2nc + 2kc + n^2 + 2nk + k^2 - n - k,$$
$$2S_2 = 2nc + 2n^2 + 2nk + n^2 - n.$$

빼면 $2S_1 - 2S_2 = 2kc + k^2 - k - 2n^2$이다. 따라서

$$S_1 = S_2 \iff 2kc + k^2 - k = 2n^2 \iff 2n^2 + k = 2ck + k^2.$$

모든 단계는 거꾸로 되돌릴 수 있으므로(전개하고, 두 배하고, 정리했을 뿐이다), 두 합이 같을 필요충분조건은 $2n^2 + k = 2ck + k^2$이다. 이로써 증명이 끝난다.

소문항 (ii)

(a) $k = 1$이면 조건은 $2n^2 + 1 = 2c + 1$이므로 $c = n^2$이다. 이는 모든 n에 대해 양의 정수이므로, **모든** 양의 정수 n이 가능하고 이때 $c = n^2$이다. (예를 들어 $n = 2$이면 $4 + 5 + 6 = 7 + 8$이다.)

(b) $k = 2$이면 조건은 $2n^2 + 2 = 4c + 4$, 즉

$$n^2 = 2c + 1, \qquad c = \frac{n^2 - 1}{2}.$$

c가 정수이려면 n^2이 홀수여야 하므로 n이 홀수여야 한다. c가 양수이려면 $n^2 > 1$이어야 하므로 $n = 1$은 제외된다. 역으로 $n \geq 3$인 모든 홀수 n은 양의 정수 c를 준다. 따라서 가능한 값은

$$n \in \{3, 5, 7, \dots\}, \qquad c = \tfrac{1}{2}(n^2 - 1).$$

$n = 3, c = 4$인 경우가 등식 $4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 9 + 10 + 11$이다.

소문항 (iii)

$k = 4$이면 조건은 $2n^2 + 4 = 8c + 16$, 즉

$$n^2 = 4c + 6 = 4(c + 1) + 2.$$

따라서 n^2을 4로 나눈 나머지가 2여야 한다. 그러나 제곱수를 4로 나눈 나머지는 0 또는 1이다. $n = 2m$이면 $n^2 = 4m^2$이고, $n = 2m + 1$이면 $n^2 = 4(m^2 + m) + 1$이기 때문이다. 그러므로 해가 없다.

소문항 (iv)

$c = 1$이면 조건은 $2n^2 + k = 2k + k^2$, 즉

$$2n^2 = k(k + 1). \qquad (*)$$

다시 말해 $n^2 = \frac{1}{2}k(k+1)$이다. 즉 완전제곱수(perfect square)이기도 한 삼각수(triangular number)를 찾는 문제이다.

(a) 작은 k를 대입해 보자. $k = 1$이면 $2n^2 = 2$이므로 $n = 1$이다. $k = 2, \dots, 7$이면 $k(k+1)/2 = 3, 6, 10, 15, 21, 28$이고, 이 중 제곱수는 없다. $k = 8$이면 $2n^2 = 72$이므로 $n = 6$이다. 따라서 두 가지 경우는

$$k = 1,\ n = 1 \qquad \text{그리고} \qquad k = 8,\ n = 6.$$

(두 번째 경우를 확인하면 $1+2+\cdots+14=105$이고 $15+16+\cdots+20=105$이다.)

(b) $2N^2=K^2+K$라 하자. $N'=3N+2K+1$, $K'=4N+3K+1$로 놓으면

$$\begin{aligned}2N'^2&=2(9N^2+4K^2+1+12NK+6N+4K)\\&=18N^2+8K^2+24NK+12N+8K+2,\\K'^2+K'&=(16N^2+9K^2+1+24NK+8N+6K)+(4N+3K+1)\\&=16N^2+9K^2+24NK+12N+9K+2.\end{aligned}$$

빼면

$$2N'^2-(K'^2+K')=2N^2-K^2-K=0,$$

이고, 마지막 등호에서 가정을 사용하였다. 따라서 $2N'^2=K'(K'+1)$이다. N과 K가 양의 정수이므로 N'과 K'도 양의 정수이고, $(*)$와 소문항 (i)에 의해 N'은 n의 가능한 값이며 이에 대응하는 k는 $k=K'$이다.

? **생각해 보기** 이 이상한 공식들은 어디에서 나온 것일까?

$(*)$에 4를 곱하고 1을 더하면 $(2k+1)^2-8n^2=1$이 된다. $x=2k+1$, $y=n$으로 두면 이는 펠 방정식(Pell equation) $x^2-8y^2=1$이고, 그 해들은 $x+y\sqrt{8}$에 가장 작은 해 $3+\sqrt{8}$을 곱하여 만들어진다. $(x+y\sqrt{8})(3+\sqrt{8})=(3x+8y)+(x+3y)\sqrt{8}$로 쓰고 이를 다시 k와 n으로 옮기면 정확히 $N'=3N+2K+1$과 $2K'+1=3(2K+1)+8N$, 즉 $K'=4N+3K+1$을 얻는다.

(c) 이 사상을 $(N,K)=(1,1)$에 적용하면 $N'=6$, $K'=8$이 나오는데, 이는 (a)의 두 번째 해일 뿐이다. $(N,K)=(6,8)$에 적용하면

$$N'=18+16+1=35,\qquad K'=24+24+1=49,$$

이고, 다시 $(35,49)$에 적용하면

$$N'=105+98+1=204,\qquad K'=140+147+1=288.$$

따라서 새로운 두 해는

$$k=49,\ n=35\qquad \text{그리고}\qquad k=288,\ n=204.$$

실제로 $2\cdot35^2=2450=49\cdot50$이고 $2\cdot204^2=83232=288\cdot289$이다.

검산

- 처음 예시는 $n=3, k=2, c=4$이다. $2\cdot9+2=20=2\cdot4\cdot2+4$이므로 (i)의 관계식을 만족하고, $c=\frac{1}{2}(9-1)$이므로 (ii)(b)와도 맞는다.

- $n, k < 40$과 $c < 200$의 모든 경우를 컴퓨터로 탐색한 결과, 두 합이 같은 것은 정확히 $2n^2 + k = 2ck + k^2$일 때임을 확인하였다. 또 $c = 1$, $n, k < 400$으로 탐색한 결과 $(k, n) = (1, 1), (8, 6), (49, 35), (288, 204)$만 나왔으며, 이는 (iv)와 일치한다.
- (iv)(b)에서 (N, K)에서 (N', K')으로 가는 단계는 **임의의** N, K에 대해 $2N^2 - K^2 - K$의 값을 보존한다는 점에 주목하자. 이는 작은 수로 계산을 빠르게 검산하는 방법이 된다. 예를 들어 $N = K = 0$이면 $N' = K' = 1$이고 두 값 모두 0이다.

흔한 실수

- (ii)(b)에서 $n = 1$을 포함하는 것. 이때 $c = 0$이 되는데, 이는 양의 정수가 아니다.
- (i)에서 두 번째 묶음이 시작하는 위치를 잘못 세는 것. 두 번째 묶음은 $c + n + k + 1$이 아니라 $c + n + k$에서 시작한다.
- (iv)(c)에서 $k = 8$, $n = 6$을 다시 답으로 쓰는 것. 이는 사상의 첫 번째 출력이지만 이미 (a)에서 구한 해이다.

STEP 너머

방정식 $x^2 - 8y^2 = 1$은 펠 방정식이며, 제곱수가 아닌 임의의 d에 대해 $x^2 - dy^2 = 1$의 해는 모두 하나의 기본해(fundamental solution)의 거듭제곱에서, 즉 $x + y\sqrt{d}$ 꼴의 수의 곱셈을 통해 얻어진다. 이것은 $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ 같은 환(ring)의 단원(unit)을 처음으로 엿보는 것으로, 대수적 정수론(algebraic number theory)의 핵심 주제이다. 대븐포트(Davenport)의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 연분수(continued fraction)를 이용하여 펠 방정식을 다룬다.

풀이

STEP II 2024, 문제 2

순수수학 • 급수와 적분

> **STEP II 2024, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2024년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

핵심 아이디어

소문항 (i)은 모든 적분 $\int_0^1 x^m/(8+x^3)\,\mathrm{d}x$를 급수(series)로 바꾸어 주므로, 같은 재료로 만들어진 급수는 모두 이 적분들의 일차결합이 된다. (ii)나 (iii)의 급수를 계산하려면 괄호 안의 식을 $1/(3k+m+1)$ 꼴의 항들로 쪼갠 다음, 대응하는 피적분함수(integrand)들을 하나의 분수로 다시 합쳐서 적분하면 된다. 이렇게 얻은 적분을 다룰 수 있게 해 주는 것은 인수분해(factorisation) $8+x^3=(x+2)(x^2-2x+4)$이다.

풀이

풀이 전체에서 다음과 같이 쓴다.

$$I_m=\int_0^1 \frac{x^m}{8+x^3}\,\mathrm{d}x.$$

소문항 (i)

인수 8을 밖으로 빼내고, $|u|<1$일 때 성립하는 $(1+u)^{-1}=\sum_{k\geq 0}(-1)^k u^k$에 $u=x^3/8$을 대입하면

$$(8+x^3)^{-1}=\frac{1}{8}\left(1+\frac{x^3}{8}\right)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{3k}}{8^{k+1}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{3(k+1)}}\,x^{3k}.$$

이 전개는 $|x^3/8|<1$, 즉 $|x|<2$일 때 성립한다.

이제 양변에 x^m을 곱하고 $[0,1]$에서 항별로 적분한다. 이 구간은 전개가 성립하는 범위 안에

있다(그리고 문제에서 수렴(convergence)은 신경 쓰지 않아도 된다고 하였다).

$$I_m = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{3(k+1)}} \int_0^1 x^{3k+m}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{3(k+1)}} \cdot \frac{1}{3k+m+1},$$

여기서 $n = 3k+m \geq 0$에 대하여 $\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = 1/(n+1)$임을 이용하였다. 이것이 구하는 결과이다.

소문항 (ii)

세 분모 $3k+3, 3k+2, 3k+1$은 각각 $m = 2, 1, 0$일 때의 $3k+m+1$이다. 따라서 (i)에 의하여 주어진 급수는

$$I_2 - 2I_1 + 4I_0 = \int_0^1 \frac{x^2-2x+4}{8+x^3}\,\mathrm{d}x.$$

? **생각해 보기** 왜 x^2-2x+4가 무언가와 약분되어야 할까?

$8+x^3$이 두 세제곱의 합(sum of two cubes)이기 때문이다. $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$에 $a = x$, $b = 2$를 대입하면

$$8+x^3 = (x+2)(x^2-2x+4).$$

따라서 피적분함수는 $\dfrac{1}{x+2}$로 간단해지고, 급수는 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x$와 같다. 이것이 보여야 할 것이었다. 마지막으로

$$\int_0^1 \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x = \Big[\ln(x+2)\Big]_0^1 = \ln 3 - \ln 2 = \ln\tfrac{3}{2}.$$

소문항 (iii)

먼저 괄호 안의 식을 k에 대한 부분분수(partial fractions)로 분해한다. $2k+1 = \alpha(3k+2)+\beta(3k+1)$로 놓자. $k = -\frac{1}{3}$을 대입하면 $\frac{1}{3} = \alpha$이고, $k = -\frac{2}{3}$을 대입하면 $-\frac{1}{3} = -\beta$, 즉 $\beta = \frac{1}{3}$이다. 그러므로

$$\frac{72(2k+1)}{(3k+1)(3k+2)} = \frac{24}{3k+1} + \frac{24}{3k+2},$$

이고, (i)에 의하여($m = 0$과 $m = 1$인 경우) 급수는

$$24I_0 + 24I_1 = \int_0^1 \frac{24(1+x)}{(x+2)(x^2-2x+4)}\,\mathrm{d}x.$$

와 같다. 이제 이 피적분함수를 부분분수로 분해한다.

$$\frac{1+x}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+4},$$

즉

$$1+x = A(x^2-2x+4)+(Bx+C)(x+2).$$

$x=-2$를 대입하면 $-1=12A$이므로 $A=-\frac{1}{12}$이다. x^2의 계수를 비교하면 $0=A+B$이므로 $B=\frac{1}{12}$이다. 상수항을 비교하면 $1=4A+2C$이므로 $C=\frac{2}{3}$이다. (x의 계수로 확인하면 $-2A+2B+C=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{2}{3}=1$이다.) 양변에 24를 곱하면

$$\begin{aligned}\frac{24(1+x)}{8+x^3} &= -\frac{2}{x+2}+\frac{2x+16}{x^2-2x+4}\\ &= -\frac{2}{x+2}+\frac{2x-2}{x^2-2x+4}+\frac{18}{(x-1)^2+3},\end{aligned}$$

여기서는 이차식의 도함수 $2x-2$를 떼어 내고, 남은 부분을 완전제곱식(completing the square)으로 정리하였다.

각 부분을 $[0,1]$에서 적분한다.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{-2}{x+2}\,\mathrm{d}x &= -2\ln\tfrac{3}{2} = -2\ln 3+2\ln 2,\\ \int_0^1 \frac{2x-2}{x^2-2x+4}\,\mathrm{d}x &= \Big[\ln(x^2-2x+4)\Big]_0^1 = \ln\tfrac{3}{4} = \ln 3-2\ln 2,\\ \int_0^1 \frac{18}{(x-1)^2+3}\,\mathrm{d}x &= \frac{18}{\sqrt{3}}\Big[\arctan\frac{x-1}{\sqrt{3}}\Big]_0^1\\ &= 6\sqrt{3}\Big(0-\arctan\big(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\big)\Big) = 6\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{6} = \pi\sqrt{3}.\end{aligned}$$

마지막 줄에서는 $u=x-1$, $c=\sqrt{3}$으로 놓고 $\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+c^2}=\frac{1}{c}\arctan\frac{u}{c}$를 이용하였다. 세 부분을 더하면 $\ln 2$ 항들이 소거되어

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{3(k+1)}}\left(\frac{72(2k+1)}{(3k+1)(3k+2)}\right) = \pi\sqrt{3}-\ln 3,$$

이므로 $a=3$, $b=3$이다.

검산

- 이 급수들은 매우 빠르게 수렴하므로(각 항은 바로 앞 항의 8분의 1 이하이다) 처음 몇 항만으로도 좋은 검산이 된다. (ii)에서 급수의 처음 세 항을 더하면 $0.41667-0.01198+0.00084\approx 0.40553$이고, $\ln\frac{3}{2}\approx 0.40547$과 비교된다.
- (iii)에서 $\pi\sqrt{3}-\ln 3\approx 5.4414-1.0986=4.3428$이다. 컴퓨터로 급수의 처음 200개 항을 더하면 소수점 아래 열두 자리까지 일치한다. $k=0$인 항 하나만으로도 $\frac{1}{8}\cdot 36=4.5$가 되어 크기가 맞다.

흔한 실수

- 전개식에서 $8^{-(k+1)}$ 대신 8^{-k}로 쓰는 것. 처음에 밖으로 빼낸 인수 $\frac{1}{8}$을 잃어버리면 안 된다.
- $\frac{1}{3k+3}$을 I_2가 아니라 I_3과 대응시키는 것. 분모는 $3k+m+1$이므로 m은 상수항보다 1 작다.
- $\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$이 음수임을 잊어 $\pi\sqrt{3}$ 항의 부호를 틀리는 것.

STEP 너머

(i)에서처럼 합과 적분의 순서를 바꾸는 것은 여기서는 정당한데, 거듭제곱급수(power series)가 $[0,1]$에서 균등수렴(uniform convergence)하기 때문이다. 이러한 순서 교환이 언제 허용되는지는 대학 1학년 해석학(analysis)의 중심 주제이다. 같은 방법으로 (iii)에서와 똑같이 $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\cdots=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$의 합을 구할 수 있다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 균등수렴과 항별 적분(term-by-term integration)을 꼼꼼하게 설명한다.

풀이

STEP II 2024, 문제 3

순수수학 • 반각 탄젠트 치환

> **STEP II 2024, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2024년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

핵심 아이디어

소문항 (i)은 일종의 사전을 만든다. 원 위에서 각 ϕ에 있는 점은, N에서 그 점을 지나는 직선이 y축과 만나는 높이 $\tan\frac{1}{2}\phi$에 대응한다. 이 대응을 거꾸로도 읽어서, 모든 높이 q가 원 위의 점 정확히 하나를 주도록 한다. 그러면 문제에 나오는 q의 각 함수는 $\frac{1}{2}\theta$에 관한 삼각함수 항등식이 되고, 각 θ에, 따라서 점에 무슨 일이 일어나는지 바로 읽어 낼 수 있다.

풀이

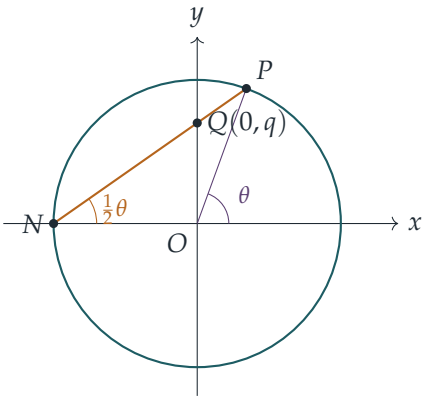
소문항 (i)

$P \neq N$이므로 $\cos\theta \neq -1$이고, 따라서 직선 NP는 수직선이 아니다. 그 기울기는

$$\frac{\sin\theta - 0}{\cos\theta - (-1)} = \frac{2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta}{2\cos^2\frac{1}{2}\theta} = \tan\tfrac{1}{2}\theta$$

이다. 여기서 배각 공식(double-angle formulas) $\sin\theta = 2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta$와 $1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{1}{2}\theta$를 썼다($|\frac{1}{2}\theta| < \frac{1}{2}\pi$이므로 $\cos\frac{1}{2}\theta \neq 0$이다). 이 직선은 $(-1,0)$을 지나므로 $y = (x+1)\tan\frac{1}{2}\theta$이고, $x = 0$을 대입하면 요구한 대로 $q = \tan\frac{1}{2}\theta$를 얻는다.

기하적으로 보면 이것은 원주각(angle at the circumference)이다. P가 중심에서 각 θ를 이루므로, 현 NP는 N에서 x축과 각 $\frac{1}{2}\theta$를 이룬다.



거꾸로 가기: 높이에서 점으로

앞으로 그 역(converse)이 계속 필요하다. 임의의 실수 q가 주어지면, N과 $(0,q)$를 지나는 직선은 $y = q(x+1)$이다. 이를 $x^2+y^2=1$에 대입하면

$$x^2 - 1 + q^2(x+1)^2 = 0 \iff (x+1)\left[(1+q^2)x - (1-q^2)\right] = 0$$

이다. 근 $x=-1$은 N이므로, 다른 교점은

$$\left(\frac{1-q^2}{1+q^2},\ \frac{2q}{1+q^2}\right)$$

이다. $q = \tan\frac{1}{2}\phi$이면 t 공식에 의해 이 점은 $(\cos\phi, \sin\phi)$이다. $\phi \mapsto \tan\frac{1}{2}\phi$는 $(-\pi,\pi)$에서 $\mathbb{R}$로의 전단사(bijection)이므로, 다음을 얻는다.

사전. 임의의 각 ϕ($(-\pi,\pi)$에 속하지 않아도 된다)에 대하여 $\tan\frac{1}{2}\phi = q$이면, N에서 $(0,q)$를 지나는 직선은 원과 $(\cos\phi, \sin\phi)$에서 다시 만난다.

ϕ를 $\phi \pm 2\pi$로 바꾸어도 $\tan\frac{1}{2}\phi$($\frac{1}{2}\phi$에 대하여 주기가 π이다)도, 점도 바뀌지 않으므로 이 사실은 모든 ϕ에 대하여 성립한다.

소문항 (ii)

(a) $\tan\frac{1}{4}\pi = 1$이므로 덧셈정리(addition formula)에 의해

$$\tan\left(\tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{4}\pi\right) = \frac{\tan\frac{1}{2}\theta + 1}{1 - \tan\frac{1}{2}\theta} = \frac{1+q}{1-q} = f_1(q)$$

이고, 이것은 요구한 대로 $\tan\frac{1}{2}\left(\theta + \frac{1}{2}\pi\right)$이다. 조건 $q \neq 1$은 $\theta \neq \frac{1}{2}\pi$를 뜻하므로 분모는 0이 아니다.

(b) (a)에 의해 Q_1의 높이는 $\phi = \theta + \frac{1}{2}\pi$일 때의 $\tan\frac{1}{2}\phi$이다. 사전에 의해 $P_1 = \big(\cos(\theta +$

$\frac{1}{2}\pi), \sin(\theta+\frac{1}{2}\pi))$이다. 따라서

P_1은P를O를 중심으로 시계 반대 방향으로 회전(rotation)한 점이며, 회전각은$\frac{1}{2}\pi$.

(제외된 값 $q=1$은 $\theta=\frac{1}{2}\pi$이며, 이 회전에 의한 상이 바로 N이 되는 유일한 점이다.)

소문항 (iii)

(a) P_2는 각 $\theta+\frac{1}{3}\pi$에 있는 점이므로, 필요하면 각을 $(-\pi,\pi)$ 안으로 옮겨서(이렇게 해도 각의 절반의 tan 값은 바뀌지 않는다) 소문항 (i)을 적용하고 $\tan\frac{1}{6}\pi=\frac{1}{\sqrt{3}}$을 쓰면

$$\mathrm{f}_2(q)=\tan\left(\tfrac{1}{2}\theta+\tfrac{1}{6}\pi\right)=\frac{q+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{q}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}q+1}{\sqrt{3}-q}$$

이다. 조건 $q\neq\sqrt{3}$은 $\theta\neq\frac{2}{3}\pi$이고, 이는 정확히 P_2가 N이 되어 직선 NP_2가 존재하지 않게 되는 경우이다.

(b) 이번에는 $\tan\frac{1}{4}\pi=1$을 차의 공식과 함께 쓴다.

$$\mathrm{f}_3(q)=\frac{1-q}{1+q}=\frac{\tan\frac{1}{4}\pi-\tan\frac{1}{2}\theta}{1+\tan\frac{1}{4}\pi\tan\frac{1}{2}\theta}=\tan\left(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}\theta\right)=\tan\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\pi-\theta\right).$$

사전에 의해 P_3은 각 $\frac{1}{2}\pi-\theta$에 있는 점, 즉 $(\sin\theta,\cos\theta)$이다. P의 좌표가 서로 바뀌었으므로

P_3은P를 대칭이동(reflection)한 점이며, 대칭축은 직선$y=x$.

(c)

? 생각해 보기 f_2^{-1}는 각에 어떤 일을 하는가?

(a)에서 f_2는 모든 각 ϕ에 대하여 $\tan\frac{1}{2}\phi$를 $\tan\frac{1}{2}(\phi+\frac{1}{3}\pi)$로 보낸다(계산에서 $\phi=\theta$를 쓴 적이 없다). 따라서 $\mathrm{f}_2\left(\tan\frac{1}{2}(\psi-\frac{1}{3}\pi)\right)=\tan\frac{1}{2}\psi$이고, f_2는 일대일(one-to-one)이므로($s=\mathrm{f}_2(q)$를 풀면 $s\neq-\sqrt{3}$일 때 유일한 $q=\frac{\sqrt{3}s-1}{s+\sqrt{3}}$을 얻는다)

$$\mathrm{f}_2^{-1}\left(\tan\tfrac{1}{2}\psi\right)=\tan\tfrac{1}{2}\left(\psi-\tfrac{1}{3}\pi\right)$$

이다. 즉 f_2^{-1}는 각을 $\frac{1}{3}\pi$만큼 되돌린다.

이제 세 단계를 거치며 각을 따라가 보자. $0<q<1$이므로 $0<\theta<\frac{1}{2}\pi$이다.

- f_2: 각 $\theta+\frac{1}{3}\pi\in(\frac{1}{3}\pi,\frac{5}{6}\pi)$. 이때 $\mathrm{f}_2(q)>0$이므로 f_3를 적용할 수 있다.
- f_3: 각 $\frac{1}{2}\pi-(\theta+\frac{1}{3}\pi)=\frac{1}{6}\pi-\theta\in(-\frac{1}{3}\pi,\frac{1}{6}\pi)$. 이 각은 $-\frac{2}{3}\pi$가 아니므로 높이는 $-\sqrt{3}$이 아니고, f_2^{-1}를 적용할 수 있다.

- f_2^{-1}: 각 $\frac{1}{6}\pi - \theta - \frac{1}{3}\pi = -\theta - \frac{1}{6}\pi$.

따라서 $\mathrm{f}_4(q) = \tan\frac{1}{2}\left(-\theta - \frac{1}{6}\pi\right)$이고, 사전에 의해 P_4는 각 $-\frac{1}{6}\pi - \theta$에 있는 점이다.

O를 지나고 각 α를 이루는 직선에 대한 대칭이동은 각 θ에 있는 점을 각 $2\alpha - \theta$에 있는 점으로 보낸다(대칭축이 두 방향을 이등분한다). 여기서 $2\alpha = -\frac{1}{6}\pi$이므로

P_4는 P를, O를 지나고 $-\frac{1}{12}\pi$의 각을 이루는 직선(양의 x축 기준)에 대하여 대칭이동한 점이다,

즉 대칭축은 직선 $y = -\tan\frac{1}{12}\pi\, x = -(2-\sqrt{3})\, x$이다.

이는 자연스럽다. $\frac{1}{3}\pi$만큼 회전하고, $y = x$에 대하여 대칭이동한 뒤, 다시 되돌려 회전하는 것은 대칭축 $y = x$를 $\frac{1}{3}\pi$만큼 되돌려 회전한 직선에 대한 대칭이동이고, $\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{3}\pi = -\frac{1}{12}\pi$이다. 명시적으로 쓰면, $t = \tan\frac{1}{12}\pi = 2 - \sqrt{3}$으로 두어

$$\mathrm{f}_4(q) = -\tan\left(\tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{12}\pi\right) = -\frac{q + 2 - \sqrt{3}}{1 - (2-\sqrt{3})q}$$

이다.

검산

- (iii)(b)에서 $\theta = \frac{1}{2}\pi$로 두면 $P = (0,1)$, $q = 1$, $\mathrm{f}_3(1) = 0$이므로 $Q_3 = O$이고 $P_3 = (1,0)$이며, 이는 실제로 $(0,1)$을 $y = x$에 대하여 대칭이동한 점이다.
- (c)에서 $q = \frac{1}{2}$이면 $\mathrm{f}_2(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}-1} \approx 1.5146$, 다음으로 $\mathrm{f}_3 \approx -0.2046$, 그다음 $\mathrm{f}_2^{-1} \approx -0.8868$이고, 이는 닫힌 식 $-\frac{\frac{1}{2}+2-\sqrt{3}}{1-\frac{1}{2}(2-\sqrt{3})} \approx -0.8868$과 일치한다.
- 무작위로 고른 점 P 100 000개에 대하여 컴퓨터로 확인한 결과, 위의 모든 관계($\frac{1}{2}\pi$만큼의 회전, f_2의 식, $y = x$에 대한 대칭이동, 각 $-\frac{1}{12}\pi$의 직선에 대한 대칭이동)가 반올림 오차 범위 안에서 성립하였다.

흔한 실수

- 각 $\theta + \frac{1}{2}\pi$가 $(-\pi, \pi)$ 밖에 있을 수 있다는 점을 알아차리지 못한 채 P_1이 각 $\theta + \frac{1}{2}\pi$에 있다고 쓰는 것. 이것이 문제가 되지 않는 이유는 오직 ϕ가 2π만큼 바뀔 때 $\tan\frac{1}{2}\phi$와 점이 모두 반복되기 때문이다.
- (c)에서 f_2^{-1}의 회전을 반대 방향으로 적용하는 것($\frac{1}{3}\pi$를 다시 더하는 것). 그러면 각 $\frac{1}{2}\pi - \theta$를 얻게 되어 P_4가 P_3과 같다는 잘못된 결론에 이른다.

STEP 너머

각 θ에 있는 점을 $q = \tan\frac{1}{2}\theta$로 보내는 사상은 원을 직선 위로 보내는 **입체사영**(*stereographic projection*)이고, 함수 f_1, f_2, f_3는 뫼비우스 변환(Möbius transformations) $q \mapsto \frac{aq+b}{cq+d}$이다. 원의 모든 회전과 대칭이동은 직선의 이러한 변환이 되고, 대칭변환을 합성하는 것은 2×2 행렬 $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$을 곱하는 것에 대응한다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이 그림을 아름답게 전개하며, 이를 리만 구(Riemann sphere)로까지 확장한다.

풀이

STEP II 2024, 문제 4

순수수학 • 벡터와 각의 이등분선

STEP II 2024, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2024년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

핵심 아이디어

모든 것을 단위벡터(unit vector)로 줄여서 생각한다. $\hat{\mathbf{x}}$와 $\hat{\mathbf{y}}$를 각각 OX와 OY 방향의 단위벡터라 하면, $\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}$는 마름모(rhombus)의 대각선이고, 마름모의 대각선은 그 각을 이등분한다. 주어진 $\mathbf{b}$는 $\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}$의 양수배일 뿐이므로, 각 이등분 벡터(bisecting vector)는 두 단위벡터의 합의 양수배이다. 이 덕분에 소문항 (ii)의 내적(dot product)들이 하나의 대칭적인 식으로 정리된다.

풀이

이 풀이 전체에서 각 XOY를 θ라 쓴다. O, X, Y가 한 직선 위에 있지 않으므로(not collinear) $0<\theta<\pi$이고, 따라서

$$-1<\cos\theta<1.$$

이다. 아래에서 두 엄격한 부등식이 모두 쓰인다.

소문항 (i)(a)

$\hat{\mathbf{x}}=\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$, $\hat{\mathbf{y}}=\mathbf{y}/|\mathbf{y}|$라 하면 $\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{y}}=\cos\theta$이다. 그러면

$$\mathbf{b}=|\mathbf{x}|\mathbf{y}+|\mathbf{y}|\mathbf{x}=|\mathbf{x}||\mathbf{y}|\,(\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}).$$

이것은 $\mathbf{x}$와 $\mathbf{y}$의 일차결합이므로 평면 XOY 위에 있다. 또한 영벡터가 아니다. $\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}=\mathbf{0}$이면 $\hat{\mathbf{y}}=-\hat{\mathbf{x}}$가 되어 O, X, Y가 한 직선 위에 있게 되기 때문이다.

이제 각을 비교한다.

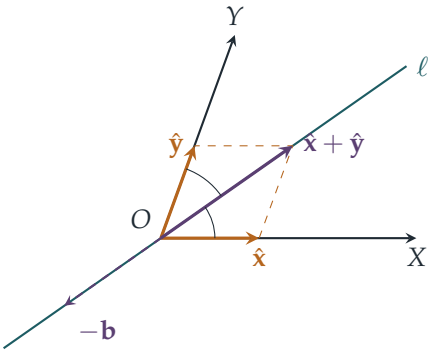
$$\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{x}}=|\mathbf{x}||\mathbf{y}|\,(1+\cos\theta)=\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{y}},$$

이므로, $\mathbf{b}$와 $\overrightarrow{OX}$ 사이의 각 α와 $\mathbf{b}$와 $\overrightarrow{OY}$ 사이의 각 β는

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{x}}}{|\mathbf{b}|} = \frac{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|(1+\cos\theta)}{|\mathbf{b}|} = \frac{\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{y}}}{|\mathbf{b}|} = \cos\beta.$$

를 만족한다. 두 각 모두 코사인이 일대일(one-to-one)인 구간 $[0,\pi]$에 있으므로 $\alpha=\beta$이다. 또 $1+\cos\theta>0$이므로 $\cos\alpha>0$이고, 두 각 모두 90°보다 작다. 따라서 $\mathbf{b}$는 각 XOY의 이등분 벡터이다.

다른 이등분 벡터.



$\hat{\mathbf{x}}$와 $\hat{\mathbf{y}}$의 길이가 같으므로 이들이 만드는 평행사변형(parallelogram)은 마름모이고, 그 대각선 $\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}$는 각 XOY를 똑같은 두 부분으로 나눈다. 평면 XOY에서 OX와 OY와 같은 각을 이루는 방향은 이 대각선을 품은 직선 ℓ을 따르는 두 방향뿐이다. 벡터를 ℓ에서 벗어나도록 회전시키면 한쪽 변에는 가까워지고 다른 쪽 변에서는 멀어지므로 두 각이 달라진다. ℓ 위에서 $\mathbf{b}$의 방향은 각 변과 $\frac{1}{2}\theta<90^\circ$의 각을 이룬다. 반대 방향은 각 변과 $180^\circ-\frac{1}{2}\theta>90^\circ$의 각을 이루므로 제외된다. 따라서 모든 이등분 벡터는 ℓ을 따라 $\mathbf{b}$와 같은 방향을 가리키며, 이는 그것이 $\mathbf{b}$의 양수배라는 뜻이다.

같은 논증을 대수적으로 하면 다음과 같다. 평면 위의 임의의 벡터는 $\mathbf{v}=p\hat{\mathbf{x}}+q\hat{\mathbf{y}}$ 꼴이다. 두 각이 같다는 것은 $\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{x}}=\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{y}}$라는 뜻이고,

$$\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{x}}-\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{y}} = (p+q\cos\theta)-(p\cos\theta+q) = (p-q)(1-\cos\theta).$$

$\cos\theta\neq1$이므로 $p=q$일 수밖에 없고, 따라서 $\mathbf{v}=p(\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}})$이다. 두 각이 예각이 되는 것은 $p>0$일 때뿐이다.

소문항 (i)(b)

점 B가 직선 XY 위에 있을 필요충분조건은 어떤 실수 t에 대하여 $\overrightarrow{OB}=(1-t)\mathbf{x}+t\mathbf{y}$인 것이다. 따라서

$$\lambda|\mathbf{y}|\,\mathbf{x}+\lambda|\mathbf{x}|\,\mathbf{y} = (1-t)\mathbf{x}+t\mathbf{y}.$$

이어야 한다. $\mathbf{x}$와 $\mathbf{y}$는 평행하지 않으므로 계수를 비교할 수 있다. 즉 $\lambda|\mathbf{y}| = 1-t$이고 $\lambda|\mathbf{x}| = t$이다. 두 식을 더하면

$$\lambda = \frac{1}{|\mathbf{x}|+|\mathbf{y}|}, \qquad t = \frac{|\mathbf{x}|}{|\mathbf{x}|+|\mathbf{y}|}.$$

를 얻는다. 그러면 $0 < t < 1$에 대하여 $\overrightarrow{XB} = t(\mathbf{y}-\mathbf{x})$, $\overrightarrow{BY} = (1-t)(\mathbf{y}-\mathbf{x})$이므로, B는 X와 Y 사이에 있고

$$XB : BY = t : (1-t) = |\mathbf{x}| : |\mathbf{y}| = OX : OY.$$

이다. 이것이 각의 이등분선 정리(angle bisector theorem)이다. 즉 O에서 그은 이등분선은 XY를 이웃한 두 변의 비로 나눈다.

소문항 (i)(c)

여기서 $\overrightarrow{OB}$는 $\mathbf{b}$의 영이 아닌 실수배이므로, $OB \perp XY$는 $\mathbf{b}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x}) = 0$을 뜻한다. $\mathbf{b} = |\mathbf{x}||\mathbf{y}|(\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}})$와 $\mathbf{y}-\mathbf{x} = |\mathbf{y}|\hat{\mathbf{y}} - |\mathbf{x}|\hat{\mathbf{x}}$를 이용하면

$$\begin{aligned}\mathbf{b}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x}) &= |\mathbf{x}||\mathbf{y}|\big(|\mathbf{y}|\cos\theta + |\mathbf{y}| - |\mathbf{x}| - |\mathbf{x}|\cos\theta\big)\\ &= |\mathbf{x}||\mathbf{y}|\,(|\mathbf{y}|-|\mathbf{x}|)(1+\cos\theta).\end{aligned}$$

이다. 그런데 $|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}| > 0$이고 $1+\cos\theta > 0$이므로, 이 값이 0이 되는 것은 $|\mathbf{y}| = |\mathbf{x}|$일 때뿐이다. 즉 $OX = OY$이고, 삼각형 XOY는 이등변삼각형(isosceles triangle)이다.

소문항 (ii)

$\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$를 각각 $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}$ 방향의 단위벡터라 하자. 네 점 중 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않으므로, 특히 O, P, Q도 한 직선 위에 있지 않고, 따라서 소문항 (i)(a)를 각 각에 적용할 수 있다. 그러므로 선택한 이등분 벡터는 어떤 $\alpha, \beta, \gamma > 0$에 대하여

$$\mathbf{u} = \alpha(\mathbf{p}+\mathbf{q}), \qquad \mathbf{v} = \beta(\mathbf{q}+\mathbf{r}), \qquad \mathbf{w} = \gamma(\mathbf{r}+\mathbf{p}),$$

꼴이어야 하며, 세 벡터 모두 영벡터가 아니다.

> **생각해 보기** 세 이등분 벡터는 임의의 양수배이다. 어떻게 세 각에 대해 한꺼번에 무언가를 말할 수 있을까?

배율이 양수이므로 내적의 부호를 바꿀 수 없다. 그리고 중요한 것은 부호뿐이다. 영벡터가 아닌 두 벡터 사이의 각은 내적이 양수, 0, 음수인지에 따라 각각 예각, 직각, 둔각이기 때문이다. $S = \mathbf{p}\cdot\mathbf{q} + \mathbf{q}\cdot\mathbf{r} + \mathbf{r}\cdot\mathbf{p}$라 쓰자. $\mathbf{q}\cdot\mathbf{q} = 1$을 이용하면

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \alpha\beta\,(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q} + \mathbf{p}\cdot\mathbf{r} + \mathbf{q}\cdot\mathbf{q} + \mathbf{q}\cdot\mathbf{r}) = \alpha\beta\,(1+S).$$

이다. 똑같은 방법으로 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}=1$과 $\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}=1$을 이용하면

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=\beta\gamma\,(1+S),\qquad \mathbf{w}\cdot\mathbf{u}=\gamma\alpha\,(1+S).$$

이다. $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$가 모두 양수이므로, 세 내적은 모두 $1+S$와 부호가 같다. 따라서 $1+S>0$이면 세 각이 모두 예각, $1+S=0$이면 모두 직각, $1+S<0$이면 모두 둔각이다. ■

검산

- $\mathbf{x}=(3,0,0)$, $\mathbf{y}=(0,4,0)$으로 잡자. 그러면 $\mathbf{b}=(12,12,0)$이고, 이는 직각을 이등분한다. $\lambda=\frac{1}{7}$이면 $B=(\frac{12}{7},\frac{12}{7},0)$을 얻는데, 이 점은 $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$ 위에 있고 $XB:BY=3:4$이다.
- 소문항 (ii)의 세 경우는 모두 실제로 일어난다. P, Q, R가 한 평면에서 서로 120°씩 벌어져 있으면 $S=-\frac{3}{2}$이고 이등분선들은 120°(둔각)로 만난다. $\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r}$가 O를 중심으로 하는 정사면체(regular tetrahedron)의 세 꼭짓점을 가리키면 각 내적이 $-\frac{1}{3}$이므로 $S=-1$이고 세 각이 모두 직각이다. 거의 평행한 세 벡터는 예각을 준다.
- 두 소문항의 결과는 수천 개의 무작위 배치에 대해 컴퓨터로도 확인하였다.

흔한 실수

- $\cos\theta\neq\pm1$을 사용해야 한다는 사실을 잊는 것. (i)(c)의 인수 $1+\cos\theta$와 유일성 논증의 인수 $1-\cos\theta$가 0이 아닌 것은 오로지 점들이 한 직선 위에 있지 않기 때문이다.
- 소문항 (ii)에서 이등분 벡터를 $|\mathbf{x}|\mathbf{y}+|\mathbf{y}|\mathbf{x}$와 같은 특정한 벡터로 취급하는 것. 문제에서는 이등분 벡터를 자유롭게 고를 수 있게 했으므로, 이들이 그러한 벡터의 양수배라고 말하려면 소문항 (i)(a)를 인용해야 한다.

STEP 너머

벡터를 $|\mathbf{x}|\hat{\mathbf{x}}$로 쓰고 단위벡터로 다루는 습관은 선형대수학(linear algebra) 전반에서 큰 도움이 된다. (ii)의 항등식은 $\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r}$의 **그람 행렬**(Gram matrix)의 기하학의 작은 조각이다. 그람 행렬의 성분은 이 벡터들의 두 개씩 짝지은 내적이다. $|\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{r}|^2=3+2S\geq0$이라는 사실로부터 $S\geq-\frac{3}{2}$이므로, 둔각인 경우에는 한계가 있다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 이러한 관점에서 내적, 사영(projection), 그람 행렬을 전개한다.

풀이

STEP II 2024, 문제 5

순수수학 • 치역과 디오판토스 방정식

STEP II 2024, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2024년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

핵심 아이디어

$\mathbb{Z}$ 위에서 다항식(polynomial)의 치역(range)은 변수를 정수만큼 평행이동해도 바뀌지 않는다. 그래서 완전제곱식을 만들어(completing the square) (또는 완전세제곱식을 만들어) 각 함수를 가장 간단한 평행이동 꼴로 나타낸다. 그러면 두 치역이 만나는지 묻는 것은 두 정수 미지수에 대한 방정식이 해를 갖는지 묻는 것이 되고, 요령은 그 방정식을 **두 정수의 곱 = 작은 고정된 수** 꼴로 정리하는 것이다. 작은 수를 인수분해(factorising)하는 방법은 몇 가지뿐이므로 하나하나 확인할 수 있다.

풀이

소문항 (i)

완전제곱식을 만들면

$$\mathrm{f}_1(n) = (n+3)^2 + 2 = \mathrm{F}_1(n+3).$$

n이 $\mathbb{Z}$ 전체를 움직이면 $m = n+3$도 그러하다(모든 정수 m은 $n = m-3$에서 나온다). 따라서 f_1의 치역은 $\{m^2+2 : m \in \mathbb{Z}\}$이고, 이는 정확히 F_1의 치역이다. 이것이 보여야 할 것이었다.

소문항 (ii)

마찬가지로 $\mathrm{g}_1(n) = (n-1)^2 + 4$이므로, 같은 논법으로 g_1의 치역은 $\{k^2+4 : k \in \mathbb{Z}\}$이다. 소문항 (i)에 의해, 공통인 값이 있으려면 다음을 만족하는 정수 m, k가 있어야 한다.

$$m^2 + 2 = k^2 + 4 \quad \Longleftrightarrow \quad (m-k)(m+k) = 2.$$

그런데 $m-k$와 $m+k$의 차는 $2k$로 짝수이므로, 두 수의 홀짝성(parity)은 같다. 둘 다 홀수이면 곱도 홀수이므로 2가 될 수 없다. 둘 다 짝수이면 곱은 4의 배수이므로 역시 2가 될 수 없다. 따라서 그러한 m, k는 존재하지 않고, 두 치역의 교집합(intersection)은 공집합이다.

소문항 (iii)

완전제곱식을 만들면

$$\mathrm{f}_2(n) = (n-1)^2 - 7, \qquad \mathrm{g}_2(n) = (n-2)^2 - 2,$$

이므로 치역은 $\{m^2-7\}$과 $\{k^2-2\}$이다. 여기서 m, k는 $\mathbb{Z}$ 전체를 움직인다. 공통인 값이 있으려면 다음이 성립해야 한다.

$$m^2 - 7 = k^2 - 2 \quad \Longleftrightarrow \quad (m-k)(m+k) = 5.$$

5는 소수(prime)이므로, 쌍 $(m-k,\, m+k)$는 $(1,5)$, $(5,1)$, $(-1,-5)$, $(-5,-1)$ 중 하나이다. 두 인수를 더하면 $2m = \pm 6$이고, 빼면 $2k = \pm 4$이므로, 모든 경우에 $m^2 = 9$, $k^2 = 4$이다. 공통인 값은

$$m^2 - 7 = 9 - 7 = 2 = 4 - 2 = k^2 - 2.$$

따라서 두 치역에 모두 속하는 정수는 $\boxed{2}$뿐이다. 검산해 보면 $\mathrm{f}_2(4) = \mathrm{f}_2(-2) = 2$이고 $\mathrm{g}_2(4) = \mathrm{g}_2(0) = 2$이다.

소문항 (iv)

p에 대해 완전제곱식을 만들면

$$p^2 + pq + q^2 = \left(p + \tfrac{1}{2}q\right)^2 + \tfrac{3}{4}q^2 \geq 0,$$

이다. 두 항 모두 제곱에 양의 상수를 곱한 것이기 때문이다. (등호는 $q = 0$이고 $p = 0$일 때만 성립한다.)

삼차식의 경우, f_3을 $(n-1)^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1$과 비교하면 다음과 같다.

$$\mathrm{f}_3(n) = (n-1)^3 + 4n + 1 = (n-1)^3 + 4(n-1) + 5.$$

따라서 $m = n-1$로 두면(이번에도 m은 $\mathbb{Z}$ 전체를 움직인다), f_3의 치역은 $\{m^3 + 4m + 5\}$이고, g_3의 치역은 $\{k^3 + 4k - 6\}$이다. 공통인 값이 있으려면 다음을 만족하는 정수 m, k가 있어야 한다.

$$\begin{aligned} & m^3 + 4m + 5 = k^3 + 4k - 6 \\ \Longleftrightarrow \quad & (k^3 - m^3) + 4(k-m) = 11 \\ \Longleftrightarrow \quad & (k-m)\left(k^2 + km + m^2 + 4\right) = 11. \end{aligned}$$

생각해 보기 이 소문항의 처음에 나온 부등식은 이 방정식을 푸는 데 어떻게 도움이 되는가?

부등식에 $p = k, q = m$을 대입하면 $k^2 + km + m^2 + 4 \geq 4$이다. 특히 두 번째 인수는 양의 정수이므로 $k - m$도 양수여야 한다. 11은 소수이므로 가능한 경우는 두 가지뿐이다.

- $k - m = 11$이고 $k^2 + km + m^2 + 4 = 1$인 경우. 두 번째 인수는 적어도 4이므로 이는 불가능하다.
- $k - m = 1$이고 $k^2 + km + m^2 + 4 = 11$인 경우.

두 번째 경우에 $k = m + 1$을 대입하면

$$(m+1)^2 + m(m+1) + m^2 = 7$$
$$3m^2 + 3m + 1 = 7$$
$$m^2 + m - 2 = (m+2)(m-1) = 0,$$

이므로 $m = 1$(이때 $k = 2$) 또는 $m = -2$(이때 $k = -1$)이다. 이에 대응하는 값은

$$m = 1 : \ 1 + 4 + 5 = 10, \qquad m = -2 : \ -8 - 8 + 5 = -11.$$

따라서 두 치역에 모두 속하는 정수는 $\boxed{10\text{과 } -11}$이다.

원래 변수로 돌아가 보면 $f_3(2) = 8 - 12 + 14 = 10$, $g_3(2) = 8 + 8 - 6 = 10$이고, 또 $f_3(-1) = -1 - 3 - 7 = -11$, $g_3(-1) = -1 - 4 - 6 = -11$이다. 흥미롭게도 두 공통값 모두 같은 입력 n에서 나온다.

검산

- 위에서 한 것처럼 다시 대입해 본다. f_2와 g_2는 둘 다 함숫값 2를 $n = 4$에서 취하고, f_3, g_3은 $n = 2$(값 10)와 $n = -1$(값 -11)에서 일치한다.
- 작은 값들을 나열해 보는 것은 소문항 (ii)를 빠르게 확인하는 방법이다. f_1은 $2, 3, 6, 11, 18, 27, \ldots$을, g_1은 $4, 5, 8, 13, 20, 29, \ldots$을 준다. 어느 목록에도 다른 목록의 수가 들어 있지 않다.
- $|n| \leq 3000$인 모든 경우를 컴퓨터로 탐색하여, (i)의 두 치역이 같고, (ii)의 두 치역이 서로소(disjoint)이며, 공통인 값은 (iii)에서 2, (iv)에서 10, -11뿐임을 확인하였다.

흔한 실수

- $f(n) = g(n)$을 **같은** n에 대해 풀어서 공통인 값을 찾는 것. 두 입력은 서로 다를 수 있으므로, 서로 독립인 미지수 두 개가 필요하다. (iii)에서는 $f_2(n) = g_2(n)$이 우연히 올바른

답을 주지만, 방법은 틀렸다.

- (ii)에서 $(m-k)(m+k)=2$이면 $\{m-k, m+k\}=\{1,2\}$일 수밖에 없다고만 주장하고 음수인 인수 쌍을 잊는 것. 홀짝성 논법은 모든 경우를 한꺼번에 처리한다.
- (iv)에서 인수분해 11×1을 배제하는 것을 잊는 것. 이를 배제해 주는 것이 바로 부등식이다.

STEP 너머

$m^2-k^2=5$나 $k^3+4k=m^3+4m+11$처럼 정수해만을 따지는 방정식을 **디오판토스 방정식**(*Diophantine equation*)이라 한다. 한쪽 변을 인수분해하고 다른 쪽 변의 약수를 이용하는 것은 이러한 방정식을 푸는 가장 강력한 초등적 도구 중 하나이다. (ii)의 홀짝성 요령은 일반화된다. 정수가 두 제곱수의 차로 나타내어지는 것은 그 정수가 홀수이거나 4의 배수일 때, 그리고 그때뿐이다. 더 알고 싶다면 Davenport의 *The Higher Arithmetic*이 대학 1학년 수준의 훌륭한 정수론(number theory) 입문서이다.

풀이

STEP II 2024, 문제 6

순수수학 • 이항급수의 계수

STEP II 2024, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2024년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

핵심 아이디어

모든 소문항은 연속한 항의 비(ratio)를 바탕으로 돌아간다. 이항계수(binomial coefficient) $\binom{2n}{n}$와 이항급수(binomial series)의 계수는 둘 다 한 단계마다 인수가 하나씩 늘어나는 곱이므로, n번째 항을 $(n-1)$번째 항과 비교하면 짧은 점화식(recurrence)을 얻는다. 같은 점화식을 따르고 같은 값에서 시작하는 두 수열은 같다. 마지막 항등식은 $(1-x)^{-3/2}$를 $(1-x)^{-1/2}\times(1-x)^{-1}$로 쓰고 계수를 비교(comparing coefficients)하면 얻어진다. $(1-x)^{-1} = 1+x+x^2+\cdots$를 곱하면 계수의 수열이 그 누적합(running totals)의 수열로 바뀌기 때문이다.

풀이

소문항 (i)

$P(n)$을 명제 $T_n = \dfrac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$이라 하자.

기저 단계(*base case*). $\frac{1}{2^0}\binom{0}{0} = 1 = T_0$이므로 $P(0)$이 성립한다.

귀납 단계(*inductive step*). 어떤 $n \geq 1$에 대하여 $P(n-1)$이 성립한다고 가정하자. $\binom{2n}{n} = \dfrac{(2n)!}{n!\,n!}$이고 $\binom{2n-2}{n-1} = \dfrac{(2n-2)!}{(n-1)!\,(n-1)!}$이므로, 나누면

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)(2n-1)}{n\cdot n}\binom{2n-2}{n-1} = \frac{2(2n-1)}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

을 얻는다. 그러면 점화식과 $P(n-1)$을 이용하여

$$\begin{aligned} T_n = \frac{2n-1}{2n} T_{n-1} &= \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{1}{2^{2n-2}} \binom{2n-2}{n-1} \\ &= \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{1}{2^{2n-2}} \cdot \frac{n}{2(2n-1)} \binom{2n}{n} \\ &= \frac{1}{4 \cdot 2^{2n-2}} \binom{2n}{n} = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}, \end{aligned}$$

이고, 이것이 곧 $P(n)$이다. 수학적 귀납법(induction)에 의하여 모든 $n = 0, 1, 2, \ldots$에 대하여 $P(n)$이 성립한다.

소문항 (ii)

일반 지수에 대한 이항정리(binomial theorem)에 의하여, $(1-x)^{-1/2}$에서 x^r의 계수는

$$a_r = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-r+1\right)}{r!}(-1)^r = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2r-1}{2}}{r!}$$

이다. 분자의 r개 인수가 모두 음수이고, $(-x)^r$에서 나온 $(-1)^r$이 그 부호를 상쇄하기 때문이다. a_{r-1}에서 a_r로 넘어갈 때 분자에 인수 $\frac{2r-1}{2}$ 하나, 분모에 인수 r 하나가 추가되므로, $r \geq 1$에 대하여

$$\frac{a_r}{a_{r-1}} = \frac{(2r-1)/2}{r} = \frac{2r-1}{2r}, \qquad \text{즉,} \qquad a_r = \frac{2r-1}{2r} a_{r-1}$$

이다.

? **생각해 보기** 이 점화식에서 왜 곧바로 $a_r = T_r$을 얻는가?

두 수열은 모두 1에서 시작하고(상수항이 $a_0 = 1$이고 $T_0 = 1$이므로), $r-1$번째 항에서 r번째 항을 얻는 규칙도 같다. 한 줄짜리 귀납법으로 마무리된다. $a_{r-1} = T_{r-1}$이면 $a_r = \frac{2r-1}{2r} a_{r-1} = \frac{2r-1}{2r} T_{r-1} = T_r$이다. 따라서 모든 $r \geq 0$에 대하여 $a_r = T_r$이고, (i)에 의하여

$$a_r = \frac{1}{2^{2r}} \binom{2r}{r}$$

이다.

소문항 (iii)

같은 방법으로, $(1-x)^{-3/2}$에서 x^r의 계수는

$$b_r = \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{2r+1}{2}}{r!}$$

이다. a_r과 b_r의 분자는 둘 다 연속한 r개의 반홀수(홀수의 절반)의 곱이다. b_r의 곱은 a_r의 첫 인수 $\frac{1}{2}$이 빠지고 끝에 인수 $\frac{2r+1}{2}$이 더해진 것이다. $r!$은 약분되므로

$$\frac{b_r}{a_r} = \frac{(2r+1)/2}{1/2} = 2r+1$$

이다. ($r=0$일 때는 두 곱이 모두 빈 곱이고 $b_0 = a_0 = 1$이므로 이 식과 일치한다.) 따라서

$$b_r = (2r+1)\,a_r = \frac{2r+1}{2^{2r}}\binom{2r}{r}, \qquad r = 0, 1, 2, \ldots$$

이다.

소문항 (iv)

$(1-x)^{-3/2} = (1-x)^{-1/2}(1-x)^{-1}$이고 $(1-x)^{-1} = \sum_{s\geq 0} x^s$이므로

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r\right)\left(\sum_{s=0}^{\infty} x^s\right)$$

이다. 우변에서 x^n 항은 각 $r = 0, 1, \ldots, n$에 대하여 첫 번째 괄호에서 $a_r x^r$을, 두 번째 괄호에서 x^{n-r}을 골라서 나온다. 이렇게 고른 각 경우의 계수는 $a_r \cdot 1$이므로, x^n의 계수는 $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$이다. 양변에서 x^n의 계수를 비교하면

$$b_n = \sum_{r=0}^{n} a_r$$

이다. (ii)와 (iii)의 공식을 대입하면

$$\frac{2n+1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} = \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{2^{2r}}\binom{2r}{r}$$

이 되어 증명이 끝난다. (이 풀이는 $n=0$일 때도 성립하며, 이때 양변은 모두 1이다.)

검산

- 작은 경우: $a_0, a_1, a_2, a_3 = 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{5}{16}$이고, 이는 $\binom{2r}{r}/4^r = 1, \frac{2}{4}, \frac{6}{16}, \frac{20}{64}$과 일치한다.
- $n=3$일 때 (iv)의 좌변은 $\frac{7\cdot 20}{64} = \frac{35}{16}$이고, 우변은 $1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{5}{16} = \frac{35}{16}$이다.
- 직접 전개하면 $(1-x)^{-3/2} = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{15}{8}x^2 + \cdots$이고, $b_2 = 5 \cdot \frac{3}{8} = \frac{15}{8}$이다.
- 정확한 분수로 계산하는 컴퓨터 검산으로 모든 $n \leq 29$에 대하여 (i)–(iv)를 확인하였다. $x = 0.3$에서 각 급수의 처음 30개 항을 더하면 1.19523과 1.70747이 나오며, 이는 $(0.7)^{-1/2}$, $(0.7)^{-3/2}$와 일치한다.

흔한 실수

- 이항계수의 부호 실수: $\binom{-1/2}{r}$은 부호가 번갈아 바뀌지만, $(-x)^r$에서 나온 인수 $(-1)^r$이 이를 상쇄하므로 모든 a_r과 b_r은 양수이다.
- 기저 단계를 빠뜨리거나, 점화식만으로 $a_r = T_r$이라고 주장하는 것: 시작값 $a_0 = T_0 = 1$도 일치해야 한다.

STEP 너머

거듭제곱급수(power series)에 $(1-x)^{-1}$을 곱하여 부분합(partial sums)을 만드는 것은 **생성함수**(*generating functions*)의 기본 도구이다. 생성함수는 수열에 관한 질문을 거듭제곱급수의 대수로 바꾸어 준다. 수 $\binom{2n}{n}/4^n$은 확률에서도 나타난다. 이는 공정한 동전을 $2n$번 던졌을 때 앞면이 정확히 n번 나올 확률이며, 스털링(Stirling) 공식에 의하면 n이 클 때 이 값은 $1/\sqrt{\pi n}$처럼 행동한다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제집)에 이런 성격의 문제가 더 있고, Grimmett과 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 생성함수를 제대로 전개한다.

풀이

STEP II 2024, 문제 7

순수수학 • 곡선 그리기

STEP II 2024, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2024년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

핵심 아이디어

각 괄호는 원(circle)의 방정식이므로, C_1은 단지 두 원일 뿐이다. C_2의 경우 괄호를 전개하면 모든 것이 x^2+y^2과 x^2으로 정리되므로, 수평선으로 자르면 x^2에 대한 이차방정식(quadratic)을 얻는다. 그러면 교점의 개수를 세는 문제는 그 이차방정식의 양의 근(root)의 개수를 세는 문제로 바뀌고, 이는 판별식(discriminant), 근의 합, 근의 곱으로 함께 결정된다.

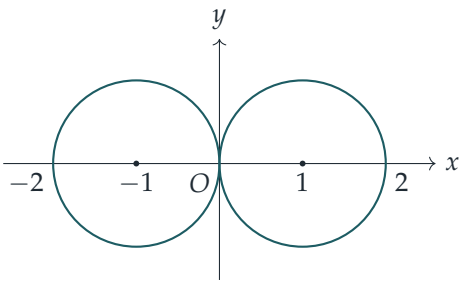
풀이

풀이 전체에서 다음과 같이 쓴다.

$$A = y^2+(x-1)^2-1 = x^2+y^2-2x, \qquad B = y^2+(x+1)^2-1 = x^2+y^2+2x.$$

소문항 (i)

곱이 0이 되는 것은 인수 중 하나가 0일 때와 정확히 같으므로, C_1은 원 $A=0$과 원 $B=0$의 합집합(union)이다. 이들은 중심이 각각 $(1,0)$과 $(-1,0)$이고 반지름이 1인 원이다. 두 원은 모두 원점을 지나며, 원점에서 서로 접한다(그 점에서의 공통 접선(tangent)은 y축이다). 가장 높은 점은 $(\pm 1, 1)$이고, 곡선은 $x=-2, 0, 2$에서 x축과 만난다.



소문항 (ii)(a)

$s = x^2 + y^2$이라 하면 A와 B는 각각 $s - 2x$와 $s + 2x$의 꼴이므로

$$AB = (x^2 + y^2)^2 - 4x^2.$$

직선 $y = k$ 위에서 방정식 $AB = \frac{1}{16}$은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}(x^2 + k^2)^2 - 4x^2 &= \tfrac{1}{16}\\ x^4 + 2k^2x^2 + k^4 - 4x^2 - \tfrac{1}{16} &= 0\\ x^4 + 2(k^2 - 2)x^2 + \left(k^4 - \tfrac{1}{16}\right) &= 0,\end{aligned}$$

이로써 요구된 식을 얻는다.

이제 $u = x^2$으로 놓으면 다음을 얻는다.

$$u^2 + 2(k^2 - 2)u + \left(k^4 - \tfrac{1}{16}\right) = 0. \qquad (*)$$

근 $u > 0$ 하나는 두 교점 $x = \pm\sqrt{u}$를 주고, 근 $u = 0$은 한 점$(x = 0)$을 주며, 근 $u < 0$은 교점을 주지 않는다. 따라서 $(*)$의 근의 부호를 알아야 한다. 다음 세 양이 이를 알려 준다.

- 판별식의 4분의 1인 $(k^2 - 2)^2 - \left(k^4 - \frac{1}{16}\right) = \frac{65}{16} - 4k^2$. 이 값은 k가 $\frac{\sqrt{65}}{8}$보다 작은지, 같은지, 큰지에 따라 각각 양수, 0, 음수이다.
- 근의 합 $2(2 - k^2)$.
- 근의 곱 $k^4 - \frac{1}{16}$. 이 값은 $k > 0$일 때 $k - \frac{1}{2}$와 부호가 같다.

$\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{65}}{8} \approx 1.008$임에 주의하고, 또 근이 실수일 때는 언제나 $k^2 \le \frac{65}{64} < 2$이므로 근의 합이 양수임에 주의하자.

생각해 보기 근의 곱이 음수이면 판별식을 확인해야 할까?

그럴 필요 없다. 근의 곱이 음수이면 근은 반드시 실수이고(이때 판별식 $b^2 - 4ac$는 양수이다) 서로 부호가 반대이다. 이제 경우를 차례로 살펴본다.

- $0 < k < \frac{1}{2}$: 근의 곱이 음수이므로 양의 근이 정확히 하나 있다. **교점 2개.**
- $k = \frac{1}{2}$: $(*)$는 $u^2 - \frac{7}{2}u = 0$이 되므로 $u = 0$ 또는 $u = \frac{7}{2}$이고, $x = 0$과 $x = \pm\sqrt{7/2}$를 얻는다. **교점 3개.**
- $\frac{1}{2} < k < \frac{\sqrt{65}}{8}$: 판별식이 양수이므로 서로 다른 두 실근이 있다. 근의 곱과 합이 모두 양수이므로 두 근은 모두 양수이다. **교점 4개.**
- $k = \frac{\sqrt{65}}{8}$: 중근(repeated root) $u = 2 - k^2 = \frac{63}{64} > 0$이 있어 $x = \pm\frac{\sqrt{63}}{8}$을 얻는다. **교점 2개.**
- $k > \frac{\sqrt{65}}{8}$: 실근이 없다. **교점 없음.**

소문항 (ii)(b)

(a)에 의해 직선 $y = k$는 $0 < k \leq \frac{\sqrt{65}}{8}$일 때 C_2와 만나고, 이보다 큰 k에 대해서는 만나지 않는다. C_2의 방정식에는 y가 y^2의 형태로만 나타나므로, 음수인 k에서 더 높은 점이 생기지는 않는다. 따라서 C_2 위의 y좌표의 최댓값은 $\frac{\sqrt{65}}{8}$이고, 이는 $x = \pm\frac{\sqrt{63}}{8}$에서 얻어진다.

C_1 위에서 가장 높은 점은 두 원의 꼭대기인 $(\pm 1, 1)$이다. $\frac{\sqrt{63}}{8} < \frac{\sqrt{64}}{8} = 1$이므로 C_2의 가장 높은 점은 C_1의 가장 높은 점보다 y**축에 더 가깝다**(다만 $\frac{\sqrt{65}}{8} > 1$이므로 높이는 조금 더 높다).

소문항 (ii)(c)

$A < 0$이고 $B < 0$이라고 가정하자. $A < 0$에서 $2x > x^2 + y^2 \geq 0$이므로 $x > 0$이다. $B < 0$에서 $-2x > x^2 + y^2 \geq 0$이므로 $x < 0$이다. 이 둘은 서로 모순이므로 A와 B가 동시에 음수일 수는 없다. (기하적으로 말하면 두 열린 원판(open disc)은 겹치지 않는다.)

C_2 위에서는 $AB = \frac{1}{16} > 0$이므로 A와 B는 0이 아니고 부호가 같다. 둘 다 음수일 수는 없으므로 둘 다 양수이다. 그런데 $A > 0$은 $(x-1)^2 + y^2 > 1$을 뜻하므로, 그 점은 중심이 $(1, 0)$인 원의 엄밀히 바깥에 있다. 마찬가지로 $B > 0$이므로 그 점은 중심이 $(-1, 0)$인 원의 엄밀히 바깥에 있다. 따라서 C_2의 모든 점은 두 원의 바깥에 있다. 즉 C_2는 전체가 C_1의 바깥에 놓인다.

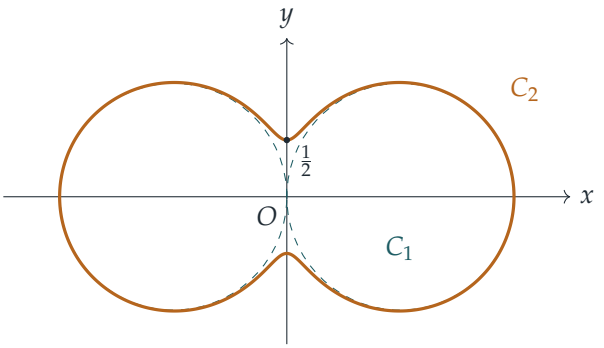
소문항 (ii)(d)

개형을 그릴 때 유용한 C_2의 특징은 다음과 같다.

- x^2과 y^2만 나타나므로 두 축에 대하여 대칭(symmetric)이다.
- $y = 0$일 때 $(*)$에서 $u = 2 + \frac{\sqrt{65}}{4}$이므로, C_2는 $x = \pm\sqrt{2 + \frac{\sqrt{65}}{4}} \approx \pm 2.004$에서 x축과 만난다. 이는 ± 2보다 바로 조금 바깥이다.

- $x = 0$일 때 $k^4 = \frac{1}{16}$이므로, C_2는 $(0, \pm\frac{1}{2})$에서 y축과 만난다.
- 가장 높은 점과 가장 낮은 점은 $\left(\pm\frac{\sqrt{63}}{8}, \pm\frac{\sqrt{65}}{8}\right) \approx (\pm 0.99, \pm 1.01)$이다.

(a)에서 센 교점의 개수가 모양을 보여 준다. $|y| < \frac{1}{2}$이면 교점은 두 개뿐이다(바깥쪽 양옆). $\frac{1}{2} < |y| < \frac{\sqrt{65}}{8}$이면 교점이 네 개이므로, 곡선은 두 봉우리 사이에서 $(0, \pm\frac{1}{2})$까지 움푹 내려온다. 따라서 C_2는 두 원을 모두 둘러싸는 하나의 닫힌 "땅콩" 모양이며, y축에서 잘록하게 들어가 있다.



(C_2를 극좌표(polar form)로 나타내면 $r^2 = 2\cos^2\theta + \sqrt{4\cos^4\theta + \frac{1}{16}}$이며, 위의 곡선은 이 식으로 그린 것이다.)

검산

- $k = \frac{\sqrt{65}}{8}$에서 판별식 $\frac{65}{16} - 4k^2$이 0이 되며, 이는 곡선의 꼭대기와 일치한다. 중근 $u = \frac{63}{64}$에서 $x^2 + y^2 = \frac{128}{64} = 2$이고 $4x^2 = \frac{63}{16}$이며, 실제로 $2^2 - \frac{63}{16} = \frac{1}{16}$이다.
- 점 $(0, \frac{1}{2})$: $A = B = \frac{1}{4}$이므로 $AB = \frac{1}{16}$이다.
- $k = 0.1, 0.49, 0.51, 1.0, 1.007, 1.01$에 대해 직선 $y = k$와 C_2의 교점을 컴퓨터로 세어 보면 각각 2, 2, 4, 4, 4, 0개이고, 수치 탐색으로 찾은 최대 높이는 $x \approx 0.9922 \approx \frac{\sqrt{63}}{8}$에서 $1.00778 \approx \frac{\sqrt{65}}{8}$이다.

흔한 실수

- $u = 0$이 두 점을 준다고 생각하는 것: $x = \pm\sqrt{0}$은 한 점뿐이며, 그래서 $k = \frac{1}{2}$일 때 교점은 4개가 아니라 3개이다.
- 개수를 셀 때 접하는 경우인 $k = \frac{\sqrt{65}}{8}$을 빠뜨리는 것.
- (c)에서 둘 다 음수인 경우를 배제하지 않고 "A와 B의 부호가 같다"는 결론에서 멈추는 것. 둘 다 음수인 경우를 배제하는 것이 바로 앞부분의 핵심이다.

STEP 너머

C_2는 곡선족 $(x^2+y^2)^2-4x^2=c$, 즉 함수 AB의 등위곡선(level curves)에 속한다. c가 커짐에 따라 곡선의 모양이 바뀐다. 처음에는 두 원 안쪽의 분리된 두 타원 모양 곡선이고($c<0$일 때), $c=0$에서는 8자 곡선(figure-of-eight)인 C_1이 되며, 그다음에는 하나의 땅콩 모양이 되는데, 이 땅콩의 오목한 부분은 $c\geq 4$가 되면 사라진다. 위상(topology)의 변화는 정확히 원점에 있는 AB의 임계점(critical point)의 높이에서 일어난다. 등위곡선이 임계점을 지나면서 어떻게 바뀌는지 추적하는 것이 모스 이론(Morse theory)의 출발점이며, 이와 밀접하게 관련된 카시니 타원(Cassini ovals)도 베르누이(Bernoulli)의 렘니스케이트(lemniscate)를 8자 곡선으로 가지면서 정확히 같은 방식으로 행동한다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)에는 이와 같은 음함수 곡선(implicit curves)을 그리는 STEP 스타일의 곡선 개형 그리기 문제가 더 실려 있다.

풀이

STEP II 2024, 문제 8

순수수학 • 산술-기하 평균

STEP II 2024, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2024년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

이 문제는 *Beyond STEP*의 2.6 절 **산술–기하 평균**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch02/agm.html

핵심 아이디어

두 수열은 서로를 조여 간다. 산술평균은 내려오고 기하평균은 올라가며, 그 차이는 매번 적어도 절반으로 줄어든다. 따라서 두 수열은 공통의 극한 M으로 수렴하는데, 이것이 x_0와 y_0의 **산술–기하 평균**(arithmetic–geometric mean)이다. 소문항 (ii)에서는 치환(substitution)을 통해 쌍 (p, q)에 대한 적분이 그 두 평균으로 이루어진 쌍에 대한 적분으로 바뀌므로, 반복을 진행하는 동안 적분값은 전혀 변하지 않는다. $n \to \infty$로 보내면 이 적분은 직접 계산할 수 있는 적분으로 줄어든다.

풀이

소문항 (i)

먼저 수학적 귀납법(induction)으로 모든 n에 대하여 $0 < y_n < x_n$임을 보인다. $n = 0$일 때는 성립한다. $0 < y_n < x_n$이라고 가정하자. 그러면 $\sqrt{x_n} \neq \sqrt{y_n}$이므로

$$0 < \left(\sqrt{x_n} - \sqrt{y_n}\right)^2 = x_n + y_n - 2\sqrt{x_n y_n},$$

이고, 이를 정리하면 $\frac{1}{2}(x_n + y_n) > \sqrt{x_n y_n}$, 즉 $y_{n+1} < x_{n+1}$이다. 또한 $y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} > 0$이다. 이로써 귀납법이 완성되므로, 모든 $n \geq 0$에 대하여 $y_{n+1} < x_{n+1}$이다.

$y_n < x_n$을 이용하면

$$x_{n+1} = \tfrac{1}{2}(x_n + y_n) < \tfrac{1}{2}(x_n + x_n) = x_n,$$
$$y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} > \sqrt{y_n y_n} = y_n,$$

이다. 여기서 둘째 줄은 $x_n > y_n > 0$이라는 것과 제곱근 함수가 증가함수라는 사실을 이용한 것이다.

따라서 (y_n)은 증가수열이다. 또한 위로 유계이다. $y_n < x_n < x_{n-1} < \cdots < x_0$이므로 모든 n에 대하여 $y_n < x_0$이다. 그 정리에 의하여 어떤 $M \le x_0$에 대하여 $y_n \to M$이다. (수열이 y_0에서부터 증가하므로 $M \ge y_0 > 0$이기도 하다.)

차이에 대해서는, 왼쪽 부등식 $x_{n+1} - y_{n+1} > 0$은 처음에 이미 증명한 것이다. 오른쪽 부등식은 $y_{n+1} > y_n$이므로

$$x_{n+1} - y_{n+1} < x_{n+1} - y_n = \tfrac{1}{2}(x_n + y_n) - y_n = \tfrac{1}{2}(x_n - y_n).$$

이를 반복해서 적용하면

$$0 < x_n - y_n < \frac{x_0 - y_0}{2^n} \to 0,$$

이므로 조임 정리(squeeze theorem)에 의하여 $x_n - y_n \to 0$이다. 마지막으로 $x_n = y_n + (x_n - y_n)$은 M으로 수렴하는 수열과 0으로 수렴하는 수열의 합이므로 $x_n \to M$이기도 하다.

소문항 (ii)

$a = \tfrac{1}{2}(p+q)$, $g = \sqrt{pq}$로 두고, t에 대한 적분을 J라 하자.

치환. $x > 0$에 대하여 $t = \tfrac{1}{2}\left(x - \frac{pq}{x}\right)$로 두면

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{pq}{x^2}\right) = \frac{x^2 + pq}{2x^2} > 0,$$

이므로 t는 순증가하며, $x \to 0^+$일 때 $-\infty$에서 $x \to \infty$일 때 $+\infty$까지 변한다. 즉 이 치환은 $(0, \infty)$를 실수 전체에 일대일로 대응시킨다. 이제 근호 안의 두 인수를 다시 쓴다.

$$pq + t^2 = \tfrac{1}{4}\left(x^2 + 2pq + \frac{p^2q^2}{x^2}\right) = \frac{1}{4}\left(x + \frac{pq}{x}\right)^2 = \left(\frac{x^2 + pq}{2x}\right)^2,$$
$$\tfrac{1}{4}(p+q)^2 + t^2 = \tfrac{1}{4}\left(p^2 + 2pq + q^2 + x^2 - 2pq + \frac{p^2q^2}{x^2}\right)$$
$$= \frac{x^4 + (p^2+q^2)x^2 + p^2q^2}{4x^2} = \frac{(x^2+p^2)(x^2+q^2)}{4x^2}.$$

$x > 0$이고 $x^2 + pq > 0$이므로 곱의 제곱근은

$$\frac{x^2 + pq}{2x} \cdot \frac{\sqrt{(p^2+x^2)(q^2+x^2)}}{2x}.$$

이다. 따라서

$$J = \int_0^\infty \frac{x^2+pq}{2x^2} \cdot \frac{4x^2}{(x^2+pq)\sqrt{(p^2+x^2)(q^2+x^2)}}\,\mathrm{d}x$$
$$= 2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(p^2+x^2)(q^2+x^2)}} = 2\,\mathrm{I}(p,q).$$

같은 적분을 직접 읽기. $\frac{1}{4}(p+q)^2 = a^2$이고 $pq = g^2$이므로 J의 피적분함수는 $1/\sqrt{(a^2+t^2)(g^2+t^2)}$이며, 이는 t에 대한 우함수(even function)이다. 따라서

$$J = 2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(a^2+t^2)(g^2+t^2)}} = 2\,\mathrm{I}(a,g),$$

이다. a, g는 양수이고 $g < a$이므로(소문항 (i)의 부등식과 $p \neq q$에 의하여) 이렇게 쓸 수 있다. J에 대한 두 식을 비교하면

$$\mathrm{I}(p,q) = \mathrm{I}\big(\mathrm{a}(p,q), \mathrm{g}(p,q)\big),$$

을 얻으며, 이것이 보이려던 것이다.

$\mathrm{I}(x_0,y_0)$의 계산. $0 < y_n < x_n$이므로 이 결과를 $(p,q) = (x_n, y_n)$에 적용할 수 있고, 그러면 $\mathrm{I}(x_n,y_n) = \mathrm{I}(x_{n+1},y_{n+1})$이다. 따라서

$$\mathrm{I}(x_0,y_0) = \mathrm{I}(x_n,y_n) \quad \text{모든} n.$$

> **?** **생각해 보기** $n \to \infty$로 보내서 적분이 $\mathrm{I}(M,M)$으로 수렴한다고 말하고 싶다. 무한 구간에서의 적분 안으로 극한을 옮기는 것을 어떻게 정당화할 수 있을까?

조임을 이용하면 까다로운 극한 논증을 피할 수 있다. $0 < y_n < x_n$이면 모든 x에 대하여

$$(y_n^2+x^2)^2 \le (x_n^2+x^2)(y_n^2+x^2) \le (x_n^2+x^2)^2,$$

이므로, 제곱근을 취하고 역수를 취한 뒤(이때 부등호의 방향이 바뀐다) 적분하면

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x_n^2+x^2} \le \mathrm{I}(x_n,y_n) \le \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{y_n^2+x^2}.$$

이다. $c > 0$에 대하여 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{c^2+x^2} = \Big[\frac{1}{c}\arctan\frac{x}{c}\Big]_0^\infty = \frac{\pi}{2c}$이므로

$$\frac{\pi}{2x_n} \le \mathrm{I}(x_0,y_0) \le \frac{\pi}{2y_n} \quad \text{모든} n.$$

가운데 항은 n에 대하여 일정하고, $x_n \to M$, $y_n \to M$, $M > 0$이므로 양쪽 경계는 모두 $\pi/(2M)$으로 수렴한다. 따라서

$$\mathrm{I}(x_0,y_0) = \frac{\pi}{2M}.$$

검산

- $x_0 = 2, y_0 = 1$로 두자. 반복하면 $(1.5, 1.41421)$, 그다음 $(1.45711, 1.45648)$을 얻고, 그다음에는 두 값이 유효숫자 다섯 자리까지 $M \approx 1.45679$로 일치한다. 따라서 $\pi/(2M) \approx 1.07826$이고, $\mathrm{I}(2,1)$을 수치적으로 계산해도 역시 1.07826이 나온다.
- $p = q$이면 $\mathrm{a}(p,p) = \mathrm{g}(p,p) = p$이므로 항등식은 자명하게 성립한다. $\mathrm{I}(M,M) = \pi/(2M)$이므로 답 $\pi/(2M)$은 이와 일치한다.
- 수렴은 매우 빠르다. 처음 몇 단계가 지나면 차이가 매번 대략 제곱이 되며, 이는 우리가 증명한 절반으로 줄어드는 것보다 훨씬 빠르다.

흔한 실수

- 귀납법에서 $y_n < x_n$(그리고 제곱근이 의미를 갖도록 $y_n > 0$)을 먼저 확립하지 않은 채 $y_{n+1} < x_{n+1}$을 사용하는 것.
- t에 대한 적분이 실수 전체에 걸쳐 있어서 $\mathrm{I}(a,g)$의 **두 배**가 된다는 것을 잊는 것. 두 개의 인수 2가 서로 약분되어야 한다.
- 아무런 정당화 없이 $\mathrm{I}(x_n, y_n) \to \mathrm{I}(M,M)$이라고 쓰는 것. 위의 조임 논증이 정직한 근거를 제공한다.

STEP 너머

공통의 극한 M은 가우스(Gauss)의 산술–기하 평균이고, 적분 I는 **완전 타원적분**(complete elliptic integral)이다. 가우스는 1799년에 이 항등식을 발견했으며, 이 항등식은 타원적분을, 그리고 심지어 π 자체를 놀라울 만큼 빠르게 계산하는 방법을 제공한다(가우스–르장드르(Gauss–Legendre) 알고리즘). 처음에 인용한 단조수렴정리(monotone convergence theorem)와, 극한과 적분의 순서를 바꿀 때 필요한 주의는 해석학 첫 강좌의 핵심 주제이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해하기)는 이 주제들을 제대로 만나기에 아주 좋은 책이다.

풀이

STEP II 2024, 문제 9

역학 • 포물체 운동

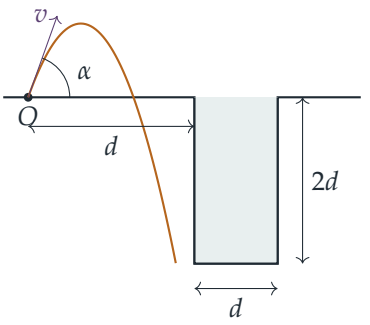
> **STEP II 2024, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2024년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

핵심 아이디어

모든 것은 궤적 방정식(trajectory equation) $y = x\tan\alpha - \dfrac{gx^2}{2v^2}\sec^2\alpha$를 $t = \tan\alpha$에 대한 이차식(quadratic)으로 쓰는 데서 출발한다. 입자가 바닥에 깔끔하게 떨어진다는 것은 두 가지를 뜻한다. 하나는 입자가 가까운 쪽 모서리에 도달할 때 아직 지면보다 위에 있어야 한다는 것이고, 다른 하나는 먼 쪽 벽에 도달하기 전에 이미 바닥 높이보다 아래로 내려와 있어야 한다는 것이다. 각 조건은 t에 대한 이차부등식(quadratic inequality)이 되고, 완전제곱식 만들기(completing the square)를 하면 필요한 꼴로 바뀐다. 그러면 (ii)는 t의 두 허용 범위가 겹친다는 것을 보이기만 하면 된다.

풀이

입자를 공기 저항(air resistance) 없이 중력만 받는 점 포물체(projectile)로 모형화한다. 원점을 발사 지점으로 잡고, x축은 수평으로 도랑 쪽을, y축은 연직 위쪽을 향하게 한다. 그러면 가까운 쪽 벽은 직선 $x = d$, 먼 쪽 벽은 $x = 2d$이고, 바닥은 $d < x < 2d$에서 $y = -2d$이다.



시각 T에서 수평 속도는 $v\cos\alpha$, 연직 속도는 $v\sin\alpha - gT$이므로, T를 소거하면

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\alpha} = xt - \frac{x^2(1+t^2)}{2\lambda d},$$

를 얻는다. 여기서 $t = \tan\alpha$이고, $v^2 = \lambda dg$와 $\sec^2\alpha = 1 + t^2$을 이용하였다.

소문항 (i)(a)

도랑 앞의 지면과 가까운 쪽 벽에 닿지 않으려면, $x = d$일 때 입자가 지면보다 엄격하게 위에 있어야 한다. (그곳에서 $y = 0$ 이하라면 이미 지면에 부딪혔거나 가까운 쪽 벽에 부딪히게 된다.) 따라서

$$y(d) = dt - \frac{d(1+t^2)}{2\lambda} > 0 \iff 2\lambda t - 1 - t^2 > 0 \iff t^2 - 2\lambda t + \lambda^2 < \lambda^2 - 1,$$

이다. 여기서 $2\lambda/d > 0$을 곱하였다. 즉,

$$(\tan\alpha - \lambda)^2 < \lambda^2 - 1,$$

이므로 원하는 결과를 얻는다. 좌변은 제곱이므로 $\lambda^2 - 1 > 0$이고, $\lambda = v^2/(dg) > 0$이므로 $\lambda > 1$이다.

소문항 (i)(b)

이제 먼 쪽 벽을 생각하자. 경로는 아래로 볼록한 것이 아니라 위로 볼록한(아래로 열린) 포물선이고, $x = d$에서 바닥 높이 $-2d$보다 위에 있다. 이 경로가 $x = 2d$에 이르기 전에 $y = -2d$(바닥)에 도달하는 것은 $x = 2d$에서 이미 그 높이보다 아래에 있을 때, 즉 $y(2d) < -2d$일 때와 정확히 같다. 반대로 $y(2d) \geq -2d$이면 입자는 바닥에 닿지 않은 채 $x = 2d$에 도달하므로, 먼 쪽 벽에 닿는다(또는 도랑을 아예 넘어간다).

? **생각해 보기** 왜 한 점 $x = 2d$만 살펴보아도 충분한가?

$y(x)+2d$는 최고차항의 계수가 음수인 x에 대한 이차식이고 $x=d$에서 양수이기 때문이다. 이 이차식은 $x=d$보다 큰 쪽에 근을 정확히 하나 가지며, 그 근이 $2d$보다 앞에 있는 것은 이 차식이 $x=2d$에서 이미 음수일 때와 정확히 같다.

따라서

$$y(2d)=2dt-\frac{4d^2(1+t^2)}{2\lambda d}<-2d \iff \lambda t-(1+t^2)<-\lambda \iff t^2-\lambda t+1-\lambda>0,$$

이어야 한다. 여기서 $\lambda/(2d)>0$을 곱하였다. 4를 곱하고 완전제곱식을 만들면

$$4t^2-4\lambda t+\lambda^2>\lambda^2-4+4\lambda, \qquad \text{즉} \qquad (2\tan\alpha-\lambda)^2>\lambda^2+4(\lambda-1),$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

$\alpha>45^\circ$ **이끌어 내기.** (a)에 의해 $\lambda>1$이므로 $\lambda^2+4(\lambda-1)>\lambda^2>0$이다. $s=\sqrt{\lambda^2+4\lambda-4}$로 두면 $s>\lambda$이다. (b)의 부등식은

$$2t>\lambda+s \qquad \text{또는} \qquad 2t<\lambda-s.$$

를 뜻한다. $s>\lambda$이므로 두 번째 경우는 $t<0$을 준다. 그런데 (a)에 의해 $t>0$이어야 한다. $(t-\lambda)^2<\lambda^2-1<\lambda^2$에서 $|t-\lambda|<\lambda$이므로 $t>0$이기 때문이다. (물리적으로 보면, 입자는 가까운 쪽 모서리를 넘기 위해 위로 올라가야 한다.) 따라서 첫 번째 경우가 성립하고,

$$2t>\lambda+s>\lambda+\lambda=2\lambda>2,$$

이므로 $\tan\alpha>\lambda>1$이다. $0<\alpha<90^\circ$이므로 $\alpha>45^\circ$이다.

소문항 (ii)

역으로, 두 조건을 함께 만족하면 충분하다. $y(d)>0$이면, $y(0)=0$이고 y가 오목(concave)하므로 구간 $0<x\le d$ 전체에서 $y>0$이다. 따라서 입자는 지면과 가까운 쪽 벽을 넘는다. 또 $y(2d)<-2d$이면, 입자는 d와 $2d$ 사이의 어떤 x에서 바닥에 도달하고 그때까지 도랑 안에 머문다. 그러므로 모든 $\lambda>1$에 대하여 두 부등식을 모두 만족하는 $t>0$이 존재함을 보이기만 하면 된다.

(a)로부터 허용되는 값은 $\lambda-\sqrt{\lambda^2-1}<t<\lambda+\sqrt{\lambda^2-1}$이다. (b)와 $t>0$으로부터 허용되는 값은 $t>\frac{1}{2}(\lambda+s)$이다. 두 조건을 모두 만족하는 t가 존재하려면

$$\tfrac{1}{2}(\lambda+s)<\lambda+\sqrt{\lambda^2-1} \iff s<\lambda+2\sqrt{\lambda^2-1}.$$

이면 된다. ($\frac{1}{2}(\lambda+s)>\lambda>\lambda-\sqrt{\lambda^2-1}$이므로 (a)의 하한은 문제가 되지 않는다.) 양변이 모두 양수이므로 제곱할 수 있다.

$$\begin{aligned}
&\lambda^2+4\lambda-4<\lambda^2+4\lambda\sqrt{\lambda^2-1}+4(\lambda^2-1)\\
\iff\quad &4\lambda<4\lambda\sqrt{\lambda^2-1}+4\lambda^2\\
\iff\quad &1<\sqrt{\lambda^2-1}+\lambda,
\end{aligned}$$

여기서 $4\lambda > 0$으로 나누었다. $\lambda > 1$이므로 마지막 줄은 참이다. 따라서 구간

$$\tfrac{1}{2}\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda - 4}\right) < \tan\alpha < \lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}$$

은 공집합이 아니다. $\tan\alpha$가 이 구간에 속하도록 α를 고르면(tan은 $(0°, 90°)$에서 모든 양수 값을 가지므로 가능하다) 입자는 양쪽 벽 어디에도 닿지 않고 바닥에 떨어진다.

검산

- $\lambda = 2$로 두자. 구간은 $1 + \sqrt{2} < \tan\alpha < 2 + \sqrt{3}$이고, 이는 정확히 $67.5° < \alpha < 75°$이다. $y = xt - x^2(1 + t^2)/(4d)$에 $\alpha = 70°$를 넣어 보면 $y(d) \approx 0.61d > 0$이고 $y(2d) \approx -3.05d < -2d$로, 예상대로이다.
- $\lambda \to 1^+$일 때 구간의 양 끝은 모두 1로 다가가므로, 허용 범위는 $\alpha = 45°$로 줄어든다. $v^2 = dg$일 때 입자는 가까운 쪽 모서리에 겨우 도달할 수 있으며, 이를 위해서는 최대 도달 거리를 주는 각이 필요하다.
- 무작위로 고른 수천 개의 (λ, α) 쌍에 대해 운동을 시간 단계별로 진행시키는 컴퓨터 검산을 해 보았더니, 모든 경우에 두 부등식과 일치하였다.

흔한 실수

- 조건을 $y(d) > 0$이 아니라 $y(d) > -2d$(바닥보다 위)로 잡는 것. 가까운 쪽 벽은 지면 높이까지 솟아 있다.
- (b)에서 $2\tan\alpha < \lambda - s$인 경우를 배제하는 것을 잊는 것. 이를 위해서는 $\tan\alpha > 0$이라는 사실이 필요하다.
- (ii)에서 양변이 양수임을 먼저 확인하지 않고 부등식을 제곱하는 것.

STEP 너머

여기서는 물리적 조건("도랑 안에 떨어진다")이 발사 매개변수 공간에서 부등식으로 잘라 낸 영역이 되고, 문제는 그 영역이 공집합이 아닌지를 묻는 것이 된다. 이것이 최적화(optimisation)와 제어(control)의 출발점이다. 즉, 실현 가능한(feasible) 입력의 집합을 기술하고 그 경계를 찾는 것이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 포물체 운동과 그 확장(공기 저항, 회전 좌표계)을 대학 1학년 수준에서 다룬다.

풀이

STEP II 2024, 문제 10

역학 • 가속하는 쐐기 위의 마찰

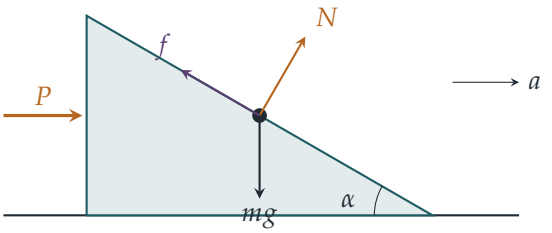
> **STEP II 2024, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2024년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

핵심 아이디어

모든 것은 두 가지 관찰에 달려 있다. 첫째, 평면이 매끄러우므로(smooth) 계 전체(프리즘(prism)과 입자)에 작용하는 수평 방향 외력은 P뿐이다. 이로부터 공통 가속도가 곧바로 나온다. 둘째, 입자는 프리즘에 대해 움직이지 않으므로 입자도 정확히 같은 수평 가속도를 가진다. 따라서 입자 하나만 따로 놓고 경사면에 나란한 방향과 수직인 방향으로 힘을 분해하면 마찰력(friction)과 수직항력(normal reaction)이 바로 나온다. 그러면 (iii)의 부등식은 단지 "마찰력 $\leq \mu\times$ 수직항력"을 삼각함수의 덧셈정리(compound-angle formulae)로 정리한 것일 뿐이다.

풀이

입자는 질점으로, 프리즘은 매끄러운 수평면 위를 미끄러지는 강체(rigid body)로, 입자와 빗면 사이의 접촉은 마찰 계수(coefficient of friction)가 μ인 거친(rough) 접촉으로 모형화한다. 수직면을 왼쪽에 두어 빗면이 오른쪽으로 내려가도록 하자. 그러면 P는 프리즘을 오른쪽으로 민다.



입자에는 무게 mg, 빗면에 수직인 수직항력 N, 그리고 마찰력이 작용한다. 마찰력은 경사

면을 따라 **위쪽**으로 작용하는 부호 있는 양 f로 둔다(f가 음수로 나오면 마찰력은 실제로 경사면 아래쪽으로 작용한다). 마찰력의 크기는 $F = |f|$이다.

소문항 (i)

계가 평형(equilibrium) 상태, 즉 모든 것이 정지해 있다고 하자. 입자에 대해 경사면에 수직인 방향과 나란한 방향으로 힘을 분해하면

$$N = mg\cos\alpha, \qquad f = mg\sin\alpha.$$

입자가 미끄러지지 않으려면 $|f| \le \mu N$, 즉 $mg\sin\alpha \le \mu\, mg\cos\alpha$, 다시 말해 $\mu \ge \tan\alpha$이어야 한다(α가 예각이므로 $mg\cos\alpha > 0$으로 나눌 수 있다). 따라서 $\mu < \tan\alpha$이면 평형은 불가능하고, 입자는 반드시 미끄러진다.

소문항 (ii)

가속도. 프리즘과 입자를 하나로 묶어 생각한다. 평면은 매끄러우므로 연직 방향의 힘만 작용하고, 입자와 프리즘 사이의 힘은 내력(internal force)이다. 따라서 수평 방향 외력은 P뿐이고, 두 물체가 같은 가속도 a(수평, 오른쪽 방향)를 가지므로

$$P = (M+m)a, \qquad a = \frac{P}{M+m}.$$

입자에 대한 힘의 분해. 입자의 가속도는 수평 방향으로 a이다. 경사면 위쪽 방향 성분은 $-a\cos\alpha$이고(경사면은 왼쪽으로 올라가고 입자는 오른쪽으로 가속된다), 바깥쪽 법선 방향 성분은 $a\sin\alpha$이다.

> ? **생각해 보기** 왜 수평·연직 방향이 아니라 경사면에 나란한 방향과 수직인 방향으로 분해할까?

경사면에 나란한 방향으로는 f와 무게만 성분을 가지고, 수직인 방향으로는 N과 무게만 성분을 가진다. 그래서 각 방정식에 미지수가 하나씩만 들어 있어 연립방정식을 풀 필요가 없다. 그 대가로 가속도도 분해해야 하지만, 이는 쉽다.

경사면 위쪽 방향:

$$f - mg\sin\alpha = -ma\cos\alpha \quad\Longrightarrow\quad f = m(g\sin\alpha - a\cos\alpha).$$

$a = P/(M+m)$을 대입하면

$$f = \frac{m}{M+m}[(M+m)g\sin\alpha - P\cos\alpha],$$

이므로 마찰력의 크기는

$$F = \frac{m}{M+m}\,|(M+m)g\sin\alpha - P\cos\alpha|,$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. 절댓값은 정말로 필요하다. P가 작으면 마찰력은 경사면 위쪽으로 작용하지만, P가 크면 경사면이 입자를 충분히 세게 밀어붙이므로 입자가 위로 밀려 올라가지 않도록 마찰력이 경사면 아래쪽으로 작용해야 한다.

경사면에 수직인 방향(바깥쪽 법선):

$$N - mg\cos\alpha = ma\sin\alpha \quad \Longrightarrow \quad N = \frac{m}{M+m}[(M+m)g\cos\alpha + P\sin\alpha].$$

$P > 0$이고 α가 예각이므로 이 값은 양수이다. 따라서 절댓값이 필요 없고, 입자는 접촉을 유지한다.

소문항 (iii)

입자가 프리즘에 대해 고정된 채로 있는 것은 마찰력이 필요한 만큼을 공급할 수 있을 때, 즉 $F \le \mu N$일 때와 정확히 같다. $G = (M+m)g$로 놓고 양의 인수 $m/(M+m)$을 약분하면

$$|G\sin\alpha - P\cos\alpha| \le \tan\lambda\,(G\cos\alpha + P\sin\alpha).$$

$\cos\lambda > 0$을 곱하면, 이는 다음 두 부등식과 같다.

$$-\sin\lambda\,(G\cos\alpha + P\sin\alpha) \;\le\; \cos\lambda\,(G\sin\alpha - P\cos\alpha) \;\le\; \sin\lambda\,(G\cos\alpha + P\sin\alpha).$$

생각해 보기 이 부등식들이 어떻게 $\alpha \pm \lambda$의 탄젠트로 바뀔까?

G가 들어간 항은 한쪽으로, P가 들어간 항은 다른 쪽으로 모은다. 그러면 각 괄호는 덧셈정리의 전개식이 된다.

오른쪽 부등식(경사면 위쪽으로 작용하는 마찰력이 한계를 넘지 않아야 한다):

$$G(\sin\alpha\cos\lambda - \cos\alpha\sin\lambda) \le P(\cos\alpha\cos\lambda + \sin\alpha\sin\lambda),$$
$$G\sin(\alpha-\lambda) \le P\cos(\alpha-\lambda).$$

$0 < \alpha - \lambda < \frac{1}{4}\pi$이므로 $\cos(\alpha-\lambda) > 0$이고, 따라서 이는 $P \ge G\tan(\alpha-\lambda)$와 같다.

왼쪽 부등식(경사면 아래쪽으로 작용하는 마찰력이 한계를 넘지 않아야 한다):

$$P(\cos\alpha\cos\lambda - \sin\alpha\sin\lambda) \le G(\sin\alpha\cos\lambda + \cos\alpha\sin\lambda),$$
$$P\cos(\alpha+\lambda) \le G\sin(\alpha+\lambda).$$

여기서 조건 $\lambda < \alpha < \frac{1}{4}\pi$를 쓴다. 이로부터 $0 < \alpha+\lambda < \frac{1}{2}\pi$이므로 $\cos(\alpha+\lambda) > 0$이고, 양변을 나누어 $P \le G\tan(\alpha+\lambda)$를 얻는다.

두 부등식이 모두 성립해야 하므로

$$(M+m)g\tan(\alpha-\lambda) \le P \le (M+m)g\tan(\alpha+\lambda),$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

검산

- $P = 0$이면 하한은 $0 \geq G\tan(\alpha - \lambda)$를 뜻하는데, $\lambda < \alpha$이므로 이는 거짓이다. 이는 $\mu = \tan\lambda < \tan\alpha$이므로 소문항 (i)과 일치한다.
- $P = G\tan\alpha$에서는 $f = 0$이 된다. 이때의 미는 힘은 매끄러운 면 위의 입자가 정지해 있기에 꼭 알맞은 값이며, 이는 잘 알려진 "가속하는 쐐기" 결과 $a = g\tan\alpha$이다. 이 값은 당연히 구간 안에 있다.
- 수치로 확인해 보자. $M = 3$, $m = 1$, $g = 9.8$, $\alpha = 30°$, $\lambda = 10°$이면 허용 범위는 $14.27 \leq P \leq 32.89$(뉴턴)이다. $P = 20$일 때 공식으로 $F \approx 0.570$, $N \approx 10.99$를 얻으므로 $F/N \approx 0.052 < \tan 10° \approx 0.176$이다. 무작위로 고른 수천 가지 경우에 대해 컴퓨터로 입자의 운동방정식을 직접 풀어 보면 두 공식 및 구간과 모두 일치한다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)에서 $N = mg\cos\alpha$로 놓는 것. 경사면이 가속하고 있으므로 수직항력은 정지 상태의 값이 아니다.
- 절댓값을 빠뜨려 P의 하한만 구하는 것. 상한은 마찰력이 경사면 **아래쪽**으로 작용하는 경우에서 나온다.
- $\cos(\alpha + \lambda)$가 양수임을 언급하지 않고 그것으로 나누는 것. 바로 여기서 $\alpha < \frac{1}{4}\pi$가 쓰인다.

STEP 너머

이 문제를 더 깔끔하게 보는 방법은 가속도 a로 가속하는 프리즘의 좌표계에서 생각하는 것이다. 그 좌표계에서 입자는 뒤쪽으로 추가적인 "가상력(fictitious force)" ma를 받고, 문제는 유효 중력이 각 $\arctan(a/g)$만큼 기울어진 거친 경사면 위의 평범한 정역학 문제가 된다. 그러면 조건은 이 기울기가 α로부터 마찰각(angle of friction) λ 이내에 있어야 한다는 것이 되며, 이것이 바로 앞에서 구한 구간이다. 비관성계(non-inertial frame)와 가상력은 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)에서 자세히 다룬다.

풀이

STEP II 2024, 문제 11

확률과 통계 • 그룹 검사의 기댓값

> **STEP II 2024, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2024년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

핵심 아이디어

여러 사람의 시료를 합쳐 검사하는 방식(pooling)은 그룹 검사가 대개 음성으로 나올 때에만 이득이 되며, 한 사람당 검사 횟수의 기댓값(expected value)은 $1+\frac{1}{k}-(1-p)^k$이 된다. 이 값이 1 이하가 되는 조건을 묻는 것은 결국 $(1-p)$와 $k^{-1/k}$를 비교하는 문제가 되고, 바로 이 때문에 소문항 (i)에서 $x^{1/x}$를 묻는 것이다. 즉 p가 클 때 가장 좋은 그룹 크기는 $k^{1/k}$를 가장 크게 만드는 정수이다.

풀이

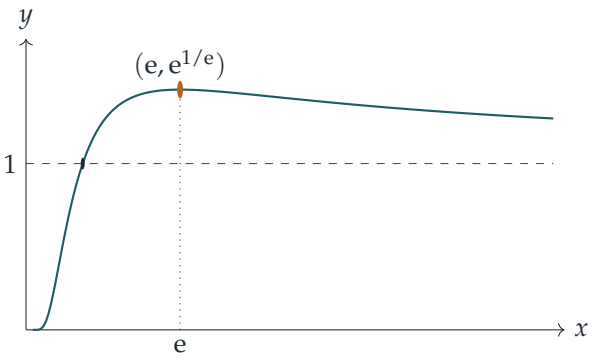
소문항 (i)

$x>0$에 대하여 $y=x^{1/x}=\mathrm{e}^{(\ln x)/x}$라 하면 $\ln y=\dfrac{\ln x}{x}$이다. 미분하면

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

$y>0$이므로 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$의 부호는 $1-\ln x$의 부호와 같다. 즉 $0<x<\mathrm{e}$에서 양수이고, $x=\mathrm{e}$에서 0이며, $x>\mathrm{e}$에서 음수이다. 따라서 극점(turning point)은 하나뿐이며, 그것은 $(\mathrm{e},\mathrm{e}^{1/\mathrm{e}})\approx(2.72,\,1.44)$에서의 극대(maximum)이다.

그래프의 양 끝을 보자. $x\to 0^+$일 때 $(\ln x)/x\to-\infty$이므로 $y\to 0$이고, $x\to\infty$일 때 $(\ln x)/x\to 0$이므로 y는 위쪽에서 1로 다가간다($x>1$이면 $\ln y>0$이기 때문이다). 곡선은 $(1,1)$을 지난다.



양의 정수 n에 대하여, 이 함수는 $(0, \mathrm{e}]$에서 증가하고 $[\mathrm{e}, \infty)$에서 감소하므로 $1^{1/1} < 2^{1/2}$이고 $3^{1/3} > 4^{1/4} > 5^{1/5} > \cdots$이다. 따라서 최댓값은 $2^{1/2}$ 또는 $3^{1/3}$이다. 두 수를 각각 여섯 제곱하면 $2^3 = 8, 3^2 = 9$이므로 $3^{1/3} > 2^{1/2}$이고

$$\max_n n^{1/n} = 3^{1/3}.$$

소문항 (ii)

$q = 1 - p$라 하자. k명으로 이루어진 그룹 하나를 생각한다. 독립성(independence)에 의해 그룹 안의 누구도 효소를 갖지 않을 확률은 q^k이고, 오직 이 경우에만 합친 시료가 음성으로 나온다. 따라서 이 그룹이 사용하는 검사 횟수는

$$\begin{cases} 1\text{회 검사} & \text{확률} q^k, \\ 1+k\text{회 검사} & \text{확률} 1-q^k, \end{cases}$$

이고, 검사 횟수의 기댓값은 $1 + k(1 - q^k)$이다. 그룹은 $r = N/k$개이고 기댓값은 더할 수 있으므로, 전체 검사 횟수의 기댓값은

$$E = \frac{N}{k}\left(1 + k(1 - q^k)\right) = N\left(1 + \frac{1}{k} - (1-p)^k\right).$$

소문항 (iii)

소문항 (ii)에 의해 $E \le N$일 필요충분조건은

$$\frac{1}{k} \le (1-p)^k \iff 1 - p \ge k^{-1/k} = \frac{1}{k^{1/k}},$$

이다. 여기서 양변의 양의 k제곱근을 취하였다(양변이 모두 양수이고, $t \mapsto t^{1/k}$는 증가함수이다).

? **생각해 보기** 어떤 k가 가장 큰 p를 허용하는가?

주어진 k에 대하여 조건은 $p \le 1 - k^{-1/k}$이고, 이 상한은 $k^{1/k}$가 클수록 크다. 소문항 (i)에 의해 모든 정수 $k > 1$에 대하여 $k^{1/k} \le 3^{1/3}$이므로, 어떤 k를 택하든 $p \le 1 - 3^{-1/3}$이어야 한다. 역으로 N은 3의 배수이므로 $k = 3$은 허용되는 그룹 크기이고, $k = 3$일 때 조건은 정확히 $p \le 1 - 3^{-1/3}$이다(등호일 때 $E = N$이다). 따라서 가장 큰 값은

$$p = 1 - 3^{-1/3} \approx 0.307.$$

이 값이 $\frac{1}{4}$보다 큼을 보이자.

$$1 - 3^{-1/3} > \tfrac{1}{4} \iff 3^{-1/3} < \tfrac{3}{4} \iff \tfrac{1}{3} < \tfrac{27}{64} \iff 64 < 81,$$

가운데 단계에서는 세제곱을 하였다(양수에 대해 세제곱은 대소 관계를 보존한다). 마지막 명제가 참이므로 $1 - 3^{-1/3} > \frac{1}{4}$이다.

소문항 (iv)

이항 전개(binomial expansion)에 의해

$$(1-p)^k = 1 - kp + \binom{k}{2} p^2 - \cdots.$$

pk가 작으면 $\binom{k}{2}p^2 < \frac{1}{2}(pk)^2$은 그보다 훨씬 더 작고, 그 뒤의 항들도 마찬가지이므로 $(1-p)^k \approx 1 - pk$이다. 이를 소문항 (ii)의 식에 대입하면

$$E \approx N\left(1 + \frac{1}{k} - (1 - pk)\right) = N\left(\frac{1}{k} + pk\right).$$

(실제로 베르누이 부등식(Bernoulli's inequality) $(1-p)^k \ge 1 - pk$에 의해 이 근사는 E를 결코 과소평가하지 않으며, 전개를 한 항 더 늦게 끊으면 오차가 많아야 $\frac{1}{2}(pk)^2 N$임을 알 수 있다.)

$p = 0.01, k = 10$이면 $pk = 0.1$로 작은 값이고,

$$E \approx N\left(\frac{1}{10} + 0.1\right) = 0.2N,$$

이므로, 이 방식은 모든 사람을 따로 검사할 때 필요한 N회 검사의 약 20%만 필요로 한다.

검산

- $p = 0.01, k = 10$일 때 정확히 계산하면 $E/N = 1.1 - 0.99^{10} \approx 1.1 - 0.9044 = 0.1956$, 즉 약 19.6%로, 근사의 오차 한계 $\frac{1}{2}(0.1)^2 = 0.005$ 이내에 있다.
- $p = 1 - 3^{-1/3}, k = 3$일 때 $(1-p)^3 = \frac{1}{3}$이므로 $E = N(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}) = N$으로, 정확히 경계에 놓인다.

- 소문항 (ii)의 타당성: $p \to 0$이면 $E \to N/k$(그룹당 한 번 검사)이고, $p \to 1$이면 $E \to N(1 + \frac{1}{k})$(모든 그룹을 재검사)이다. 이 공식은 작은 그룹에 대해 모든 경우를 나열하는 방식으로 컴퓨터를 이용해서도 확인하였다.

흔한 실수

- 소문항 (i)의 답을 $e^{1/e}$로 쓰는 것: n은 정수여야 하므로 $2^{1/2}$와 $3^{1/3}$을 비교해야 한다.
- 소문항 (iii)에서 $k = 3$만 확인하고, 왜 다른 그룹 크기로는 더 큰 p를 허용할 수 없는지 설명하지 않는 것.
- 양성인 그룹에서 합친 시료에 대한 검사 자체를 빠뜨려, $k + 1$회가 아니라 k회 검사로 세는 것.

STEP 너머

이것은 Dorfman의 그룹 검사(group testing) 방식으로, 제2차 세계 대전 중 병사들의 혈액 시료를 선별하기 위해 고안되었으며 COVID-19 검사에서 다시 쓰이게 되었다. $\frac{1}{k} + pk$를 최소화하면 $k \approx 1/\sqrt{p}$(따라서 여기서는 $k = 10$이 최적이다)와 약 $2\sqrt{p}\,N$회의 검사를 얻는다. 정보 이론(information theory)에서 연구하는 더 영리한 적응적(adaptive) 방식은 이보다 더 나은 결과를 낸다. 그 바탕이 되는 확률론에 대해서는 Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)를 참고하라.

풀이

STEP II 2024, 문제 12

확률과 통계 • 이산 순서통계량

> **STEP II 2024, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2024년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

핵심 아이디어

첫 번째 게임의 승자는 **유일한** 최솟값을 가진 사람이고, 그런 사람은 많아야 한 명이다. 따라서 "승자가 있다"는 사건은 누가 어떤 수로 이기는지에 따라 서로 배반인(disjoint) 경우들로 나뉘고, 각 경우는 독립(independent)인 확률들의 단순한 곱이다. $\sum i^2$과 $\sum i^3$에 대한 공식이 주어진 것은, 그 결과로 나오는 합이 다항식의 합이라는 힌트이다. 두 번째 게임도 같은 방식으로 풀리는데, 이번에는 사람의 순서쌍(ordered pair)(최솟값을 가진 사람과 최댓값을 가진 사람)과 합할 두 개의 수가 있다.

풀이

풀이 전체에서 k개의 수는 서로 독립이고 각각 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 위의 균등분포(uniform distribution)를 따른다. 따라서 특정한 사람이 특정한 수를 받을 확률은 $\frac{1}{n}$이고, 주어진 s개의 값으로 이루어진 집합 안의 수를 받을 확률은 $\frac{s}{n}$이다.

소문항 (i)

$1 \le a \le n-1$인 a를 고정한다. 에이다는 a를 받아야 하고(확률 $\frac{1}{n}$), 나머지 $k-1$명은 각각 $n-a$개의 수 $a+1, \ldots, n$ 중 하나를 받아야 한다(각각 확률 $\frac{n-a}{n}$). 독립성에 의해

$$\mathrm{P}(\text{에이다가 받는 수가 } a,\ \text{나머지 모두 더 큼}) = \frac{1}{n}\left(\frac{n-a}{n}\right)^{k-1} = \frac{(n-a)^{k-1}}{n^k}.$$

($a = n$이면 이 값은 0이 되므로 a는 $n-1$까지만 간다.)

승자가 있는 사건을 W라 하자. 승자는 다른 모든 사람의 수보다 엄격하게 작은 수를 가지므로 승자가 두 명일 수는 없다. 두 사람이 각각 상대보다 작아야 하기 때문이다. 따라서 W는

k명의 사람과 $a = 1, \ldots, n-1$에 걸친 사건 "이 사람이 a를 받고 나머지는 모두 더 큰 수를 받는다"들의 배반 합집합이다. 대칭성(symmetry)에 의해 각 사람의 기여는 에이다의 기여와 같으므로

$$\mathrm{P}(W) = k \sum_{a=1}^{n-1} \frac{(n-a)^{k-1}}{n^k} = \frac{k}{n^k} \sum_{j=1}^{n-1} j^{k-1},$$

이다. 여기서 $j = n - a$로 치환하였고, j도 1부터 $n-1$까지 움직인다.

$k = 4$일 때 $\sum i^3$에 대한 공식을 n 대신 $n-1$을 넣어 쓰면

$$\mathrm{P}(W) = \frac{4}{n^4} \cdot \frac{1}{4}(n-1)^2 n^2 = \frac{(n-1)^2}{n^2},$$

이므로 원하는 결과가 나온다.

소문항 (ii)

$1 \le d \le n-2, 1 \le a \le n-d-1$인 d와 a를 고정한다. 이 조건은 $a + d + 1 \le n$이고 a와 $a+d+1$ 사이에 엄격하게 들어가는 수가 적어도 하나 있음을 보장한다. 에이다는 a를, 밥은 $a+d+1$을 받아야 하고(각각 확률 $\frac{1}{n}$), 나머지 $k-2$명은 각각 d개의 수 $a+1, \ldots, a+d$ 중 하나를 받아야 한다. 독립성에 의해

$$\mathrm{P}(\text{에이다가 받는 수}a\text{, 밥이 받는 수}a+d+1\text{, 나머지는 엄격하게 그 사이}) = \frac{1}{n^2}\left(\frac{d}{n}\right)^{k-2} = \frac{d^{k-2}}{n^k}.$$

> **생각해 보기** 승자가 두 명이 되는 모든 경우가 사람들과 a, d에 대한 합에서 왜 정확히 한 번씩 나타나는가?

승자가 두 명이라는 것은 한 사람이 유일한 최솟값을, 다른 한 사람이 유일한 최댓값을 가진다는 뜻이다. 소문항 (i)에서처럼 낮은 쪽 승자는 유일하고 높은 쪽 승자도 유일하므로, 결과는 서로 다른 두 사람의 **순서쌍**(낮은 쪽 승자, 높은 쪽 승자)과 함께 낮은 수 a, 그리고 높은 수까지의 간격 $d \ge 1$을 결정한다. 나머지 $k-2 \ge 2$명의 수가 엄격하게 그 사이에 있으므로 간격은 적어도 1이어야 한다. 이들을 다르게 고르면 서로 배반인 사건이 된다. 사람의 순서쌍은 $k(k-1)$개이고 각각의 기여는 (에이다, 밥)의 기여와 같으므로

$$\mathrm{P}(\text{승자 두 명}) = k(k-1) \sum_{d=1}^{n-2} \sum_{a=1}^{n-d-1} \frac{d^{k-2}}{n^k} = \frac{k(k-1)}{n^k} \sum_{d=1}^{n-2} (n-1-d)\, d^{k-2},$$

이다. 안쪽 합은 $n-d-1$개의 같은 항으로 이루어져 있기 때문이다.

이제 $k = 4$로 두고 $m = n-1$이라 쓰면 d는 1부터 $m-1$까지 움직인다. 주어진 두 공식을 n

대신 $m-1$을 넣어 쓰면

$$\begin{aligned}\sum_{d=1}^{m-1}(m-d)\,d^2 &= m\cdot\tfrac{1}{6}(m-1)m(2m-1)-\tfrac{1}{4}(m-1)^2m^2\\ &= \tfrac{1}{12}m^2(m-1)\big[2(2m-1)-3(m-1)\big]\\ &= \tfrac{1}{12}m^2(m-1)(m+1).\end{aligned}$$

따라서 $m-1=n-2$, $m+1=n$이므로

$$\mathrm{P}(\text{승자 두 명}) = \frac{12}{n^4}\cdot\frac{1}{12}(n-1)^2(n-2)n = \frac{(n-2)(n-1)^2}{n^3},$$

이고, 이것이 원하는 결과이다.

$k=4$일 때 승자가 한 명인 경우와 두 명인 경우의 비교

어떤 사람이 유일한 최솟값을 가지는 사건을 L, 어떤 사람이 유일한 최댓값을 가지는 사건을 H라 하자. 소문항 (i)에서 $\mathrm{P}(L)=\frac{(n-1)^2}{n^2}$이다. 모든 수 x를 $n+1-x$로 바꾸면 균등분포를 따르는 수는 여전히 균등분포를 따르고 "최소"와 "최대"가 서로 바뀌므로 $\mathrm{P}(H)=\mathrm{P}(L)$이기도 하다.

승자가 정확히 두 명인 사건은 $L\cap H$이므로 $T=\mathrm{P}(L\cap H)=\frac{(n-2)(n-1)^2}{n^3}$이라 쓰자. 승자가 정확히 한 명이라는 것은 L 또는 H가 일어나되 둘 다 일어나지는 않는다는 뜻이므로

$$\mathrm{P}(\text{정확히 한 명}) = \mathrm{P}(L)+\mathrm{P}(H)-2\,\mathrm{P}(L\cap H) = \frac{2(n-1)^2}{n^2}-2T.$$

승자가 두 명일 확률이 한 명일 확률보다 큰 것은 다음과 같을 때, 그리고 그때에만이다.

$$\begin{aligned}T>\frac{2(n-1)^2}{n^2}-2T \iff 3\cdot\frac{(n-2)(n-1)^2}{n^3} &> \frac{2(n-1)^2}{n^2}\\ \iff 3(n-2)>2n \iff n&>6,\end{aligned}$$

여기서 양수 $\frac{(n-1)^2}{n^3}$으로 나누었다($n\geq 3$이므로 양수이다). $n=6$일 때는 두 확률이 같으므로 최솟값은

$$n=7.$$

검산

- $n=3, k=4$일 때 결과는 81가지이다. 1로 이기는 승자가 있으려면 나머지 세 수가 $\{2,3\}$에 속해야 하므로 $4\cdot 2^3=32$가지이다. 2로 이기는 승자가 있으려면 나머지 세 수가 모두 3이어야 하므로 4가지이다. 따라서 $\mathrm{P}(W)=\frac{36}{81}=\frac{4}{9}=\frac{(3-1)^2}{3^2}$이다.
- $n=6$일 때 "정확히 한 명"과 "정확히 두 명"의 확률은 모두 $\frac{25}{54}\approx 0.463$이고, $n=7$일 때는 각각 $\frac{144}{343}\approx 0.420$, $\frac{180}{343}\approx 0.525$이다. 이 값들과 $n\leq 8$, $k=2,3,4$에 대한 두 소문항의 공식은 모든 결과를 컴퓨터로 열거하여 확인하였다.

- $n \to \infty$이면 같은 수가 나오는 경우가 드물어지므로, 네 명이 있으면 거의 항상 유일한 최솟값과 유일한 최댓값이 모두 있어야 한다. 실제로 $\frac{(n-2)(n-1)^2}{n^3} \to 1$이다.

흔한 실수

- 소문항 (i)에서 인수 k를, 또는 소문항 (ii)에서 인수 $k(k-1)$을 빠뜨리는 것. 소문항 (ii)에서 두 승자는 한 명은 낮은 쪽, 한 명은 높은 쪽이므로 순서가 있는 쌍이다.
- "승자가 정확히 한 명"을 $\mathrm{P}(L) + \mathrm{P}(H) - \mathrm{P}(L \cap H)$로 계산하는 것. 이것은 "승자가 적어도 한 명"이며, 겹치는 부분은 두 번 빼야 한다.
- $n = 6$이라고 답하는 것. 그때는 두 확률이 같을 뿐 엄격하게 크지 않다.

STEP 너머

사건을 "누가"와 "어디서"로 이름 붙은 배반인 조각들로 나누는 것은 표본의 최솟값과 최댓값, 즉 순서 통계량(order statistics)의 분포를 구하는 방법의 이산 버전이다. 연속 표본에서는 같은 논증으로 최솟값과 최댓값의 결합 밀도함수(joint density)를 얻고, 이 문제를 흥미롭게 만드는 같은 수가 나오는 경우는 사라진다. Grimmett과 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 이런 아이디어를 접하기에 좋은 책이다.

풀이

STEP III 2024, 문제 1

순수수학 • 망원급수

STEP III 2024, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2024년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

핵심 아이디어

여기서 다루는 합은 모두 같은 방법으로 처리한다. 먼저 일반항을 부분분수(partial fractions)로 분해하고, $1/r^2$의 상수배인 조각들을 골라낸다(이것들을 더하면 S_N의 상수배가 된다). 나머지는 모두 $f(r)-f(r+1)$ 꼴의 차로 정리하는데, 이런 차들은 더하면 연쇄적으로 소거된다(telescoping). 처음부터 끝까지 N까지의 유한합으로 계산하고, 모든 조각의 극한(limit)을 알게 되는 마지막 단계에서만 $N\to\infty$로 보낸다.

풀이

소문항 (i)

공통분모 $r^2(r+1)$로 통분하면

$$\frac{1}{r+1}-\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}=\frac{r^2-r(r+1)+(r+1)}{r^2(r+1)}=\frac{r^2-r^2-r+r+1}{r^2(r+1)}=\frac{1}{r^2(r+1)},$$

이므로 원하는 식이 성립한다.

이제 $r=1$부터 N까지 더한다. $1/r^2$ 항들은 S_N이 되고, 나머지 두 항은 연쇄적으로 소거된다.

$$\sum_{r=1}^{N}\left(\frac{1}{r+1}-\frac{1}{r}\right)=\left(\tfrac{1}{2}-1\right)+\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}\right)+\cdots+\left(\tfrac{1}{N+1}-\tfrac{1}{N}\right)=\frac{1}{N+1}-1.$$

따라서

$$\sum_{r=1}^{N}\frac{1}{r^2(r+1)}=S_N-1+\frac{1}{N+1}.$$

$N \to \infty$일 때 $S_N \to \frac{1}{6}\pi^2$이고 $\frac{1}{N+1} \to 0$이므로, 우변은 $\frac{1}{6}\pi^2 - 1$로 수렴한다. 무한급수는 정의에 따라 부분합(partial sums)의 극한이므로

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2(r+1)} = \tfrac{1}{6}\pi^2 - 1.$$

소문항 (ii)

다음과 같이 놓는다.

$$\frac{1}{r^2(r+1)(r+2)} = \frac{A}{r} + \frac{B}{r^2} + \frac{C}{r+1} + \frac{D}{r+2}.$$

양변에 $r^2(r+1)(r+2)$를 곱하고 가림법(cover-up rule)을 쓴다. $r = 0$을 대입하면 $B = \frac{1}{2}$이고, $r = -1$을 대입하면 $C = \frac{1}{(-1)^2 \cdot 1} = 1$이며, $r = -2$를 대입하면 $D = \frac{1}{4 \cdot (-1)} = -\frac{1}{4}$이다. r이 클 때 좌변은 $1/r^4$ 정도의 크기이므로 우변의 $1/r$ 항들은 서로 상쇄되어야 한다. 즉 $A + C + D = 0$이고, 따라서 $A = -\frac{3}{4}$이다. 그러므로

$$\frac{1}{r^2(r+1)(r+2)} = \frac{1}{2r^2} - \frac{3}{4r} + \frac{1}{r+1} - \frac{1}{4(r+2)}.$$

생각해 보기 세 항 $-\frac{3}{4r}$, $\frac{1}{r+1}$, $-\frac{1}{4(r+2)}$는 하나의 연쇄 소거되는 차로 보이지 않는다. 어떻게 하면 이것들이 연쇄적으로 소거되게 할 수 있을까?

가운데 계수를 $1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$로 쪼개어, 각 조각이 이웃한 항과 짝을 이루게 한다.

$$-\frac{3}{4r} + \frac{1}{r+1} - \frac{1}{4(r+2)} = -\frac{3}{4}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+2}\right).$$

이제 각 괄호는 연쇄적으로 소거된다.

$$\sum_{r=1}^{N}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1}, \qquad \sum_{r=1}^{N}\left(\frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{N+2}.$$

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{N} \frac{1}{r^2(r+1)(r+2)} &= \tfrac{1}{2}S_N - \tfrac{3}{4}\left(1 - \frac{1}{N+1}\right) + \tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N+2}\right) \\ &= \tfrac{1}{2}S_N - \frac{5}{8} + \frac{3}{4(N+1)} - \frac{1}{4(N+2)}.\end{aligned}$$

$N \to \infty$로 보내면 마지막 두 항은 0으로 수렴하고 $S_N \to \frac{1}{6}\pi^2$이므로

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2(r+1)(r+2)} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{5}{8}.$$

소문항 (iii)

목표 식의 우변에는 $\frac{2}{r^2(r+1)}$이 있으므로 두 항을 비교한다. 소문항 (i)을 이용하면

$$\frac{2}{r^2(r+1)} = \frac{2}{r+1} - \frac{2}{r} + \frac{2}{r^2}.$$

한편

$$\frac{1}{r^2(r+1)^2} = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}\right)^2 = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{(r+1)^2} - \frac{2}{r(r+1)} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{(r+1)^2} - \frac{2}{r} + \frac{2}{r+1},$$

이다. 여기서 두 단계 모두에서 $\frac{1}{r} - \frac{1}{r+1} = \frac{1}{r(r+1)}$을 이용했다. 두 식을 빼면

$$\frac{1}{r^2(r+1)^2} - \frac{2}{r^2(r+1)} = \frac{1}{(r+1)^2} - \frac{1}{r^2},$$

즉

$$\frac{1}{r^2(r+1)^2} = \frac{2}{r^2(r+1)} - \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r+1)^2}\right).$$

? 생각해 보기 왜 처음부터 무한급수를 항별로 더하면 안 될까?

무한합을 재배열하는 것은 각 조각이 수렴(converge)한다는 것을 안 뒤에야 안전하므로, 먼저 N까지 더한다. 괄호 부분은 연쇄적으로 소거된다.

$$\sum_{r=1}^{N} \frac{1}{r^2(r+1)^2} = \sum_{r=1}^{N} \frac{2}{r^2(r+1)} - \left(1 - \frac{1}{(N+1)^2}\right).$$

소문항 (i)에 의해 $N \to \infty$일 때 우변의 첫 번째 합은 ($2(\frac{1}{6}\pi^2 - 1)$로) 수렴하고, $\frac{1}{(N+1)^2} \to 0$이다. 따라서 좌변도 수렴하며,

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2(r+1)^2} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{2}{r^2(r+1)} - 1,$$

이므로 원하는 식이 성립한다. 양변의 값은 모두 $\frac{1}{3}\pi^2 - 3$이다.

검산

- 소문항 (ii)에서 $N = 1$로 놓으면, 합은 단 하나의 항 $\frac{1}{6}$이고 공식은 $\frac{1}{2} - \frac{5}{8} + \frac{3}{8} - \frac{1}{12} = \frac{12-15+9-2}{24} = \frac{1}{6}$을 준다.
- 수치로 보면 $\frac{1}{6}\pi^2 - 1 \approx 0.644934$, $\frac{1}{12}\pi^2 - \frac{5}{8} \approx 0.197467$, $\frac{1}{3}\pi^2 - 3 \approx 0.289868$이다. 컴퓨터로 각 급수의 처음 백만 개 항을 더하면 세 값 모두 적어도 소수점 아래 아홉째 자리까지 재현된다.
- 세 소문항의 유한합 항등식은 모두 59 이하의 모든 N에 대해 유리수 연산으로 정확하게 확인했다.

흔한 실수

- 연쇄 소거되는 합의 양 끝 항을 잘못 구하는 것. 특히 $\frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+2}$의 합은 1이 아니라 $\frac{1}{2}$에서 시작한다.
- 조화급수(harmonic series) 꼴의 조각들을 유한합 안에서 함께 묶어 두지 않고, 발산(diverge)하는 $\sum \frac{1}{r}$ 같은 개별 무한급수로 쪼개는 것.

STEP 너머

$\sum 1/r^2 = \pi^2/6$이라는 값은 바젤 문제(Basel problem)에 대한 오일러(Euler)의 해답으로, 대학에서는 보통 푸리에 급수(Fourier series)나 $\sin x$의 곱 공식을 이용해 증명한다. 여기서 유한합을 조심스럽게 다룬 것은 바로 해석학(analysis) 강의에서 엄밀하게 정립하는 내용이다. 즉 급수는 부분합의 극한이고, 수렴하는 급수들의 합은 서로 결합할 수 있지만 발산하는 급수는 그럴 수 없다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해하기)는 급수를 이런 방식으로 다루며, 다음에 읽기 좋은 책이다.

풀이

STEP III 2024, 문제 2

순수수학 • 부등식과 절댓값

> **STEP III 2024, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2024년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

핵심 아이디어

여기서 제곱근 안의 식은 모두 항상 양수인 이차식이고, 각 부등식의 양변은 음이 아니므로 해집합을 바꾸지 않고 양변을 제곱할 수 있다. 제곱하면 각 문제는 이차식(또는 x^2 항이 소거될 때는 일차함수)의 부호에 관한 명제로 바뀐다. 기하적으로 보면 $y = \sqrt{4x^2 - 8x + 64}$는 쌍곡선(hyperbola)의 위쪽 절반이고, 문제에 나오는 직선들은 이 쌍곡선의 현과 점근선(asymptote)이다.

풀이

소문항 (i)

완전제곱식(completing the square)으로 고치면 $4x^2 - 8x + 64 = 4(x-1)^2 + 60 > 0$이므로 제곱근은 모든 x에서 정의된다. 각 부등식의 양변은 음이 아니고, $A, B \geq 0$이면 $A \leq B \iff A^2 \leq B^2$이다.

(a) 제곱하면

$$\begin{aligned} 4x^2 - 8x + 64 \leq x^2 + 16x + 64 &\iff 3x^2 - 24x \leq 0 \\ &\iff 3x(x-8) \leq 0 \iff 0 \leq x \leq 8. \end{aligned}$$

(b) 제곱하면

$$\begin{aligned} 4x^2 - 8x + 64 \leq 9x^2 - 48x + 64 &\iff 0 \leq 5x^2 - 40x \\ &\iff 5x(x-8) \geq 0 \iff x \leq 0 \text{ 또는 } x \geq 8. \end{aligned}$$

두 경우 모두 $x = 0$(모든 변이 8)과 $x = 8$(모든 변이 16)에서 등호가 성립한다.

소문항 (ii)

(a) 제곱의 차(difference of two squares)를 이용하면

$$\left(\sqrt{4x^2-8x+64}+2(x-1)\right)\mathrm{f}(x) = (4x^2-8x+64)-4(x-1)^2 = 60.$$

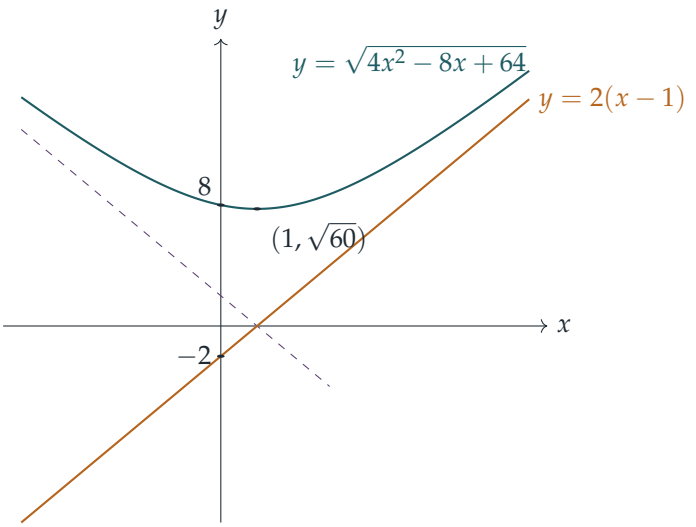
$x > 1$이면 괄호 안이 양수이므로 나눌 수 있다.

$$\mathrm{f}(x) = \frac{60}{\sqrt{4x^2-8x+64}+2(x-1)}.$$

$x \to \infty$일 때 분모는 $2(x-1)$ 이상이고 $2(x-1)$은 무한대로 발산하므로, 요구한 대로 $\mathrm{f}(x) \to 0$이다.

(b) $y = \sqrt{4(x-1)^2+60}$이라 하자. 그러면 $y > 0$이고 $y^2 - 4(x-1)^2 = 60$이므로, 이 곡선은 중심이 $(1,0)$인 쌍곡선의 위쪽 가지이다. 곡선은 $x = 1$에 대하여 대칭이고, $x = 1$에서 최솟값 $\sqrt{60} = 2\sqrt{15} \approx 7.75$를 가지며, y축과 $(0,8)$에서 만난다.

$y > \sqrt{4(x-1)^2} = 2|x-1|$이므로 곡선은 두 직선 $y = \pm 2(x-1)$보다 항상 엄격히 위에 있다. 소문항 (a)에 따르면 $x \to \infty$일 때 곡선은 $y = 2(x-1)$에 가까워진다. $x = 1$에 대한 대칭성에 의해 $x \to -\infty$일 때는 $y = -2(x-1)$에 가까워진다. 직선 $y = 2(x-1)$은 기울기가 2이고 $(1,0)$과 $(0,-2)$를 지난다.



점선은 다른 점근선 $y = -2(x-1)$이다.

소문항 (iii)

이번에도 $4x^2 - 5x + 4 = 4\left(x - \frac{5}{8}\right)^2 + \frac{39}{16} > 0$이므로 제곱근은 항상 정의된다. (음이 아닌) 양변을 제곱하면 주어진 부등식은 다음과 동치이다.

$$(m^2 - 4)x^2 + (2mc + 5)x + (c^2 - 4) \geq 0. \qquad (*)$$

> **생각해 보기** $(*)$의 좌변이 정확히 $x \geq 3$일 때만 음이 아니려면 어떤 꼴의 식이어야 할까?

$m^2 - 4 > 0$이면 $x \to -\infty$일 때 좌변이 $+\infty$로 발산하므로, 아주 작은 음수 x도 $(*)$를 만족하게 된다. $m^2 - 4 < 0$이면 $x \to +\infty$일 때 좌변이 $-\infty$로 발산하므로, 큰 x에서 $(*)$가 성립하지 않는다. 어느 쪽도 허용되지 않으므로 $m^2 = 4$이고, $(*)$는 일차부등식이 된다. 일차부등식 $ax + b \geq 0$의 해집합이 $\{x : x \geq 3\}$일 필요충분조건은 $a > 0$이고 $3a + b = 0$인 것이다.

$m = 2$로 두자. 그러면 $a = 4c + 5$, $b = c^2 - 4$이므로 다음이 필요하다.

$$3(4c + 5) + c^2 - 4 = c^2 + 12c + 11 = (c + 1)(c + 11) = 0, \qquad 4c + 5 > 0.$$

근 $c = -11$은 $a = -39 < 0$을 주므로 적합하지 않다. 근 $c = -1$은 $a = 1 > 0$을 준다. 따라서

$$m = 2, \qquad c = -1$$

이 조건을 만족한다. 확인해 보면 $(2x - 1)^2 - (4x^2 - 5x + 4) = x - 3$이고, 이 식은 정확히 $x \geq 3$일 때 음이 아니다. ($m = -2, c = 1$로 잡아도 같은 $|mx + c|$를 주므로 똑같이 성립한다.)

소문항 (iv)

$g(x) = x^2 + px + q$, $L(x) = mx + c$라 하자. $|g| \leq L \iff -L \leq g \leq L$이므로, 주어진 부등식은 다음 두 조건이 모두 성립할 때, 그리고 그때에만 성립한다.

$$g(x) - L(x) \leq 0 \qquad \text{그리고} \qquad g(x) + L(x) \geq 0.$$

$g - L$과 $g + L$은 모두 최고차항의 계수가 1인 이차식이다.

- $g - L \leq 0$인 집합은 닫힌구간(closed interval) $[a, b]$이다(공집합이거나 한 점일 수도 있다).
- $g + L \geq 0$인 집합은 실수 전체에서 열린구간 (r, s)를 뺀 것이다. $g + L$이 실근을 갖지 않으면 아무것도 빠지지 않는다.

따라서 해집합은 $[a, b]$에서 (r, s)를 뺀 것이다. 이것이 $[-5, 1] \cup [5, 7]$이 되려면 $a = -5$, $b = 7$(바깥쪽 끝점)이어야 하고, 빠진 틈은 정확히 $(1, 5)$여야 하므로 $r = 1$, $s = 5$이다. 그

러므로

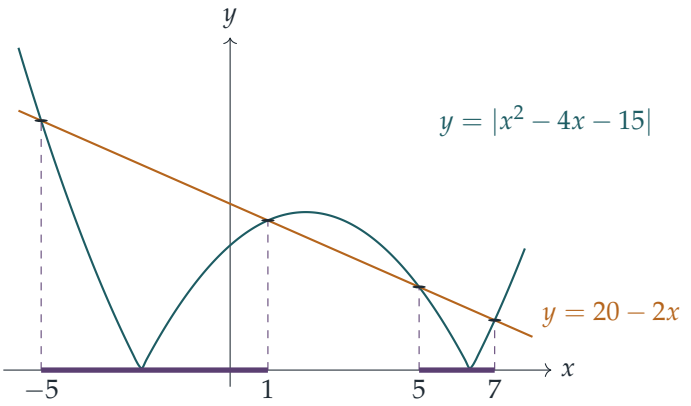
$$g(x) - L(x) = (x+5)(x-7) = x^2 - 2x - 35,$$
$$g(x) + L(x) = (x-1)(x-5) = x^2 - 6x + 5.$$

두 식을 더해 2로 나누면 $g(x) = x^2 - 4x - 15$이다. 빼서 2로 나누면 $L(x) = -2x + 20$이다. 따라서

$$p = -4, \qquad q = -15, \qquad m = -2, \qquad c = 20.$$

위의 모든 단계는 역으로도 성립하므로, 이 값들에 대해 해집합은 실제로 $[-5, 1] \cup [5, 7]$이다. 즉 $(x+5)(x-7) \le 0$이고 $(x-1)(x-5) \ge 0$이어야 한다. 또한 조건을 만족하는 값은 이것뿐이다.

그림에서 g의 근은 $2 \pm \sqrt{19} \approx -2.36,\ 6.36$이다. 직선 $y = 20 - 2x$는 $|g|$의 바깥쪽 두 팔과 $x = -5$, $x = 7$에서 만나고, 위로 뒤집힌 봉우리를 $x = 1$과 $x = 5$에서 가로지른다.



검산

- (ii)(a)에서 $x = 100$이면 $\mathrm{f}(100) = \sqrt{39264} - 198 \approx 0.151$이고, 이는 $60/(\sqrt{39264} + 198) \approx 0.151$과 일치한다.
- (iv)에서 $x = 0$일 때 $|-15| = 15 \le 20$이므로 0은 해이다. $x = 3$일 때 $|9 - 12 - 15| = 18 > 14$이므로 3은 해가 아니다. $x = 8$일 때 $|64 - 32 - 15| = 17 > 4$이므로 8은 해가 아니다. 이는 $[-5, 1] \cup [5, 7]$과 맞는다. 촘촘한 x 격자에서 컴퓨터로 확인한 결과 네 해집합이 모두 맞았다.

흔한 실수

- 제곱해도 되는 이유를 밝히지 않고 제곱하는 것. 여기서 제곱이 정당한 것은 오직 양변이 음이 아니기 때문이다.
- (iii)에서 진짜 이차식을 그대로 두는 것. 이차부등식의 해집합은 결코 한쪽으로만 뻗은 반직선이 될 수 없으므로, x^2 항은 반드시 소거되어야 한다.
- (iv)에서 끝점을 잘못 짝짓는 것. 바깥쪽 끝점 $-5,7$은 $g-L$에, 안쪽 끝점 $1,5$(틈)는 $g+L$에 속한다.

STEP 너머

곡선 $y^2-4(x-1)^2=60$은 쌍곡선이고, 소문항 (ii)는 점근선을 찾는 방법을 보여 준다. 곡선과 후보 직선의 차를 유리화(rationalise)하는 것이다. "켤레(conjugate)"를 곱하는 이 요령은 대학 1학년 해석학(analysis)에서 극한을 다루는 표준 도구이다. (iv)에서처럼 $|g|\le L$을 두 개의 한쪽 조건으로 나누어 쓰는 것도 해석학에서 절댓값이 들어간 부등식을 다루는 일상적인 방법이다. 다음 단계로는 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)가 좋다.

풀이

STEP III 2024, 문제 3

순수수학 • 단조함수와 도함수

STEP III 2024, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2024년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

핵심 아이디어

모든 것은 도함수(derivative) 하나에 달려 있다. g를 미분(differentiate)하여 통분하면 분자가 x에 대한 **일차**(linear) 식으로 정리되므로, 그 부호를 쉽게 읽어 낼 수 있다. 소문항 (iii)과의 연결 고리는 g가 정확히 $\ln f$의 도함수라는 점이다. 따라서 (ii)의 그래프 개형으로 눈에 보이게 되는 g의 부호가 f가 증가하는지 감소하는지를 결정한다.

풀이

소문항 (i)

$x > 0$이므로 $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \ln(x+1) - \ln x$로 쓴다. 그러면

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x(x+1)} = -\frac{x(x+1)}{x^2(x+1)^2},$$

이고, 분모가 x^2+x인 몫의 미분법(quotient rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{x+c}{x^2+x} = \frac{(x^2+x)-(x+c)(2x+1)}{x^2(x+1)^2} = \frac{-x^2-2cx-c}{x^2(x+1)^2}.$$

두 식을 빼면 x^2 항이 소거된다:

$$\mathrm{g}'(x) = \frac{-x^2-x+x^2+2cx+c}{x^2(x+1)^2} = \frac{(2c-1)x+c}{x^2(x+1)^2}.$$

분모는 양수이므로 $\mathrm{g}'(x)$의 부호는 $N(x) = (2c-1)x + c$의 부호와 같다.

(a) $c \geq \frac{1}{2}$이면 $(2c-1)x \geq 0$이고 $c \geq \frac{1}{2} > 0$이므로, 모든 $x > 0$에 대해 $N(x) > 0$이다. 따라서 모든 $x > 0$에서 기울기(gradient)는 양수이다.

(b) $0 \le c < \frac{1}{2}$이면 $1-2c > 0$이고,

$$N(x) < 0 \iff (1-2c)x > c \iff x > \frac{c}{1-2c}.$$

따라서 기울기는 정확히 $x > \dfrac{c}{1-2c}$일 때 음수이다. ($c = 0$일 때는 모든 $x > 0$이 이에 해당한다.) $x_0 = \dfrac{c}{1-2c}$라 하자. $c > 0$이면 g는 $(0, x_0]$에서 증가하고 $[x_0, \infty)$에서 감소한다.

소문항 (ii)

x가 클 때의 거동도 알아야 한다. g의 두 항은 모두 0으로 가므로 $\mathrm{g}(x) \to 0$이지만, 그래프 개형에는 어느 쪽에서 다가가는지가 드러나야 한다. $\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \cdots$에 $t = \frac{1}{x}$를 대입하고 $\dfrac{x+c}{x(x+1)} = \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{c}{x^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{x} + \cdots\right) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{c-1}{x^2} + \cdots$를 이용하면 다음을 얻는다.

$$\mathrm{g}(x) = \frac{\frac{1}{2} - c}{x^2} + \cdots \quad \text{충분히 큰} x.$$

> **생각해 보기** g가 증가하면서 0으로 간다면, 축의 어느 쪽에 있어야 하는가?

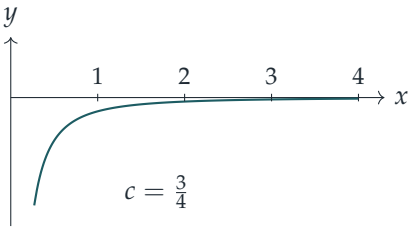
아래쪽에 있어야 한다. g가 순증가(strictly increasing)하면 임의의 x에 대해 모든 $y > x$에서 $\mathrm{g}(x) < \mathrm{g}(y)$이고, $y \to \infty$로 보내면 $\mathrm{g}(x) < 0$을 얻는다($\mathrm{g}(x) < \mathrm{g}(x+1) \le 0$이므로 등호가 없는 부등식이다). 같은 방식으로, 순감소하면서 0으로 가는 함수는 양수이다.

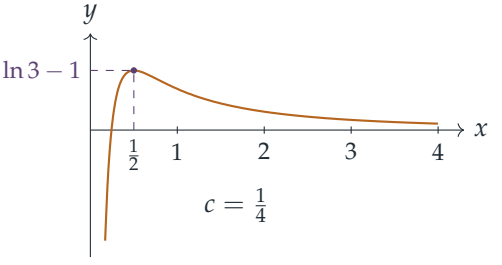
(a) $c = \frac{3}{4}$. (i)(a)에 의해 g는 전 구간에서 증가한다. ($x \to 0$일 때) $-\infty$에서 출발하여 0을 향해 올라가며 축 아래에 머문다. $-\frac{1}{4x^2}$처럼 다가가므로 축과 만나지 않고 극점(turning point)도 없다. 예를 들어 $\mathrm{g}(1) = \ln 2 - \frac{7}{8} \approx -0.18$이다.

(b) $c = \frac{1}{4}$. 여기서 $x_0 = \dfrac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$이다. 곡선은 $-\infty$에서 올라가 $x = \frac{1}{2}$에서 최댓값에 이르며, 그 값은 다음과 같다.

$$\mathrm{g}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \ln 3 - \frac{3/4}{3/4} = \ln 3 - 1 \approx 0.099 > 0.$$

그 뒤 위쪽에서 0을 향해 $\frac{1}{4x^2}$처럼 감소한다. $[\frac{1}{2}, \infty)$에서는 0으로 감소하므로 그 구간에서 양수이다. $(0, \frac{1}{2})$에서는 $-\infty$에서 양의 값까지 증가하므로 축과 정확히 한 번 만나며, 그 점은 $\frac{1}{4}$보다 조금 작다(수치로는 $x \approx 0.243$).





(두 그래프의 세로 눈금은 서로 다르다. 오른쪽 그래프는 작은 양의 볼록한 부분이 보이도록 세로로 늘려 그렸다. 두 그래프 모두 y축이 점근선이다.)

소문항 (iii)

$x > 0$에서 $\mathrm{f}(x) > 0$이므로 로그를 취할 수 있다:

$$\ln \mathrm{f}(x) = (x+c)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

곱의 미분법(product rule)으로 미분하고 (i)에서 구한 도함수를 이용하면

$$\frac{\mathrm{f}'(x)}{\mathrm{f}(x)} = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + (x+c)\cdot\left(-\frac{1}{x(x+1)}\right) = \mathrm{g}(x).$$

따라서 $\mathrm{f}'(x) = \mathrm{f}(x)\,\mathrm{g}(x)$이고, $\mathrm{f}(x) > 0$이므로 f'의 부호는 g의 부호와 같다. 또한 두 항이 모두 0으로 가므로, 모든 c에 대해 $x \to \infty$일 때 $\mathrm{g}(x) \to 0$임에 주목하자.

(a) $c \geq \frac{1}{2}$**.** (i)(a)에 의해 g는 $x > 0$에서 순증가하고 0으로 간다. (ii)의 상자 다음에 나온 논증에 의해 모든 $x > 0$에 대해 $\mathrm{g}(x) < 0$이다. 따라서 $\mathrm{f}'(x) < 0$이고, f는 감소한다.

(b) $0 < c < \frac{1}{2}$**.** (i)(b)에 의해 g는 $[x_0, \infty)$에서 순감소하고 0으로 가므로 그 구간에서 $\mathrm{g} > 0$이다. 특히 $\mathrm{g}(x_0) > 0$이다. $(0, x_0]$에서 g는 연속(continuous)이고 순증가하며, $x \to 0$일 때 $\mathrm{g}(x) \to -\infty$이다($c > 0$이므로 문제에서 주어진 사실이다). 그러므로 정확히 한 점 $x_1 \in (0, x_0)$에서 값 0을 가지며, $(0, x_1)$에서 $\mathrm{g} < 0$이고 (x_1, ∞)에서 $\mathrm{g} > 0$이다. 따라서 $\mathrm{f}'(x_1) = 0$이고, 그 점에서 f'의 부호가 음에서 양으로 바뀐다. 그러므로 f는 x_1에서 극점(극소)을 가진다.

> ? **생각해 보기** 왜 $\mathrm{f}'(x_1) = 0$만으로는 충분하지 않은가?

정류점(stationary point)이 반드시 극점인 것은 아니다(원점에서의 $y = x^3$을 생각해 보라). x_1을 극점으로 만드는 것은 f'의 부호 변화이며, 바로 그것을 g의 모양이 보장해 준다.

(c) $c = 0$**.** 이제 모든 $x > 0$에 대해 $\mathrm{g}'(x) = \dfrac{-x}{x^2(x+1)^2} < 0$이므로, g는 순감소하고 0으로 간다. 따라서 모든 $x > 0$에 대해 $\mathrm{g}(x) > 0$이므로 $\mathrm{f}'(x) > 0$이고, $\mathrm{f}(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$는 증가한다.

검산

- 한 점, 예를 들어 $x = 1$, $c = \frac{1}{4}$에서 g를 수치적으로 미분해 보자. 공식에서 $\mathrm{g}'(1) = \frac{-1/2+1/4}{4} = -\frac{1}{16}$을 얻으며, 이는 차분몫(difference quotient)과 일치한다.
- $c = \frac{1}{4}$: $\mathrm{g}(0.2) \approx -0.083$이고 $\mathrm{g}(0.3) \approx 0.056$이므로, 0.243 근처에서 축과 한 번만 만난다는 결과와 맞는다. $c = \frac{3}{4}$일 때는 $\mathrm{g}(3) \approx -0.025$로, 여전히 축 바로 아래에 있다.

- $c = \frac{1}{4}$인 (iii)(b)에서 f의 최솟값은 같은 $x \approx 0.243$에서 나타나며, $(0, \frac{1}{2})$에 속하는 여러 c 값에 대해 촘촘한 격자 위에서 f를 컴퓨터로 확인하면 극점이 정확히 하나 나온다.
- $c = 0$일 때 $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$는 증가하며 e로 가고, $c = 1$일 때 $(1 + \frac{1}{x})^{x+1}$은 감소하며 e로 간다. 이것이 e를 양쪽에서 조여 오는 익숙한 두 수열(sequence)이다.

흔한 실수

- "g가 증가한다"는 사실만으로 $g < 0$이라고 결론짓는 것. $x \to \infty$일 때의 극한(limit) $g \to 0$도 필요하다.
- (ii)(b)에서 곡선을 항상 음수인 것처럼 그리는 것. 최댓값 $\ln 3 - 1$은 작지만 양수이므로, 곡선은 축을 가로지른 뒤 위쪽에서 다시 축으로 내려와야 한다.
- 지수가 상수인 것처럼 $(1 + \frac{1}{x})^{x+c}$를 미분하는 것. 먼저 로그를 취하라.

STEP 너머

$(1 + \frac{1}{x})^x$는 증가하고 $(1 + \frac{1}{x})^{x+1}$은 감소하며 둘 다 e로 간다는 사실은, e를 정의하는 극한이 존재함을 증명하는 대학 1학년 과정의 고전적인 방법이다. 이는 단조수렴정리(monotone convergence theorem)의 한 예이다. 이 문제는 거동이 바뀌는 정확한 경계값 $c = \frac{1}{2}$를 찾아내며, 전개식 $g(x) \approx (\frac{1}{2} - c)/x^2$이 그 이유를 설명해 준다. 단조수열과 극한에 대해 더 알고 싶다면 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 읽어 보라.

풀이

STEP III 2024, 문제 4

순수수학 • 포물선의 접선

STEP III 2024, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2024년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

핵심 아이디어

모든 것은 두 직선 사이의 각에 대한 tan 공식에 달려 있으며, 이 공식은 사실 $\tan(A-B)$ 공식을 모양만 바꾼 것이다. $x=p$와 $x=q$에서의 접선(tangent)이 점 (X,Y)에서 만나고 $p+q$와 pq가 X와 Y로 표현된다는 것을 알고 나면, $(p-q)^2$과 pq를 포함하는 각에 대한 어떤 조건이든 X와 Y만으로 다시 쓸 수 있다. 그렇게 다시 쓴 조건이 바로 자취(locus)이다.

풀이

소문항 (i)

두 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각을 각각 α와 β라 하면 $m_1=\tan\alpha$, $m_2=\tan\beta$이다(두 직선 모두 기울기(gradient)를 가지므로 어느 것도 수직선이 아니다). 두 직선 사이의 각은 부호와 180°의 정수배를 더하는 차이를 제외하면 $\alpha-\beta$이다. 두 직선 사이의 예각(acute angle)이 45°이면 $\alpha-\beta$는 $\pm45^\circ$에 180°의 정수배를 더한 값이고, tan의 주기가 180°이므로

$$\tan(\alpha-\beta)=\tan(\pm45^\circ)=\pm1.$$

특히 $\cos(\alpha-\beta)\neq0$이므로 탄젠트의 덧셈정리(compound-angle formula)를 적용할 수 있고 $1+m_1m_2\neq0$이다.

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}.$$

따라서 요구한 대로 $\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\pm1$이다. 더 일반적으로, 두 직선 사이의 예각 θ는 $\tan\theta=\left|\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$를 만족하며, 이 사실을 소문항 (iii)에서 사용한다.

소문항 (ii)

C 위에서 $y = \dfrac{x^2}{4a}$이므로 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x}{2a}$이다. $\left(p, \frac{p^2}{4a}\right)$에서의 접선은

$$y - \frac{p^2}{4a} = \frac{p}{2a}(x - p) \quad \Longleftrightarrow \quad y = \frac{p}{2a}x - \frac{p^2}{4a},$$

이고, 마찬가지로 $x = q$에서의 접선은 $y = \dfrac{q}{2a}x - \dfrac{q^2}{4a}$이다. 두 식을 빼면

$$\frac{p-q}{2a}\,x = \frac{p^2 - q^2}{4a} = \frac{(p-q)(p+q)}{4a}.$$

$p \neq q$이므로 $p - q$로 나눌 수 있고, 요구한 대로 $x = \frac{1}{2}(p+q)$를 얻는다. 이를 첫 번째 접선의 식에 대입하면

$$y = \frac{p(p+q)}{4a} - \frac{p^2}{4a} = \frac{pq}{4a}.$$

따라서 두 접선은 다음 점에서 만난다.

$$(X, Y) = \left(\tfrac{1}{2}(p+q),\ \frac{pq}{4a}\right), \qquad \text{따라서} \qquad p + q = 2X, \quad pq = 4aY. \qquad (*)$$

이제 $x = p$와 $x = q$에서의 접선이 서로 $45°$를 이룬다고 하자. 두 접선은 분명히 서로 다른 직선이므로 $p \neq q$이고 $(*)$가 성립한다. 두 접선의 기울기는 $m_1 = \frac{p}{2a}$, $m_2 = \frac{q}{2a}$이므로

$$\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{(p-q)/(2a)}{1 + pq/(4a^2)} = \frac{2a(p-q)}{4a^2 + pq}.$$

소문항 (i)에 의해 이 값은 ± 1이고, 제곱하면 부호가 없어진다.

$$4a^2(p-q)^2 = (4a^2 + pq)^2.$$

> **생각해 보기** 조건에 $p + q$가 아니라 $p - q$가 들어 있을 때, 어떻게 p와 q를 없앨 수 있을까?

대칭식(symmetric expression)인 $(p-q)^2 = (p+q)^2 - 4pq$를 이용하면 $(*)$를 적용할 수 있다.

$$(p-q)^2 = 4X^2 - 16aY, \qquad 4a^2 + pq = 4a^2 + 4aY = 4a(a + Y).$$

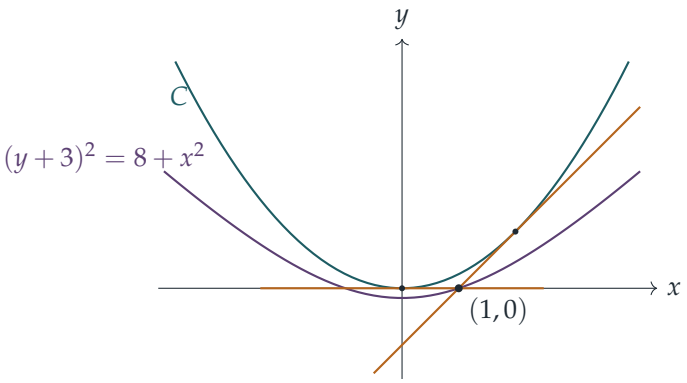
조건은 다음과 같이 된다.

$$4a^2\,(4X^2 - 16aY) = 16a^2(a+Y)^2.$$

$16a^2$으로 나누면($a \neq 0$이므로 가능하다)

$$X^2 - 4aY = Y^2 + 2aY + a^2,$$
$$\text{따라서} \qquad X^2 + 8a^2 = Y^2 + 6aY + 9a^2 = (Y + 3a)^2.$$

따라서 요구한 대로 교점은 $(y + 3a)^2 = 8a^2 + x^2$ 위에 있다.



$a = 1$일 때: $x = 2$에서의 접선(기울기 1)과 $x = 0$에서의 접선(기울기 0)은 45°를 이루고, 두 접선은 $(1, 0)$에서 만나며, 이 점은 쌍곡선(hyperbola)의 위쪽 가지 위에 있다.

소문항 (iii)

(X, Y)를 $(y + 7a)^2 = 48a^2 + 3x^2$ 위의 점으로서, C의 두 접선, 즉 $p \neq q$인 $x = p$와 $x = q$에서의 접선이 만나는 점이라 하자. 그러면 $(*)$가 성립한다. 소문항 (i) 끝의 설명에 의해 두 접선 사이의 예각 θ는 다음을 만족한다.

$$\tan^2\theta = \left(\frac{2a(p-q)}{4a^2+pq}\right)^2 = \frac{4a^2(4X^2-16aY)}{16a^2(a+Y)^2} = \frac{X^2-4aY}{(Y+a)^2},$$

여기서 소문항 (ii)와 같은 대입을 사용했다. ($Y = -a$이면 두 접선은 수직이 되는데, 아래에서 이 곡선 위에서는 그런 일이 일어날 수 없음을 보인다.)

> ? **생각해 보기** 곡선의 방정식이 $X^2 - 4aY$를 다루는 데 어떻게 도움이 될까?

곡선의 방정식을 전개하면 $Y^2 + 14aY + 49a^2 = 48a^2 + 3X^2$, 즉

$$3X^2 = Y^2 + 14aY + a^2.$$

그러면

$$3(X^2 - 4aY) = Y^2 + 14aY + a^2 - 12aY = Y^2 + 2aY + a^2 = (Y + a)^2.$$

여기서 두 가지 결과가 나온다. 첫째, $Y \neq -a$이다. 그렇지 않으면 $X^2 - 4aY = 0$, 즉 $X^2 = -4a^2$인데, $a \neq 0$이므로 이는 불가능하다. 따라서 $X^2 - 4aY = \frac{1}{3}(Y + a)^2 > 0$이고, 이는 그 점이 C의 바깥에 있음도 확인해 준다. p와 q를 근으로 갖는 이차방정식 $t^2 - 2Xt + 4aY = 0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로, 곡선 위의 모든 점을 지나는 접선이 실제로 두 개 있다. 둘째,

$$\tan^2\theta = \frac{\frac{1}{3}(Y+a)^2}{(Y+a)^2} = \frac{1}{3}.$$

따라서 점이 곡선 위의 어디에 있든 $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$이다. 즉 두 접선 사이의 예각은 일정하며, 그 크기는 30°이다.

검산

- $a = 1$일 때, $x = 2$와 $x = 0$에서의 접선은 $y = x - 1$과 $y = 0$이고, 45°를 이룬다. 두 접선은 $(1, 0)$에서 만나며, $(0+3)^2 = 9 = 8 + 1^2$이다.
- 소문항 (iii)에서 $a = 1$, $X = 0$으로 잡으면 $(Y+7)^2 = 48$이므로 $Y = 4\sqrt{3} - 7 \approx -0.072$이다. $(0, Y)$를 지나는 접선은 $x = \pm\sqrt{-4Y} \approx \pm 0.536$에서 접하고, 기울기는 ± 0.268이다. $\tan 15^\circ \approx 0.268$이므로 각 접선은 수평선과 15°를 이루고, 두 접선은 30°만큼 벌어져 있다.
- 천 개의 무작위 a 값과 각 쌍곡선의 두 가지 위의 점들에 대해 컴퓨터로 확인한 결과 45°와 30°라는 결과가 확인되었다.

흔한 실수

- p와 q를 각각 따로 구하려고 하는 것. 필요한 것은 대칭적인 조합 $p+q$와 pq뿐이며, $(p-q)^2 = (p+q)^2 - 4pq$를 이용하면 된다.
- 소문항 (i)에서 $\pm$를 빠뜨리는 것. 조건을 제곱하면 45° 각의 두 방향이 모두 유지되고, 바로 그 덕분에 하나의 방정식을 얻는다.
- 소문항 (iii)에서 약분하기 전에 $Y + a \neq 0$인지 확인하지 않는 것.

STEP 너머

점 (X, Y)에서 포물선(parabola)에 그은 접선은 이차방정식 $t^2 - 2Xt + 4aY = 0$에 의해 결정되며, 접선들이 일정한 각으로 만나는 점들의 자취는 항상 쌍곡선이다(90°일 때는 준선(directrix) $y = -a$로 퇴화한다). 이러한 아이디어는 사영기하학(projective geometry)에 속하며, 사영기하학에서는 극–극선 관계(pole–polar relation)가 한 점을 그 점의 접점현(chord of contact)과 연결한다. 이런 성격의 문제를 공략 방법에 대한 해설과 함께 더 보고 싶다면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제집)를 참고하라.

풀이

STEP III 2024, 문제 5

순수수학 • 행렬 미분방정식

STEP III 2024, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2024년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

이 문제는 *Beyond STEP*의 7.7 절 **결코 변하지 않는 양**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch07/lax-pairs.html

핵심 아이디어

모든 것은 대각합(trace)에 관한 두 가지 사실에 달려 있다. 대각합은 선형(linear)이고, $\operatorname{tr}(\mathbf{XY}) = \operatorname{tr}(\mathbf{YX})$이다. 소문항 (ii)는 행렬식(determinant)의 변화율에 관한 공식, 즉 야코비(Jacobi) 공식(Jacobi's formula)이며, 이 공식은 "$\det \mathbf{M}$이 상수인가?"라는 질문을 "어떤 대각합이 0인가?"라는 질문으로 바꾸어 준다. (iii)에서 교환자(commutator) $\mathbf{MN} - \mathbf{NM}$의 대각합은 항상 0이며, 이로부터 세 가지 불변량(invariant)이 모두 얻어진다. (iv)에서는 같은 공식으로 $\operatorname{tr}\mathbf{N}$이 $\ln|\det \mathbf{M}|$의 변화 속도를 나타낸다는 것을 알 수 있으므로, 문제는 대각합은 일정하지만 행렬식은 변하는 행렬이 존재하는가로 바뀐다.

풀이

소문항 (i)

$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$라 하자. $\mathbf{MN}$의 대각 성분(diagonal entries)은 $ap + br$와 $cq + ds$이고, $\mathbf{NM}$의 대각 성분은 $pa + qc$와 $rb + sd$이다. 따라서

$$\operatorname{tr}(\mathbf{MN}) = ap + br + cq + ds = \operatorname{tr}(\mathbf{NM}).$$

또한 $\mathbf{M} + \mathbf{N}$의 대각 성분은 $a + p$와 $d + s$이므로

$$\operatorname{tr}(\mathbf{M} + \mathbf{N}) = \operatorname{tr}(\mathbf{M}) + \operatorname{tr}(\mathbf{N}).$$

같은 방법으로 스칼라(scalar) k에 대하여 $\operatorname{tr}(k\mathbf{M}) = k\operatorname{tr}(\mathbf{M})$이고, $\mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t$의 대각합은 $\operatorname{tr}\mathbf{M}$의 도함수(derivative)이다. 아래에서는 이 사실들을 자유롭게 사용한다.

소문항 (ii)

성분 a, b, c, d가 t에 의존할 때(프라임은 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$를 나타낸다), 곱의 미분법(product rule)에 의하여

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\det\mathbf{M}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(ad-bc) = a'd + ad' - b'c - bc'.$$

$\mathbf{M}$이 가역(non-singular)이므로 $\mathbf{M}^{-1} = \dfrac{1}{\det\mathbf{M}}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$이고,

$$\mathbf{M}^{-1}\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\det\mathbf{M}}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \frac{1}{\det\mathbf{M}}\begin{pmatrix} da'-bc' & * \\ * & -cb'+ad' \end{pmatrix}.$$

이 행렬의 대각합은 $\dfrac{a'd + ad' - b'c - bc'}{\det\mathbf{M}}$이고, 이는 $\dfrac{1}{\det\mathbf{M}}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\det\mathbf{M})$과 같다. 따라서 원하는 결과가 성립한다.

소문항 (iii)

행렬식. (ii)와 대각합의 선형성에 의하여

$$\frac{1}{\det\mathbf{M}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\det\mathbf{M}) = \operatorname{tr}\big(\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{MN}-\mathbf{NM})\big) = \operatorname{tr}(\mathbf{N}) - \operatorname{tr}(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{NM}).$$

두 행렬 $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}$과 $\mathbf{M}$에 (i)을 적용하면 $\operatorname{tr}(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}\,\mathbf{M}) = \operatorname{tr}(\mathbf{M}\,\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}) = \operatorname{tr}(\mathbf{N})$을 얻는다. 따라서 우변은 0이다. $\det\mathbf{M} \neq 0$이므로 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\det\mathbf{M}) = 0$이다.

대각합. (i)에 의하여 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{tr}(\mathbf{M}) = \operatorname{tr}\left(\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t}\right) = \operatorname{tr}(\mathbf{MN}) - \operatorname{tr}(\mathbf{NM}) = 0$이다.

제곱의 대각합. 인수의 순서를 유지하기만 하면 곱의 미분법은 행렬에서도 성립한다.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{M}^2) &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t}\mathbf{M} + \mathbf{M}\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t} = (\mathbf{MN}-\mathbf{NM})\mathbf{M} + \mathbf{M}(\mathbf{MN}-\mathbf{NM}) \\ &= \mathbf{M}^2\mathbf{N} - \mathbf{NM}^2,\end{aligned}$$

두 개의 $\mathbf{MNM}$ 항이 소거되기 때문이다. 이는 $\mathbf{M}$ 대신 $\mathbf{M}^2$이 들어간 같은 교환자 꼴이므로, (i)에 의하여 그 대각합은 0이다. 따라서 $\operatorname{tr}(\mathbf{M}^2)$도 상수이다. 세 양은 모두 t와 무관하다.

> **생각해 보기** $\mathbf{N}$도 t에 의존할 때 $\mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t = \mathbf{MN} - \mathbf{NM}$을 어떻게 풀 수 있을까?

$\mathbf{N}$에서 모든 행렬과 교환되는 부분을 떼어 낸다. $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$로 두고 $\mathbf{N} = t\mathbf{I} + t\mathbf{J}$로 쓰자.

항등행렬(identity)은 $\mathbf{M}$과 교환되므로 $\mathbf{MN} - \mathbf{NM} = t(\mathbf{MJ} - \mathbf{JM})$이다. $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$이

라 하면

$$\mathbf{MJ} - \mathbf{JM} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & a-d \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$

성분을 비교하면 네 개의 스칼라 방정식을 얻는다.

$$a' = -tc, \qquad b' = t(a-d), \qquad c' = 0, \qquad d' = tc.$$

$t = 0$에서의 값 A, B, C, D를 이용하여 차례로 푼다.

- $c' = 0$이므로 $c = C$이다.
- 그러면 $a' = -Ct$, $d' = Ct$이므로 $a = A - \frac{1}{2}Ct^2$, $d = D + \frac{1}{2}Ct^2$이다.
- 이제 $a - d = A - D - Ct^2$이므로 $b' = (A-D)t - Ct^3$이고, 따라서 $b = B + \frac{1}{2}(A-D)t^2 - \frac{1}{4}Ct^4$이다.

그러므로

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} A - \frac{1}{2}Ct^2 & B + \frac{1}{2}(A-D)t^2 - \frac{1}{4}Ct^4 \\ C & D + \frac{1}{2}Ct^2 \end{pmatrix}.$$

검산해 보면 대각합은 $A + D$이고, $ad - bc$를 전개하면 t의 모든 거듭제곱이 소거되어 $AD - BC$만 남는다. 이는 이 소문항의 앞부분 결과와 일치한다.

소문항 (iv)

이제 $\mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t = \mathbf{MN}$이므로 $\mathbf{M}^{-1}\,\mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t = \mathbf{N}$이고, (ii)에 의하여

$$\operatorname{tr}(\mathbf{N}) = \frac{1}{\det \mathbf{M}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\det \mathbf{M}).$$

따라서 모든 t에 대하여 $\operatorname{tr}\mathbf{N} = 0$인 것은 $\det\mathbf{M}$이 상수인 것과 정확히 동치이다. 대각합이 일정하다는 사실은 행렬식에 대하여 아무것도 말해 주지 않으므로, 답은 **아니다**일 것이다. 이를 증명하려면 반례(counterexample) 하나가 필요하다.

> **생각해 보기** 문제가 $\mathbf{N}$을 미분방정식을 통해서만 주고 있을 때, 반례를 어떻게 만들 수 있을까?

거꾸로 생각한다. 대각합이 0이 아닌 상수이고 행렬식이 상수가 아닌 가역행렬 $\mathbf{M}(t)$를 아무것이나 고른 다음, $\mathbf{N} = \mathbf{M}^{-1}\,\mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t$로 **정의한다**. 그러면 방정식은 저절로 성립한다. 다음과 같이 잡자.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{tr}\mathbf{M} = 2, \qquad \det\mathbf{M} = 1 + t^2 \neq 0.$$

그러면

$$\mathbf{N} = \mathbf{M}^{-1}\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix}.$$

곱을 직접 계산하면 $\mathbf{MN} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t$임을 확인할 수 있다. 또한 $\det \mathbf{N} = 1/(1+t^2)$이므로 $\mathbf{N}$은 가역이다. 그런데

$$\operatorname{tr}(\mathbf{N}) = \frac{2t}{1+t^2},$$

이고, 이는 $t \neq 0$인 모든 t에 대하여 0이 아니다. 따라서 $\operatorname{tr}(\mathbf{N}) = 0$이 반드시 성립하는 것은 **아니다**. 반드시 성립하는 것은 $\operatorname{tr}(\mathbf{MN}) = \operatorname{tr}(\mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t) = 0$이며, 이는 같은 명제가 아니다.

검산

- (iii)에서 $A = 1, B = 0, C = 2, D = 3, t = 1$로 두자. 공식에 의하면 $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$이고, 이 행렬의 대각합은 4, 행렬식은 3으로 $t = 0$일 때와 같다. 이 행렬의 제곱의 대각합은 $0 - 3 - 3 + 16 = 10$이고, 처음 행렬의 경우도 $1 + 0 + 0 + 9 = 10$으로 같다.
- 임의의 A, B, C, D에 대하여 미분방정식을 컴퓨터로 수치 적분한 결과, (iii)의 $\mathbf{M}$ 공식과 소수점 아래 여덟 자리까지 일치했다. 시간에 의존하는 임의의 $\mathbf{N}$으로 같은 수치 적분을 했을 때에도 세 불변량은 일정하게 유지되었다.
- (iv)에서 $t = 1$일 때 $\mathbf{N} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$이고 그 대각합은 1이다. 한편 $\det \mathbf{M} = 1 + t^2$의 로그 미분(logarithmic derivative)은 그 점에서 $2t/(1+t^2) = 1$이므로, (ii)가 예측한 대로이다.

흔한 실수

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{M}^2) = 2\mathbf{M}\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t}$라고 쓰는 것. 행렬은 교환되지 않을 수 있으므로 두 순서를 모두 유지해야 한다.
- $\operatorname{tr}(\mathbf{MN}) = \operatorname{tr}\mathbf{M}\operatorname{tr}\mathbf{N}$이라고 가정하는 것. 이는 거짓이다. 성립하는 것은 선형 법칙과 순환 법칙(cyclic rule)뿐이다.
- (iv)에서 $\operatorname{tr}(\mathbf{MN}) = 0$으로부터 곧바로 $\operatorname{tr}(\mathbf{N}) = 0$을 이끌어 내는 것. "아니다"라는 답에는 명시적인 반례가 필요하다.

STEP 너머

소문항 (ii)는 $n \times n$ 행렬에 대하여 성립하는 야코비 공식의 2×2인 경우이다. 이를 $\mathbf{M}' = \mathbf{MN}$과 결합하면 $\det \mathbf{M}(t) = \det \mathbf{M}(0) \exp \int_0^t \operatorname{tr}\mathbf{N}$을 얻는다. $\mathbf{N}$이 상수이면 이는

유명한 항등식 $\det e^{\mathbf{N}} = e^{\operatorname{tr}\mathbf{N}}$이 된다. $\mathbf{M}' = \mathbf{MN} - \mathbf{NM}$ 꼴의 방정식을 락스 방정식(Lax equations)이라 한다. 양 $\operatorname{tr}(\mathbf{M}^k)$는 항상 보존되며, 이 때문에 적분가능계(integrable systems) 이론에 등장한다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 대각합, 행렬식, 행렬 지수함수(matrix exponential)에 대하여 읽기에 좋은 책이다.

풀이

STEP III 2024, 문제 6

순수수학 • 선형 미분방정식

> **STEP III 2024, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2024년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

핵심 아이디어

제어(control) u는 모든 방정식에 똑같이 더해지므로, 계수의 합이 0인 좌표의 일차결합은 u의 영향을 전혀 받지 않는다. 이 결합을 잘 고르면 그 도함수가 자기 자신의 상수배가 되므로, u가 어떻게 주어지든 이 결합은 지수적으로 증가하거나 감소한다. 지수함수는 처음에 0에서 출발하지 않는 한 결코 0이 되지 않으며, 여기서 필요조건이 나온다. 이 조건이 성립하면 운동은 하나의 일계 미분방정식(first-order differential equation)으로 축소되고, 이는 상수 u로 풀 수 있다.

풀이

소문항 (i)

(a) 두 방정식을 빼면 u 항이 소거된다.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = (-x + 3y + u) - (x + y + u) = -2(x - y).$$

따라서 $w = x - y$는 $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = -2w$를 만족하고, 모든 함수 u에 대하여

$$x - y = (x_0 - y_0)\,\mathrm{e}^{-2t}$$

이다. 어떤 $t > 0$에서 입자가 원점에 있다면 그때 $x - y = 0$이다. $\mathrm{e}^{-2t} \neq 0$이므로 $x_0 - y_0 = 0$, 즉 $x_0 = y_0$이어야 한다.

(b) $x_0 = y_0$이면 (a)의 식에서 **모든** t에 대하여 $x - y = 0$이므로, 입자는 직선 $y = x$ 위에 머문다. 첫 번째 방정식에 $y = x$를 대입하면

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2x + u.$$

u가 상수이면 이는 상수계수 선형 미분방정식이다. 특수해(particular solution)는 상수 $-\frac{1}{2}u$이므로

$$x = -\tfrac{1}{2}u + \left(x_0 + \tfrac{1}{2}u\right)\mathrm{e}^{2t}.$$

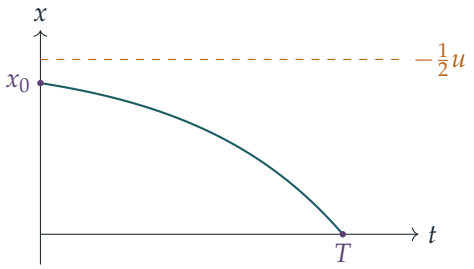
$x(T) = 0$이어야 한다(그러면 $y(T) = x(T) = 0$도 성립한다).

$$\left(x_0 + \tfrac{1}{2}u\right)\mathrm{e}^{2T} = \tfrac{1}{2}u \quad \Longrightarrow \quad x_0\,\mathrm{e}^{2T} = \tfrac{1}{2}u\left(1 - \mathrm{e}^{2T}\right).$$

$T > 0$이므로 $\mathrm{e}^{2T} \neq 1$이고, 따라서 양변을 나눌 수 있다.

$$\boxed{u = -\frac{2x_0\,\mathrm{e}^{2T}}{\mathrm{e}^{2T} - 1}}$$

부호도 타당하다. 그대로 두면 $\dot{x} = 2x$가 입자를 원점에서 멀어지게 밀어내므로, u는 x_0의 반대 방향으로 밀어야 한다. ($x_0 = 0$이면 입자는 $u = 0$일 때 이미 원점에 정지해 있다.)



그림은 $x_0 = 1$, $T = 1$인 경우이다. 입자는 불안정 평형점(unstable equilibrium) $x = -\frac{1}{2}u$의 바로 아래에서 출발하여 그로부터 밀려나고, 정확히 시각 T에 원점에 도달한다.

소문항 (ii)

(a) 소문항 (i)과 마찬가지로, $a + b + c = 0$이고(그래서 u가 소거되고) 도함수가 자기 자신의 상수배가 되는 $ax + by + cz$를 찾는다. "x, 다음에 $-2y$, 다음에 z"라는 패턴을 보면 $w = x - 2y + z$를 떠올릴 수 있다.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} &= (4y - 5z + u) - 2(x - 2z + u) + (x - 2y + u)\\ &= -x + 2y - z = -w.\end{aligned}$$

따라서 u가 무엇이든 $x - 2y + z = (x_0 - 2y_0 + z_0)\,\mathrm{e}^{-t}$이다. 원점에서는 $w = 0$이고 $\mathrm{e}^{-t} \neq 0$이므로 $x_0 - 2y_0 + z_0 = 0$이다. 즉 $y_0 = \frac{1}{2}(x_0 + z_0)$으로, y_0은 x_0과 z_0의 평균이다.

? **생각해 보기** u의 영향을 받지 않는 두 번째 결합이 또 있는가?

마지막 두 방정식에는 모두 $x+u$가 들어 있으므로, 둘을 빼면 u뿐 아니라 x도 소거된다. $v=y-z$라 하면

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=(x-2z+u)-(x-2y+u)=2(y-z)=2v,$$

이므로 $y-z=(y_0-z_0)\,\mathrm{e}^{2t}$이다.

(b) 어떤 $t>0$에서 입자가 원점에 있다면 그때 $v=0$이다. $\mathrm{e}^{2t}\neq 0$이므로 $y_0=z_0$이다. 이를 (a)와 결합하면 $x_0=2y_0-z_0=y_0$이므로 $x_0=y_0=z_0$이다.

(c) $x_0=y_0=z_0$이면 w와 v가 모두 0에서 출발하므로 모든 t에 대하여 0으로 유지된다. 즉 $y=z$이고, 따라서 $x=2y-z=y$이다. 입자는 직선 $x=y=z$를 따라 움직이며, 각 방정식은

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=4x-5x+u=-x+u$$

가 된다(두 번째와 세 번째 방정식도 $x-2x+u$로 같다). u가 상수이면

$$x=u+(x_0-u)\,\mathrm{e}^{-t}.$$

$x(T)=0$으로 놓으면 $u\left(1-\mathrm{e}^{-T}\right)=-x_0\,\mathrm{e}^{-T}$이다. $T>0$이므로 나눌 수 있고, 분자와 분모에 e^{T}를 곱하면

$$\boxed{u=-\frac{x_0}{\mathrm{e}^{T}-1}}$$

이다. 이 경우 제어가 없는 운동 $\dot{x}=-x$는 이미 원점을 향해 감소하지만, 원점에는 $t\to\infty$일 때에만 다가간다. $T\to\infty$일 때 0으로 가는 작은 힘으로 원점 쪽으로 밀어 주면 입자는 유한한 시간 안에 원점에 도달한다.

검산

- 극한: $T\to\infty$일 때 (ii)(c)의 답은 0으로 수렴(converge)하여 자연스러운 감소와 일치한다. 한편 (i)(b)의 답은 $-2x_0$으로 수렴하는데, 이때 $x_0=-\frac{1}{2}u$가 평형점이 된다. 그러면 입자는 그 자리에 머물러 결코 원점에 도달하지 않으며, 그래서 유한한 T에 대해서는 u의 크기가 조금 더 커야 한다. $T\to 0^{+}$일 때 두 답은 모두 발산하는데, 이는 당연하다.
- 수치 검산: $x_0=1, T=1$일 때 소문항 (i)(b)에서 $u\approx -2.3130$을 얻고, 방정식을 수치적으로 진행시키면 $t=1$에서 10^{-8} 이내의 오차로 $(0,0)$에 도달한다. $u=-1/(\mathrm{e}-1)\approx -0.5820$인 (ii)(c)에서도 마찬가지이다. 또한 u가 시간에 대해 상수가 아닌 함수일 때에도 불변량(invariant) $x-y$, $x-2y+z$, $y-z$가 각각의 지수함수를 따른다는 것을 확인하였다.

흔한 실수

- (i)(a)나 (ii)(a),(b)에서 u를 상수로 가정하는 것. 이 부분들은 **임의의** u에 대한 것이며, u가 소거된다는 것이 핵심이다.
- (i)(b)와 (ii)(c)에서 모든 시간에 대하여 $y = x$(또는 $x = y = z$)인 **이유**를 밝히지 않는 것. 이는 초깃값이 0인 지수함수 공식에서 나온다.

STEP 너머

이것은 **제어 이론**(control theory)의 첫맛이다. 계를 $\dot{\mathbf{r}} = A\mathbf{r} + \mathbf{b}u$로 쓰면, 우리가 찾은 결합들은 $\mathbf{b}$와 직교하는 A의 왼쪽 고유벡터(left eigenvector)이므로 어떤 제어로도 이들에 영향을 줄 수 없다. 모든 상태를 원점으로 보낼 수 있는지는 칼만(Kalman)의 계수 조건(rank condition)으로 판정한다. 여기서는 이 조건이 성립하지 않으며, 바로 그 때문에 특별한 출발점에서만 가능한 것이다. 고유벡터에 관한 내용은 Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)에서, 상미분방정식(ODE)의 선형 연립계는 Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에서 다룬다.

풀이

STEP III 2024, 문제 7

순수수학 • e 제곱의 무리성

> **STEP III 2024, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2024년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

이 문제는 *Beyond STEP*의 1.4 절 *e*는 무리수이고, e^2도 그렇다에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch01/e-irrational.html

핵심 아이디어

두 급수(series)는 모두 지수 급수에 계승(factorial)을 곱했을 때 남는 꼬리 부분이다. $\mathrm{e} = \sum 1/r!$에 $(2n)!$을 곱하면 $r = 2n$까지의 모든 항은 정수가 되고, 그 이후의 나머지는 정확히 $\mathrm{f}(2n)$이 된다. $1/\mathrm{e}$와 $\mathrm{g}(2n)$에서도 같은 일이 일어난다. 만약 e^2이 유리수(rational)라면 이 작은 꼬리들의 어떤 결합이 반드시 정수가 되어야 하는데, 그 값은 0과 1 사이에 엄격하게 끼어 있다.

풀이

다음과 같이 놓자.

$$a_k = \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}, \qquad k \geq 1,$$

그러면 $\mathrm{f}(n) = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$이고 $\mathrm{g}(n) = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots$이다. $a_{k+1} = a_k/(n+k+1)$임에 주목한다.

소문항 (i)

모든 a_k가 양수이므로 $\mathrm{f}(n) > 0$이다. a_k의 분모에 있는 각 인수는 $n+1$ 이상이므로 $a_k \leq 1/(n+1)^k$이고, $k \geq 2$이면 $(n+2$라는 인수가 나타나므로) 엄격한 부등식(strict

inequality)이 성립한다. 공비가 $\frac{1}{n+1} < 1$인 등비급수(geometric series)와 비교하면

$$\mathrm{f}(n) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^k} = \frac{\frac{1}{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n}.$$

따라서 $0 < \mathrm{f}(n) < \frac{1}{n}$이다.

소문항 (ii)

연속한 항은 엄격하게 감소한다. $n+k+1 > 1$이므로 $a_{k+1} = a_k/(n+k+1) < a_k$이다. 처음부터 두 항씩 묶으면

$$\mathrm{g}(n) = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots > 0,$$

이다. 각 괄호가 양수이기 때문이다. 이번에는 첫째 항 다음부터 묶으면

$$\mathrm{g}(n) = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots < a_1 = \frac{1}{n+1},$$

이다. 이때도 각 괄호는 양수이다. 그러므로 $0 < \mathrm{g}(n) < \frac{1}{n+1}$이다.

소문항 (iii)

$m = 2n$이라 하자. $\mathrm{e} = \sum_{r\geq 0} 1/r!$을 이용하면

$$m!\,\mathrm{e} = \sum_{r=0}^{m} \frac{m!}{r!} + \sum_{r=m+1}^{\infty} \frac{m!}{r!}.$$

$r \leq m$이면 $m!/r! = (r+1)(r+2)\cdots m$은 정수이므로 첫째 합은 정수이다. 이것을 A라 하자. 둘째 합에서 $m!/(m+k)! = 1/\big((m+1)\cdots(m+k)\big)$이고, 이는 $\mathrm{f}(m)$의 제k항이다. 따라서 $m!\,\mathrm{e} = A + \mathrm{f}(m)$이고, $(2n)!\,\mathrm{e} - \mathrm{f}(2n) = A$는 정수이다.

마찬가지로 $1/\mathrm{e} = \sum_{r\geq 0}(-1)^r/r!$로부터

$$\frac{m!}{\mathrm{e}} = \underbrace{\sum_{r=0}^{m}(-1)^r \frac{m!}{r!}}_{B\in\mathbb{Z}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+k}}{(m+1)(m+2)\cdots(m+k)}.$$

생각해 보기 문제에서 왜 n이 아니라 $2n$을 사용할까?

$m = 2n$이 짝수이므로 $(-1)^{m+k} = (-1)^k$이고, 따라서 꼬리는 $-a_1 + a_2 - a_3 + \cdots = -\mathrm{g}(m)$이다 (여기서 a_k는 이제 m으로 만든 것이다). 그러므로 $m!/\mathrm{e} = B - \mathrm{g}(m)$이고, $\frac{(2n)!}{\mathrm{e}} + \mathrm{g}(2n) = B$는 정수이다. ($m$이 홀수라면 꼬리는 $+\mathrm{g}(m)$이 되어 대신 빼기 부호가 필요할 것이다.)

소문항 (iv)

소문항 (iii)의 정수 A와 B를 이용하면

$$\begin{aligned} q\,\mathrm{f}(2n) + p\,\mathrm{g}(2n) &= q\big((2n)!\,\mathrm{e} - A\big) + p\Big(B - \frac{(2n)!}{\mathrm{e}}\Big) \\ &= (2n)!\Big(q\mathrm{e} - \frac{p}{\mathrm{e}}\Big) - qA + pB \\ &= pB - qA, \end{aligned}$$

이다. $q\mathrm{e} = p/\mathrm{e}$이기 때문이다. p, q, A, B가 정수이므로 모든 양의 정수 n에 대하여 $q\,\mathrm{f}(2n) + p\,\mathrm{g}(2n)$도 정수이다.

소문항 (v)

모순을 이끌어 내기 위해(proof by contradiction) e^2이 유리수라고 가정하자. $\mathrm{e}^2 > 0$이므로 양의 정수 p, q에 대하여 $\mathrm{e}^2 = p/q$로 쓸 수 있고, 양변을 e로 나누면 $q\mathrm{e} = p/\mathrm{e}$이다. 소문항 (iv)에 의해 모든 $n \geq 1$에 대하여 $N_n = q\,\mathrm{f}(2n) + p\,\mathrm{g}(2n)$은 정수이다.

> **?** **생각해 보기** 어떻게 하면 N_n이 정수가 될 수 없게 만들 수 있을까?

$2n$에 소문항 (i)과 (ii)를 적용하여 N_n을 양쪽에서 조인다. $p, q > 0$이므로

$$0 < N_n < \frac{q}{2n} + \frac{p}{2n+1} < \frac{p+q}{2n}.$$

이제 $2n > p + q$가 되도록 n을 충분히 크게 잡는다. 그러면 $0 < N_n < 1$이므로 N_n은 0과 1 사이에 엄격하게 놓인 정수가 되는데, 이는 불가능하다. 따라서 e^2은 무리수(irrational)이다.

검산

작은 경우는 정확히 더해 볼 수 있다. $n = 2$일 때 소문항 (iii)에 따르면 $24\mathrm{e} - \mathrm{f}(4)$는 정수이다. 실제로 $\sum_{r=0}^{4} 24/r! = 65$이고, $\mathrm{f}(4) = 24\mathrm{e} - 65 \approx 0.2388$은 $(0, \frac{1}{4})$ 안에 여유 있게 들어간다. 마찬가지로 $\mathrm{f}(2) = 2\mathrm{e} - 5 \approx 0.4366 < \frac{1}{2}$이고 $\mathrm{g}(2) = 1 - 2/\mathrm{e} \approx 0.2642 < \frac{1}{3}$이다. 컴퓨터로 확인한 결과 $n \leq 24$에 대하여 (i)과 (ii)의 범위가, $2n \leq 22$에 대하여 (iii)의 정수성이 성립하였고, 임의의 p, q에 대하여 $0 < q\,\mathrm{f}(2n) + p\,\mathrm{g}(2n) < (p+q)/(2n)$도 성립하였다.

흔한 실수

- 모든 k에 대하여 $a_k < 1/(n+1)^k$라고 주장하는 것: $k = 1$에서는 등호가 성립하므로, 엄격한 부등식은 $k \geq 2$인 항에서 나온다.

- $1/\mathrm{e}$의 전개에서 꼬리의 부호를 잊는 것: 꼬리가 $-\mathrm{g}(2n)$이 되는 것은 오직 $2n$이 짝수이기 때문이다.
- "N_n이 작다"에서 멈추는 것: 모순을 얻으려면 $N_n > 0$도 필요하며, 바로 그래서 (i)과 (ii)의 아래 범위가 중요하다.

STEP 너머

이것은 e가 무리수임을 보이는 푸리에(Fourier)의 고전적인 증명을, $\mathrm{e}^2 = p/q$를 $q\mathrm{e} = p/\mathrm{e}$로 나누어 두 급수가 모두 빠르게 수렴(converge)하도록 확장한 것이다. 같은 아이디어를 더 세심하게 다루면 0이 아닌 모든 유리수 r에 대하여 e^r이 무리수임을 보일 수 있고, 리우빌(Liouville)은 이를 이용하여 e가 정수 계수 이차방정식의 근이 될 수 없음을 보였다. 급수의 꼬리를 어림하는 것은 대학 1학년 해석학(analysis)의 핵심 기법이다. Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 참고하라.

풀이

STEP III 2024, 문제 8

순수수학 • 교차하는 이차곡선

> **STEP III 2024, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2024년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

핵심 아이디어

$y^2 - x^2 + \ldots$ 꼴의 이차식(quadratic expression)이 기울기(gradient)가 ± 1인 두 직선으로 쪼개지는 것은, 완전제곱식 만들기(completing the square)를 했을 때 상수항이 남지 않을 때이고 그때뿐이다. 나머지 문항의 요령은, 한 곡선의 방정식에 다른 곡선의 방정식의 상수배를 더해도 공통점은 하나도 잃지 않는다는 것이다. 그리고 상수배를 잘 고르면 복잡한 사차(quartic) 문제가 "어떤 직선들이 포물선(parabola)과 만나는가"라는 문제로 바뀌는데, 이것은 이차방정식 두 개에 지나지 않는다.

풀이

소문항 (i)

곱이 0이 되는 것은 인수(factor) 중 하나가 0일 때이고 그때뿐이므로, $(y - x + 3)(y + x - 5) = 0$을 만족하는 점들은 $y = x - 3$(기울기 1) 위의 점들과 $y = -x + 5$(기울기 -1) 위의 점들을 합한 것이다.

일반적인 방정식에 대해서는 두 변수 모두에 대해 완전제곱식을 만든다.

$$y^2 - x^2 + py + qx + r = \left(y + \tfrac{1}{2}p\right)^2 - \left(x - \tfrac{1}{2}q\right)^2 - K, \qquad \text{여기서} K = \tfrac{1}{4}\left(p^2 - q^2\right) - r.$$

$Y = y + \frac{1}{2}p$, $X = x - \frac{1}{2}q$로 놓자. 이것은 평행이동(translation)이므로 기울기를 바꾸지 않는다. 방정식은 $(Y - X)(Y + X) = K$가 된다.

$p^2 - q^2 = 4r$이면 $K = 0$이고 방정식은 $(Y - X)(Y + X) = 0$이다. 첫 문단에 의해 이것은 두 직선 $Y = X$와 $Y = -X$이고, 기울기는 각각 1과 -1이다. 원래 좌표로 쓰면 이 직선들은

$$y - x + \tfrac{1}{2}(p + q) = 0 \quad \text{그리고} \quad y + x + \tfrac{1}{2}(p - q) = 0.$$

이다.

역으로, 방정식이 기울기가 ± 1인 두 직선을 나타낸다고 하자. $K = 0$임을 보이겠다. 두 직선 중 하나는 기울기가 1이므로 $Y = X + c$ 꼴이고, 그 위의 모든 점이 방정식을 만족한다. 이 직선 위에서 $(Y - X)(Y + X) = c(2X + c)$이므로, **모든** 실수 X에 대해 $2cX + c^2 = K$이다. X의 일차함수가 상수이려면 계수가 0이어야 하므로 $c = 0$이고, 따라서 $K = c^2 = 0$이다. 그러므로 $p^2 - q^2 = 4r$이고, "필요충분조건(if and only if)"이 증명되었다.

소문항 (ii)

어떤 점이 C_1 위에 있으면 그 점에서 $y^2 + 2sy + s(s+1) - x = 0$이고, C_2 위에 있으면 그 점에서 $y - x^2 = 0$이다. 따라서 공통점에서 식

$$y^2 + 2sy + s(s+1) - x + k(y - x^2)$$

의 값은 k의 값에 관계없이 $0 + k \cdot 0 = 0$이다.

$k = 1$로 놓으면 방정식은

$$y^2 - x^2 + (2s+1)y - x + s(s+1) = 0,$$

이 되고, 이것은 $p = 2s + 1, q = -1, r = s(s+1)$인 소문항 (i)의 꼴이다. 그러면

$$p^2 - q^2 = 4s^2 + 4s + 1 - 1 = 4s(s+1) = 4r,$$

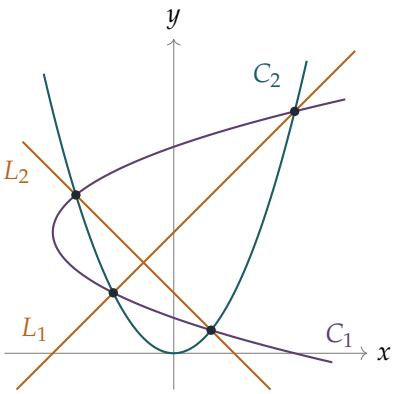
이므로, 소문항 (i)에 의해 이것은 기울기가 1과 -1인 두 직선이다. $\frac{1}{2}(p+q) = s$, $\frac{1}{2}(p-q) = s+1$을 써서 소문항 (i)의 인수분해를 이용하면 방정식은

$$(y - x + s)(y + x + s + 1) = 0,$$

이므로 두 직선은

$$L_1 : \ y = x - s \qquad \text{그리고} \qquad L_2 : \ y = -x - s - 1.$$

이다. 첫 문단에 의해 $C_1 \cap C_2$의 모든 점은 이 방정식을 만족하므로, 네 교점은 모두 $L_1 \cup L_2$ 위에 있다. (이것은 모든 s에 대해 성립한다. 네 점이 존재한다는 사실은 전혀 필요하지 않았다.)



그림은 $s = -2$인 경우이다. C_1은 $x = (y-2)^2 - 2$이고, C_1과 C_2의 네 공통점은 직선 $y = x+2$와 $y = 1-x$ 위에 두 개씩 놓여 있다.

소문항 (iii)

C_1과 C_2의 모든 공통점은 C_2 위에 있고, L_1 또는 L_2 위에 있다. $y = x^2$을 대입하면

$$\text{직선} L_1 : \quad x^2 - x + s = 0,$$
$$\text{직선} L_2 : \quad x^2 + x + s + 1 = 0.$$

이다. C_2 위의 점은 x좌표로 결정되므로, 각 직선은 C_2와 많아야 두 점에서 만난다. 따라서 서로 다른 공통점이 네 개이려면 각 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가져야 하고, 두 판별식(discriminant)이 모두 양수이어야 한다.

$$1 - 4s > 0 \quad \text{그리고} \quad 1 - 4(s+1) > 0.$$

두 번째 부등식에서 요구한 대로 $s < -\frac{3}{4}$를 얻는다. (그러면 첫 번째 부등식 $s < \frac{1}{4}$는 저절로 성립한다.)

> **생각해 보기** 소문항 (iv)에서 C_2와 $L_1 \cup L_2$ 위에 있는 네 점을 찾는 것만으로는 왜 충분하지 않을까?

소문항 (ii)는 C_1과 C_2의 공통점이 두 직선 위에 있다는 것만 보였다. 역방향도 필요하고, 네 점이 서로 겹치지 않는다는 것도 확인해야 한다.

소문항 (iv)

$s < -\frac{3}{4}$라고 하자. 그러면 위의 두 판별식이 모두 양수이므로($-3 - 4s > 0$, 그리고 $1 - 4s > 4 > 0$), L_1은 C_2와 서로 다른 두 점에서 만나고 L_2도 마찬가지이다.

이 네 점은 서로 다르다. 두 번 세어진 점이 있다면 그 점은 L_1과 L_2 위에 동시에 있어야 한다. 두 직선은 $x - s = -x - s - 1$인 곳, 즉 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} - s\right)$에서 만난다. 이 점이 C_2 위에 있으려

면 $-\frac{1}{2} - s = \frac{1}{4}$, 즉 $s = -\frac{3}{4}$이어야 하는데, 이 경우는 제외되었다. 따라서 서로 다른 네 점을 얻는다.

각 점은 C_1 위에 있다. 각 점에서 $y - x^2 = 0$이고(C_2 위에 있으므로), 소문항 (ii)의 $k = 1$일 때의 방정식이 성립한다(L_1 또는 L_2 위에 있으므로). 두 식을 빼면

$$y^2 + 2sy + s(s+1) - x = 0,$$

이고, 이것은 C_1의 방정식이다.

따라서 C_1과 C_2는 서로 다른 공통점을 적어도 네 개 가진다. 소문항 (iii)의 논증에 의해 네 개보다 많을 수는 없다. 그러므로 두 곡선은 정확히 서로 다른 네 점에서 만난다.

검산

- $y = x^2$을 C_1에 대입하면 사차방정식 $x^4 + 2sx^2 - x + s^2 + s = 0$을 얻는다. $(x^2 - x + s)(x^2 + x + s + 1)$을 전개하면 정확히 이 식이 나오므로, 두 직선이 맞음을 확인할 수 있다.
- $s = -2$일 때 네 점은 $(2,4)$, $(-1,1)$, 그리고 $\left(\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5}), \frac{1}{2}(3 \mp \sqrt{5})\right)$이다. 각 점은 $x = (y-2)^2 - 2$를 만족한다. 예를 들어 $(2,4)$: $(4-2)^2 - 2 = 2$.
- 경계인 $s = -\frac{3}{4}$에서 두 이차방정식은 $x^2 - x - \frac{3}{4} = 0$(근 $\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$)과 $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 0$이므로, 서로 다른 공통점은 두 개뿐이고 $x = -\frac{1}{2}$는 두 직선이 공유한다. 컴퓨터로 사차방정식의 실근 개수를 세어 보면 $s = -0.76, -1, -2$일 때 4개, $s = -0.74, -0.5$일 때 2개였다.

흔한 실수

- 소문항 (i)에서 "이면" 방향만 증명하는 것. 두 직선이면 반드시 $p^2 - q^2 = 4r$이어야 하며, 이를 위한 논증(위의 것과 같은)이 필요하다.
- 소문항 (iv)에서 두 직선이 C_2 위의 점을 공유하지 않는지 확인하는 것을 잊거나, 찾은 점들이 실제로 C_1 위에 있음을 보이는 것을 잊는 것.

STEP 너머

$F + kG = 0$ 꼴의 곡선족을 **원뿔곡선 다발**(pencil of conics)이라 한다. 이 곡선족의 모든 곡선은 $F = 0$과 $G = 0$의 공통점을 지난다. 곡선족의 원소가 퇴화(degenerate)되도록(즉 두 직선이 되도록) k를 고르는 것은 두 원뿔곡선(conic)의 교점을 구하는 고전적인 방법이다. 사영기하학(projective geometry)에서는 3×3 행렬식(determinant)이 0이 되게 하여 이를 수행하며, 그러면 k에 대한 삼차방정식이 나온다. 여기서는 마침 s의 값에 관계없

이 $k = 1$일 때 다발이 퇴화되었다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 원뿔곡선 뒤에 숨어 있는 대칭행렬(symmetric matrix)을 다룬다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에는 이와 같은 취지의 문제가 더 있다.

풀이

STEP III 2024, 문제 9

역학 • 비스듬한 충돌

STEP III 2024, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2024년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

핵심 아이디어

모든 일은 탁자 평면 위에서 일어나므로 위에서 내려다보자. 그러면 각 구는 가장 낮은 점을 중심으로 하는 반지름 r인 원이 된다. 매끄러운(smooth) 구에서는 충격량(impulse)이 중심선(line of centres)을 따라 작용하므로, 속도를 그 직선 방향 성분(운동량 보존과 반발 법칙이 적용되는 성분)과 그에 수직인 성분(변하지 않는 성분)으로 나눈다. 그 뒤 B는 직선 위를 움직이므로, B가 C와 충돌하는지는 점과 직선 사이의 거리에 관한 문제가 된다.

풀이

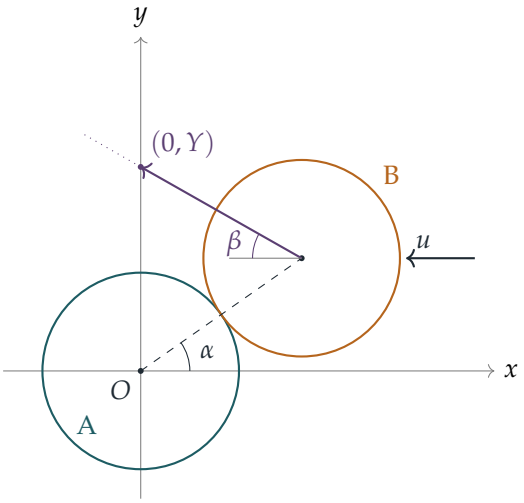
구들은 매끄럽고 질량이 같으며, 매끄러운 탁자 위에 놓여 있다고 모형화한다. 따라서 어디에도 마찰이 없고, 각 구는 충돌하는 순간을 제외하면 일정한 속력으로 직선 운동을 한다. 구의 가장 낮은 점을 가지고 계산하는데, 이 점은 수평 방향으로 중심과 똑같이 움직인다. 반지름 r인 두 구는 가장 낮은 점 사이의 거리가 $2r$일 때 접한다.

소문항 (i)

B의 가장 낮은 점은 직선 $y = 2r\sin\alpha$ 위를 움직인다. 이 점이 O로부터 거리 $2r$에 있을 때, 즉 점 $(2r\cos\alpha,\ 2r\sin\alpha)$에서 B는 A와 접한다(B가 x의 큰 양수 쪽에서 오므로 양의 x좌표를 택한다). 따라서 충돌 순간 A에서 B로 향하는 중심선의 단위벡터(unit vector)는

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}, \qquad \text{이고} \qquad \mathbf{t} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

는 이에 수직이다.



충돌 전 B의 속도는 $\begin{pmatrix} -u \\ 0 \end{pmatrix}$이고, **n** 방향 성분은 $-u\cos\alpha$, **t** 방향 성분은 $u\sin\alpha$이다. A는 정지해 있다.

구들이 매끄러우므로 두 구 사이의 충격량은 **n** 방향이다. 따라서 B의 **t** 방향 성분은 $u\sin\alpha$로 유지된다(그리고 A는 **t** 방향 성분을 얻지 않는다). 충돌 후 **n** 방향 성분을 각각 v_A와 v_B라 하자. **n** 방향의 운동량 보존(conservation of momentum)(질량이 같음)과 뉴턴의 반발 법칙(Newton's law of restitution)에 의해

$$\begin{aligned} v_A + v_B &= -u\cos\alpha, \\ v_B - v_A &= \tfrac{1}{3}\big(0 - (-u\cos\alpha)\big) = \tfrac{1}{3}u\cos\alpha. \end{aligned}$$

이다. (**n** 방향으로 접근하는 속력은 $u\cos\alpha$이고, **n**의 양의 방향 쪽에 있는 B가 A로부터 멀어진다.) 두 식을 더하면 $v_B = -\frac{1}{3}u\cos\alpha$이고, $v_A = -\frac{2}{3}u\cos\alpha$이다.

따라서 충돌 후 B의 속도는

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{3}u\cos\alpha \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} + u\sin\alpha \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}u(\cos^2\alpha + 3\sin^2\alpha) \\ \frac{2}{3}u\sin\alpha\cos\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}u(1 + 2\sin^2\alpha) \\ \frac{2}{3}u\sin\alpha\cos\alpha \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

이다. 여기서 $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$를 이용했다. 이것이 구하려던 결과이다.

소문항 (ii)

두 성분은 모두 0이 아니며, α가 예각(acute angle)이므로 x성분은 음수, y성분은 양수이다. 따라서 B는 이제 왼쪽 위로 움직이고, 그 경로의 기울기(gradient)의 크기는

$$\frac{\frac{2}{3}u\sin\alpha\cos\alpha}{\frac{1}{3}u(1+2\sin^2\alpha)} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1+2\sin^2\alpha} = \tan\beta,$$

이다. 여기서 β는 경로가 x축의 음의 방향과 이루는 예각이다. B의 가장 낮은 점은 $(2r\cos\alpha, 2r\sin\alpha)$에서 출발한다. y축에 도달하려면 x가 $2r\cos\alpha$만큼 줄어야 하고, 그동안 y는 $2r\cos\alpha\tan\beta$만큼 늘어난다. 따라서 B는 y축과 $(0, Y)$에서 만나며

$$Y = 2r\sin\alpha + 2r\cos\alpha\tan\beta = 2r(\cos\alpha\tan\beta + \sin\alpha),$$

이므로 원하는 결과가 나온다.

소문항 (iii)

충돌 후 B는 $(0, Y)$를 지나고 단위 방향벡터가 $\mathbf{d} = (-\cos\beta, \sin\beta)$인 직선 ℓ을 따라 일정한 속력으로 직선 운동을 한다. C는 무언가에 부딪힐 때까지 $(0, h)$에 정지해 있다. B가 C와 충돌하는 것은 정확히 $(0, h)$에서 B의 경로까지의 거리가 $2r$보다 작아질 때이다.

$(0, h)$에서 ℓ까지의 수직 거리(perpendicular distance)는 $(0, h) - (0, Y) = (0, h - Y)$의 $\mathbf{d}$에 수직인 성분의 크기이다. ℓ의 단위 법선벡터(unit normal)는 $(\sin\beta, \cos\beta)$이므로 이 거리는

$$\left|(0,\, h - Y)\cdot(\sin\beta, \cos\beta)\right| = |h - Y|\cos\beta,$$

이다. β가 예각이므로 $\cos\beta > 0$이기 때문이다. $h > Y + 2r\sec\beta$이면 $h - Y > 2r\sec\beta > 0$이고, 거리는 $(h - Y)\cos\beta > 2r$이다. 직선 전체에서 가장 가까운 점뿐 아니라 B의 경로 위의 모든 점이 C의 가장 낮은 점으로부터 적어도 이만큼 떨어져 있다. 따라서 B는 C에 $2r$ 이내로 다가가지 않으며 C와 충돌하지 않는다.

(다른 방해물도 없다. A는 속도 $-\frac{2}{3}u\cos\alpha\,\mathbf{n}$으로 $y < 0$ 영역으로 움직여 B와 C 모두에서 멀어진다.)

> **생각해 보기** 소문항 (iv)는 $Y < 2r\sec\beta$를 증명하라고 한다. 이를 하나의 삼각함수 사실로 바꿀 수 있을까?

그렇다. 양변에 $\cos\beta > 0$를 곱하면 좌변이 덧셈정리(compound-angle formula)의 형태가 된다.

소문항 (iv)

$2r$로 나누고 $\cos\beta > 0$를 곱하면, 부등식 $Y < 2r\sec\beta$는

$$\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta < 1, \qquad \text{즉,} \qquad \sin(\alpha+\beta) < 1.$$

과 동치이다. 물론 $\sin(\alpha+\beta) \le 1$이고, $0 < \alpha+\beta < \pi$이므로 등호는 $\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$일 때만 성립한다. 그러면 $\tan\beta = \cot\alpha$, 즉

$$\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1+2\sin^2\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \iff 2\sin^2\alpha = 1 + 2\sin^2\alpha$$

($\cos\alpha \neq 0$으로 나눔)이어야 하는데, 이는 불가능하다. 따라서 $\sin(\alpha+\beta) < 1$이고, $Y < 2r\sec\beta$이다.

따라서. 이제

$$Y + 2r\sec\beta < 4r\sec\beta,$$

이므로, 모든 예각 α에 대한 $\sec\beta$의 상계, 즉 $\tan\beta$의 상계가 필요하다. 분자와 분모를 $\cos^2\alpha$로 나누고 $t = \tan\alpha > 0$라 두면

$$\tan\beta = \frac{2\tan\alpha}{\sec^2\alpha + 2\tan^2\alpha} = \frac{2t}{1+3t^2} \le \frac{2t}{2\sqrt{3}\,t} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

이다. 이는 산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality) $1 + 3t^2 \ge 2\sqrt{3}\,t$에 의한 것이다(등호는 $t = 1/\sqrt{3}$, 즉 $\alpha = \frac{\pi}{6}$일 때 성립한다). 따라서 $0 < \beta \le \frac{\pi}{6}$이고, $\sec\beta \le \sec\frac{\pi}{6} = \frac{2}{\sqrt{3}}$이다. 그러므로 모든 예각 α에 대하여

$$Y + 2r\sec\beta < 4r\sec\beta \le \frac{8r}{\sqrt{3}}.$$

이다. $h > \dfrac{8r}{\sqrt{3}}$이면 $h > Y + 2r\sec\beta$이므로, 소문항 (iii)에 의해 α의 값과 관계없이 B는 C와 충돌하지 않는다.

검산

- 운동량: A의 속도 $-\frac{2}{3}u\cos\alpha\,(\cos\alpha, \sin\alpha)$와 소문항 (i)에서 구한 B의 속도를 더하면 $(-u, 0)$이 되어, 질량이 같을 때 당연히 그래야 하는 결과와 일치한다.
- $\alpha = 0$(정면 충돌)일 때 공식은 B의 속도로 $(-\frac{1}{3}u, 0)$을 주고, A는 $(-\frac{2}{3}u, 0)$을 얻는다. 이는 질량이 같고 $e = \frac{1}{3}$인 경우의 익숙한 일차원 답이다.
- $\alpha = \frac{\pi}{6}$이면 $\tan\beta = 1/\sqrt{3}$이므로 $\beta = \frac{\pi}{6}$, $\alpha+\beta = \frac{\pi}{3}$이고 $Y = 2r(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}) = 2r$로, $2r\sec\beta = 4r/\sqrt{3} \approx 2.31r$보다 충분히 작다. 이때 $Y + 2r\sec\beta \approx 4.31r$로, $8r/\sqrt{3} \approx 4.62r$보다 작다.

- 무작위로 고른 α 값 20,000개에 대하여, B의 직선 경로를 단계별로 따라가면 위의 교점 Y가 나오는 것, $h = Y + 2r\sec\beta$보다 조금 크면 B가 C를 비껴가고 조금 작으면 충돌하는 것, 그리고 $\sec\beta$의 최댓값이 $1.1547\ldots = 2/\sqrt{3}$인 것을 컴퓨터로 확인했다.

흔한 실수

- 중심선 방향 성분 대신 x성분에 반발 법칙을 적용하는 것. 매끄러운 구 사이의 충격량은 중심선을 따라 작용하며, 여기서 중심선은 x축과 각 α를 이룬다.
- 충돌 순간의 중심선을 x축이나 y축 방향으로 잡는 것. 접점은 두 구의 거리가 $2r$이라는 조건으로 정해진다.
- 소문항 (iii)에서 C의 가장 낮은 점이 경로 전체가 아니라 한 점 $(0, Y)$로부터 $2r$ 이내에 있는지를 확인하는 것.

STEP 너머

속도를 선택한 단위벡터 방향 성분과 그에 수직인 성분으로 나누는 것은 정규직교기저(orthonormal basis)로의 사영(projection)이며, 이 아이디어는 대학 1학년 선형대수학(linear algebra)과 역학(mechanics) 전반에 걸쳐 나온다. 매끄러운 구의 비스듬한 충돌(oblique collision)은 산란(scattering)의 첫 번째 모형으로, 물리학자들은 이를 이용해 기체와 입자 충돌을 연구한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 벡터 접근법으로 이차원 충돌을 다룬다.

풀이

STEP III 2024, 문제 10

역학 • 넘어짐과 미끄러짐

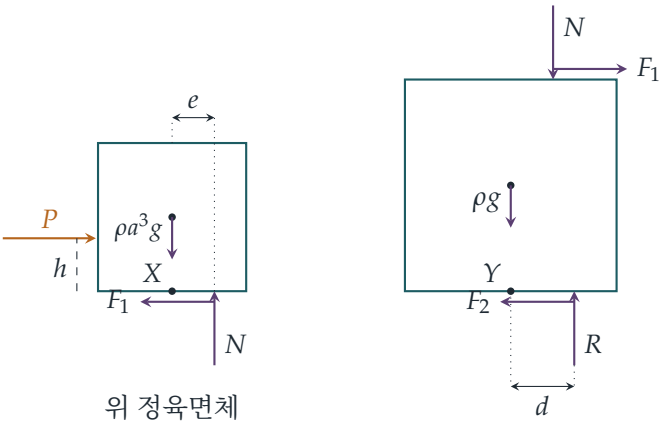
> **STEP III 2024, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2024년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

핵심 아이디어

모든 소문항은 평형(equilibrium)이 깨지는 네 가지 방식을 비교하는 문제이다. 위 정육면체가 미끄러지거나, 아래 정육면체가 미끄러지거나, 위 정육면체가 넘어지거나(topple), 두 정육면체가 함께 넘어지는 경우이다. 각각은 P의 고유한 임계값에서 일어나며, P가 0에서부터 커질 때 가장 작은 임계값을 가진 경우가 먼저 일어난다. 알맞은 점에 대해 모멘트(moment)를 잡으면, 즉 전체 계에 대해서는 Y, 위 정육면체만에 대해서는 X를 잡으면, 소문항 (i)의 수직항력(normal reaction)의 작용 위치를 아주 적은 노력으로 얻을 수 있다. 그리고 넘어짐은 이 수직항력 중 하나가 그것이 작용하는 면의 모서리에 도달할 때 시작된다.

풀이

두 정육면체를 강체(rigid body)로 모형화한다. 아래 정육면체의 질량은 ρ이고 위 정육면체의 질량은 ρa^3이다. P는 오른쪽으로 수평하게 작용하고, 아래 정육면체의 윗면으로부터 높이 h, 즉 지면으로부터 높이 $1+h$인 곳에 작용한다고 하자. P가 수평이므로, 임의의 점에 대한 P의 모멘트는 높이에만 의존하고 면 위의 어느 지점에 작용하는지와는 무관하다.



여기서 N과 F_1은 두 정육면체 사이의 수직항력과 마찰력(friction)이며(뉴턴(Newton)의 제3법칙에 따라 각 정육면체에 표시하였다), X로부터 거리 e인 곳에 작용한다. R와 F_2는 지면이 주는 수직항력과 마찰력이며, Y로부터 거리 d인 곳에 작용한다.

소문항 (i)

전체 계. 외력은 P, 두 무게, R, F_2뿐이다. 힘을 성분으로 분해하면

$$F_2 = P, \qquad R = \rho g + \rho a^3 g = (1 + a^3)\rho g.$$

Y에 대한 모멘트를 잡는다. 두 무게는 모두 Y를 지나는 연직선을 따라 작용하고(각 질량중심(centre of mass)이 Y의 바로 위에 있다), F_2는 Y를 지나는 지면을 따라 작용하므로, 이들의 모멘트는 모두 0이다. 남는 것은 높이 $1 + h$에 작용하는 P와, 이와 평형을 이루는 거리 d의 R이다.

$$R\,d = P(1 + h) \quad \Longrightarrow \quad d = \frac{P(1 + h)}{(1 + a^3)\rho g},$$

이 거리는 Y로부터 P의 방향으로 잰 것이다. 이것이 구하려던 결과이다.

위 정육면체만. 힘을 분해하면 $F_1 = P$, $N = \rho a^3 g$이다. X에 대한 모멘트를 잡으면 무게와 F_1의 모멘트는 0이므로 $Ne = Ph$이고

$$e = \frac{Ph}{\rho a^3 g},$$

이 거리 역시 X로부터 P의 방향으로 잰 것이다.

소문항 (ii)

아무것도 움직이지 않는 동안, 마찰력은 두 정육면체 사이에서 $F_1 = P$, 지면에서 $F_2 = P$이다. 어떤 접촉면에서 필요한 마찰력이 수직항력의 μ배를 넘으면 그곳에서 미끄러

짐(slipping)이 일어나므로

$$\text{위 정육면체가 아래 정육면체 위에서 미끄러지는 조건: } P > \mu\rho a^3 g,$$
$$\text{아래 정육면체가 지면 위에서 미끄러지는 조건: } P > \mu(1+a^3)\rho g.$$

$a^3 < 1 + a^3$이므로 첫 번째 임계값이 항상 더 작다. P가 0에서부터 커질 때(넘어짐이 끼어들지 않는다면), 위 정육면체가 먼저 한계에 도달하여 미끄러지기 시작하고, 이때 지면의 마찰력은 아직 한계에 한참 못 미친다. 위 정육면체가 미끄러지기 시작한 뒤 그것이 아래 정육면체에 가하는 마찰력은 $\mu\rho a^3 g$이며, 이는 지면이 제공할 수 있는 $\mu(1+a^3)\rho g$보다 여전히 작으므로 아래 정육면체는 그대로 있다. 따라서 평형은 아래 정육면체의 미끄러짐이 아니라 위 정육면체의 미끄러짐으로 깨진다.

소문항 (iii)

평평한 면 위에 놓인 물체는 그 물체에 작용하는 수직항력이 면의 모서리에 도달할 때 막 넘어지려 한다. 위 정육면체 밑면의 반너비는 $\frac{1}{2}a$이고 아래 정육면체 밑면의 반너비는 $\frac{1}{2}$이다. 따라서 모든 힘을 ρg 단위로 재면, P의 네 임계값은 다음과 같다.

$$P_{\text{미끄럼}} = \mu a^3 \text{ (위와 아래 사이)}, \qquad P_{\text{지면}} = \mu(1+a^3),$$
$$P_{\text{위}} = \frac{a^4}{2h} \ (e = \tfrac{1}{2}a\text{에서}), \qquad P_{\text{함께}} = \frac{1+a^3}{2(1+h)} \ (d = \tfrac{1}{2}\text{에서}).$$

아래 정육면체가 넘어지면 위 정육면체도 함께 넘어지므로, $d = \frac{1}{2}$는 두 정육면체가 함께 넘어짐을 뜻한다.

이제 $a = 1$로 두면 $P_{\text{미끄럼}} = \mu$, $P_{\text{위}} = \frac{1}{2h}$, $P_{\text{함께}} = \frac{1}{1+h}$이다. 소문항 (ii)에 따라 $P_{\text{지면}}$은 무시해도 된다.

> ? **생각해 보기** 위 정육면체가 혼자 넘어지는 경우를 걱정해야 할까?

그럴 필요는 없지만 반드시 확인해야 한다. $h < a = 1$이므로 $2h < 1 + h$이고, 따라서

$$P_{\text{위}} = \frac{1}{2h} > \frac{1}{1+h} = P_{\text{함께}}.$$

위 정육면체가 혼자 넘어지기 전에 두 정육면체가 함께 넘어진다. 그러므로 경쟁은 $P_{\text{미끄럼}} = \mu$와 $P_{\text{함께}} = 1/(1+h)$ 사이에서만 일어난다.

- $\mu(1+h) < 1$이면 $\mu < \frac{1}{1+h}$이므로 미끄러짐의 임계값에 먼저 도달하여, 위 정육면체가 아래 정육면체 위에서 미끄러진다.
- $\mu(1+h) > 1$이면 $\frac{1}{1+h} < \mu$이므로 넘어짐의 임계값에 먼저 도달하여, 두 정육면체가 함께 넘어진다.

소문항 (iv)

미끄러짐이 일어나지 않는다면 경쟁은 $P_{\text{위}}$와 $P_{\text{함께}}$ 사이에서 일어난다. 위 정육면체가 먼저 넘어질 필요충분조건은

$$\frac{a^4}{2h} < \frac{1+a^3}{2(1+h)} \iff a^4(1+h) < h(1+a^3) \iff a^4 < h\big(1+a^3-a^4\big) = h\big(1+a^3(1-a)\big),$$

이다. 여기서 양변에 양수 $2h(1+h)$를 곱하였다. 이것이 바로 주어진 조건이므로, 이 조건 아래에서 평형은 위 정육면체가 넘어짐으로써 깨진다.

소문항 (v)

$a = \frac{1}{2}$일 때 세 가지가 필요하다.

- (iv)의 조건: $h\big(1+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\big) > \frac{1}{16}$, 즉 $\frac{17}{16}h > \frac{1}{16}$이므로 $h > \frac{1}{17}$이다.
- 문제의 설정에 따라 $h < a = \frac{1}{2}$이어야 한다.
- 넘어지기 전에 미끄러지지 않아야 한다: $P_{\text{위}} < P_{\text{미끄럼}}$, 즉 $\dfrac{1/16}{2h} < \dfrac{\mu}{8}$, 다시 말해 $\mu > \dfrac{1}{4h}$이다. ((ii)에 따라 지면에서의 미끄러짐은 결코 먼저 일어나지 않는다.) 또한 $\mu < 1$이어야 하므로 $h > \frac{1}{4}$이어야 한다.

따라서 $\frac{1}{4} < h < \frac{1}{2}$와 $h > \frac{1}{17}$을 만족하는 $h = \frac{2}{5}$를 택한다. 그러면 $\frac{5}{8} < \mu < 1$이어야 하므로 $\mu = \frac{3}{4}$로 잡는다. 이때 임계값(ρg 단위)은

$$P_{\text{위}} = \tfrac{5}{64} \approx 0.078, \quad P_{\text{미끄럼}} = \tfrac{3}{32} \approx 0.094, \quad P_{\text{함께}} = \tfrac{45}{112} \approx 0.402, \quad P_{\text{지면}} = \tfrac{27}{32} \approx 0.844.$$

가장 작은 값은 $P_{\text{위}}$이므로, P가 커질 때 어떤 미끄러짐보다 먼저 위 정육면체가 넘어진다. 즉 (iv)의 상황이 실제로 일어난다.

검산

- $P \to 0$이면 d와 e 모두 0으로 수렴한다. 미는 힘이 없으면 각 수직항력이 질량중심의 바로 아래에 작용하므로 당연한 결과이다.
- 아래 정육면체만에 대해 모멘트를 잡으면(무게, 거리 d에 작용하는 R와 F_2, 그리고 X로부터 거리 e에 반대 방향으로 작용하는 N과 F_1) $Rd = Ne + F_1 \cdot 1$을 얻고, 이는 $P(1+h) = Ph + P$이다. 따라서 (i)의 두 답은 서로 일관된다.
- $a = \frac{1}{2}$, $h = \frac{2}{5}$, $\mu = \frac{3}{4}$에 대해 위의 네 임계값을 정확히 계산하였고, (ii)–(iv)의 비교는 a, h, μ를 무작위로 여러 번 골라 컴퓨터로 확인하였다.

흔한 실수

- (iii)에서 미끄러짐과 두 정육면체가 함께 넘어지는 경우만 비교하고, 위 정육면체가 먼저 넘어질 수 없음을 보이지 않는 실수.
- 위 정육면체에 대해 지면 위의 점을 기준으로 모멘트를 잡아, 접촉면의 마찰력 F_1이 식에 끼어들게 하는 실수. X에 대한 모멘트를 잡으면 이를 피할 수 있다.
- 전체 계의 모멘트 방정식에서 지면으로부터 P의 높이로 $1+h$ 대신 h를 쓰는 실수.

STEP 너머

여기서 각각의 평형 붕괴 방식은 힘에 대한 하나의 부등식이며, 평형은 이 부등식이 모두 동시에 성립하는 동안 유지된다. 가장 먼저 깨지는 것은 임계값이 가장 작은 부등식이다. 이처럼 여러 선형 제약 조건 가운데 "활성화되는(binding)" 하나가 있다는 생각은 공학에서 석조 구조물이나 쌓아 올린 구조물에 쓰이는 극한 해석(limit analysis)의 핵심이며, 더 넓게는 선형계획법(linear programming)의 핵심이기도 하다. 마찰, 토크, 강체의 정역학을 꼼꼼하게 다룬 책으로는 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 참고하라.

풀이

STEP III 2024, 문제 11

확률과 통계 • 이항분포의 기댓값

STEP III 2024, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2024년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

핵심 아이디어

(i)의 항등식(identity)은 합의 아래쪽 절반에 있는 각 항 $r\binom{2n}{r}$를 위쪽 절반의 한 항과 짝짓는다. 이 대칭성이 바로 X를 다루는 데 필요한 것이다. 앞면과 뒷면 중 더 많은 쪽의 개수는 앞면의 개수이거나 뒷면의 개수이고, 앞면과 뒷면의 역할을 바꾸면 기댓값(expectation)이 합의 위쪽 절반으로 접힌다. 그다음 (iii)은 비(ratio) 판정이고, (iv)는 한 줄이면 충분하다.

풀이

소문항 (i)

$1 \le r \le 2n$일 때, r를 $r!$과 약분하면

$$r\binom{2n}{r} = \frac{r\,(2n)!}{r!\,(2n-r)!} = \frac{(2n)!}{(r-1)!\,(2n-r)!}.$$

다른 쪽에서는 $2n-(2n+1-r) = r-1$이므로

$$(2n+1-r)\binom{2n}{2n+1-r} = \frac{(2n+1-r)\,(2n)!}{(2n+1-r)!\,(r-1)!} = \frac{(2n)!}{(2n-r)!\,(r-1)!},$$

이고, 여기서도 분자의 인수를 계승(factorial)과 약분하였다. ($2n+1-r$가 1과 $2n$ 사이에 있어서 두 계승이 모두 의미를 가지려면 $1 \le r \le 2n$이어야 한다.) 두 식이 일치하므로 항등식이 성립한다.

합에서 $r = 0$인 항은 0이다. 나머지를 $1 \le r \le n$인 부분과 $n+1 \le r \le 2n$인 부분으로 나눈다. 아래쪽 부분에서 $s = 2n+1-r$로 놓는다. r가 1부터 n까지 변할 때 s는 $2n$부터 $n+1$까

지 내려가며 변하고, 항등식에 의하여

$$\sum_{r=1}^{n} r\binom{2n}{r} = \sum_{r=1}^{n} (2n+1-r)\binom{2n}{2n+1-r} = \sum_{s=n+1}^{2n} s\binom{2n}{s}.$$

따라서 아래쪽 부분은 위쪽 부분과 같고,

$$\sum_{r=0}^{2n} r\binom{2n}{r} = 2\sum_{r=n+1}^{2n} r\binom{2n}{r},$$

이므로 증명이 끝난다.

소문항 (ii)

앞면의 개수를 H라 하면 $H \sim \mathrm{B}(2n, \frac{1}{2})$이고 $\mathrm{P}(H=r) = \binom{2n}{r}/2^{2n}$이다. 뒷면의 개수는 $2n-H$이므로 $X = \max(H, 2n-H)$이다. 즉 $H \geq n+1$이면 $X = H$, $H = n$이면 $X = n$, $H \leq n-1$이면 $X = 2n-H$이다. 따라서

$$2^{2n}\,\mathrm{E}(X) = \sum_{r=n+1}^{2n} r\binom{2n}{r} + n\binom{2n}{n} + \sum_{r=0}^{n-1}(2n-r)\binom{2n}{r}.$$

마지막 합에서 $s = 2n-r$로 놓으면 s는 $2n$부터 $n+1$까지 내려가며 변한다. $\binom{2n}{r} = \binom{2n}{2n-r}$이므로 이 합은 $\sum_{s=n+1}^{2n} s\binom{2n}{s}$가 되어 첫 번째 합과 같다. (이것이 앞면과 뒷면의 대칭성이다. 뒷면이 s개 나올 확률은 앞면이 s개 나올 확률과 같다.)

> ? **생각해 보기** 범위의 절반에서만 더하는 $\sum_{r=n+1}^{2n} r\binom{2n}{r}$를 어떻게 계산할 것인가?

바로 이것을 위해 소문항 (i)이 있다. 전체 범위에 대한 합은 주어져 있다. n 자리에 $2n$을 넣으면 $\sum_{r=0}^{2n} r\binom{2n}{r} = 2n\cdot 2^{2n-1}$이다. 따라서 (i)에 의하여

$$2\sum_{r=n+1}^{2n} r\binom{2n}{r} = 2n\cdot 2^{2n-1} = n\,2^{2n}.$$

그러므로

$$2^{2n}\,\mathrm{E}(X) = n\,2^{2n} + n\binom{2n}{n}, \qquad \text{따라서} \qquad \mathrm{E}(X) = n\left(1 + \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}\right),$$

이므로 증명이 끝난다.

소문항 (iii)

$a_n = \binom{2n}{n}/2^{2n}$으로 놓으면 a_n은 양수이다. 그러면

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(n+1)!}\cdot\frac{n!\,n!}{(2n)!}\cdot\frac{1}{4} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2n+2},$$

이고, 여기서 $2n+2 = 2(n+1)$을 이용하였다. 이 비는 1보다 작고 $a_n > 0$이므로 모든 $n \geq 1$에 대하여 $a_{n+1} < a_n$이다. 따라서 이 수열(sequence)은 순감소(strictly decreasing)한다.

소문항 (iv)

받는 상금은 정확히 소문항 (ii)의 X이고 £n을 내므로, 낸 1파운드당 상금의 기댓값은

$$\frac{\mathrm{E}(X)}{n} = 1 + \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} = 1 + a_n.$$

(iii)에 의하여 a_n은 n이 가장 작을 때 가장 크므로 $n = 1$을 골라야 한다. 그러면 낸 1파운드당 $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$파운드를 돌려받으므로, 1파운드당 기대 이익은 50펜스(50p)이다. ("상금"이 이익을 뜻한다면 $\mathrm{E}(X)/n - 1 = a_n$이고, 결론은 같다.)

검산

- $n = 1$(두 번 던지기)일 때, HH나 TT이면 $X = 2$이고 HT나 TH이면 $X = 1$이므로 $\mathrm{E}(X) = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}$이다. 공식으로 구하면 $1 \cdot (1 + \frac{2}{4}) = \frac{3}{2}$이다.
- $n = 2$일 때 공식은 $2(1 + \frac{6}{16}) = \frac{11}{4}$을 주므로, 1파운드당 돌려받는 금액은 $\frac{11}{8} = 1.375 < 1.5$이다. $n = 3$일 때는 $\frac{21}{16} = 1.3125$로, (iii)이 예측한 대로 계속 감소한다.
- $n \leq 5$에 대하여 가능한 2^{2n}가지 던지기 결과를 모두 컴퓨터로 확인하여 $\mathrm{E}(X)$의 공식을 검증하였다.

흔한 실수

- $H = n$인 항을 두 번 세거나 아예 세지 않는 것. 이 항은 나눈 두 부분 어디에도 속하지 않으며 $n\binom{2n}{n}$을 한 번만 더한다.
- (iv)에서 낸 1파운드당 $\mathrm{E}(X)$가 아니라, 한없이 커지는 $\mathrm{E}(X)$ 자체를 최대화하려는 것.

STEP 너머

초과분 $\mathrm{E}(X) - n = na_n$은 단순 무작위 행보(simple random walk)가 출발점에서 떨어진 거리의 기댓값의 절반이다. 스털링 공식(Stirling's formula)에 의하여 $a_n \approx 1/\sqrt{\pi n}$이므로, 이 초과분은 $\sqrt{n/\pi}$처럼 커진다. 즉 앞면과 뒷면 개수의 전형적인 차이는 던진 횟수의 제곱근처럼 커진다. 한편 1파운드당 초과분 a_n은 0으로 수렴(converge)하는데, 이것이 바로 큰 수의 법칙(law of large numbers)이 작동하는 모습이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문서)에서 무작위 행보와 이러한 극한을 다룬다.

풀이

STEP III 2024, 문제 12

확률과 통계 • 기하학적 확률

STEP III 2024, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2024년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

핵심 아이디어

단위정사각형에서 균등하게(uniformly) 고른 점에 대하여, $\mathrm{P}(R \le r)$는 원점을 중심으로 하는 반지름 r인 원 안에 들어가는 정사각형 부분의 넓이일 뿐이다. $r > 1$이 되면 원이 정사각형의 두 변 밖으로 삐져나가고, 정사각형 안에 남은 영역은 두 개의 직각삼각형과 하나의 부채꼴(sector)로 깔끔하게 나뉜다. 기댓값(expectation)을 구하려면 미분하여 확률밀도함수(density)를 얻은 뒤 $rf(r)$를 적분한다. 부분적분(integration by parts)을 하면 다루기 까다로운 $\cos^{-1}$ 항이 사라지고, 쌍곡선 치환(hyperbolic substitution)으로 마무리한다.

풀이

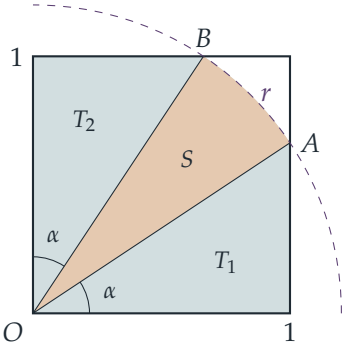
소문항 (i)

확률이 넓이와 같으므로, $\mathrm{P}(R \le r)$는 O로부터의 거리가 r 이하인 정사각형 위의 점들의 집합의 넓이이다.

$0 \le r \le 1$일 때 사분원 $x, y \ge 0$, $x^2 + y^2 \le r^2$이 정사각형 안에 완전히 들어가므로

$$\mathrm{P}(R \le r) = \tfrac{1}{4}\pi r^2 \qquad (0 \le r \le 1).$$

$1 \le r \le \sqrt{2}$일 때 원 $x^2 + y^2 = r^2$은 변 $x = 1$과 $A = \left(1, \sqrt{r^2 - 1}\right)$에서, 변 $y = 1$과 $B = \left(\sqrt{r^2 - 1}, 1\right)$에서 만난다. $0 \le \sqrt{r^2 - 1} \le 1$이므로 두 점 모두 정사각형 위에 있다. OA가 x축과 이루는 각을 α라 하면 $\cos\alpha = 1/r$, 즉 $\alpha = \cos^{-1}(r^{-1})$이다. $y = x$에 대한 대칭성에 의해 OB는 y축과 같은 각 α를 이룬다.



원 안에 있는 정사각형 부분은 다음으로 이루어진다.

- 꼭짓점이 O, $(1,0)$, A인 삼각형 T_1: $(1,0)$에서 직각이고 직각을 낀 두 변의 길이가 1과 $\sqrt{r^2-1}$이므로 넓이는 $\frac{1}{2}\sqrt{r^2-1}$이다.
- 꼭짓점이 O, $(0,1)$, B인 삼각형 T_2: T_1의 거울상이며 넓이 역시 $\frac{1}{2}\sqrt{r^2-1}$이다.
- OA와 OB 사이에 있는 반지름 r인 부채꼴 S: 중심각이 $\frac{\pi}{2}-2\alpha$이므로 넓이는 $\frac{1}{2}r^2\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=\frac{1}{4}\pi r^2-r^2\alpha$이다.

이들을 더하면

$$\mathrm{P}(R\le r)=\sqrt{r^2-1}+\tfrac{1}{4}\pi r^2-r^2\cos^{-1}(r^{-1})\qquad(1\le r\le\sqrt{2}),$$

이므로 요구된 결과를 얻는다. ($r=1$에서는 두 식 모두 $\frac{1}{4}\pi$를 주고, $r=\sqrt{2}$에서는 $1+\frac{1}{2}\pi-2\cdot\frac{\pi}{4}=1$이 되어 마땅히 그래야 하는 값이 나온다.)

소문항 (ii)

$F(r)=\mathrm{P}(R\le r)$라 쓰고, 확률밀도함수를 $f=F'$이라 하자. $0<r<1$에서 $f(r)=\frac{1}{2}\pi r$이다. $1<r<\sqrt{2}$에서는

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\cos^{-1}(r^{-1})=-\frac{1}{\sqrt{1-r^{-2}}}\cdot\left(-\frac{1}{r^2}\right)=\frac{1}{r\sqrt{r^2-1}},$$

가 필요하다. 여기서 $r>0$에 대하여 $\sqrt{1-r^{-2}}=\sqrt{r^2-1}/r$임을 이용하였다. 그러면 곱의 미분법(product rule)에 의해

$$\begin{aligned}f(r)&=\frac{r}{\sqrt{r^2-1}}+\tfrac{1}{2}\pi r-\left(2r\cos^{-1}(r^{-1})+\frac{r^2}{r\sqrt{r^2-1}}\right)\\&=\tfrac{1}{2}\pi r-2r\cos^{-1}(r^{-1}).\end{aligned}$$

두 $\dfrac{r}{\sqrt{r^2-1}}$ 항이 상쇄되는데, 이는 좋은 신호이다. 따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(R) &= \int_0^{\sqrt{2}} rf(r)\,\mathrm{d}r = \int_0^{\sqrt{2}} \tfrac{1}{2}\pi r^2\,\mathrm{d}r - 2\int_1^{\sqrt{2}} r^2\cos^{-1}(r^{-1})\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{\pi(\sqrt{2})^3}{6} - 2I = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{3} - 2I,\end{aligned}$$

이고, 여기서 $I = \displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} r^2\cos^{-1}(r^{-1})\,\mathrm{d}r$이다.

? **생각해 보기** I 안의 역코사인을 어떻게 없앨 수 있을까?

$\cos^{-1}(r^{-1})$을 미분하고(위에서 구했듯이 그 도함수는 대수적인 식이다) r^2을 적분하는 방식으로 부분적분한다.

$$\begin{aligned}I &= \Big[\tfrac{1}{3}r^3\cos^{-1}(r^{-1})\Big]_1^{\sqrt{2}} - \int_1^{\sqrt{2}} \frac{r^3}{3}\cdot\frac{1}{r\sqrt{r^2-1}}\,\mathrm{d}r \\ &= \tfrac{1}{3}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{4} - 0 - \frac{1}{3}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{r^2}{\sqrt{r^2-1}}\,\mathrm{d}r,\end{aligned}$$

여기서 $\cos^{-1}(1/\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4}$와 $\cos^{-1}1 = 0$을 이용하였다. (피적분함수는 $r=1$에서 유계가 아니지만, 그 근처에서 $1/\sqrt{2(r-1)}$처럼 행동하므로 적분은 수렴(converges)한다.) 그러므로

$$\mathrm{E}(R) = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{3} - \frac{\sqrt{2}\,\pi}{3} + \frac{2}{3}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{r^2}{\sqrt{r^2-1}}\,\mathrm{d}r = \frac{2}{3}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{r^2}{\sqrt{r^2-1}}\,\mathrm{d}r,$$

이고, 이것이 요구된 결과이다.

소문항 (iii)

$\sqrt{r^2-1}$을 보면 $r = \cosh t$로 치환하는 것이 떠오른다. 이때 $\mathrm{d}r = \sinh t\,\mathrm{d}t$이고 ($t \geq 0$이므로) $\sqrt{r^2-1} = \sinh t$이다. 적분 구간은 $t=0$과 $t=T$가 되는데, $\cosh T = \sqrt{2}$이므로 $\sinh T = 1$이고

$$T = \cosh^{-1}\sqrt{2} = \ln\big(\sqrt{2}+\sqrt{2-1}\big) = \ln\big(\sqrt{2}+1\big).$$

그러면

$$\begin{aligned}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{r^2}{\sqrt{r^2-1}}\,\mathrm{d}r &= \int_0^T \frac{\cosh^2 t}{\sinh t}\,\sinh t\,\mathrm{d}t = \int_0^T \tfrac{1}{2}(1+\cosh 2t)\,\mathrm{d}t \\ &= \Big[\tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{2}\sinh t\cosh t\Big]_0^T = \tfrac{1}{2}\ln\big(\sqrt{2}+1\big) + \tfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{2}.\end{aligned}$$

여기에 $\frac{2}{3}$을 곱하면

$$\mathrm{E}(R) = \tfrac{1}{3}\Big(\sqrt{2} + \ln\big(\sqrt{2}+1\big)\Big),$$

이므로 요구된 결과를 얻는다.

검산

- F는 $r = 1$에서 연속이고(두 식 모두 $\frac{\pi}{4} \approx 0.785$를 준다), 가장 먼 꼭짓점인 $r = \sqrt{2}$에서 1에 도달한다.
- 확률밀도함수 $\frac{1}{2}\pi r - 2r\cos^{-1}(r^{-1})$은 $r = \sqrt{2}$에서 0이며, 마땅히 그래야 한다. 그만큼 멀리 떨어진 점은 꼭짓점 하나뿐이기 때문이다.
- 수치적으로 $\mathrm{E}(R) = \frac{1}{3}(1.41421 + 0.88137) \approx 0.7652$이며, $\frac{1}{2}$과 $\sqrt{2}$ 사이에 있으므로 타당하다. 무작위 점 4×10^5개를 컴퓨터로 시뮬레이션한 결과 평균 거리는 약 0.766이었고, 경험적 분포함수(distribution function)는 여러 r 값에서 F와 0.002 이내로 일치하였다.

흔한 실수

- 부채꼴의 중심각을 $\frac{\pi}{2} - 2\alpha$ 대신 $\frac{\pi}{2} - \alpha$로 잡는 것: 두 변 **각각**에서 삼각형이 하나씩 잘려 나간다.
- $\cos^{-1}(r^{-1})$의 도함수의 부호를 틀리는 것: ($\cos^{-1}$과 r^{-1}에서 각각 나오는) 두 음의 부호가 상쇄되므로 도함수는 양수이다.

STEP 너머

이 문제는 기하 확률(geometric probability)을 처음 맛보는 것이다. 즉 단위정사각형의 한 꼭짓점에서 그 내부의 무작위 점까지의 평균 거리를 구한 것이다. 짝을 이루는 문제인, 단위정사각형 안의 **두** 무작위 점 사이의 평균 거리도 $\ln(1 + \sqrt{2})$를 포함하는 비슷하지만 더 복잡한 닫힌 형태의 답을 가지며, 이중적분(double integral)과 변수변환(change of variable)의 고전적인 연습 문제이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 기하학적으로 정의된 분포와 분포함수로부터 기댓값을 계산하는 방법을 다룬다.

Beyond STEP

STEP은 대부분의 학생이 학창 시절에 치르는 수학 시험 가운데 가장 어려운 시험이다. 또한 가장 훌륭한 시험 가운데 하나이기도 하다. 문제는 짧고 낯설며 깊이가 있고, 그중 가장 뛰어난 문제들은 대학 수학의 작은 조각이 모습을 감추고 있는 것이다.

이 책은 1987년 첫 시험에 앞서 나온 예시 시험지(specimen papers)부터 2025년 시험지까지 가운데 가장 흥미로운 STEP 문제들을 골라, 각 문제를 하나의 문으로 삼는다. 모든 문제는 뛰어난 학생이 풀어 가면서 던질 법한 질문들과 함께 꼼꼼하게 풀이하고, 그런 다음 책은 그 문을 지나 한 걸음 더 나아간다. 그 아이디어가 어디에서 왔는지, 대학에서는 무엇으로 발전하는지, 그리고 다음에는 무엇을 읽으면 좋은지를 살펴본다.

이 책은 STEP을 준비하면서 기출 문제 연습 이상의 것을 원하는 재능 있는 예비 수학자를 위해 쓰였다. 수학과 학부생처럼 생각하기 시작하고, 앞으로 무엇이 자신을 기다리고 있는지 알아보고 싶은 학생들을 위한 책이다.

- 순수수학(pure mathematics), 역학(mechanics), 확률(probability)과 통계(statistics)를 아우르는 13개의 장
- 이 36개의 STEP 기출 문제와 각 문제의 안내식 풀이
- 모든 문제 뒤에 숨은 대학 수학
- 답이 실린 후속 연습 문제와 더 읽을거리

2024년 풀이. 책 전체와 모든 장,
모든 풀이를 다음 주소에서 무료로 읽고, 내려받고, 공유할 수 있다.

beyondstep.keithmcnulty.org

본문은 퍼블릭 도메인(CC0 1.0)으로 공개한다. STEP 문제 © Cambridge University Press & Assessment.

