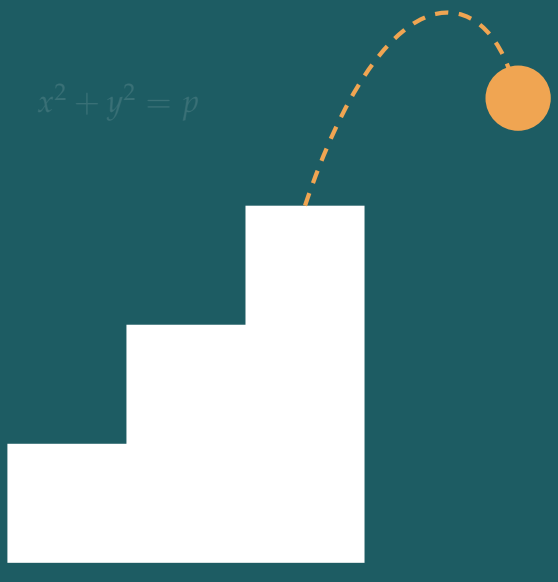
STEP 대비 · 대학 수학

Beyond STEP

STEP II 및 III

2023년 풀이



KEITH McNULTY

Beyond STEP

STEP 기출문제로 여는
대학 수학의 세계

STEP II 및 III

2023년 풀이

Keith McNulty

Beyond STEP: STEP 기출문제로 여는 대학 수학의 세계

2023년 풀이

2023년 STEP 문제지(STEP II 및 III)의 24개 문제 전체에 대한 풀이. 견본 문제지 이후 모든 STEP 문제의 풀이와 *Beyond STEP* 책 전체, 그리고 각 장을 `beyondstep.keithmcnulty.org`에서 무료로 읽고 내려받을 수 있다.

풀이를 읽기 전에 먼저 문제를 제대로 풀어 보자. 모든 답은 수치적으로 검증하였지만, 풀이가 이렇게 많으면 실수가 어느 정도 있을 수밖에 없다. 무언가 잘못된 것처럼 보이면 자신의 풀이를 믿고 꼼꼼히 확인해 보자.

영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.

2026년 11월 온라인 초판 발행.

이 PDF에서 지은이가 직접 만든 모든 것, 곧 본문, 풀이, 그림, 연습문제와 해답은 크리에이티브 커먼즈 CC0 1.0 Universal 라이선스에 따라 퍼블릭 도메인(public domain)으로 공개한다. 누구든 허락을 구하지 않고 어떤 목적으로든 복사하고, 고쳐 쓰고, 공유할 수 있다. 자세한 내용은 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`을 보라.

여기에서 다루는 STEP 문제의 저작권은 Cambridge University Press & Assessment에 있다. 문제는 이 책에 싣지 않았으며, 각 문제마다 공식 출처인 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스나 OCR의 기출 시험지로 가는 링크를 달았다.

오류 제보는 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty에 이슈로 남겨 주기 바란다.

차례

STEP II

Q1 치환적분 순수수학 . . . 3

Q2 삼각치환 순수수학 . . . 7

Q3 다항식과 도함수 순수수학 . . . 12

Q4 다항식에서 무리수 근호 없애기 순수수학 . . . 16

Q5 점화식과 수렴 순수수학 . . . 20

Q6 피보나치 행렬 항등식 순수수학 . . . 24

Q7 두 제곱수의 합 순수수학 . . . 28

Q8 3차원 벡터 순수수학 . . . 33

Q9 비탈면 위의 연결된 입자 역학 . . . 37

Q10 포물체 궤적의 포락선 역학 . . . 41

Q11 혼합분포 확률과 통계 . . . 46

Q12 최댓값의 분포 확률과 통계 . . . 50

STEP III

Q1 이차곡선의 접선 순수수학 . . . 54

Q2 극곡선으로 둘러싸인 넓이 순수수학 . . . 58

Q3 삼차방정식의 복소근 순수수학 . . . 62

Q4 체비쇼프 다항식의 계수 순수수학 . . . 67

Q5 정수론 순수수학 . . . 71

Q6 쌍곡선 함수와 단조성 순수수학 . . . 75

Q7 적분 부등식 순수수학 . . . 80

Q8 구간별로 정의된 미분방정식 순수수학 . . . 84

Q9 두 입자를 잇는 줄의 운동 역학 . . . 89

Q10 보의 평형 역학 . . . 93

Q11 조건부 기댓값 확률과 통계 97
Q12 조합론적 확률 확률과 통계 101

풀이

STEP II 2023, 문제 1

순수수학 • 치환적분

> **STEP II 2023, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

핵심 아이디어

치환(substitution) $x = 1/t$는 $\frac{1}{2}$와 2를 서로 맞바꾸므로, 구간(interval) $[\frac{1}{2}, 2]$를 (방향을 거꾸로 하여) 자기 자신 위로 옮긴다. 따라서 이 구간 위의 적분은 **같은** 구간 위에서 **겉모습이 다른** 적분으로 다시 쓸 수 있다. 새로운 피적분함수(integrand)가 곧바로 적분하기 쉬운 경우도 있고, 원래 피적분함수의 짝이 되어 둘을 더하거나 비교하는 것만으로 문제가 풀리는 경우도 있다.

풀이

소문항 (i)

$x = 1/t$로 놓으면 $\mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$이다. $a > 0$이므로 $[a, b]$의 모든 x는 양수이고, 이에 대응하는 t도 양수이다. 그러면

$$1 + x^2 = \frac{t^2 + 1}{t^2} \quad \Longrightarrow \quad (1 + x^2)^{3/2} = \frac{(1 + t^2)^{3/2}}{t^3},$$

이다. 여기서 $t > 0$이므로 $\sqrt{t^2} = t$를 이용하였다. 적분 구간의 끝 $x = a$와 $x = b$는 각각 $t = a^{-1}$과 $t = b^{-1}$이 된다. 따라서

$$\int_a^b \frac{1}{(1 + x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \int_{a^{-1}}^{b^{-1}} \frac{t^3}{(1 + t^2)^{3/2}} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \int_{a^{-1}}^{b^{-1}} \frac{-t}{(1 + t^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}t$$

이고, 이것이 보이려던 식이다.

소문항 (ii)

(a) $a = \frac{1}{2}, b = 2$로 두면 새로운 적분 구간의 끝은 2와 $\frac{1}{2}$이다. 위끝과 아래끝을 맞바꾸면 음의 부호가 흡수된다.

$$\int_{1/2}^{2} \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \int_{1/2}^{2} \frac{t}{(1+t^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}t.$$

새로운 피적분함수는 $1+t^2$의 거듭제곱의 도함수(의 상수배)이다. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1+t^2)^{-1/2} = -t(1+t^2)^{-3/2}$이므로

$$\int_{1/2}^{2} \frac{t}{(1+t^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}t = \Big[-(1+t^2)^{-1/2}\Big]_{1/2}^{2} = -\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5/4}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

(b) 피적분함수는 우함수(even function)이므로 $[-2,2]$ 위의 적분은 $[0,2]$ 위의 적분의 두 배이다. 이 구간을 $[0,\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2},2]$로 나누면, 두 번째 조각은 (a)에서 구한 것이다.

> **생각해 보기** 소문항 (i)에는 $a > 0$이 필요하다. 0에서 시작하는 조각은 어떻게 다룰 수 있을까?

소문항 (i)이 적용되는 $0 < a < \frac{1}{2}$에 대하여 $[a, \frac{1}{2}]$ 위에서 계산한 다음 $a \to 0^+$로 보낸다. $b = \frac{1}{2}$로 두고 소문항 (i)을 적용하면

$$\int_{a}^{1/2} \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \int_{2}^{1/a} \frac{t}{(1+t^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{1+a^{-2}}}.$$

$a \to 0^+$일 때 $a^{-2} \to \infty$이므로 마지막 항은 0으로 수렴(converge)한다. 피적분함수가 그 구간에서 연속이므로 좌변은 $[0,\frac{1}{2}]$ 위의 적분으로 수렴한다. 따라서 이 조각도 $\frac{1}{\sqrt{5}}$이고,

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = 2\Big(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\Big) = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

소문항 (iii)

(a) $J = \int_{1/2}^{2} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$로 놓고 다시 $x = 1/t$를 적용한다. 이번에는 $(1+x^2)^2 = (1+t^2)^2/t^4$이므로

$$J = \int_{2}^{1/2} \frac{t^4}{(1+t^2)^2} \cdot \Big(-\frac{1}{t^2}\Big)\mathrm{d}t = \int_{1/2}^{2} \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$$

이고, 적분변수(dummy variable) t를 x로 바꾸어 쓰면 이것이 첫 번째 등식이다. 이 두 번째 적분을 K라 하면 $J = K$이다. 두 피적분함수를 더하면

$$J + K = \int_{1/2}^{2} \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{1/2}^{2} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

이고, $J = K$이므로 $J = \frac{1}{2}\displaystyle\int_{1/2}^{2} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$를 얻어 등식의 사슬이 완성된다.

따라서

$$J = \tfrac{1}{2}(\arctan 2 - \arctan \tfrac{1}{2}).$$

이 값은 두 가지 방법으로 깔끔하게 정리할 수 있다. $\arctan 2 + \arctan \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$이므로(두 직각변의 길이가 1과 2인 직각삼각형의 두 예각은 서로 여각(complementary angles)이다) $J = \frac{\pi}{4} - \arctan \frac{1}{2}$이다. 또는 tan의 덧셈정리(subtraction formula)에 의하여 $\tan(\arctan 2 - \arctan \frac{1}{2}) = \dfrac{2-\frac{1}{2}}{1+1} = \frac{3}{4}$이고, 그 차는 $(0, \frac{\pi}{2})$에 속하므로

$$\int_{1/2}^{2} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\arctan\tfrac{3}{4} \approx 0.3218.$$

(b) 구하려는 적분을 L이라 하자. 어려운 부정적분을 찾기 전에 한 번 더 $x = 1/t$를 시도해 본다. 피적분함수는

$$\frac{1-\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1+t^2}{t^2}}} = \frac{\frac{t-1}{t}}{\frac{\sqrt{1+t^2}}{t^2}} = \frac{t(t-1)}{\sqrt{1+t^2}}$$

이 되며, 여기서도 $t > 0$을 이용하였다. $\mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$를 곱하고 적분 구간이 2에서 $\frac{1}{2}$까지임에 주의하면

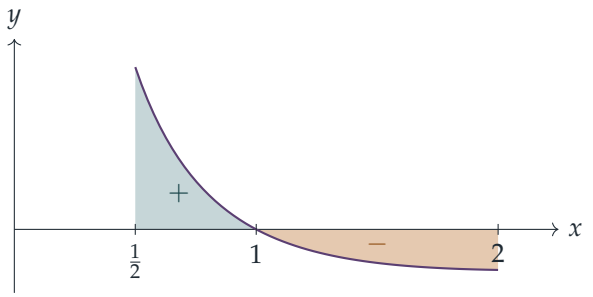
$$L = \int_{2}^{1/2} \frac{-(t-1)}{t\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_{1/2}^{2} \frac{t-1}{t\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = -\int_{1/2}^{2} \frac{1-t}{t\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = -L.$$

> ? **생각해 보기** 치환으로 L이 $-L$이 되었다. 이것은 모순일까?

그렇지 않다. 이것은 단지 그 값을 알려 줄 뿐이다. $L = -L$에서 $2L = 0$이므로

$$\int_{1/2}^{2} \frac{1-x}{x(1+x^2)^{1/2}}\,\mathrm{d}x = 0.$$

그림도 이와 일치한다. $[\frac{1}{2}, 1]$ 위의 양의 넓이가 $[1, 2]$ 위의 음의 넓이와 정확히 상쇄되는데, $x \mapsto 1/x$가 이 두 조각을 맞바꾸고, 위의 계산에 의하여 한쪽의 넓이를 다른 쪽 넓이의 부호를 바꾼 값으로 옮기기 때문이다.



검산

- $(1+x^2)^{-3/2}$의 부정적분(antiderivative) 하나는 $x(1+x^2)^{-1/2}$이다(미분하여 확인해 보라). 이것을 쓰면 (ii)(a)는 $\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0.4472$, (ii)(b)는 $\frac{4}{\sqrt{5}} \approx 1.7889$로, 앞에서 구한 답과 일치한다.
- (iii)(a)에서 $\frac{1}{2}\arctan\frac{3}{4} \approx 0.32175$와 $\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{1}{2} \approx 0.32175$는 서로 일치한다. 등식의 사슬에 있는 세 적분 모두 수치적분(numerical quadrature)을 하면 같은 값이 나온다.
- (iii)(b)에서 피적분함수는 $x < 1$에서 양수이고 $x > 1$에서 음수이므로 답이 0이라는 것은 그럴듯하다. 수치적분을 하면 반올림 오차 범위 안에서 0이 나온다.

흔한 실수

- $\mathrm{d}x = -t^{-2}\,\mathrm{d}t$의 음의 부호를 빠뜨리거나, 위끝과 아래끝을 맞바꾸면 그 부호가 상쇄된다는 것을 잊는 실수.
- (ii)(b)에서 $a = 0$으로 두고 소문항 (i)을 적용하는 실수. 그러면 $t = 1/0$이라는 끝값이 필요해진다. 극한(limit)을 이용하거나, 간단히 부정적분을 이용하라.
- $\sqrt{(1+t^2)/t^2} = \sqrt{1+t^2}/t$로 쓰면서 이것이 $t > 0$일 때만 성립한다는 점을 밝히지 않는 실수.

STEP 너머

사상 $x \mapsto 1/x$는 구간 $[\frac{1}{2}, 2]$의 대칭(symmetry)이며, 적분의 대칭을 활용하는 것은 $x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$를 이용해 $\int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,\mathrm{d}x$를 구하는 경우처럼 거듭 등장하는 기법이다. 소문항 (ii)(b)는 이상적분(improper integral)을 처음 맛보는 셈이다. 치환이 유한한 끝점을 무한대로 보냈고, 그래서 극한을 신중하게 취해야 했다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 적분의 극한을 엄밀하게 다루고, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(STEP 대비 문제집)에는 STEP 유형의 적분 연습 문제가 더 실려 있다.

풀이

STEP II 2023, 문제 2

순수수학 • 삼각치환

> **STEP II 2023, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

핵심 아이디어

각 방정식의 우변은 익숙한 배각 공식(multiple-angle formula)이 모습을 바꾼 것이다: $t = \tan\alpha$일 때 $\frac{2t}{1-t^2}$는 $\tan 2\alpha$이고, $\frac{3t-t^3}{1-3t^2}$는 $\tan 3\alpha$이며, $t = \cos\alpha$일 때 $2t^2 - 1$은 $\cos 2\alpha$이다. 치환(substitution)을 하면 서로 얽힌 세 방정식이 한 각에 대한 하나의 삼각방정식으로 바뀌는데, 이 방정식은 풀기 쉽고, 무엇보다 해의 개수를 세기 쉽다. 주의할 점은 단 하나, 치환이 모든 해를 정확히 한 번씩 잡아내는지 확인하는 것이다.

풀이

소문항 (i)

모든 실수는 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$에 속하는 정확히 하나의 α에 대하여 $\tan\alpha$로 나타낼 수 있으므로, 그 구간의 α로 $x = \tan\alpha$라 써도 잃는 것이 없다. 첫 번째 방정식이 의미를 가지려면 $x \neq \pm 1$이어야 하고, 이는 $\alpha \neq \pm\frac{1}{4}\pi$라는 뜻이므로 2α는 $\frac{1}{2}\pi$의 홀수배가 아니며, 2배각 공식(double-angle formula)을 적용할 수 있다:

$$y = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \tan 2\alpha.$$

똑같은 단계를 $y = \tan 2\alpha$에 적용하면(z가 정의되므로 $y \neq \pm 1$이다) $z = \tan 4\alpha$를 얻고, 다시 z에 적용하면($z \neq \pm 1$) $x = \tan 8\alpha$를 얻는다. 또한 $x = \tan\alpha$이므로

$$\tan\alpha = \tan 8\alpha,$$

이 되어 요구된 결과가 나온다. 두 각의 탄젠트가 같을 필요충분조건은 두 각의 차가 π의 배수인 것이므로, 어떤 정수 k에 대하여 $8\alpha = \alpha + k\pi$, 즉

$$\alpha = \frac{k\pi}{7}.$$

이다. 조건 $-\frac{1}{2}\pi < \alpha < \frac{1}{2}\pi$는 $-\frac{7}{2} < k < \frac{7}{2}$를 뜻하므로 $k = -3, -2, \ldots, 3$이다.

역으로, 이 일곱 개의 값은 각각 실제 해를 준다: $2\alpha = \frac{2k\pi}{7}$와 $4\alpha = \frac{4k\pi}{7}$는 결코 $\frac{1}{2}\pi$의 홀수배가 되지 않으며(그렇게 되려면 $4k$ 또는 $8k$가 7과 홀수의 곱이어야 하므로 $7 \mid k$이고, 따라서 $k = 0$인데, 이때 값은 0이 되어 홀수배가 아니다), 따라서 x, y, z 중 어느 것도 ± 1이 아니고, 모든 분모(denominator)가 0이 아니며, 위의 추론을 거꾸로 따라갈 수 있다. 서로 다른 k는 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$에서 서로 다른 α를, 따라서 서로 다른 x를 준다. 그러므로 해는 정확히 일곱 개이다.

요구된 형태로 답을 쓰려면 $\tan(\theta - \pi) = \tan\theta$를 이용하여 2α와 4α를 π의 배수만큼 줄여 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 안으로 옮긴다. 예를 들어 $\tan\frac{4\pi}{7} = \tan(-\frac{3\pi}{7})$이고 $\tan\frac{8\pi}{7} = \tan\frac{\pi}{7}$이다. $t_m = \tan\frac{m\pi}{7}$라 쓰면 해 (x, y, z)는 다음과 같다:

k	(x, y, z)
0	$(0, 0, 0)$
1	$(t_1,\ t_2,\ t_{-3})$
2	$(t_2,\ t_{-3},\ t_1)$
3	$(t_3,\ t_{-1},\ t_{-2})$

k	(x, y, z)
-1	$(t_{-1},\ t_{-2},\ t_3)$
-2	$(t_{-2},\ t_3,\ t_{-1})$
-3	$(t_{-3},\ t_1,\ t_2)$

$(0, 0, 0)$을 제외하면 해들은 (t_1, t_2, t_{-3})과 (t_{-1}, t_{-2}, t_3)의 순환(cyclic) 재배열로 나타난다는 점에 주목하자. 연립방정식이 $x \to y \to z \to x$에 대하여 변하지 않으므로 당연히 그래야 한다.

소문항 (ii)

먼저 3배각 공식(triple-angle formula)을 구하자. $t = \tan\alpha$라 하면

$$\tan 3\alpha = \frac{\tan 2\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan 2\alpha \tan\alpha} = \frac{\frac{2t}{1-t^2} + t}{1 - \frac{2t^2}{1-t^2}} = \frac{2t + t - t^3}{1 - t^2 - 2t^2} = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2}.$$

앞에서와 같이 $-\frac{1}{2}\pi < \alpha < \frac{1}{2}\pi$인 α로 $x = \tan\alpha$라 두자. 방정식들이 성립하려면 $1 - 3x^2$, $1 - 3y^2$, $1 - 3z^2$이 0이 아니어야 하며, 이 조건 아래에서 공식으로부터 차례로 $y = \tan 3\alpha$, $z = \tan 9\alpha$, $x = \tan 27\alpha$를 얻는다. 따라서 $\tan\alpha = \tan 27\alpha$이고, $26\alpha = k\pi$, 즉

$$\alpha = \frac{k\pi}{26}, \qquad -13 < k < 13.$$

이다. 이는 α의 후보값 25개이며, 모두 서로 다른 x 값을 준다.

> **생각해 보기** 이 25개의 후보 중 일부가 분모를 0으로 만들어서 실제로는 해가 아닐 수도 있지 않을까?

바로 이 점을 확인해야 한다. 분모 $1 - 3\tan^2\beta$는 $\beta \equiv \pm\frac{1}{6}\pi \pmod{\pi}$일 때 0이 되고, β가 $\frac{1}{2}\pi$의 홀수배이면 탄젠트 자체가 정의되지 않는다. 여기서 관련된 각은 $j = 0, 1, 2$에 대하여 $\beta = 3^j \cdot \frac{k\pi}{26}$이다.

- $3^j k\pi/26 = \pm\frac{1}{6}\pi + m\pi$라면 $3^{j+1}k = \pm 13 + 78m$이어야 한다. 좌변은 3의 배수이지만 우변은 그렇지 않다(78은 3의 배수이고 13은 그렇지 않으므로). 불가능하다.
- $3^j k\pi/26 = \frac{1}{2}(2m+1)\pi$라면 $3^j k = 13(2m+1)$이므로 13이 k를 나누고, 따라서 $k = 0$이다. 그런데 그러면 좌변이 0이 되어 13의 홀수배가 아니다. 불가능하다.

따라서 모든 후보가 실제 해이고, 연립방정식은 정확히 25개의 실수해를 가진다. (구간에서 제외된 값 $k = \pm 13$은 $\alpha = \pm\frac{1}{2}\pi$에 해당하며, 이때 $\tan\alpha$는 존재하지 않는다.)

소문항 (iii)(a)

이제 $|x| \le 1$이므로 정확히 하나의 $\alpha \in [0, \pi]$에 대하여 $x = \cos\alpha$라 쓸 수 있다. 2배각 공식 $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$에서 $y = \cos 2\alpha$를, 이어서 $z = \cos 4\alpha$와 $x = \cos 8\alpha$를 얻으며, 이들은 자동으로 $|y| \le 1$과 $|z| \le 1$을 만족한다. 따라서 세 값이 모두 $[-1, 1]$에 속하는 해는 $\alpha \in [0, \pi]$ 중에서 다음 조건을 만족하는 것들과 정확히 대응한다:

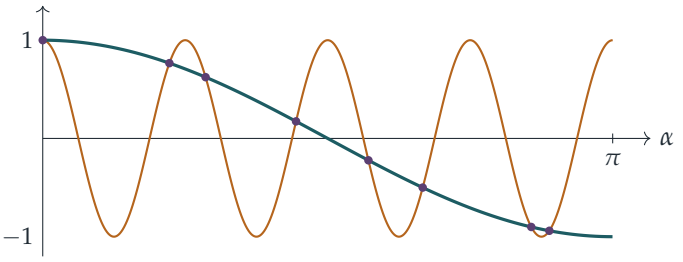
$$\cos 8\alpha = \cos\alpha.$$

두 각의 코사인이 같을 필요충분조건은 2π의 배수 차이를 무시할 때 두 각이 같거나 부호가 반대인 것이므로

$$8\alpha = \alpha + 2m\pi \quad \text{또는} \quad 8\alpha = -\alpha + 2n\pi, \qquad \text{즉} \qquad \alpha = \frac{2m\pi}{7} \quad \text{또는} \quad \alpha = \frac{2n\pi}{9}.$$

$[0, \pi]$에서 첫 번째 족은 $m = 0, 1, 2, 3$, 즉 $0, \frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, \frac{6\pi}{7}$을 주고, 두 번째 족은 $n = 0, 1, 2, 3, 4$, 즉 $0, \frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{6\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}$를 준다. 겹치는 것은 $\alpha = 0$뿐이다(공통값이 있으려면 $\frac{m}{7} = \frac{n}{9}$, 즉 $9m = 7n$이어야 하므로 $7 \mid m$이다). 그러면 서로 다른 α 값이 $4 + 5 - 1 = 8$개 남고, 코사인은 $[0, \pi]$에서 일대일(one-to-one)이므로 이들은 서로 다른 x 값 8개를 주며, 각 x가 y와 z를 결정한다. 따라서 $|x|, |y|, |z| \le 1$인 해는 정확히 8개이다.

그림은 $[0, \pi]$에서 $\cos 8\alpha$(호박색)와 $\cos\alpha$(청록색)의 여덟 교점을 보여 준다.



소문항 (iii)(b)

이제 제한을 없앤다. y와 z를 소거하자: $y = 2x^2 - 1$은 x에 대한 이차식이므로 $z = 2y^2 - 1$은 x에 대한 4차 다항식(polynomial)이고, 그러면 $x = 2z^2 - 1$은

$$x = 2\Big(2\big(2x^2 - 1\big)^2 - 1\Big)^2 - 1,$$

이 되는데, 이는 x에 대한 8차 다항방정식이다(우변의 최고차항(leading term)은 $2 \cdot (2 \cdot 2^2)^2 x^8 = 128x^8$이며, 이를 상쇄하는 항은 없다). 전개하면 다음과 같다.

$$128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 - x + 1 = 0.$$

연립방정식의 모든 해 (x, y, z)에서 x는 이 8차 방정식(octic)의 근(root)이고, x가 y와 z를 결정한다. 차수가 8인 다항식은 실근을 많아야 8개 가지는데, (a)에서 이미 서로 다른 실근 8개, 즉 거기서 구한 여덟 개의 α에 대한 $\cos\alpha$를 얻었다. 따라서 이들이 근의 **전부**이며, 연립방정식의 모든 해는 (a)의 여덟 해 중 하나이다. 특히 모든 해는 $|x| \le 1$, $|y| \le 1$, $|z| \le 1$을 만족하며, 이것이 보여야 할 내용이었다.

생각해 보기 (b)에서는 왜 (a)의 여덟 해만으로는 부족하고 차수가 필요할까?

(a)는 $[-1, 1]$ 안의 해만 찾았을 뿐이며, 그것만으로는 이를테면 $x = 5$에 대해서는 아무것도 말해 주지 않는다. 다른 해가 없음을 보장하는 것은 차수에 의한 상한이다: 8차 방정식이 가질 수 있는 근은 여덟 개가 전부이고, (a)가 그것을 모두 써 버렸다.

검산

- (i)에서 $k = 1$일 때: $\tan\frac{\pi}{7} \approx 0.4816$이고, $\frac{2(0.4816)}{1-0.4816^2} \approx 1.2540 = \tan\frac{2\pi}{7}$이다. 두 단계를 더 거치면 다시 0.4816으로 돌아온다.
- 컴퓨터로 실수 전체에서 $f(f(f(x))) = x$의 근을 탐색한 결과, $f(t) = \frac{2t}{1-t^2}$에 대해서는 정확히 7개, $f(t) = \frac{3t-t^3}{1-3t^2}$에 대해서는 정확히 25개의 근이 나왔고, 후자는 $\tan\frac{k\pi}{26}$, $|k| \le 12$와 일치한다.
- (iii)에서 $x = 1$이면 $y = z = 1$로 $\alpha = 0$인 해이며, 실제로 $128 - 256 + 160 - 32 - 1 + 1 = 0$이다. 8차 방정식의 근을 $[-50, 50]$에서 탐색한 결과 정확히 8개가 나왔고, 모두 $[-1, 1]$ 안에 있었다.

흔한 실수

- (ii)에서 $k = \pm 13$을 허용하여(또는 α를 전혀 제한하지 않아서) 27개의 해를 얻는 것. $\alpha = \pm\frac{1}{2}\pi$에 대응하는 실수 x는 없다.

- (iii)(a)에서 두 번째 족 $8\alpha = -\alpha + 2n\pi$를 빠뜨리거나, $\alpha = 0$을 두 번 세는 것.
- (i)에서 각이 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$에 있어야 하는데도 $\tan\frac{4\pi}{7}$ 같은 답을 줄이지 않고 그대로 두는 것.

STEP 너머

$T_n(\cos\alpha) = \cos n\alpha$를 만족하는 다항식 T_n을 **체비쇼프**(*Chebyshev*) **다항식**이라 한다. (iii)은 방정식 $T_8(x) = x$이고, 위의 8차 다항식은 $T_8(x) - x$이다. $x \mapsto 2x^2 - 1$ 같은 사상을 반복하면서 세 단계 뒤에 되돌아오는 점을 찾는 것은 동역학계(dynamical systems) 이론의 출발점이다: 이 사상은 $[-1, 1]$에서 "혼돈적(chaotic)"이며, 각 치환은 이를 단순한 두 배 사상 $\alpha \mapsto 2\alpha$로 바꾼다. 같은 방법으로 (i)과 (ii)의 탄젠트 사상이 왜 그렇게 많은 주기점(periodic points)을 가지는지 설명할 수 있다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)에 이런 정신의 문제가 더 있다.

풀이

STEP II 2023, 문제 3

순수수학 • 다항식과 도함수

STEP II 2023, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

핵심 아이디어

q를 미분하면 합의 각 항이 한 칸씩 밀려날 뿐이고 마지막 도함수(derivative)는 사라지므로 $q' = q - p$이다. 이 하나의 관계식이 모든 것을 이끈다. $q > 0$에 대한 세 가지 증명(proof)은 이 관계식을 세 가지 방식으로 읽어 낸다. 하나는 정류점(stationary point)에 관한 사실로, 또 하나는 $\mathrm{e}^{-x}q(x)$의 도함수, 곧 적분인자(integrating factor)로, 마지막 하나는 부분적분(integration by parts)을 거듭해서 얻는 적분 공식으로 읽는 것이다.

풀이

이 풀이 전체에서 $p(x) = ax^n + \ldots$, $a \neq 0$이라 쓴다. $k \geq 1$일 때 $p^{(k)}$의 차수(degree)는 n보다 작고(또는 영함수이고), $p^{(n+1)} \equiv 0$이다.

소문항 (i)

(a) 홀수 차수의 다항식(polynomial)은 실수 직선의 한쪽 끝에서 $+\infty$로, 다른 쪽 끝에서 $-\infty$로 간다. 다항식은 연속(continuous)이므로 중간값 정리(intermediate value theorem)에 의해 어딘가에서 값 0을 가진다. 그런데 모든 x에 대해 $p(x) > 0$이므로 p는 실근을 갖지 않고, 따라서 n은 짝수여야 한다.

또한 $a > 0$이다. 만약 $a < 0$이면 $x \to \infty$일 때 $p(x) \to -\infty$가 되어 $p > 0$에 모순이기 때문이다. $q = p + p' + \cdots + p^{(n)}$에서 첫째 항을 뺀 나머지 항은 모두 차수가 n보다 작으므로, q 역시 차수가 n이고 최고차항 계수(leading coefficient)가 $a > 0$이다. 따라서 $x \to \infty$일 때 $q(x) \to +\infty$이고 (n이 짝수이므로 $x \to -\infty$일 때도 마찬가지이다), q는 분명히 양의 값을 가진다. ($n = 0$이면 $q = p$는 양의 상수이다.)

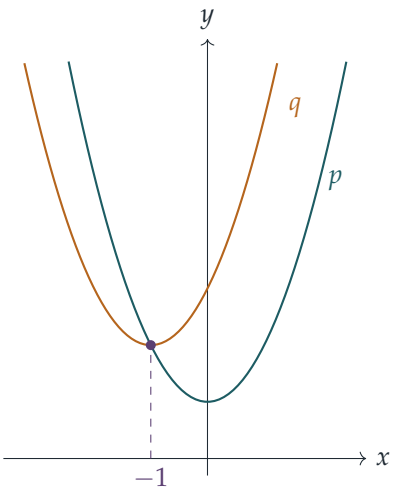
(b) 항별로 미분하면

$$q'(x) = \sum_{k=0}^{n} p^{(k+1)}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} p^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{n} p^{(k)}(x) - p(x) + p^{(n+1)}(x) = q(x) - p(x),$$

이다. 차수가 n인 다항식에 대해 $p^{(n+1)} \equiv 0$이기 때문이다.

소문항 (ii)

(a) $y = q(x)$의 정류점 x_0에서 $q'(x_0) = 0$이므로, (i)(b)에 의해 $q(x_0) = p(x_0)$이다. 즉 두 곡선은 그 점에서 만난다.



(그림은 $p(x) = x^2 + 1$인 경우를 보여 준다. 이때 $q(x) = x^2 + 2x + 3$이다. q의 최솟값은 $x = -1$에서 나타나며, 바로 그곳에서 두 곡선이 만난다.)

이제 $q > 0$을 보이자. $n = 0$이면 $q = p > 0$이므로 $n \geq 2$라고 하자. (i)(a)에 의해 $x \to \pm\infty$일 때 $q(x) \to +\infty$이므로, $|x| > R$이면 언제나 $q(x) > q(0)$이 되도록 $R > 0$을 잡을 수 있다.

> **생각해 보기** q에 가장 낮은 점이 존재한다는 것, 그리고 그 점이 정류점이라는 것을 어떻게 알 수 있을까?

닫힌구간 $[-R, R]$에서 연속함수 q는 어떤 점 x_0에서 최솟값을 가지며(최대·최소 정리(extreme value theorem)), $q(x_0) \leq q(0)$이다. 이 구간 밖에서는 q가 $q(0)$보다 크므로, $q(x_0)$는 실수 전체에서 q의 최솟값이다. x_0는 $\mathbb{R}$의 내부점(interior point)이고 q는 미분가능(differentiable)하므로 $q'(x_0) = 0$이다. 앞의 결과에 의해 $q(x_0) = p(x_0) > 0$이다. 따라서 모든 x에 대해

$$q(x) \geq q(x_0) = p(x_0) > 0.$$

(b) (i)(b)를 이용하면

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{-x}q(x)\right) = \mathrm{e}^{-x}\left(q'(x) - q(x)\right) = -\mathrm{e}^{-x}p(x) < 0$$

이 모든 x에 대해 성립한다. $p > 0$이기 때문이다. 따라서 $\mathrm{e}^{-x}q(x)$는 (순)감소(strictly decreasing)한다.

$q > 0$을 보이자. q는 다항식이므로 $X \to \infty$일 때 $\mathrm{e}^{-X}q(X) \to 0$이다(지수함수가 거듭제곱보다 빠르다). 감소함수는 $+\infty$에서의 극한보다 작아지는 일이 없으므로, 모든 X에 대해 $\mathrm{e}^{-X}q(X) \geq 0$이다. 그러면 임의의 x에 대해 순감소 성질로부터

$$\mathrm{e}^{-x}q(x) > \mathrm{e}^{-(x+1)}q(x+1) \geq 0,$$

을 얻고, 양변에 $\mathrm{e}^{x} > 0$을 곱하면 $q(x) > 0$이다.

(c) 여기 나오는 적분은 모두 수렴(converge)한다. t에 대한 다항식에 e^{-t}를 곱한 함수는 $[0,\infty)$에서 적분가능하기 때문이다. x를 상수로 보고 $u = p(x+t)$, $\mathrm{d}v = \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$로 놓아 부분적분하면

$$\begin{aligned}\int_0^\infty p(x+t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t &= \left[-p(x+t)\mathrm{e}^{-t}\right]_0^\infty + \int_0^\infty p^{(1)}(x+t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= p(x) + \int_0^\infty p^{(1)}(x+t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

이다. $t \to \infty$일 때 $p(x+t)\mathrm{e}^{-t} \to 0$이기 때문이다. 이것이 첫 번째 결과이다.

이 계산에서는 p가 다항식이라는 사실 외에는 아무것도 사용하지 않았으므로, 모든 도함수에 대해서도 같은 결과가 성립한다. 즉

$$I_k(x) = \int_0^\infty p^{(k)}(x+t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t, \qquad \text{라 하면} \qquad I_k(x) = p^{(k)}(x) + I_{k+1}(x)$$

가 $k = 0, 1, \ldots, n$에 대해 성립한다. 또한 $p^{(n+1)} \equiv 0$이므로 $I_{n+1}(x) = 0$이다. 이 관계를 거듭 적용하면

$$I_0(x) = p(x) + I_1(x) = p(x) + p^{(1)}(x) + I_2(x) = \cdots = \sum_{k=0}^{n} p^{(k)}(x) + I_{n+1}(x) = q(x),$$

이고, 이것이 두 번째 결과이다.

? **생각해 보기** 이 공식에서 $q(x) > 0$이 당연한 이유는 무엇일까?

고정된 각 x에 대해 피적분함수(integrand) $p(x+t)\mathrm{e}^{-t}$는 모든 $t \geq 0$에서 연속이고 순양수이다. $p > 0$이 모든 곳에서 성립하기 때문이다. 길이가 양수인 구간에서 연속이고 순양수인 함수의 적분은 순양수이다. 따라서 모든 x에 대해 $q(x) = I_0(x) > 0$이다.

검산

- $p(x) = x^2 + 1$이면 $q(x) = x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2$이다. 실제로 $q' = 2x + 2 = q - p$이고, q의 최솟값은 $x = -1$에서 2이며, (ii)(a)가 예측한 대로 $p(-1) = 2$이다.
- 같은 p에 대해 $x = 0$에서: $\int_0^\infty (t^2+1)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 2! + 1 = 3 = q(0)$.
- 컴퓨터로, 차수가 6 이하이고 모든 곳에서 양수인 무작위 다항식 300개에 대해 $q' = q - p$가 정확히 성립함, $[-20, 20]$ 위의 격자에서 $q > 0$이고 $\mathrm{e}^{-x}q(x)$가 감소함, 그리고 수치 적분이 $q(x)$를 유효숫자 약 10자리까지 재현함을 확인하였다.

흔한 실수

- (ii)(a)에서 근거 없이 최솟값이 존재한다고 가정하는 것. 최솟값이 존재하려면 양쪽 끝에서 $q \to +\infty$여야 하고, 여기에는 (i)(a)에서 얻은 n이 짝수라는 사실과 $a > 0$이 쓰인다.
- (ii)(b)에서 극한으로부터 $\mathrm{e}^{-x}q(x) \geq 0$만 결론짓고 마는 것. 이를 $q(x) > 0$으로 끌어올리는 것은 순감소 성질이다.
- 경계항(boundary term) $p(x+t)\mathrm{e}^{-t}$를 버리기 전에 $t \to \infty$일 때 이 항이 사라져야 한다는 점을 잊는 것.

STEP 너머

(ii)(b)의 함수 e^{-x}는 적분인자이고, (ii)(c)는 $q' - q = -p$를 명시적으로 푼다. 공식 $\int_0^\infty p(x+t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$는 라플라스 변환(Laplace transform) 꼴의 적분이며, D가 미분을 나타낼 때 항등식 $q = (1 + D + D^2 + \cdots)p = (1 - D)^{-1}p$는 선형 미분방정식(linear differential equation)을 위한 연산자 방법(operator method)을 처음 맛보게 해 준다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 적분인자와 라플라스 변환을 다루고, Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)는 (ii)(a)의 최댓값·최솟값 논증을 엄밀하게 만든다.

풀이

STEP II 2023, 문제 4

순수수학 • 다항식에서 무리수 근호 없애기

STEP II 2023, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

이 문제는 *Beyond STEP*의 6.3 절 $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$를 근으로 갖는 다항식에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch06/field-extensions.html

핵심 아이디어

방정식에서 근호(surd)를 없애려면 근호가 들어 있는 항을 모두 한쪽으로, 나머지를 모두 다른 쪽으로 모은 뒤 제곱(또는 세제곱)한다. 모든 소문항이 같은 방법을 쓴다. 수를 "다루기 쉬운 수 더하기 근호" 꼴로 쓰고, 그 근호를 따로 떼어 낸 다음, 근호가 사라질 때까지 거듭제곱한다. 전개한 뒤에도 근호가 남아 있으면 그 항들을 한쪽으로 모으고 같은 과정을 되풀이한다.

풀이

소문항 (i)

$(x-\sqrt{2})^2=3$을 전개하면 $x^2-2\sqrt{2}\,x+2=3$, 즉

$$x^2-1=2\sqrt{2}\,x.$$

이제 근호가 한쪽에 따로 있으므로 양변을 제곱한다.

$$x^4-2x^2+1=8x^2 \quad\Longrightarrow\quad x^4-10x^2+1=0,$$

이로써 원하는 식을 얻는다. (제곱은 한 방향으로만 성립하지만, 우리에게는 그것으로 충분하다. 첫 번째 방정식을 만족하는 모든 x는 두 번째 방정식도 만족한다.)

결론을 이끌어 내기 위해 $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$으로 놓는다. 그러면 $x-\sqrt{2}=\sqrt{3}$이므로

$(x-\sqrt{2})^2 = 3$이고, 방금 보인 결과에 따라 $f(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 0$이다.

소문항 (ii)

$x = \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$, $y = x-\sqrt{5} = \sqrt{2}+\sqrt{3}$으로 놓는다. 소문항 (i)에 의해 $y^4 - 10y^2 + 1 = 0$이다. 이제 이 식을 x로 나타낸다. 먼저

$$y^2 = (x-\sqrt{5})^2 = (x^2+5) - 2\sqrt{5}\,x,$$

이므로

$$\begin{aligned} y^4 &= (x^2+5)^2 - 4\sqrt{5}\,x(x^2+5) + 20x^2 \\ &= x^4 + 30x^2 + 25 - 4\sqrt{5}\,x^3 - 20\sqrt{5}\,x. \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} 0 &= y^4 - 10y^2 + 1 \\ &= \left(x^4 + 30x^2 + 25 - 4\sqrt{5}\,x^3 - 20\sqrt{5}\,x\right) - 10\left(x^2 + 5 - 2\sqrt{5}\,x\right) + 1 \\ &= x^4 + 20x^2 - 24 - 4\sqrt{5}\,x^3. \end{aligned}$$

운 좋게도 $\sqrt{5}\,x$ 항이 소거된다. 근호가 들어 있는 항이 하나만 남으므로 그 항을 따로 떼어 내고 제곱한다.

$$x^4 + 20x^2 - 24 = 4\sqrt{5}\,x^3 \quad\Longrightarrow\quad (x^4 + 20x^2 - 24)^2 = 80x^6.$$

좌변을 전개하면

$$\begin{aligned} (x^4 + 20x^2 - 24)^2 &= x^8 + 40x^6 + 400x^4 - 48x^4 - 960x^2 + 576 \\ &= x^8 + 40x^6 + 352x^4 - 960x^2 + 576. \end{aligned}$$

$80x^6$을 빼면

$$g(x) = x^8 - 40x^6 + 352x^4 - 960x^2 + 576,$$

으로 잡을 수 있다. 이 다항식(polynomial)은 차수(degree)가 8이고 정수 계수(integer coefficients)를 가지며, $g(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}) = 0$이다.

? **생각해 보기** 처음부터 새로 시작하지 않고, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$에 대한 소문항 (i)을 이용해 $\sqrt{5}$를 마지막에 없애는 까닭은 무엇인가?

소문항 (i)에서 이미 세 근호 가운데 두 개를 없앴으므로, 하나만 더 처리하면 된다. 근호 하나를 제곱으로 없애면 차수가 4에서 8로 두 배가 되는데, 이것이 바로 문제에서 요구한 차수이다. 처음부터 새로 시작하면 세 근호를 한꺼번에 다루어야 한다.

소문항 (iii)

$x = a + \sqrt{2}$로 놓으면 $a = x - \sqrt{2}$이고 $a^3 - 3a + 1 = 0$이다. 전개하면

$$(x - \sqrt{2})^3 = x^3 - 3\sqrt{2}\,x^2 + 6x - 2\sqrt{2},$$

이므로

$$0 = (x - \sqrt{2})^3 - 3(x - \sqrt{2}) + 1 = x^3 + 3x + 1 - \sqrt{2}\,(3x^2 - 1).$$

근호를 따로 떼어 내고 제곱한다.

$$x^3 + 3x + 1 = \sqrt{2}\,(3x^2 - 1) \quad \Longrightarrow \quad (x^3 + 3x + 1)^2 = 2(3x^2 - 1)^2.$$

양변은 각각

$$(x^3 + 3x + 1)^2 = x^6 + 6x^4 + 2x^3 + 9x^2 + 6x + 1,$$
$$2(3x^2 - 1)^2 = 18x^4 - 12x^2 + 2,$$

이므로

$$\mathrm{h}(x) = x^6 - 12x^4 + 2x^3 + 21x^2 + 6x - 1.$$

으로 잡을 수 있다. 여기서는 a가 $t^3 - 3t + 1 = 0$을 만족한다는 사실만 사용했으므로, 같은 계산이 b와 c에도 그대로 적용된다. 따라서 $\mathrm{h}(a + \sqrt{2}) = \mathrm{h}(b + \sqrt{2}) = \mathrm{h}(c + \sqrt{2}) = 0$이다.

소문항 (iv)

제곱으로는 세제곱근(cube roots)을 없앨 수 없으므로 다른 항등식(identity)이 필요하다. $p = \sqrt[3]{2}$, $q = \sqrt[3]{3}$, $x = p + q$로 놓는다. 이항전개(binomial expansion)에 의해

$$x^3 = p^3 + q^3 + 3pq(p + q) = 5 + 3pq\,x.$$

? **생각해 보기** 여전히 무리수(irrational)인 pq는 어떻게 없앨 수 있는가?

여기서 $pq = \sqrt[3]{6}$은 남아 있는 유일한 무리수이고, 인수로만 나타난다. 이것을 따로 떼어 내고 $(pq)^3 = 6$을 이용해 세제곱한다.

$$x^3 - 5 = 3pq\,x \quad \Longrightarrow \quad (x^3 - 5)^3 = 27 \cdot 6\,x^3 = 162x^3.$$

$(x^3 - 5)^3 = x^9 - 15x^6 + 75x^3 - 125$이므로

$$\mathrm{k}(x) = x^9 - 15x^6 - 87x^3 - 125,$$

으로 잡을 수 있다. 이 다항식은 정수 계수를 가지며 $\mathrm{k}(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}) = 0$이다.

검산

- 소문항 (ii)에서 $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5} \approx 5.38233$이다. $x^2 \approx 28.9695$이므로 $x^8 \approx 704\,310$, $40x^6 \approx 972\,485$이다. 또 $352x^4 \approx 295\,410$, $960x^2 \approx 27\,811$이고, g의 항들은 반올림 오차 범위 안에서 상쇄된다.
- $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$의 부호를 바꾸어도 $\mathrm{g}(x)$는 전혀 변하지 않으므로, $\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{3}\pm\sqrt{5}$ 꼴의 여덟 수가 모두 근이다. 차수가 8인 까닭이 바로 이것이다. 마찬가지로 h는 여섯 근 $a\pm\sqrt{2}$, $b\pm\sqrt{2}$, $c\pm\sqrt{2}$를 가진다.
- $t^3-3t+1=0$의 근은 $2\cos 40^\circ$, $2\cos 160^\circ$, $2\cos 280^\circ$이다. 예를 들어 $a\approx 1.53209$이면 $a+\sqrt{2}\approx 2.94630$이고, $\mathrm{h}(2.94630)$은 반올림 오차 범위 안에서 영이다.
- 소문항 (iv)에서 $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}\approx 2.70217$이고, $\mathrm{k}(2.70217)$은 반올림 오차 범위 안에서 영이다. 컴퓨터로 확인한 결과 네 다항식 모두 약 10^{-10}의 정밀도로 맞았다.

흔한 실수

- 근호를 따로 떼어 내기 전에 제곱하는 것. $\sqrt{5}$가 들어 있는 항이 양변에 남아 있으면 소거되지 않는다.
- 소문항 (iv)에서 제곱을 시도하거나, $x^3=5+3pqx$임을 알아채지 못한 채 x를 세제곱하는 것. 전개식 $(p+q)^3=p^3+q^3+3pq(p+q)$가 이 문제의 핵심 요령이다.
- 소문항 (iii)의 세제곱 전개에서, 특히 상수항 $-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=\sqrt{2}$에서 부호를 틀리는 것.

STEP 너머

정수 계수 다항식의 근이 되는 수를 **대수적 수**(*algebraic number*)라고 한다. 이 문제는 대수적 수의 합이 대수적 수임을 손으로 직접 보여 준다. 일반적인 증명은 선형대수(linear algebra)를 이용한다. $\mathbb{Q}(\alpha,\beta)$는 $\mathbb{Q}$ 위의 유한차원 벡터공간(finite-dimensional vector space)이다. 따라서 거듭제곱 $1, \alpha+\beta, (\alpha+\beta)^2, \ldots$은 언젠가는 일차종속(linearly dependent)이 될 수밖에 없다. 여기에 나타난 차수 4, 8, 6, 9는 이러한 **체의 확대**(*field extensions*)의 차원이다. 더 자세한 내용은 Allenby, *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)를 참고하라.

풀이

STEP II 2023, 문제 5

순수수학 • 점화식과 수렴

STEP II 2023, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

이 문제는 *Beyond STEP*의 2.7 절 **여섯 자리인가, 육백 자리인가**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch02/newton-speed.html

핵심 아이디어

두 점화식(recurrence)은 모두 $\sqrt{2}$를 근사하는 장치이고, 이 문제는 오차(error)가 얼마나 빠르게 줄어드는지를 묻는다. 각 소문항의 요령은 오차를 올바른 방식으로 재는 것이다. (i)에서는 $x_n^2 - 2$를 보는데, 이 값은 매 단계마다 크기가 최대 $\frac{1}{4}$인 인수가 곱해진다(그리고 부호가 바뀐다). (ii)에서는 $y_n - \sqrt{2}$를 보는데, 이 값은 매 단계마다 (대략) **제곱**된다. 상수를 곱하면 꾸준히 나아갈 뿐이지만, 제곱하면 맞는 자릿수가 매번 두 배가 된다. 그래서 (ii)는 같은 열 단계 만에 10^{-600}에 도달한다.

풀이

소문항 (i)

(a) 점화식을 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$x_{n+1} = \frac{(x_n + 1) + 1}{x_n + 1} = 1 + \frac{1}{x_n + 1}.$$

$x_0 = 1 \geq 1$이다. $x_n \geq 1$이면 $x_n + 1 > 0$이므로 $\frac{1}{x_n+1} > 0$이고 $x_{n+1} > 1$이다. 수학적 귀납법(induction)에 의해 모든 n에 대하여 $x_n \geq 1$이다.

(b) 모두 통분(common denominator)한다.

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 - 2 &= \frac{(x_n+2)^2 - 2(x_n+1)^2}{(x_n+1)^2} \\ &= \frac{x_n^2 + 4x_n + 4 - 2x_n^2 - 4x_n - 2}{(x_n+1)^2} \\ &= \frac{-(x_n^2-2)}{(x_n+1)^2}. \end{aligned}$$

분모가 양수이므로 $x_{n+1}^2 - 2$와 $x_n^2 - 2$는 부호가 반대이다. (둘 다 결코 0이 되지 않는다. 귀납법에 의해 모든 x_n은 유리수(rational)이고, $\sqrt{2}$는 무리수(irrational)이기 때문이다.)

절댓값(modulus)을 취하고, (a)에서 얻은 $x_n + 1 \geq 2$, 곧 $(x_n+1)^2 \geq 4$를 이용하면

$$|x_{n+1}^2 - 2| = \frac{|x_n^2 - 2|}{(x_n+1)^2} \leq \tfrac{1}{4}|x_n^2 - 2|,$$

이므로 증명하려던 식을 얻는다.

(c) $x_0^2 - 2 = -1$이므로 (b)를 열 번 적용하면

$$|x_{10}^2 - 2| \leq \left(\tfrac{1}{4}\right)^{10} |x_0^2 - 2| = \frac{1}{4^{10}} = \frac{1}{1\,048\,576} < 10^{-6}.$$

부호를 보자. $x_0^2 - 2 < 0$이고 부호가 매 단계마다 바뀌므로, 짝수인 모든 n에 대하여 $x_n^2 - 2$는 음수이다. 특히 $x_{10}^2 - 2 < 0$이므로

$$-10^{-6} < x_{10}^2 - 2 < 0, \qquad \text{즉,} \qquad 2 - 10^{-6} \leq x_{10}^2 \leq 2.$$

소문항 (ii)

(a) 먼저 모든 y_n은 양수이다. $y_0 = 1 > 0$이고, $y_n > 0$이면 $y_{n+1} = \frac{y_n^2+2}{2y_n} > 0$이다. 따라서 점화식에서 0으로 나누는 일은 생기지 않는다. 이제

$$y_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{y_n^2 + 2 - 2\sqrt{2}\,y_n}{2y_n} = \frac{\left(y_n - \sqrt{2}\right)^2}{2y_n},$$

인데, 이는 $(y_n - \sqrt{2})^2 = y_n^2 - 2\sqrt{2}\,y_n + 2$이기 때문이다. 이것이 구하는 항등식이다.

이로부터 결론을 끌어내자. $y_0 = 1$이다. $n \geq 1$이면 ($n-1$에 적용한) 항등식에 의해 $y_n - \sqrt{2}$는 제곱수를 양수 $2y_{n-1}$로 나눈 값이므로 $y_n - \sqrt{2} \geq 0$이고, 따라서 $y_n \geq \sqrt{2} > 1$이다. 그러므로 모든 $n \geq 0$에 대하여 $y_n \geq 1$이다.

(b) $e_n = y_n - \sqrt{2}$, $r = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$로 놓는다. (a)에 의해 $n \geq 1$이면 $e_n \geq 0$이고, $y_n \geq 1$이므로

$$e_{n+1} = \frac{e_n^2}{2y_n} \leq \frac{e_n^2}{2}.$$

$n \geq 1$에 대하여 $e_n \leq 2r^{2^n}$임을 귀납법으로 증명한다.

기저 단계(*base case*) $n = 1$. $y_1 = \frac{3}{2}$이므로 $e_1 = \frac{3}{2} - \sqrt{2}$이고, 한편

$$2r^2 = 2 \cdot \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{4} = \frac{3-2\sqrt{2}}{2} = \tfrac{3}{2} - \sqrt{2}.$$

따라서 부등식이 등호로 성립한다.

귀납 단계(*inductive step*). 어떤 $n \geq 1$에 대하여 $0 \leq e_n \leq 2r^{2^n}$이라고 가정하자.

> **생각해 보기** $e_n \leq 2r^{2^n}$의 양변을 제곱해도 되는 이유는 무엇인가?

제곱은 **음이 아닌** 수 사이의 부등식을 보존하는데, $e_n \geq 0$이 바로 (a)에서 얻은 사실이다. (이 때문에 부등식이 $n = 0$이 아니라 $n = 1$에서 시작한다. $e_0 = 1 - \sqrt{2}$는 음수이다.) 따라서

$$e_{n+1} \leq \frac{e_n^2}{2} \leq \frac{\left(2r^{2^n}\right)^2}{2} = \frac{4r^{2^{n+1}}}{2} = 2r^{2^{n+1}},$$

이고, 이로써 귀납법이 완성된다.

(c) 하한 $y_{10} \geq \sqrt{2}$는 (a)에서 보였다. 상한을 보자. $\sqrt{2} - 1 < \frac{1}{2}$에서 $0 < r < \frac{1}{4}$이므로 (b)에 의해

$$y_{10} - \sqrt{2} \leq 2r^{2^{10}} = 2r^{1024} < 2\left(\tfrac{1}{4}\right)^{1024} = 2 \cdot 2^{-2048} = 2^{-2047}.$$

이를 10의 거듭제곱과 비교하기 위해 $2^{10} = 1024 > 10^3$을 이용한다.

$$2^{2047} > 2^{2040} = \left(2^{10}\right)^{204} > \left(10^3\right)^{204} = 10^{612} > 10^{600}.$$

따라서 $y_{10} - \sqrt{2} < 2^{-2047} < 10^{-600}$이고, 종합하면

$$\sqrt{2} \leq y_{10} \leq \sqrt{2} + 10^{-600}.$$

> **생각해 보기** (ii)의 놀라운 속도는 어디에서 오는가?

(i)에서는 오차에 매번 최대 $\frac{1}{4}$가 곱해지므로 열 단계로 소수점 아래 약 여섯 자리만 얻는다. (ii)에서는 오차가 매번 (대략) 제곱되므로 지수 2^n이 두 배씩 커진다. 열 단계면 약 $\frac{1}{10}$이던 오차가 10^{-600} 아래로 내려간다.

검산

- 처음 몇 항은 $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{7}{5}$, $x_3 = \frac{17}{12}$이고, $x_n^2 - 2$는 -1, $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{25}$, $\frac{1}{144}$로 진행한다. 부호가 번갈아 바뀌고, 매번 적어도 4배씩 줄어든다.

- 분수로 정확히 계산하면 $x_{10}^2 \approx 2 - 3.0 \times 10^{-8}$이며, 구간 $[2 - 10^{-6}, 2]$ 안에 넉넉히 들어간다.
- $y_2 = \frac{17}{12}$이므로 $y_2 - \sqrt{2} \approx 0.00245$이고, 상한 $2r^4 \approx 0.00368$보다 작다. 정확한 분수로 컴퓨터 계산을 하면 $y_{10} - \sqrt{2} \approx 10^{-783}$이며, 보장된 $2^{-2047} \approx 10^{-616}$보다 훨씬 작다.

흔한 실수

- (i)(c)에서 부호를 잊는 것. 절댓값 부등식만으로는 $2 - 10^{-6} \le x_{10}^2 \le 2 + 10^{-6}$을 얻을 뿐이다. 상한 2를 얻으려면 부호가 번갈아 바뀐다는 사실이 필요하다.
- $e_n \ge 0$임을 먼저 알지 못한 채 $e_n \le 2r^{2^n}$을 제곱하는 것.
- 2^{-2047}에서 멈추고 실제로 10^{-600}과 비교하지 않는 것. 부등식 $2^{10} > 10^3$을 쓰는 것이 가장 깔끔하다.

STEP 너머

(ii)의 점화식은 $f(y) = y^2 - 2$에 뉴턴 방법(Newton's method)을 적용한 것이고, (ii)(a)의 항등식은 뉴턴 방법이 단근(simple root) 근처에서 **이차** 수렴(quadratic convergence)한다는 명제이다. 반면 (i)은 수렴 속도가 최대 $\frac{1}{4}$인 **선형** 수렴(linear convergence)의 예이다. 수 x_n은 또한 $\sqrt{2}$의 연분수(continued fraction)의 수렴분수(convergents)이기도 하다. 수렴 차수(order of convergence)와 고정점 반복(fixed-point iteration)은 처음 배우는 수치해석(numerical analysis) 강의의 표준 주제이며, 그 바탕이 되는 해석학은 Bartle and Sherbert, *Introduction to Real Analysis*(실해석 입문)에서 꼼꼼하게 전개된다.

풀이

STEP II 2023, 문제 6

순수수학 • 피보나치 행렬 항등식

STEP II 2023, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

핵심 아이디어

피보나치 수(Fibonacci numbers)를 하나의 2×2 행렬(matrix)의 거듭제곱의 성분으로 묶어 놓으면, 피보나치 수에 관한 모든 항등식은 $\mathbf{Q}$의 거듭제곱에 관한 항등식이 되고, 여기서는 평범한 대수(지수 법칙(index laws), 행렬식(determinant), 이항정리(binomial theorem))가 일을 해 준다. 각 문항은 같은 방법을 따른다. 같은 행렬을 두 가지 방법으로 쓴 다음, 한 성분을 읽어 낸다. 거의 언제나 그 성분은 오른쪽 위 성분이며, 이것이 바로 F_n이다.

풀이

행렬 공식

$n = 1$일 때 좌변은 $\begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{Q}$이다. $F_2 = F_1 + F_0 = 1$이기 때문이다. 따라서 $n = 1$일 때 결과가 성립한다.

어떤 $n \geq 1$에 대하여 성립한다고 가정하자. 그러면

$$\mathbf{Q}^{n+1} = \mathbf{Q}^n \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} + F_n & F_{n+1} \\ F_n + F_{n-1} & F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix},$$

이며, 여기서 점화식(recurrence)을 두 번 사용하였다. 이것은 n을 $n+1$로 바꾼 공식이므로, 수학적 귀납법(induction)에 의하여 모든 양의 정수 n에 대하여 성립한다.

소문항 (i)

행렬식은 곱을 보존하므로 $\det(\mathbf{Q}^n) = (\det \mathbf{Q})^n = (0-1)^n = (-1)^n$이다. 같은 행렬식을 성분으로부터 계산하면

$$\det(\mathbf{Q}^n) = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2,$$

이므로 요구된 대로 $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$이다. (이것은 카시니 항등식(Cassini's identity)이다.)

소문항 (ii)

지수 법칙에 의하여 $\mathbf{Q}^{m+n} = \mathbf{Q}^m\mathbf{Q}^n$이다.

$$\begin{pmatrix} F_{m+n+1} & F_{m+n} \\ F_{m+n} & F_{m+n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

곱의 오른쪽 위 성분은 $\mathbf{Q}^m$의 첫째 행과 $\mathbf{Q}^n$의 둘째 열의 곱, 곧 $F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1}$이다. 오른쪽 위 성분을 비교하면

$$F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1}.$$

을 얻는다.

소문항 (iii)

직접 계산하면

$$\mathbf{Q}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{I} + \mathbf{Q}.$$

이다. (이것은 황금비(golden ratio)가 만족하는 방정식 $x^2 = 1 + x$의 행렬 버전이다.)

아래 문항들에서, $\mathbf{Q}^k$의 오른쪽 위 성분은 모든 $k \geq 1$에 대하여 F_k이고, $k = 0$일 때도 마찬가지임에 주목하자. $\mathbf{Q}^0 = \mathbf{I}$의 오른쪽 위 성분은 $0 = F_0$이기 때문이다. 행렬의 합에서 오른쪽 위 성분을 취하는 것은 선형(linear)이므로, $\sum c_k\mathbf{Q}^k$의 오른쪽 위 성분은 $\sum c_kF_k$이다.

(a) $\mathbf{Q}^2 = \mathbf{I} + \mathbf{Q}$와 $\mathbf{A} = \mathbf{Q}$로 둔 이항정리를 사용하면

$$\mathbf{Q}^{2n} = (\mathbf{Q}^2)^n = (\mathbf{I} + \mathbf{Q})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\mathbf{Q}^k.$$

이다. 좌변의 오른쪽 위 성분은 F_{2n}이고, 우변의 오른쪽 위 성분은 $\sum_k \binom{n}{k}F_k$이다. 따라서 $F_{2n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}F_k$이다.

(b) 먼저 같은 방식으로 $\mathbf{Q}^3$을 구한다.

$$\mathbf{Q}^3 = \mathbf{Q}\,\mathbf{Q}^2 = \mathbf{Q}(\mathbf{I} + \mathbf{Q}) = \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^2 = \mathbf{Q} + \mathbf{I} + \mathbf{Q} = \mathbf{I} + 2\mathbf{Q}.$$

이제 $\mathbf{A} = 2\mathbf{Q}$로 두고 이항정리를 적용하면

$$\mathbf{Q}^{3n} = (\mathbf{I} + 2\mathbf{Q})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \mathbf{Q}^k,$$

이고, 오른쪽 위 성분을 비교하면 $F_{3n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k F_k$를 얻는다.

둘째 항등식을 위해 $\mathbf{Q}^{3n} = \mathbf{Q}^n \mathbf{Q}^{2n}$으로 쓰고 (a)의 전개를 사용하면

$$\mathbf{Q}^{3n} = \mathbf{Q}^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathbf{Q}^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathbf{Q}^{n+k}.$$

이다. $\mathbf{Q}^{n+k}$의 오른쪽 위 성분은 F_{n+k}이므로 $F_{3n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_{n+k}$이다.

(c)

? **생각해 보기** 부호 $(-1)^{n+k}$가 나오게 하려면 어떤 행렬을 n제곱해야 할까?

부호 $(-1)^{n+k} = (-1)^{n-k}$는 $(\mathbf{Q} - \mathbf{I})^n$을 전개할 때 나타나는 것이다. 사용이 허용된 이항정리의 꼴에 맞추기 위해 $\mathbf{Q} - \mathbf{I} = -\big(\mathbf{I} + (-\mathbf{Q})\big)$로 쓰면

$$(\mathbf{Q} - \mathbf{I})^n = (-1)^n \big(\mathbf{I} + (-\mathbf{Q})\big)^n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \mathbf{Q}^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} \binom{n}{k} \mathbf{Q}^k.$$

이다. 양변에 $\mathbf{Q}^n$을 곱하면

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} \binom{n}{k} \mathbf{Q}^{n+k} = \mathbf{Q}^n (\mathbf{Q} - \mathbf{I})^n = \big(\mathbf{Q}(\mathbf{Q} - \mathbf{I})\big)^n,$$

이다. 마지막 단계가 허용되는 것은 $\mathbf{Q}$와 $\mathbf{Q} - \mathbf{I}$가 교환 가능(commute)하기 때문이며(둘 다 $\mathbf{Q}$에 대한 다항식(polynomial)이다), 따라서 인수들을 다시 묶을 수 있다. 그런데 (iii)에 의하여 $\mathbf{Q}(\mathbf{Q} - \mathbf{I}) = \mathbf{Q}^2 - \mathbf{Q} = \mathbf{I}$이므로 전체 합은 $\mathbf{I}^n = \mathbf{I}$와 같다.

$\mathbf{I}$의 오른쪽 위 성분은 0이고, 좌변의 오른쪽 위 성분은 $\sum_k (-1)^{n+k} \binom{n}{k} F_{n+k}$이다. 따라서

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} \binom{n}{k} F_{n+k} = 0.$$

이다. 덤으로, 왼쪽 위 성분을 비교하면 $\sum_k (-1)^{n+k} \binom{n}{k} F_{n+k+1} = 1$을 얻는다.

검산

- (i)에서 $n = 5$: $F_6 F_4 - F_5^2 = 8 \cdot 3 - 25 = -1 = (-1)^5$.
- (ii)에서 $m = 3, n = 4$: $F_4 F_4 + F_3 F_3 = 9 + 4 = 13 = F_7$.
- (a)에서 $n = 4$: $0 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 21 = F_8$.

- (b)에서 $n = 3$: $3 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 \cdot 1 + 8 \cdot 2 = 34 = F_9$이고, 또한 $F_3 + 3F_4 + 3F_5 + F_6 = 2 + 9 + 15 + 8 = 34$.
- (c)에서 $n = 3$: $-F_3 + 3F_4 - 3F_5 + F_6 = -2 + 9 - 15 + 8 = 0$.

다섯 항등식 모두 59 이하의 모든 n에 대하여(그리고 (ii)에서는 49 이하의 모든 m, n에 대하여) 컴퓨터로도 확인하였다.

흔한 실수

- (ii)에서 엉뚱한 성분을 비교하거나 행과 행을 곱하면 그럴듯해 보이지만 틀린 공식이 나온다. $\mathbf{Q}^m\mathbf{Q}^n$의 오른쪽 위 성분은 $\mathbf{Q}^m$의 첫째 행과 $\mathbf{Q}^n$의 둘째 열을 사용한다.
- 교환 가능하지 않은 행렬에 대하여 $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^n$의 이항정리를 사용하는 실수. 여기서는 모든 행렬이 $\mathbf{Q}$에 대한 다항식이므로 모두 교환 가능하지만, 이 점을 밝혀 둘 가치가 있다.
- $k = 0$인 항을 빠뜨리는 실수. 이 항은 $\mathbf{I}$를 더하며, 그 오른쪽 위 성분은 $F_0 = 0$이다.

STEP 너머

관계식 $\mathbf{Q}^2 = \mathbf{I} + \mathbf{Q}$는 $\mathbf{Q}$에 대한 케일리-해밀턴 정리(Cayley–Hamilton theorem)이다. 모든 정사각행렬은 자기 자신의 특성방정식(characteristic equation)을 만족하며, 여기서 그 방정식은 $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$이다. 고윳값(eigenvalues)이 $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$인 $\mathbf{Q}$를 대각화(diagonalising)하면 F_n에 대한 비네(Binet)의 닫힌 공식을 얻고, 행렬의 거듭제곱은 반복제곱(repeated squaring)으로 F_n을 빠르게 계산하는 방법도 제공한다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 고윳값을 소개할 때 피보나치 수를 정확히 이런 방식으로 다룬다.

풀이

STEP II 2023, 문제 7

순수수학 • 두 제곱수의 합

STEP II 2023, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

이 문제는 *Beyond STEP*의 1.6 절 **두 제곱수의 합**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch01/two-squares.html

핵심 아이디어

두 제곱수의 합 $x^2 + y^2$은 $|x + y\mathrm{i}|^2$이다. 그러면 소문항 (i)은 두 제곱수의 합 두 개를 곱한 것이 다시 두 제곱수의 합이 된다는 뜻이고, 복소수(complex number)를 곱해 보면 그것이 어떤 제곱수들인지 알 수 있다. 이후의 소문항도 모두 같은 방식으로 풀린다. 각 인수를 두 제곱수의 합으로 나타내고(대개 가까운 완전제곱수(perfect square)를 찾아서), 그것들을 곱한다. 마지막 소문항은 이 과정을 거꾸로 하여, 곱하는 대신 나눈다.

풀이

소문항 (i)

$zw = (a + b\mathrm{i})(c + d\mathrm{i}) = (ac - bd) + (ad + bc)\mathrm{i}$이므로

$$\begin{aligned} |zw|^2 &= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \\ &= a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2 \\ &= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \\ &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = |z|^2|w|^2. \end{aligned}$$

$|zw|$와 $|z||w|$는 모두 음이 아니므로, 양변의 제곱근을 취하면 요구한 대로 $|zw| = |z||w|$를 얻는다.

이후에는 제곱한 꼴을 사용한다. z와 w의 실수부와 허수부가 정수이면

$$|z|^2\,|w|^2 = |zw|^2 = (\operatorname{Re} zw)^2 + (\operatorname{Im} zw)^2.$$

소문항 (ii)

여기서 $|2+\mathrm{i}|^2 = 4+1 = 5$이고 $|10+11\mathrm{i}|^2 = 100+121 = 221$이다. 두 수의 곱은

$$(2+\mathrm{i})(10+11\mathrm{i}) = 20+22\mathrm{i}+10\mathrm{i}-11 = 9+32\mathrm{i},$$

이므로 소문항 (i)에 의해 $9^2+32^2 = 5\times 221$이다. (실제로 $81+1024 = 1105$이다.) 따라서 $h=9, k=32$가 조건을 만족한다.

대신 $10-11\mathrm{i}$(절댓값(modulus)이 같다)를 사용하면 $(2+\mathrm{i})(10-11\mathrm{i}) = 31-12\mathrm{i}$이므로, $h=31, k=12$도 조건을 만족한다.

소문항 (iii)

이 수는 5로 끝나므로 $8045 = 5\times 1609$이고, 앞에서처럼 $5 = |2+\mathrm{i}|^2$이다. 이제 1609를 두 제곱수의 합으로 나타내야 한다. 이 수는 $40^2 = 1600$보다 조금 크고, $1609-1600 = 9 = 3^2$이므로 $1609 = |40+3\mathrm{i}|^2$이다. 그러면

$$(2+\mathrm{i})(40+3\mathrm{i}) = 80+6\mathrm{i}+40\mathrm{i}-3 = 77+46\mathrm{i},$$

이고, 소문항 (i)에 의해

$$77^2+46^2 = 5\times 1609 = 8045.$$

따라서 $m=77, n=46$이다. (대신 $3+40\mathrm{i}$를 사용하면 $-34+83\mathrm{i}$를 얻으므로 $34^2+83^2 = 8045$도 성립한다.)

소문항 (iv)

여기서 추가된 인수는 $36 = 6^2 = |6|^2$으로, 실수 6의 절댓값의 제곱이다. $102+201\mathrm{i}$에 6을 곱하면 두 부분이 단순히 같은 배율로 커진다.

$$(6\times 102)^2+(6\times 201)^2 = 36\,(102^2+201^2) = 36\times 50805.$$

따라서 $p=612, q=1206$이다.

소문항 (v)

아이디어는 가우스 정수(Gaussian integers)를 써서 25를 $|\alpha|^2$으로 나타내는 서로 다른 방법을 찾고, 각각에 1002082의 한 가지 고정된 표현을 곱하는 것이다.

먼저 1002082는 $1001^2 = 1002001$보다 조금 크고,

$$1002082 - 1002001 = 81 = 9^2,$$

이므로 $1002082 = 1001^2 + 9^2 = |1001 + 9\mathrm{i}|^2$이다.

다음으로 $25 = |5|^2 = |3 + 4\mathrm{i}|^2 = |3 - 4\mathrm{i}|^2$이다. 이들 각각에 $1001 + 9\mathrm{i}$를 곱하면 한 쌍씩을 얻는다.

$$\begin{aligned} 5(1001 + 9\mathrm{i}) &= 5005 + 45\mathrm{i}, \\ (3 + 4\mathrm{i})(1001 + 9\mathrm{i}) &= 3003 + 27\mathrm{i} + 4004\mathrm{i} - 36 = 2967 + 4031\mathrm{i}, \\ (3 - 4\mathrm{i})(1001 + 9\mathrm{i}) &= 3003 + 27\mathrm{i} - 4004\mathrm{i} + 36 = 3039 - 3977\mathrm{i}. \end{aligned}$$

소문항 (i)에 의해 각각의 절댓값의 제곱은 25×1002082이다. 각 부분의 절댓값을 취하고 작은 것을 앞에 두면, $r < s$인 서로 다른 세 쌍은

$$(r, s) = (45,\ 5005), \qquad (2967,\ 4031), \qquad (3039,\ 3977).$$

? 생각해 보기 네 번째 쌍을 얻기 위해 $4 + 3\mathrm{i}$도 사용하면 왜 안 될까?

$4 + 3\mathrm{i} = \mathrm{i}(3 - 4\mathrm{i})$이고, i를 곱하는 것은 (부호를 무시하면) 실수부와 허수부를 맞바꿀 뿐이기 때문이다. 이렇게 하면 순서만 뒤바뀐 $(3039, 3977)$이 다시 나오므로 새로운 것을 얻지 못한다. 실질적으로 서로 다른 선택은 $5, 3 + 4\mathrm{i}, 3 - 4\mathrm{i}$이다.

소문항 (vi)

이제 이 방법을 거꾸로 적용한다. 다시 가까운 제곱수를 찾으면 $1002037 - 1002001 = 36 = 6^2$이므로

$$1002037 = 1001^2 + 6^2 = |1001 + 6\mathrm{i}|^2,$$

이고, 또한 $109 = 10^2 + 3^2 = |10 + 3\mathrm{i}|^2$이다. 정수 t, u에 대하여 $1001 + 6\mathrm{i} = (10 + 3\mathrm{i})(t + u\mathrm{i})$로 쓸 수 있다면, 소문항 (i)에 의해

$$1002037 = 109\,(t^2 + u^2),$$

이고, 109로 나누면($109 \times 9193 = 1002037$을 이용하여) $t^2 + u^2 = 9193$을 얻는다.

그래서 분모와 분자에 켤레복소수(conjugate) $10 - 3\mathrm{i}$를 곱하여 나눗셈을 한다.

$$\begin{aligned} \frac{1001 + 6\mathrm{i}}{10 + 3\mathrm{i}} &= \frac{(1001 + 6\mathrm{i})(10 - 3\mathrm{i})}{109} = \frac{10010 - 3003\mathrm{i} + 60\mathrm{i} + 18}{109} \\ &= \frac{10028 - 2943\mathrm{i}}{109} = 92 - 27\mathrm{i}, \end{aligned}$$

$109 \times 92 = 10028$이고 $109 \times 27 = 2943$이기 때문이다. 나눗셈이 나누어떨어지므로 $1001 + 6\mathrm{i} = (10 + 3\mathrm{i})(92 - 27\mathrm{i})$이고, 따라서

$$92^2 + 27^2 = 9193.$$

그러므로 $t = 92$, $u = 27$이다. 검산해 보면 $8464 + 729 = 9193$이다.

? 생각해 보기 나눗셈이 나누어떨어지지 않았다면 어떻게 할까?

그렇다면 다른 켤레복소수를 시도한다. 대신 $10 - 3\mathrm{i}$로 나누면 $(9992 + 3063\mathrm{i})/109$가 되는데, 이것은 가우스 정수가 아니다($9992$는 109의 배수가 아니다). 109는 소수(prime)이므로 두 선택 중 하나는 반드시 성공한다. 이것이 아래 STEP 너머에서 언급하는 가우스 정수에 관한 사실이다. $1001 - 6\mathrm{i}$를 나누면 새로운 것은 없고 이들의 켤레복소수만 나온다.

검산

각 답은 직접 계산하여 확인할 수 있다. $9^2 + 32^2 = 1105 = 5 \times 221$; $77^2 + 46^2 = 5929 + 2116 = 8045$; $612^2 + 1206^2 = 1828980 = 36 \times 50805$; (v)에서는 $45^2 + 5005^2$, $2967^2 + 4031^2$, $3039^2 + 3977^2$이 모두 25052050과 같다; 그리고 $92^2 + 27^2 = 9193$이다. 컴퓨터로 탐색해 보면 이 결과들이 확인되며, 25×1002082는 실제로 $0 < r < s$인 표현을 여섯 개 가진다는 것도 알 수 있다(나머지 셋은 $(721, 4953)$, $(2079, 4553)$, $(2395, 4395)$이다). 이들은 1002082 자체의 두 번째 표현에서 나오므로, 서로 다른 세 쌍이면 어느 것이든 답으로 인정된다. 마찬가지로 $9193 = 48^2 + 83^2$도 성립한다.

흔한 실수

- (v)에서 $(3 + 4\mathrm{i})$와 $(4 + 3\mathrm{i})$가 서로 다른 쌍을 준다고 세는 것. 이 둘은 순서만 반대인 같은 쌍을 준다.
- (vi)에서 잘못된 켤레복소수로 나누어 정수가 아닌 결과를 얻고 포기하는 것. 다른 쪽을 시도해 보라.
- 곱을 전개할 때 $\mathrm{i}^2 = -1$에서 부호를 틀리는 것. 최종 제곱수의 합은 항상 직접 확인하라.

STEP 너머

a, b가 정수인 수 $a + b\mathrm{i}$들은 **가우스 정수**를 이루며, 이는 보통의 정수처럼 소인수분해(prime factorisation)가 유일한 환(ring)이다. $p \equiv 1 \pmod 4$인 보통의 소수는 $(x + y\mathrm{i})(x - y\mathrm{i})$로 분해되는데, 이것이 페르마(Fermat)의 두 제곱수 정리(two-squares theorem)이다. 이 인수들을 나누어 배분하는 방법의 수를 세면 어떤 수가 정확히 몇 개의 표현을 가지는

지, 그리고 왜 1002082가 우리가 사용한 하나보다 많은 표현을 가지는지 설명할 수 있다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 두 제곱수의 합을 아름답게 다루고, Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 가우스 정수를 환으로서 다룬다.

풀이

STEP II 2023, 문제 8

순수수학 • 3차원 벡터

> **STEP II 2023, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

핵심 아이디어

세 쌍의 마주 보는 모서리(opposite edges)에 이름을 붙이면 소문항 (i)은 세 개의 일차방정식(linear equations)이 된다. 그다음부터는 $|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$를 이용해 각 길이 조건을 내적(dot product)으로 바꾸기만 하면 모든 것이 따라 나온다. 세 내적 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$, $\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}$를 모두 $|\mathbf{a}|^2$, $|\mathbf{b}|^2$, $|\mathbf{c}|^2$로 나타내고 나면, 소문항 (iii)과 (iv)는 괄호를 전개하는 일에 불과하다.

풀이

소문항 (i)

사면체(tetrahedron)를 $OABC$라 하자. 여섯 개의 모서리는 꼭짓점을 공유하지 않는 모서리 쌍 세 개로 나뉜다.

$$OA\text{와}BC, \qquad OB\text{와}CA, \qquad OC\text{와}AB.$$

$OA = p$, $BC = p'$, $OB = q$, $CA = q'$, $OC = r$, $AB = r'$이라 하자. 네 면의 둘레(perimeter)는 다음과 같다.

$$OAB : p+q+r', \qquad OAC : p+r+q',$$
$$OBC : q+r+p', \qquad ABC : p'+q'+r'.$$

사면체가 이등변 사면체(*isosceles tetrahedron*)**이면** $p = p'$, $q = q'$, $r = r'$이고, 네 둘레는 모두 $p+q+r$과 같다.

역으로, 네 둘레가 모두 같다고 하자. $X = p - p'$, $Y = q - q'$, $Z = r - r'$이라 놓는다. 처음

세 면을 각각 ABC와 비교하면

$$(p+q+r')-(p'+q'+r')=X+Y=0,$$
$$(p+r+q')-(p'+q'+r')=X+Z=0,$$
$$(q+r+p')-(p'+q'+r')=Y+Z=0.$$

세 식을 모두 더하면 $2(X+Y+Z)=0$이다. $X+Y+Z=0$에서 각 식을 차례로 빼면 $Z=0, Y=0, X=0$을 얻는다. 따라서 $p=p', q=q', r=r'$이므로 사면체는 이등변 사면체이다. 이로써 양방향이 모두 증명된다.

소문항 (ii)

$\overrightarrow{BC}=\mathbf{c}-\mathbf{b}$이므로 조건 $OA=BC$는

$$|\mathbf{a}|^2=|\mathbf{c}-\mathbf{b}|^2=|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2-2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c},$$

를 뜻하고, 이를 정리하면 요구한 대로 $2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2-|\mathbf{a}|^2$이다.

나머지 두 쌍의 마주 보는 모서리($OB=CA$와 $OC=AB$)에 같은 논증을 적용하면

$$2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{c}|^2-|\mathbf{b}|^2,\qquad 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2-|\mathbf{c}|^2.$$

를 얻는다. 이 두 식을 더하면 $|\mathbf{b}|^2$항과 $|\mathbf{c}|^2$항이 소거된다.

$$2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=2|\mathbf{a}|^2,\quad \text{따라서}\quad \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=|\mathbf{a}|^2.$$

세 내적 공식은 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$에 대해 대칭이므로, 같은 방법으로

$$\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}+\mathbf{a})=|\mathbf{b}|^2,\qquad \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})=|\mathbf{c}|^2.$$

소문항 (iii)

$S=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2$이라 하자. 소문항 (ii)에서 얻은 $2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$, $2\,\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}$, $2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$에 대한 세 공식을 더하면, 각 길이의 제곱이 더하기 부호로 두 번, 빼기 부호로 한 번 나타나므로

$$2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})=S.$$

O로부터의 거리.

$$OG^2=\tfrac{1}{16}|\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}|^2=\tfrac{1}{16}\big(S+2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})\big)=\tfrac{1}{16}(2S)=\tfrac{1}{8}S.$$

A로부터의 거리. 이때 $\overrightarrow{AG}=\tfrac{1}{4}(\mathbf{b}+\mathbf{c}-3\mathbf{a})$이고,

$$\begin{aligned}|\mathbf{b}+\mathbf{c}-3\mathbf{a}|^2&=|\mathbf{b}+\mathbf{c}|^2-6\,\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})+9|\mathbf{a}|^2\\&=|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2+2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}-6|\mathbf{a}|^2+9|\mathbf{a}|^2 &&\text{이용: } \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=|\mathbf{a}|^2\\&=|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2+\big(|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2-|\mathbf{a}|^2\big)+3|\mathbf{a}|^2\\&=2S.\end{aligned}$$

따라서 $AG^2 = \frac{1}{16}(2S) = \frac{1}{8}S$이기도 하다.

B와 C로부터의 거리. $\mathbf{a}$에 대해 사용한 모든 사실은 $\mathbf{b}$와 $\mathbf{c}$에 대해서도 똑같이 성립하고(소문항 (ii)의 끝부분), S는 대칭적이다. 따라서 똑같은 계산으로 $BG^2 = CG^2 = \frac{1}{8}S$를 얻는다.

그러므로 G는 네 꼭짓점 모두로부터 거리 $\sqrt{S/8}$에 있다.

소문항 (iv)

제시된 벡터를 전개한다.

$$\begin{aligned}|\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}|^2 &= S - 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} + 2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} \\ &= S - 2|\mathbf{a}|^2 + 2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} && \text{소문항 (ii)에 의해} \\ &= \left(|\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2 - |\mathbf{a}|^2\right) + 2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = 4\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}.\end{aligned}$$

따라서

$$\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = \tfrac{1}{4}|\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}|^2 \geq 0,$$

이고, 각 BOC는 둔각(obtuse angle)이 아니다.

> **생각해 보기** 이것은 열두 개의 각 중 하나일 뿐이다. 같은 작업을 반복하지 않고 나머지 각을 모두 처리하려면 어떻게 해야 할까?

$\mathbf{b}-\mathbf{c}-\mathbf{a}$와 $\mathbf{c}-\mathbf{a}-\mathbf{b}$로 같은 계산을 하면 $\mathbf{c}\cdot\mathbf{a} \geq 0$과 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \geq 0$을 얻으므로, O에서의 각 중 둔각은 없다. 이등변이라는 성질은 사면체 자체의 성질이지 꼭짓점에 이름을 붙이는 방식에 달린 것이 아니므로, 어느 꼭짓점이든 O라 부를 수 있었다. 따라서 같은 논증이 A, B, C에서도 성립한다. (다른 방법으로, 모든 면의 세 변이 p, q, r이므로 네 면은 모두 합동(congruent)인 삼각형이다. 그 각들은 정확히 O에서의 세 각 BOC, COA, AOB이다.) 그러므로 한 꼭짓점에서 만나는 모서리 사이의 각 중 둔각은 하나도 없다.

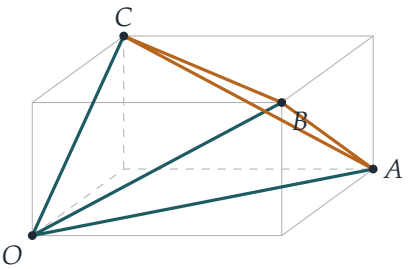
직각은? 등호 $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = 0$은 $|\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}| = 0$, 즉 $\mathbf{a} = \mathbf{b}+\mathbf{c}$일 때만 성립한다. 그런데 그러면 A는 O, B, C를 지나는 평면 위에 놓이고(실제로 $OBAC$는 직사각형이다), $OABC$는 사면체가 아니라 평평한 도형이 된다. 모든 각에서 마찬가지이므로 **어떤 각도 직각(right angle)이 될 수 없다**. 즉 진짜 이등변 사면체에서는 모든 면의 각이 예각(acute angle)이다.

검산

- 구체적인 예: 세 변의 길이가 x, y, z인 직육면체(cuboid)를 잡고, 어느 두 점도 직육면체의 모서리로 연결되지 않도록 네 꼭짓점을 고른다. 예를 들어 $O = (0,0,0)$, $A = (x,y,0)$, $B = (x,0,z)$, $C = (0,y,z)$이다. 마주 보는 모서리는 마주 보는 면의 대각선이므로 길이가 같다. $x = 1, y = 2, z = 3$이면 $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = 9$이고 $\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c} = (0,0,-6)$이며, 실제로

$\frac{1}{4} \cdot 36 = 9$이다. 또한 $G = (\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2})$는 직육면체의 중심으로, 모든 꼭짓점으로부터 거리 $\sqrt{14}/2$에 있으며, 이는 $S = 5 + 10 + 13 = 28$일 때의 $\sqrt{S/8}$과 일치한다.

- 평평한 경우: $\mathbf{b} = (3,0,0)$, $\mathbf{c} = (0,4,0)$, $\mathbf{a} = (3,4,0)$이면 마주 보는 "모서리"(변과 대각선)의 길이가 같고 직각을 가지는 직사각형이 된다. 이것이 바로 우리가 제외한 퇴화(degenerate) 경우이다.
- 이 항등식들은 직육면체를 바탕으로 한 수천 개의 무작위 예에서 컴퓨터로도 확인되었다.



흔한 실수

- 소문항 (i)에서 한 방향만 증명하는 것. "필요충분조건(if and only if)"은 양방향이 모두 필요하며, 실질적인 내용이 있는 쪽은 역(converse)이다.
- 소문항 (iv)에서 직각인 경우를 제대로 배제하지 않는 것. $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 0$이면 $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$가 되어 네 점이 한 평면 위에 놓인다(coplanar).
- O에서의 각만 확인하고 멈추는 것. 나머지 세 꼭짓점에서도 같은 결론이 성립하는 이유를 밝혀야 한다.

STEP 너머

위의 직육면체 그림이 이야기의 전부이다. 모든 이등변 사면체(**등면사면체**(disphenoid)라고도 한다)는 직육면체의 꼭짓점을 하나 걸러 하나씩 골라서 얻어진다. 그러면 소문항 (iii)은 무게중심(centroid)이 직육면체의 중심이라는 뜻이고, 소문항 (iv)는 직육면체의 변의 길이가 양수라는 뜻이다. 길이 조건을 내적으로, 나아가 내적들로 이루어진 **그람 행렬**(Gram matrix)로 바꾸는 것은 대학 1학년 선형대수(linear algebra)와 기하학의 표준적인 도구이다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수 입문)에서 이 내용이 전개되는 과정을 살펴보기 좋다.

풀이

STEP II 2023, 문제 9

역학 • 비탈면 위의 연결된 입자

STEP II 2023, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

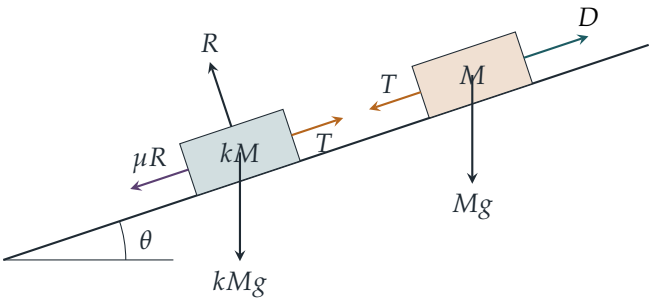
핵심 아이디어

세 가지 상황 각각에서 트럭과 트레일러에 대해 따로 뉴턴의 제2법칙(Newton's second law)을 세운다. 비탈을 내려가는 것은 각이 $-\alpha$인 비탈을 올라가는 것과 같으므로, 한 벌의 방정식으로 세 경우를 모두 다룰 수 있다. 트럭의 방정식 하나만으로도 (i)의 관계식이 거의 저절로 나온다. (ii)는 결국 $1-\cos\alpha$와 $\sin\alpha$를 비교하는 문제로 귀결된다.

풀이

트럭과 트레일러를 운동 방향을 따라 놓인 가볍고 단단한 막대로 연결된 입자로 모형화한다. 둘 다 트럭이 가는 방향으로 움직이므로, 트레일러에 작용하는 마찰력(friction)은 운동 반대 방향으로 크기 μR만큼 작용한다. 여기서 R는 트레일러에 작용하는 수직항력(normal reaction)이다. 장력(tension) T는 트레일러를 앞으로 당기고 트럭을 뒤로 당긴다. (T가 음수로 나온다면 막대가 압축력(thrust)을 받는 것이며, 계산은 달라지지 않는다.)

비탈의 각을 θ로 두되, $\theta=\alpha$는 오르막, $\theta=0$은 평지, $\theta=-\alpha$는 내리막이 되도록 잰다.



비탈 위쪽 방향의 가속도(acceleration)를 a라 하고, 각 물체에 대해 비탈 방향으로, 그리고 트레일러에 대해서는 비탈에 수직인 방향으로($R = kMg\cos\theta$) 힘을 분해하면 다음을 얻는다.

$$\text{트럭:} \qquad D - T - Mg\sin\theta = Ma, \tag{1}$$

$$\text{트레일러:} \qquad T - kMg\sin\theta - \mu kMg\cos\theta = kMa. \tag{2}$$

(1)과 (2)를 더하면 T가 소거된다.

$$a = \frac{D}{(1+k)M} - g\sin\theta - \frac{\mu kg\cos\theta}{1+k}.$$

이를 (1)에 대입하면 $T = D - Mg\sin\theta - Ma$이므로

$$T = D - \frac{D}{1+k} + \frac{\mu kMg\cos\theta}{1+k} = \frac{kD + \mu kMg\cos\theta}{1+k}.$$

$\sin\theta$ 항이 상쇄되므로, 장력은 오직 $\cos\theta$를 통해서만 θ에 의존한다.

소문항 (i)

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$이므로 $\theta = \alpha$인 경우와 $\theta = -\alpha$인 경우의 장력은 같다.

$$T_1 = T_3 = \frac{kD + \mu kMg\cos\alpha}{1+k}, \qquad T_2 = \frac{kD + \mu kMg}{1+k}.$$

두 번째 결과를 얻으려면 세 경우의 트럭 방정식 (1)만 있으면 된다.

$$\begin{aligned} Ma_1 &= D - T_1 - Mg\sin\alpha, \\ Ma_2 &= D - T_2, \\ Ma_3 &= D - T_3 + Mg\sin\alpha. \end{aligned}$$

첫째 식과 셋째 식을 더하고 $T_3 = T_1$을 쓰면 $M(a_1 + a_3) = 2D - 2T_1$이다. 여기서 가운데 식의 두 배를 빼면

$$M(a_1 + a_3 - 2a_2) = (2D - 2T_1) - (2D - 2T_2) = 2(T_2 - T_1),$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

소문항 (ii)(a)

첫째 부등식. (i)에 의해 $a_2 < \frac{1}{2}(a_1 + a_3)$는 $T_2 > T_1$과 동치이다($M > 0$이므로). 위의 식들로부터

$$T_2 - T_1 = \frac{\mu kMg\,(1 - \cos\alpha)}{1+k} > 0,$$

인데, 이는 $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$에서 $\cos\alpha < 1$이고, 마찰이 작용하므로 $\mu > 0$이기 때문이다. 따라서 $a_2 < \frac{1}{2}(a_1 + a_3)$이다.

둘째 부등식. $\frac{1}{2}(a_1 + a_3) < a_3$는 $a_1 < a_3$과 동치이다. a에 대한 식에서 D 항과 마찰 항은 $\theta = \pm\alpha$에서 같으므로

$$a_3 - a_1 = 2g\sin\alpha > 0.$$

(같은 이야기로, $T_1 = T_3$을 이용해 트럭 방정식끼리 빼면 $M(a_3 - a_1) = 2Mg\sin\alpha$이다.) 따라서

$$a_2 < \tfrac{1}{2}(a_1 + a_3) < a_3.$$

소문항 (ii)(b)

a에 대한 식에 $\theta = 0$과 $\theta = \alpha$를 넣으면

$$a_2 - a_1 = g\sin\alpha - \frac{\mu k g\,(1-\cos\alpha)}{1+k} = g\left[\sin\alpha - \frac{\mu k}{1+k}(1-\cos\alpha)\right].$$

> **생각해 보기** 오르막을 오르면 가속도가 $g\sin\alpha$만큼 줄어들지만, 수직항력이 줄어드는 덕분에 마찰도 어느 정도 줄어든다. 어느 효과가 더 클까?

마찰이 줄어드는 효과가 더 작다. 먼저 $\dfrac{k}{1+k} < 1$이고 $\mu < 1$이므로 $0 \le \dfrac{\mu k}{1+k} < 1$이다. 다음으로 반각 공식(half-angle formulae)을 쓰면

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha, \qquad \sin\alpha = 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\alpha,$$

이므로, $0 < \frac{1}{2}\alpha < \frac{1}{4}\pi$에서 $\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \tan\tfrac{1}{2}\alpha < 1$이다. 그러므로

$$\frac{\mu k}{1+k}(1-\cos\alpha) < 1 - \cos\alpha < \sin\alpha,$$

이며, $1 - \cos\alpha > 0$이므로 첫째 부등식은 등호 없이 성립한다. 따라서 $a_2 - a_1 > 0$, 즉 $a_1 < a_2$이다. $\mu < 1$이라는 조건은 바로 여기서 쓰인다. 트레일러가 매우 무겁고 μ가 크며 비탈이 가파르면, 마찰이 줄어드는 효과가 $g\sin\alpha$를 넘어설 수도 있다.

검산

- $M = 1000\,\mathrm{kg}$, $k = 0.5$, $\mu = 0.4$, $\alpha = 30^\circ$, $D = 5000\,\mathrm{N}$, $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$로 두자. 그러면 $a_1 \approx -2.698$, $a_2 \approx 2.027$, $a_3 \approx 7.102\,\mathrm{m\,s^{-2}}$이고, $T_1 = T_3 \approx 2798\,\mathrm{N}$, $T_2 \approx 2973\,\mathrm{N}$이다. 실제로 $\frac{1}{2}(a_1 + a_3) \approx 2.202$는 a_2와 a_3 사이에 엄격하게 놓이며, $a_1 < a_2$이다. $\mu < 1$인 무작위 매개변수 조합 여러 개에 대해 컴퓨터로 확인한 결과, 모든 항등식과 부등식이 성립했다.

- $\mu = 0$이면 모든 비탈에서 장력은 $kD/(1+k)$이고, a_2는 정확히 a_1과 a_3의 평균이다. (ii)(a)에 마찰이 꼭 있어야 하는 이유가 이것이다.
- $\mu = 3, k = 100, \alpha = 1.5$라디안이면 $a_1 > a_2$이므로, (b)의 조건 $\mu < 1$은 정말로 중요하다.

흔한 실수

- 비탈에서의 마찰력을 μkMg로 쓰는 것. 비탈에서의 수직항력은 $kMg\cos\alpha$이며, 이 차이가 소문항 (ii)의 핵심 전부이다.
- 내리막에서 무게 성분의 부호를 잘못 잡는 것. 모든 것을 θ로 쓴 뒤 $\theta = -\alpha$를 대입하면 이 실수를 피할 수 있다.
- (ii)(b)에서 $1-\cos\alpha$와 $\sin\alpha$를 비교하지 않고 $\mu k/(1+k) < 1$이라는 사실만 내세우는 것. 두 사실이 모두 필요하다.

STEP 너머

계를 여러 물체로 나누고 각각에 뉴턴의 법칙을 적용하되, 내력(internal force)이 크기가 같고 방향이 반대인 쌍으로 나타나게 하는 것은 강체(rigid-body) 역학과 다입자 역학의 기본 방법이다. 방정식들을 더하면 질량중심(centre of mass)의 운동이 나오고, 내력은 사라진다. 또한 부등식 $1-\cos\alpha < \sin\alpha$는 반각 항등식을 이용해 함수를 비교하는 작은 예이기도 한데, 이 기법은 해석학 전반에서 유용하다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 생각들을 꼼꼼하게 전개한다.

풀이

STEP II 2023, 문제 10

역학 • 포물체 궤적의 포락선

> **STEP II 2023, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

핵심 아이디어

궤적(trajectory)과 곡선 E가 **접한다**(touch)는 것은 두 곡선의 공통점을 구하는 방정식이 중근(repeated root)을 갖는다는 것과 정확히 같으므로, 소문항 (i)은 판별식(discriminant) 계산이다. 이것이 모든 각도에 대해 일어나기를 요구하면 E는 모든 궤적의 **포락선**(envelope), 곧 속력 u인 입자가 도달할 수 있는 영역의 경계가 될 수밖에 없다. 문제의 나머지 부분은 이 경계를 세 가지 관점에서 살펴본다. 어떤 점을 맞힐 수 있는가, 고정된 시각에 입자들은 어디에 있는가, 그리고 포락선 자체를 따라 미끄러지는 두 번째 입자이다.

풀이

풀이 전체에서 입자는 공기 저항(air resistance) 없이 중력만 받으며 자유롭게 움직이는 점으로 모형화하고, $c = \cos\alpha$, $s = \sin\alpha$로 둔다.

소문항 (i)

발사 후 경과한 시간을 t라 하면, P_α는 평면 $y = 0$ 위에 머물며

$$x = uct, \qquad z = ust - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

이다. $t = x/(uc)$로 시간을 소거하면 궤적은

$$z = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2c^2}.$$

이다. E와의 공통점은 $A - Bx^2 = x\tan\alpha - \dfrac{gx^2}{2u^2c^2}$을 만족한다. 즉

$$\left(\frac{g}{2u^2c^2} - B\right)x^2 - x\tan\alpha + A = 0. \qquad (*)$$

이다. 만약 x^2의 계수가 0이라면 $\tan\alpha \neq 0$이므로 $(*)$는 일차방정식이 되어 접하는 것이 아니라 한 번 교차하게 된다. 따라서 $(*)$는 진짜 이차방정식이다. 두 곡선이 정확히 한 번 접하는 것은 $(*)$가 중근을 가질 때, 곧 판별식이 0일 때이다.

$$\tan^2\alpha = 4A\left(\frac{g}{2u^2c^2} - B\right).$$

양변에 u^2c^2을 곱하면

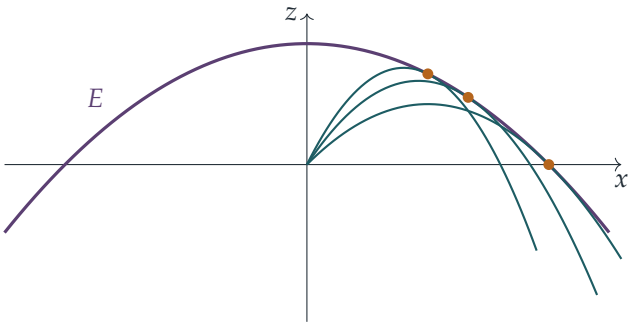
$$\begin{aligned} u^2s^2 &= 2gA - 4ABu^2c^2 \\ u^2 - u^2c^2 &= 2gA - 4ABu^2c^2 \qquad (s^2 = 1 - c^2\text{을 이용}) \\ u^2 - 2gA &= u^2(1-4AB)\cos^2\alpha, \end{aligned}$$

이 되어 원하는 식을 얻는다.

이 식이 $(0, \frac{1}{2}\pi)$의 모든 α에 대해 성립한다면, 좌변은 상수인 반면 $\cos^2\alpha$는 $(0,1)$의 모든 값을 취한다. 이 모든 값에 대해 상수가 $k\cos^2\alpha$와 같으려면 $k = 0$이어야 하고, 그러면 그 상수는 0이다. 따라서 $u^2 = 2gA$이고 $4AB = 1$이다.

$$A = \frac{u^2}{2g}, \qquad B = \frac{g}{2u^2}.$$

역으로 이 값들은 모든 α에 대해 항등식을 성립시킨다. 접점은 중근 $x = \dfrac{\tan\alpha}{2(g/(2u^2c^2) - B)} = \dfrac{u^2}{g\tan\alpha}$이다.



그림($u^2/g = 2$로 그림)은 세 궤적이 각각 호박색 점에서 E와 한 번씩 접하는 모습을 보여준다.

소문항 (ii)

모든 입자는 초기 속도를 포함하는 연직 평면 안에서 움직이며, 모든 것이 z축에 대해 대칭이다. 그러므로 z축으로부터 수평 거리가 r이고 높이가 z인 점을 잡고, 그 점을 지나는 연직 평면에서 생각한다. 이때 $\theta \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$는 그 점을 향해 수평 위로 발사한 각도이다.

$r = 0$이면 똑바로 위나 아래로 쏜 입자만 도달할 수 있다. 위로 쏜 입자는 $u^2/(2g)$ 이하의 모든 높이에 도달하고, 아래로 쏜 입자는 모든 음의 높이에 도달하므로, 축 위에서 도달 가능한 점은 $z \le u^2/(2g)$인 점들이다.

$r > 0$이면 소문항 (i)과 똑같이, $1/\cos^2\theta = 1 + \tan^2\theta$를 이용하여 입자가 그 점을 지날 조건은

$$z = r\tan\theta - \frac{gr^2}{2u^2}(1 + \tan^2\theta),$$

이다. 임의의 실숫값을 취할 수 있는 $T = \tan\theta$로 쓰면, 이것은 이차방정식

$$\frac{gr^2}{2u^2}T^2 - rT + \left(z + \frac{gr^2}{2u^2}\right) = 0,$$

이고, 이 방정식이 실근을 가질 필요충분조건은 $2gr^2/u^2 > 0$으로 나누어

$$r^2 \ge \frac{2gr^2}{u^2}\left(z + \frac{gr^2}{2u^2}\right) \iff z \le \frac{u^2}{2g} - \frac{gr^2}{2u^2},$$

이다.

따라서 $r^2 = x^2 + y^2$으로 두면, 맞힐 수 있는 점은 정확히 포물면(paraboloid)

$$z = \frac{u^2}{2g} - \frac{g}{2u^2}(x^2 + y^2),$$

위 또는 그 아래에 있는 점들이다. 이 포물면은 (소문항 (i)의 값을 넣은) E를 z축을 중심으로 회전하여 얻은 곡면이다. 곡면보다 엄밀히 아래에 있는 점은 평면 안의 두 방향으로 도달할 수 있고, 곡면 위의 점은 정확히 한 방향(소문항 (i)의 접함에 대응하는 중근)으로, 곡면보다 위의 점은 어느 방향으로도 도달할 수 없다.

소문항 (iii)

입자의 초기 속도를 $u\mathbf{n}$이라 하자. 여기서 $\mathbf{n}$은 단위벡터(unit vector)이다. 시간 t 후의 위치는

$$\mathbf{r} = ut\,\mathbf{n} - \tfrac{1}{2}gt^2\,\mathbf{k},$$

이며, $\mathbf{k}$는 위쪽을 향하는 단위벡터이다. 따라서

$$\left|\mathbf{r} - (-\tfrac{1}{2}gt^2\,\mathbf{k})\right| = |ut\,\mathbf{n}| = ut.$$

이다. 그러므로 시각 t에 모든 입자는 중심이 $(0, 0, -\frac{1}{2}gt^2)$이고 반지름이 ut인 구 위에 있다. 물리적으로 보면, 중력은 모든 입자를 똑같이 가속하므로 원점에서 자유낙하하는 점에 대해 상대적으로 보면 모든 입자는 속력 u로 직선을 따라 바깥으로 날아간다.

소문항 (iv)

Q를 발사한 후 경과한 시간을 τ라 하면, Q는 $y = 0$이고

$$x = u\tau, \qquad z = A - \tfrac{1}{2}g\tau^2.$$

이다. $\tau = x/u$를 대입하면

$$z = A - \frac{g}{2u^2}x^2 = A - Bx^2,$$

이다. 여기서 소문항 (i)의 $B = g/(2u^2)$을 이용하였다. 따라서 Q는 항상 E 위에 있다.

소문항 (v)

Q를 폭발 후 시각 T에 발사하고, 폭발 후 시각 t $(\geq T)$에 Q와 P_α가 같은 점에 있다고 하자. 그러면 $\tau = t - T$이고 두 y좌표는 모두 0이므로, x좌표와 z좌표가 일치해야 한다.

$$uct = u(t - T),$$
$$ust - \tfrac{1}{2}gt^2 = A - \tfrac{1}{2}g(t - T)^2.$$

첫 번째 식에서 $t - T = ct$이므로 $T = t(1 - c)$이다. 두 번째 식에 $t - T = ct$를 넣고 $1 - c^2 = s^2$을 이용하면

$$ust - \tfrac{1}{2}gs^2t^2 = A = \frac{u^2}{2g}.$$

? **생각해 보기** 복잡한 공식을 쓰지 않고 이 식을 t에 대해 어떻게 풀 수 있을까?

$2g$를 곱하고 모든 항을 한쪽으로 모으면 $g^2s^2t^2 - 2gus\,t + u^2 = 0$이 되는데, 이것은 완전제곱식

$$(gst - u)^2 = 0, \qquad \text{따라서} \qquad t = \frac{u}{g\sin\alpha}.$$

이다. 중근이 나오는 것은 당연하다. 충돌은 P_α의 궤적이 E에 접하는 곳에서 일어나야 하는데, 그곳이 두 경로가 공유하는 유일한 점이기 때문이다. 실제로 그때 P_α는 $x = uct = u^2/(g\tan\alpha)$에 있으며, 이는 소문항 (i)에서 구한 접점이다. 그러므로

$$T = t(1 - \cos\alpha) = \frac{u(1 - \cos\alpha)}{g\sin\alpha},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. $0 < 1 - \cos\alpha < 1$이므로 $0 < T < t$이고, 따라서 Q는 실제로 폭발 후, 충돌 전에 발사된다.

검산

- 소문항 (i)에서 $\alpha = \frac{1}{4}\pi$이면 접점은 $x = u^2/g, z = 0$이다. 이는 평지에서의 최대 사거리이며, 도달 가능 영역의 경계는 실제로 이 점을 지나야 한다.

- 소문항 (ii)에서 축 $r = 0$ 위의 한계는 $z \leq u^2/(2g)$로, 똑바로 위로 쏜 입자의 최고 높이이다.
- 소문항 (v)에서 $u = 7$, $g = 9.8$, $\alpha = 0.5$이면 공식은 $T \approx 0.182$를 준다. 두 운동을 시간에 따라 단계적으로 진행해 보면 입자들이 $t = u/(g\sin\alpha) \approx 1.49$에서 만나며, Q를 0.05만 늦게 발사해도 서로 빗나감을 확인할 수 있다.
- $\alpha \to \frac{1}{2}\pi$이면 $T \to u/g$이고 $t \to u/g$이다. P_α는 거의 똑바로 위로 올라가 시각 u/g에 E의 꼭대기 $(0, 0, A)$에 도착하는데, 바로 그때 Q가 그곳에서 출발한다.

흔한 실수

- 공통점 방정식을 먼저 x에 대한 하나의 이차방정식으로 정리하지 않고 판별식을 0으로 놓아, x^2 계수에서 $-B$ 항을 빠뜨리는 실수.
- 소문항 (ii)에서 경계 곡면만 기술하는 실수. 문제는 집합 전체를 묻고 있으며, 그것은 포물면 위와 그 아래의 입체 영역이다.
- 소문항 (v)에서 두 입자에 같은 시간 변수를 쓰는 실수. Q는 $t - T$ 동안만 움직였다.

STEP 너머

곡선 E는 궤적들의 족의 **포락선**, 곧 족의 모든 구성원에 접하는 곡선이다. 일반적으로 족 $F(x, z, \alpha) = 0$의 포락선은 $F = 0$과 $\partial F/\partial\alpha = 0$에서 α를 소거하여 구하며, 이것은 여기서 사용한 중근 조건의 미분 버전이다. 소문항 (ii)의 포물면은 흔히 **안전 포물면**(paraboloid of safety)이라 불리며, 소문항 (iii)은 중력이 사라지는 자유낙하 기준계(freely falling frame)로 바꾸어 보는 예이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 두 아이디어를 모두 다룬다.

풀이

STEP II 2023, 문제 11

확률과 통계 • 혼합분포

STEP II 2023, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

이 문제는 *Beyond STEP*의 13.5 절 **곤란한 질문 던지기**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch13/awkward-questions.html

핵심 아이디어

Y는 **혼합**(*mixture*) 분포를 따른다. 먼저 분포 하나를 무작위로 고른 다음, 그 분포에서 값을 뽑는다. Y의 평균(mean)은 두 평균의 가중평균이지만, 분산(variance)에는 항이 하나 더 붙는다. 두 평균 사이의 차이가 그 자체로 변동을 더하기 때문이다. 소문항 (ii)와 (iii)은 모두 주사위를 쓰기 전에 동전을 던지지만, 그 결과는 완전히 다르다. (ii)에서는 주사위를 던질 때마다 동전을 새로 던지므로 혼합의 효과가 평균화되어 사라진다. (iii)에서는 동전 한 번이 모든 것을 결정하고, 그 추가 항이 결국 전체를 지배한다.

풀이

소문항 (i)

어느 확률변수를 쓸지 고르는 일은 X_1, X_2의 값과 독립적으로 이루어지므로

$$\mathrm{P}(Y = x_i) = p\,a_i + q\,b_i \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

따라서

$$\mathrm{E}(Y) = \sum_i x_i(pa_i + qb_i) = p\sum_i x_i a_i + q\sum_i x_i b_i = p\mu_1 + q\mu_2.$$

같은 방법으로 $\mathrm{E}(Y^2) = p\,\mathrm{E}(X_1^2) + q\,\mathrm{E}(X_2^2) = p(\sigma_1^2+\mu_1^2) + q(\sigma_2^2+\mu_2^2)$이다. 그러므로

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y) &= p\sigma_1^2 + q\sigma_2^2 + p\mu_1^2 + q\mu_2^2 - (p\mu_1+q\mu_2)^2 \\ &= p\sigma_1^2 + q\sigma_2^2 + p(1-p)\mu_1^2 + q(1-q)\mu_2^2 - 2pq\mu_1\mu_2 \\ &= p\sigma_1^2 + q\sigma_2^2 + pq\mu_1^2 + pq\mu_2^2 - 2pq\mu_1\mu_2 \\ &= p\sigma_1^2 + q\sigma_2^2 + pq(\mu_1-\mu_2)^2,\end{aligned}$$

이고, 여기서 $1-p=q$와 $1-q=p$를 이용하였다. 이것이 구하려던 결과이다.

소문항 (ii)

동전이 앞면이 나오는 사건을 H, 주사위가 6이 나오는 사건을 S라 하자. 동전과 주사위는 독립이므로

$$\mathrm{P}(B=1) = \mathrm{P}(H)\mathrm{P}(S) + \mathrm{P}(H^c)\mathrm{P}(S^c) = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{5}{6} = \tfrac{1}{2}.$$

따라서 각 B는 0 또는 1을 각각 확률 $\frac{1}{2}$로 가진다. Z_1은 서로 독립인 n개의 B 가운데 1의 개수이며, 각각은 같은 확률 $\frac{1}{2}$로 성공한다. 이것은 정확히 이항분포(binomial distribution)의 상황이므로 $Z_1 \sim \mathrm{B}(n, \frac{1}{2})$이고, 평균은 $\frac{n}{2}$, 분산은 $\frac{n}{4}$이다.

n이 클 때 Z_1을 $\mathrm{N}(\frac{n}{2}, \frac{n}{4})$로 근사하며, 이 분포의 표준편차(standard deviation)는 $\frac{\sqrt{n}}{2}$이다. 평균의 10% 이내에 있다는 것은 $|Z_1 - \frac{n}{2}| \le \frac{n}{20}$을 뜻한다. $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$로 두고 표준화(standardising)하면

$$\mathrm{P}\big(|Z_1 - \tfrac{n}{2}| \le \tfrac{n}{20}\big) \approx \mathrm{P}\Big(|Z| \le \frac{n/20}{\sqrt{n}/2}\Big) = \mathrm{P}\Big(|Z| \le \frac{\sqrt{n}}{10}\Big) = 2\Phi\Big(\frac{\sqrt{n}}{10}\Big) - 1.$$

$n \to \infty$일 때 $\sqrt{n}/10 \to \infty$이므로 $\Phi(\sqrt{n}/10) \to 1$이고, 확률은 $2-1=1$로 수렴한다. (연속성 보정(continuity correction)을 하더라도 경계가 표준편차의 $\frac{1}{\sqrt{n}}$배만큼만 바뀌므로 극한에는 영향이 없다.)

소문항 (iii)

n개의 주사위 가운데 6의 개수를 X_1, 6이 아닌 것의 개수를 X_2라 하자. 그러면 $X_1 \sim \mathrm{B}(n, \frac{1}{6})$, $X_2 \sim \mathrm{B}(n, \frac{5}{6})$이다. 이제 Z_2는 확률 $p=\frac{1}{2}$로 X_1의 값을, 확률 $q=\frac{1}{2}$로 X_2의 값을 가지며, 동전은 주사위와 독립이다. 이것은 정확히 소문항 (i)의 상황이고,

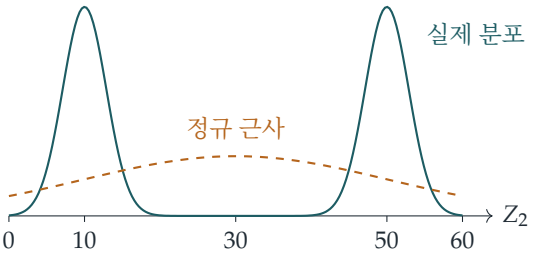
$$\mu_1 = \tfrac{n}{6}, \quad \mu_2 = \tfrac{5n}{6}, \quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = n\cdot\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{5}{6} = \tfrac{5n}{36}.$$

이다. 그러므로

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Z_2) &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{n}{6} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{5n}{6} = \tfrac{n}{2}, \\ \mathrm{Var}(Z_2) &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{5n}{36} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{5n}{36} + \tfrac{1}{4}\Big(\tfrac{4n}{6}\Big)^2 = \frac{5n}{36} + \frac{n^2}{9}.\end{aligned}$$

? 생각해 보기 n이 클 때 Z_2의 분포는 실제로 어떤 모양일까?

확률 $\frac{1}{2}$로 Z_2는 $\frac{n}{6}$ 근처에 있고, 확률 $\frac{1}{2}$로 $\frac{5n}{6}$ 근처에 있다. 두 봉우리의 표준편차는 각각 $\frac{\sqrt{5n}}{6}$으로, 두 봉우리 사이의 거리 $\frac{2n}{3}$에 비하면 아주 작다. 따라서 이 분포는 **쌍봉**(*bimodal*) 분포이다. 좁은 봉우리가 두 개 있고, 평균 $\frac{n}{2}$ 근처에는 확률이 거의 없다. 정규분포는 평균에서 봉우리가 하나뿐이므로 여기서는 정반대로 틀린다. Z_2가 거의 떨어지지 않는 곳에 가장 많은 확률을 주기 때문이다. 문제가 하나 더 있다. 표준편차가 약 $\frac{n}{3}$이므로 $\mathrm{N}(\frac{n}{2}, \frac{n^2}{9})$는 음수 값에 약 $\mathrm{P}(Z < -1.5) \approx 0.067$의 확률을 주고, n보다 큰 값에도 같은 확률을 준다. 하지만 항상 $0 \le Z_2 \le n$이다. 아래 그림은 $n = 60$일 때의 두 그래프를 보여 준다.



이제 마지막 부분이다. Z_2가 평균의 10% 이내에 있는 것은 $0.45n \le Z_2 \le 0.55n$일 때이다. 동전의 결과에 대해 조건부(conditioning)로 나누면

$$\mathrm{P}(0.45n \le Z_2 \le 0.55n) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{P}(0.45n \le X_1 \le 0.55n) + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{P}(0.45n \le X_2 \le 0.55n).$$

첫째 항에 대하여 $\mathrm{P}(0.45n \le X_1 \le 0.55n) \le \mathrm{P}(X_1 \ge 0.45n)$이고, $0.45n - \frac{n}{6} = \frac{17n}{60}$이다. 표준편차가 $\frac{\sqrt{5n}}{6}$인 정규근사 $X_1 \approx \mathrm{N}(\frac{n}{6}, \frac{5n}{36})$를 쓰면

$$\mathrm{P}(X_1 \ge 0.45n) \approx \mathrm{P}\Big(Z \ge \frac{17n/60}{\sqrt{5n}/6}\Big) = 1 - \Phi\Big(\frac{17\sqrt{n}}{10\sqrt{5}}\Big) \longrightarrow 1 - 1 = 0.$$

둘째 항은 첫째 항의 거울상이다. $X_2 = n - X_1$이므로 $0.45n \le X_2 \le 0.55n$은 $0.45n \le X_1 \le 0.55n$과 정확히 같은 조건이고, 둘째 항은 첫째 항과 같다. 따라서 Z_2가 평균의 10% 이내에 있을 확률은 많아야 약 $1 - \Phi(\frac{17\sqrt{n}}{10\sqrt{5}})$이며, 이는 $n \to \infty$일 때 0으로 수렴한다.

이 단계는 사실 근사에 의존하지 않는다. 체비쇼프 부등식(Chebyshev's inequality)을 쓰면 정확하게

$$\mathrm{P}\big(|X_1 - \tfrac{n}{6}| \ge \tfrac{17n}{60}\big) \le \frac{5n/36}{(17n/60)^2} = \frac{500}{289\,n} \longrightarrow 0.$$

을 얻는다.

검산

- (i)에서 $\mu_1 = \mu_2$이면 추가 항이 사라진다. 또 $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$이면 Y는 μ_1 또는 μ_2의 값만 가지며, 분산은 크기를 조정한 베르누이(Bernoulli) 확률변수처럼 $pq(\mu_1 - \mu_2)^2$이다.

- (ii)에서 $n = 400$일 때 정확한 이항확률은 0.9598이고, 정규근사 값은 $2\Phi(2) - 1 = 0.9545$이다. $n = 1000$일 때 두 값은 0.9986과 0.9984이다.
- (iii)에서 $n = 30$으로 Z_2를 컴퓨터 시뮬레이션한 결과 평균 15.00, 분산 104.2를 얻었으며, 공식의 값은 15와 104.17이다. $n = 100$일 때 평균의 10% 이내에 있을 정확한 확률은 약 3×10^{-11}이다.

흔한 실수

- 두 평균 가운데 하나를 고르는 일 자체가 변동의 원천이라는 점을 잊고 $\mathrm{Var}(Y) = p\sigma_1^2 + q\sigma_2^2$라고 답하는 것.
- (iii)의 Z_2를 (ii)의 Z_1처럼 다루는 것. (ii)에서는 주사위마다 동전을 다시 던지지만, (iii)에서는 동전 한 번이 n개의 주사위 전체를 좌우하므로 결과들이 독립이 아니다.
- 근사가 잘 맞지 않는 이유를 "분산이 크다"로만 설명하는 것. 진짜 문제는 모양이다. 봉우리가 두 개로 떨어져 있고, 평균 근처에는 확률이 아주 적다.

STEP 너머

소문항 (i)은 **전체 분산의 법칙**(*law of total variance*) $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}\big(\mathrm{Var}(Y \mid C)\big) + \mathrm{Var}\big(\mathrm{E}(Y \mid C)\big)$의 가장 간단한 경우이며, 여기서 C는 동전이다. 소문항 (ii)는 큰 수의 약한 법칙(weak law of large numbers)으로, 대학의 첫 확률론 강의에서 체비쇼프 부등식을 이용해 엄밀하게 증명한다. 소문항 (iii)은 이 법칙에 왜 독립성이 필요한지 보여 준다. 공유된 동전 하나만으로도 법칙이 무너진다. Z_2와 같은 혼합분포는 통계적 모형화에서 늘 쓰이는 도구이다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)는 세 가지 아이디어를 모두 많은 예제와 함께 다룬다.

풀이

STEP II 2023, 문제 12

확률과 통계 • 최댓값의 분포

STEP II 2023, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

핵심 아이디어

여러 수의 최댓값(maximum)이 t 이하일 필요충분조건은 그 수들 **하나하나가 모두** t 이하인 것이다. 따라서 Y의 누적분포함수(cumulative distribution function)는 X_i 하나의 누적분포함수의 거듭제곱이다. 나머지는 모두 밀도함수 대신 누적분포함수를 다루는 데서 나온다. 중앙값(median)은 $\mathrm{P}(Y \le m) = \frac{1}{2}$를 직접 풀어서 얻고, 평균(mean)은 부분적분(integration by parts)을 하여 적분 안에 밀도함수가 아닌 분포함수가 나타나도록 하면 깔끔하게 구해진다.

풀이

소문항 (i)

$F(t) = \mathrm{P}(X_1 \le t)$라 하자. $0 \le t \le \pi$일 때

$$F(t) = \int_0^t \tfrac{1}{2}\sin x \,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos t).$$

사건 $\{Y \le t\}$는 $X_1 \le t$, $X_2 \le t$, ..., $X_n \le t$가 모두 일어날 때, 그리고 그때에만 일어난다. 가장 큰 값이 t 이하이면 나머지 값도 모두 t 이하이고, 그 역도 성립하기 때문이다. X_i들은 독립(independent)이고 동일한 분포를 따르므로(identically distributed), 이 교사건의 확률은 각 확률의 곱이다.

$$\mathrm{P}(Y \le t) = \mathrm{P}(X_1 \le t)\,\mathrm{P}(X_2 \le t)\cdots\mathrm{P}(X_n \le t) = \big[\mathrm{P}(X_1 \le t)\big]^n.$$

따라서 Y의 누적분포함수를 G라 하면

$$G(t) = \frac{(1-\cos t)^n}{2^n} \qquad (0 \le t \le \pi),$$

이고, $t < 0$일 때 $G(t) = 0$, $t > \pi$일 때 $G(t) = 1$이다. 연쇄법칙(chain rule)으로 미분하면 Y의 확률밀도함수(probability density function)는

$$g(t) = \frac{n\,(1-\cos t)^{n-1}\sin t}{2^n} \quad \text{단, } 0 \le t \le \pi,$$

이고, 그 밖에서는 0이다.

소문항 (ii)

중앙값 $m = m(n)$은 $G(m) = \frac{1}{2}$를 만족한다.

$$\left(\frac{1-\cos m}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \iff \frac{1-\cos m}{2} = 2^{-1/n}$$
$$\iff \cos m = 1 - 2^{1-1/n},$$

여기서 $(1-\cos m)/2 \ge 0$이므로 양의 실수 n제곱근을 취하였다. m은 코사인이 일대일(one-to-one)인 구간 $[0, \pi]$에 있어야 하므로

$$m(n) = \arccos\left(1 - 2^{1-1/n}\right).$$

n이 커지면 $1/n$은 작아지므로 $2^{1-1/n}$은 (2를 향해) 커지고 $1 - 2^{1-1/n}$은 (-1을 향해) 작아진다. arccos는 감소함수(decreasing function)이므로 $m(n)$은 n에 따라 **증가하고**, $n \to \infty$일 때 $m(n) \to \arccos(-1) = \pi$이다. ($n = 1$이면 $m(1) = \arccos 0 = \pi/2$인데, 이는 $\frac{1}{2}\sin x$가 $\pi/2$에 대하여 대칭(symmetric)이라는 사실과 맞아떨어진다.) 이는 자연스러운 결과이다. 점점 더 많은 값의 최댓값을 취하면 그 값은 범위의 위쪽 끝으로 밀려 올라간다.

소문항 (iii)

정의에 따라 $\mu(n) = \int_0^\pi t\,g(t)\,\mathrm{d}t$이다. $g = G'$이므로 $u = t$, $\mathrm{d}v = g(t)\,\mathrm{d}t$, $v = G(t)$로 두고 부분적분하면

$$\mu(n) = \Big[t\,G(t)\Big]_0^\pi - \int_0^\pi G(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \pi \cdot 1 - 0 - \frac{1}{2^n}\int_0^\pi (1-\cos x)^n\,\mathrm{d}x,$$

이다. 여기서 $G(\pi) = \left(\frac{1+1}{2}\right)^n = 1$을 이용하였다. 이것이 구하는 공식이다.

> **?** **생각해 보기** 왜 $\int t\,(1-\cos t)^{n-1}\sin t\,\mathrm{d}t$를 직접 계산하려 하지 않고 부분적분을 할까?

목표 공식에는 $(1-\cos x)^n$이 들어 있는데, 이는 밀도함수가 아니라 **분포**함수인 $2^n G(x)$이다. 부분적분은 바로 $t\,g(t)$를 $G(t)$로 바꾸어 주는 방법이며, 동시에 다루기 번거로운 인수 t도 없애 준다.

(a) $h(x) = \frac{1}{2}(1-\cos x)$라 두면 $[0,\pi]$에서 $0 \le h(x) \le 1$이고, $0 < x < \pi$일 때 $0 < h(x) < 1$이다. 공식은 $\mu(n) = \pi - \int_0^\pi h(x)^n \,\mathrm{d}x$가 되므로

$$\mu(n+1) - \mu(n) = \int_0^\pi \big(h(x)^n - h(x)^{n+1}\big)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi h(x)^n\big(1-h(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

$0 < x < \pi$에서 $h(x) > 0$이고 $1 - h(x) > 0$이므로 피적분함수(integrand)는 연속이고 순양수이다. 따라서 적분값은 양수이고, 모든 $n \ge 1$에 대하여 $\mu(n+1) > \mu(n)$이다. 즉 $\mu(n)$은 n에 따라 증가한다.

(b) $n = 2$일 때 전개하고 $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$를 이용하면

$$\int_0^\pi (1-\cos x)^2\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \Big(1 - 2\cos x + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2x\Big)\mathrm{d}x = \tfrac{3}{2}\pi,$$

이다. $\cos x$와 $\cos 2x$는 모두 $[0,\pi]$에서 적분하면 0이기 때문이다. 따라서

$$\mu(2) = \pi - \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{2}\pi = \frac{5\pi}{8}.$$

소문항 (ii)에서 $m(2) = \arccos\big(1-\sqrt{2}\big)$이다. $5\pi/8$과 $m(2)$는 모두 코사인이 순감소하는 구간 $[0,\pi]$에 있으므로

$$\mu(2) < m(2) \iff \cos\tfrac{5\pi}{8} > \cos m(2) = 1 - \sqrt{2}.$$

? **생각해 보기** $\cos\frac{5\pi}{8}$의 정확한 값은 어떻게 구할까?

$\cos\frac{5\pi}{8} = \cos\big(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\big) = -\sin\frac{\pi}{8}$으로 쓰고, 반각 공식(half-angle formula) $\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\big(1-\cos\frac{\pi}{4}\big) = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$를 이용한다. $\sin\frac{\pi}{8} > 0$이므로

$$\cos\tfrac{5\pi}{8} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

따라서 $-\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} > 1-\sqrt{2}$, 즉 $\sqrt{2}-1 > \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$임을 보이면 된다. 양변이 모두 양수이므로 이는 양변을 제곱하고 4를 곱한 부등식과 동치이다.

$$\begin{aligned} 4\big(3-2\sqrt{2}\big) > 2-\sqrt{2} &\iff 10 > 7\sqrt{2} \\ &\iff 100 > 98, \end{aligned}$$

마지막 단계에서는 두 양수를 제곱하였다. 이 부등식은 참이고 모든 단계가 동치였으므로 $\cos\frac{5\pi}{8} > 1-\sqrt{2}$이며, 따라서 $\mu(2) < m(2)$이다.

검산

- $n = 1$이면 $Y = X_1$은 $\pi/2$에 대하여 대칭이고, 실제로 $\mu(1) = \pi - \frac{1}{2}\int_0^\pi (1-\cos x)\,\mathrm{d}x = \pi/2 = m(1)$이다.

- 수치로 보면 $\mu(2) = 5\pi/8 \approx 1.9635$이고 $m(2) = \arccos(1-\sqrt{2}) \approx 1.9979$이므로 평균이 중앙값보다 약간 작다. 1부터 7까지의 각 n에 대하여 최댓값 10^5개를 컴퓨터로 모의실험한 결과는 두 공식과 0.01 이내로 일치하였고(예를 들어 $\mu(3) \approx 2.1598$, $m(3) \approx 2.1986$), 두 수열 모두 증가하였다.
- $n = 2$일 때 Y의 밀도함수는 $\frac{1}{2}(1-\cos t)\sin t$로, 왼쪽으로 치우친(skewed to the left) 분포이며(0 쪽으로 긴 꼬리가 있다), 왼쪽으로 치우친 분포는 보통 평균이 중앙값보다 작다.

흔한 실수

- $\mathrm{P}(Y \le t) = [F(t)]^n$의 근거를 밝히지 않는 것. "모두 t 이하"라는 동치 관계와 독립성이 둘 다 필요하다.
- 부분적분을 하면서 경계항(boundary term) $\left[tG(t)\right]_0^{\pi} = \pi$를 빠뜨리는 것. 공식 맨 앞의 π가 바로 여기서 나온다.
- 코사인 값으로 각의 크기를 비교하면서 코사인이 $[0, \pi]$에서 **감소**한다는 점을 짚지 않아 부등호 방향을 거꾸로 쓰는 것.

STEP 너머

표본의 최댓값은 **순서통계량**(order statistic)의 한 예이며, 소문항 (i)의 방법을 쓰면 어떤 표본 최댓값의 분포든 구할 수 있다. 항등식 $\mathrm{E}[Y] = \pi - \int_0^{\pi} G(t)\,\mathrm{d}t$는 음이 아닌 확률변수(random variable)에 대한 일반적인 꼬리 적분 공식(tail-integral formula) $\mathrm{E}[Y] = \int_0^{\infty} \mathrm{P}(Y > t)\,\mathrm{d}t$의 한 경우로, 대학 확률론 강의 초반에 배우게 된다. 두 아이디어 모두 Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)에서 자세히 다룬다.

풀이

STEP III 2023, 문제 1

순수수학 • 이차곡선의 접선

STEP III 2023, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

핵심 아이디어

직선이 원에 접할 필요충분조건은 원의 중심에서 직선까지의 수직 거리(perpendicular distance)가 반지름과 같은 것이다. 따라서 현(chord) PQ를 p와 q로 나타내고, 그 거리를 계산하면 접선(tangent) 조건이 주어진 관계식으로 정리되는 것을 볼 수 있다. 그 뒤로는 모든 것이 두 매개변수(parameter)에 대한 하나의 대칭(symmetric) 방정식에 관한 문제가 된다. 마지막 소문항은 **세 번째** 변에 대해서도 이 관계식이 성립하는지 묻는데, 이는 근의 합과 곱, 즉 근과 계수의 관계(sums and products of roots)로 해결할 일이다.

풀이

소문항 (i)

PQ의 기울기(gradient)는

$$\frac{aq^2 - ap^2}{2aq - 2ap} = \frac{p+q}{2},$$

이다. 여기서 두 점이 서로 다르므로 $q - p \neq 0$으로 나누었다. 따라서 P를 지나는 직선은 $y - ap^2 = \frac{1}{2}(p+q)(x - 2ap)$이고, 이를 정리하면

$$(p+q)x - 2y - 2apq = 0.$$

이다. 중심 $C(0, 3a)$에서 이 직선까지의 거리는

$$\frac{|-6a - 2apq|}{\sqrt{(p+q)^2 + 4}} = \frac{2a|pq+3|}{\sqrt{(p+q)^2+4}}.$$

이다. 직선이 원에 접할 필요충분조건은 이 값이 $2a$와 같은 것, 즉 (양변이 모두 양수이므로 제곱하고 $4a^2 \neq 0$을 약분하면)

$$(pq+3)^2 = (p+q)^2 + 4 \iff p^2q^2 + 6pq + 5 = (p+q)^2.$$

이다. 이것이 바로 $(*)$이므로, $(*)$가 성립하면 직선 PQ는 원의 접선이다. (모든 단계가 거꾸로도 성립하므로 역(converse)도 성립하며, 이 사실은 소문항 (iii)에서 필요하다.)

소문항 (ii)

$(*)$를 전개하고 q의 거듭제곱끼리 모으면

$$(1-p^2)q^2 - 4pq + (p^2-5) = 0.$$

이다. $p^2 \neq 1$이므로 최고차항의 계수가 0이 아니고, 따라서 이것은 q에 대한 진짜 이차방정식(quadratic)이다. 판별식(discriminant)은

$$\begin{aligned} 16p^2 - 4(1-p^2)(p^2-5) &= 16p^2 - 4(-p^4+6p^2-5) \\ &= 4(p^4 - 2p^2 + 5) \\ &= 4\big((p^2-1)^2 + 4\big) > 0, \end{aligned}$$

이므로 서로 다른 두 실근 q_1, q_2가 존재한다. 어느 것도 p와 같지 않다. 좌변에 $q=p$를 대입하면 $-p^4 - 2p^2 - 5 < 0$이 되기 때문이다. 따라서 Q_1과 Q_2는 실제로 P와 다른 점이다.

이차방정식으로부터

$$q_1 + q_2 = \frac{4p}{1-p^2}, \qquad q_1 q_2 = \frac{p^2-5}{1-p^2}.$$

이다.

소문항 (iii)

삼각형 PQ_1Q_2를 생각하자. 여기서 $Q_i = (2aq_i, aq_i^2)$이고 q_1, q_2는 소문항 (ii)의 두 근이다. 세 꼭짓점은 모두 $x^2 = 4ay$ 위에 있고, ((ii)에서 보였듯이) 서로 다른 세 점이다. 직선은 포물선(parabola)과 많아야 두 점에서 만나므로, 포물선 위의 서로 다른 세 점은 결코 한 직선 위에 있지(collinear) 않다. 따라서 이것은 진짜 삼각형이다.

(p, q_1)과 (p, q_2)가 $(*)$를 만족하므로, 소문항 (i)에 의해 변 PQ_1과 PQ_2는 원에 접한다.

> **생각해 보기** q_1과 q_2를 직접 구하지 않고서 세 번째 변 Q_1Q_2가 접선임을 어떻게 보일 수 있을까?

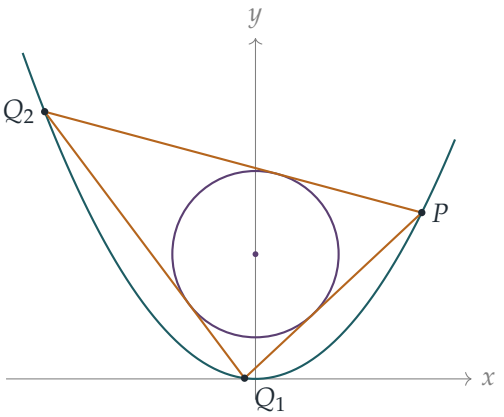
소문항 (i)의 거꾸로도 성립하는 논증에 의해 (p, q를 q_1, q_2로 바꾸면) Q_1Q_2가 접선일 필요충분조건은

$$(q_1+q_2)^2 = q_1^2q_2^2 + 6q_1q_2 + 5,$$

이고, 양변은 이미 알고 있는 $s = q_1 + q_2$와 $t = q_1 q_2$만으로 이루어져 있다. 양변에 $(1-p^2)^2$을 곱하자. 좌변은 $16p^2$이 된다. 우변은

$$\begin{aligned}&(p^2-5)^2 + 6(p^2-5)(1-p^2) + 5(1-p^2)^2\\ &\quad = (p^4 - 10p^2 + 25) + (-6p^4 + 36p^2 - 30) + (5p^4 - 10p^2 + 5)\\ &\quad = 16p^2.\end{aligned}$$

이 된다. 양변이 일치하므로 Q_1Q_2도 원에 접하고, PQ_1Q_2가 구하는 삼각형이다.



그림은 $a = 1$, $p = 2$인 경우로, 이때 $q_{1,2} = \frac{1}{3}(-4 \pm \sqrt{13})$이다.

검산

- $a = 1$, $p = 2$로 두면 이차방정식은 $3q^2 + 8q + 1 = 0$이고, $q_1 + q_2 = -\frac{8}{3} = \frac{4p}{1-p^2}$, $q_1 q_2 = \frac{1}{3} = \frac{p^2-5}{1-p^2}$이다. 그러면 $(q_1+q_2)^2 = \frac{64}{9}$이고 $q_1^2 q_2^2 + 6q_1q_2 + 5 = \frac{1}{9} + 2 + 5 = \frac{64}{9}$이므로, 소문항 (iii)에서 요구하는 대로이다.
- 수치적으로 $q_1 \approx -0.1315$, $q_2 \approx -2.5352$일 때 세 변을 품은 직선은 모두 $(0,3)$에서 거리 2.000에 있다. 무작위로 고른 수천 개의 a와 p에 대해 컴퓨터로 확인한 결과도 약 10^{-13}의 오차 범위에서 일치하였다.
- 제외된 경우 $p = \pm 1$은 시사하는 바가 크다. $p = 1$이면 이차방정식이 $-4q - 4 = 0$으로 퇴화(degenerate)하여 $q = -1$ 하나만 나온다. $P(2a, a)$에서 그은 "사라진" 접선은 수직선 $x = 2a$인데, 이 직선은 원에 접하지만 포물선과는 P에서만 만난다.

흔한 실수

- 거리 공식에서 절댓값을 빠뜨리거나, 양변이 양수임을 언급하지 않고 제곱하는 것.

- 소문항 (i)의 "이면" 방향만 사용하는 것. 소문항 (iii)에서는 Q_1Q_2가 접한다는 사실을 대수적 조건으로 바꾸기 위해 역이 필요하므로, 각 단계가 거꾸로도 성립한다는 점을 밝혀야 한다.
- 삼각형이 퇴화하지 않도록 $q_1, q_2 \neq p$임을 확인하지 않는 것.

STEP 너머

이것은 **퐁슬레의 포리즘**(*Poncelet's porism*)의 한 예이다. 한 원뿔곡선(conic)에 내접하면서 다른 원뿔곡선에 외접하는 삼각형이 하나 존재하면, 그러한 삼각형을 첫 번째 원뿔곡선의 **어느** 점에서 출발해서도 만들 수 있다. 여기서는 포물선과 원이 그러한 쌍이고, 소문항 (iii)은 비에트 공식(Vieta's formulas)으로 삼각형이 닫힌다는 것을 직접 증명한다. 일반적인 증명은 사영기하학(projective geometry)을 사용하며, 가장 우아하게는 타원곡선(elliptic curves)을 사용한다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)에는 이런 매개변수 원뿔곡선 기하 스타일의 문제가 더 실려 있다.

풀이

STEP III 2023, 문제 2

순수수학 • 극곡선으로 둘러싸인 넓이

STEP III 2023, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

핵심 아이디어

두 곡선 모두 $\theta = 0$에서 $\theta = \pi$까지 돌아가는 동경(radius)이 그려 내는 곡선이므로, 이 문제는 결국 각 각도에서 어느 곡선이 더 바깥에 있는지에 관한 것이다. $k(1+\sin\theta)$와 $k+\cos\theta$를 비교하면 두 곡선의 바깥·안쪽 관계가 정확히 한 번, $\theta = \alpha$에서 뒤바뀐다는 것을 알 수 있다. 그러면 영역 A와 B를 합친 것은 두 곡선이 겹치는 부분이 되고, 모든 넓이는 극좌표(polar coordinates) 넓이 공식 $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$로 구하며, 이때 $\sin^2$과 $\cos^2$은 배각 공식(double angle formula)으로 처리한다.

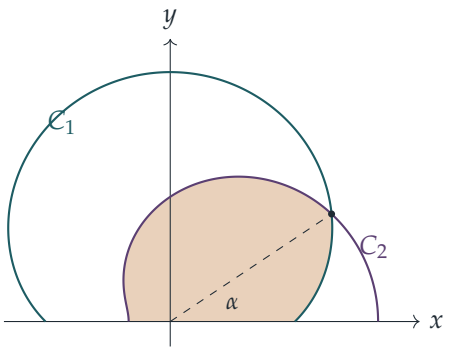
풀이

소문항 (i)

개형을 그리는 데 다음 값들이 도움이 된다.

	$\theta = 0$	$\theta = \frac{\pi}{2}$	$\theta = \pi$
C_1: $r = k(1+\sin\theta)$	k	$2k$	k
C_2: $r = k+\cos\theta$	$k+1$	k	$k-1$

($k > 1$이므로) 두 동경의 길이는 언제나 양수이다. C_1은 심장형(cardioid)의 위쪽 절반으로, y축에 대하여 대칭이고 $(0, 2k)$까지 올라간다. C_2는 "반지름이 대략 k"인 약간 찌그러진 반원으로, $\theta = 0$에서는 오른쪽으로 1만큼 밀려 나가고 $\theta = \pi$에서는 1만큼 안으로 들어와 있다. 아래 그림은 $k = 1.5$인 경우이며, 색칠한 영역이 두 곡선이 겹치는 부분이다.



교점에서는 두 동경의 길이가 같으므로

$$k(1+\sin\alpha) = k+\cos\alpha \iff k\sin\alpha = \cos\alpha.$$

이때 $\cos\alpha \neq 0$이다(만약 그렇다면 $k\sin\alpha = 0$이어야 하는데, 그때는 $\sin\alpha = \pm 1$이다). 따라서 양변을 나누면 요구한 대로 $\tan\alpha = \dfrac{1}{k}$를 얻는다. $0 < \frac{1}{k} < 1$이므로 $[0,\pi]$에서 이러한 각은 정확히 하나 존재하며, $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$이다.

더 유용한 사실은 $k+\cos\theta - k(1+\sin\theta) = \cos\theta - k\sin\theta$가 $0 \le \theta < \alpha$에서 양수이고 $\alpha < \theta \le \pi$에서 음수라는 것이다(아래의 $\sin\alpha, \cos\alpha$ 값을 쓰면 이 식은 $\sqrt{1+k^2}\,\sin(\alpha-\theta)$와 같고, $\alpha-\theta$는 각각 $(0,\alpha]$ 또는 $[\alpha-\pi, 0)$에 속한다). 따라서 C_2는 α 이전에는 C_1의 바깥에, 그 이후에는 안쪽에 있다.

또한 $\tan\alpha = \frac{1}{k}$로부터 얻는 다음 값도 사용할 것이다.

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}, \qquad \cos\alpha = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}.$$

소문항 (ii)

영역 A는 $0 \le \theta \le \alpha$에서 C_1까지 이르는 동경이 쓸고 지나가는 영역이므로, 그 넓이는

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\int_0^\alpha k^2(1+\sin\theta)^2\,\mathrm{d}\theta &= \frac{k^2}{2}\int_0^\alpha \left(1+2\sin\theta+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos 2\theta\right)\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{k^2}{2}\left[\tfrac{3}{2}\theta - 2\cos\theta - \tfrac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^\alpha \\
&= \frac{k^2}{2}\left(\tfrac{3}{2}\alpha - \tfrac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha - 2\cos\alpha + 2\right) \\
&= \frac{k^2}{4}(3\alpha - \sin\alpha\cos\alpha) + k^2(1-\cos\alpha),
\end{aligned}$$

이다. 여기서 $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$와 $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$를 이용하였다. 이것이 요구한 식이다.

소문항 (iii)

마찬가지로 $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$를 이용하면 B의 넓이는

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\int_\alpha^\pi (k+\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta &= \tfrac{1}{2}\int_\alpha^\pi \left(k^2+\tfrac{1}{2}+2k\cos\theta+\tfrac{1}{2}\cos 2\theta\right)\mathrm{d}\theta \\ &= \tfrac{1}{2}\left[\left(k^2+\tfrac{1}{2}\right)\theta + 2k\sin\theta + \tfrac{1}{4}\sin 2\theta\right]_\alpha^\pi \\ &= \frac{(2k^2+1)(\pi-\alpha)}{4} - k\sin\alpha - \tfrac{1}{4}\sin\alpha\cos\alpha.\end{aligned}$$

이다. α의 삼각함수를 없애고 싶다면, 소문항 (i)의 값으로부터 $k\sin\alpha = \dfrac{k}{\sqrt{1+k^2}}$이고 $\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{k}{1+k^2}$이므로

$$\text{B의 넓이} = \frac{(2k^2+1)(\pi-\alpha)}{4} - \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} - \frac{k}{4(1+k^2)}.$$

소문항 (iv)

? 생각해 보기 A와 B를 합친 영역은 어떤 모양인가?

소문항 (i)에 의하여 $\theta < \alpha$에서 A의 경계는 안쪽 곡선인 C_1이고, $\theta > \alpha$에서 B의 경계는 안쪽 곡선인 C_2이다. 따라서 R는 두 영역이 겹치는 부분(그림에서 색칠한 부분)의 넓이이다. 이것만으로도 답을 짐작할 수 있다. k가 크면 C_2는 거의 전부 C_1 안에 놓이므로, 겹치는 부분은 T의 거의 전부가 되어야 한다.

전체 넓이는 같은 적분을 $[0,\pi]$에서 계산하여 얻는다($\sin\theta$ 항과 $\sin 2\theta$ 항은 양 끝에서 0이 되고, $-2\cos\theta$는 4를 준다).

$$T = \tfrac{1}{2}\int_0^\pi (k+\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi(2k^2+1)}{4}, \qquad S = \tfrac{1}{2}\int_0^\pi k^2(1+\sin\theta)^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{k^2(3\pi+8)}{4}.$$

$k\to\infty$일 때 $\alpha = \arctan\frac{1}{k} \to 0$이다. A를 전개하는 대신 그 크기를 위에서 누른다. $[0,\alpha]$에서 $r = k(1+\sin\theta) \le 2k$이므로 A는 반지름이 $2k$이고 중심각이 α인 부채꼴(sector) 안에 놓이며, $\alpha < \tan\alpha = \frac{1}{k}$이므로

$$0 < \text{A의 넓이} \le \tfrac{1}{2}(2k)^2\alpha < 2k.$$

따라서 $\dfrac{\mathrm{A}}{T} < \dfrac{8k}{\pi(2k^2+1)} \to 0$이다. B에 대해서는 소문항 (iii)의 결과를 T로 나누면

$$\frac{\mathrm{B}}{T} = \frac{\pi-\alpha}{\pi} - \frac{4\left(k\sin\alpha + \frac{1}{4}\sin\alpha\cos\alpha\right)}{\pi(2k^2+1)} \to 1-0 = 1,$$

인데, 이는 $\alpha \to 0$이고 $0 < k\sin\alpha + \frac{1}{4}\sin\alpha\cos\alpha < k+1$이 $2k^2+1$에 비해 작기 때문이다. 그러므로

$$\frac{R}{T} = \frac{\mathrm{A}}{T} + \frac{\mathrm{B}}{T} \to 1.$$

마지막으로

$$\frac{R}{S} = \frac{R}{T}\cdot\frac{T}{S} = \frac{R}{T}\cdot\frac{\pi(2k^2+1)}{k^2(3\pi+8)} \to 1\cdot\frac{2\pi}{3\pi+8} = \frac{2\pi}{3\pi+8}.$$

검산

- $\theta = 0$에서 $C_2(r = k+1)$는 $C_1(r = k)$의 바깥에 있고, $\theta = \frac{\pi}{2}$에서는 안쪽에 있으므로($k < 2k$), 두 곡선은 그 사이에서 반드시 만나야 한다. 이는 $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$와 맞아떨어진다.
- $k = 2$일 때: $\alpha = \arctan\frac{1}{2} \approx 0.4636$, $\mathrm{A} \approx 1.4132$, $\mathrm{B} \approx 5.0309$, $T = \frac{9}{4}\pi \approx 7.0686$이므로 $R/T \approx 0.912$이다. $\frac{1}{2}r^2$을 직접 수치적분한 결과도 두 공식과 일치한다.
- $k = 50$일 때 $R/T \approx 0.99987$이고 $R/S \approx 0.36061$로, $\frac{2\pi}{3\pi+8} \approx 0.36059$에 가깝다.
- 극한에 대한 직관적 확인: k가 아주 크면 C_2는 거의 반지름 k인 반원(넓이 $\frac{1}{2}\pi k^2$)이고, C_1은 넓이가 $\frac{3\pi}{4}+2$인 고정된 반심장형을 k배 한 것이다. 그 비는 $\frac{2\pi}{3\pi+8}$이다.

흔한 실수

- 극좌표 넓이 공식에서 인수 $\frac{1}{2}$을 빠뜨리거나, $1+\sin\theta$를 제곱하여 $1+\sin^2\theta$로 쓰는 것.
- 소문항 (iv)에서 $k^2(1-\cos\alpha)$가 "$\alpha \to 0$이므로 0으로 수렴한다"고 주장하는 것. 이 항에는 k^2이 곱해져 있으며, 실제로는 $\frac{1}{2}$로 수렴한다. 중요한 것은 T에 비해 이 항이 얼마나 큰가뿐이다.

STEP 너머

극형식으로 주어진 두 영역이 겹치는 부분의 넓이를 구하는 일은, 대학 1학년 다변수 미적분학(multivariable calculus)에서 만나는 넓이 적분 $\iint r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$를 처음 맛보는 것이다. 그곳에서도 언제나 어려운 부분은 바로 여기서처럼 영역을 기술하는 일이다. 소문항 (iv)의 극한 논증(항을 정확히 계산하기보다 그 크기를 위에서 누르는 방식)은 해석학(real analysis)의 방식이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)는 이러한 방식이 꼼꼼하게 전개되는 모습을 보기에 좋은 책이다.

풀이

STEP III 2023, 문제 3

순수수학 • 삼차방정식의 복소근

STEP III 2023, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

핵심 아이디어

a를 기준으로 재면 세 점은 $sb\mathrm{i}$, $-sb\mathrm{i}$, b이다. i를 곱하면 벡터(vector)가 직각만큼 회전하므로, a는 밑변의 중점이고 b는 대칭축 방향을 가리킨다. 이 그림을 염두에 두면 (ii)는 비에트의 공식(Vieta's formulas)의 문제가 된다. 근의 합이 0이므로 b가 a로 결정되고, 그러면 p^3/q^2에서 a가 소거된다. (iii)과 (iv)에서는 이 결과를 $x = s^2 > 0$에 대한 일변수 함수(function)로 바꾸고, 그 그래프를 통해 값이 얼마나 작아질 수 있는지 알아본다.

풀이

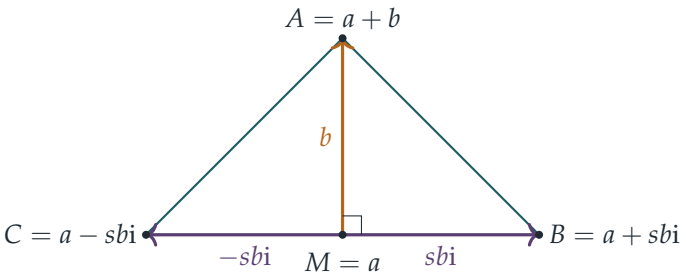
소문항 (i)

$a + b$에서 나머지 두 점까지의 거리는 다음과 같다.

$$\big|(a + sb\mathrm{i}) - (a + b)\big| = |b|\,|s\mathrm{i} - 1| = |b|\sqrt{s^2 + 1},$$
$$\big|(a - sb\mathrm{i}) - (a + b)\big| = |b|\,|-s\mathrm{i} - 1| = |b|\sqrt{s^2 + 1}.$$

두 거리는 같다. 이제 세 점이 실제로 삼각형을 이룬다는 것을 보여야 한다. a를 기준으로 하면 세 점은 $sb\mathrm{i}$, $-sb\mathrm{i}$, b이다. 앞의 두 점은 서로 다르며($s > 0$이고 $b \neq 0$이므로), a를 지나고 $b\mathrm{i}$ 방향인 직선 위에 있다. $b\mathrm{i}$는 b를 직각만큼 회전한 것이므로, $b \neq 0$이면 세 번째 점 $a + b$는 그 직선 위에 있지 않다. 따라서 세 점은 꼭짓점이 $a + b$이고, 밑변이 $a - sb\mathrm{i}$에서 $a + sb\mathrm{i}$까지이며, 밑변의 중점이 a인 이등변삼각형(isosceles triangle)을 이룬다.

a, b, s 되찾기. 삼각형의 꼭짓점을 A(길이가 같은 두 변이 만나는 꼭짓점이다. 정삼각형(equilateral triangle)이라면 어느 꼭짓점이든 좋다)라 하고, 나머지 꼭짓점을 B, C라 하자. BC의 중점을 M이라 하자.



- $a = M = \frac{1}{2}(B + C)$로 잡는다.
- $b = A - M$으로 잡는다. A는 BC 위에 있지 않으므로 이 값은 0이 아니다.
- $AB = AC$이므로 A는 BC의 수직이등분선(perpendicular bisector) 위에 있고, 따라서 $MB \perp MA$이다. 그러므로 $B - M$은 b를 직각만큼 회전한 뒤 크기를 조정한 것이다. 즉 0이 아닌 어떤 실수 $\lambda \neq 0$에 대해 $B - M = \lambda b\mathrm{i}$이다. $\lambda < 0$이면 B와 C의 이름을 맞바꾸는데, 그러면 λ의 부호가 바뀐다. 이제 $s = \lambda > 0$은 다음과 같다.

$$s = \frac{MB}{MA} = \frac{\frac{1}{2}BC}{\text{삼각형의 높이}}.$$

그러면 $a + b = A$, $a + s\mathrm{i} = B$, $a - s\mathrm{i} = M - (B - M) = C$이므로 원하는 결과를 얻는다.

소문항 (ii)

(i)에 의해 근을 $a + s\mathrm{i}$, $a - s\mathrm{i}$, $a + b$로 놓을 수 있다. 여기서 $b \neq 0$, $s > 0$이다. 이 삼차식에는 z^2항이 없으므로 근의 합은 0이다.

$$3a + b = 0, \qquad \text{따라서} b = -3a$$

이고, $b \neq 0$이므로 $a \neq 0$이다. 따라서 근은 다음과 같다.

$$a(1 - 3s\mathrm{i}), \qquad a(1 + 3s\mathrm{i}), \qquad -2a.$$

앞의 두 근의 곱은 $a^2(1 + 9s^2)$이고 합은 $2a$이다. 그러므로 비에트의 공식에 의해

$$p = a^2(1 + 9s^2) + (-2a)(2a) = a^2(9s^2 - 3) = 3a^2(3s^2 - 1),$$
$$q = -(\text{근의 곱}) = -(-2a)\,a^2(1 + 9s^2) = 2a^3(9s^2 + 1).$$

여기서 $a \neq 0$이므로 $q \neq 0$이고, 따라서 나눌 수 있다.

$$\frac{p^3}{q^2} = \frac{27a^6(3s^2 - 1)^3}{4a^6(9s^2 + 1)^2} = \frac{27(3s^2 - 1)^3}{4(9s^2 + 1)^2},$$

이때 s는 0이 아닌(실제로는 양의) 실수이므로 원하는 결과를 얻는다.

소문항 (iii)

$x \neq -\frac{1}{9}$에서 정의된 $y = \dfrac{(3x-1)^3}{(9x+1)^2}$를 생각하자. 몫의 미분법(quotient rule)에 의해

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{9(3x-1)^2(9x+1)^2 - (3x-1)^3 \cdot 18(9x+1)}{(9x+1)^4} \\ &= \frac{9(3x-1)^2\big[(9x+1) - 2(3x-1)\big]}{(9x+1)^3} = \frac{27(3x-1)^2(x+1)}{(9x+1)^3}.\end{aligned}$$

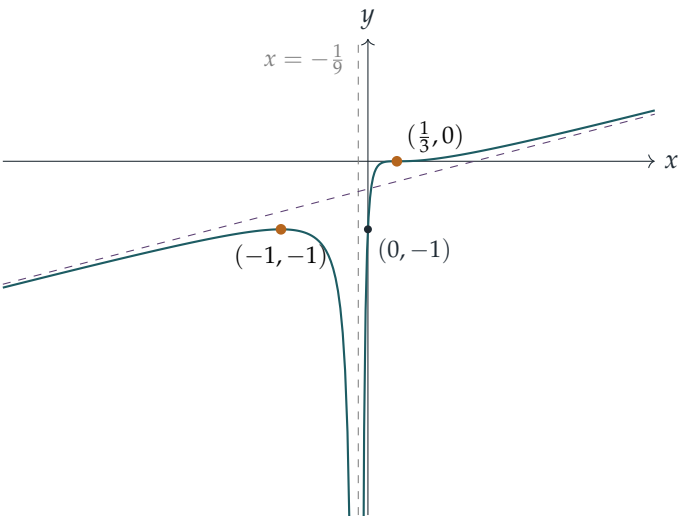
따라서 정류점(stationary point)은 $x = -1$과 $x = \frac{1}{3}$에 있다.

- $x = -1$에서: $y = (-4)^3/(-8)^2 = -1$이다. $x < -1$이면 인수 $x+1$과 $(9x+1)^3$이 모두 음수이므로 $y' > 0$이다. $-1 < x < -\frac{1}{9}$이면 $(9x+1)^3$만 음수이므로 $y' < 0$이다. 따라서 $(-1, -1)$은 **극대점**(local maximum)이다.
- $x = \frac{1}{3}$에서: $y = 0$이다. 양쪽 모두에서($x > -\frac{1}{9}$인 범위에서) $(3x-1)^2$을 제외한 모든 인수가 양수이고, $x \neq \frac{1}{3}$이면 $(3x-1)^2 > 0$이다. 따라서 양쪽에서 $y' > 0$이고, $(\frac{1}{3}, 0)$은 **정류 변곡점**(stationary point of inflection)이다.

특히 y는 $x > -\frac{1}{9}$에서 순증가(strictly increasing)한다. 그 범위에서는 한 점 $x = \frac{1}{3}$을 제외하면 $y' > 0$이기 때문이다.

그 밖의 특징은 다음과 같다.

- 수직 점근선(vertical asymptote) $x = -\frac{1}{9}$. 이 근처에서 분자는 $(-\frac{4}{3})^3 < 0$에, 분모는 0^+에 가까워지므로 양쪽 모두에서 $y \to -\infty$이다.
- $27x^3 - 27x^2 + 9x - 1$을 $81x^2 + 18x + 1$로 나누면 몫이 $\frac{1}{3}x - \frac{11}{27}$이므로, $x \to \pm\infty$일 때 $y = \frac{1}{3}x - \frac{11}{27}$이 사점근선(oblique asymptote)이다.
- 곡선은 $(0, -1)$과 $(\frac{1}{3}, 0)$에서 좌표축과 만난다.



점선은 사점근선 $y = \frac{1}{3}x - \frac{11}{27}$이다. 왼쪽 가지는 결코 -1보다 위로 올라가지 않는다. 오른쪽 가지는 $-\infty$에서부터 모든 실숫값을 지나며 증가한다.

소문항 (iv)

(ii)에서 구한 실수 $s \neq 0$과 $x = s^2$에 대해 다음이 성립한다.

$$\frac{p^3}{q^2} = \frac{27}{4} \cdot \frac{(3x-1)^3}{(9x+1)^2}.$$

s가 실수이므로 우변은 실수이고, 따라서 p^3/q^2도 실수이다.

> **생각해 보기** 그래프는 $-\infty$까지 내려가는데, 왜 p^3/q^2는 아주 큰 음수가 될 수 없을까?

$x = s^2$은 아무 실수나 될 수 있는 것이 아니기 때문이다. s는 0이 아닌 실수이므로 $x > 0$이다. 따라서 우리가 관심 있는 x의 값은 오른쪽 가지에 있고, (iii)에 의해 그곳에서 y는 순증가한다. 그러므로 $x > 0$일 때

$$\frac{(3x-1)^3}{(9x+1)^2} > \frac{(0-1)^3}{(0+1)^2} = -1,$$

이고, 따라서

$$\frac{p^3}{q^2} > -\frac{27}{4}.$$

$x = 0$(즉 $s = 0$)인 경우가 제외되므로 이 부등식(inequality)은 등호 없이 성립한다. 그런 경우라면 삼각형이 선분으로 찌그러지게 된다.

검산

- 정삼각형: $z^3 - 1 = 0$의 근은 정삼각형을 이룬다. 이때 $p = 0$이고, 공식에 따르면 $p = 0$인 것은 정확히 $s^2 = \frac{1}{3}$일 때, 즉 밑변의 절반이 높이의 $\frac{1}{\sqrt{3}}$배일 때이며, 이것이 바로 정삼각형의 모양이다.
- 구체적인 예: $a = 1$, $s = 1$이면 근은 $1 \pm 3\mathrm{i}$와 -2이므로 $z^3 + 6z + 20 = 0$이다. 그러면 $p^3/q^2 = 216/400 = \frac{27}{50}$이고, 공식으로 계산해도 $\frac{27 \cdot 8}{4 \cdot 100} = \frac{27}{50}$이다.
- $s \to 0$이면 삼각형은 납작해지면서 a에서의 중근으로 다가가고, $p^3/q^2 \to -\frac{27}{4}$이다. 실제로 $4p^3 + 27q^2 = 0$은 정확히 중근(repeated root)을 가질 조건이다. $s = 10^{-4}$일 때 그 값은 약 -6.749998이다.
- 무게중심(centroid)이 원점인 이등변삼각형들을 무작위로 골라 컴퓨터로 확인했다. p^3/q^2는 항상 실수였고 -6.75보다 컸다.

흔한 실수

- (i)에서 a와 b를 실수로 취급하는 것. 이들은 복소수이므로 삼각형은 어떤 각도로든 놓일 수 있다.
- q의 부호를 틀리는 것. 최고차항의 계수가 1인 삼차식(monic cubic)에서 q는 근의 곱에 **마이너스**를 붙인 값이다.
- (iv)에서 그래프 전체를 사용하면서 $x = s^2 > 0$이라는 사실을 잊는 것. 바로 이 조건이 우리를 오른쪽 가지에 머무르게 한다.

STEP 너머

$-(4p^3 + 27q^2)$는 이 삼차식의 판별식(discriminant)이고, p^3/q^2는 모양 불변량(shape invariant)이다. 근들을 무게중심을 중심으로 회전하거나 확대·축소해도 이 값은 변하지 않으므로(z를 kz로 바꾸면 p에는 k^2이, q에는 k^3이 곱해진다), 이 값은 근이 이루는 삼각형의 **모양**만을 기록한다. 이와 같은 불변량은 변수 변환을 무시하고 다항식을 분류하는 일의 출발점이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이 문제가 요구하는 방식으로 복소수를 기하적으로 생각하는 법을 알려 주는 아름다운 안내서이다.

풀이

STEP III 2023, 문제 4

순수수학 • 체비쇼프 다항식의 계수

> **STEP III 2023, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

핵심 아이디어

$\cos\big((2n+1)\theta\big)$를 $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^{2n+1}$의 실수부(real part)로 쓰면 p가 명시적인 합으로 바뀌고, p의 각 계수는 이항계수(binomial coefficient)의 합이 된다. 짝수 첨자에 대해서만 더하는 $\sum\binom{N}{2r}$나 $\sum r\binom{N}{2r}$ 꼴의 합은 $(1+t)^N$(또는 그 도함수(derivative))에 $t=1$과 $t=-1$을 대입한 뒤 더하거나 빼서 구한다. 그러면 홀수 첨자 항이 상쇄되기 때문이다. 마지막 소문항에서는 인수분해(factorisation)의 양변에서 최고차 쪽 몇 개의 계수를 비교한다.

풀이

풀이 전체에서 $c = \cos\theta$, $s = \sin\theta$로 쓴다.

소문항 (i)

드무아브르 정리(de Moivre's theorem)와 이항정리(binomial theorem)에 의해

$$\cos\big((2n+1)\theta\big) + \mathrm{i}\sin\big((2n+1)\theta\big) = (c+\mathrm{i}s)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}c^{2n+1-k}(\mathrm{i}s)^k.$$

c와 s는 실수이므로 실수인 항은 정확히 k가 짝수인 항, 즉 $0 \le r \le n$인 $k = 2r$에 해당하는 항이고, 이때 $(\mathrm{i}s)^{2r} = (-1)^r s^{2r} = (-s^2)^r = (c^2-1)^r$이다. 실수부를 취하면

$$\cos\big((2n+1)\theta\big) = \sum_{r=0}^{n}\binom{2n+1}{2r}\cos^{2n+1-2r}\theta\,(\cos^2\theta - 1)^r,$$

이므로 원하는 결과가 성립한다.

소문항 (ii)

소문항 (i)에 의해

$$\mathrm{p}(x) = 1 + \sum_{r=0}^{n} \binom{2n+1}{2r} x^{2n+1-2r}(x^2-1)^r$$

가 모든 $x = \cos\theta \in [-1, 1]$에 대해 성립한다. 양변은 무한히 많은 점에서 값이 같은 다항식(polynomial)이므로 같은 다항식이다.

r번째 항의 차수는 $(2n+1-2r)+2r = 2n+1$이고 최고차항의 계수(leading coefficient)는 $\binom{2n+1}{2r}$이며, 상수 1은 x^{2n+1}에 영향을 주지 않는다. 따라서 p에서 x^{2n+1}의 계수는

$$S_0 = \sum_{r=0}^{n} \binom{2n+1}{2r},$$

즉 짝수 첨자 이항계수의 합이다. $(1+t)^{2n+1} = \sum_k \binom{2n+1}{k} t^k$에 $t = 1$과 $t = -1$을 대입하면

$$2^{2n+1} = \sum_k \binom{2n+1}{k}, \qquad 0 = \sum_k (-1)^k \binom{2n+1}{k}.$$

두 식을 더하면 k가 홀수인 항은 상쇄되고 k가 짝수인 항은 두 배가 되어 $2S_0 = 2^{2n+1}$이다. 따라서 $\mathrm{p}(x)$에서 x^{2n+1}의 계수는 $S_0 = 2^{2n}$이다.

소문항 (iii)

r번째 항 $x^{2n+1-2r}(x^2-1)^r$에서 x^{2n-1}을 얻으려면 $(x^2-1)^r$의 x^{2r-2} 항이 필요하다. 그 항은 $\binom{r}{1}(x^2)^{r-1}(-1) = -rx^{2r-2}$이다($r = 0$일 때는 이 항이 없는데, 이는 $-r = 0$과 일치한다). $n \geq 1$이므로 $2n-1 \geq 1$이고, 따라서 p의 상수 1은 관여하지 않는다. 그러므로 x^{2n-1}의 계수는

$$-\sum_{r=0}^{n} r \binom{2n+1}{2r}.$$

> **생각해 보기** 각 항에 r이 곱해져 있을 때 짝수 첨자 항만 골라내려면 어떻게 해야 할까?

미분하면 첨자가 인수로 내려온다. $(1+t)^{2n+1} = \sum_k \binom{2n+1}{k} t^k$로부터

$$(2n+1)(1+t)^{2n} = \sum_{k=1}^{2n+1} k \binom{2n+1}{k} t^{k-1}.$$

$t = 1$을 대입하면 $\sum_k k\binom{2n+1}{k} = (2n+1)2^{2n}$이다. $t = -1$을 대입하면 ($2n \geq 1$이므로) 좌변이 0이 되어

$$0 = \sum_k (-1)^{k-1} k \binom{2n+1}{k} = \sum_{k\,\text{홀수}} k \binom{2n+1}{k} - \sum_{k\,\text{짝수}} k \binom{2n+1}{k}.$$

따라서 k가 짝수인 부분과 홀수인 부분은 같고, 각각 전체의 절반이다.

$$\sum_{k\text{ 짝수}} k\binom{2n+1}{k} = (2n+1)2^{2n-1}.$$

$k = 2r$로 놓으면 이는 $\sum_r 2r\binom{2n+1}{2r} = (2n+1)2^{2n-1}$, 즉 $\sum_r r\binom{2n+1}{2r} = (2n+1)2^{2n-2}$를 뜻한다. 따라서 $\mathrm{p}(x)$에서 x^{2n-1}의 계수는 $-(2n+1)2^{2n-2}$이고, 원하는 결과가 성립한다.

소문항 (iv)

최고차항의 계수. (ii)에 의해 p는 차수가 $2n+1$이고 최고차항의 계수가 2^{2n}이다. q의 차수가 m이고 최고차항의 계수가 a이면 $(x+1)[\mathrm{q}(x)]^2$의 차수는 $2m+1$이고 최고차항의 계수는 a^2이다. 따라서 $m = n$이고 $a^2 = 2^{2n}$이며, $a > 0$이므로 q에서 x^n의 계수는 2^n이다.

p에 관한 사실 하나 더. $x^{2n+1-2r}$은 홀수 거듭제곱이고 $(x^2-1)^r$은 짝수 거듭제곱만 가지므로, 모든 항 $x^{2n+1-2r}(x^2-1)^r$은 x의 홀수 거듭제곱만 포함한다. p에서 유일한 짝수 거듭제곱은 상수 1뿐이다. $2n \geq 2$이므로 p에서 x^{2n}의 계수는 0이다.

계수 비교. 이제 $n \geq 2$로 두고

$$\mathrm{q}(x) = 2^n x^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdots,$$

로 쓰면

$$[\mathrm{q}(x)]^2 = 2^{2n}x^{2n} + 2^{n+1}b\,x^{2n-1} + \left(b^2 + 2^{n+1}c\right)x^{2n-2} + \cdots.$$

$x+1$을 곱하면 $(x+1)[\mathrm{q}(x)]^2$에서 x^{2n}과 x^{2n-1}의 계수는 각각

$$2^{n+1}b + 2^{2n} \qquad \text{와} \qquad \left(b^2 + 2^{n+1}c\right) + 2^{n+1}b.$$

p에서 x^{2n}의 계수는 0이므로 $b = -2^{2n}/2^{n+1} = -2^{n-1}$이다. 그러면 $b^2 = 2^{2n-2}$, $2^{n+1}b = -2^{2n}$이고, x^{2n-1}의 계수를 소문항 (iii)의 결과와 맞추면

$$2^{2n-2} + 2^{n+1}c - 2^{2n} = -(2n+1)2^{2n-2}.$$

정리하면

$$2^{n+1}c = 2^{2n-2}\left(-(2n+1) - 1 + 4\right) = 2^{2n-2}(2-2n) = 2^{2n-1}(1-n),$$

이므로 q에서 x^{n-2}의 계수는

$$c = 2^{n-2}(1-n),$$

이고, 원하는 결과가 성립한다.

검산

- $n = 1$일 때: $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$이므로 $\mathrm{p}(x) = 4x^3 - 3x + 1 = (x+1)(2x-1)^2$이다. 최고차항의 계수는 2^2, x의 계수는 $-3 = -3 \cdot 2^0$이고, q의 최고차항의 계수는 2^1이다.
- $n = 2$일 때: $\mathrm{p}(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x + 1 = (x+1)(4x^2 - 2x - 1)^2$이다. x^3의 계수는 $-20 = -5 \cdot 2^2$이고, q의 상수항은 $-1 = 2^0(1-2)$이다.
- $n = 3$일 때 $\mathrm{q}(x) = 8x^3 - 4x^2 - 4x + 1$을 얻었고, x의 계수는 $-4 = 2^1(1-3)$이다. $\cos\big((2n+1)\theta\big) + 1$을 정확히 전개하고 $\mathrm{p}(x)/(x+1)$의 제곱근을 구하는 컴퓨터 검산으로 $n = 1, \ldots, 12$에 대해 모든 계수 공식을 확인했다.

흔한 실수

- p에서 x^{2n}의 계수를 잊어버리는 것. 이 계수는 0이며, 바로 이것이 q의 x^{n-1}의 계수 b를 결정한다. c를 구하려면 먼저 b가 필요하다.
- $(\mathrm{is})^{2r} = s^{2r}$로 써서 부호 $(-1)^r$을 잃어버리는 것. 이 부호 덕분에 $1 - \cos^2\theta$가 아니라 $\cos^2\theta - 1$이 나온다.
- (iii)에서 도함수에 $t = 1$만 대입하는 것. 그러면 짝수인 k만이 아니라 모든 k에 대한 합이 나온다.

STEP 너머

$T_N(\cos\theta) = \cos N\theta$를 만족하는 다항식 T_N을 N차 체비쇼프 다항식(Chebyshev polynomial)이라 하며, 소문항 (ii)와 (iii)은 그 최고차 쪽 두 계수를 구한 것이다. (iv)의 인수분해는 $T_{2n+1}(x) + 1$이 $x = -1$에서 단순근(simple root)을 갖고, $\cos\big((2n+1)\theta\big) = -1$이 되는 나머지 각 점에서 중근(double root)을 갖는다는 사실을 반영한다. 체비쇼프 다항식은 근사 이론(approximation theory)에서 핵심적인 역할을 한다. N차 모닉 다항식(monic polynomial) 가운데 $[-1, 1]$에서 최댓값의 크기가 가장 작은 것이 $2^{1-N}T_N$이다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*에 이런 종류의 문제가 더 있다.

풀이

STEP III 2023, 문제 5

순수수학 • 정수론

> **STEP III 2023, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

핵심 아이디어

각 소문항은 정수에 관한 방정식을, 인수(factor)를 완전히 알고 있는 수와 같은 곱(*product*)의 꼴로 바꾼다. 그 수는 차례로 49, pq, $3p^2q$이다. 한 변이 두 정수의 곱이 되고 나면, 각 인수의 크기(어느 쪽이 더 큰지, 어느 쪽이 p보다 작은지)를 따져 가능한 경우를 한두 가지로 줄일 수 있다. 소문항 (iii)에서 우리가 다루는 인수는 $p+q-n$이며, 증명하라고 요구하는 부등식(inequality)이 바로 이 인수가 p 또는 q와 공통인수를 갖지 못하게 막아 준다.

풀이

소문항 (i)

양변에 $7xy$(두 수 모두 0이 아니다)를 곱하면

$$7y + 14x = 2xy \quad \Longleftrightarrow \quad 2xy - 14x - 7y = 0.$$

를 얻는다. $(2x-7)(y-7) = 2xy - 14x - 7y + 49$이므로 양변에 49를 더하면 요구한 대로 $(2x-7)(y-7) = 49$가 된다.

이제 x와 y가 양의 정수라고 하자. 그러면 $2x-7$과 $y-7$은 곱이 49인 정수이므로 49의 인수 쌍이다.

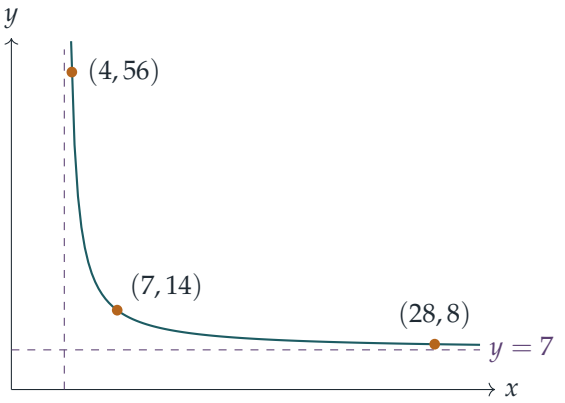
$$(2x-7,\ y-7) \in \{(1,49),\ (7,7),\ (49,1),\ (-1,-49),\ (-7,-7),\ (-49,-1)\}.$$

양수라는 조건 때문에 음수 쌍은 제외된다. $x \geq 1$이면 $2x-7 \geq -5$이고, $y \geq 1$이면 $y-7 \geq -6$이므로 어느 인수도 -7이나 -49가 될 수 없는데, 모든 음수 쌍은 이 둘 중 하나

를 포함한다. 양수 쌍에서

$$(x, y) = (4, 56), \quad (7, 14), \quad (28, 8),$$

를 얻고, 각각이 실제로 원래 방정식을 만족한다. 예를 들어 $\frac{1}{4} + \frac{2}{56} = \frac{7}{28} + \frac{1}{28} = \frac{2}{7}$이다.



이 곡선은 점근선(asymptote)이 $x = \frac{7}{2}$와 $y = 7$인 직각쌍곡선(rectangular hyperbola)이며, 세 해는 양의 가지 위에 있는 격자점(lattice point)이다.

소문항 (ii)

전개하면 $(p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2 = n^2 + pq$이므로

$$(p + q + n)(p + q - n) = (p + q)^2 - n^2 = pq.$$

이다.

우변은 양수이고 $p + q + n > 0$이므로 $p + q - n$은 **양의** 정수이다. pq의 양의 약수(divisor)는 $1, p, q, pq$이며($p = q$이면 $1, p, p^2$뿐이다), $p + q + n$은 이 중 하나이다. 그런데 $n > 0$이므로 $p + q + n > p$이고 $p + q + n > q$이어서, $p + q + n$은 p도 q도 아니다. 남은 약수는 pq뿐이다. 따라서 $p + q + n = pq$이고 짝이 되는 인수는

$$p + q - n = 1, \qquad \text{즉,} \qquad p + q = n + 1.$$

이다.

$n = p + q - 1$을 $p + q + n = pq$에 대입하면 $2p + 2q - 1 = pq$이고, 이를 정리하면

$$pq - 2p - 2q + 4 = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad (p - 2)(q - 2) = 3.$$

이다. 소수(prime)는 $p - 2 \geq 0$을 만족하므로 두 인수 모두 음이 아니고, 곱이 3이므로 $\{p - 2, q - 2\} = \{1, 3\}$이다. 그러므로

$$(p, q) = (3, 5) \quad \text{또는} \quad (5, 3),$$

이고, 실제로 $9 + 15 + 25 = 49 = 7^2$이며 $n = 7 = 3 + 5 - 1$이다.

소문항 (iii)

여기서 n은 $p^3+q^3+3pq^2$의 양의 실수 세제곱근(cube root)이다.

부등식. $p,q>0$이므로

$$n^3=q^3+\left(p^3+3pq^2\right)>q^3, \qquad n^3=p^3+\left(q^3+3pq^2\right)>p^3,$$

이고, 세제곱은 순증가하므로 $n>q$이고 $n>p$이다. 이를 정리하면 각각 $p+q-n<p$와 $p+q-n<q$가 된다. 아래쪽 한계도 필요하다.

$$(p+q)^3=p^3+3p^2q+3pq^2+q^3=n^3+3p^2q>n^3,$$

이므로 $p+q>n$, 즉 $p+q-n>0$이다.

소수 해가 없음. p와 q가 소수이고 n이 정수라고 가정하자. $d=p+q-n$이라 두면 d는

$$0<d<p, \qquad 0<d<q.$$

를 만족하는 정수이다. 위의 전개에서 $(p+q)^3-n^3=3p^2q$이고, 세제곱의 차를 인수분해하면

$$d\left((p+q)^2+(p+q)n+n^2\right)=3p^2q,$$

이므로 d는 $3p^2q$를 나눈다.

> **생각해 보기** 왜 d는 p나 q와 공통인수를 가질 수 없는가?

p가 소수이므로 d가 p와 공통인수를 가지는 유일한 방법은 p가 d를 나누는 것인데, 그러려면 $d\geq p$이어야 한다. 그런데 $d<p$이다. 마찬가지로 $d<q$이므로 q는 d를 나누지 않는다. 따라서 d는 p^2q와 서로소(coprime)이고, $d\mid 3p^2q$에서 $d\mid 3$이 따라 나온다. 부등식이 필요했던 이유가 바로 이것이다. 따라서 $d=1$ 또는 $d=3$이다. $s=p+q$라 쓰자.

경우 $d=1$. 이때 $n=s-1$이고

$$3p^2q=s^3-(s-1)^3=3s^2-3s+1,$$

인데, 이는 불가능하다. 좌변은 3의 배수이고 우변은 3으로 나눈 나머지가 1이기 때문이다.

경우 $d=3$. 이제 $3=d<p$이고 $3<q$이므로 p와 q 모두 3이 아니다. 여기서 $n=s-3$이고

$$3p^2q=s^3-(s-3)^3=9s^2-27s+27, \qquad \text{따라서} \qquad p^2q=3(s^2-3s+3).$$

이다. 그러므로 $3\mid p^2q$이고, 3은 소수이므로 p 또는 q를 나누어 둘 중 하나는 3과 같아야 한다. 이는 $p,q>3$에 모순이다.

두 경우 모두 불가능하므로 $p^3+q^3+3pq^2$가 정수의 세제곱이 되는 소수 p와 q는 존재하지 않는다. ■

검산

$x, y < 2000$인 모든 양의 정수에 대해 전수 탐색(brute-force search)을 하면 (i)의 세 쌍만 정확히 나온다. $p, q < 1500$인 모든 소수에 대해 $p^2 + pq + q^2$가 완전제곱수(perfect square)가 되는 것은 $\{p, q\} = \{3, 5\}$일 때뿐이며(49가 된다), $p^3 + q^3 + 3pq^2$는 결코 완전세제곱수(perfect cube)가 되지 않는다. 무작위로 고른 양의 실수로 (iii)의 $0 < p + q - n < \min(p, q)$를 확인할 수 있다. (ii)를 손으로 간단히 확인하면 $(3 + 5 + 7)(3 + 5 - 7) = 15 \times 1 = 15 = pq$이다.

흔한 실수

- (i)에서 49의 음수 인수 쌍을 빠뜨리는 것. 여기서는 해를 주지 않지만, 무시할 것이 아니라 배제해야 한다.
- (ii)에서 $p + q - n$이 더 작은 인수이고 양수라는 것을 근거 없이 가정하는 것. 두 사실 모두 $n > 0$과 $pq > 0$에서 따라 나오지만, 반드시 밝혀 적어야 한다.
- (iii)에서 $d \mid 3$에서 멈추는 것. 두 경우 $d = 1$과 $d = 3$을 여전히 배제해야 하며, 두 번째 경우에는 $d < p, q$라는 사실이 한 번 더 필요하다.

STEP 너머

모든 소문항이 같은 기법을 쓴다. 디오판토스 방정식(Diophantine equation)을 소인수분해를 알고 있는 수와 같은 정수들의 곱으로 바꿔 쓴 다음, 크기와 서로소 조건을 이용해 인수를 확정하는 것이다. 소문항 (i)은 이집트 분수(Egyptian fraction) 방정식 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$의 무리에 속하고, 소문항 (ii)는 120°인 각을 가진 정수 삼각형에 관한 문제이다. $p^2 + pq + q^2 = n^2$이 바로 그 각에 대한 코사인 법칙(cosine rule)이기 때문이다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 이런 종류의 초등 정수론(elementary number theory)을 소개하는 훌륭한 입문서이다.

풀이

STEP III 2023, 문제 6

순수수학 • 쌍곡선 함수와 단조성

STEP III 2023, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

핵심 아이디어

두 함수 모두 $\tan^{-1} x$와 $\tanh x$의 상수배의 차이므로, 도함수(derivative)는 $\dfrac{1}{1+x^2}$와 $\operatorname{sech}^2 x$의 상수배의 차가 된다. 따라서 모든 것은 $\cosh^2 x$와 $1+x^2$를 비교하는 문제로 귀결된다. (i)의 부등식(inequality)이 f′의 부호를 결정하고, 비 $\cosh^2 x/(1+x^2)$가 증가함을 보이면 이 비가 $\frac{1}{2}\pi$와 같아지는 횟수, 곧 g′이 0이 되는 횟수를 정확히 알 수 있다.

풀이

소문항 (i)

$\cosh^2 x = \frac{1}{2}(1+\cosh 2x)$와 $\cosh 2x = \frac{1}{2}(e^{2x}+e^{-2x})$를 이용하면, e^x의 매클로린 급수(Maclaurin series)로부터 (홀수 차수 항은 상쇄되어) 다음을 얻는다.

$$\cosh 2x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = 1 + 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \cdots .$$

모든 항이 음이 아니므로 $\cosh 2x \geq 1 + 2x^2$이고, 따라서

$$\cosh^2 x = \tfrac{1}{2}(1+\cosh 2x) \geq \tfrac{1}{2}(2+2x^2) = 1 + x^2,$$

이며 등호는 $x = 0$일 때만 성립한다($x \neq 0$이면 x^4 항이 양수이다).

이제 미분하면

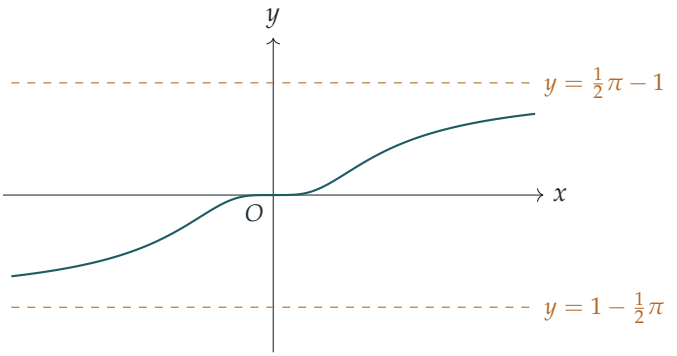
$$\mathrm{f}'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \operatorname{sech}^2 x = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

$\cosh^2 x \geq 1 + x^2 > 0$이므로 역수는 $\dfrac{1}{\cosh^2 x} \leq \dfrac{1}{1+x^2}$를 만족하고, 따라서 모든 x에 대해

$f'(x) \geq 0$이며 등호는 $x = 0$에서만 성립한다. 한 점을 제외하고 도함수가 양수인 함수는 (순)증가함수(strictly increasing function)이므로, 증명이 끝난다.

그래프 개형. 그래프에 나타낼 특징은 다음과 같다.

- f는 기함수(odd function)이고($\tan^{-1}$과 tanh가 모두 기함수이다), $f(0) = 0$이다.
- $f'(0) = 0$이지만 f는 증가하므로, 원점은 정류 변곡점(stationary point of inflection)이다. 실제로 $\tan^{-1} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots$이고 $\tanh x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \cdots$이므로 0 근처에서 $f(x) \approx \frac{1}{15}x^5$이다. 즉 그래프는 그 근처에서 매우 평평하다.
- $x \to \infty$일 때 $\tan^{-1} x \to \frac{1}{2}\pi$이고 $\tanh x \to 1$이므로, $f(x) \to \frac{1}{2}\pi - 1 \approx 0.571$이며 아래쪽에서 접근한다. 기함수이므로 $x \to -\infty$일 때 $f(x) \to 1 - \frac{1}{2}\pi$이다.



소문항 (ii)(a)

이 경우

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{\pi}{2\cosh^2 x},$$

이고, 이는 연속인 우함수(even function)이다. $x = 0$에서 $g'(0) = 1 - \frac{1}{2}\pi < 0$이다. $x = 2$에서는

$$g'(2) = \tfrac{1}{5} - \frac{\pi}{2\cosh^2 2},$$

이고, $\cosh 2 > \frac{1}{2}e^2 > 3.6$이므로 $\cosh^2 2 > 12.9$이며 $\dfrac{\pi}{2\cosh^2 2} < \dfrac{1.6}{12.9} < \frac{1}{5}$이다. 따라서 $g'(2) > 0$이다. 중간값 정리(intermediate value theorem)에 의해 g'은 $(0, 2)$에서 영점을 가지며, g'이 우함수이므로 $(-2, 0)$에서도 영점을 하나 더 가진다. 그러므로 g는 적어도 두 개의 정류점(stationary point)을 가진다.

소문항 (ii)(b)

$h(x) = (1+x^2)\sinh x - x\cosh x$라 하자. 그러면

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2x\sinh x + (1+x^2)\cosh x - \cosh x - x\sinh x \\ &= x\sinh x + x^2\cosh x. \end{aligned}$$

$x \geq 0$이면 $x\sinh x$와 $x^2\cosh x$가 모두 음이 아니므로($x > 0$이면 양수이다), h는 $[0,\infty)$에서 증가한다. $h(0) = 0$이므로 $x \geq 0$에 대해 $h(x) \geq 0$이고, 실제로 $x > 0$에 대해 $h(x) > 0$이다.

소문항 (ii)(c)

몫의 미분법(quotient rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\cosh^2 x}{1+x^2}\right) = \frac{2\cosh x\sinh x\,(1+x^2) - 2x\cosh^2 x}{(1+x^2)^2} = \frac{2\cosh x\,h(x)}{(1+x^2)^2}.$$

$x \geq 0$이면 $\cosh x > 0$이고 (b)에 의해 $h(x) \geq 0$이므로 이 도함수는 음이 아니며, $x = 0$에서만 0이다. 따라서 $\cosh^2 x/(1+x^2)$는 $x \geq 0$에서 (순)증가한다.

소문항 (ii)(d)

생각해 보기 $\cosh^2 x/(1+x^2)$에 관한 명제로 어떻게 g'의 영점 개수를 셀 수 있을까?

$\mathrm{g}'(x) = 0$의 양변에 양수 $(1+x^2)\cosh^2 x$를 곱하면

$$\mathrm{g}'(x) = 0 \iff \frac{\cosh^2 x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

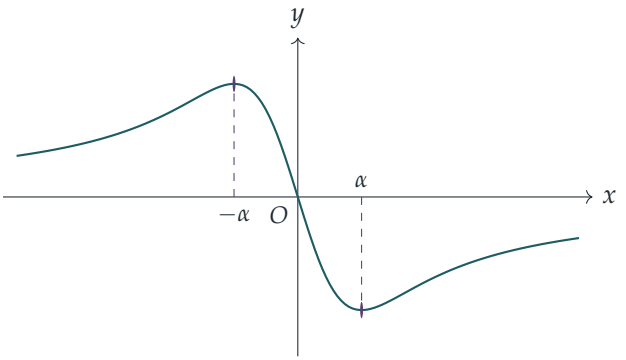
임을 알 수 있다. $R(x) = \cosh^2 x/(1+x^2)$라 하자. $[0,\infty)$에서 R은 연속이고 (c)에 의해 순증가하며 $R(0) = 1 < \frac{1}{2}\pi$이므로, 이 구간에서 값 $\frac{1}{2}\pi$를 많아야 한 번 가진다. (a)에 의해 실제로 이 값을 $0 < \alpha < 2$인 어떤 α에서 가진다. 따라서 g'은 $[0,\infty)$에서 정확히 하나의 영점을 가진다. R이 우함수이므로 $x < 0$인 영점은 $x > 0$인 영점의 부호를 바꾼 것이고, 따라서 $-\alpha$에서 정확히 하나가 더 있다. 그러므로 g는 $x = \pm\alpha$에서 정확히 두 개의 정류점을 가진다(수치적으로 $\alpha \approx 1.406$이다).

소문항 (ii)(e)

사실들을 모아 보자.

- g는 기함수이고, $\mathrm{g}(0) = 0$이며 $\mathrm{g}'(0) = 1 - \frac{1}{2}\pi < 0$이다.

- (d)로부터 $(-\alpha, \alpha)$에서 $g' < 0$이고(이 구간에서 $R < \frac{1}{2}\pi$이다), $|x| > \alpha$이면 $g' > 0$이다. 따라서 $x = -\alpha$에서 극대(local maximum), $x = \alpha$에서 극소(local minimum)를 가지며, $g(\alpha) = -g(-\alpha) < 0$이다(약 -0.44).
- $x \to \infty$일 때 $g(x) \to \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi \cdot 1 = 0$이다. g는 (α, ∞)에서 극한값 0을 향해 증가하므로 이 구간에서 계속 음수이다. 즉 그래프는 아래쪽에서 x축에 접근한다. 기함수이므로 $x \to -\infty$일 때 $g(x) \to 0$이며 위쪽에서 접근한다.
- 따라서 g의 영점은 원점뿐이다. 즉 $x < 0$이면 $g > 0$이고 $x > 0$이면 $g < 0$이다.



검산

- $x = 1$에서: $\cosh^2 1 \approx 2.381 \geq 2$이므로 (i)과 일치한다.
- $f(30) \approx 0.537$로 아래쪽에서 $\frac{1}{2}\pi - 1 \approx 0.571$에 접근하고, $f(0.1) \approx 6.6 \times 10^{-7}$로 $\frac{1}{15}(0.1)^5$에 가깝다.
- $\cosh^2 x = \frac{1}{2}\pi(1 + x^2)$를 수치적으로 풀면 $\alpha \approx 1.406$으로 (a)의 예측대로 $(0, 2)$ 안에 있고, $g(\alpha) \approx -0.440$이다. $[-20, 20]$에서 g'을 촘촘하게 조사하면 부호 변화가 정확히 두 번 나타나며, $g(20) \approx -0.050$은 그래프 개형에서처럼 작은 음수이다.

흔한 실수

- $\cosh^2 x \geq 1 + x^2$를 $\operatorname{sech}^2 x \leq \dfrac{1}{1 + x^2}$로 뒤집어야 한다는 것을 잊는 실수. 이는 양변이 모두 양수이기 때문에 성립한다.
- (d)에서 양의 근이 하나뿐임만 증명하고, 음의 근을 세기 위해 우함수 성질을 이용하는 것(또는 $x = 0$이 근이 아님을 언급하는 것)을 잊는 실수.
- g의 그래프를 $y = 0$이 아닌 점근선(asymptote)으로 그리거나, 큰 x에서 축을 다시 가로지르도록 그리는 실수. (α, ∞)에서의 단조성(monotonicity)이 이를 배제한다.

STEP 너머

(ii)의 방법, 즉 "$g' = 0$의 해는 몇 개인가?"를 "단조함수가 어떤 값을 몇 번 지나는가?"로 바꾸는 방법은 해석학자들이 근의 개수를 세는 기본적인 방법이다. 연속성과 중간값 정리는 존재성을, 순단조성은 유일성을 보장한다. 이러한 아이디어는 대학의 첫 해석학(analysis) 강좌에서 엄밀하게 다루어진다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)는 이 내용이 꼼꼼하게 전개되는 것을 볼 수 있는 훌륭한 책이다.

풀이

STEP III 2023, 문제 7

순수수학 • 적분 부등식

> **STEP III 2023, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

핵심 아이디어

연속 함수(continuous function)의 제곱을 적분한 값은 결코 음수가 아니며, 그 값이 0이 되는 것은 함수가 항등적으로 0(identically zero)일 때뿐이다. 각 문항은 $\int(\text{어떤 것})^2$을 포함하는 등식을 주는데, 이를 조금 정리하면 "완전제곱(perfect square)의 적분이 0과 같다"는 꼴이 된다. 소문항 (i)은 (ii)를 위한 도구를 제공하고, (iii)에서는 부분적분(integration by parts)이 같은 역할을 하며, (iv)에서는 완전제곱식을 만들어 그 제곱을 직접 찾아내야 한다.

풀이

소문항 (i)

왼쪽 적분에서 $x = u^2$으로 치환(substitution)하면 $\mathrm{d}x = 2u\,\mathrm{d}u$이다. x가 0에서 1까지 변할 때 $u \geq 0$도 같은 범위를 움직이고, $\sqrt{x} = u$이다. 따라서

$$\int_0^1 \mathrm{f}(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{f}(u)\,2u\,\mathrm{d}u = 2\int_0^1 x\,\mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x,$$

이고, 마지막 단계에서는 적분변수(dummy variable)의 이름만 바꾸었다. 이것이 구하는 결과이다.

소문항 (ii)

소문항 (i)을 $\mathrm{f} = \mathrm{g}$로 놓고 적용하면 주어진 조건은 다음과 같이 된다.

$$\int_0^1 \big(\mathrm{g}(x)\big)^2\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x\,\mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}.$$

이제 구하려는 적분을 전개하고 $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$을 이용하면

$$\begin{aligned}\int_0^1 \big(\mathrm{g}(x)-x\big)^2\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \big(\mathrm{g}(x)\big)^2\,\mathrm{d}x - 2\int_0^1 x\,\mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{3}+\frac{1}{3} = 0,\end{aligned}$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

생각해 보기 적분이 0이라는 사실이 왜 "대부분"이 아니라 모든 곳에서 $\mathrm{g}(x) = x$가 되도록 강제하는가?

$\phi(x) = \big(\mathrm{g}(x)-x\big)^2$이라 하자. 이 함수는 (g가 연속이므로) 연속이고 $\phi(x) \geq 0$이다. 어떤 $c \in [0,1]$에 대하여 $\phi(c) > 0$이라고 가정하자. 연속성에 의해 c를 포함하고 길이가 양수 δ인 구간 $I \subseteq [0,1]$가 존재하여, 그 위에서 $\phi(x) > \frac{1}{2}\phi(c)$이다. 다른 모든 곳에서 $\phi \geq 0$이므로

$$\int_0^1 \phi(x)\,\mathrm{d}x \;\geq\; \int_I \phi(x)\,\mathrm{d}x \;\geq\; \tfrac{1}{2}\phi(c)\,\delta > 0,$$

이 되어 모순(contradiction)이다. 따라서 $0 \leq x \leq 1$인 모든 x에 대하여 $\phi(x) = 0$, 즉 $\mathrm{g}(x) = x$이다. (연속성은 정말 중요하다. 단 한 점에서만 x와 다른 함수도 적분값은 여전히 0이 되기 때문이다.)

소문항 (iii)

항 $2\mathrm{h}(1) - 2\int_0^1 \mathrm{h}(x)\,\mathrm{d}x$를 보면 부분적분이 떠올라야 한다. 1의 원시함수(antiderivative)로 x를 택하여 $1\cdot\mathrm{h}(x)$를 부분적분하면

$$\int_0^1 \mathrm{h}(x)\,\mathrm{d}x = \Big[x\,\mathrm{h}(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 x\,\mathrm{h}'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{h}(1) - \int_0^1 x\,\mathrm{h}'(x)\,\mathrm{d}x.$$

따라서 $2\mathrm{h}(1) - 2\int_0^1 \mathrm{h}(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x\,\mathrm{h}'(x)\,\mathrm{d}x$이고, 조건은 다음과 같이 된다.

$$\int_0^1 \big(\mathrm{h}'(x)\big)^2\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x\,\mathrm{h}'(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}.$$

이것은 g 자리에 h′을 넣은 소문항 (ii)의 조건(소문항 (i)을 거쳐 얻은 꼴)과 정확히 같다. 문제가 의도한 대로 h′이 연속이어야 한다는 점을 이용하여 같은 논증을 반복하면

$$\int_0^1 \big(\mathrm{h}'(x)-x\big)^2\,\mathrm{d}x = 0 \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{h}'(x) = x \text{ 단, } 0 \leq x \leq 1.$$

이를 적분하면 $\mathrm{h}(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$이고, $\mathrm{h}(0) = 0$에서 $C = 0$이다. 따라서

$$\mathrm{h}(x) = \tfrac{1}{2}x^2.$$

소문항 (iv)

먼저 조건에 $1/a$가 들어 있으므로 $a \neq 0$임에 주의한다. 앞의 소문항들과 비교하여, 교차항(cross term)이 $-2\mathrm{k}(x)$가 되는 $\mathrm{e}^{ax}\big(\mathrm{k}(x)-\mathrm{p}(x)\big)^2$ 꼴의 제곱을 찾는다. 전개하면 교차항은 $-2\mathrm{e}^{ax}\mathrm{p}(x)\mathrm{k}(x)$이므로 $\mathrm{p}(x)=\mathrm{e}^{-ax}$이어야 한다.

$$\mathrm{e}^{ax}\big(\mathrm{k}(x)-\mathrm{e}^{-ax}\big)^2 = \mathrm{e}^{ax}\big(\mathrm{k}(x)\big)^2 - 2\mathrm{k}(x) + \mathrm{e}^{-ax}.$$

이를 $[0,1]$에서 적분하고, 처음 두 항에는 주어진 조건을, 마지막 항에는 $\int_0^1 \mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-a}}{a}$를 이용하면

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{e}^{ax}\big(\mathrm{k}(x)-\mathrm{e}^{-ax}\big)^2\,\mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{e}^{-a}}{a} - \frac{1}{a^2} - \frac{1}{4} + \frac{1-\mathrm{e}^{-a}}{a} \\ &= \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} - \frac{1}{4} = -\Big(\frac{1}{a}-\frac{1}{2}\Big)^2 = -\frac{(a-2)^2}{4a^2}.\end{aligned}$$

좌변은 음이 아닌 연속 함수의 적분이므로 ≥ 0이고, 우변은 ≤ 0이다. 따라서 둘 다 o이어야 하며, 이로부터 $(a-2)^2=0$, 즉 $a=2$이다.

$a=2$일 때 음이 아닌 연속 함수 $\mathrm{e}^{2x}\big(\mathrm{k}(x)-\mathrm{e}^{-2x}\big)^2$의 적분이 o이므로, 소문항 (ii)의 논증에 의해 이 함수는 $[0,1]$ 전체에서 o이다. $\mathrm{e}^{2x}>0$이므로 다음을 얻는다.

$$\mathrm{k}(x) = \mathrm{e}^{-2x}, \qquad 0 \leq x \leq 1.$$

검산

- 소문항 (i)에서 $\mathrm{f}(x)=x$로 두면, 좌변은 $\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$이고 우변은 $2\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$이다.
- 소문항 (iii): $\mathrm{h}=\frac{1}{2}x^2$이면 $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$이고 $2\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot\frac{1}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$이다. 두 값이 일치한다.
- 소문항 (iv): $a=2, \mathrm{k}=\mathrm{e}^{-2x}$이면 좌변은 $\int_0^1 \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-2}) \approx 0.43233$이고, 우변은 $(1-\mathrm{e}^{-2}) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2}$로 같다. 임의의 a와 임의의 다항식 k에 대하여 항등식 "좌변 빼기 우변 $= \int \mathrm{e}^{ax}(\mathrm{k}-\mathrm{e}^{-ax})^2 + (a-2)^2/(4a^2)$"을 컴퓨터로 확인한 결과도 일치하였다.

흔한 실수

- 연속성과 음이 아님을 이용하지 않고 적분이 o이라는 사실만으로 $\mathrm{g}(x)=x$라고 결론짓는 것. 적분이 o이라는 사실 하나만으로는 아무것도 말할 수 없다.
- 소문항 (iv)에서 $a \neq 0$임을 밝히는 것을 잊거나, 완전제곱식을 만들기 전에 k를 추측하려 하는 것.

STEP 너머

양 $\int_0^1 f(x)g(x)\,dx$는 "벡터" f와 g의 내적(dot product)처럼 행동하고, $\int_0^1 (g-x)^2\,dx$는 g와 x 사이 거리의 제곱이다. 각 소문항은 "이 거리가 0이다"라고 말하는 셈이며, (iv)의 가중치 e^{ax}는 가중 내적(weighted inner product)을 준다. 이러한 관점(내적 공간(inner product space), 그리고 노름(norm)이 0인 연속 함수는 0이라는 사실)은 대학 1학년 선형대수학(linear algebra)과 해석학(analysis)의 핵심이다. Strang, *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)와 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학의 이해)를 참고하라.

풀이

STEP III 2023, 문제 8

순수수학 • 구간별로 정의된 미분방정식

STEP III 2023, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

핵심 아이디어

절댓값(modulus) 때문에 이 방정식은 비선형(non-linear)이 되지만, 그 정도는 약하다. y'의 부호가 일정하게 유지되는 구간에서는 $|y'|$이 그냥 y' 또는 $-y'$이므로, 방정식은 평범한 상수계수(constant-coefficient) 방정식이 된다. 따라서 y'이 0이 될 때까지 해를 따라간 다음, 다른 쪽 선형 방정식으로 바꾸고, 이음매에서 y와 y'의 값을 맞춘다. 소문항 (iv)는 수고를 덜어 주는 요령이다. 해를 $x \mapsto c - x$로 반사(reflection)하면 일계도함수 항의 부호가 바뀌는데, 이것이 바로 두 선형 방정식 사이의 전환이다.

풀이

소문항 (i)

$\mathrm{f}(x) = x\mathrm{e}^{-x}$이면

$$\mathrm{f}'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}, \qquad \mathrm{f}''(x) = -\mathrm{e}^{-x} - (1-x)\mathrm{e}^{-x} = (x-2)\mathrm{e}^{-x}.$$

따라서 모든 실수 x에 대하여

$$\mathrm{f}'' + 2\mathrm{f}' + \mathrm{f} = \big[(x-2) + 2(1-x) + x\big]\mathrm{e}^{-x} = 0$$

이다. 또한 $\mathrm{f}(0) = 0$이고 $\mathrm{f}'(0) = 1 \cdot \mathrm{e}^{0} = 1$이므로 조건을 만족한다.

$\mathrm{e}^{-x} > 0$이므로 $\mathrm{f}'(x)$의 부호는 $1 - x$의 부호와 같고, 이는 $x \le 1$일 때 ≥ 0이다. 그러므로 $x \le 1$에서 $\mathrm{f}'(x) \ge 0$이다.

소문항 (ii)

$x \le 1$에서 $f' \ge 0$이므로 $|f'| = f'$이고, (ii)의 방정식은 (i)의 방정식과 같다. 따라서 f는 $x \le 1$에서 새 방정식과 초기 조건을 만족하며,

$$g_1(x) = xe^{-x}.$$

이음매에서 $g_1(1) = e^{-1}$이고 $g_1'(1) = 0$이다. 연속 미분가능성(continuous differentiability)에 의해 g_2는 같은 값에서 출발해야 한다. 즉 $g_2(1) = e^{-1}$, $g_2'(1) = 0$이다.

생각해 보기 $x = 1$을 막 지난 곳에서 y'의 부호는 무엇인가?

$x = 1$에서 방정식은 $y'' = -2|y'| - y = -e^{-1} < 0$을 주므로, y'은 0을 지나며 감소하고 $x = 1$ 바로 다음에서는 음수이다. 그곳에서 $|y'| = -y'$이고 방정식은

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0.$$

이 된다. 특성방정식(auxiliary equation) $m^2 - 2m + 1 = 0$은 중근(repeated root) $m = 1$을 가지므로 $g_2(x) = (A + Bx)e^x$이고 $g_2'(x) = (A + B + Bx)e^x$이다. $x = 1$에서의 조건으로부터

$$(A + B)e = e^{-1}, \qquad (A + 2B)e = 0,$$

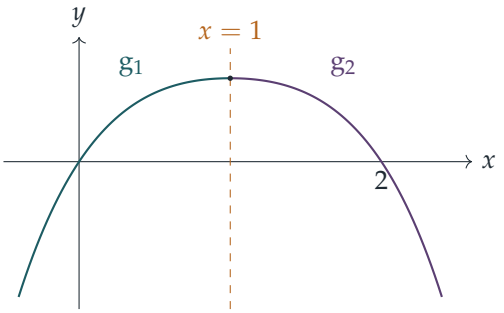
이므로 $B = -e^{-2}$, $A = 2e^{-2}$이다. 그러므로

$$g_2(x) = (2 - x)e^{x-2}.$$

이것이 가정 $y' \le 0$과 모순되지 않는지 확인해야 한다. 모든 $x \ge 1$에 대하여 $g_2'(x) = (1 - x)e^{x-2} \le 0$이다. 따라서 $x \ge 1$ 전체에서 $|g_2'| = -g_2'$이고, g_2는 실제로 $x \ge 1$ 전체에서 절댓값 방정식을 만족한다.

소문항 (iii)

g_1에서 x를 $2 - x$로 바꾸면 $(2 - x)e^{-(2-x)} = (2 - x)e^{x-2} = g_2(x)$이다. 따라서 $g_2(x) = g_1(2 - x)$이다. 즉 곡선 $y = g_2(x)$는 곡선 $y = g_1(x)$를 직선 $x = 1$에 대하여 대칭이동한 것이다.



소문항 (iv)

$Y(x) = \mathrm{k}(c-x)$라 하고 $u = c - x$로 놓는다. $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x = -1$이므로 연쇄 법칙(chain rule)에 의해

$$Y'(x) = -\mathrm{k}'(u), \qquad Y''(x) = \mathrm{k}''(u).$$

따라서

$$Y'' - pY' + qY = \mathrm{k}''(u) + p\,\mathrm{k}'(u) + q\,\mathrm{k}(u),$$

이고, $r \le u \le s$일 때마다 우변은 0이다. 그 범위에서 k가 원래 방정식의 해이기 때문이다. 이제 $r \le c - x \le s$는

$$c - s \le x \le c - r,$$

와 동치이므로, $y = \mathrm{k}(c-x)$는 구간 $[c-s, c-r]$에서 $y'' - py' + qy = 0$을 만족한다.

이것으로 (iii)이 설명된다. $p = 2, q = 1$, $(-\infty, 1]$에서 $\mathrm{k} = \mathrm{g}_1$, $c = 2$로 놓으면, 반사된 함수 $\mathrm{g}_1(2-x)$는 $[1, \infty)$에서 $y'' - 2y' + y = 0$의 해이다.

소문항 (v)

$\mathrm{h}(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin x$이면

$$\mathrm{h}'(x) = \mathrm{e}^{-x}(\cos x - \sin x) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-x}\cos\left(x + \tfrac{1}{4}\pi\right),$$

이므로 $\mathrm{h}'(\frac{1}{4}\pi) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\pi/4}\cos\frac{1}{2}\pi = 0$이다. (두 번째 꼴을 보면 주어진 대로 $[-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]$에서 $\mathrm{h}' \ge 0$임과, 나중에 필요한 $\mathrm{h}'(-\frac{3}{4}\pi) = 0$도 알 수 있다.)

계획은 소문항 (ii)와 같다. $y' \le 0$인 구간에서 방정식은 $y'' - 2y' + 2y = 0$이고, $y' \ge 0$인 곳에서는 $y'' + 2y' + 2y = 0$인데, h는 후자를 만족한다.

(a) $x = \frac{1}{4}\pi$에서 $y = \mathrm{h}(\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\pi/4} > 0$이고 $y' = 0$이므로 $y'' = -2y < 0$이고, y'은 음수로 바뀐다. 따라서 $y'' - 2y' + 2y = 0$의 해가 필요한데, $p = q = 2$인 소문항 (iv)가 그런 해를 하나 준다. $y = \mathrm{h}(c-x)$는 $c - \frac{1}{4}\pi \le x \le c + \frac{3}{4}\pi$에서 성립한다. $c = \frac{1}{2}\pi$로 택하면 이 구간이 정확히 $[\frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi]$가 되고,

$$y = \mathrm{h}\left(\tfrac{1}{2}\pi - x\right) = \mathrm{e}^{x-\pi/2}\sin\left(\tfrac{1}{2}\pi - x\right) = \mathrm{e}^{x-\pi/2}\cos x.$$

> ? **생각해 보기** 이것이 그저 하나의 해가 아니라 바로 그 해라는 것을 어떻게 알 수 있는가?

이음매에서 값이 맞는다. $\mathrm{h}(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{4}\pi) = \mathrm{h}(\frac{1}{4}\pi)$이고, 도함수 $-\mathrm{h}'(\frac{1}{2}\pi - x)$는 $x = \frac{1}{4}\pi$에서 $-\mathrm{h}'(\frac{1}{4}\pi) = 0$과 같다. 따라서 그곳에서 y와 y'은 연속이다. 또한 자기모순이 없다. $x \in [\frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi]$이면 $\frac{1}{2}\pi - x \in [-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]$이고 그곳에서 $\mathrm{h}' \ge 0$이므로, 구간 전체에서

$y' = -\mathrm{h}'(\frac{1}{2}\pi - x) \le 0$이고 $|y'| = -y'$이다. 한 점에서 y와 y'이 주어진 선형 방정식의 해는 오직 하나뿐이므로, 이것이 바로 해의 연장이다. 따라서 $\frac{1}{4}\pi \le x \le \frac{5}{4}\pi$에서

$$y = \mathrm{e}^{x-\pi/2}\cos x.$$

(b) $x = \frac{5}{4}\pi$에서 $y = \mathrm{e}^{3\pi/4}\cos\frac{5}{4}\pi = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{3\pi/4} < 0$이고 $y' = -\mathrm{h}'(-\frac{3}{4}\pi) = 0$이다. 이제 $y'' = -2y > 0$이므로 y'은 양수로 바뀌고, 방정식은 다시 $y'' + 2y' + 2y = 0$이 된다.

이 방정식은 상수계수이므로 해를 평행이동한 것도 해이다. $\sin(x - 2\pi) = \sin x$이므로 함수 $\mathrm{h}(x - 2\pi) = \mathrm{e}^{2\pi - x}\sin x$는 이 방정식의 해이며, $[\frac{5}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi]$에서 그 변수 $x - 2\pi$는 $\mathrm{h}' \ge 0$인 $[-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]$ 위를 움직이므로 $y' \ge 0$과 모순되지 않는다. $x = \frac{5}{4}\pi$에서 이음매를 확인하면

$$\mathrm{e}^{2\pi - 5\pi/4}\sin\tfrac{5}{4}\pi = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{3\pi/4}, \qquad \mathrm{h}'(\tfrac{5}{4}\pi - 2\pi) = \mathrm{h}'(-\tfrac{3}{4}\pi) = 0,$$

으로 둘 다 맞는다. 따라서 $\frac{5}{4}\pi \le x \le \frac{9}{4}\pi$에서

$$y = \mathrm{e}^{2\pi - x}\sin x.$$

$x = \frac{9}{4}\pi$에서 이 값은 $\mathrm{e}^{-\pi/4}\sin\frac{1}{4}\pi = \mathrm{h}(\frac{1}{4}\pi)$이고 도함수는 o이다. 즉 해는 $\frac{1}{4}\pi$에서의 상태로 되돌아오므로, $x \ge \frac{1}{4}\pi$에서 해는 주기가 2π인 주기함수(periodic function)이다.

검산

- 조각들은 구성 방식상 매끄럽게 이어지지만, 직접 확인해 볼 만하다. $x = \frac{5}{4}\pi$에서 (a)와 (b)는 모두 $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{3\pi/4} \approx -7.4605$를 주고, 기울기는 o이다.
- $y(0) = 0, y'(0) = 1$에서 출발하여 절댓값 방정식을 수치적으로 한 걸음씩 풀어 나가면, $[0, 4]$에서 $\mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2$와 $[0, \frac{9}{4}\pi]$에서 (v)의 세 조각이 10^{-9} 이내의 오차로 재현된다.
- (a)를 직접 미분하면 $y' = \mathrm{e}^{x-\pi/2}(\cos x - \sin x)$, $y'' = -2\mathrm{e}^{x-\pi/2}\sin x$이고, 요구대로 $y'' - 2y' + 2y = 0$이다.

흔한 실수

- 극점(turning point)을 지난 뒤에도 $|y'| = y'$으로 두는 것. $x = 1$ 너머에서 f 자체는 해가 아니다.
- 새 조각이 구간 전체에서 가정한 부호의 y'을 유지하는지 확인하는 것을 잊는 것.
- (iv)에서 구간을 $[r, s]$로 답하는 것. 반사에 의해 이 구간은 $[c - s, c - r]$로 옮겨진다.

STEP 너머

이와 같이 우변이 전환 곡면(switching surface, 여기서는 $y' = 0$)을 가로지르는 곳을 제외하면 매끄러운 방정식을 구간별 매끄러운(piecewise-smooth) 시스템 또는 전환 시스템(switching system)이라고 한다. 해는 선형 조각들을 이어 붙여 만들어지며, $|y'|$이 립시츠(Lipschitz) 연속이므로 해의 존재성과 유일성은 여전히 피카르–린델뢰프 정리(Picard–Lindelöf theorem)로부터 따라 나온다. (v)의 2π-주기성은 선형 감쇠 방정식으로는 결코 얻을 수 없는 현상이다. $E = \frac{1}{2}y'^2 + y^2$로 놓으면 $\mathrm{d}E/\mathrm{d}x = -2y'|y'|$이므로, "감쇠(damping)" 항은 y가 증가하는 동안에는 에너지를 빼앗고 y가 감소하는 동안에는 에너지를 되돌려 준다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 선형 이론과 유일성을 다룬다.

풀이

STEP III 2023, 문제 9

역학 • 두 입자를 잇는 줄의 운동

STEP III 2023, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

핵심 아이디어

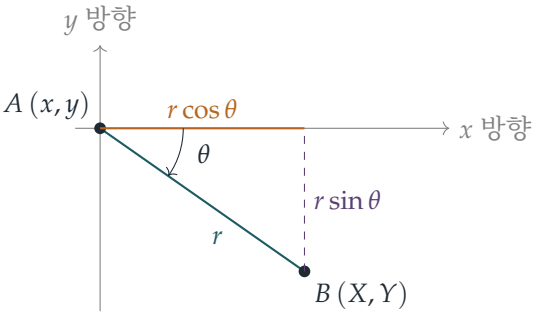
계를 A의 위치와 실의 방향 θ로 나타낸다. 장력(tension)은 실을 따라서만 작용하므로, 각 입자의 가속도에는 실에 수직인 성분이 없다. 두 입자의 수직 방향 가속도를 비교하면 $\ddot{\theta} = 0$이 될 수밖에 없다. 즉 실은 일정한 비율로 회전한다. 그다음에는 운동량 보존(conservation of momentum)으로 마무리하면 된다.

풀이

전체적으로 입자들은 매끄러운 수평면 위에서 움직이고, 실은 가볍고 늘어나지 않으며(inextensible), (가정해도 되듯이) 계속 팽팽하게(taut) 유지되므로 언제나 $AB = r$이다.

소문항 (i)

벡터 $\overrightarrow{AB}$의 길이는 r이다. θ는 양의 x축으로부터 **시계 방향**으로 잰 각이므로, 그림에서처럼 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$일 때 이 벡터는 x 방향보다 아래쪽을 향한다.



A에서 B로 가려면 x 방향으로 $r\cos\theta$만큼, y의 음의 방향으로 $r\sin\theta$만큼 이동하므로

$$X = x + r\cos\theta, \qquad Y = y - r\sin\theta.$$

$(\cos\theta, -\sin\theta)$는 x축으로부터 시계 방향으로 각 θ를 이루는 단위벡터이므로, 같은 식이 모든 θ에 대해 성립한다.

소문항 (ii)

t에 대해 미분하면(r은 상수이고 θ는 t의 함수이다)

$$\dot{X} = \dot{x} - r\dot{\theta}\sin\theta, \qquad \dot{Y} = \dot{y} - r\dot{\theta}\cos\theta,$$
$$\ddot{X} = \ddot{x} - r\ddot{\theta}\sin\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta, \qquad \ddot{Y} = \ddot{y} - r\ddot{\theta}\cos\theta + r\dot{\theta}^2\sin\theta.$$

소문항 (iii)

장력 T는 A를 단위벡터 $(\cos\theta, -\sin\theta)$ 방향을 따라 B 쪽으로 당기고, B를 $(-\cos\theta, \sin\theta)$ 방향을 따라 A 쪽으로 당긴다. 뉴턴의 제2법칙(Newton's second law)에 의해

$$m\ddot{x} = T\cos\theta, \quad m\ddot{y} = -T\sin\theta, \qquad M\ddot{X} = -T\cos\theta, \quad M\ddot{Y} = T\sin\theta.$$

따라서

$$m(\ddot{x}\sin\theta + \ddot{y}\cos\theta) = T\cos\theta\sin\theta - T\sin\theta\cos\theta = 0,$$

이고, 똑같은 방법으로 $M(\ddot{X}\sin\theta + \ddot{Y}\cos\theta) = 0$이다. 각각 m과 M으로 나누면 요구하는 두 결과를 얻는다. (기하학적으로 보면, $(\sin\theta, \cos\theta)$는 실에 수직이고 두 입자 모두 그 방향으로는 가속하지 않는다.)

> ? **생각해 보기** "수직 방향 가속도가 없다"는 두 식이 있다. 이 식들이 어떻게 θ에 대해 무언가를 알려 주는가?

두 번째 식에서 첫 번째 식을 빼고, $\ddot{X} - \ddot{x}$와 $\ddot{Y} - \ddot{y}$에 소문항 (ii)의 식을 대입한다.

$$\begin{aligned} 0 &= (\ddot{X} - \ddot{x})\sin\theta + (\ddot{Y} - \ddot{y})\cos\theta \\ &= \left(-r\ddot{\theta}\sin\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta\right)\sin\theta + \left(-r\ddot{\theta}\cos\theta + r\dot{\theta}^2\sin\theta\right)\cos\theta \\ &= -r\ddot{\theta}\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) = -r\ddot{\theta}. \end{aligned}$$

$r \neq 0$이므로 $\ddot{\theta} = 0$이고, 따라서 $\dot{\theta}$는 상수이다.

이 상수를 구하기 위해 초기 조건을 이용한다. $t = 0$일 때 B는 A에 대해 $(r, 0)$에 있으므로 $\theta(0) = 0$이다. 또 $\dot{y}(0) = u$이고 $\dot{Y}(0) = 0$이므로, 소문항 (ii)의 $\dot{Y}$에 대한 식에서

$$0 = u - r\dot{\theta}(0)\cos 0 \quad \Longrightarrow \quad \dot{\theta}(0) = \frac{u}{r}.$$

($\dot{X}$에 대한 식도 이와 모순되지 않는다: $0 = 0 - r\dot{\theta}(0)\sin 0$.) 따라서 모든 t에 대해 $\dot{\theta} = u/r$이고, $\theta(0) = 0$을 이용해 적분하면

$$\theta = \frac{ut}{r},$$

이므로 요구하는 결과가 성립한다.

소문항 (iv)

소문항 (iii)의 운동 방정식을 두 개씩 더하면

$$m\ddot{x} + M\ddot{X} = T\cos\theta - T\cos\theta = 0, \qquad m\ddot{y} + M\ddot{Y} = -T\sin\theta + T\sin\theta = 0.$$

이것이 운동량 보존이다. 장력은 계의 내력이기 때문이다. 두 번째 식을 한 번 적분하면 $m\dot{y} + M\dot{Y}$는 상수이고, 그 값은 초깃값 $mu + M\cdot 0 = mu$와 같다. $y(0) = Y(0) = 0$을 이용해 한 번 더 적분하면

$$my + MY = mut.$$

소문항 (v)

소문항 (i)의 $Y = y - r\sin\theta$와 소문항 (iii)의 $\theta = ut/r$를 대입하면

$$my + M\left(y - r\sin\frac{ut}{r}\right) = mut \quad\Longrightarrow\quad y = \frac{1}{m+M}\left(mut + Mr\sin\frac{ut}{r}\right),$$

이고, 이것이 요구하는 결과이다.

소문항 (vi)

소문항 (v)의 결과를 미분하면

$$\dot{y} = \frac{1}{m+M}\left(mu + Mu\cos\frac{ut}{r}\right) = \frac{u}{m+M}\left(m + M\cos\frac{ut}{r}\right).$$

실이 반 바퀴 회전한 시각 $t = \pi r/u$에서 $\cos(ut/r) = -1$이고

$$\dot{y} = \frac{u(m-M)}{m+M},$$

이며, 이 값은 $M > m$일 때 ($u > 0$이므로) 음수이다. 따라서 그 순간 A의 속도는 음의 y 성분을 가지며, 연속성(continuity)에 의해 그 시각 근처의 어떤 시간 구간에서도 그렇다.

검산

- $t = 0$일 때 소문항 (v)의 식은 $\dot{y} = u(m+M)/(m+M) = u$를 주므로, A의 초기 속도와 일치한다.

- x 방향에 같은 방법을 적용하면 $mx + MX = Mr$이므로 $x = \dfrac{Mr}{m+M}(1-\cos\theta)$이다. 소문항 (v)와 함께 보면, 질량중심(centre of mass)은 y 방향으로 속력 $mu/(m+M)$으로 직선 운동을 하고, 두 입자는 각속도(angular speed) u/r로 그 둘레를 원운동한다. 이는 익숙한 그림이다. 이때 장력은 상수 $\dfrac{mM}{m+M}\dfrac{u^2}{r} > 0$이므로, 실은 실제로 팽팽하게 유지된다.
- $M \to \infty$이면 B는 고정되어 있고, 소문항 (v)는 $y = r\sin(ut/r)$를 준다. 즉 A는 B를 중심으로 반지름 r인 원을 따라 움직이며, 이는 마땅히 그래야 하는 결과이다.
- $m = 1, M = 3, u = r = 1$로 두고 두 입자를 매우 단단한 용수철로 연결해 컴퓨터 시뮬레이션을 한 결과, $t = \pi$에서 $y \approx 0.7854$, $\dot{y} \approx -0.5000$을 얻었다. 이는 $\frac{\pi}{4}$ 및 $\frac{1-3}{1+3} = -\frac{1}{2}$와 일치한다.

흔한 실수

- 시계 방향 규약에서 오는 부호 실수: $Y = y - r\sin\theta$이므로 $\dot{Y}$에는 $+$가 아니라 $-r\dot{\theta}\cos\theta$가 들어간다.
- 상수 u/r의 근거를 밝히지 않는 것: 이 값은 A의 속력만으로 나오는 것이 아니라 $\dot{Y}(0) = 0$에서 나온다.
- 소문항 (vi)에서 구체적인 시각을 제시하지 않고 "결국에는" $\dot{y} < 0$이라고 주장하는 것: $t = \pi r/u$가 확실한 시각을 준다.

STEP 너머

이것은 가장 단순한 형태의 이체 문제(two-body problem)이다. 운동은 질량중심의 등속 운동과, 환산질량(reduced mass) $mM/(m+M)$이 지배하는 질량중심에 대한 상대 운동으로 나뉜다. 같은 분해가 행성의 궤도와 이원자 분자(diatomic molecule)의 진동의 바탕에 깔려 있다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 질량중심 좌표와 환산질량을 꼼꼼하게 전개한다.

풀이

STEP III 2023, 문제 10

역학 • 보의 평형

STEP III 2023, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

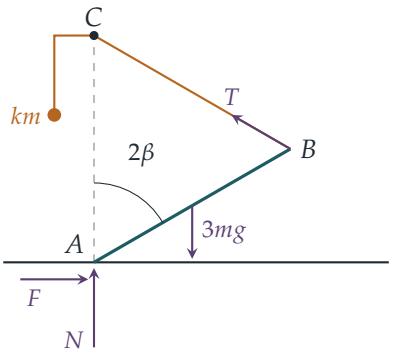
www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

핵심 아이디어

도르래는 A에서 정확히 보의 길이만큼 위에 있으므로, A, B, C는 $AB = AC = 2h$인 이등변 삼각형(isosceles triangle)을 이룬다. 이 기하 구조 덕분에 줄의 방향과 A에서 줄까지의 수직 거리를 공짜로 얻는다. 그다음은 평형(equilibrium) 상태에 있는 막대를 다루는 통상적인 방법을 따르면 된다. A에 대한 모멘트(moment)를 취하고(이렇게 하면 미지의 두 접촉력이 모두 사라진다), 힘을 분해(resolve)한 뒤, $F \leq \mu N$이라는 조건을 적용한다.

풀이

보는 균일한 막대로, 입자들은 질점으로, 줄은 매끄러운 도르래에 걸린 가볍고 늘어나지 않는 줄로 모형화한다. 따라서 장력(tension)은 줄 전체에서 같다. 매달린 입자가 평형 상태에 있으므로 장력은 $T = kmg$이다.



A를 원점에 두고, x축은 수평으로(B가 있는 쪽을 향하게), y축은 연직 위쪽으로 잡는다. 그

러면 $C = (0, 2h)$이고 $B = 2h(\sin 2\beta, \cos 2\beta)$이다.

줄의 방향. B에서 C로 향하는 벡터(vector)는 $1 - \cos 2\beta = 2\sin^2\beta$를 이용하면

$$2h\big(-\sin 2\beta,\ 1 - \cos 2\beta\big) = 4h\sin\beta\,(-\cos\beta,\ \sin\beta),$$

이다. 따라서 보에 작용하는 장력은 $-x$ 방향(직선 AC 쪽으로 되돌아가는 방향)으로 수평 성분 $T\cos\beta$를, 위쪽으로 연직 성분 $T\sin\beta$를 가진다. 기하적으로 보면, 이등변삼각형 ABC에서 밑각은 $90^\circ - \beta$이므로 BC는 수평선과 각 β를 이룬다.

모멘트 팔. A에서 BC에 내린 수선은 이등변삼각형의 꼭지각 2β를 이등분하므로, 그 길이는 $2h\cos\beta$이다.

소문항 (i)

A에 대한 모멘트. 무게 $3mg$는 AB의 중점에 작용하며, 이 점은 A로부터 수평 거리 $h\sin 2\beta$만큼 떨어져 있다. 이를 장력과 균형시키면

$$kmg \cdot 2h\cos\beta = 3mg \cdot h\sin 2\beta = 6mgh\sin\beta\cos\beta.$$

$0 < 2\beta < 180^\circ$이므로 $\cos\beta \neq 0$이고, 따라서 양변을 이것으로 나눌 수 있다.

$$\boxed{k = 3\sin\beta.}$$

(이는 $k < 3$과 모순되지 않는다.)

힘의 분해. 연직 방향으로 $N + T\sin\beta = 3mg$이므로

$$N = 3mg - 3mg\sin^2\beta = 3mg\cos^2\beta.$$

수평 방향으로는 마찰력(friction)이 줄의 수평 방향 당김과 균형을 이루어야 하므로, 마찰력은 $+x$ 방향으로 작용하며

$$F = T\cos\beta = 3mg\sin\beta\cos\beta.$$

따라서 $F/N = \tan\beta$이다.

마찰 조건. 평형이 되려면 $F \le \mu N$, 즉 $\tan\beta \le \mu$이어야 한다. 이제

$$k^2 = 9\sin^2\beta = \frac{9\tan^2\beta}{1 + \tan^2\beta}.$$

함수 $t \mapsto \dfrac{t}{1+t} = 1 - \dfrac{1}{1+t}$는 $t \ge 0$에서 증가하고, $0 \le \tan^2\beta \le \mu^2$이므로

$$k^2 \le \frac{9\mu^2}{\mu^2 + 1},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

소문항 (ii)

이제 $T = 2mg$이고, 질량 m인 추가 입자는 A로부터 수평 거리 $xh\sin 2\beta$에 놓여 있다. 줄의 기하 구조는 바뀌지 않는다.

A에 대한 모멘트:

$$2mg \cdot 2h\cos\beta = 3mg\,h\sin 2\beta + mg\,xh\sin 2\beta = 2mgh(3+x)\sin\beta\cos\beta,$$

이고, $2mgh\cos\beta \neq 0$으로 나누면

$$\sin\beta = \frac{2}{3+x}.$$

$0 \le x \le 2$일 때 이 값은 $\frac{2}{5}$와 $\frac{2}{3}$ 사이에 있으므로, 이러한 β가 존재한다.

힘의 분해:

$$N = 4mg - 2mg\sin\beta, \qquad F = 2mg\cos\beta,$$

따라서

$$\frac{F^2}{N^2} = \frac{4\cos^2\beta}{(4-2\sin\beta)^2} = \frac{\cos^2\beta}{(2-\sin\beta)^2}.$$

$\sin\beta = 2/(3+x)$를 대입하면

$$\cos^2\beta = 1 - \frac{4}{(3+x)^2} = \frac{(3+x-2)(3+x+2)}{(3+x)^2} = \frac{(x+1)(x+5)}{(3+x)^2},$$
$$2-\sin\beta = \frac{2(3+x)-2}{3+x} = \frac{2(x+2)}{3+x}.$$

$(3+x)^2$ 인수들이 약분되어

$$\frac{F^2}{N^2} = \frac{(x+1)(x+5)}{4(x+2)^2} = \frac{x^2+6x+5}{4(x+2)^2},$$

이 남고, 이것이 구하는 결과이다.

> **생각해 보기** "x의 값이 무엇이든"이라는 말을 어떻게 μ에 대한 조건으로 바꿀 수 있을까?

각 x에 대해 $F \le \mu N$, 즉 $\mu \ge F/N$이어야 한다. 모든 $x \in [0,2]$를 포함하려면 μ는 그 구간에서 F/N의 **가장 큰** 값 이상이어야 한다. 따라서 F^2/N^2의 최댓값을 구하면 된다.

힌트를 따르면

$$\frac{1}{3} - \frac{F^2}{N^2} = \frac{4(x+2)^2 - 3(x^2+6x+5)}{12(x+2)^2} = \frac{x^2-2x+1}{12(x+2)^2} = \frac{(x-1)^2}{12(x+2)^2} \ge 0,$$

이고, 등호는 정확히 $x = 1$일 때 성립하며 이 값은 허용 범위 안에 있다. 따라서 모든 $x \in [0,2]$에 대해 $F^2/N^2 \le \frac{1}{3}$이고, 이 상한은 $x = 1$에서 도달된다. 그러므로 F/N의 최댓값

은 $1/\sqrt{3}$이고, 보가 모든 x에 대해 평형 상태에 있을 수 있을 필요충분조건은 $\mu \geq 1/\sqrt{3}$이다. 최솟값은

$$\boxed{\mu = \frac{1}{\sqrt{3}}}.$$

검산

- 소문항 (i)에서 보가 수평으로 놓인 경우, 즉 $2\beta = 90^\circ$인 경우를 생각해 보자. 그러면 $B = (2h, 0)$이고, 줄 BC는 45°를 이루며 A에서 줄까지의 거리는 $\sqrt{2}\,h$이다. 모멘트로부터 $T\sqrt{2}\,h = 3mgh$이므로 $T = 3mg/\sqrt{2}$이고, 이는 $k = 3\sin 45^\circ$와 일치한다. 또한 $N = F = \frac{3}{2}mg$이므로 $F/N = 1 = \tan 45^\circ$이다.
- 소문항 (ii)에서 $x = 0$일 때 공식은 $5/16$을 주고, 직접 계산하면 $\sin\beta = \frac{2}{3}$, $\cos^2\beta = \frac{5}{9}$, $(2 - \frac{2}{3})^2 = \frac{16}{9}$이므로 역시 $\frac{5}{16}$을 얻는다.
- $x = 1$일 때: $\sin\beta = \frac{1}{2}$이므로 $\beta = 30^\circ$이고 보는 연직선과 60°를 이룬다. $F/N = \cos 30^\circ / (2 - \frac{1}{2}) = 1/\sqrt{3} \approx 0.5774$이다. $[0, 2]$ 전체의 x에 대해 모멘트와 분해한 힘을 컴퓨터로 확인한 결과, 이 공식과 최댓값이 맞음을 확인하였다.

흔한 실수

- 줄이 연직 방향이 아니라 BC를 따라 당긴다는 사실을 잊는 것. 도르래가 C에 있으므로 장력에는 수평 성분이 있고, 마찰력이 버텨야 하는 것이 바로 이 성분이다.
- $0 \leq x \leq 2$에서 F/N의 최댓값 대신 최솟값(또는 끝점에서의 값)을 취하는 것. 가장 나쁜 경우는 구간 내부인 $x = 1$에서 일어난다.
- 모멘트 팔을 혼동하는 것. 무게의 팔은 수평 거리($h\sin 2\beta$)이고, 장력의 팔은 BC까지의 수직 거리($2h\cos\beta$)이다.

STEP 너머

모멘트를 취하는 것과 힘을 분해하는 것은 강체(rigid body)의 평형 조건, 즉 알짜힘이 0이고 알짜 토크(torque)가 0이라는 두 조건의 두 반쪽이다. 대학에서는 이것이 벡터 명제 $\sum \mathbf{F} = \mathbf{0}$과 $\sum \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$이 되며, 소문항 (ii)의 "매개변수에 대한 최악의 경우" 추론은 공학자들이 안전 여유를 고려해 설계하는 방식을 살짝 맛보게 해 준다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 벡터 언어로 정역학과 토크를 꼼꼼하게 전개한다.

풀이

STEP III 2023, 문제 11

확률과 통계 • 조건부 기댓값

> **STEP III 2023, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

핵심 아이디어

처음의 급수는 $k+1 = k+1$로 쓰고 k를 $k!$과 약분하면 익숙한 두 개의 지수급수(exponential series)로 나뉜다. 소문항 (i)에서 D의 분포(distribution)는 $D = d$를 만들 수 있는 Y의 모든 값에 대한 합을 포함한다. 이중합(double sum)의 순서를 바꾸면 안쪽 합은 쉬운 $1+2+\cdots+k$가 되고, 이때 나타나는 인수 $\frac{1}{2}(k+1)$이 바로 처음의 급수가 다루는 것이다. 소문항 (ii)는 주사위에 대한 조건부(conditioning) 계산으로 해결된다.

풀이

급수

$k \geq 1$이면 $\dfrac{k}{k!} = \dfrac{1}{(k-1)!}$이므로, 분자를 나누면

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k!}x^k &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \\ &= x\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - 1\right) \\ &= x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x - 1 = (x+1)\mathrm{e}^x - 1,\end{aligned}$$

이다. 여기서 첫 번째 합에는 $j = k-1$을 사용하였다. 두 급수 모두 모든 실수 x에 대하여 수렴(converge)하므로, 이렇게 나누는 것은 정당하다. 이것이 구하는 항등식이다.

소문항 (i)(a)

$D = 0$인 것은 정확히 $Y = 0$일 때이다($Y = k \geq 1$이면 주사위는 적어도 1을 보여 준다). 따라서

$$\mathrm{P}(D = 0) = \mathrm{P}(Y = 0) = \mathrm{e}^{-n}.$$

소문항 (i)(b)

$d \geq 1$을 고정한다. 주사위가 d를 보여 줄 수 있는 것은 주사위의 면이 적어도 d개일 때, 즉 $k \geq d$인 $Y = k$일 때뿐이다. 그리고 $Y = k \geq d$라는 조건 아래에서 공정한 주사위(fair die)는 확률 $\frac{1}{k}$로 d를 보여 준다. 전확률 법칙(law of total probability)에 의하여

$$\mathrm{P}(D = d) = \sum_{k=d}^{\infty} \mathrm{P}(D = d \mid Y = k)\,\mathrm{P}(Y = k) = \sum_{k=d}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-n}.$$

정의에 의하여 $\mathrm{E}(D) = \sum_{d=0}^{\infty} d\,\mathrm{P}(D = d)$이고, $d = 0$인 항은 0이므로

$$\mathrm{E}(D) = \sum_{d=1}^{\infty} \left[d \sum_{k=d}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \cdot \frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-n} \right) \right],$$

이 되어 구하는 식을 얻는다.

> **생각해 보기** 바깥쪽이 d에 대한 합이고 안쪽이 $k \geq d$에 대한 합인 것을, 바깥쪽이 k에 대한 합인 것으로 어떻게 바꿀 수 있을까?

이중합은 $1 \leq d \leq k$인 정수의 모든 쌍 (d, k)에 걸쳐 있다. 모든 항 $\frac{d}{k} \cdot \frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-n}$은 음이 아니므로, 항들을 어떤 순서로 더해도 합은 변하지 않는다. d 대신 k를 기준으로 묶으면, 각 $k \geq 1$에 대하여 d는 1부터 k까지 움직인다. 따라서

$$\mathrm{E}(D) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \cdot \frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-n} \sum_{d=1}^{k} d \right),$$

이고, 이것이 구하는 두 번째 형태이다.

소문항 (i)(c)

$\sum_{d=1}^{k} d = \frac{1}{2}k(k+1)$을 사용하면 인수 $\frac{1}{k}$이 약분된다.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(D) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-n} \cdot \frac{k(k+1)}{2} = \frac{\mathrm{e}^{-n}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k!} n^k \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-n}}{2}\left((n+1)\mathrm{e}^{n} - 1 \right) = \tfrac{1}{2}\left(n + 1 - \mathrm{e}^{-n} \right),\end{aligned}$$

여기서 처음의 항등식에 $x = n$을 대입하였다. 이것이 구하는 결과이다.

소문항 (ii)(a)

n면 주사위가 보여 주는 수를 K라 하자. 그러면 $k = 1, \ldots, n$에 대하여 $\mathrm{P}(K = k) = \frac{1}{n}$이고, $K = k$라는 조건 아래에서 $Z = X_k$이며, 이는 평균이 k인 푸아송 분포(Poisson distribution)를 따른다. 따라서 $\mathrm{P}(Z = 0 \mid K = k) = \mathrm{e}^{-k}$이고, 전확률 법칙에 의하여

$$\mathrm{P}(Z = 0) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-k}.$$

이것은 첫째항이 e^{-1}이고 공비가 e^{-1}인 기하급수(geometric series)이다.

$$\mathrm{P}(Z = 0) = \frac{1}{n} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-1}\left(1 - \mathrm{e}^{-n}\right)}{1 - \mathrm{e}^{-1}} = \frac{1 - \mathrm{e}^{-n}}{n(\mathrm{e} - 1)},$$

여기서 분자와 분모에 e를 곱하였다.

소문항 (ii)(b)

다시 주사위에 대한 조건을 걸면 $\mathrm{E}(Z \mid K = k) = \mathrm{E}(X_k) = k$이므로

$$\mathrm{E}(Z) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(Z \mid K = k)\,\mathrm{P}(K = k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

소문항 (i)(c)와 비교하면

$$\mathrm{E}(Z) - \mathrm{E}(D) = \frac{n+1}{2} - \frac{n+1-\mathrm{e}^{-n}}{2} = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-n} > 0,$$

이므로 $\mathrm{E}(Z) > \mathrm{E}(D)$이고, 이로써 증명된다.

흥미롭게도 0인 경우가 없다면 두 값은 같아진다. 면의 개수가 푸아송 분포를 따르는 Y인 공정한 주사위는 평균적으로 $\frac{1}{2}(Y+1)$을 보여 주고, 이것의 평균은 $\frac{1}{2}(n+1)$이다. 유일한 손실은 $Y = 0$일 때 공식 $\frac{1}{2}(Y+1)$이 주는 $\frac{1}{2}$ 대신 $D = 0$이 된다는 점이며, 이 일은 확률 e^{-n}으로 일어나므로 정확히 $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-n}$만큼 손해를 본다.

검산

- $x = 0$이면 처음의 항등식은 $0 = 1 \cdot 1 - 1$이 되고, $x = 1$이면 $\sum_{k \geq 1} \frac{k+1}{k!} = 2\mathrm{e} - 1 \approx 4.4366$을 주는데, 부분합(partial sums)으로 이를 확인할 수 있다.
- $n = 3$일 때: $\mathrm{E}(D) = \frac{1}{2}(4 - \mathrm{e}^{-3}) \approx 1.9751$, $\mathrm{E}(Z) = 2$, $\mathrm{P}(Z = 0) \approx 0.1843$이다. 각 실험을 200 000번 시행한 컴퓨터 시뮬레이션에서는 1.970, 2.002, 0.185를 얻었다.
- $n = 1$이면 소문항 (ii)의 주사위는 항상 1을 보여 주므로 $\mathrm{P}(Z = 0) = \mathrm{e}^{-1}$이다. 공식도 $\frac{1-\mathrm{e}^{-1}}{\mathrm{e}-1} = \mathrm{e}^{-1}$을 준다.

흔한 실수

- (i)(b)에서 안쪽 합을 $k = d$가 아니라 $k = 1$부터 시작하는 것. k면 주사위는 k보다 큰 수를 보여 줄 수 없다.
- 처음의 항등식에서 -1을 빠뜨리는 것. 이 -1은 e^x에서 빠진 $k = 0$인 항에서 오며, (i)(c)에 나오는 e^{-n}의 원천이다.

STEP 너머

두 소문항은 모두 타워 법칙(tower law) $\mathrm{E}(Z) = \mathrm{E}\big(\mathrm{E}(Z \mid K)\big)$의 예이다. 소문항 (i)에서 이 법칙을 쓰면 한 줄 만에 $\mathrm{E}(D) = \mathrm{E}\big(\frac{1}{2}(Y+1)\mathbf{1}_{Y\geq 1}\big)$을 얻으며, 우리가 손으로 한 합의 순서 바꾸기는 바로 이 법칙이 감추고 있는 것이다. 음이 아닌 항으로 이루어진 이중급수를 자유롭게 재배열할 수 있다는 것은 대학 1학년 해석학(analysis)에서 만나는 정리(일반적인 형태로는 토넬리(Tonelli)의 정리)이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 조건부 기댓값(conditional expectation)과 그것으로 만들어지는 복합 분포(compound distributions)를 다룬다.

풀이

STEP III 2023, 문제 12

확률과 통계 • 조합론적 확률

> **STEP III 2023, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

핵심 아이디어

한 켤레를 이루는 두 양말은 똑같아 보이지만, 선택은 $2n$개의 **실제** 양말 가운데 $2k$개로 이루어진 집합을 균등하게 무작위로(uniformly at random) 고르는 것이다. 따라서 모든 양말에 이름표를 붙이고 집합의 개수를 센다. 그러면 모든 것은 선택을 단계별로 구성하는 문제가 된다. 먼저 어느 켤레가 온전히 나타나는지 고르고, 다음으로 다른 어느 켤레가 양말을 한 짝만 내놓는지 고르고, 마지막으로 그런 켤레 각각에서 어느 짝을 가져올지 고른다. 소문항 (iii)은 익숙한 기법 $r\binom{n}{r} = n\binom{n-1}{r-1}$을 쓰는데, 이 등식은 가중합을 확률들의 합으로 바꾸어 준다.

풀이

$2n$개의 양말이 모두 서로 구별되도록 이름표를 붙인다. 똑같은 가능성을 갖는 선택은 $\binom{2n}{2k}$가지이고, 아래의 모든 확률은 (유리한 선택의 수)/$\binom{2n}{2k}$이다.

소문항 (i)

온전한 켤레가 하나도 없는 선택은 각 켤레에서 많아야 한 짝만 포함하므로, 그 $2k$개의 양말은 서로 다른 $2k$개의 켤레에서 나온다. 이런 선택을 만들려면 양말을 내놓는 $2k$개의 켤레를 $\binom{n}{2k}$가지 방법으로 고르고($2k \le n$이므로 가능하다), 각 켤레에서 두 짝 중 하나를 2^{2k}가지 방법으로 고르면 된다. 이렇게 고른 각각은 서로 다른 집합을 주고, 켤레가 없는 모든 집합은 이런 방식으로 생기므로

$$\mathrm{P}(\text{짝 없음}) = \frac{\binom{n}{2k}\,2^{2k}}{\binom{2n}{2k}}.$$

소문항 (ii)

$0 \le r \le k$인 r을 고정한다. 온전한 켤레가 정확히 r개인 선택은 다음으로 이루어진다.

- 통째로 뽑힌 r개의 켤레($2r$개의 양말),
- 그리고 나머지 $2k-2r = 2(k-r)$개의 양말. 이들은 모두 서로 다른 켤레에서 나오며(그렇지 않으면 켤레가 r개보다 많아진다), 이미 쓰인 r개의 켤레에서는 하나도 나오지 않는다.

따라서 온전한 켤레 r개를 $\binom{n}{r}$가지 방법으로 고르고, 남은 $n-r$개의 켤레에서 한 짝씩 내놓는 $2(k-r)$개의 켤레를 $\binom{n-r}{2(k-r)}$가지 방법으로 고르고, 이들 각각에서 한 짝을 $2^{2(k-r)}$가지 방법으로 고른다. 이번에도 켤레가 정확히 r개인 집합은 각각 정확히 한 번씩 만들어지므로

$$\mathrm{P}(X_{n,k} = r) = \frac{\binom{n}{r}\binom{n-r}{2(k-r)}\,2^{2(k-r)}}{\binom{2n}{2k}},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. ($r = 0$일 때 이것은 다시 소문항 (i)이 된다.)

소문항 (iii)

$1 \le r \le k$라 하자.

$$r\binom{n}{r} = \frac{r \cdot n!}{r!\,(n-r)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r)!} = n\binom{n-1}{r-1},$$

이므로 소문항 (ii)에서

$$r\,\mathrm{P}(X_{n,k} = r) = \frac{n\binom{n-1}{r-1}\binom{n-r}{2(k-r)}\,2^{2(k-r)}}{\binom{2n}{2k}}.$$

이제 켤레가 $n-1$개이고, 뽑는 양말이 $2(k-1)$개이고, 찾은 켤레가 $r-1$개인 경우에 소문항 (ii)를 적용한다. $2k \le n$에서 $2(k-1) \le n-1$이 따라 나오고 $0 \le r-1 \le k-1$이므로 이렇게 해도 된다. $(n-1)-(r-1) = n-r$이고 $(k-1)-(r-1) = k-r$이므로

$$\mathrm{P}(X_{n-1,k-1} = r-1) = \frac{\binom{n-1}{r-1}\binom{n-r}{2(k-r)}\,2^{2(k-r)}}{\binom{2n-2}{2k-2}}.$$

두 분자는 인수 n을 제외하면 일치하므로

$$\begin{aligned}\frac{r\,\mathrm{P}(X_{n,k} = r)}{\mathrm{P}(X_{n-1,k-1} = r-1)} &= \frac{n\binom{2n-2}{2k-2}}{\binom{2n}{2k}} = n \cdot \frac{(2n-2)!}{(2k-2)!\,(2n-2k)!} \cdot \frac{(2k)!\,(2n-2k)!}{(2n)!} \\ &= n \cdot \frac{2k(2k-1)}{2n(2n-1)} = \frac{k(2k-1)}{2n-1}.\end{aligned}$$

(나누어도 괜찮았다. $n-r \ge 2k-r \ge 2(k-r)$이므로 여기 나오는 이항계수(binomial coefficient)는 모두 양수이다.) 양변에 분모를 곱하면 구하려던 결과를 얻는다.

생각해 보기 이 항등식이 $\mathrm{E}(X_{n,k})$를 구하는 데 어떻게 도움이 되는가?

기댓값(expectation)은 정확히 좌변들의 합이고, 우변들을 더하면 하나의 확률분포(probability distribution) 전체가 된다. 기댓값에서 $r = 0$인 항은 0이므로

$$\mathrm{E}(X_{n,k}) = \sum_{r=1}^{k} r\,\mathrm{P}(X_{n,k} = r) = \frac{k(2k-1)}{2n-1} \sum_{r=1}^{k} \mathrm{P}(X_{n-1,k-1} = r-1)$$
$$= \frac{k(2k-1)}{2n-1} \sum_{s=0}^{k-1} \mathrm{P}(X_{n-1,k-1} = s).$$

확률변수 $X_{n-1,k-1}$은 $2(k-1)$개의 양말 가운데 켤레의 수를 세므로 $0, 1, \ldots, k-1$의 값만 가지고, 따라서 마지막 합은 1이다. 그러므로

$$\mathrm{E}(X_{n,k}) = \frac{k(2k-1)}{2n-1}.$$

검산

- $k = 1$(양말 두 짝)이면 답은 $\frac{1}{2n-1}$이다. 어느 양말이 먼저 나오든, 남은 $2n-1$개의 양말 가운데 정확히 하나가 그 짝이다.
- 지시변수(indicator variable)를 쓰면 평균을 바로 얻는다. 켤레 i가 온전할 확률은 $\binom{2n-2}{2k-2}/\binom{2n}{2k} = \frac{2k(2k-1)}{2n(2n-1)}$이고, 켤레의 수 n을 곱하면 다시 $\frac{k(2k-1)}{2n-1}$이 된다.
- $n = 6, k = 3$일 때 소문항 (i)은 $\frac{64}{924} = \frac{16}{231}$을 주고 평균은 $\frac{15}{11}$이다. $n \le 8$인 모든 경우에 대해 컴퓨터로 모든 선택을 나열하여 (ii)의 분포, (iii)의 항등식, 그리고 평균을 확인하였다.

흔한 실수

- 한 켤레의 양말을 정말로 똑같은 것으로 보고 "색깔 패턴"을 세는 것. 이들은 똑같은 가능성을 갖지 않으므로, 이름표를 붙인 양말을 기준으로 세어야 한다.
- 한 짝만 나온 각 켤레에서 어느 짝을 가져오는지에 대한 인수 $2^{2(k-r)}$을 빠뜨리는 것.
- (iii)에서 $\sum_s \mathrm{P}(X_{n-1,k-1} = s) = 1$임을 알아차리지 못하고 그 합을 무작정 계산하려 드는 것.

STEP 너머

두 번째 검산은 지시변수를 이용한 기댓값의 선형성(linearity of expectation)으로, 분포를 전혀 모르고도 평균을 구한다. 이 방법은 사건 "켤레 i가 온전하다"들이 서로 독

립이 아닌데도 통한다. (iii)의 항등식은 크기 편향(size-biasing) 관계이다. 분포에 r로 가중치를 주면 더 작은 문제의 분포를 평행이동한 것이 나오는데, 이 기법으로 이항분포(binomial distribution)와 초기하분포(hypergeometric distribution)의 평균도 얻을 수 있다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)는 이와 같은 지시변수와 이야기식 증명(story proof)을 책 전체에 걸쳐 사용한다.

Beyond STEP

STEP은 대부분의 학생이 학창 시절에 치르는 수학 시험 가운데 가장 어려운 시험이다. 또한 가장 훌륭한 시험 가운데 하나이기도 하다. 문제는 짧고 낯설며 깊이가 있고, 그중 가장 뛰어난 문제들은 대학 수학의 작은 조각이 모습을 감추고 있는 것이다.

이 책은 1987년 첫 시험에 앞서 나온 예시 시험지(specimen papers)부터 2025년 시험지까지 가운데 가장 흥미로운 STEP 문제들을 골라, 각 문제를 하나의 문으로 삼는다. 모든 문제는 뛰어난 학생이 풀어 가면서 던질 법한 질문들과 함께 꼼꼼하게 풀이하고, 그런 다음 책은 그 문을 지나 한 걸음 더 나아간다. 그 아이디어가 어디에서 왔는지, 대학에서는 무엇으로 발전하는지, 그리고 다음에는 무엇을 읽으면 좋은지를 살펴본다.

이 책은 STEP을 준비하면서 기출 문제 연습 이상의 것을 원하는 재능 있는 예비 수학자를 위해 쓰였다. 수학과 학부생처럼 생각하기 시작하고, 앞으로 무엇이 자신을 기다리고 있는지 알아보고 싶은 학생들을 위한 책이다.

- 순수수학(pure mathematics), 역학(mechanics), 확률(probability)과 통계(statistics)를 아우르는 13개의 장
- 이 36개의 STEP 기출 문제와 각 문제의 안내식 풀이
- 모든 문제 뒤에 숨은 대학 수학
- 답이 실린 후속 연습 문제와 더 읽을거리

2023년 풀이. 책 전체와 모든 장,
모든 풀이를 다음 주소에서 무료로 읽고, 내려받고, 공유할 수 있다.

beyondstep.keithmcnulty.org

본문은 퍼블릭 도메인(CC0 1.0)으로 공개한다. STEP 문제 © Cambridge University Press & Assessment.

