$u_{n+1} = 4u_n(1-u_n)$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

$\pi^e < e^\pi$

$F_n = 2^{2^n} + 1$

$e^{i\pi} + 1 = 0$

STEP 대비 · 대학 수학

Beyond STEP

STEP II 및 III

2022년 풀이

$R(3,3) = 6$

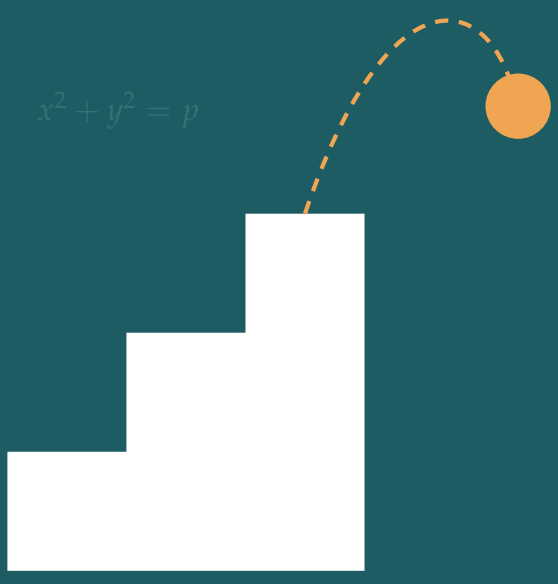
$\frac{22}{7} - \pi = \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,dx$

$x^2 + y^2 = p$

$P(A \mid B)$

$\ddot{x} = -\omega^2 x$

$\sin^2(2^n\theta)$



KEITH McNULTY

Beyond STEP

STEP 기출문제로 여는
대학 수학의 세계

STEP II 및 III

2022년 풀이

Keith McNulty

Beyond STEP: STEP 기출문제로 여는 대학 수학의 세계

2022년 풀이

2022년 STEP 문제지(STEP II 및 III)의 24개 문제 전체에 대한 풀이. 견본 문제지 이후 모든 STEP 문제의 풀이와 *Beyond STEP* 책 전체, 그리고 각 장을 `beyondstep.keithmcnulty.org`에서 무료로 읽고 내려받을 수 있다.

풀이를 읽기 전에 먼저 문제를 제대로 풀어 보자. 모든 답은 수치적으로 검증하였지만, 풀이가 이렇게 많으면 실수가 어느 정도 있을 수밖에 없다. 무언가 잘못된 것처럼 보이면 자신의 풀이를 믿고 꼼꼼히 확인해 보자.

영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.

2026년 11월 온라인 초판 발행.

이 PDF에서 지은이가 직접 만든 모든 것, 곧 본문, 풀이, 그림, 연습문제와 해답은 크리에이티브 커먼즈 CC0 1.0 Universal 라이선스에 따라 퍼블릭 도메인(public domain)으로 공개한다. 누구든 허락을 구하지 않고 어떤 목적으로든 복사하고, 고쳐 쓰고, 공유할 수 있다. 자세한 내용은 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`을 보라.

여기에서 다루는 STEP 문제의 저작권은 Cambridge University Press & Assessment에 있다. 문제는 이 책에 싣지 않았으며, 각 문제마다 공식 출처인 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스나 OCR의 기출 시험지로 가는 링크를 달았다.

오류 제보는 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty에 이슈로 남겨 주기 바란다.

차례

STEP II

Q1 부분적분 순수수학 . . . 3

Q2 점화식 순수수학 . . . 8

Q3 피보나치 급수와 소수 표현 순수수학 . . . 12

Q4 절댓값 함수 순수수학 . . . 16

Q5 삼각형의 부등식 순수수학 . . . 21

Q6 직교 궤적 순수수학 . . . 26

Q7 복소 다항식의 근 순수수학 . . . 31

Q8 행렬의 불변 직선 순수수학 . . . 35

Q9 마찰과 모멘트 역학 . . . 40

Q10 경사면 위의 포물체 역학 . . . 44

Q11 기대 손실의 최적화 확률과 통계 . . . 49

Q12 평균, 중앙값, 최빈값 확률과 통계 . . . 54

STEP III

Q1 다항식의 근 순수수학 . . . 58

Q2 무한 강하법 순수수학 . . . 62

Q3 음함수 미분법 순수수학 . . . 67

Q4 무한곱 순수수학 . . . 72

Q5 대칭성을 이용한 정적분 순수수학 . . . 77

Q6 굴러가는 원과 접선 순수수학 . . . 81

Q7 벡터곱 변환 순수수학 . . . 85

Q8 드무아브르 정리와 무리성 순수수학 . . . 89

Q9 충돌과 반발계수 역학 . . . 93

Q10 탄성 용수철의 평형 역학 . . . 97

Q11 이항분포의 평균편차 확률과 통계 101
Q12 원의 임의의 현 확률과 통계 105

풀이

STEP II 2022, 문제 1

순수수학 • 부분적분

> **STEP II 2022, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

핵심 아이디어

모든 소문항은 하나의 수에 기대고 있다. 부분적분(integration by parts)을 하면 두 번째 적분이 나오는데, 이 적분이 이미 가지고 있는 무언가와 상쇄되거나 거의 상쇄된다는 것이다. (i)과 (ii)에서는 피적분함수(integrand)가 어떤 곱의 도함수라는 사실을 알아보는 것이 핵심이다. (iii)에서는 같은 방법으로 두 적분의 차가 적분 구간의 양 끝에서 e^x/x 값의 변화량에 불과하다는 것을 보이며, 나머지는 (a)의 그래프가 해결해 준다.

풀이

소문항 (i)

첫째 항을 $u = \sqrt{1+x^3}$, $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 1$로 두고 부분적분한다. 그러면 $v = x$이고 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}$이므로

$$\begin{aligned}\int 2\sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x &= 2x\sqrt{1+x^3} - 2\int x\cdot\frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}\,\mathrm{d}x \\ &= 2x\sqrt{1+x^3} - \int \frac{3x^3}{\sqrt{1+x^3}}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

마지막 적분은 정확히 피적분함수의 둘째 항이므로, 이를 더하면 상쇄된다.

$$\int\left(2\sqrt{1+x^3} + \frac{3x^3}{\sqrt{1+x^3}}\right)\mathrm{d}x = 2x\sqrt{1+x^3} + c.$$

$2x\sqrt{1+x^3}$을 곱의 미분법(product rule)으로 미분하면 다시 $2\sqrt{1+x^3} + \dfrac{3x^3}{\sqrt{1+x^3}}$이 나오므로 결과가 확인된다.

소문항 (ii)

피적분함수를 $\dfrac{\sin x}{x} + \dfrac{2\sin x}{x^3}$으로 나눈다. 어느 쪽도 단독으로는 초등 원시함수(elementary antiderivative)를 갖지 않으므로(첫째 항은 유명한 Si 적분의 피적분함수이다), (i)에서처럼 두 항이 합쳐져야 한다. 둘째 항을 $u = \sin x$, $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 2x^{-3}$으로 두고 부분적분하면 $v = -x^{-2}$이므로

$$\int \frac{2\sin x}{x^3}\,\mathrm{d}x = -\frac{\sin x}{x^2} + \int \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

이제 $\dfrac{\cos x}{x^2}$를 $u = \cos x$, $v = -x^{-1}$로 두고 부분적분하면

$$\int \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos x}{x} - \int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

$\int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$가 첫째 항과 상쇄되어 다음이 남는다.

$$\int (x^2+2)\frac{\sin x}{x^3}\,\mathrm{d}x = -\frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x} + c = -\frac{\sin x + x\cos x}{x^2} + c.$$

확인해 보면, $-\dfrac{\sin x}{x^2}$를 미분하면 $-\dfrac{\cos x}{x^2} + \dfrac{2\sin x}{x^3}$이 되고, $-\dfrac{\cos x}{x}$를 미분하면 $\dfrac{\sin x}{x} + \dfrac{\cos x}{x^2}$이 된다. $\cos x/x^2$ 항끼리 상쇄되어 그 합은 피적분함수가 된다.

소문항 (iii)(a)

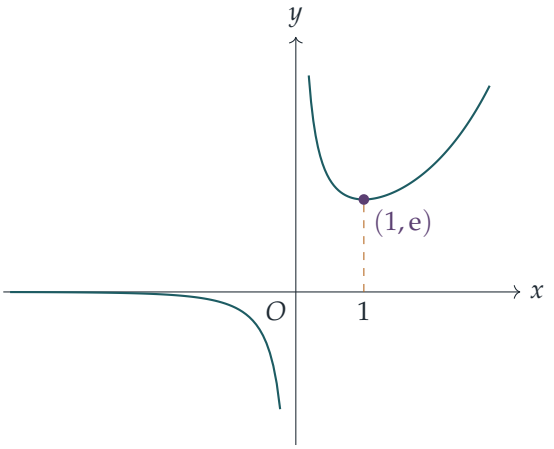
$x \neq 0$에서 정의된 $y = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$를 생각하자. 몫의 미분법(quotient rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x}{x^2} = \frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}.$$

이 값은 $x = 1$에서만 0이므로, 정류점(stationary point)은 $(1, \mathrm{e})$ 하나뿐이다. 도함수는 $x < 1$ $(x \neq 0)$에서 음수이고 $x > 1$에서 양수이므로, $(1, \mathrm{e})$는 극소점(minimum)이다.

나머지 개형은 다음과 같다.

- $x < 0$이면 $y < 0$이고 y는 감소한다. $x \to -\infty$일 때 $y \to 0^-$이므로(지수함수가 이긴다), 음의 x축이 점근선(asymptote)이다. $x \to 0^-$일 때 $y \to -\infty$이다.
- $x > 0$이면 $y > 0$이다. $x \to 0^+$일 때 $y \to +\infty$이고, y는 $x = 1$에서 최솟값 e까지 감소한 뒤 어떤 다항식보다도 빠르게 $+\infty$로 증가한다.
- y축은 수직 점근선이고, 곡선은 어느 축과도 만나지 않는다.



소문항 (iii)(b)

$\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}$을 $u = \mathrm{e}^x$, $v = -x^{-1}$로 두고 부분적분하면

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{e}^x}{x} + \int \frac{\mathrm{e}^x}{x}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{이므로} \qquad \int \left(\frac{\mathrm{e}^x}{x} - \frac{\mathrm{e}^x}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^x}{x} + c.$$

(같은 말로, $\frac{\mathrm{e}^x}{x} - \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} = \frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}$은 (a)에서 구한 도함수이다.)

생각해 보기 애초에 a에서 $2a$까지 적분하는 것이 타당한가?

두 피적분함수 모두 $x = 0$에서 한없이 커지고, 0 근처에서 e^x/x^2의 적분은 발산(diverge)하므로 적분 구간은 0을 피해야 한다. 이를 위해 $a \neq 0$이어야 한다. 그러면 a와 $2a$는 부호가 같으므로 0은 결코 그 사이에 있지 않고, 적분값은 유한하다.

두 적분은 그 차가 0일 때, 그리고 그때에만 같다.

$$\left[\frac{\mathrm{e}^x}{x}\right]_a^{2a} = \frac{\mathrm{e}^{2a}}{2a} - \frac{\mathrm{e}^a}{a} = \frac{\mathrm{e}^a}{2a}\left(\mathrm{e}^a - 2\right) = 0.$$

$\mathrm{e}^a/(2a) \neq 0$이므로 $\mathrm{e}^a = 2$이어야 하고, 따라서

$$a = \ln 2.$$

소문항 (iii)(c)

(b)에서와 똑같이, 정수 $m \neq n$에 대해 두 적분이 유한하려면 0이 m과 n 사이의 닫힌구간에 속하지 않아야 하므로, m과 n은 0이 아니고 부호가 같다. 두 적분의 차는

$$\int_m^n \frac{\mathrm{e}^x}{x}\,\mathrm{d}x - \int_m^n \frac{\mathrm{e}^x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^n}{n} - \frac{\mathrm{e}^m}{m},$$

이므로, $f(x) = e^x/x$가 같은 값을 갖는 부호가 같은 서로 다른 두 정수가 필요하다. 다시 말해, 어떤 수평선이 (a)의 그래프와 두 정수 x값에서 만나야 한다.

> **생각해 보기** $x > 0$에서 곡선은 내려갔다가 다시 올라가므로 일대일(one-to-one)이 아니다. 그렇다면 왜 두 양의 정수가 같은 높이를 줄 수 없는가?

극점이 $x = 1$에 있고, 이것이 바로 가장 작은 양의 정수이기 때문이다. 경우를 차례로 살펴보자.

- **둘 다 음수인 경우.** (a)에 의해 f는 $x < 0$에서 순감소(strictly decreasing)하므로, $m \neq n$이면 $f(m) \neq f(n)$이다.
- **둘 다 양수인 경우.** 이때 $m, n \geq 1$이고, $x > 1$에서 $f'(x) > 0$이므로 f는 $[1, \infty)$에서 순증가(strictly increasing)한다. 역시 $m \neq n$이면 $f(m) \neq f(n)$이다.

수평선이 양의 가지와 두 번 만날 수는 있지만, 그 경우 두 교점 중 하나는 정수가 없는 $0 < x < 1$에 놓인다. 따라서 어떤 서로 다른 두 정수도 조건을 만족하지 않으며, 요구한 대로 불가능하다.

검산

- (i)에서 $x = 1$일 때 원시함수(antiderivative)의 값은 $2\sqrt{2}$이고, $[0, 1]$에서의 적분을 수치적으로 구하면 2.8284…로 일치한다.
- (ii)에서 $[1, 10]$에서의 적분을 수치적으로 계산하면 1.4711…이며, 이는 $-(\sin x + x\cos x)/x^2$의 변화량과 같다.
- (iii)(b)에서 $a = \ln 2$이면 두 적분 모두 약 1.9224가 된다. 또한 $f(\ln 2) = 2/\ln 2 = f(2\ln 2)$임에 주목하자. 그래프에서 짐작할 수 있듯이, 두 적분 끝점은 극소점의 양쪽에서 같은 높이에 놓인다.
- (iii)(c)에서 두 정수에서의 값이 가장 가까워지는 경우는 $f(1) = e \approx 2.718$과 $f(2) = \frac{1}{2}e^2 \approx 3.695$이다.

흔한 실수

- (b)와 (c)에서 0을 포함하는 구간에서는 적분이 의미가 없다는 것을 잊어, m과 n의 부호가 같아야 하는 이유를 놓치는 것.
- (c)에서 아무 제한 없이 "f는 일대일이다"라고 주장하는 것. 이는 사실이 아니다(예를 들어 $f(\ln 2) = f(2\ln 2)$). 논증에는 극점이 $x = 1$에 있다는 사실이 필요하다.

STEP 너머

(i)과 (ii)는 피적분함수의 어느 항도 초등 원시함수를 갖지 않지만 그 합은 갖는 경우이다. 미분대수(differential algebra)의 리우빌(Liouville) 정리는 어떤 함수가 초등 원시함수를 갖는지를 엄밀하게 규정한다. e^x/x, $\sin x/x$, $\sqrt{1+x^3}$은 초등 원시함수를 갖지 않으며, 그래서 상쇄가 필수적이다. (iii)(c)는 단사성(injectivity)에 관한 논증이며, 해석학 강의에서는 단조성(monotonicity)과 평균값 정리(mean value theorem)에 관한 이러한 추론을 엄밀하게 다룬다. Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 참고하라.

풀이

STEP II 2022, 문제 2

순수수학 • 점화식

> **STEP II 2022, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

핵심 아이디어

관계식의 양변에 2를 곱하면 이것은 **이계차분**(*second difference*) $u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n$에 관한 식이 된다. (i)에서는 이 값이 0이므로 일계차분(first difference)이 일정하고, 따라서 수열은 일차식이다. (ii)와 (iii)에서는 이계차분이 주어진 상수이거나 n에 대한 주어진 일차함수이므로, 정확히 그 이계차분을 갖는 다항식(polynomial)을 빼서 (i)과 같은 유형의 수열만 남기는 것이 요령이다.

풀이

소문항 (i)

관계식의 양변을 두 배 하고 정리하면 모든 $n \geq 1$에 대하여

$$u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n.$$

이 성립한다. 따라서 각 차분은 바로 앞의 차분과 같고, 귀납법(induction)에 의하여 모든 차분은 첫 번째 차분 $d = u_2 - u_1$과 같다. 이것이 이웃한 항 사이의 일정한 차이이다.

이 차분 $n-1$개를 모두 더하면

$$u_n = u_1 + (n-1)d = dn + (u_1 - d),$$

이고, 이는 $d \neq 0$이면 n에 대한 1차 다항식, $d = 0$이면 0차 다항식(상수)이다. 어느 경우든 차수(degree)는 1 이하이다.

소문항 (ii)

$v_n = t_n + pn^2$으로 놓자.

$$\tfrac{1}{2}\big(p(n+2)^2 + pn^2\big) = p(n^2+2n+2) = p(n+1)^2 + p,$$

이므로 v_n에 대한 관계식은

$$t_{n+1} + p(n+1)^2 = \tfrac{1}{2}(t_{n+2} + t_n) + p(n+1)^2 + p - p,$$

가 되고, 곧 모든 $n \geq 1$에 대하여 $t_{n+1} = \frac{1}{2}(t_{n+2} + t_n)$이다. 소문항 (i)에 의하여 어떤 상수 A, B에 대하여 $t_n = A + Bn$이므로

$$v_n = pn^2 + Bn + A.$$

이다. $p \neq 0$이므로 n^2항이 남고, v_n의 차수는 정확히 2이다.

$v_1 = v_2 = 0$이므로

$$p + B + A = 0, \qquad 4p + 2B + A = 0.$$

두 식을 빼면 $3p + B = 0$이므로 $B = -3p$이고, 따라서 $A = 2p$이다. 그러므로

$$v_n = p(n^2 - 3n + 2) = p(n-1)(n-2).$$

이다.

소문항 (iii)

이번에는 치환이 주어지지 않으므로 직접 찾아야 한다. 관계식의 양변을 두 배 하면

$$w_{n+2} - 2w_{n+1} + w_n = 2(an + b).$$

이다.

? **생각해 보기** n에 대한 어떤 다항식의 이계차분이 n에 대한 일차식이 되는가?

차분을 한 번 취할 때마다 다항식의 차수가 하나씩 낮아지므로 삼차식이 필요하다. $\Delta^2 f(n) = f(n+2) - 2f(n+1) + f(n)$이라 쓰자. 직접 전개하면

$$\Delta^2 n^3 = (n^3 + 6n^2 + 12n + 8) - 2(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + n^3 = 6n + 6,$$
$$\Delta^2 n^2 = (n^2 + 4n + 4) - 2(n^2 + 2n + 1) + n^2 = 2.$$

이다. 따라서 $\Delta^2(cn^3 + en^2) = 6cn + 6c + 2e$이고, 이것이 모든 n에 대하여 $2an + 2b$와 같으려면

$$c = \frac{a}{3}, \qquad e = b - 3c = b - a.$$

이어야 한다. 이제 $w_n = t_n + \frac{a}{3}n^3 + (b-a)n^2$으로 놓자. Δ^2은 선형(linear)이므로 $\Delta^2 w_n = \Delta^2 t_n + 2(an+b)$이고, 관계식은 $\Delta^2 t_n = 0$이 되는데, 이는 정확히 소문항 (i)의 관계식이다. 따라서 $t_n = A + Bn$이고

$$w_n = \frac{a}{3}n^3 + (b-a)n^2 + Bn + A.$$

이다. $a \neq 0$이므로 삼차항이 존재하고, w_n의 차수는 3이다.

$w_1 = w_2 = 0$이므로

$$\frac{a}{3} + (b-a) + B + A = 0,$$
$$\frac{8a}{3} + 4(b-a) + 2B + A = 0.$$

두 번째 식에서 첫 번째 식을 빼면 $\frac{7a}{3} + 3(b-a) + B = 0$이므로 $B = \frac{2a}{3} - 3b$이고, 이를 첫 번째 식에 대입하면 $A = 2b$이다. 그러므로

$$w_n = \frac{a}{3}n^3 + (b-a)n^2 + \left(\frac{2a}{3} - 3b\right)n + 2b.$$

이다. $w_1 = w_2 = 0$이므로 인수 $n-1$과 $n-2$가 나타나야 하고, n^3항과 상수항을 비교하면 더 깔끔한 꼴

$$w_n = \frac{(n-1)(n-2)(an+3b)}{3}.$$

을 얻는다. ($(n-1)(n-2)(an+3b)$를 전개하면 $an^3 + (3b-3a)n^2 + (2a-9b)n + 6b$이므로 일치한다.)

검산

- (iii)에서 $a = 0, b = p$로 놓으면 (ii)가 다시 나와야 하는데, 실제로 그렇다: $(n-1)(n-2)\cdot 3p/3 = p(n-1)(n-2)$.
- 점화식(recurrence relation)을 직접 계산해 보자. $a = 3, b = 0$이면 $w_{n+2} = 2w_{n+1} - w_n + 6n$이므로 $w_1 = w_2 = 0$에서 $w_3 = 6$, $w_4 = 24$, $w_5 = 60$을 얻는다. 공식은 $(n-1)(n-2)n$을 주며, 그 값은 $6, 24, 60$이다.
- 차수가 3인 수열은 삼계차분이 일정하다. $0, 0, 6, 24, 60$의 차분은 $0, 6, 18, 36$, 그다음은 $6, 12, 18$, 그다음은 $6, 6$으로 일정하며, 그 값은 $2a$와 같다.

흔한 실수

- (i)의 수열의 차수가 정확히 1이라고 말하는 것: $u_1 = u_2$이면 수열은 상수이다.
- (iii)에서 $w_n = t_n + kn^3$만 시도하는 것. n^3항만으로는 $6kn + 6k$가 나오므로, 상수항을 맞추려면 n^2항도 필요하다.
- "차수가 정확히 2"(또는 3)임을 $p \neq 0$(또는 $a \neq 0$)으로부터 정당화하는 것을 잊는 것.

STEP 너머

이것은 $y'' = f(x)$를 푸는 문제의 이산(discrete) 버전이다. 일반해는 특수해(particular solution)에 동차방정식(homogeneous equation)의 해를 더한 것이며, 여기서 동차방정식의 해는 일차 수열 $A + Bn$이다. 같은 "여함수(complementary function) 더하기 특수해" 구조가 선형 미분방정식(differential equation)을 지배하며, 다항식 꼴의 특수해를 추측하는 방법도 거의 그대로 옮겨 갈 수 있다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 연속 버전을 전개한다.

풀이

STEP II 2022, 문제 3

순수수학 • 피보나치 급수와 소수 표현

STEP II 2022, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

핵심 아이디어

점화식(recurrence) $F_{r+1} - F_r - F_{r-1} = 0$이 모든 것을 움직이는 엔진이다. 이 식에 $\frac{1}{10}$의 거듭제곱을 곱해 더하고 첨자를 다시 매기면, 각 부분이 S_n의 상수배와 몇 개의 경계항(boundary term)으로 바뀐다. 이것이 바로 생성함수(generating function) 기법이다. 소문항 (i)은 안전장치 역할을 한다. 피보나치 수(Fibonacci numbers)가 2의 거듭제곱보다 빠르게 커지지 않는다는 것을 말해 주므로, 10(또는 100)의 거듭제곱으로 나누면 꼬리(tail)가 매우 작아지고 쉽게 위로 유계임을 보일 수 있다.

풀이

소문항 (i)

먼저 모든 $F_k \geq 0$이다($F_0, F_1 \geq 0$이고 음이 아닌 수들의 합은 음이 아니므로 수학적 귀납법(induction)으로 보일 수 있다). 다음으로 이 수열은 결코 감소하지 않는다. $F_1 \geq F_0$이고, $k \geq 1$이면 $F_{k+1} - F_k = F_{k-1} \geq 0$이기 때문이다.

따라서 모든 $k \geq 1$에 대하여

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1} \leq F_k + F_k = 2F_k.$$

이제 $n \geq 1$을 고정하고 $r \geq n$에 대한 귀납법을 쓴다. $r = n$일 때 주장은 $F_n \leq F_n$이 된다. 어떤 $r \geq n$에 대하여 $F_r \leq 2^{r-n}F_n$이면, $r \geq 1$이므로

$$F_{r+1} \leq 2F_r \leq 2 \cdot 2^{r-n}F_n = 2^{(r+1)-n}F_n.$$

이로써 귀납법이 완성되므로, $n \geq 1$이고 $r \geq n$일 때마다 $F_r \leq 2^{r-n}F_n$이다.

소문항 (ii)

좌변의 세 합을 각각 S_n으로 나타낸다.

첫째 합. $k = r+1$로 놓으면

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{F_{r+1}}{10^{r-1}} = 100 \sum_{k=2}^{n+1} \frac{F_k}{10^k} = 100\left(S_n - \frac{F_1}{10} + \frac{F_{n+1}}{10^{n+1}}\right)$$
$$= 100S_n - 10F_1 + \frac{F_{n+1}}{10^{n-1}}.$$

둘째 합. 이것은 그냥 $10S_n$이다.

셋째 합. $k = r-1$로 놓으면

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{F_{r-1}}{10^{r-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{F_k}{10^k} = F_0 + S_n - \frac{F_n}{10^n}.$$

첫째 합에서 둘째 합과 셋째 합을 빼면

$$(100 - 10 - 1)S_n - 10F_1 - F_0 + \frac{F_n}{10^n} + \frac{F_{n+1}}{10^{n-1}} = 89S_n - 10F_1 - F_0 + \frac{F_n}{10^n} + \frac{F_{n+1}}{10^{n-1}},$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

소문항 (iii)

(ii)의 좌변에 있는 세 합을 하나로 합친다. 그 r번째 항은 $(F_{r+1} - F_r - F_{r-1})/10^{r-1} = 0$이므로 좌변은 0이다. $F_0 = 0$, $F_1 = 1$을 대입하면

$$89S_n = 10 - \frac{F_n}{10^n} - \frac{F_{n+1}}{10^{n-1}}. \qquad (*)$$

? **생각해 보기** $n \to \infty$일 때 남은 두 항이 사라진다는 것을 어떻게 알 수 있을까?

바로 여기서 소문항 (i)이 제 몫을 한다. 거기서 $n = 1$로 놓으면 모든 $r \geq 1$에 대하여 $F_r \leq 2^{r-1}$이므로

$$0 \leq \frac{F_n}{10^n} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^n, \qquad 0 \leq \frac{F_{n+1}}{10^{n-1}} \leq \frac{2^n}{10^{n-1}} = 10\left(\frac{1}{5}\right)^n,$$

이고, 두 상계 모두 0으로 수렴한다. $(*)$에서 $n \to \infty$로 보내면 $89S_n \to 10$, 즉

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{F_r}{10^r} = \frac{10}{89}.$$

꼬리에 대해서는 $n = 7$로 소문항 (i)을 적용한다($F_7 = 13$임에 주의한다). $r \geq 7$이면 $F_r \leq 2^{r-7} \cdot 13$이므로

$$\sum_{r=7}^{\infty} \frac{F_r}{10^r} \leq \frac{13}{10^7} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j}{10^j} = \frac{13}{10^7} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{65}{4} \times 10^{-7} = 1.625 \times 10^{-6} < 2 \times 10^{-6}.$$

$\frac{1}{89}$의 자릿수. 처음 여섯 항의 합은

$$S_6 = 0.1 + 0.01 + 0.002 + 0.0003 + 0.00005 + 0.000008 = 0.112358.$$

꼬리 $T = \frac{10}{89} - S_6$은 (각 항이 양수이므로) 엄밀히 양수이고 2×10^{-6}보다 작으므로

$$0.112358 < \frac{10}{89} < 0.112360, \qquad \text{따라서} \qquad 0.0112358 < \frac{1}{89} < 0.0112360.$$

이 두 경계 사이에 엄밀히 놓인 모든 수는 $0.011235\ldots$로 시작하므로, $\frac{1}{89}$의 소수점 아래 처음 여섯 자리는 $0, 1, 1, 2, 3, 5$이다. 엄밀한 하계가 중요하다. 이것이 전개가 $0.0112357\ldots$일 가능성을 배제해 주기 때문이다.

소문항 (iv)

목표하는 수를 앞의 00 다음부터 두 자리씩 끊어 읽는다.

$$0.00\ 01\ 01\ 02\ 03\ 05\ 08\ 13\ 21\ 34\ 55\ldots$$

이 두 자리 묶음들은 $F_1, F_2, \ldots, F_{10}$을 각각 두 자리로 쓴 것이다. 따라서 이 수는 $\frac{1}{100}U$여야 한다. 여기서

$$U = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{F_r}{100^r}.$$

U의 합 구하기. 소문항 (i)에 의해 $F_r \le 2^{r-1}$이므로 이 급수는 절대수렴(absolutely convergent)한다. 그러므로 (ii)에서와 마찬가지로 수렴하는 급수들을 항별로 밀고 합칠 수 있다.

$$U - \frac{U}{100} - \frac{U}{100^2} = \frac{F_1}{100} + \sum_{r=2}^{\infty} \frac{F_r - F_{r-1} - F_{r-2}}{100^r} = \frac{1}{100}.$$

여기서 $r = 1$인 항은 ($F_0 = 0$이므로) $F_1/100$이고, 그 뒤의 괄호는 모두 0이다. 따라서 $U \cdot \frac{9899}{10000} = \frac{1}{100}$이고, $U = \frac{100}{9899}$이다. 그러므로 후보는

$$\frac{U}{100} = \frac{1}{9899},$$

이며, $r = 1, s = 9899$로 둘 다 10000보다 작은 양의 정수이다.

자릿수 확인. 처음 열 항의 합을 U_{10}이라 하자. $F_1, \ldots, F_{10}$이 각각 100보다 작으므로 항들이 서로 겹치지 않고,

$$U_{10} = 0.01010203050813213455$$

가 소수점 아래 20자리로 정확히 성립한다. $n = 11$로 소문항 (i)을 적용하면($F_{11} = 89$), 나머지 항들은

$$0 < U - U_{10} \le \frac{89}{100^{11}} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{2}{100}\right)^j = \frac{89}{10^{22}} \cdot \frac{100}{98} < 10^{-20}.$$

을 만족한다. 따라서 $U_{10} < U < U_{10} + 10^{-20}$이고, U의 소수점 아래 처음 20자리는 U_{10}의 것과 같다. 100으로 나누면 이 자릿수들이 오른쪽으로 두 자리 밀린다.

$$\frac{1}{9899} = 0.00010102030508132134 55\ldots,$$

이것이 바로 요구된 시작 부분이다.

검산

- 직접 나눗셈을 하면 $1/89 = 0.011235955\ldots$이다. 자릿수 011235가 일치하고, 그다음 자릿수 $9, 5, 5$는 피보나치 항들이 두 자리에 이르면서 서로 "받아올림"되는 모습을 보여 준다.
- (iii)에서 $r = 6$ 이후의 꼬리는 실제로 $10/89 - 0.112358 \approx 1.55 \times 10^{-6}$으로, 우리가 구한 상계 1.625×10^{-6}보다 넉넉히 작다.
- 컴퓨터로 $1/9899$를 소수점 아래 22자리까지 계산하면 0.0001010203050813213455이다. 그다음 묶음은 $F_{11} = 89$가 아니라 90인데, $F_{12} = 144$가 두 자리 칸을 넘쳐 앞 칸으로 1을 받아올리기 때문이다.

흔한 실수

- (ii)에서 첨자를 다시 매길 때 경계항을 잘못 구하는 것. 밀린 각 합의 첫 항과 마지막 항을 직접 써 보면 이를 피할 수 있다.
- (iii)에서 $F_n/10^n$과 $F_{n+1}/10^{n-1}$이 0으로 수렴함을 보이지 않는 것. 소문항 (i)은 정확히 이것을 위해 있다.
- 꼬리가 **엄밀히** 양수라는 사실을 잊는 것. 상계만으로는 여섯째 자리가 결정되지 않는다.

STEP 너머

함수 $G(x) = \sum F_r x^r$는 피보나치 수의 **생성함수**이며, 위의 밀기 논법은 $|x| < \frac{1}{2}$일 때 $G(x) = x/(1 - x - x^2)$임을 보여 준다. $x = \frac{1}{10}$과 $x = \frac{1}{100}$을 대입하면 $\frac{10}{89}$와 $\frac{100}{9899}$를 얻는다. 생성함수는 점화식을 대수로 바꾸어 주며 조합론(combinatorics)의 핵심 도구이다. Herbert Wilf의 *generatingfunctionology*는 생생한 입문서이다. "수렴하는 급수의 재배열"을 엄밀하게 다루는 것은 대학 1학년 해석학(analysis)의 주제이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 참고하라.

풀이

STEP II 2022, 문제 4

순수수학 • 절댓값 함수

STEP II 2022, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

핵심 아이디어

절댓값(modulus) 기호는 그 안의 식의 부호가 바뀌는 점에서만 의미가 있다. 따라서 그러한 점들 사이의 각 구간에서는 모든 절댓값을 그 안의 식에 플러스나 마이너스를 붙인 것으로 바꿔 쓸 수 있다. 반대로, 항 $A|x-p|$는 $x=p$에서 꺾인 점(corner)을 만들고, 그 점에서 기울기(gradient)가 $2A$만큼 뛴다. 그러므로 하나의 식을 만들려면 기울기의 도약(그리고 마지막 소문항에서는 x^2 계수의 도약)을 맞춘 다음 상수를 정하면 된다.

풀이

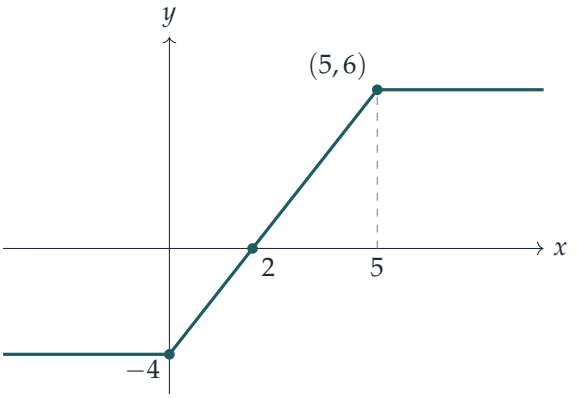
소문항 (i)

임계점은 $x=0$($|x|$의 부호가 바뀌는 곳)과 $x=5$($|x-5|$의 부호가 바뀌는 곳)이다.

- $x \le 0$일 때: $|x| = -x$이고, $x-5<0$이므로 $|x-5| = 5-x$이다. 따라서 $\mathrm{f}(x) = -x-(5-x)+1 = -4$이다.
- $0 \le x \le 5$일 때: $|x| = x$이고 $|x-5| = 5-x$이다. 따라서 $\mathrm{f}(x) = x-(5-x)+1 = 2x-4$이다.
- $x \ge 5$일 때: $|x| = x$이고 $|x-5| = x-5$이다. 따라서 $\mathrm{f}(x) = x-(x-5)+1 = 6$이다.

$x=0$과 $x=5$에서는 관련된 두 식이 모두 성립한다(각 절댓값 안의 식이 그 점에서 0이거나 부호가 정해져 있다). 따라서 겹치는 끝점에서 값이 일치한다: $-4 = 2(0)-4$이고 $2(5)-4=6$이다. 이것이 구하는 구간별(piecewise) 표현이다.

그래프는 높이 -4에서 수평이다가, $(0,-4)$에서 $(2,0)$을 지나 $(5,6)$까지 기울기 2로 올라가고, 그 뒤로는 높이 6에서 수평이다.



소문항 (ii)

소문항 (i)을 보면 다음과 같은 꼴을 시도해 볼 만하다.

$$g(x) = A|x| + B|x-5| + Cx + D.$$

왼쪽에서 오른쪽으로 $x = 0$을 지나면 항 $A|x|$는 $-Ax$에서 Ax로 바뀌므로 기울기가 $2A$만큼 뛴다. 마찬가지로 $B|x-5|$는 $x = 5$에서 기울기를 $2B$만큼 뛰게 한다. 주어진 g는 세 조각에서 기울기가 각각 $-1, 3, 1$이므로

$$2A = 3 - (-1) = 4, \qquad 2B = 1 - 3 = -2,$$

이고, $A = 2$, $B = -1$을 얻는다. $x \geq 5$에서 이 식은 $2x - (x-5) + Cx + D = (1+C)x + 5 + D$이고, 이것이 $x + 10$이어야 하므로 $C = 0$, $D = 5$이다. 따라서

$$\boxed{g(x) = 2|x| - |x-5| + 5.}$$

나머지 두 조각을 확인하면, $x \leq 0$일 때 $-2x - (5-x) + 5 = -x$이고, $0 \leq x \leq 5$일 때 $2x - (5-x) + 5 = 3x$이다. 둘 다 g의 정의와 일치한다.

? **생각해 보기** 이런 꼴의 식이 애초에 통할 가능성이 있었던 이유는 무엇일까?

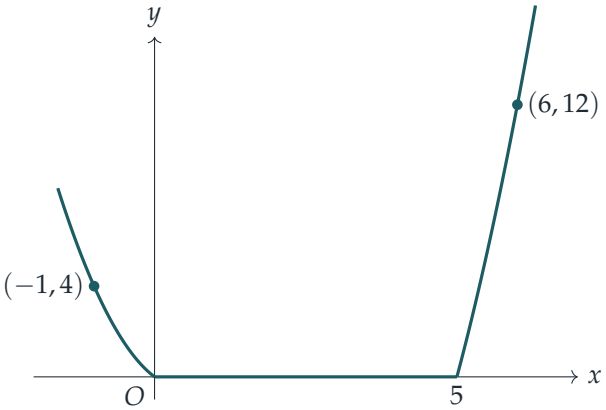
g의 각 조각은 일차식이고, 조각들은 연속적으로(continuously) 이어진다($x = 0$에서는 양쪽 모두 0, $x = 5$에서는 양쪽 모두 15). 일차식의 절댓값들의 합에 일차함수를 더한 것은 언제나 연속이고 구간별로 일차이며, 꺾인 점은 절댓값의 부호가 바뀌는 곳에만 생긴다. 만약 g에 끊어진 곳이 있었다면 그런 식으로는 결코 만들어 낼 수 없었을 것이다.

소문항 (iii)

이번에는 부호가 바뀌는 점이 $x = 0$($|x|$에 대해)과 $x(x-5)$의 근인데, 이 근도 역시 0과 5이다. 곱 $x(x-5)$는 $x < 0$과 $x > 5$에서 양수이고 그 사이에서 음수이다.

- $x \le 0$일 때: $\mathrm{h}(x) = x^2 - x + 4x + (x^2 - 5x) = 2x^2 - 2x = 2x(x-1)$.
- $0 \le x \le 5$일 때: $\mathrm{h}(x) = x^2 - x - 4x - (x^2 - 5x) = 0$.
- $x \ge 5$일 때: $\mathrm{h}(x) = x^2 - x - 4x + (x^2 - 5x) = 2x^2 - 10x = 2x(x-5)$.

따라서 h는 $[0,5]$에서 항상 o이다. 왼쪽에서는 포물선(parabola) $y = 2x(x-1)$의 일부이다. 원점에서 기울기 $4x - 2 = -2$로 만나고, $x \to -\infty$일 때 한없이 커진다(예를 들어 $\mathrm{h}(-1) = 4$). 오른쪽에서는 $y = 2x(x-5)$의 일부이다. $(5,0)$에서 기울기 $4x - 10 = 10$으로 출발한다(예를 들어 $\mathrm{h}(6) = 12$). 두 갈래는 서로 거울상이 아니다. 오른쪽 갈래가 다섯 배 가파르게 축을 떠난다. 그래프는 연속이고 $(0,0)$과 $(5,0)$에서 꺾이며, 모든 곳에서 $\mathrm{h}(x) \ge 0$이다.



소문항 (iv)

소문항 (iii)이 필요한 도구를 보여 준다. $|x(x-5)|$는 $[0,5]$ 밖에서는 $x^2 - 5x$이고 안에서는 $-(x^2 - 5x)$이므로, x^2 항을 켰다 껐다 할 수 있다. 함수 k의 x^2 계수는 $[0,5]$ 밖에서 0이고 안에서 2이다. $ax^2 + d|x(x-5)|$에서 x^2의 계수는 밖에서 $a+d$, 안에서 $a-d$이므로 $a+d=0$, $a-d=2$, 즉 $a=1$, $d=-1$이어야 한다. 따라서 $x^2 - |x(x-5)|$는 올바른 이차 항의 거동을 가지며,

$$x^2 - |x(x-5)| = \begin{cases} 5x & x \le 0 \text{ 또는} x \ge 5, \\ 2x^2 - 5x & 0 \le x \le 5. \end{cases}$$

이것을 k에서 빼면 구간별 일차인 나머지가 남는다.

$$\mathrm{k}(x) - \left(x^2 - |x(x-5)|\right) = \begin{cases} 5x & x \le 5, \\ 50 - 5x & x \ge 5. \end{cases}$$

이것은 $x = 5$에서만 꺾이고, 그 점에서 기울기가 5에서 -5로, 즉 -10만큼 뛴다. 따라서 이것은 $-5|x-5| + (\text{일차식})$ 꼴이다. $x \le 5$에서 $-5|x-5| = 5x - 25$이므로, 25를 더하면

$5x$가 된다. 이로부터 다음 식을 추측할 수 있다.

$$\boxed{\mathrm{k}(x) = x^2 - |x(x-5)| - 5|x-5| + 25.}$$

확인. 각 구간에 대입해 보자.

- $x \le 0$일 때: $x(x-5) \ge 0$이고 $x-5 < 0$이므로, 식은 $x^2 - (x^2-5x) - 5(5-x) + 25 = 5x + 5x = 10x$가 된다.
- $0 \le x \le 5$일 때: $x(x-5) \le 0$이고 $x-5 \le 0$이므로, 식은 $x^2 + (x^2-5x) - 5(5-x) + 25 = 2x^2$이 된다.
- $x \ge 5$일 때: $x(x-5) \ge 0$이고 $x-5 \ge 0$이므로, 식은 $x^2 - (x^2-5x) - 5(x-5) + 25 = 50$이 된다.

이것은 정확히 k의 세 조각이므로, 이 식은 모든 실수 x에 대해 옳다.

하나의 식으로 나타내는 방법은 유일하지 않다. 예를 들어 $|x(x-5)| = |x|\,|x-5|$이므로 답을 다르게 쓸 수 있고, 다른 조합($x|x|$를 쓰는 것 등)도 통한다. 위의 세 구간 확인을 통과한다면 어떤 답이든 괜찮다.

검산

- 특정한 값 대입: $\mathrm{g}(-2) = 2$는 정의로부터도, $2(2) - 7 + 5$로부터도 나온다. $\mathrm{g}(7) = 17 = 14 - 2 + 5$이다. k의 경우: $\mathrm{k}(3) = 18$이고 $9 - |-6| - 10 + 25 = 18$이다. $\mathrm{k}(-1) = -10$이고 $1 - 6 - 30 + 25 = -10$이다.
- 연속성은 간단한 점검 수단이다. 절댓값으로 만든 하나의 식은 모두 연속이며, 실제로 g와 k는 이음매에서 값이 일치한다($\mathrm{k}(5) = 50 = 2 \cdot 5^2$).
- 네 식 모두 $[-20, 25]$의 임의의 10^5개 점에서 컴퓨터로 구간별 표현과 비교하였고, 반올림 오차 범위 안에서 일치하였다.

흔한 실수

- h의 두 갈래를 대칭으로 그리는 것. 왼쪽 갈래는 $2x(x-1)$, 오른쪽 갈래는 $2x(x-5)$이며, 꺾인 점에서의 기울기는 각각 -2와 10이다.
- $|x(x-5)|$가 **두** 점에서 부호가 바뀐다는 것을 잊는 것. 그래서 (iii)에서는 0에서만이 아니라 가운데 구간 전체에서 부호가 뒤집힌다.
- 세 구간 모두에 대입해 보지 않고 k의 식을 적어 내는 것. 확인 과정은 반드시 필요하다.

STEP 너머

여기서 한 기울기 도약의 장부 정리는 일반적인 사실의 맛보기이다. $\mathbb{R}$에서 정의되고 꺾인 점이 유한 개인 연속인 구간별 일차함수는 모두 일차함수에 $|x-p|$ 꼴 항들의 결합을 더한 것이다. $\max(x,0) = \frac{1}{2}(x+|x|)$이므로, 이것은 수치해석(numerical analysis)의 일차 스플라인(linear spline)과 신경망(neural network)의 "ReLU" 단위의 바탕이 되는 아이디어이다. 연속성과 구간별로 정의된 함수에 대한 엄밀한 설명은 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학의 이해)를 참고하라.

풀이

STEP II 2022, 문제 5

순수수학 • 삼각형의 부등식

> **STEP II 2022, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

핵심 아이디어

P에서 삼각형을 세 조각으로 나누어 보면, P가 어떻게 움직이든 가중합(weighted sum) $ax + by + cz$는 2Δ로 일정하다. 그러면 이후의 각 부분은 이 하나의 선형 제약 조건(linear constraint) 아래에서의 최적화(optimisation) 문제가 된다. 소문항 (i)은 $x + y + z$를 이 고정된 양과 비교하고, (iii)(a)의 항등식은 $x^2 + y^2 + z^2$에 대해 같은 일을 하며(이는 모습을 바꾼 코시-슈바르츠 부등식(Cauchy–Schwarz inequality)이다), 최댓값을 구할 때에는 a 대신 c를 써서 (i)을 반대 방향으로 이용한다.

풀이

소문항 (i)

$a > b$이고 $y \geq 0$이므로 $by \leq ay$이고, $a > c$이고 $z \geq 0$이므로 $cz \leq az$이다. 이 두 부등식을 더한 식의 양변에 ax를 더하면

$$ax + by + cz \leq ax + ay + az = a(x + y + z),$$

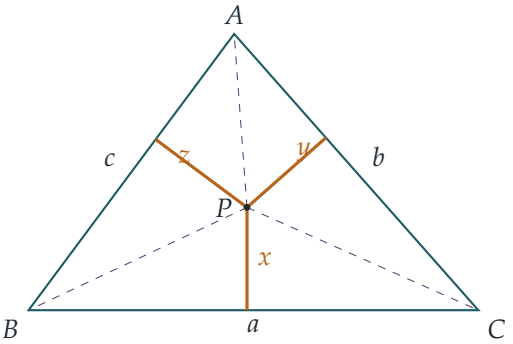
를 얻으므로 증명이 끝난다. $a - b > 0$이고 $a - c > 0$이므로 등호는 $(a - b)y + (a - c)z = 0$일 때, 즉 $y = z = 0$일 때에만 성립한다. 이 등호 조건은 뒤에서 필요하다.

소문항 (ii)(a)

P와 각 꼭짓점을 이으면 ABC는 삼각형 PBC, PCA, PAB로 나뉜다(P가 변 위에 있으면 일부는 퇴화(degenerate)한 삼각형일 수 있다). 삼각형 PBC는 밑변이 $BC = a$, 높이가 x이고,

나머지도 마찬가지이므로

$$\Delta = \tfrac{1}{2}ax + \tfrac{1}{2}by + \tfrac{1}{2}cz, \qquad \text{즉,} \qquad ax + by + cz = 2\Delta.$$



거꾸로, $ax + by + cz = 2\Delta$를 만족하는 임의의 $x, y, z \geq 0$은 삼각형 내부(또는 변 위)의 오직 한 점 P에서의 거리가 된다. 세 삼각형의 넓이 $\frac{1}{2}ax$, $\frac{1}{2}by$, $\frac{1}{2}cz$는 음이 아니고 합이 Δ이며, 이 넓이들이 P를 결정하기 때문이다(이들은 P의 넓이 좌표(areal coordinates)이다). 따라서 이후에는 문제를 순수하게 대수적인 문제로 다룰 수 있다. 즉, $ax + by + cz = 2\Delta$를 만족하는 음이 아닌 모든 x, y, z에 대해 최적화하면 된다.

소문항 (ii)(b)

소문항 (i)과 (ii)(a)에 의해

$$x + y + z \geq \frac{ax + by + cz}{a} = \frac{2\Delta}{a}.$$

등호는 $y = z = 0$일 때에만 성립하고, 이때 $ax = 2\Delta$이다. 따라서 합의 최솟값은

$$x + y + z = \frac{2\Delta}{a}, \qquad \text{최솟값을 갖는 경우:} \quad x = \frac{2\Delta}{a},\ y = 0,\ z = 0.$$

기하학적으로 보면, $y = z = 0$이면 P는 CA와 AB 위에 동시에 있으므로 $P = A$이고, x는 A에서 가장 긴 변 BC에 내린 높이(altitude)이다.

소문항 (iii)(a)

세 차의 제곱을 전개하면

$$(bx - ay)^2 + (cy - bz)^2 + (az - cx)^2 = b^2x^2 + a^2y^2 + c^2y^2 + b^2z^2 + a^2z^2 + c^2x^2 \\ - 2(abxy + bcyz + cazx),$$

이고, 한편

$$(ax + by + cz)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + 2(abxy + bcyz + cazx).$$

두 식을 더하면 교차항은 소거되고, a^2, b^2, c^2 중 하나와 x^2, y^2, z^2 중 하나의 곱이 모두 정확히 한 번씩 나타나므로 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$를 얻는다. 이로써 모든 실수에 대해 항등식이 증명된다.

소문항 (iii)(b)

항등식에 $ax+by+cz=2\Delta$를 대입하면

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) = (bx-ay)^2+(cy-bz)^2+(az-cx)^2+4\Delta^2 \geq 4\Delta^2,$$

이다. 제곱은 음이 아니기 때문이다. 따라서

$$x^2+y^2+z^2 \geq \frac{4\Delta^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

> ? **생각해 보기** 하한(lower bound)은 실제로 도달될 때에만 최솟값이 된다. 세 제곱이 모두 0이 되는 실제 점 P가 존재하는가?

등호가 성립하려면 $bx=ay, cy=bz, az=cx$이어야 한다. 이는 (x,y,z)가 (a,b,c)의 상수배라는 뜻이다. $x=\lambda a$라 하면 $y=\frac{b}{a}x=\lambda b, z=\frac{c}{a}x=\lambda c$이고, 세 식이 모두 성립한다. 제약 조건에서 $\lambda(a^2+b^2+c^2)=2\Delta$이므로 $\lambda=\dfrac{2\Delta}{a^2+b^2+c^2}>0$이다. 그러면 x,y,z는 모두 양수이고 $ax+by+cz=2\Delta$를 만족하므로, (ii)(a)의 설명에 의해 이들은 실제 점 P(삼각형의 진짜 내부에 있는 점)에 대응한다. 따라서 제곱의 합의 최솟값은

$$\frac{4\Delta^2}{a^2+b^2+c^2}, \qquad \text{최솟값을 갖는 경우: } x=\frac{2a\Delta}{a^2+b^2+c^2}, y=\frac{2b\Delta}{a^2+b^2+c^2}, z=\frac{2c\Delta}{a^2+b^2+c^2}.$$

소문항 (iv)

> ? **생각해 보기** 소문항 (i)에서는 a가 가장 긴 변이라는 사실을 이용했다. 대신 가장 짧은 변 c를 이용하면 어떻게 될까?

$a>c, b>c$이고 $x,y\geq 0$이므로, 소문항 (i)의 논증을 반대로 적용하면 $ax+by+cz \geq c(x+y+z)$이고, 등호는 $x=y=0$일 때에만 성립한다. 따라서

$$x+y+z \leq \frac{2\Delta}{c}.$$

또한 $x,y,z\geq 0$이므로

$$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx) \leq (x+y+z)^2,$$

이고, 등호는 $xy+yz+zx=0$일 때에만 성립한다. 이 둘을 합치면(양변이 모두 음이 아니므로 제곱해도 괜찮다)

$$x^2+y^2+z^2 \leq (x+y+z)^2 \leq \frac{4\Delta^2}{c^2}.$$

$x = y = 0$이면 두 부등식 모두 등호가 성립한다. 이때 $xy + yz + zx = 0$이고 $cz = 2\Delta$이기 때문이다. 따라서 제곱의 합의 최댓값은

$$\frac{4\Delta^2}{c^2}, \qquad \text{최댓값을 갖는 경우:} \quad x = 0,\ y = 0,\ z = \frac{2\Delta}{c},$$

이고, 이는 가장 짧은 변의 맞은편 꼭짓점인 $P = C$이다. (두 번째 부등식은 $x = y = 0$일 때에만 등호가 성립하므로, 최댓값을 갖는 점은 이 점뿐이다.)

검산

세 변이 $a = 7$, $b = 6$, $c = 5$인 예각삼각형(acute triangle)을 생각하자. 헤론의 공식(Heron's formula)에 의해 $\Delta = \sqrt{9 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 6\sqrt{6} \approx 14.70$이다. 그러면 답은 다음과 같다. $x + y + z$의 최솟값은 $12\sqrt{6}/7 \approx 4.20$, $x^2 + y^2 + z^2$의 최솟값은 $864/110 = 432/55 \approx 7.85$, 최댓값은 $864/25 = 34.56$이다. 크기 순서도 타당하다. $P = C$에서 제곱의 합은 C에서 내린 높이의 제곱 $(12\sqrt{6}/5)^2 = 34.56$일 뿐이다. 무작위로 만든 여러 예각삼각형 각각에서 수천 개의 무작위 점 P를 잡아 컴퓨터로 확인한 결과, $ax + by + cz = 2\Delta$와 세 경계가 모두 성립했고, 극값은 A, 거리가 (a, b, c)에 비례하는 점, 그리고 C에서 나타났다.

흔한 실수

- 하한이 실제로 도달됨을 보이지 않고 하한만 제시하는 것. (iii)(b)에서는 등호가 성립하는 점의 거리가 음이 아니고 제약 조건을 만족하여 실제 점 P가 됨을 반드시 확인해야 한다.
- 꼭짓점을 혼동하는 것. $x + y + z$의 최솟값은 A(가장 긴 변의 맞은편)에서 나타나지만, $x^2 + y^2 + z^2$의 최댓값은 C(가장 짧은 변의 맞은편)에서 나타난다.
- (iv)에서 조건 $x, y, z \geq 0$을 빠뜨리는 것. 이 조건이 없으면 $x^2 + y^2 + z^2 \leq (x + y + z)^2$는 성립하지 않는다.

STEP 너머

(iii)(a)의 항등식은 라그랑주 항등식(Lagrange's identity)이며, 3차원에서의 코시-슈바르츠 부등식 $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \leq |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2$을 증명해 준다. 최솟값을 갖는 점은 (x, y, z)가 (a, b, c)에 평행한 점으로, 원점에서 평면 $ax + by + cz = 2\Delta$에 내린 수선의 발이다. $x^2 + y^2 + z^2$과 같은 볼록 함수(convex function)의 삼각형 위에서의 최댓값은 항상 꼭짓점에서 나타나는데, 이는 선형 최적화와 볼록 최적화를 처음으로 엿보는 것이다. (iii)(b)에서 찾은 점은 삼각형의 대칭중선점(symmedian point, 또는 르무안(Lemoine) 점)이다. 내적(dot product)과 사영(projection)에 대해 더 알고 싶다면 Strang, *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입

문서)를 참고하라.

풀이

STEP II 2022, 문제 6

순수수학 • 직교 궤적

> **STEP II 2022, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

핵심 아이디어

두 곡선이 한 점에서 직각으로 만나는 것은 그 점에서 두 곡선의 기울기(gradient)의 곱이 -1일 때이고, 그때뿐이다. 따라서 곡선족(family of curves) 전체에 대하여, 점 (x, y)를 지나는 곡선이 족의 어느 곡선이든 그 점에서 성립하는 기울기 공식을 얻고자 한다. 이는 곡선의 방정식과 그 도함수(derivative) 사이에서 매개변수(parameter) (a, b, c 또는 k)를 소거하여, x, y와 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$만으로 이루어진 미분방정식(differential equation)을 남긴다는 뜻이다. 그런 다음 기울기 m을 $-1/m$으로 바꾸어 풀면 수직으로 만나는 곡선족을 얻는다.

풀이

풀이 전체에서 $x > 0, y > 0$이다.

소문항 (i)(a)

$x^2 + y^2 = 2ax$를 x에 대하여 음함수 미분(implicit differentiation)하면

$$2x + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2a.$$

이 식에는 아직 곡선마다 달라지는 a가 남아 있다. 곡선의 방정식에서 $2a = (x^2 + y^2)/x$이므로, 이를 대입하고 양변에 x를 곱하면

$$2x^2 + 2xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 + y^2 \quad \Longrightarrow \quad 2xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 - x^2,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

두 번째 곡선족에 대해서는 $x^2 + y^2 = 2by$를 미분하면 (우변도 y를 통해 x에 의존한다는 점

에 주의하면)

$$2x + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

이제 $2b = (x^2+y^2)/y$이므로, 대입하고 양변에 y를 곱하면

$$2xy + 2y^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (x^2+y^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \quad \Longrightarrow \quad (x^2-y^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2xy.$$

소문항 (i)(b)

각 곡선족의 곡선 하나씩이 $y \neq x$인 점 (x,y)를 지난다고 하자. $x, y > 0$이므로 $2xy \neq 0$이고, $y \neq x$이며 둘 다 양수이므로 $x^2 - y^2 \neq 0$이다. 따라서 두 미분방정식에서 모두 나눗셈을 할 수 있고, 두 기울기는

$$m_1 = \frac{y^2-x^2}{2xy}, \qquad m_2 = \frac{2xy}{x^2-y^2}, \qquad \text{따라서} \qquad m_1 m_2 = \frac{y^2-x^2}{x^2-y^2} = -1.$$

두 기울기가 모두 유한하고 그 곱이 -1이므로 두 접선(tangent)은 수직이다.

생각해 보기 직선 $y = x$ 위에서는 무엇이 잘못되는가? 그렇다면 그곳에서는 결과가 성립하지 않는가?

$y = x$ 위에서 두 번째 방정식은 $0 \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x^2 \neq 0$이 되는데, 이를 만족하는 유한한 기울기는 없다. 즉 두 번째 곡선의 접선은 수직선이다. 이것은 대수적 계산이 무너지는 것이지 기하적 성질이 무너지는 것이 아니므로, 직접 살펴보자.

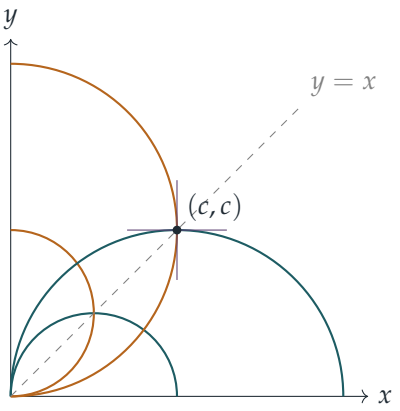
(c,c)가 $x^2+y^2 = 2ax$ 위에 있으면 $2c^2 = 2ac$이므로 $a = c$이다. 마찬가지로 $b = c$이다. 첫 번째 곡선은 중심이 $(c,0)$이고 반지름이 c인 원이며, (c,c)는 그 원의 가장 높은 점이므로 그 점에서의 접선은 수평선이다 (실제로 $y = x$일 때 $m_1 = 0$이다):

$$y = c.$$

두 번째 곡선은 중심이 $(0,c)$이고 반지름이 c인 원이며, (c,c)는 그 원의 가장 오른쪽 점이므로 접선은 수직선이다:

$$x = c.$$

수평선과 수직선은 서로 수직이므로, **그렇다**: 두 접선은 $y = x$ 위의 점을 포함하여 모든 교점에서 수직이다.



첫 번째 곡선족의 원(청록색)은 원점에서 y축에 접하고, 두 번째 곡선족의 원(호박색)은 원점에서 x축에 접한다.

소문항 (ii)

$y = c\ln x$에 대하여 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{c}{x}$이다. c를 소거하기 위해, 이러한 곡선 위의 제1사분면(first quadrant)의 점에서는 $y > 0$이므로 반드시 $\ln x \neq 0$임에 주목하자. 따라서 $c = y/\ln x$이고

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x\ln x}.$$

이 기울기는 결코 0이 아니므로, 같은 점을 지나며 수직으로 만나는 곡선의 기울기는 $-x\ln x/y$여야 한다. 따라서 두 번째 곡선족은

$$y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -x\ln x.$$

를 만족한다. 변수분리(separation of variables)를 하고, $u = \ln x$, $\mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x$로 두어 $x\ln x$를 부분적분(integration by parts)하면

$$\int y\,\mathrm{d}y = -\int x\ln x\,\mathrm{d}x \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{1}{2}y^2 = -\tfrac{1}{2}x^2\ln x + \tfrac{1}{4}x^2 + C.$$

양변에 4를 곱하면 두 번째 곡선족은

$$2y^2 + 2x^2\ln x - x^2 = k,$$

이며, 각 상수 k마다 곡선이 하나씩 있다 ($x > 0, y > 0$인 부분만 고려한다). 거꾸로, 이 식을 음함수 미분하면 $4y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 4x\ln x + 2x - 2x = 0$이 되는데, 이는 정확히 위의 방정식이다. 따라서 이 곡선 중 하나가 어떤 $y = c\ln x$와 만나는 곳마다 기울기의 곱은 $\frac{y}{x\ln x}\cdot\frac{-x\ln x}{y} = -1$이다.

소문항 (iii)

$y^2 = 4k(x+k)$를 미분하면 $2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4k$이므로, $y > 0$이기 때문에

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2k}{y}.$$

생각해 보기 여기에는 곡선족이 하나뿐이다. 그렇다면 "두 번째 곡선"은 어디에서 오는가?

제1사분면의 한 점 (x,y)를 고정하고, 곡선족의 어떤 곡선이 그 점을 지나는지 묻자. k의 값은

$$4k^2 + 4xk - y^2 = 0,$$

을 만족해야 하는데, 이는 k에 대한 이차방정식(quadratic equation)이다. 판별식(discriminant) $16x^2 + 16y^2$이 양수이므로 서로 다른 두 실근 k_1, k_2가 존재하고, 두 근의 곱은

$$k_1 k_2 = -\frac{y^2}{4}.$$

이다. (이 값은 음수이므로, 곡선족이 요구하는 대로 두 근 모두 0이 아니다.) 이차방정식의 근은 많아야 두 개이므로, 곡선족의 서로 다른 두 곡선이 (x,y)에서 만난다면 그 매개변수는 정확히 k_1과 k_2여야 한다. 그 점에서의 기울기는 $2k_1/y$와 $2k_2/y$이고, 그 곱은

$$\frac{4k_1k_2}{y^2} = \frac{4}{y^2}\cdot\left(-\frac{y^2}{4}\right) = -1.$$

따라서 이러한 모든 점에서 두 접선은 수직이며, 원하는 결과를 얻는다. (이 곡선들은 원점을 초점(focus)으로 하는 포물선(parabola)이며, 이 곡선족은 자기 자신의 직교 궤적이다.)

검산

- (i)에서 $(x,y) = (1,2)$를 잡으면 $a = \frac{5}{2}$, $b = \frac{5}{4}$이고, 기울기는 $m_1 = \frac{3}{4}$와 $m_2 = -\frac{4}{3}$으로 그 곱은 -1이다.
- (ii)에서 $(e,1)$에서 로그 곡선은 $c = 1$이고 기울기는 $1/e$이다. 두 번째 곡선족의 공식에 따르면 기울기는 $-e\cdot 1/1 = -e$이다. 역시 곱은 -1이다.
- (iii)에서 $(0,2)$에서 이차방정식은 $4k^2 - 4 = 0$이므로 $k = \pm 1$이다. 즉 포물선 $y^2 = 4(x+1)$과 $y^2 = -4(x-1)$이며, 그 점에서의 기울기는 1과 -1이다.
- 네 결과 모두 곡선 자체의 수치 미분을 이용하여, 무작위로 고른 수천 개의 점에서 컴퓨터로도 확인하였다.

흔한 실수

- $2by$를 미분할 때 우변의 인수 $\frac{dy}{dx}$를 빠뜨리는 것.
- (ii)에서 수직인 기울기를 $-x/c$로 쓰고 c가 남아 있는 채로 적분하는 것. c는 첫 번째 곡선에 속하는 값이므로, 풀기 전에 반드시 소거해야 한다.
- (i)(b)에서 $x^2 - y^2$가 왜 0이 아닌지 설명하지 않고 나누어서, 직선 $y = x$를 따로 다루어야 한다는 점을 놓치는 것.

STEP 너머

모든 곳에서 직각으로 만나는 곡선족을 **직교 궤적**(*orthogonal trajectories*)이라고 한다. 직교 궤적은 물리학에서 역선(field lines)과 등전위선(equipotentials)으로 나타나고, 복소해석(complex analysis)에서도 나타난다. 해석함수(analytic function)의 실수부와 허수부의 등위곡선(level curves)은 항상 서로 수직인데, 바로 이 때문에 (i)의 원들은 $1/z$에서, (iii)의 자기 직교 포물선들은 $\sqrt{z}$에서 생겨난다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 직교 궤적을 다루며, Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석)는 복소해석의 관점을 아름답게 설명한다.

풀이

STEP II 2022, 문제 7

순수수학 • 복소 다항식의 근

STEP II 2022, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

핵심 아이디어

방정식 $\mathrm{h}(w) = 0$은 자연스럽게 $w^5(nw+1) = -(w+n)$의 꼴로 나뉘고, 양변의 절댓값(modulus)을 취하면 $|w|$에 관한 명제만 남는다. 모든 근이 단위원(unit circle) 위에 있다는 것을 알고 나면, 실수가 아닌 각 근은 그 켤레복소수(conjugate)와 짝을 이루는데, 이 켤레복소수는 바로 그 근의 역수(reciprocal)이기도 하다. 이로부터 이차 인수(quadratic factor)들을 얻고, 그다음은 계수 비교(comparing coefficients)와 부호에 관한 논증만 하면 된다.

풀이

소문항 (i)

(a) $\mathrm{h}(w) = 0$의 항들을 다음과 같이 묶는다.

$$w^5(nw+1) = -(w+n).$$

두 괄호 모두 0이 될 수 없다. $n \geq 2$이므로, $w = -1/n$이면 $\mathrm{h}(w) = n - \frac{1}{n} \neq 0$이고, $w = -n$이면 $\mathrm{h}(w) = n^5(n^2-1) \neq 0$이다. 절댓값을 취하고 제곱하면

$$|w^5|^2\,|nw+1|^2 = |w+n|^2.$$

임의의 복소수 u와 실수 c에 대하여 $|u+c|^2 = (u+c)(\bar{u}+c) = |u|^2 + 2c\,\mathrm{Re}(u) + c^2$이다. 따라서

$$|w+n|^2 = |w|^2 + 2n\,\mathrm{Re}(w) + n^2 = \mathrm{f}(w),$$
$$|nw+1|^2 = n^2|w|^2 + 2n\,\mathrm{Re}(w) + 1 = \mathrm{g}(w).$$

두 값 모두 양수이므로 $|w^5|^2 = \mathrm{f}(w)/\mathrm{g}(w)$이다. 양의 제곱근을 취하면 요구한 대로 $|w^5| = \sqrt{\mathrm{f}(w)/\mathrm{g}(w)}$를 얻는다.

(b) 두 식의 차에서는 $\mathrm{Re}(w)$ 항이 소거된다.

$$\mathrm{f}(w) - \mathrm{g}(w) = n^2 + |w|^2 - n^2|w|^2 - 1 = (n^2 - 1)\big(1 - |w|^2\big).$$

귀류법(proof by contradiction)으로, $|w| < 1$이라고 가정하자. $n^2 - 1 > 0$이므로 $\mathrm{f}(w) > \mathrm{g}(w) > 0$이고, 따라서 $\mathrm{f}(w)/\mathrm{g}(w) > 1$이다. (a)에 의하여 $|w|^5 > 1$이므로 $|w| > 1$인데, 이는 $|w| < 1$에 모순이다. 그러므로 $|w| \geq 1$이다.

(c) 같은 논증을 반대 방향으로 적용할 수 있다. $|w| > 1$이면 $\mathrm{f}(w) < \mathrm{g}(w)$이므로 $|w|^5 < 1$, 즉 $|w| < 1$이 되어 모순이다. 따라서 $|w| \leq 1$이기도 하고, (b)와 합치면 $|w| = 1$이다.

생각해 보기 $|w| \leq 1$임을 더 깔끔하게 보이는 방법은 없을까?

있다. 계수 $n, 1, 0, 0, 0, 1, n$은 거꾸로 읽어도 같으므로 $z^6\,\mathrm{h}(1/z) = \mathrm{h}(z)$이다. 따라서 w가 근이면 $1/w$도 근이고, (b)를 $1/w$에 적용하면 $|w| \leq 1$을 얻는다.

소문항 (ii)

(a) h는 실수 계수 다항식이므로, 실수가 아닌 근은 켤레복소수끼리 짝을 지어 나타난다. 여섯 개의 근은 서로 다르고 모두 실수가 아니므로, 세 쌍 w_k, $\bar{w}_k$ $(k = 1, 2, 3)$를 이룬다. 소문항 (i)에 의하여 $|w_k| = 1$이므로 $w_k\bar{w}_k = 1$이고,

$$(z - w_k)(z - \bar{w}_k) = z^2 - (w_k + \bar{w}_k)z + w_k\bar{w}_k = z^2 - a_k z + 1,$$

이다. 여기서 $a_k = 2\,\mathrm{Re}(w_k)$는 실수이다. 다항식 h는 6차이고 최고차항의 계수(leading coefficient)가 n이므로

$$\mathrm{h}(z) = n(z^2 - a_1 z + 1)(z^2 - a_2 z + 1)(z^2 - a_3 z + 1).$$

(b) 곱에서 z^5 항은 한 인수에서 $-a_k z$를, 나머지 두 인수에서 z^2을 택할 때 생기므로, z^5의 계수는 $-n(a_1 + a_2 + a_3)$이다. h에서 이 계수는 1이므로

$$a_1 + a_2 + a_3 = -\frac{1}{n}.$$

(c) 먼저 두 인수를 곱한다.

$$(z^2 - a_1 z + 1)(z^2 - a_2 z + 1) = z^4 - (a_1 + a_2)z^3 + (2 + a_1 a_2)z^2 - (a_1 + a_2)z + 1.$$

여기에 $z^2 - a_3 z + 1$을 곱하면, z^3 항은 $z^3 \times 1$, $z^2 \times (-a_3 z)$, $z \times z^2$에서 나온다.

$$-(a_1 + a_2) - a_3(2 + a_1 a_2) - (a_1 + a_2) = -2(a_1 + a_2 + a_3) - a_1 a_2 a_3.$$

h에는 z^3 항이 없으므로 $a_1a_2a_3 = -2(a_1 + a_2 + a_3)$이고, (b)에 의하여

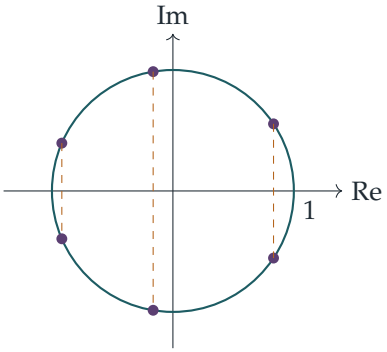
$$a_1a_2a_3 = \frac{2}{n}.$$

(d)

> **생각해 보기** a_k의 부호로부터 실수부에 대해 무엇을 알 수 있을까?

각 켤레 쌍 $w_k, \bar{w}_k$는 같은 실수부(real part) $\mathrm{Re}(w_k) = a_k/2$를 가진다. 따라서 실수부가 음수인 근의 개수는 음수인 a_k의 개수의 두 배이다.

$a_1a_2a_3 = 2/n > 0$이므로 a_k 중 0인 것은 없고, 음수인 것은 짝수 개, 즉 0개 또는 2개이다. $a_1 + a_2 + a_3 = -1/n < 0$이므로 셋 모두 양수일 수는 없다. 따라서 a_k 중 정확히 두 개는 음수이고 하나는 양수이며, 여섯 개의 근 중 **네 개**의 실수부가 음수이다.



그림은 $n = 2$인 경우이다. 여섯 개의 근은 단위원 위에 세 개의 켤레 쌍으로 놓여 있고, 그중 두 쌍은 허수축(imaginary axis)의 왼쪽에 있다.

검산

- 실근이 없다는 것을 확인하는 차원에서, $\mathrm{h}(1) = 2n + 2$와 $\mathrm{h}(-1) = 2n - 2$가 모두 0이 아님에 주목하자. 근이 단위원 위에 있으므로 실근이 될 수 있는 후보는 ± 1뿐이다.
- $n = 2$일 때 수치적으로 풀면 $a_k \approx -1.8368,\ -0.3272,\ 1.6640$이다. 이들의 합은 $-0.5 = -\frac{1}{2}$, 곱은 $1.000 = \frac{2}{2}$이고, 두 개가 음수이므로 (b), (c), (d)와 일치한다. $n = 2, \ldots, 29$에 대해 컴퓨터로 확인한 결과, 매번 모든 근의 절댓값이 1이고 네 개의 근의 실수부가 음수였다.

흔한 실수

- $w = -1/n$이 근이 아님을 확인하지 않고 $nw + 1$로 나누는 것.

- (c)에서 z^3을 만드는 세 가지 방법 중 하나를 빠뜨리는 것, 특히 $2 + a_1a_2$의 상수 2에서 나오는 항 $-2a_3$을 놓치는 것.
- (d)에서 음수인 a_k의 개수는 세었지만, 각각이 **두 개**의 근에 해당한다는 사실을 잊는 것.

STEP 너머

계수를 거꾸로 읽어도 같은 다항식을 **회문 다항식**(palindromic polynomial, 또는 자기역수 다항식(self-reciprocal polynomial))이라고 한다. 이러한 다항식의 근은 $w, 1/w$의 쌍으로 나타나며, 치환 $u = z + 1/z$를 하면 차수가 절반으로 줄어든다. 여기서 $a_k = w_k + 1/w_k$가 바로 그 u이다. 모든 근이 언제 단위원 위에 놓이는가 하는 질문은 슈어–콘 판정법(Schur–Cohn test) 같은 결과와 복소해석학(complex analysis)의 루셰 정리(Rouché's theorem)로 이어진다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이러한 아이디어를 기하학적으로 살펴보기에 아주 훌륭한 책이다.

풀이

STEP II 2022, 문제 8

순수수학 • 행렬의 불변 직선

> **STEP II 2022, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

핵심 아이디어

원점을 지나는 직선 위의 모든 점이 같은 직선 위의 점으로 옮겨지면 그 직선을 불변 직선(invariant line)이라 한다. 따라서 방향 벡터(direction vector) 하나가 어디로 가는지만 보면 충분하다. 직선을 $y = mx$로 쓰고 $\mathbf{M}\binom{1}{m}$이 $\binom{1}{m}$의 실수배가 되도록 요구하면, 모든 것이 m에 대한 이차방정식(quadratic equation)으로 바뀐다. 그다음 소문항 (ii)와 (iii)은 이 방정식의 두 근의 합과 곱에 관한 문제가 되며, 기울기(gradient)가 없는 수직선은 매번 따로 살펴보아야 한다.

풀이

소문항 (i)

방향이 $\binom{1}{m}$인 직선 $y = mx$를 생각하자. 이 방향 벡터의 상은

$$\mathbf{M}\begin{pmatrix}1\\ m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+bm\\ c+dm\end{pmatrix}.$$

이다. $\mathbf{M}$이 선형(linear)이므로, 이 직선이 불변일 필요충분조건은 이 상이 $y = mx$ 위에 놓이는 것, 즉

$$c + dm = m(a + bm) \quad \Longleftrightarrow \quad bm^2 + (a-d)m - c = 0.$$

이다. 따라서 수직이 아닌 모든 불변 직선의 기울기는 이 방정식을 만족하고, 이 방정식의 모든 근은 불변 직선 하나를 준다.

기울기들을 "두 근"이라고 부르기 전에, 이 방정식이 정말로 이차방정식인지 확인해야 한다. y축의 방향은 $\binom{0}{1}$이고 그 상은 $\binom{b}{d}$이다. 이것이 y축 위에 놓일 필요충분조건은 $b = 0$이

다. 따라서 두 불변 직선 중 어느 것도 y축이 아니라면 $b \neq 0$이다. 그러면 이 방정식은 진짜 이차방정식이고, 근은 많아야 두 개이다. 두 불변 직선은 모두 수직이 아니고 기울기가 서로 다르므로, 그 기울기는 서로 다른 두 근이다. 즉 두 기울기는 정확히 이 방정식의 두 근이며, 이것이 보이려던 것이다.

불변 직선 하나가 y축이라면 $b = 0$이고, 방정식은 $(a-d)m - c = 0$으로 줄어든다. $a \neq d$이므로(이 조건은 바로 여기서 쓰인다), 나머지 불변 직선의 기울기는

$$m = \frac{c}{a-d}.$$

이다.

소문항 (ii)

$b \neq 0$인 경우. 두 기울기를 m_1, m_2라 하자. 소문항 (i)에서

$$m_1 + m_2 = -\frac{a-d}{b}, \qquad m_1 m_2 = -\frac{c}{b}.$$

이다. 두 직선이 x축과 이루는 각을 α_1, α_2라 하면

$$\tan(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}.$$

이다. 두 직선 사이의 각이 45°라는 것은 이 값이 ± 1이라는 뜻이므로 $(m_1 - m_2)^2 = (1 + m_1 m_2)^2$이다. 좌변을 $(m_1 + m_2)^2 - 4m_1 m_2$로 쓰면

$$\frac{(a-d)^2}{b^2} + \frac{4c}{b} = \left(1 - \frac{c}{b}\right)^2.$$

을 얻는다. 양변에 b^2을 곱하면 $(a-d)^2 + 4bc = (b-c)^2$, 즉

$$(a-d)^2 = (b-c)^2 - 4bc.$$

이다.

$b = 0$인 경우. 한 직선은 y축이고 다른 직선의 기울기는 $c/(a-d)$이다. 이 직선이 y축과 45°를 이루려면 기울기가 ± 1이어야 하므로 $c = \pm(a-d)$이고 $(a-d)^2 = c^2$이다. $b = 0$이면 보이려는 식의 우변도 c^2이므로, 이 경우에도 결과가 성립한다.

소문항 (iii)

생각해 보기 "$y = x$와 같은 각을 이룬다"는 것을 기울기로 나타내면 무슨 뜻인가?

원점을 지나는 서로 다른 두 직선이 $y = x$와 같은 각을 이룰 필요충분조건은 한 직선이 다른 직선을 $y = x$에 대해 반사한 거울상(mirror image)인 것이다. $y = x$에 대한 반사는 두

좌표를 맞바꾸므로, $y = mx$를 $x = my$로 보내고, 이는 $m \neq 0$일 때 $y = \frac{1}{m}x$이다. 또 이 반사는 x축을 y축으로, y축을 x축으로 보낸다.

$b \neq 0$인 경우. 두 직선 모두 수직이 아니다. 한 직선의 기울기가 0이라면 그 거울상은 y축인데, y축은 불변이 아니므로 두 직선은 대칭이 될 수 없다. 그렇지 않은 경우 조건은 $m_2 = 1/m_1$, 즉 $m_1 m_2 = 1$이다. 소문항 (i)에 의해 이는 $-c/b = 1$, 즉 $b + c = 0$이다.

$b = 0$인 경우. 한 직선이 y축이므로 다른 직선은 x축이어야 한다. 즉 $c/(a-d) = 0$, 곧 $c = 0$이다. $b = 0$이므로 이것 역시 $b + c = 0$이라는 조건이다.

따라서 모든 경우에 필요충분조건은

$$b + c = 0, \quad \text{즉,} \quad c = -b.$$

이다. (행렬이 대칭행렬(symmetric matrix)이어서 $b = c$이면, 대신 두 불변 직선이 서로 수직이 된다. 여기서는 비대각 성분(off-diagonal entries)의 부호가 반대이다.)

소문항 (iv)

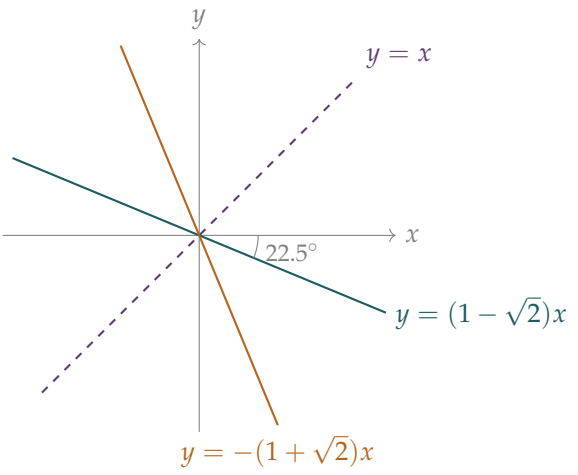
소문항 (ii)의 조건에 $c = -b$를 대입하면

$$(a-d)^2 = (2b)^2 + 4b^2 = 8b^2.$$

이다. $b \neq 0$이어야 한다. $b = c = 0$이면 $(a-d)^2 = 0$이 되어 $a \neq d$에 모순이기 때문이다. $b = 1, c = -1, a - d = 2\sqrt{2}$로 잡자. 예를 들어 $a = \sqrt{2}, d = -\sqrt{2}$로 두면

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ -1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

이다. 소문항 (i)의 이차방정식은 $m^2 + 2\sqrt{2}\,m + 1 = 0$이고, 서로 다른 두 실근 $m = -\sqrt{2} \pm 1$을 가진다. 따라서 이 행렬은 문제에서 가정한 대로 정확히 두 개의 불변 직선을 가진다. 두 기울기의 곱이 1이므로 두 직선은 $y = x$에 대해 서로 거울상이다. $\tan 22.5^\circ = \sqrt{2} - 1$이고 $\tan 67.5^\circ = \sqrt{2} + 1$이므로, 두 직선이 x축과 이루는 각은 -22.5°와 -67.5°이다. 따라서 두 직선은 45°로 만나고, 각각 $y = x$와 67.5°를 이룬다.



검산

- 소문항 (iv)의 예에서 $(a-d)^2 = 8$이고 $(b-c)^2 - 4bc = 4+4 = 8$이므로 소문항 (ii)의 조건이 성립한다. 직선 하나를 직접 확인할 수도 있다. $\mathbf{M}\binom{1}{1-\sqrt{2}} = \binom{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}}{-1-\sqrt{2}+2} = \binom{1}{1-\sqrt{2}}$이므로, $y = (1-\sqrt{2})x$ 위의 모든 점은 사실 고정된다.
- 소문항 (i)에 대한 간단한 특수한 경우: $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$의 불변 직선은 두 좌표축이다. y축인 경우의 공식은 다른 기울기를 $0/(2-1) = 0$으로 주며, 이는 옳다.
- 소문항 (i)–(iii)은 수천 개의 무작위 행렬에 대해 컴퓨터로 확인하였다. 고유벡터 방향은 이차방정식을 만족하고, $45°$를 이루는 쌍은 항등식을 만족하며, 두 직선이 $y = x$에 대해 대칭일 필요충분조건은 $b + c = 0$이었다.

흔한 실수

- 수직선을 잊는 것. 이차방정식은 기울기만 다루므로, 모든 소문항에서 $b = 0$인 경우를 따로 처리해야 한다.
- 소문항 (iii)에서 $m_1 = -m_2$로 쓰는 것. 이는 **좌표축**에 대한 대칭이다. $y = x$에 대한 대칭에는 $m_1 m_2 = 1$이 필요하다.
- $\pm$ 없이 $\tan\theta = 1$을 쓰는 것. $(m_1 - m_2)^2 = (1 + m_1 m_2)^2$으로 제곱하면 두 부호를 한꺼번에 처리할 수 있다.

STEP 너머

원점을 지나는 불변 직선은 $\mathbf{M}$의 **고유벡터**(eigenvector) 방향이고, 소문항 (i)의 이차방정식은 고유벡터 방정식 $\mathbf{Mv} = \lambda\mathbf{v}$에서 λ를 소거한 것이다. 실대칭행렬은 항상 서로 수직인 고유벡터를 가진다(스펙트럼 정리(spectral theorem)). 이 문제는 비대각 성분이 반대칭(antisymmetric)이면 대신 고유벡터들이 $y = x$에 대해 대칭이 된다는 것을 보여 준다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 고유벡터와 스펙트럼 정리를 자세히 다룬다.

풀이

STEP II 2022, 문제 9

역학 • 마찰과 모멘트

STEP II 2022, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

핵심 아이디어

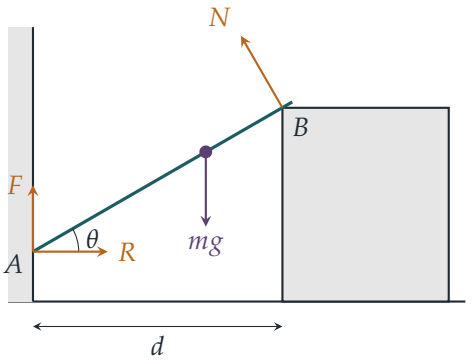
판자는 가벼우므로 판자에 힘을 가하는 것은 세 가지뿐이다. 질점, 각기둥(prism) 모서리에서의 반작용, 그리고 벽이다. 판자가 벽에 닿는 점에 대한 모멘트(moment)를 잡으면 벽에서 오는 두 힘이 한꺼번에 사라지고, 모서리에서의 반작용이 곧바로 구해진다. 이어서 연직 방향으로 힘을 분해하면 마찰력(friction)이 구해지고, 이후의 모든 소문항은 마찰 부등식 $|F| \leq \mu R$를 정리한 것에 지나지 않는다.

풀이

모형. 판자는 가벼운 강체 막대(light rigid rod)이고, 질량은 무게가 mg인 질점(particle)이며, 각기둥의 모서리는 매끄럽고, 벽은 마찰계수(coefficient of friction)가 μ인 거친 면이다. 판자가 벽에 닿는 점을 A, 판자가 모서리 위에 얹힌 점을 B라 하자. B는 벽으로부터 수평 거리 d만큼 떨어져 있으므로

$$AB = d\sec\theta.$$

B에서 판자는 모서리 위에 얹혀 있으므로, 매끄러운 반작용 N은 **판자**에 수직이다. A에서 벽은 수평 방향의 수직항력(normal reaction) R와 연직 방향의 마찰력 F를 주는데, F는 위쪽을 양의 방향으로 잡는다(F가 음수이면 아래쪽으로 작용한다는 뜻이다).



A에 대한 모멘트. 벽에서 오는 두 힘은 모두 A를 지난다. 무게는 판자를 따라 거리 x인 곳에 작용하므로 그 팔의 길이는 $x\cos\theta$이다. N은 거리 $d\sec\theta$인 곳에서 판자에 수직으로 작용한다.

$$N\,d\sec\theta = mg\,x\cos\theta \quad\Longrightarrow\quad N = \frac{mg\,x\cos^2\theta}{d}.$$

힘의 분해. N의 방향은 연직 방향과 각 θ를 이루며 벽 쪽으로 기울어져 있다. 수평 방향과 연직 방향으로 분해하면

$$R = N\sin\theta = \frac{mg\,x\cos^2\theta\sin\theta}{d},$$
$$F = mg - N\cos\theta = mg\left(1 - \frac{x\cos^3\theta}{d}\right).$$

$R > 0$이므로 판자가 실제로 벽을 누르고 있음에 주목하자.

소문항 (i)

$x = d\sec^3\theta$이면 $x\cos^3\theta/d = 1$이므로 $F = 0$이다. 즉 벽에서 마찰력이 작용하지 않는다.

소문항 (ii)

마찰이 있을 때 평형(equilibrium)이 유지되려면 $|F| \le \mu R$이어야 한다.

$x > d\sec^3\theta$이면 $x\cos^3\theta/d > 1$이므로 $F < 0$이다(마찰력이 아래쪽으로 작용한다. 마찰이 없다면 끝점 A가 벽을 따라 위로 미끄러져 올라갈 것이다). 조건 $-F \le \mu R$는 다음과 같다.

$$mg\left(\frac{x\cos^3\theta}{d} - 1\right) \le \mu\,\frac{mg\,x\cos^2\theta\sin\theta}{d}.$$

양수 $d\sec^3\theta/(mg)$를 곱하면

$$x - d\sec^3\theta \le \mu\,x\tan\theta, \qquad \text{따라서} \qquad \mu \ge \frac{x - d\sec^3\theta}{x\tan\theta},$$

이다. 여기서 θ가 예각이므로 $x\tan\theta > 0$으로 나누었다. 이것이 구하려는 결과이다.

$x < d\sec^3\theta$이면 $F > 0$이고, 조건 $F \le \mu R$는 같은 방법으로

$$\mu \ge \frac{d\sec^3\theta - x}{x\tan\theta}.$$

가 된다.

> **생각해 보기** 마찰력은 어느 쪽으로 작용하며, 짐작하지 않고 그것을 어떻게 알 수 있는가?

짐작할 필요가 없다. F를 위쪽이 양이 되도록 잡으면 연직 방향의 식이 그 부호를 알려 준다. 마찰은 언제나 $|F| \le \mu R$로 쓸 수 있으며, F의 부호는 두 부등식 가운데 어느 것을 얻는지를 정해 줄 뿐이다.

소문항 (iii)

(ii)의 두 경우는 모두 $|x - d\sec^3\theta| \le \mu x\tan\theta$라는 뜻이며, 이는 다음 두 부등식을 함께 만족하는 것과 같다.

$$x - d\sec^3\theta \le \mu x\tan\theta \qquad \text{그리고} \qquad d\sec^3\theta - x \le \mu x\tan\theta.$$

두 번째 부등식에서 $d\sec^3\theta \le x(1+\mu\tan\theta)$를 얻는다. $1+\mu\tan\theta > 0$이므로

$$\frac{x}{d} \ge \frac{\sec^3\theta}{1+\mu\tan\theta}.$$

첫 번째 부등식에서 $x(1-\mu\tan\theta) \le d\sec^3\theta$를 얻는다. $\mu < \cot\theta$이면 $\mu\tan\theta < 1$이므로 $1-\mu\tan\theta > 0$이고, 부등호 방향을 바꾸지 않고 나눌 수 있다.

$$\frac{x}{d} \le \frac{\sec^3\theta}{1-\mu\tan\theta}.$$

($\mu \ge \cot\theta$이면 상한이 없다. 질량이 판자 위 어디에 있든 마찰력이 그것을 붙잡아 둘 수 있다.)

소문항 (iv)

질량이 벽과 모서리 사이에 놓이는 것은 정확히 $x < AB = d\sec\theta$일 때이다. 이것을 (iii)의 하한과 합치면

$$\frac{d\sec^3\theta}{1+\mu\tan\theta} \le x < d\sec\theta.$$

$d\sec\theta > 0$으로 나누고 $1+\mu\tan\theta > 0$을 곱하면

$$\sec^2\theta < 1+\mu\tan\theta \quad\Longleftrightarrow\quad \tan^2\theta < \mu\tan\theta,$$

이다. 여기서 $\sec^2\theta = 1+\tan^2\theta$를 사용하였다. $\tan\theta > 0$이므로 이것으로 나눌 수 있고, 따라서 요구한 대로 $\tan\theta < \mu$를 얻는다.

검산

- $\theta = 45°$, $d = 1$, $\mu = 0.5$로 잡자. 그러면 $\sec^3\theta = 2\sqrt{2} \approx 2.83$이고, (iii)에 따라 $1.89 \leq x \leq 5.66$이 허용된다. 예를 들어 $x = 2$에서 $F = mg(1 - 2/2\sqrt{2}) \approx 0.29mg$이고 $N = mg$, $R = mg/\sqrt{2}$, $\mu R \approx 0.35mg$이므로 평형이 유지된다. 이때 질량은 모서리 너머에 있는데($AB = \sqrt{2}$), 이는 $\tan 45° = 1 > \mu$이므로 (iv)와 들어맞는다.
- 극한의 경우 $\mu = 0$(매끄러운 벽): (iii)의 범위가 $x = d\sec^3\theta$로 좁혀지며, 이는 (i)에서 구한 유일한 위치이다.
- θ, d, μ, x의 무작위 값을 많이 넣어 컴퓨터로 확인한 결과, 힘이 평형을 이루며(다른 점에 대한 모멘트도 포함하여), $|F| \leq \mu R$가 성립하는 것은 정확히 (iii)의 부등식이 성립할 때임이 확인되었다.

흔한 실수

- 모서리에서의 반작용을 연직 방향으로 잡는 것. 판자는 모서리 위에 얹혀 있으므로, 매끄러운 반작용은 각기둥의 윗면이 아니라 판자에 수직이다.
- 모멘트 식에서 거리 AB로 $d\sec\theta$ 대신 d를 쓰는 것.
- $1 - \mu\tan\theta$의 부호를 확인하지 않고 $x(1 - \mu\tan\theta) \leq d\sec^3\theta$를 나누는 것. 조건 $\mu < \cot\theta$가 등장하는 이유가 바로 이것이다.

STEP 너머

이 판자는 **정정**(*statically determinate*) 구조이다. 미지의 반작용이 세 개이고 평형 방정식도 세 개이므로 마찰력이 정확히 결정된다. 지지점을 하나 더 추가하면 방정식만으로는 더 이상 힘이 정해지지 않으며, 이때 공학자들은 보의 탄성(elasticity)을 고려하여 하중이 어떻게 분담되는지를 정한다. (iii)의 범위는 "평형 영역(region of equilibrium)"의 작은 예이며, 이 주제는 안정성(stability)을 공부할 때 다시 등장한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 강체 정역학과 마찰을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP II 2022, 문제 10

역학 • 경사면 위의 포물체

STEP II 2022, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

핵심 아이디어

소문항 (i)은 표준적인 궤적 방정식(trajectory equation)이며, 요령은 $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$를 이용하여 이 식을 $\tan\alpha$**에 대한 이차식**으로 읽는 것이다. 목표 지점을 맞힐 수 있는 것은 바로 그 이차방정식이 실근을 가질 때이므로, 문제 전체가 판별식(discriminant) 조건으로 귀결된다. 수평 좌표 (x, y)로 쓰면 이 조건은 원판(disc)을 나타내는 것으로 밝혀지고, 이후의 모든 소문항은 직선이 원과 만나는 곳을 읽어 내는 문제가 된다.

풀이

전체에 걸쳐 포사체(projectile)를 공기 저항 없이 중력만 받으며 자유롭게 운동하는 입자로 모형화하고, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$로 둔다.

소문항 (i)

발사 지점에서 잰 수평 거리와 높이를 생각한다. 시각 t에서

$$s = ut\cos\alpha, \qquad h = ut\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

수평 운동으로부터 $t = \dfrac{s}{u\cos\alpha}$이고, 이를 대입하면

$$h = s\tan\alpha - \frac{gs^2}{2u^2\cos^2\alpha},$$

이 되어 원하는 식을 얻는다.

소문항 (ii)

$P = (x, y, y\tan\theta)$라 하고, 대포로부터의 수평 거리를 $s = \sqrt{x^2+y^2}$로 쓴다. 대포는 어느 방향으로든 향할 수 있으므로 P를 지나는 연직 평면 안으로 조준한다. 그러면 운동은 그 평면 안에서 일어나고, 소문항 (i)에 의해 다음을 만족하는 각 α(대포가 아래쪽을 향할 수도 있으므로 음수일 수도 있다)가 필요하다.

$$y\tan\theta = s\tan\alpha - \frac{gs^2}{2u^2}(1+\tan^2\alpha).$$

$s = 0$이면 P는 원점이며, 이는 바로 위로 쏘면 도달할 수 있고, $\sec^2\theta > \tan^2\theta$이므로 아래의 부등식도 그곳에서 성립한다. $s > 0$이면 임의의 실수값을 가질 수 있는 $T = \tan\alpha$를 둔다. 조건은

$$\frac{gs^2}{2u^2}T^2 - sT + \left(y\tan\theta + \frac{gs^2}{2u^2}\right) = 0$$

이 실근 T를 갖는 것, 즉 판별식이 음이 아닌 것이다.

$$s^2 \geq 4\cdot\frac{gs^2}{2u^2}\left(y\tan\theta + \frac{gs^2}{2u^2}\right) \iff u^4 \geq 2gu^2 y\tan\theta + g^2s^2,$$

여기서 $s^2 > 0$으로 나누고 u^4를 곱하였다. g^2으로 나누고 $s^2 = x^2+y^2$을 이용하면

$$x^2 + y^2 + \frac{2u^2\tan\theta}{g}y \leq \frac{u^4}{g^2}.$$

y에 대하여 완전제곱식을 만들고 $1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$를 이용하면

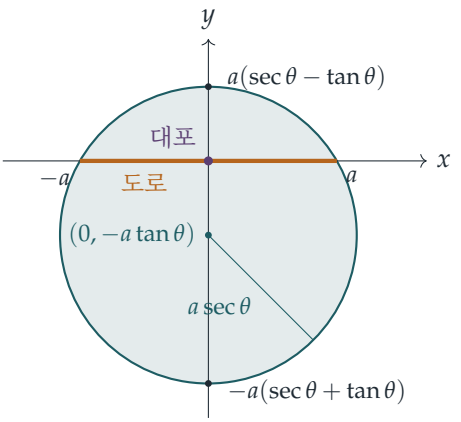
$$x^2 + \left(y + \frac{u^2\tan\theta}{g}\right)^2 \leq \frac{u^4}{g^2}(1+\tan^2\theta) = \frac{u^4\sec^2\theta}{g^2},$$

이 되며, 이것이 구하는 조건이다.

> ? **생각해 보기** 포사체가 P에 도달하기 **전에** 경사진 지면에 부딪칠 수 있을까?

그렇지 않다. 발사가 이루어지는 연직 평면에서 포사체의 높이에서 지면의 높이를 뺀 값은 최고차항의 계수가 음수인 수평 거리에 대한 이차식(포물선에서 직선을 뺀 것)이며, 이 값은 대포의 위치와 P에서 0이 된다. 따라서 그 사이에서는 양수이다. 즉 포사체는 P에 떨어질 때까지 지면보다 위에 있다.

이제부터 $a = u^2/g$로 쓴다. 도달 가능한 점은 수평 사영이 중심 $(0, -a\tan\theta)$, 반지름 $a\sec\theta$인 원판 안에 놓이는 점들이다.



그림($\theta = 30°$로 그렸다)은 위에서 내려다본 도달 가능 영역을 보여 준다. "평면 위쪽"은 y의 양의 방향이다.

소문항 (iii)

평면을 따라 바로 위쪽은 $x = 0, y > 0$을 뜻한다. 조건은 $(y + a\tan\theta)^2 \le a^2\sec^2\theta$가 되고, $y + a\tan\theta > 0$이므로 이는

$$y \le a(\sec\theta - \tan\theta).$$

수평 좌표가 y인 평면 위의 점은 평면을 따라 재었을 때 원점으로부터 거리 $y\sec\theta$에 있다. 따라서 평면 위쪽으로 가장 먼 점까지의 거리는

$$a\sec\theta(\sec\theta - \tan\theta) = a\,\frac{1-\sin\theta}{\cos^2\theta} = a\,\frac{1-\sin\theta}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)} = \frac{u^2}{g(1+\sin\theta)},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

평면을 따라 바로 아래쪽은 $x = 0, y < 0$을 뜻한다. 이번에는 조건으로부터 $y \ge -a(\sec\theta + \tan\theta)$를 얻으므로, 평면 아래쪽으로 가장 먼 점은 대포로부터

$$a\sec\theta(\sec\theta + \tan\theta) = a\,\frac{1+\sin\theta}{\cos^2\theta} = \frac{u^2}{g(1-\sin\theta)}$$

의 거리에 있다.

소문항 (iv)

도로는 직선 $y = 0$이다(이 직선은 평면 위에, 높이 0에 놓여 있다). 조건에 $y = 0$을 넣으면

$$x^2 \le a^2\sec^2\theta - a^2\tan^2\theta = a^2,$$

이므로 도달 가능한 도로 구간은 $-a \le x \le a$이고, 그 길이는 $\dfrac{2u^2}{g}$로 평평한 지면에서와 같다.

이제 대포를 $(0, c, c\tan\theta)$에 놓는다. 도로(x축)까지의 거리는 $\sqrt{c^2 + c^2\tan^2\theta} = |c|\sec\theta$이므로 $r = |c|\sec\theta$이다. 소문항 (ii)의 모든 내용은 **대포에 대한 상대적인** 위치에만 의존하고, 평면은 그 위의 어느 점에서 보아도 똑같이 보이므로, y를 $y - c$로 바꾼 조건을 쓸 수 있다. 도로($y = 0$)에 도달하는 곳은

$$x^2 \le a^2\sec^2\theta - (a\tan\theta - c)^2.$$

? **생각해 보기** 대포를 도로보다 위에 놓아야 할까, 아래에 놓아야 할까?

도달 가능한 길이는 $2\sqrt{a^2\sec^2\theta - (a\tan\theta - c)^2}$이며, 이는 빼는 제곱 항이 0일 때, 즉 $c = a\tan\theta > 0$일 때 최대이다. 따라서 대포는 도로에서 평면 **위쪽**으로, 도로가 도달 가능 원판의 중심을 지나기에 꼭 알맞은 만큼 올라가야 하며, 이때 도로는 지름을 잘라 낸다. 가장 좋은 거리는

$$r = a\tan\theta\sec\theta = \frac{u^2\sin\theta}{g\cos^2\theta},$$

이고, 도로의 최대 길이는 원판의 지름

$$2a\sec\theta = \frac{2u^2}{g\cos\theta}.$$

이다.

검산

- $\theta = 0$(평평한 지면)이면 소문항 (ii)는 $x^2 + y^2 \le (u^2/g)^2$이 되어, 모든 방향으로 익숙한 최대 사거리 u^2/g를 준다. (iii)의 두 답은 모두 u^2/g로 줄어들고, (iv)에서는 $r = 0$, 길이는 $2u^2/g$이다.
- 경사면 위쪽 방향의 답 $u^2/\big(g(1+\sin\theta)\big)$은 경사면 위쪽으로의 표준적인 최대 사거리이며, 원판이 옳다는 좋은 신호이다.
- $u = 12\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $\theta = 0.5\,\mathrm{rad}$로 두고 컴퓨터로 모든 발사각을 조사한 결과, 경사면 위쪽 최대 사거리는 9.932 m, 아래쪽은 28.226 m로 $u^2/\big(g(1\pm\sin\theta)\big)$과 일치하였다. 대포를 옮겼을 때 가장 긴 도로 길이는 $33.49\,\mathrm{m} = 2u^2/(g\cos\theta)$였다.

흔한 실수

- (x, y)를 평면을 따라 잰 거리로 취급하는 것. 이들은 수평 좌표이므로 평면 위쪽으로의 거리는 y가 아니라 $y\sec\theta$이다.
- 대포가 수평선 아래를 향할 수도 있다는 것을 잊는 것. $\tan\alpha$는 모든 실수값을 가지며, 그렇기 때문에 판별식 조건이 전부를 말해 준다.

- 옮긴 대포를 도로보다 아래에 놓는 것. 원판의 중심은 대포보다 경사면 아래쪽에 있으므로 대포는 도로보다 위에 있어야 한다.

STEP 너머

소문항 (ii)의 원판은 가능한 모든 궤적의 **포락선**(envelope)인 "안전 포물면(paraboloid of safety)" $z = \frac{u^2}{2g} - \frac{g(x^2+y^2)}{2u^2}$의 한 단면이다. 이 포물면을 임의의 평면과 교차시키면 이차곡선이 생기며, 여기서는 사영하면 원이 된다. 곡선족의 포락선은 역학과 미분방정식 모두에서 대학 1학년에 자연스럽게 다루는 주제이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 포사체 문제를 이런 기하학적 세심함으로 다루는 것을 보기에 좋은 책이다.

풀이

STEP II 2022, 문제 11

확률과 통계 • 기대 손실의 최적화

> **STEP II 2022, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

핵심 아이디어

검사하는 T개의 스틱이 어떻게 되는지에 따라 경우를 나눈다. 그중 하나라도 감염되어 있으면 네트워크에는 아무것도 올라가지 않으므로 손실은 0이다. T개가 모두 깨끗할 때에만 네트워크에서의 도박이 시작된다. 기대 손실(expected loss)을 q의 함수로 쓰면 (ii)는 일변수 최대화(maximisation) 문제가 되고, (iii)은 연속한 T 값끼리 비교하여 해결한다. 이때 T는 정수이므로 도함수(derivative)가 아니라 차분(difference)을 쓴다.

풀이

이 풀이 전체에서 손실이 $-x$라는 것은 £x의 이득을 뜻한다. 순손실을 파운드 단위로 L이라 하자. 각 스틱은 서로 독립적으로 감염되고 깨끗할 확률(probability)은 각각 q이므로, 특정한 m개의 스틱이 모두 깨끗할 확률은 q^m이다. 대칭성에 의해 어느 T개의 스틱을 고르는지는 상관이 없다.

소문항 (i)

먼저 $T > 0$인 경우를 보자. 결과는 세 가지이다.

- 검사한 스틱 중 하나 이상이 감염되어 있다(확률 $1 - q^T$). 나머지는 폐기되고 아무것도 사용되지 않으므로 $L = 0$이다.
- 검사한 T개는 모두 깨끗하지만 나머지 $N - T$개 중 하나 이상이 감염되어 있다(확률 $q^T(1 - q^{N-T})$). 소독 비용을 내야 하므로 $L = D$이다.
- N개의 스틱이 모두 깨끗하다(확률 $q^T q^{N-T} = q^N$). 사용한 $N - T$개의 스틱 각각에서 £1씩 이득을 보므로 $L = -(N - T)$이다.

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(L) &= D\,q^T\left(1-q^{N-T}\right) - (N-T)\,q^N \\ &= D\,q^T - (N-T+D)\,q^N.\end{aligned}$$

$T = 0$이면 N개의 스틱을 모두 사용한다. 확률 $1-q^N$으로 $L = D$이고 확률 q^N으로 $L = -N$이므로 $D-(N+D)q^N$을 얻는다. 이는 같은 식에 $T=0$을 대입한 것과 같으므로, 모든 $0 \le T < N$에 대하여

$$\mathrm{E}(L) = D\,q^T - (N-T+D)\,q^N.$$

소문항 (ii)

α의 범위. $D>0, T\ge 0, N-T>0$이므로 분자와 분모는 $DT \ge 0, N(N-T+D)>0$을 만족하고, 따라서 $\alpha \ge 0$이다. 또한

$$N(N-T+D) - DT = N(N-T) + D(N-T) = (N-T)(N+D) > 0,$$

이므로 $DT < N(N-T+D)$이고 $\alpha < 1$이다.

최댓값. N, D, T를 고정하고 $0 \le q \le 1$에서 $f(q) = Dq^T - (N-T+D)q^N$이라 하자.

$T=0$이면 $\alpha = 0$이고 $f(q) = D-(N+D)q^N$은 q에 대해 감소하므로, 최댓값은 $q=0$, 즉 $q^N = 0 = \alpha$인 곳에서 나타난다.

$T \ge 1$이면 미분하여

$$f'(q) = DTq^{T-1} - N(N-T+D)q^{N-1} = N(N-T+D)\,q^{T-1}\left(\alpha - q^{N-T}\right).$$

> **생각해 보기** 이 정류점(stationary point)이 극대점이고, 나아가 구간 전체에서의 최댓값이라는 것을 어떻게 알 수 있을까?

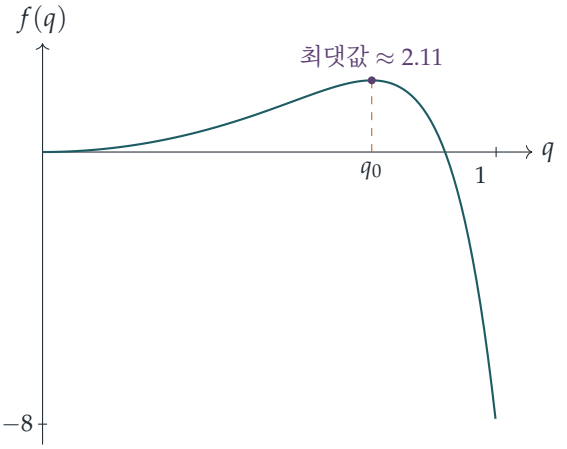
인수 $N(N-T+D)q^{T-1}$은 $0<q\le 1$에서 양수이다. $N-T \ge 1$이므로 q^{N-T}는 0에서 1까지 순증가하고, $0<\alpha<1$이므로 $q_0^{N-T} = \alpha$를 만족하는 $q_0 \in (0,1)$이 정확히 하나 존재한다. $q < q_0$이면 $f'(q) > 0$이고 $q > q_0$이면 $f'(q) < 0$이다. 따라서 f는 q_0까지 증가하다가 그 뒤로 감소하므로, $[0,1]$에서의 최댓값은 $q^{N-T} = \alpha$인 곳에서 나타난다. 이것이 보이려던 것이다.

최댓값의 크기. q_0에서 $q_0^{N-T} = \alpha$이므로 $q_0 = \alpha^{1/(N-T)}$이고 $q_0^T = \alpha^{T/(N-T)} = \alpha^k$이다. 그러면

$$\begin{aligned}f(q_0) &= q_0^T\left(D-(N-T+D)\,q_0^{N-T}\right) = \alpha^k\left(D-(N-T+D)\cdot\frac{DT}{N(N-T+D)}\right) \\ &= \alpha^k\left(D-\frac{DT}{N}\right) = \frac{D(N-T)\,\alpha^k}{N}.\end{aligned}$$

따라서 기대 순손실의 최댓값은 £$D(N-T)\alpha^k/N$이다. ($T=0$일 때 $\alpha^0=1$로 보면 이 값은 £D가 되어 $f(0)=D$와 일치한다.)

다음 그래프는 $N=10$, $T=2$, $D=5$일 때의 f를 나타낸 것이며, 이때 $\alpha=\frac{1}{13}$이다.



소문항 (iii)

이제 N, D, q를 고정하고 $E_T=Dq^T-(N-T+D)q^N$이라 하자. T는 정수 값만 가지므로 "T에 대해 증가한다"는 것은 $0\le T\le N-2$에 대하여 $E_{T+1}>E_T$라는 뜻이다. 빼면

$$\begin{aligned}E_{T+1}-E_T &= Dq^{T+1}-Dq^T+q^N\\ &= q^T\left(q^{N-T}-Dp\right),\end{aligned}$$

이다. 여기서 $q-1=-p$를 이용하였다.

> **생각해 보기** 괄호 안의 식은 T에 따라 달라진다. 어떻게 하나의 β가 모든 T에 대해 동시에 통할 수 있을까?

$0<q\le 1$이고 $N-T\le N$이므로 $q^{N-T}\ge q^N$이다. 따라서 T와 무관한 조건인 $q^N>Dp$만 성립하게 하면 충분하다. 베르누이 부등식(Bernoulli's inequality)에 의해

$$q^N=(1-p)^N\ge 1-Np.$$

이다. (이는 간단한 귀납법(induction)으로 보일 수 있다. $(1-p)^n\ge 1-np$이면 $(1-p)^{n+1}\ge(1-np)(1-p)=1-(n+1)p+np^2$이다.) 따라서 $1-Np>Dp$, 즉 $p<\dfrac{1}{N+D}$이면 $q^{N-T}\ge q^N\ge 1-Np>Dp$이고, 또한 $q^T>0$이다. 그러므로

$$\beta=\frac{1}{N+D}>0,$$

으로 두면 $p < \beta$인 모든 p에 대하여 모든 T에서 $E_{T+1} > E_T$가 성립하므로, 기대 손실은 T에 대한 증가함수이다.

이러한 p에 대해서는 $E_0, E_1, \ldots, E_{N-1}$ 중 가장 작은 값이 E_0이다. 따라서 p가 충분히 작으면 최선의 전략은 $T = 0$, 즉 아무것도 검사하지 않고 N개의 스틱을 모두 사용하는 것이다. 이는 자연스러운 결과이다. 감염이 드물다면 검사는 대개 돈을 벌어 줄 멀쩡한 스틱을 폐기할 뿐이기 때문이다.

검산

- $N = 1, T = 0$이면 식은 $D - (1 + D)q$가 된다. 확률 p로 D를 잃고 확률 q로 1을 얻으므로 예상과 일치한다.
- $q = 1$(감염이 전혀 없음)이면 $D - (N - T + D) = -(N - T)$가 되어, 확실히 $N - T$의 이득을 얻는다.
- $N = 10, T = 2, D = 5$이면 $\alpha = \frac{1}{13}, k = \frac{1}{4}$이고 최댓값은 $4 \cdot 13^{-1/4} \approx 2.107$로, 위 그래프의 꼭대기와 일치한다. 또한 $N \leq 7$에 대하여 가능한 모든 감염 패턴을 컴퓨터로 나열하여 소문항 (i)의 식을 확인하였다.
- $N = 10, D = 5, p = 0.3$($\beta = \frac{1}{15}$보다 훨씬 큼)이면 기대 손실은 오히려 T에 대해 **감소하여**, $T = 0$에서 약 4.58이던 것이 $T = 9$에서 0.03이 된다. 따라서 p에 대한 어떤 조건이 실제로 필요하다.

흔한 실수

- "검사한 스틱이 감염되어 있다"는 경우를 빠뜨리는 것. 이 경우는 기댓값에 0을 기여하지만 확률 $1 - q^T$를 차지한다.
- 이득을 $£(N - T)$가 아니라 $£N$으로 세는 것. 검사한 스틱은 깨끗하더라도 폐기된다.
- (iii)에서 아무 언급 없이 정수 T에 대해 미분하거나, T에 의존하는 β를 고르는 것.

STEP 너머

이것은 통계적 결정 이론(statistical decision theory)의 작은 문제이다. 모수(p)를 모를 때 기대 손실을 최소화하도록 행동(여기서는 T)을 고르는 것이다. 소문항 (ii)는 **미니맥스**(minimax) 발상이다. 각 전략에 대해 가능한 모든 p 중 최악의 경우를 찾는데, 이는 신중한 관리자가 비교해 볼 만한 값이다. 검사 비용과 놓친 결함의 비용 사이의 이러한 상충 관계는 합격 판정 샘플링(acceptance sampling)과 그룹 검사(group testing)의 바탕에도 깔

려 있다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)는 여기서 사용한 기댓값 도구를 익히기에 좋은 책이다.

풀이

STEP II 2022, 문제 12

확률과 통계 • 평균, 중앙값, 최빈값

STEP II 2022, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

핵심 아이디어

모든 것은 누적분포함수(cumulative distribution function) F에서 나오며, 여기서 이 함수는 간단한 다항식이다. F는 $[0,1]$에서 증가하므로, 수 a가 중앙값(median)보다 작을 필요충분조건은 $\mathrm{F}(a) < \frac{1}{2}$이다. 따라서 평균(mean)이나 최빈값(mode)을 중앙값과 비교할 때 중앙값 자체를 구할 필요가 전혀 없다. 평균이나 최빈값에서 F의 값을 계산하여 $\frac{1}{2}$과 비교하기만 하면 된다.

풀이

소문항 (i)

전체 확률이 1이므로

$$1 = k\int_0^1 \left(x^n - x^{n+1}\right)\mathrm{d}x = k\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{k}{(n+1)(n+2)},$$

이고, 따라서 요구한 대로 $k = (n+1)(n+2)$이다. 그러면

$$\mu = k\int_0^1 \left(x^{n+1} - x^{n+2}\right)\mathrm{d}x = (n+1)(n+2)\cdot\frac{1}{(n+2)(n+3)} = \frac{n+1}{n+3}.$$

소문항 (ii)

$0 \le x \le 1$일 때

$$\mathrm{F}(x) = (n+1)(n+2)\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2}\right) = x^{n+1}\big((n+2) - (n+1)x\big).$$

$(0,1)$에서 $\mathrm{f} > 0$이므로 F는 그 구간에서 순증가하고, 중앙값 m은 $\mathrm{F}(m) = \frac{1}{2}$을 만족하는 유일한 점이다. 따라서

$$\mu < m \iff \mathrm{F}(\mu) < \tfrac{1}{2}.$$

이제 $\mu = \frac{n+1}{n+3}$이면

$$(n+2) - (n+1)\mu = \frac{(n+2)(n+3) - (n+1)^2}{n+3} = \frac{3n+5}{n+3},$$

이므로

$$\mathrm{F}(\mu) = \left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{n+1} \frac{3n+5}{n+3}.$$

그러므로 조건 $\mathrm{F}(\mu) < \frac{1}{2}$은 양수 $2\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n+1}$을 곱하면 다음과 같이 된다.

$$\frac{2(3n+5)}{n+3} < \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n+1}.$$

$\frac{2(3n+5)}{n+3} = \frac{6(n+3)-8}{n+3} = 6 - \frac{8}{n+3}$이고 $\frac{n+3}{n+1} = 1 + \frac{2}{n+1}$이므로, 이것은 바로 주어진 부등식(inequality)이다. 따라서 그 부등식이 성립하면 언제나 μ는 중앙값보다 작다.

이 부등식을 증명하기 위해 $N = n+1$로 놓으면 $N \geq 3$인 정수이다. $\left(1 + \frac{2}{N}\right)^N$의 이항전개(binomial expansion)의 모든 항은 양수이고 항은 $N+1 \geq 4$개이므로, 그 합은 처음 네 항의 합 이상이다.

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{2}{N}\right)^N &\geq 1 + N\cdot\frac{2}{N} + \frac{N(N-1)}{2}\cdot\frac{4}{N^2} + \frac{N(N-1)(N-2)}{6}\cdot\frac{8}{N^3} \\ &= 3 + 2\left(1 - \frac{1}{N}\right) + \frac{4}{3}\left(1 - \frac{3}{N} + \frac{2}{N^2}\right) \\ &= \frac{19}{3} - \frac{6}{N} + \frac{8}{3N^2}.\end{aligned}$$

생각해 보기 네 항의 합은 하계(lower bound)일 뿐이다. 이것이 $6 - \frac{8}{N+2}$보다 크다는 것을 어떻게 보일까?

두 식을 빼고 양수인 분모 $3N^2(N+2)$를 곱하여 없앤다.

$$\begin{aligned}3N^2(N+2)&\left[\frac{19}{3} - \frac{6}{N} + \frac{8}{3N^2} - 6 + \frac{8}{N+2}\right] \\ &= N^2(N+2) - 18N(N+2) + 8(N+2) + 24N^2 \\ &= N^3 + 8N^2 - 28N + 16.\end{aligned}$$

$N \geq 3$이면 $N^2 + 8N - 28 \geq 9 + 24 - 28 = 5 > 0$이므로 $N^3 + 8N^2 - 28N + 16 = N(N^2 + 8N - 28) + 16 > 0$이다. 따라서

$$6 - \frac{8}{n+3} < \frac{19}{3} - \frac{6}{N} + \frac{8}{3N^2} \leq \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^{n+1},$$

즉 주어진 부등식은 모든 정수 $n > 1$에 대하여 성립하고, 따라서 X의 중앙값은 μ보다 크다.

소문항 (iii)

$(0,1)$에서

$$\mathrm{f}'(x) = k\left(nx^{n-1} - (n+1)x^n\right) = kx^{n-1}\big(n - (n+1)x\big),$$

이고, 이는 $x < \frac{n}{n+1}$일 때 양수, $x > \frac{n}{n+1}$일 때 음수이다. 따라서 f는 증가하다가 감소하며, 최빈값은 $M = \frac{n}{n+1}$이다.

소문항 (ii)에서와 마찬가지로, $M > m$일 필요충분조건은 $\mathrm{F}(M) > \frac{1}{2}$이다. $(n+2) - (n+1)M = (n+2) - n = 2$이므로

$$\mathrm{F}(M) = 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1},$$

이고, 따라서 $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} > \frac{1}{4}$, 즉 다음이 필요하다.

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < 4.$$

> **생각해 보기** n이 2 이상의 어떤 값이든 될 수 있을 때, $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$에 대해 주어진 사실이 어떻게 도움이 될까?

이 함수는 양의 x에서 감소하므로, 임의의 정수 $n \geq 2$에서의 값은 $x = 2$에서의 값 이하이다.

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} < 4.$$

따라서 $\mathrm{F}(M) > \frac{1}{2}$이고, X의 최빈값은 중앙값보다 크다.

각 소문항의 결과를 종합하면, 모든 $n > 1$에 대하여 평균 $<$ 중앙값 $<$ 최빈값이다.

검산

- $n = 2$로 놓자. 평균은 $\frac{3}{5} = 0.6$이고 최빈값은 $\frac{2}{3} \approx 0.667$이다. $4x^3 - 3x^4 = \frac{1}{2}$을 수치적으로 풀면 중앙값 ≈ 0.6143을 얻는데, 정확히 그 사이에 있다. 또한 $\mathrm{F}(0.6) = 0.4752 < \frac{1}{2}$이고 $\mathrm{F}(\frac{2}{3}) = \frac{16}{27} \approx 0.593 > \frac{1}{2}$이다.
- $n = 2$ $(N = 3)$일 때 전개식은 정확히 네 항이므로 하계가 등식이 된다. 양변 모두 $\frac{125}{27} \approx 4.63$이며, $6 - \frac{8}{5} = 4.4$보다 넉넉히 크다.
- 평균 $<$ 중앙값 $<$ 최빈값이라는 순서는 2부터 79까지의 모든 n에 대해 컴퓨터로 확인되었다.

흔한 실수

- 중앙값을 직접 구하려고 하는 것: 방정식 $x^{n+1}(n+2-(n+1)x) = \frac{1}{2}$은 깔끔한 해가 없으며, 해를 구할 필요도 없다.
- 부등호 방향을 잘못 잡는 것: F가 증가하므로 $\mu < m$은 $\mathrm{F}(\mu) < \frac{1}{2}$에 대응한다.
- 뒤쪽 이항 항들을 버려도 되는 이유(모두 양수라는 점)를 밝히지 않는 것.

STEP 너머

이 밀도함수(density)는 베타분포(Beta distribution) $\mathrm{Beta}(n+1, 2)$로, $[0, 1]$ 위의 가장 중요한 분포족 가운데 하나이며 베이즈 통계학(Bayesian statistics)의 중심에 있다. 평균 < 중앙값 < 최빈값이라는 순서는 왼쪽으로 긴 꼬리를 가진 분포(음의 왜도(negative skew))에서 전형적으로 나타나지만, 보편적인 법칙은 아니다. 그래서 여기서 증명해야 했던 것이다. 소문항 (iii)의 감소함수는 $x \to \infty$일 때 e에 수렴하는데, 이는 해석학(analysis)에서 제대로 만나게 될 고전적인 극한이다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)에 베타분포에 대한 훌륭한 설명이 있다.

풀이

STEP III 2022, 문제 1

순수수학 • 다항식의 근

STEP III 2022, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

핵심 아이디어

매개변수 표시(parametrisation)를 원의 방정식에 대입하면 "두 곡선은 어디에서 만나는가?"라는 질문이 "사차방정식(quartic)의 근은 무엇인가?"라는 질문으로 바뀌고, 그 뒤로는 사차방정식을 한 번도 풀지 않고 근과 계수의 관계(relationships between roots and coefficients)만으로 모든 것을 해결한다. 여기에 쓸모 있는 요령이 하나 더 있는데, 역수(reciprocal) $1/t_i$는 계수를 거꾸로 배열한 같은 사차방정식의 근이라는 점이다. 마지막 소문항에서 "접한다(touching)"는 것은 중근(repeated root)을 뜻한다.

풀이

소문항 (i)

매개변수가 t인 점이 C_2 위에 있을 필요충분조건은

$$(ct-a)^2+\left(\frac{c}{t}-b\right)^2=r^2.$$

이다. 전개하면 $c^2t^2-2act+a^2+\dfrac{c^2}{t^2}-\dfrac{2bc}{t}+b^2=r^2$이다. $t\neq 0$이므로 해가 늘거나 줄지 않게 양변에 t^2을 곱할 수 있다.

$$c^2t^4-2act^3+(a^2+b^2-r^2)t^2-2bct+c^2=0.$$

따라서 각 t_i는 $(*)$의 근이다. 서로 다른 t 값은 서로 다른 점을 준다(x좌표 ct가 다르기 때문이다). 그러므로 네 점 P_i는 서로 다른 네 매개변수를 준다. 사차방정식의 근은 많아야 네 개이므로 $t_1,\ldots,t_4$는 정확히 $(*)$의 근이다.

소문항 (ii)

$(*)$를 c^2으로 나누면, 근을 하나씩 더한 합과 두 개씩 곱해 더한 합은

$$\sum t_i = \frac{2a}{c}, \qquad \sum_{i<j} t_i t_j = \frac{a^2+b^2-r^2}{c^2}.$$

이다. $\left(\sum t_i\right)^2 = \sum t_i^2 + 2\sum_{i<j} t_i t_j$를 이용하면

$$\sum_{i=1}^{4} t_i^2 = \frac{4a^2}{c^2} - \frac{2(a^2+b^2-r^2)}{c^2} = \frac{2}{c^2}\left(a^2-b^2+r^2\right),$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

? **생각해 보기** 복잡하게 통분하지 않고 $\sum 1/t_i^2$을 구하려면 어떻게 해야 할까?

$(*)$에 $u = 1/t$를 넣는다. 상수항이 $c^2 \neq 0$이므로 0인 근은 없고, 따라서 $(*)$를 t^4으로 나눌 수 있다.

$$c^2 - 2acu + (a^2+b^2-r^2)u^2 - 2bcu^3 + c^2u^4 = 0,$$

즉 $c^2u^4 - 2bcu^3 + (a^2+b^2-r^2)u^2 - 2acu + c^2 = 0$이다. 이 방정식의 근은 $1/t_i$들이다. 이것은 $(*)$에서 a와 b를 맞바꾼 것이므로 같은 계산으로

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{t_i^2} = \frac{2}{c^2}\left(b^2-a^2+r^2\right).$$

을 얻는다.

소문항 (iii)

점 P_i는 $(ct_i,\, c/t_i)$이므로 $OP_i^2 = c^2t_i^2 + \dfrac{c^2}{t_i^2}$이다. 이를 모두 더하고 소문항 (ii)를 이용하면

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4} OP_i^2 &= c^2\sum t_i^2 + c^2\sum \frac{1}{t_i^2} \\ &= 2(a^2-b^2+r^2) + 2(b^2-a^2+r^2) \\ &= 4r^2,\end{aligned}$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. 중심 (a, b)가 완전히 사라졌다는 점에 주목하자.

소문항 (iv)

? **생각해 보기** "접한다"는 것은 $(*)$의 근으로 말하면 무슨 뜻일까?

$f(t) = (ct-a)^2 + (c/t-b)^2 - r^2$이라 하자. 이것은 움직이는 점에서 중심까지 거리의 제곱에서 r^2을 뺀 값이다. 곡선이 매개변수 t_0에서 원에 접한다는 것은 $f(t_0) = 0$이고 $f'(t_0) = 0$이라는 뜻이다. 즉 그 점이 원 위에 있고, 일차 근사로 보면 중심까지의 거리가 변하지 않으므로, 그 점에서 곡선의 방향은 반지름에 수직(perpendicular)이며 이는 곧 원의 접선 방향이다. (여기서는 속도 벡터 $(c, -c/t^2)$가 결코 영벡터가 아니라는 사실을 이용한다.) $(*)$의 사차식은 $t^2 f(t)$이고 $t_0 \neq 0$이므로, f가 t_0에서 중근을 가질 필요충분조건은 $(*)$가 t_0에서 중근을 갖는 것이다.

따라서 C_1과 C_2가 매개변수가 $\alpha \neq \beta$인 서로 다른 두 점에서 접한다면, α와 β는 모두 $(*)$의 중근이다. 이것으로 네 근이 모두 정해지므로

$$c^2t^4 - 2act^3 + (a^2+b^2-r^2)t^2 - 2bct + c^2 = c^2(t-\alpha)^2(t-\beta)^2.$$

이다. **근의 곱.** 상수항을 비교하면 $c^2\alpha^2\beta^2 = c^2$이므로 $(\alpha\beta)^2 = 1$이고 $\alpha\beta = \pm 1$이다.

근의 합. t^3의 계수를 비교하면 $2(\alpha+\beta) = \dfrac{2a}{c}$이므로 $\alpha+\beta = \dfrac{a}{c}$이다.

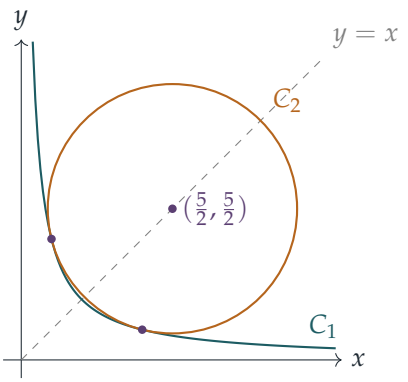
세 근씩 곱한 것의 합. t의 계수를 비교하면 $2\alpha\beta(\alpha+\beta) = \dfrac{2b}{c}$이므로 $\alpha\beta(\alpha+\beta) = \dfrac{b}{c}$이다.

마지막 두 식을 나누면(또는 두 번째 식을 세 번째 식에 대입하면) $b = \alpha\beta\, a$를 얻는다. 따라서

$$\alpha\beta = 1 \implies b = a, \qquad \alpha\beta = -1 \implies b = -a,$$

이므로 중심 (a, b)는 $y = x$ 위에 있거나 $y = -x$ 위에 있다. ($a = 0$이면 $b = 0$이기도 하므로 중심은 원점이고, 원점은 두 직선 위에 모두 있다.)

그림은 $c = 1, \alpha = 2, \beta = \frac{1}{2}$인 경우이다. 계수를 맞추면 $a = b = \frac{5}{2}, r^2 = \frac{17}{4}$이고, 원은 쌍곡선(hyperbola)에 $(2, \frac{1}{2})$과 $(\frac{1}{2}, 2)$에서 접한다.



검산

- 소문항 (iii)에서 $c = 1, r^2 > 2$로 두고 원점이 중심인 원 $x^2 + y^2 = r^2$을 생각하자. 대칭성에 의해 네 점은 $(p, q), (q, p), (-p, -q), (-q, -p)$이고 각각 원점에서 거리가 r이므로, 합은 실제로 $4r^2$이다.
- 그림의 예에서 $(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$와 $(2, \frac{1}{2})$ 사이 거리의 제곱은 $\frac{1}{4} + 4 = \frac{17}{4} = 4.25$로, 마땅히 그래야 하는 값이다. 그 점에서 반지름 방향 $(-\frac{1}{2}, -2)$는 곡선의 방향 $(1, -\frac{1}{4})$에 수직이므로 접한다는 것이 확인된다.
- 소문항 (ii)의 공식은 무작위로 고른 수천 개의 원에 대해 사차방정식을 수치적으로 풀어 컴퓨터로 확인하였다.

흔한 실수

- $\sum t_i t_j$의 부호를 틀리는 것. $t^4 + pt^3 + qt^2 + \ldots$에서 근의 합은 $-p$이지만 두 근씩 곱한 것의 합은 $+q$이다.
- 소문항 (iv)에서 근의 곱만 이용하는 것. 그러면 $\alpha\beta = \pm 1$을 얻지만, 이것만으로는 (a, b)에 대해 아무것도 알 수 없다. a와 b를 끌어들이려면 계수를 한 번 더 비교해야 한다.
- "접한다"는 것이 왜 중근을 주는지 설명하지 않는 것. 그 이유는 $t_0 \neq 0$과 함께 조건 $f(t_0) = f'(t_0) = 0$이 성립하기 때문이다.

STEP 너머

근과 계수 사이의 관계는 기본 대칭함수(elementary symmetric functions)이다. 고전적인 정리에 따르면 $\sum t_i^2$이나 $\sum t_i^{-2}$처럼 근에 대한 **모든** 대칭다항식(symmetric polynomial)은 계수로 나타낼 수 있다. 역수를 취하는 요령 $u = 1/t$는 사영기하(projective geometry)의 생각을 처음 엿보게 해 주며, 원뿔곡선(conic)과 원이 많아야 네 점에서 만난다는 사실은 평면곡선의 교점에 관한 베주(Bézout)의 정리의 특수한 경우이다. 다항식과 그 근에 대해 더 알고 싶다면 Allenby, *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)를, 이런 유형의 문제를 연습하고 싶다면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)를 보라.

풀이

STEP III 2022, 문제 2

순수수학 • 무한 강하법

STEP III 2022, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

이 문제는 *Beyond STEP*의 1.5 절 **무한 강하법**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch01/infinite-descent.html

핵심 아이디어

이것은 페르마(Fermat)의 **무한 강하법**(*method of infinite descent*)이다. 0이 아닌 정수해가 존재한다고 가정하자. 나누어떨어짐(divisibility)에 관한 논증으로 모든 변수가 공약수를 가진다는 것을 보인다. 이 공약수로 나누면, 절댓값이 엄밀하게 더 작은 0이 아닌 정수로 이루어진 같은 꼴(또는 아주 가까운 꼴)의 새로운 해를 얻는다. 양의 정수는 한없이 작아질 수 없으므로 이런 과정이 끝없이 계속될 수는 없다. 각 소문항에서 할 일은 살펴볼 알맞은 소수(prime)(2 또는 3)를 찾고, 새로운 해가 정말로 원래 해와 같은 꼴인지 확인하는 것이다.

풀이

풀이 전체에서 다음 두 가지 사실을 사용한다. 소수 m이 x^k를 나누면 m은 x를 나눈다. 또 x가 $m \geq 2$의 0이 아닌 배수이면, x/m은 $|x/m| < |x|$인 0이 아닌 정수이다.

소문항 (i)

a, b, c가 0이 아닌 정수이고 $a^3 + 2b^3 + 4c^3 = 0$이라고 가정하자. 그러면

$$a^3 = -2\left(b^3 + 2c^3\right)$$

은 짝수이다. 홀수의 세제곱은 홀수이므로 a는 짝수이다. $a = 2p$라 하자. 그러면 p는 $|p| = \frac{1}{2}|a| < |a|$인 0이 아닌 정수이다. 대입하면

$$8p^3 + 2b^3 + 4c^3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 4p^3 + b^3 + 2c^3 = 0.$$

이것이 첫 번째 주장이다.

이제 새로운 방정식에 같은 논증을 반복한다. 그러면 $b^3 = -2\left(2p^3 + c^3\right)$이므로 b는 짝수이고, $b = 2q$라 하면

$$4p^3 + 8q^3 + 2c^3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2p^3 + 4q^3 + c^3 = 0.$$

한 번 더 하면 $c^3 = -2\left(p^3 + 2q^3\right)$이므로 $c = 2r$이고,

$$2p^3 + 4q^3 + 8r^3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad p^3 + 2q^3 + 4r^3 = 0.$$

여기서 $p = a/2$, $q = b/2$, $r = c/2$는 $|p| < |a|$, $|q| < |b|$, $|r| < |c|$인 0이 아닌 정수이므로, 요구한 대로이다.

> **생각해 보기** 이것이 왜 단지 "또 다른 해"가 있다는 뜻이 아니라 해가 전혀 없다는 뜻이 되는가?

0이 아닌 정수해가 존재한다고 가정하자. 그 모든 해 가운데 $|a|$가 가장 작은 것을 하나 고른다. 공집합이 아닌 양의 정수의 집합은 언제나 최소 원소를 가지므로 이렇게 고를 수 있다. 그러면 위의 논증으로 $|p| < |a|$인 0이 아닌 정수해 (p, q, r)를 또 얻게 되는데, 이는 $|a|$의 최소성에 모순이다. 따라서 그러한 정수 a, b, c는 존재하지 않는다. (같은 말이지만, 이 과정을 계속하면 양의 정수로 이루어진 엄밀하게 감소하는 무한 수열 $|a| > |a/2| > |a/4| > \cdots$를 얻게 되는데, 이는 불가능하다.)

소문항 (ii)

이번에 사용할 소수는 3이다. a, b, c가 0이 아닌 정수이고 $9a^3 + 10b^3 + 6c^3 = 0$이라고 가정하자.

- $10b^3 = -3\left(3a^3 + 2c^3\right)$이므로 3은 $10b^3$을 나눈다. 3은 10을 나누지 않으므로 b^3을 나누고, 따라서 b를 나눈다. $b = 3q$라 하자. 그러면 $9a^3 + 270q^3 + 6c^3 = 0$, 즉

$$3a^3 + 90q^3 + 2c^3 = 0.$$

- 이제 $2c^3 = -3\left(a^3 + 30q^3\right)$이므로 $3 \mid c$이다. $c = 3r$이라 하면 $3a^3 + 90q^3 + 54r^3 = 0$, 즉

$$a^3 + 30q^3 + 18r^3 = 0.$$

▶ 마지막으로 $a^3 = -3\left(10q^3 + 6r^3\right)$이므로 $3 \mid a$이다. $a = 3p$라 하면 $27p^3 + 30q^3 + 18r^3 = 0$, 즉

$$9p^3 + 10q^3 + 6r^3 = 0.$$

따라서 $(p, q, r) = (a/3, b/3, c/3)$는 같은 방정식의 0이 아닌 정수해이고 $|p| < |a|$이다. 소문항 (i)에서처럼 $|a|$가 최소인 해를 고르면 모순이 생기므로, 0이 아닌 정수해는 없다.

소문항 (iii)

3의 배수가 아닌 정수는 어떤 정수 n에 대하여 $3n \pm 1$ 꼴로 쓸 수 있다. 그러면

$$(3n \pm 1)^2 = 9n^2 \pm 6n + 1 = 3\left(3n^2 \pm 2n\right) + 1,$$

이므로 이 값은 3의 배수보다 1 크다. 반면 3의 배수의 제곱은 3의 배수(사실은 9의 배수)이다.

따라서 모든 제곱수는 3으로 나눈 나머지가 0 또는 1이고, 나머지가 0인 것은 원래 수가 3의 배수일 때뿐이다. $x^2 + y^2$의 나머지로 가능한 것은

$$0 + 0 = 0, \qquad 0 + 1 = 1, \qquad 1 + 1 = 2.$$

이다. 따라서 $x^2 + y^2$이 3의 배수가 되는 것은 두 나머지가 모두 0일 때, 즉 x와 y가 모두 3의 배수일 때뿐이다.

이제 a, b, c가 0이 아닌 정수이고 $a^2 + b^2 = 3c^2$이라고 가정하자. 우변은 3의 배수이므로, 방금 증명한 결과에 의해 $a = 3p$, $b = 3q$이다. 그러면

$$9p^2 + 9q^2 = 3c^2 \quad \Longrightarrow \quad c^2 = 3\left(p^2 + q^2\right).$$

따라서 c^2은 3의 배수이다. 첫 번째 결과에 의해 c도 3의 배수여야 한다. 그렇지 않다면 c^2은 3의 배수보다 1 클 것이기 때문이다. $c = 3r$이라 하면

$$9r^2 = 3\left(p^2 + q^2\right) \quad \Longrightarrow \quad p^2 + q^2 = 3r^2.$$

이것은 같은 방정식의 0이 아닌 정수해이고 $|p| < |a|$이다. $|a|$가 최소인 해를 고르면 앞에서와 같은 모순이 생기므로, 0이 아닌 해는 존재하지 않는다.

소문항 (iv)

여기서는 4를 법(modulo)으로 하여 생각한다. 짝수 $2m$의 제곱은 $4m^2 \equiv 0$이고, 홀수 $2m + 1$의 제곱은 $4m^2 + 4m + 1 \equiv 1 \pmod 4$이다. 따라서 세 제곱수의 합을 4로 나눈 나머지는 세 수 가운데 홀수의 개수(0, 1, 2 또는 3)와 같다. 이 합이 4의 배수가 되는 것은 세 수가 모두 짝수일 때뿐이다.

생각해 보기 $a^2+b^2+c^2=4abc$에서 모든 것을 절반으로 줄이면 같은 방정식이 다시 나오는가?

그렇지 않다. $a=2p$, $b=2q$, $c=2r$이면 방정식은 $4(p^2+q^2+r^2)=32pqr$, 즉 $p^2+q^2+r^2=8pqr$이 된다. 계수가 두 배가 되었다. 그래서 절반으로 줄여도 **유지되는** 더 강한 명제를 증명한다.

주장. 어떤 정수 $k\geq 2$에 대해서도 $a^2+b^2+c^2=2^kabc$를 만족하는 0이 아닌 정수는 존재하지 않는다.

그런 정수가 존재한다고 가정하자. ($k\geq 2$인 모든 k에 대한) 그러한 해 전체 가운데 $|a|$가 가장 작은 것을 하나 고른다. $k\geq 2$이므로 우변 2^kabc는 4의 배수이다. 따라서 $a^2+b^2+c^2$은 4의 배수이고, 위의 관찰에 의해 a, b, c는 모두 짝수이다. 즉 $a=2p$, $b=2q$, $c=2r$이다. 그러면

$$4\left(p^2+q^2+r^2\right)=2^k\cdot 8pqr \quad\Longrightarrow\quad p^2+q^2+r^2=2^{k+1}\,pqr.$$

이것은 지수가 $k+1\geq 2$이고 $|p|<|a|$인 0이 아닌 정수해이므로, a의 선택에 모순이다. 따라서 주장이 성립한다. $k=2$인 경우로부터 $a^2+b^2+c^2=4abc$를 만족하는 0이 아닌 정수 a,b,c는 존재하지 않음을 알 수 있다.

검산

- $|a|,|b|,|c|\leq 40$인 0이 아닌 모든 a,b,c에 대하여 컴퓨터로 탐색한 결과, 네 방정식 가운데 어느 것의 해도, $2\leq k\leq 6$에 대한 $a^2+b^2+c^2=2^kabc$의 해도 찾지 못했다.
- 소문항 (iv)의 논증이 통하는 것은 계수에 들어 있는 2의 거듭제곱 덕분이다. 이런 꼴의 방정식 가운데 해가 **있는** 것도 있다. 예를 들어 $1^2+1^2+1^2=3\cdot 1\cdot 1\cdot 1$이고 $3^2+3^2+3^2=1\cdot 3\cdot 3\cdot 3$이다. 이 경우에는 계수가 홀수이므로 mod 4 논증이 파고들 여지가 없다.
- 아깝게 빗나가는 예에 강하법을 적용해 보자. $(a,b,c)=(1,1,1)$은 $a^2+b^2=3c^2$을 만족하지 않는데, $1+1=2$가 3의 배수가 아니기 때문이다. 이것이 바로 소문항 (iii)의 "$1+1=2$" 경우이다.

흔한 실수

- 강하법이 왜 모순을 낳는지 설명하지 않는 것. "더 작은 해를 얻는다"는 말은 최소인 해(또는 양의 정수는 한없이 작아질 수 없다는 사실)를 끌어들이기 전에는 증명이 아니다.

- 소문항 (iv)에서 절반으로 줄인 뒤 방정식이 바뀌지 않는다고 주장하는 것. 방정식은 바뀐다. 계수가 두 배가 되며, 바로 그 때문에 명제를 강화해야 한다.
- 이유 없이 "$3 \mid c^2$이므로 $3 \mid c$"라고 쓰는 것. 여기서 그 이유는 소문항 (iii)의 첫 번째 결과이다(더 일반적으로는 3이 소수이기 때문이다).

STEP 너머

페르마는 무한 강하법으로 $x^4 + y^4 = z^2$이 양의 정수해를 갖지 않음을 증명했고, 이로써 페르마의 마지막 정리(Last Theorem)의 $n = 4$인 경우를 해결했다. 여기서 각각의 강하법은 변수들이 모두 어떤 알맞은 소수로 나누어떨어지지는 않는 해가, 그 소수의 적당한 거듭제곱을 법으로 하여 존재하지 않음을 보이는 것과 같다. 이것은 p진수(p-adic numbers)와 현대 정수론의 국소–대역(local–global) 아이디어로 나아가는 첫걸음이다. 유명한 방정식 $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$(마르코프 방정식(Markov equation))는 아름다운 나무 구조로 생성되는 무한히 많은 해를 가진다. 대븐포트(Davenport)의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 강하법, 합동식, 제곱수의 합을 꼭 이 수준에서 다룬다.

풀이

STEP III 2022, 문제 3

순수수학 • 음함수 미분법

> **STEP III 2022, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

핵심 아이디어

음함수 미분(implicit differentiation)을 한다. 정류점(stationary point)에서는 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$의 분자(numerator)가 0이 되어야 하며, 이로부터 y를 x로 나타낼 수 있다(또는 둘 사이의 일차관계식을 얻는다). 이것을 곡선의 방정식에 다시 대입하면 x에 관한 방정식 하나만 남고, 문제는 결국 이 방정식이 언제 서로 다른 두 실근(real root)을 갖는가로 바뀐다. (i)에서는 이 방정식이 모습을 바꾼 이차방정식(quadratic)이고, (ii)에서는 사차방정식(quartic)이며, 그 근의 개수를 세는 방법은 극점(turning point)을 찾는 것이다.

풀이

소문항 (i)

$ax^2 + bxy + cy^2 = 1$을 x에 대하여 음함수 미분하면

$$2ax + by + (bx + 2cy)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0.$$

정류점에서는 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$이므로 $2ax + by = 0$, 즉 $y = -\frac{2a}{b}x$이다($abc \neq 0$이므로 b로 나눌 수 있다). 이를 곡선의 방정식에 대입하면

$$ax^2 - 2ax^2 + \frac{4a^2c}{b^2}x^2 = 1$$
$$\frac{a(4ac - b^2)}{b^2}x^2 = 1.$$

$4ac - b^2 \leq 0$이면 모든 x에 대하여 좌변이 ≤ 0이므로($a > 0$임을 떠올리자) 정류점은 하나도 없다. 따라서 곡선이 두 정류점을 가지면 $4ac - b^2 > 0$, 즉 $b^2 < 4ac$이어야 하며, 이것이

보이려던 것이다. (역으로 $b^2 < 4ac$이면 $x = \pm|b|/\sqrt{a(4ac - b^2)}$를 얻으므로 정확히 두 점이 생긴다.)

> **생각해 보기** 이 점들에서 $bx + 2cy$도 0이 되어, 도함수가 실제로는 정의되지 않을 수도 있지 않을까?

$2ax + by = 0$과 $bx + 2cy = 0$이 동시에 성립한다면, 행렬식(determinant) $4ac - b^2$이 0이 아니므로 해는 $x = y = 0$뿐이고, 이 점은 곡선 위에 있지 않다. 따라서 두 점에서는 실제로 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$이다.

소문항 (ii)

$ay^3 + bx^2y + cx = 1$을 음함수 미분하면

$$(3ay^2 + bx^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2bxy + c = 0.$$

따라서 정류점에서는 $2bxy + c = 0$이다. $c \neq 0$이므로 $x \neq 0$이고, 따라서 $y = -\dfrac{c}{2bx}$이다. 이를 곡선의 방정식에 대입하면

$$-\frac{ac^3}{8b^3x^3} - \frac{cx}{2} + cx = 1, \qquad \text{즉} \qquad -\frac{ac^3}{8b^3x^3} + \frac{cx}{2} = 1.$$

양변에 $8b^3x^3$을 곱하고 정리하면

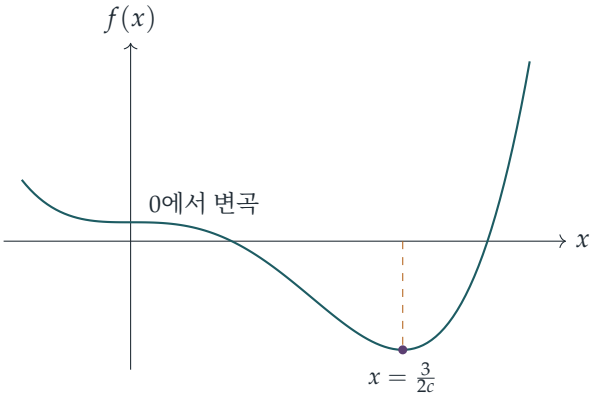
$$4cb^3x^4 - 8b^3x^3 - ac^3 = 0,$$

이고, 이것이 구하려던 방정식이다.

좌변을 $f(x)$라 하자. $y = -c/(2bx)$는 x에 의해 정해지므로, 각 정류점의 x좌표는 서로 다르다. 따라서 정류점이 두 개라는 것은 f가 서로 다른 실근을 적어도 두 개 갖는다는 뜻이다. f의 근의 개수를 세기 위해 도함수를 살펴보자.

$$f'(x) = 16cb^3x^3 - 24b^3x^2 = 8b^3x^2(2cx - 3).$$

인수 x^2은 부호가 바뀌지 않으므로 f'은 $x = \frac{3}{2c}$에서만 부호가 바뀐다. $c > 0$이라 하자. 그러면 최고차항 계수(leading coefficient) $4cb^3$은 양수이고($b > 0$이므로), f는 $x < \frac{3}{2c}$에서 순감소(strictly decreasing)하고 $x > \frac{3}{2c}$에서 순증가한다. 점 $x = 0$은 정류 변곡점(stationary point of inflection)일 뿐이다. 따라서 f는 $\frac{3}{2c}$의 양쪽에 각각 많아야 하나의 근을 가지며, 서로 다른 두 근을 가질 필요충분조건은 최솟값이 음수인 것이다. $c < 0$이면 모든 것이 반대가 된다. f는 증가하다가 감소하며, 서로 다른 두 근을 가질 필요충분조건은 최댓값이 양수인 것이다. 두 경우 모두 조건은 $c\,f\left(\frac{3}{2c}\right) < 0$이다.



$a = -1, b = c = 1$인 경우: $f(x) = 4x^4 - 8x^3 + 1$은 극점을 하나만 가지며, 그것은 $x = \frac{3}{2}$에서의 극소이고, 실근은 두 개이다.

이제 극점에서의 값을 계산하자.

$$\begin{aligned} f\left(\tfrac{3}{2c}\right) &= 4cb^3 \cdot \frac{81}{16c^4} - 8b^3 \cdot \frac{27}{8c^3} - ac^3 \\ &= \frac{81b^3}{4c^3} - \frac{108b^3}{4c^3} - ac^3 = -\frac{27b^3 + 4ac^6}{4c^3}. \end{aligned}$$

따라서

$$c\, f\left(\tfrac{3}{2c}\right) = -\frac{4ac^6 + 27b^3}{4c^2},$$

이고, 이 값은 정확히 $4ac^6 + 27b^3 > 0$일 때 음수이다. 그러므로 곡선이 두 정류점을 가지면 $4ac^6 + 27b^3 > 0$이다.

소문항 (iii)

둘째와 셋째 방정식은 $2bxy + c$와 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$의 계수 $3ay^2 + bx^2$이 모두 0이라는 뜻이므로, 이 점은 (ii)의 방법이 통하지 않는 곡선 위의 점이다. $c \neq 0$이므로 둘째 방정식에서 $x \neq 0$이고 $y = -\frac{c}{2bx}$이다. 처음 두 방정식은 (ii)에서 사용한 것과 똑같으므로 x는 다음을 만족한다.

$$4cb^3x^4 - 8b^3x^3 - ac^3 = 0. \qquad (*)$$

$y = -c/(2bx)$를 셋째 방정식에 대입하면

$$\frac{3ac^2}{4b^2x^2} + bx^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 4b^3x^4 = -3ac^2.$$

여기에 c를 곱하면 $(*)$의 첫째 항은 $-3ac^3$이 되므로, $(*)$는 다음과 같이 된다.

$$-3ac^3 - 8b^3x^3 - ac^3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^3 = -\frac{ac^3}{2b^3}.$$

$x^4 = -\dfrac{3ac^2}{4b^3}$을 이것으로 나누면($x \neq 0$이므로 가능하다)

$$x = \frac{-3ac^2/(4b^3)}{-ac^3/(2b^3)} = \frac{3}{2c}.$$

즉 해는 정확히 (ii)에서 본 f의 극점에 놓인다. $x = \frac{3}{2c}$를 $x^3 = -\frac{ac^3}{2b^3}$에 다시 대입하면

$$\frac{27}{8c^3} = -\frac{ac^3}{2b^3} \quad \Longrightarrow \quad 54b^3 = -8ac^6 \quad \Longrightarrow \quad 4ac^6 + 27b^3 = 0,$$

이 되어 증명이 끝난다. (같은 말이지만, (ii)의 공식에 의해 $f\left(\frac{3}{2c}\right) = 0$이다.) 이것은 (ii)의 경계인 경우이다. 사차방정식의 두 근이 극점에서 하나로 합쳐져 중근(repeated root)이 되고, 곡선은 그곳에서 두 정류점 대신 특이점(singular point)을 갖는다.

검산

- (i)에서 $a = c = 1$, $b = 1$로 놓으면 곡선 $x^2 + xy + y^2 = 1$은 타원(ellipse)이고 $b^2 = 1 < 4$이다. 정류점은 $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, $y = \mp\frac{2}{\sqrt{3}}$이며, 실제로 곡선 위에 있다.
- (ii)에서 $a = -1$, $b = c = 1$이면 $4ac^6 + 27b^3 = 23 > 0$이고, f의 최솟값은 $f(\frac{3}{2}) = -5.75 = -\frac{23}{4}$로 $-\frac{27b^3+4ac^6}{4c^3}$과 일치한다.
- (iii)에서 $a = -2$, $c = 1.3$으로 정하고 b를 $27b^3 = -4ac^6$이 되도록 잡으면, $x = \frac{3}{2c}$, $y = -\frac{c}{2bx}$는 반올림 오차 범위 안에서 세 방정식을 모두 만족한다. 무작위로 뽑은 수천 개의 (a, b, c)에 대한 컴퓨터 검사에서도 정류점의 개수가 (i)과 (ii)의 조건과 일치함을 확인했다.

흔한 실수

- $x = 0$이 사차식의 임계점(critical point)이라는 사실을 잊는 것. 이 점은 극점이 아니라 변곡점이며, 이 점을 밝혀야 근이 많아야 두 개라는 결론을 내릴 수 있다.
- c의 부호를 빠뜨리는 것. 극점이 극소가 되는 것은 $c > 0$일 때뿐이다. 조건을 $c\,f(\frac{3}{2c}) < 0$으로 쓰면 두 경우를 한꺼번에 다룰 수 있다.
- (i)에서 $b^2 = 4ac$인 경우 $0 = 1$이 되므로 이때도 정류점이 없다는 점을 언급하지 않는 것.

STEP 너머

양 $4ac^6 + 27b^3$은 상수배를 제외하면 이 사차식의 **판별식**(*discriminant*)이다. 이차식에서 $b^2 - 4ac$가 그렇듯이(그리고 삼차식 $t^3 + pt + q$에서 $4p^3 + 27q^2$가 그렇듯이), 이 값은 사

차식이 중근을 가질 때 정확히 0이 된다. 소문항 (iii)은 그 기하학적 의미를 보여 준다. 중근은 곡선의 **특이점**에 대응하며, 특이점에서는 $ay^3 + bx^2y + cx$의 두 편도함수(partial derivative)가 동시에 0이 된다. 특이점과 판별식은 대수기하학(algebraic geometry)의 출발점이다. 다항식과 곡선에 관련된 아이디어를 부드럽고 시각적으로 소개하는 책으로는 Needham, *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)를, 이런 유형의 문제를 더 풀어 보고 싶다면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)를 권한다.

풀이

STEP III 2022, 문제 4

순수수학 • 무한곱

> **STEP III 2022, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

이 문제는 *Beyond STEP*의 2.5 절 **비에트의 곱**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch02/viete.html

핵심 아이디어

모든 것은 배각 공식(double-angle formula) $\sinh 2\theta = 2\sinh\theta\cosh\theta$를 거듭 적용하는 데서 출발한다. 공식을 한 번 쓸 때마다 sinh의 인수가 절반이 되고 cosh 인수가 하나 남는다. n번 반으로 나누고 나면 남은 $\sinh(x/2^n)$은 아주 작아서 $x/2^n$과 거의 같게 행동하므로, $n\to\infty$로 보내면 유한한 항등식이 무한곱(infinite product)으로 바뀐다. 마지막 두 소문항은 이 곱에 잘 고른 x 값을 대입한 것과, 그 삼각함수판 쌍둥이를 다룬다.

풀이

소문항 (i)

$P_n(x) = \cosh\left(\frac{x}{2}\right)\cosh\left(\frac{x}{4}\right)\cdots\cosh\left(\frac{x}{2^n}\right)$라 하자. 모든 양의 정수 n에 대하여 $\sinh x = 2^n P_n(x)\sinh\left(\frac{x}{2^n}\right)$임을 증명한다.

$n=1$인 경우. $\theta = x/2$로 두고 배각 공식을 쓰면 $\sinh x = 2\cosh\left(\frac{x}{2}\right)\sinh\left(\frac{x}{2}\right)$이고, 이것이 $n=1$일 때의 명제이다.

귀납 단계(*inductive step*). 어떤 $n=k$에 대하여 결과가 성립한다고 가정하자. $\theta = x/2^{k+1}$로 두고 배각 공식을 쓰면

$$\sinh\left(\frac{x}{2^k}\right) = 2\cosh\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\sinh\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right),$$

이므로

$$\begin{aligned}\sinh x &= 2^k P_k(x)\sinh\left(\frac{x}{2^k}\right) = 2^k P_k(x)\cdot 2\cosh\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\sinh\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\\ &= 2^{k+1}P_{k+1}(x)\sinh\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right),\end{aligned}$$

이고, 이것은 $n = k+1$일 때의 결과이다. 수학적 귀납법(induction)에 의하여 모든 양의 정수 n에 대하여 성립한다.

따름 결과. $x \neq 0$이면 $x/2^n \neq 0$이므로 $\sinh(x/2^n) \neq 0$이다(sinh의 영점은 0뿐이다). 따라서 항등식을 $x\sinh(x/2^n)/2^n$으로 나눌 수 있고, 그러면

$$\frac{\sinh x}{x}\cdot\frac{x/2^n}{\sinh(x/2^n)} = P_n(x),$$

를 얻는다. 이것이 구하는 결과이다.

소문항 (ii)

$y \neq 0$일 때 매클로린 급수(Maclaurin series)를 y로 나누면

$$\frac{\sinh y}{y} = 1 + \frac{y^2}{3!} + \frac{y^4}{5!} + \cdots = 1 + y^2\sum_{r=1}^{\infty}\frac{y^{2r-2}}{(2r+1)!}.$$

? 생각해 보기 "첫째 항 이후의 모든 항이 0으로 간다"고 말하는 것으로 충분할까?

충분하지 않다. 항이 무한히 많으므로 그 합을 위에서 눌러 주어야 한다. $0 < |y| \leq 1$이면 $y^{2r-2} \leq 1$이므로

$$0 \leq \frac{\sinh y}{y} - 1 \leq y^2\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{(2r+1)!} = y^2(\sinh 1 - 1),$$

이고, 우변은 $y \to 0$일 때 0으로 수렴한다. 따라서 $\dfrac{\sinh y}{y} \to 1$이고, 역수를 취하면 $\dfrac{y}{\sinh y} \to 1$이다.

이제 $x \neq 0$을 고정하고 (i)의 항등식에서 $n \to \infty$로 보내자. $y = x/2^n$으로 두면 $y \to 0$이므로 인수 $\dfrac{x/2^n}{\sinh(x/2^n)}$은 1로 수렴한다. 따라서 좌변은 $\dfrac{\sinh x}{x}$로 수렴하고, 우변은 부분곱(partial product) $P_n(x)$이다. 그러므로 부분곱은 $\dfrac{\sinh x}{x}$로 수렴하며, 이것이 바로 다음 명제이다.

$$\frac{\sinh x}{x} = \cosh\left(\frac{x}{2}\right)\cosh\left(\frac{x}{4}\right)\cdots\cosh\left(\frac{x}{2^n}\right)\cdots.$$

소문항 (iii)

$x = \ln 2$이면 $e^{x/2^n} = 2^{1/2^n}$이므로, 분모와 분자에 $2^{1/2^n}$을 곱하면

$$\cosh\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{2^{1/2^n} + 2^{-1/2^n}}{2} = \frac{2^{2/2^n} + 1}{2 \times 2^{1/2^n}} = \frac{1 + 2^{1/2^{n-1}}}{2 \times 2^{1/2^n}},$$

이다. $n = 1$이면 $\cosh\left(\frac{x}{2}\right) = \dfrac{1+2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{3}{2\sqrt{2}}$이고, $n = 2$이면

$$\cosh\left(\frac{x}{4}\right) = \frac{1 + 2^{1/2}}{2 \times 2^{1/4}},$$

이다. 이것이 구하는 결과이다.

(ii)의 좌변에서 $\sinh(\ln 2) = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$이므로 $\dfrac{\sinh x}{x} = \dfrac{3}{4\ln 2}$이다.

우변에서 처음 N개 인수의 부분곱은

$$P_N(\ln 2) = \frac{\prod_{n=1}^{N}\left(1 + 2^{1/2^{n-1}}\right)}{2^N \cdot 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^N}}} = \frac{3}{2} \cdot \prod_{k=1}^{N-1} \frac{1 + 2^{1/2^k}}{2} \cdot \frac{1}{2^{1-1/2^N}},$$

이다. 여기서 $n = 1$인 인수 $(1+2)/2$를 따로 떼어 내고, $k = n - 1$로 첨자를 다시 매기고, 지수에 있는 등비급수(geometric series)를 합했다. $N \to \infty$일 때 $2^{1-1/2^N} \to 2$이고, (ii)에 의하여 $P_N(\ln 2) \to \dfrac{3}{4\ln 2}$이다. 따라서 부분곱 $\prod_{k=1}^{N-1} \frac{1+2^{1/2^k}}{2}$는 수렴하고

$$\frac{3}{4\ln 2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 + 2^{1/2^k}}{2},$$

이며, $\frac{3}{4}$를 약분하면

$$\frac{1}{\ln 2} = \frac{1 + 2^{\frac{1}{2}}}{2} \times \frac{1 + 2^{\frac{1}{4}}}{2} \times \frac{1 + 2^{\frac{1}{8}}}{2} \times \cdots.$$

소문항 (iv)

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$가 같은 꼴이므로, sin과 cos에 대해서도 똑같은 논증이 한 글자도 바꾸지 않고 통한다. 귀납법으로

$$\sin x = 2^n \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdots \cos\left(\frac{x}{2^n}\right) \sin\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

을 얻는다. $0 < x < \pi$이면 $0 < x/2^n < \pi$이므로 $\sin(x/2^n) \neq 0$이고, 앞에서처럼 나눌 수 있다. 매클로린 급수 $\sin y = y - \frac{y^3}{3!} + \cdots$에서 $0 < |y| \leq 1$일 때

$$\left|\frac{\sin y}{y} - 1\right| \leq y^2 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(2r+1)!} = y^2(\sinh 1 - 1) \to 0,$$

이므로 $\sin y/y \to 1$이고, $n \to \infty$로 보내면

$$\frac{\sin x}{x} = \cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{8}\right)\cdots.$$

(다른 방법으로, $\cosh(it) = \cos t$와 $\sinh(it) = i\sin t$를 이용하여 (ii)에 $x = it$를 대입할 수도 있다. 하지만 (ii)의 급수 논증은 실수 y에 대한 것이었으므로, 직접 다시 하는 편이 더 깔끔하다.)

$x = \frac{\pi}{2}$로 두자. 좌변은 $\dfrac{1}{\pi/2} = \dfrac{2}{\pi}$이고, 인수들은 $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right), \cos\left(\frac{\pi}{8}\right), \cos\left(\frac{\pi}{16}\right)$ 등이다.

생각해 보기 $\cos(\pi/8)$, $\cos(\pi/16)$, ...를 어떻게 중첩 제곱근(nested square root)으로 바꿀 수 있을까?

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$을 $2\cos\theta = \sqrt{2+2\cos 2\theta}$의 꼴로 쓴다. 여기서 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이면 $\cos\theta > 0$이므로 양의 제곱근을 택한다. $c_n = 2\cos\left(\pi/2^{n+1}\right)$이라 하자. 그러면 $c_1 = 2\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$이고, $\theta = \pi/2^{n+2}$로 두면

$$c_{n+1} = \sqrt{2 + c_n}.$$

이다. 따라서 $c_1 = \sqrt{2}$, $c_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$, $c_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ 등이고, 곱의 n번째 인수는 $c_n/2$이다. 그러므로

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \times \cdots,$$

이고, 이것이 1593년의 비에트(Viète) 공식이다.

검산

- (i)에서 $n = 1$, $x = 2\theta$로 두면 배각 공식이 그대로 나온다. 당연히 그래야 한다.
- (iii)에서 $\cosh(\frac{1}{2}\ln 2) = \frac{3}{2\sqrt{2}} \approx 1.0607$이고, 일반적인 n에 대한 공식은 $n = 1$일 때 이 값과 일치한다.
- 수치적으로 (iii)의 곱은 빠르게 안정된다. 처음 60개 인수를 곱하면 1.442695…가 되어 $1/\ln 2 = 1.4426950\ldots$와 일치하고, (iv)의 곱은 0.6366197…가 되어 $2/\pi$와 일치한다. 두 값 모두 컴퓨터로 유효숫자 약 15자리까지 확인했다.

흔한 실수

- $x \neq 0$이므로 $\sinh(x/2^n)$이 0이 아니라는 점을 언급하지 않고 그것으로 나누는 것.
- (iii)에서 첨자를 하나씩 밀려 세는 실수. $n = 1$인 인수는 $3/(2\sqrt{2})$로, $(1 + 2^{1/2^k})/2$ 꼴이 아니다. 또 남는 거듭제곱 $2^{1/2} \cdot 2^{1/4} \cdots$를 모으면 1이 아니라 2라는 인수가 된다.
- 문제가 요구하는 급수를 이용한 논증 없이 "$y/\sinh y \to 1$"을 그냥 가정하는 것.

STEP 너머

무한급수가 부분합의 극한으로 정의되듯이, 무한곱 $\prod a_n$은 부분곱의 극한으로 정의된다. 로그를 취하면 하나가 다른 하나로 바뀌므로, $\prod(1+u_n)$의 수렴은 $\sum u_n$의 수렴과 밀접하게 연결되어 있다. 여기서 얻은 $\sin x/x$의 곱 공식은 오일러(Euler)의 더 유명한 곱 공식 $\sin x = x\prod_{k\geq 1}\left(1-x^2/(k^2\pi^2)\right)$과 나란히 놓이며, 이 공식에서 $\sum 1/k^2 = \pi^2/6$이 나온다. (ii)와 같은 논증을 엄밀하게 만드는 극한의 세심한 다루기에 대해서는 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 읽어 보라.

풀이

STEP III 2022, 문제 5

순수수학 • 대칭성을 이용한 정적분

> **STEP III 2022, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

핵심 아이디어

대칭 구간 $[-a, a]$에서는 치환(substitution) $x \mapsto -x$를 이용해 적분을 $[0, a]$ 위로 접어 넣을 수 있고, 이때 x에서의 값과 $-x$에서의 값이 짝을 이룬다. $1/(1+\text{무언가})$ 꼴의 피적분함수(integrand)에 대해서는 짝 $\frac{1}{1+p} + \frac{1}{1+q}$가 정확히 $pq = 1$일 때에만 1로 깔끔하게 줄어들며, $\mathrm{e}^{x} \cdot \mathrm{e}^{-x} = 1$이 그 전형적인 예이다. 이 문제의 핵심은 이러한 짝짓기를 알아차리고, 나아가 그것이 답이 a가 되는 **유일한** 방법이 되는 때가 언제인지를 아는 데 있다.

풀이

소문항 (i)

$I = \displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{x}}\,\mathrm{d}x$라 하자. $x = -u$로 치환하면($\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$이고, 적분 구간의 위끝과 아래끝이 다시 뒤바뀐다),

$$I = \int_{-a}^{a} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-u}}\,\mathrm{d}u = \int_{-a}^{a} \frac{\mathrm{e}^{u}}{\mathrm{e}^{u}+1}\,\mathrm{d}u,$$

이다. 여기서 마지막 등호는 분자와 분모에 e^{u}를 곱하여 얻는다. 이것을 원래 꼴의 I와 더하면

$$2I = \int_{-a}^{a} \frac{1+\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{x}}\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{a} 1\,\mathrm{d}x = 2a,$$

이므로, 모든 $a \geq 0$에 대하여 $I = a$이다. 이로써 요구된 결과가 증명된다.

소문항 (ii)

설명. $a \geq 0$에 대하여 $G(a) = \displaystyle\int_{0}^{a} g(x)\,\mathrm{d}x$로 정의하자. g가 연속(continuous)이므로, 미적분학의 기본정리(fundamental theorem of calculus)에 의해 G는 미분가

능(differentiable)하고 $G'(a) = g(a)$이다($a = 0$에서는 한쪽 도함수(one-sided derivative)). 그런데 G는 $[0,\infty)$에서 항등적으로 0이므로, 그곳에서 도함수도 0이다. 따라서 모든 $a \geq 0$에 대하여 $g(a) = 0$이다. (연속성이 중요하다. 연속성이 없으면 g는 어떤 적분값에도 영향을 주지 않으면서 고립된 점들에서 0이 아닌 값을 가질 수 있다.)

적분 접기. 0에서 구간을 나누고 왼쪽 절반에 $x = -u$를 대입하면

$$\int_{-a}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{f}(x)} = \int_{0}^{a} \frac{\mathrm{d}u}{1+\mathrm{f}(-u)}.$$

이다. $a = \int_0^a 1\,\mathrm{d}x$로 쓰면

$$\int_{-a}^{a} \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{f}(x)} - a = \int_{0}^{a} g(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{여기서} \quad g(x) = \frac{1}{1+\mathrm{f}(x)} + \frac{1}{1+\mathrm{f}(-x)} - 1.$$

을 얻는다. $\mathrm{f} \geq 0$이므로 두 분모는 모두 1 이상이고, 따라서 g는 연속이다.

> **생각해 보기** 방금 설명한 결과는 한 방향의 명제이다. 이것은 "필요충분(if and only if)" 조건의 어느 방향을 주며, 다른 방향은 어디에서 오는가?

- 모든 $x \geq 0$에 대하여 $g(x) = 0$이면 $\int_0^a g = 0$이고, 따라서 모든 $a \geq 0$에 대하여 적분값은 a이다. 이 방향은 바로 나온다.
- 역으로, 모든 $a \geq 0$에 대하여 적분값이 a이면 모든 $a \geq 0$에 대하여 $\int_0^a g = 0$이고, 첫 번째 문단의 결과를(이 연속함수 g에 적용하면) 모든 $x \geq 0$에 대하여 $g(x) = 0$을 얻는다.

따라서 적분 조건은 모든 $x \geq 0$에 대하여 $g(x) = 0$일 때, 그리고 그때에만 성립한다.

곱 조건. $p = \mathrm{f}(x)$, $q = \mathrm{f}(-x)$라 하자. 양변에 $(1+p)(1+q) > 0$을 곱하면

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+p} + \frac{1}{1+q} = 1 &\iff (1+q) + (1+p) = (1+p)(1+q) \\ &\iff 2 + p + q = 1 + p + q + pq \\ &\iff pq = 1. \end{aligned}$$

이다. 그러므로 모든 $x \geq 0$에 대하여 $g(x) = 0$인 것은 모든 $x \geq 0$에 대하여 $\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(-x) = 1$인 것과 동치이다. 마지막으로, 식 $\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(-x)$는 x를 $-x$로 바꾸어도 변하지 않으므로, 이 식이 모든 $x \geq 0$에 대하여 1인 것은 모든 실수 x에 대하여 1인 것과 정확히 같다. 이로써 동치 관계의 사슬이 완성된다.

소문항 (iii)

앞에서와 똑같이 적분을 접되, 이번에는 왼쪽 절반에서 $\mathrm{h}(-u)=\mathrm{h}(u)$를 이용한다.

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a}\frac{\mathrm{h}(x)}{1+\mathrm{f}(x)}\,\mathrm{d}x &= \int_{0}^{a}\frac{\mathrm{h}(x)}{1+\mathrm{f}(x)}\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{a}\frac{\mathrm{h}(-u)}{1+\mathrm{f}(-u)}\,\mathrm{d}u\\ &= \int_{0}^{a}\mathrm{h}(x)\left(\frac{1}{1+\mathrm{f}(x)}+\frac{1}{1+\mathrm{f}(-x)}\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_{0}^{a}\mathrm{h}(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

소문항 (ii)에서 보인 동치 관계에 의해 $\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(-x)=1$이면 괄호 안의 값이 1이기 때문이다. ($\mathrm{f}\geq 0$이라는 조건과 연속성 조건은 단지 모든 피적분함수가 연속이 되도록 해 줄 뿐이다.)

소문항 (iv)

? **생각해 보기** $\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\cosh x}$를 어떻게 $\dfrac{\text{상수}}{1+\mathrm{f}(x)}$ 꼴로 쓸 수 있을까?

$\cosh x=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x})$이므로, 분자와 분모에 e^{x}를 곱하면

$$\frac{\mathrm{e}^{-x}\cos x}{\cosh x}=\frac{2\mathrm{e}^{-x}\cos x}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}=\frac{2\cos x}{1+\mathrm{e}^{2x}},$$

이다. $\mathrm{f}(x)=\mathrm{e}^{2x}$로 두면, 이 함수는 연속이고 양수이며 $\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(-x)=\mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{-2x}=1$을 만족한다. 또 $\mathrm{h}(x)=2\cos x$로 두면, 이 함수는 연속인 우함수(even function)이다. $a=\frac{1}{2}\pi$로 두고 소문항 (iii)을 적용하면

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\mathrm{e}^{-x}\cos x}{\cosh x}\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi}2\cos x\,\mathrm{d}x=\Big[2\sin x\Big]_{0}^{\frac{1}{2}\pi}=2.$$

을 얻는다.

검산

- 소문항 (i)은 소문항 (iii)에서 $\mathrm{f}(x)=\mathrm{e}^{x}$, $\mathrm{h}\equiv 1$인 특수한 경우이며, 예상대로 $\int_{0}^{a}1\,\mathrm{d}x=a$를 준다.
- 반례: $\mathrm{f}(x)=x^{2}$은 $\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(-x)=x^{4}\neq 1$이고, 실제로 $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^{2}}=\frac{\pi}{2}\neq 1$이다.
- 소문항 (iv)의 적분을 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 수치 계산하면 2.0000000이 나온다. 또한 소문항 (iii)의 항등식은 $\mathrm{f}=\mathrm{e}^{(\text{기함수})}$와 우함수 h를 무작위로 여러 번 골라 컴퓨터로도 확인하였다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)에서 "필요충분" 조건의 한 방향만 증명하는 것: 적분 조건에서 거꾸로 $g = 0$을 이끌어 내는 단계가 바로 첫 번째 결과(그리고 g의 연속성)가 필요한 곳이다.
- $x \geq 0$에서 $\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(-x) = 1$이면 왜 모든 x에서 성립하는지 설명하지 않는 것: 이 식은 $x \mapsto -x$에 대하여 대칭이다.
- 소문항 (iv)에서 $\mathrm{e}^{-x}\cos x / \cosh x$를 $2\cos x/(1+\mathrm{e}^{2x})$로 고쳐 쓰지 않고 직접 적분하려 하는 것.

STEP 너머

소문항 (ii)의 논증은 미적분학의 기본정리를 "거꾸로" 사용한 것이며, 해석학(analysis)에서 연속성 가정이 그토록 자주 등장하는 이유이기도 하다. 적분은 개별 점에서 일어나는 일을 볼 수 없으므로, 오직 연속성이 있어야만 적분으로부터 함수의 값을 되찾을 수 있다. 적분을 접는 기법은 함수를 우함수 부분과 기함수(odd function) 부분으로 나누는 것과 가까운 사촌이다. 여기서 $\frac{1}{1+\mathrm{f}(x)} - \frac{1}{2}$는 정확히 $\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(-x) = 1$일 때 기함수가 된다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 기본정리와 연속성이 필요한 이유를 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP III 2022, 문제 6

순수수학 • 굴러가는 원과 접선

STEP III 2022, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

핵심 아이디어

소문항 (i)은 2차 테일러 전개(Taylor expansion)이며, 진짜 요점은 마지막 줄의 경고에 있다. 1차 항이 사라지면 비는 2차 항에 의해 결정된다. 소문항 (ii)에서 구름 조건은 두 원에서 같은 길이의 호가 접점을 지나간다는 뜻이고, 이로부터 C_1이 얼마나 회전했는지 알 수 있다. (c)의 특별한 점에서는 현(chord)의 1차 항이 정확히 상쇄되므로 (i)의 2차 항이 필요하다.

풀이

소문항 (i)

α가 작을 때 $\cos\alpha \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$이고 $\sin\alpha \approx \alpha$이며, 오차는 α^3 차수이다. 따라서

$$\begin{aligned}\cos(\theta+\alpha) - \cos\theta &= \cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha - \cos\theta \\ &\approx \cos\theta\left(1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2\right) - \alpha\sin\theta - \cos\theta = -\alpha\sin\theta - \tfrac{1}{2}\alpha^2\cos\theta,\end{aligned}$$

이고, 이것이 요구된 결과이다. 같은 방법으로

$$\sin(\theta+\alpha) - \sin\theta \approx \alpha\cos\theta - \tfrac{1}{2}\alpha^2\sin\theta.$$

$(*)$의 분자와 분모를 α로 나누면

$$\frac{\sin(\theta+\alpha)-\sin\theta}{\cos(\theta+\alpha)-\cos\theta} \approx \frac{\cos\theta - \frac{1}{2}\alpha\sin\theta}{-\sin\theta - \frac{1}{2}\alpha\cos\theta} \longrightarrow -\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = -\cot\theta,$$

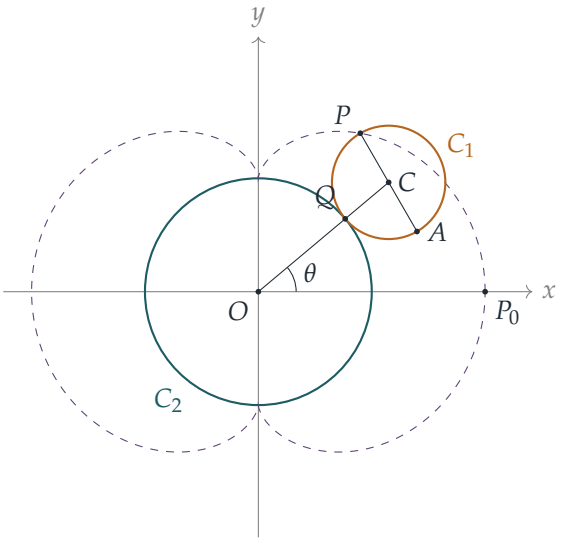
이고, 분모가 $-\sin\theta \neq 0$으로 가므로 이 극한(limit)은 문제없다.

$\sin\theta = 0$이면 $\cos\theta = \pm 1$이고, 분모의 1차 항이 사라진다.

$$(*) \approx \frac{\alpha\cos\theta}{-\frac{1}{2}\alpha^2\cos\theta} = -\frac{2}{\alpha}.$$

따라서 $(*)$는 유한한 극한을 갖지 않는다. 그 크기는 한없이 커져서 $\alpha \to 0^+$일 때 $-\infty$로, $\alpha \to 0^-$일 때 $+\infty$로 간다. (기하학적으로는 단위원에서 각 θ인 점과 각 $\theta+\alpha$인 점을 잇는 현이 수직이 되어 그 기울기(gradient)가 발산하는 것이다.)

소문항 (ii)(a)



그림은 $n=3$인 경우이며, 점선 곡선이 P의 자취이다. C를 C_1의 중심이라 하자. 두 원이 Q에서 접하므로 세 점 O, Q, C는 한 직선 위에 있고 $OC = (n-1)a + a = na$이다. 따라서

$$\overrightarrow{OC} = na(\cos\theta, \sin\theta),$$

이고, C에서 본 점 Q의 방향은 $\theta+\pi$이다.

A를 C_1 위에서 P의 지름 반대편에 있는 점이라 하자. 이 점은 처음에 $((n-1)a, 0)$에서 C_2와 접하고 있던 C_1 위의 점이다. 미끄러짐 없이 구른다(rolling without slipping)는 것은 A에서 Q까지의 C_1의 호의 길이가 접점이 이동한 C_2의 호의 길이, 즉 $(n-1)a\theta$와 같다는 뜻이다. C_1의 반지름이 a이므로 각 ACQ는 $(n-1)\theta$이다.

> **생각해 보기** C에서 볼 때 A는 Q로부터 시계 방향에 있는가, 시계 반대 방향에 있는가?

C_2의 바깥을 시계 반대 방향으로 구르면 원 C_1은 시계 반대 방향으로 회전하므로, 이미 굴러 지나간 점들은 접점에서 시계 반대 방향으로 멀어진다. 따라서 $\overrightarrow{CA}$의 방향은 $\theta + \pi + (n-1)\theta = n\theta + \pi$이고, $\overrightarrow{CP} = -\overrightarrow{CA}$의 방향은 $n\theta$이다. (검산: $\theta = 0$이면 $P = ((n+1)a, 0)$이 된다. 결국 C_1은 모두 $n\theta$만큼 회전한 것이며, 이것이 동전 하나를 다른

동전 둘레로 굴릴 때 잘 알려진 "한 바퀴 더 도는" 현상이다.) 그러므로

$$\overrightarrow{OP} = na(\cos\theta, \sin\theta) + a(\cos n\theta, \sin n\theta),$$

이므로 요구된 대로 $x(\theta) = a(n\cos\theta + \cos n\theta)$이고,

$$y(\theta) = a(n\sin\theta + \sin n\theta).$$

소문항 (ii)(b)

제곱하여 더하면

$$OP^2 = a^2\big(n^2 + 1 + 2n(\cos\theta\cos n\theta + \sin\theta\sin n\theta)\big) = a^2\big(n^2 + 1 + 2n\cos(n-1)\theta\big).$$

이것을 $(n-1)^2a^2 = (n^2 - 2n + 1)a^2$과 같다고 놓으면 $2n\cos(n-1)\theta = -2n$, 즉 $\cos(n-1)\theta = -1$이다. 따라서

$$\theta = \frac{(2k+1)\pi}{n-1}, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

이고, C_2를 한 바퀴 도는 동안 서로 다른 위치가 $n-1$개 나온다. 이때는 P 자신이 접점이 되는 순간이며, 곡선의 첨점(cusp)에 해당한다.

소문항 (ii)(c)

$\theta_0 = \pi/(n-1)$이면 $n\theta_0 = \theta_0 + \pi$이므로

$$\cos n\theta_0 = -\cos\theta_0, \qquad \sin n\theta_0 = -\sin\theta_0.$$

각 항에 소문항 (i)을 적용하되, $n\theta$ 항에 대해서는 작은 증분으로 $n\alpha$를 사용한다.

$$\begin{aligned}
\frac{y(\theta_0+\alpha) - y(\theta_0)}{a} &\approx n\big(\alpha\cos\theta_0 - \tfrac{1}{2}\alpha^2\sin\theta_0\big) \\
&\quad + \big(n\alpha\cos n\theta_0 - \tfrac{1}{2}n^2\alpha^2\sin n\theta_0\big) \\
&= n\alpha\cos\theta_0 - \tfrac{1}{2}n\alpha^2\sin\theta_0 - n\alpha\cos\theta_0 + \tfrac{1}{2}n^2\alpha^2\sin\theta_0 \\
&= \tfrac{1}{2}n(n-1)\alpha^2\sin\theta_0, \\
\frac{x(\theta_0+\alpha) - x(\theta_0)}{a} &\approx n\big(-\alpha\sin\theta_0 - \tfrac{1}{2}\alpha^2\cos\theta_0\big) \\
&\quad + \big(-n\alpha\sin n\theta_0 - \tfrac{1}{2}n^2\alpha^2\cos n\theta_0\big) \\
&= \tfrac{1}{2}n(n-1)\alpha^2\cos\theta_0,
\end{aligned}$$

이고, 각각의 오차는 α^3 차수이다. (i)의 $\sin\theta = 0$인 경우와 마찬가지로 1차 항이 정확히 상쇄되므로 2차 항이 답을 결정한다. 분자와 분모를 $\frac{1}{2}n(n-1)\alpha^2$으로 나누면

$$\frac{y(\theta_0+\alpha) - y(\theta_0)}{x(\theta_0+\alpha) - x(\theta_0)} = \frac{\sin\theta_0 + O(\alpha)}{\cos\theta_0 + O(\alpha)} \longrightarrow \tan\theta_0,$$

이다. 단, $\cos\theta_0 \neq 0$이어야 하며, 이는 $n \geq 4$일 때 성립한다. $n = 3$이면 $\theta_0 = \frac{1}{2}\pi$이고, 같은 계산으로 역수의 비가 $\cot\theta_0 = 0$으로 감을 알 수 있으므로 현은 수직이 된다.

이 극한은 현의 기울기의 극한이므로 θ_0에서의 접선(tangent)의 기울기이다. 한편

$$x(\theta_0) = a(n\cos\theta_0 - \cos\theta_0) = (n-1)a\cos\theta_0, \qquad y(\theta_0) = (n-1)a\sin\theta_0,$$

이므로 OP는 x축과 각 θ_0를 이루고 기울기가 $\tan\theta_0$이다($n = 3$일 때는 수직이다). 접선과 OP의 방향이 같으므로 $(x(\theta_0), y(\theta_0))$에서의 접선은 OP와 평행하다. 사실 접선은 P를 지나므로 직선 OP 위에 놓인다.

검산

- $\theta = 0, \alpha = 0.001$일 때 비 $(*)$는 -1999.9998이며, $-2/\alpha = -2000$과 비교된다.
- $n = 5, \theta_0 = \frac{1}{4}\pi, \alpha = 10^{-4}$일 때 현의 기울기는 1.0004로, $\tan\frac{1}{4}\pi = 1$에 가깝다.
- θ_0에서 $OP = (n-1)a$이므로 (c)의 점은 (b)에서 구한 $k = 0$인 첨점이다. 그래서 그 점에서의 접선이 반지름 방향이다.

흔한 실수

- C_1의 회전각을 (굴러간 호에 해당하는) $(n-1)\theta$로 잡고, C가 O 둘레를 돌면서 생기는 추가 θ를 빠뜨리는 것.
- (c)에서 1차 근사만 사용하는 것: 그러면 $0/0$이 나와 아무것도 알 수 없다.
- $n = 3$이면 $\theta_0 = \frac{1}{2}\pi$가 되어 $\tan\theta_0$가 정의되지 않는다는 것을 잊는 것.

STEP 너머

이 곡선은 첨점이 $n-1$개인 에피사이클로이드(epicycloid)이다. 각 첨점에서 속도 $(x'(\theta), y'(\theta))$가 영이므로 일반적인 공식 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = y'/x'$을 쓸 수 없다. 소문항 (c)는 2차까지 전개하여 이 문제를 처리하는데, 이는 사실상 로피탈의 정리(l'Hôpital's rule)를 변형한 것이다. 매개변수로 나타낸 곡선에서 속도가 영인 점을 특이점(singular point)이라 하며, 곡선의 미분기하학(differential geometry)을 처음 배우는 과정에서 다룬다. 소문항 (i)의 바탕이 되는 극한과 테일러 근사에 대해서는 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 참고하라.

풀이

STEP III 2022, 문제 7

순수수학 • 벡터곱 변환

STEP III 2022, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

이 문제는 *Beyond STEP*의 7.5 절 3차원에서의 회전에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch07/rotations-3d.html

핵심 아이디어

모든 것은 벡터를 $\mathbf{n}$ 방향의 성분과 $\mathbf{n}$에 수직(perpendicular)인 성분으로 나누는 데서 출발한다. 사상(map) $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{n} \times \mathbf{r}$는 평행한 성분은 없애고, 수직인 성분은 길이를 바꾸지 않은 채 $\mathbf{n}$을 축으로 직각만큼 돌린다. 소문항 (i)에서 이 사상을 두 번 적용하면 수직 성분에 음의 부호를 붙인 것이 된다는 것을 보이고 나면, (ii)와 (iii)의 사상이 두 성분 각각에 어떤 작용을 하는지 살펴보는 것만으로 그 정체를 바로 알 수 있다.

풀이

소문항 (i)

$\mathbf{n} = (a, b, c)^{\mathsf{T}}$, $\mathbf{r} = (x, y, z)^{\mathsf{T}}$라 하면

$$\mathrm{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{n} \times \mathbf{r} = \begin{pmatrix} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{pmatrix}.$$

f를 한 번 더 적용하면, $\mathbf{n} \times \mathrm{f}(\mathbf{r})$의 x성분은 $\mathrm{f}(\mathbf{r})$의 셋째 성분의 b배에서 둘째 성분의 c배를 뺀 것이다.

$$\begin{aligned} b(ay - bx) - c(cx - az) &= aby - b^2x - c^2x + acz \\ &= -x(b^2 + c^2) + aby + acz, \end{aligned}$$

따라서 요구된 식이 성립한다. $\mathbf{n}$은 단위벡터(unit vector)이므로 $b^2 + c^2 = 1 - a^2$이고, 따라서 이 식은 다음과 같이 된다.

$$-x + a^2x + aby + acz = a(ax + by + cz) - x = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\, a - x.$$

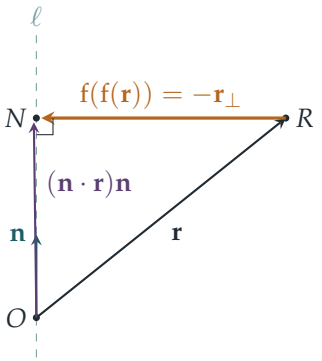
이것은 $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n} - \mathbf{r}$의 x성분이다. 외적(cross product)은 $a \to b \to c \to a, x \to y \to z \to x$와 같이 문자를 순환적으로 바꾸어 붙여도 변하지 않으므로, y성분과 z성분도 같은 방법으로 얻어진다. 따라서

$$\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r})) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n} - \mathbf{r}.$$

기하학적 의미. $\mathbf{r} = \mathbf{r}_\parallel + \mathbf{r}_\perp$로 쓰자. 여기서 $\mathbf{r}_\parallel = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n}$은 $\mathbf{n}$ 방향의 성분이고, $\mathbf{r}_\perp = \mathbf{r} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n}$은 $\mathbf{n}$에 수직인 성분이다. 그러면

$$\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r})) = -\mathbf{r}_\perp.$$

ℓ을 O를 지나고 방향이 $\mathbf{n}$인 직선이라 하고, N을 R에서 ℓ에 내린 수선의 발이라 하면 $\overrightarrow{ON} = \mathbf{r}_\parallel$이다. 그러면 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r})) = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{RN}$이다. 즉 이것은 R에서 축 ℓ을 향해 그 축과 직각을 이루며 곧장 가는 벡터이다. 그 길이는 R와 ℓ 사이의 거리이다.



소문항 (ii)

축. $\mathbf{n} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$이므로 $\mathrm{f}(\mathbf{n}) = \mathbf{0}$이고, 따라서 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{n})) = \mathbf{0}$이다. 그러므로 $\mathrm{g}(\mathbf{n}) = \mathbf{n}$이다. 선형성(linearity)에 의해 $\mathrm{g}(\lambda\mathbf{n}) = \lambda\mathbf{n}$이므로, 직선 ℓ 위의 모든 점은 고정된다.

수직인 벡터. 이제 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = 0$인 $\mathbf{r}$를 잡자. 소문항 (i)에 의해 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r})) = -\mathbf{r}$이므로

$$\mathrm{g}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} + \sin\theta\,(\mathbf{n} \times \mathbf{r}) - (1 - \cos\theta)\mathbf{r} = \cos\theta\,\mathbf{r} + \sin\theta\,(\mathbf{n} \times \mathbf{r}).$$

? **생각해 보기** $\mathbf{r} \perp \mathbf{n}$일 때 $\mathbf{n} \times \mathbf{r}$는 어떤 모양인가?

이 벡터는 $\mathbf{n}$과 $\mathbf{r}$ 모두에 수직이므로, O를 지나고 $\mathbf{n}$에 수직인 평면 위에 있으며 $\mathbf{r}$와 직각을 이룬다. 그 길이는 $|\mathbf{n}||\mathbf{r}| \sin 90^\circ = |\mathbf{r}|$이다. 따라서 $\mathbf{r}$와 $\mathbf{n} \times \mathbf{r}$는 그 평면 위에서 서로 수직이

고 길이가 같은 두 벡터이며, $\mathbf{n}\times\mathbf{r}$는 $\mathbf{r}$를 $\mathbf{n}$을 축으로 오른손 방향으로 $90°$만큼 돌린 것이다 ($\mathbf{n}$의 끝점에서 O 쪽을 내려다볼 때 시계 반대 방향). $\cos\theta\,\mathbf{i}+\sin\theta\,\mathbf{j}$가 $\mathbf{i}$를 $\mathbf{j}$ 쪽으로 θ만큼 회전한 것과 꼭 마찬가지로, 벡터 $\cos\theta\,\mathbf{r}+\sin\theta\,(\mathbf{n}\times\mathbf{r})$는 $\mathbf{r}$를 $\mathbf{n}$을 축으로 같은 방향으로 θ만큼 회전한 것이다.

일반적인 벡터. f는 선형(linear)이므로(외적은 둘째 인자에 대해 선형이다) g도 선형이다. 일반적인 $\mathbf{r}$를 $\mathbf{r}_\parallel+\mathbf{r}_\perp$로 쓰면, g는 $\mathbf{r}_\parallel$은 그대로 두고 $\mathbf{r}_\perp$는 $\mathbf{n}$을 축으로 θ만큼 회전시킨다. 이것이 바로 ℓ을 축으로 하는 회전이 하는 일이다.

그러므로 $R\mapsto P$는 **O를 지나고 방향이 $\mathbf{n}$인 직선을 축으로 하는 각 θ만큼의 회전(rotation)**이며, 회전 방향은 $\mathbf{n}$에 대한 오른손 방향 ($\mathbf{n}$의 끝점에서 O 쪽을 바라볼 때 시계 반대 방향)이다.

소문항 (iii)

소문항 (i)을 이용하면

$$\mathrm{h}(\mathbf{r})=-\mathbf{r}-2\big((\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}-\mathbf{r}\big)=\mathbf{r}-2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}.$$

두 성분으로 나타내면 $\mathrm{h}(\mathbf{r})=\mathbf{r}_\perp-\mathbf{r}_\parallel$이다.

- $\mathrm{h}(\mathbf{n})=\mathbf{n}-2\mathbf{n}=-\mathbf{n}$이므로, $\mathbf{n}$ 방향의 성분은 방향이 반대로 바뀐다.
- $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}=0$이면 $\mathrm{h}(\mathbf{r})=\mathbf{r}$이므로, 평면 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}=0$ 위의 모든 점은 고정된다.

기하학적으로, $\overrightarrow{RQ}=-2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}$은 평면 $\Pi:\ \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}=0$에 수직이고, RQ의 중점의 위치벡터는 $\mathbf{r}-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}$으로 Π 위에 있다. 따라서 Q는 R의 거울상이다. 즉 사상 $R\mapsto Q$는 **O를 지나고 $\mathbf{n}$에 수직인 평면에 대한 반사(reflection)**이다.

검산

- $\mathbf{n}=\mathbf{k}=(0,0,1)^{\mathsf T}$로 잡자. 그러면 $\mathbf{n}\times\mathbf{r}=(-y,x,0)^{\mathsf T}$이고, 두 번 적용하면 $(-x,-y,0)^{\mathsf T}$가 되어 $(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}-\mathbf{r}=(0,0,z)^{\mathsf T}-(x,y,z)^{\mathsf T}$와 일치한다. 또 $\mathrm{g}(\mathbf{r})=(x\cos\theta-y\sin\theta,\ x\sin\theta+y\cos\theta,\ z)^{\mathsf T}$는 익숙한 z축에 대한 회전이고, $\mathrm{h}(\mathbf{r})=(x,y,-z)^{\mathsf T}$는 평면 $z=0$에 대한 반사이다.
- $\theta=0$이면 $\mathrm{g}(\mathbf{r})=\mathbf{r}$이고, h를 두 번 적용하면 항등사상이 된다. 각이 0인 회전과 반사라면 마땅히 그래야 한다.
- 무작위 단위벡터 $\mathbf{n}$, 벡터 $\mathbf{r}$, 각 θ를 2000개 골라 컴퓨터로 확인한 결과, x성분 공식, $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r}))$에 대한 항등식, g가 $\mathbf{n}$을 축으로 하는 오른손 방향의 θ만큼의 회전과 일치한다는 것, h가 평면 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}=0$에 대한 반사와 일치한다는 것이 모두 확인되었다.

흔한 실수

- $a^2 + b^2 + c^2 = 1$을 사용하는 것을 잊는 실수. 단위벡터가 아닌 $\mathbf{n}$에 대해서는 (i)의 항등식이 성립하지 않는다.
- (ii)에서 $\mathbf{r} \perp \mathbf{n}$인 경우만 확인하고, 그 결과와 $g(\mathbf{n}) = \mathbf{n}$ 및 선형성을 합치면 왜 모든 $\mathbf{r}$에 대해 결론이 나는지 설명하지 않는 실수.
- (iii)을 **직선** ℓ에 대한 반사라고 부르는 실수. ℓ 위의 점들은 고정되는 것이 아니라 방향이 뒤집힌다. 고정되는 것은 $\mathbf{n}$에 수직인 평면이다.

STEP 너머

(ii)의 공식은 로드리게스(Rodrigues)의 회전 공식이고, f의 행렬은 반대칭(antisymmetric)인 "외적 행렬(cross-product matrix)" K이다. 따라서 회전은 $I + \sin\theta\, K + (1 - \cos\theta)K^2$이며, 이는 $\exp(\theta K)$이기도 하다. (iii)의 사상은 하우스홀더(Householder) 반사 $I - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathsf{T}}$로, 수치선형대수에서 두루 쓰이는 핵심 도구이다. 대학 1학년 과정에서 이들은 각각 행렬식(determinant)이 $+1$과 -1인 직교행렬(orthogonal matrix)로 등장한다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 이들을 살펴보기에 좋은 책이다.

풀이

STEP III 2022, 문제 8

순수수학 • 드무아브르 정리와 무리성

> **STEP III 2022, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

이 문제는 *Beyond STEP*의 5.5 절 **유리수처럼 보이지만 아닌 각**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch05/rational-angles.html

핵심 아이디어

드무아브르(De Moivre)의 정리에서 $\cos\theta$를 묶어 내면, $\sin k\theta$와 $\cos k\theta$를 $\cos^k\theta$(또는 $\sin\theta\cos^{k-1}\theta$)와 $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$에 대한 다항식(polynomial)의 곱으로 나타낼 수 있다. $\sec^2\theta - 1$이 **짝수**이면, 이 다항식의 값은 정수이고 그 홀짝성(parity)은 첫째 항만 보고 알 수 있다. 도(degree) 단위로 잰 각이 유리수(rational)라면 어떤 $\sin k\theta$가 0이 되어야 하는데, 홀짝성 논증은 이런 일이 결코 일어날 수 없음을 보여 준다.

풀이

소문항 (i)

$\cos\theta \neq 0$이라 가정하여 $\sec\theta$가 존재하도록 한다. 드무아브르의 정리에 의해

$$\cos k\theta + \mathrm{i}\sin k\theta = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^k = \cos^k\theta\,(1+\mathrm{i}t)^k, \qquad t = \tan\theta.$$

이항전개(binomial expansion)하면 $(1+\mathrm{i}t)^k = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\mathrm{i}^j t^j$이다. j가 홀수인 항은 허수이고 $\mathrm{i}^{2r+1} = (-1)^r\mathrm{i}$이며, j가 짝수인 항은 실수이고 $\mathrm{i}^{2r} = (-1)^r$이다. 허수부분(imaginary

part)을 비교하면

$$\begin{aligned}\sin k\theta &= \cos^k\theta\left(\binom{k}{1}t - \binom{k}{3}t^3 + \binom{k}{5}t^5 - \cdots\right)\\ &= \cos^k\theta\,\tan\theta\left(k - \binom{k}{3}t^2 + \binom{k}{5}t^4 - \cdots\right).\end{aligned}$$

$\cos^k\theta\tan\theta = \sin\theta\cos^{k-1}\theta$이고 $t^2 = \tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$이므로 이 식은

$$\sin k\theta = \sin\theta\cos^{k-1}\theta\left(k - \binom{k}{3}(\sec^2\theta - 1) + \binom{k}{5}(\sec^2\theta - 1)^2 - \cdots\right),$$

이 되고, 이것이 구하는 식이다. $j > k$이면 $\binom{k}{j} = 0$이므로 괄호 안의 식은 저절로 끝난다. 같은 방법으로 실수부분을 비교하면

$$\cos k\theta = \cos^k\theta\left(1 - \binom{k}{2}(\sec^2\theta - 1) + \binom{k}{4}(\sec^2\theta - 1)^2 - \cdots\right).$$

소문항 (ii)

여기서 $\cos\theta = 1/a$이고 $a \geq 3$이므로 $0^\circ < \theta < 90^\circ$이다. 특히 $\sin\theta \neq 0$이고 $\cos\theta \neq 0$이다. 또한 $\sec^2\theta - 1 = a^2 - 1$인데, a가 홀수이므로 이는 **짝수**인 정수이다. $X = a^2 - 1$이라 하자.

$\sin k\theta = 0$을 만족하는 가장 작은 양의 정수를 k라 하자. 그러면 $k \neq 1$인데, 이는 $\sin\theta \neq 0$이기 때문이다. 따라서 $k > 1$이므로 소문항 (i)의 결과를 적용할 수 있다.

$$0 = \sin k\theta = \sin\theta\cos^{k-1}\theta\left(k - \binom{k}{3}X + \binom{k}{5}X^2 - \cdots\right).$$

인수 $\sin\theta\cos^{k-1}\theta$는 0이 아니므로 괄호 안의 식이 0이다. 첫째 항을 제외한 모든 항은 짝수인 정수 X를 적어도 하나 인수로 가지고, 이항계수(binomial coefficient)는 정수이므로

$$0 = k - \binom{k}{3}X + \binom{k}{5}X^2 - \cdots \equiv k \pmod 2.$$

따라서 k는 짝수이다. 이제

$$0 = \sin k\theta = 2\sin\left(\tfrac{1}{2}k\theta\right)\cos\left(\tfrac{1}{2}k\theta\right).$$

그런데 $\frac{1}{2}k$는 $0 < \frac{1}{2}k < k$인 정수이므로, k의 최소성(minimality)에 의해 $\sin(\frac{1}{2}k\theta) \neq 0$이다. 그러므로 $\cos(\frac{1}{2}k\theta) = 0$이고, 이것이 보이려던 것이다.

생각해 보기 θ가 유리수라는 가정은 어디에서 쓰이는가?

애초에 k가 존재하게 해 주는 것이 바로 이 가정이다. p, q가 양의 정수일 때 $\theta = p/q$라 하자(θ는 도 단위로 잰다는 것을 기억하자). 그러면 $180q\,\theta = 180p$이므로 $\sin(180q\,\theta) = 0$이다. 따라서 $\sin m\theta = 0$을 만족하는 양의 정수 m이 **존재하고**, 그러므로 그중 가장 작은 것도

존재한다. 이를 k라 하자. 이 수는 위의 가정을 만족하므로 k는 짝수이고, $n = \frac{1}{2}k$라 하면 $\cos n\theta = 0$이다.

이제 $\cos n\theta$가 0일 수 없음을 보이자. $n = 1$이면 $\cos n\theta = 1/a \neq 0$이다. $n > 1$이면 소문항 (i)의 코사인 공식에 의해

$$\cos n\theta = \frac{1}{a^n}\left(1 - \binom{n}{2}X + \binom{n}{4}X^2 - \cdots\right).$$

이번에도 첫째 항을 제외한 모든 항이 짝수이므로 괄호 안의 식은 홀수이고, 특히 0이 아니다. 따라서 $\cos n\theta \neq 0$이 되어 모순(contradiction)이다. 그러므로 θ는 무리수(irrational)이다.

소문항 (iii)

이번에는 $\cot\phi = 1/b$이므로 $\tan\phi = b$이고 $b \geq 2$이며, $0^\circ < \phi < 90^\circ$이다. 이번에도 $\sin\phi \neq 0$이고 $\cos\phi \neq 0$이며, 이 경우에는

$$\sec^2\phi - 1 = \tan^2\phi = b^2,$$

인데, b가 짝수이므로 이는 **짝수**인 정수이다. 따라서 $a^2 - 1$ 대신 $X = b^2$로 두면 소문항 (ii)의 논증이 그대로 성립한다. 자세히 쓰면 다음과 같다.

p, q가 양의 정수일 때 $\phi = p/q$라 하자. 그러면 $\sin(180q\,\phi) = 0$이므로 $\sin k\phi = 0$을 만족하는 가장 작은 양의 정수 k가 존재하고, $\sin\phi \neq 0$이므로 $k > 1$이다. $\sin\phi\cos^{k-1}\phi \neq 0$이므로 소문항 (i)에 의해

$$0 = k - \binom{k}{3}b^2 + \binom{k}{5}b^4 - \cdots \equiv k \pmod 2,$$

이고, 따라서 k는 짝수이다. 그러면 $0 = \sin k\phi = 2\sin(\frac{1}{2}k\phi)\cos(\frac{1}{2}k\phi)$이고, 최소성에 의해 $\sin(\frac{1}{2}k\phi) \neq 0$이므로 $n = \frac{1}{2}k$라 할 때 $\cos n\phi = 0$이다. $n = 1$이면 이는 $\cos\phi = 0$이라는 뜻인데, 이는 거짓이다. $n > 1$이면

$$\cos n\phi = \cos^n\phi\left(1 - \binom{n}{2}b^2 + \binom{n}{4}b^4 - \cdots\right),$$

이고, 여기서 $\cos^n\phi \neq 0$이며 괄호 안의 식은 홀수이므로 0이 아니다. 이 모순으로부터 ϕ는 무리수이다.

검산

- 소문항 (i)에 $k = 2$와 $k = 3$을 대입해 보자. 공식에서 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$, $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$, $\sin 3\theta = \sin\theta(3\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$를 얻는다. 두 공식은 k가 15 이하일 때 임의로 고른 각에서 직접 계산한 값과도 일치한다.

- 홀짝 조건은 꼭 필요하다. $a = 2$(짝수)이면 $\theta = 60°$이고, $b = 1$(홀수)이면 $\phi = 45°$로, 둘 다 유리수이다. 각 경우 $X = 3$ 또는 1로 홀수이므로, 논증은 정확히 깨져야 할 곳에서 깨진다.
- $a = 3$이면 $\theta \approx 70.5288°$이고, $b = 2$이면 $\phi \approx 63.4349°$이다. 컴퓨터로 확인해 보면, 30 미만의 모든 홀수 a와 짝수 b에 대해 모든 $k < 2000$에서 $\sin k\theta$와 $\sin k\phi$는 0에서 충분히 멀리 떨어져 있다.

흔한 실수

- 약분하기 전에 $\sin\theta\cos^{k-1}\theta \neq 0$인 이유를 밝히지 않는 것.
- k가 어디에서 나오는지 설명하지 않는 것. 최소의 k가 존재하는 것은 오직 유리수 θ가 $\sin(180q\,\theta) = 0$을 만들기 때문이다.
- k의 최소성을 이용해 $\sin(\frac{1}{2}k\theta) = 0$인 경우를 배제하지 않고 $\cos(\frac{1}{2}k\theta) = 0$이라고 결론짓는 것.

STEP 너머

여기 나온 괄호 안의 식은 앞에 곱해진 인수를 제외하면 **체비쇼프 다항식**(Chebyshev polynomials)이고, 홀짝성 기법은 정수 항등식을 소수를 법으로 하여 줄이는(reducing modulo a prime) 방법을 처음 맛보는 것이다. 이와 관련된 유명한 결과로 **니븐의 정리**(Niven's theorem)가 있다. 180°의 유리수 배인 θ 가운데 $\cos\theta$가 유리수인 것은 $\cos\theta \in \{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1\}$인 경우뿐이다. 이 정리는 $2\cos\theta$가 대수적 정수(algebraic integer)임을 보여서 증명한다. 이와 같은 논증의 바탕이 되는 정수론(number theory)을 쌓아 가려면 Davenport의 *The Higher Arithmetic*이 좋은 출발점이다.

풀이

STEP III 2022, 문제 9

역학 • 충돌과 반발계수

> **STEP III 2022, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

핵심 아이디어

이 문제의 충돌은 모두 같은 충돌이다. 움직이는 입자가 k배 무거운 정지한 입자에 부딪힌다. 따라서 (i)의 처음에 구한 인수 α와 β를 B(질량 km)가 C(질량 k^2m)에 부딪히는 (ii)에서 그대로 다시 쓸 수 있다. 그다음부터 "같은 지점에서 만난다"는 조건은 모두 같은 시각을 나타내는 두 식을 서로 같게 놓는 것일 뿐이다. (ii)에서는 k와 e에 대한 방정식 두 개를 얻는데, 그중 하나는 (i)의 조건과 정확히 같다.

풀이

A, B, C를 매끄러운 면 위의 한 직선을 따라 움직이는 입자로 모형화하고, 충돌은 순간적으로 일어난다고 한다. 모든 속도는 A가 처음 움직이는 방향을 양의 방향으로 하여 잰다.

소문항 (i)

첫 번째 충돌. 운동량(momentum)이 보존되고, 뉴턴(Newton)의 반발 법칙(law of restitution)에 따르면 멀어지는 속력은 다가오는 속력의 e배이다.

$$mu = mv_1 + kmv_2, \qquad v_2 - v_1 = eu.$$

$v_1 = v_2 - eu$를 첫 번째 식에 대입하면 $u = v_2 - eu + kv_2$이므로

$$v_2 = \frac{1+e}{k+1}u = \beta u, \qquad v_1 = \frac{1+e}{k+1}u - eu = \frac{1+e-ek-e}{k+1}u = \frac{1-ke}{k+1}u = \alpha u,$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

두 번째 충돌. 첫 번째 충돌 순간부터 시간을 잰다. B는 벽까지의 거리 D를 시간 $D/(\beta u)$ 동안 간다. 벽에서 속력 $e\beta u$로 튀어나오므로, 충돌 지점 쪽으로 $\frac{1}{2}D$를 되돌아오는 데 시간

$D/(2e\beta u)$가 더 걸린다. 두 번째 충돌이 그곳에서 일어난다면 그 시각은

$$T = \frac{D}{\beta u}\left(1 + \frac{1}{2e}\right) = \frac{(2e+1)D}{2e\beta u}.$$

이다. 그 지점은 벽에서 $\frac{1}{2}D$ 떨어져 있으므로, 첫 번째 충돌 지점에서 $\frac{1}{2}D$만큼 **앞쪽**에 있기도 하다. A는 일정한 속도 αu로 움직이므로 $\alpha > 0$이고 $\alpha u T = \frac{1}{2}D$이어야 한다.

$$\alpha \frac{(2e+1)D}{2e\beta} = \frac{D}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha(2e+1) = e\beta.$$

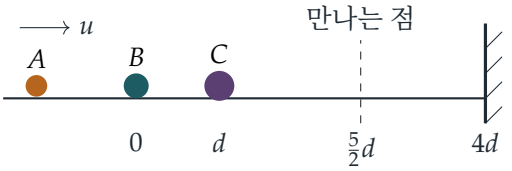
양변에 $k+1$을 곱하면 $(1-ke)(2e+1) = e(1+e)$이므로

$$ke(2e+1) = (2e+1) - e - e^2 = 1 + e - e^2 \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{1+e-e^2}{e(2e+1)},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. 이 값은 실제로 $\alpha > 0$을 만족한다. 이때 $ke = \frac{1+e-e^2}{2e+1}$이고, $e > 0$이면 $1 + e - e^2 < 1 + 2e$이므로 이 값은 1보다 작다.

소문항 (ii)

원점을 B의 처음 위치에 두면 C는 $x = d$에서 출발하고 벽은 $x = 4d$에 있다. 만나야 하는 지점은 벽에서 $\frac{3}{2}d$ 떨어진 $x = \frac{5}{2}d$이다.



A가 B에 부딪히는 순간을 $t = 0$으로 잡는다. 이 충돌은 (i)의 충돌과 정확히 같으므로, 충돌 후 A는 속도 αu로, B는 속도 βu로 움직인다. 여기서 α와 β는 앞에서와 같다.

? 생각해 보기 B가 C에 부딪히면 어떻게 되는가? 충돌 계산을 다시 해야 하는가?

그럴 필요 없다. C는 정지해 있고 그 질량 k^2m은 B의 질량 km의 k배이다. 따라서 이것은 질량비가 k이고 e도 같으며, 다가오는 속력만 u 대신 βu인 (i)의 충돌이다. B는 시각 $t_1 = d/(\beta u)$에 C에 부딪힌다. 충돌 후 B는 $\alpha\beta u$로, C는 $\beta^2 u$로 움직인다.

이제 다른 충돌이 먼저 일어나지 않는다고 가정하고(이는 마지막에 확인한다), 각 입자가 $x = \frac{5}{2}d$에 도달하는 시각을 구한다.

- A는 $x = 0$에서 αu로 움직이므로 $t = \dfrac{5d}{2\alpha u}$에 도달한다.
- B는 t_1에 $x = d$에 이르고, 그다음 속력 $\alpha\beta u$로 $\frac{3}{2}d$를 간다. 따라서 $t = \dfrac{d}{\beta u} + \dfrac{3d}{2\alpha\beta u}$에 도달한다.

▶ C는 벽까지 $3d$를 $\beta^2 u$로 가고, 다시 $\frac{3}{2}d$를 $e\beta^2 u$로 되돌아온다. 따라서 도달 시각은

$$t = \frac{d}{\beta u} + \frac{3d}{\beta^2 u}\left(1 + \frac{1}{2e}\right) = \frac{d}{\beta u} + \frac{3(2e+1)d}{2e\beta^2 u}.$$

세 입자가 동시에 충돌하려면 세 시각이 모두 같아야 한다.

B와 C. 공통인 항 $d/(\beta u)$를 소거하고 $2\beta^2 u/(3d)$를 곱하면

$$\frac{1}{\alpha}\beta = \frac{2e+1}{e} \quad \Longleftrightarrow \quad e\beta = \alpha(2e+1).$$

이것은 (i)의 조건과 정확히 같으므로

$$k = \frac{1+e-e^2}{e(2e+1)}. \tag{1}$$

(이는 우연이 아니다. 두 상황 모두에서, 한 입자는 충돌 후 다가오던 속력의 β배로 벽까지 D를 가고 $\frac{1}{2}D$를 되돌아온다. 그동안 다른 입자는 다가오던 속력의 α배로 $\frac{1}{2}D$만큼 앞으로 간다. 여기서는 $D = 3d$이고 다가오는 속력은 βu이다.)

A와 B. $\dfrac{5}{2\alpha} = \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{3}{2\alpha\beta}$에 $2\alpha\beta$를 곱하면 $5\beta = 2\alpha + 3$이다. 여기에 $k+1$을 곱하면

$$5(1+e) = 2(1-ke) + 3(k+1) \quad \Longrightarrow \quad 5e = k(3-2e) \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{5e}{3-2e}. \tag{2}$$

? **생각해 보기** k에 대한 식이 두 개 있다. e는 어떻게 구하는가?

(1)과 (2)를 같게 놓는다. $0 < e < 1$이므로 두 분모가 모두 양수이고, 따라서 분모를 교차하여 곱할 수 있다.

$$\begin{aligned} 5e^2(2e+1) &= (3-2e)(1+e-e^2) \\ 10e^3 + 5e^2 &= 3 + e - 5e^2 + 2e^3 \\ 0 &= 8e^3 + 10e^2 - e - 3. \end{aligned}$$

$e = \frac{1}{2}$을 넣어 보면 $1 + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} - 3 = 0$이므로 $2e-1$이 인수이다.

$$8e^3 + 10e^2 - e - 3 = (2e-1)(4e^2 + 7e + 3) = (2e-1)(4e+3)(e+1).$$

나머지 근 $-\frac{3}{4}$와 -1은 음수이므로 $0 < e < 1$을 만족하는 근은 $e = \frac{1}{2}$뿐이고, 이것이 구하려던 결과이다. 이때 $k = \frac{5}{4}$이다.

상황이 모순 없이 성립하는지 확인하기. $e = \frac{1}{2}, k = \frac{5}{4}$이면 $\alpha = \frac{1}{6}, \beta = \frac{2}{3}$이다. B가 C에 부딪히기 전에는 A(속력 $\frac{1}{6}u$)가 B(속력 $\frac{2}{3}u$)보다 느리므로 A가 B를 일찍 따라잡을 수 없다. 그 후에는 B(속력 $\frac{1}{9}u$)가 C(속력 $\frac{4}{9}u$)보다 느리므로 C가 벽에 닿기 전에 B가 C를 따라잡을 수 없다. 이제 B가 A보다 느리므로 A가 B에 가까워지고, 둘은 우리가 계산한 지점에서만 만난다. 따라서 추가 충돌은 없으며, 세 입자 모두 시각 $t = 15d/u$에 $x = \frac{5}{2}d$에 도달한다.

검산

- (i)에서 $v_1 + kv_2 = u$(운동량)이고 $v_2 - v_1 = eu$(반발)이다. $e = 1, k = 1$이면 $\alpha = 0$, $\beta = 1$이다. 완전 탄성 충돌에서 질량이 같은 두 입자는 속도를 서로 맞바꾸므로, 마땅히 그래야 하는 결과이다.
- (ii)에서 $u = d = 1$로 두고 위의 값을 쓰면, 세 도달 시각은 A가 $\frac{5/2}{1/6} = 15$, B가 $\frac{1}{2/3} + \frac{3/2}{1/9} = \frac{3}{2} + \frac{27}{2} = 15$, C가 $\frac{3}{2} + \frac{3}{4/9} + \frac{3/2}{2/9} = \frac{3}{2} + \frac{27}{4} + \frac{27}{4} = 15$이다.
- 식 (1)에 $e = \frac{1}{2}$을 넣으면 $k = \frac{5/4}{1} = \frac{5}{4}$이고, 이는 (2)의 $\frac{5/2}{2} = \frac{5}{4}$와 일치한다.

흔한 실수

- (i)에서 만나는 지점을 충돌 지점에서 재야 하는데 벽에서 재는 것. 여기서는 둘 다 $\frac{1}{2}D$로 우연히 같지만, (ii)에서 벽에서 $\frac{3}{2}d$인 만나는 지점은 B의 출발점에서 $\frac{5}{2}d$이다.
- B–C 충돌을 처음부터 다시 계산하다가 인수를 빠뜨리는 것. 질량비가 다시 k라는 것을 알아차리면 이 계산을 하지 않아도 된다.
- C가 벽에서 $\beta^2 u$가 아니라 $e\beta^2 u$로 되돌아온다는 것을 잊는 것.

STEP 너머

이 문제가 잘 풀리는 것은 문제가 **자기 유사**(*self-similar*)하기 때문이다. 질량을 k배, 속력을 β배로 바꾸면 한 충돌이 다음 충돌로 바뀌므로 같은 계산이 되풀이된다. 질량이 등비수열로 줄어드는 공들을 늘어놓아 에너지를 매우 효율적으로 전달하는 장치도, 운동량과 에너지를 제약 조건으로 두고 속도 공간(velocity space)에서 분석할 때 가장 깔끔해지는 유명한 "충돌하는 블록으로 π 세기" 문제도 같은 아이디어에 바탕을 두고 있다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 질량중심 좌표계(centre-of-mass frame)에서 다루는 방법을 포함하여 충돌을 체계적으로 설명하는데, 이 방법을 쓰면 α와 β 같은 식이 쉽게 보인다.

풀이

STEP III 2022, 문제 10

역학 • 탄성 용수철의 평형

STEP III 2022, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

핵심 아이디어

P에서의 각이 직각이므로 두 용수철의 힘은 서로 수직이다. 따라서 각 용수철 방향으로 힘을 분해하면 연립방정식 없이 각각의 장력을 따로 얻을 수 있다. 에너지에서는 탄성 에너지 항들이 중력 퍼텐셜 에너지 항과 아주 깔끔하게 결합하여 p가 θ의 간단한 함수가 된다. 그러면 소문항 (ii)의 진짜 핵심은 θ에 대한 **물리적** 제약, 즉 두 용수철이 모두 늘어나 있어야 한다는 조건이다.

풀이

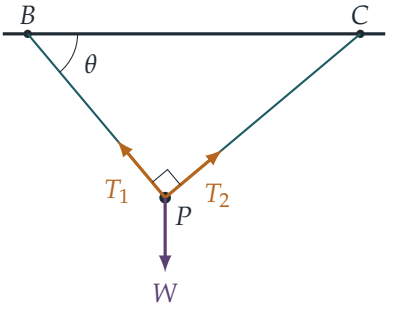
P를 질점(particle)으로, 용수철을 질량이 없고 훅의 법칙(Hooke's law)을 따르는 것으로 모형화한다. 그러면 탄성 계수(modulus)가 λ이고 자연 길이(natural length)가 a인 용수철을 길이 l까지 늘이면 장력(tension)은 $\lambda(l-a)/a$이고 저장된 에너지는 $\lambda(l-a)^2/(2a)$이다.

소문항 (i)

$BC = 2a$이고 각 $BPC = 90°$이므로 삼각형 BPC의 빗변(hypotenuse)은 BC이다. 따라서

$$PB = 2a\cos\theta, \qquad PC = 2a\sin\theta, \qquad \angle PCB = 90° - \theta.$$

PB와 PC의 장력을 각각 T_1, T_2라 하자.



직선 PB는 수평선과 각 θ를 이루므로 연직선과는 각 $90^\circ - \theta$를 이룬다. 마찬가지로 PC는 연직선과 각 θ를 이룬다. $PB \perp PC$이므로 PB 방향으로 분해하면 T_1과 무게만 관여하며, 무게의 BP 방향(B에서 멀어지는 방향) 성분은 $W\cos(90^\circ - \theta) = W\sin\theta$이다. 따라서

$$T_1 = W\sin\theta, \qquad \text{이고, 마찬가지로 분해 방향}PC, \qquad T_2 = W\cos\theta.$$

훅의 법칙에 의해

$$T_1 = \frac{s_1 W(2a\cos\theta - a)}{a} = s_1 W(2\cos\theta - 1), \qquad T_2 = s_2 W(2\sin\theta - 1).$$

두 식을 같게 놓으면

$$s_1 = \frac{\sin\theta}{2\cos\theta - 1}, \qquad s_2 = \frac{\cos\theta}{2\sin\theta - 1},$$

이고, 이것이 구하는 s_1이며 s_2도 함께 얻었다.

소문항 (ii)

중력 퍼텐셜 에너지. P는 BC보다 삼각형의 P에서 내린 높이만큼 아래에 있으며, 그 높이는 $PB\sin\theta = 2a\sin\theta\cos\theta = a\sin 2\theta$이다. BC를 기준 높이로 잡으면 중력 퍼텐셜 에너지(gravitational potential energy)는 $-Wa\sin 2\theta$이다.

탄성 에너지. PB의 늘어난 길이는 $a(2\cos\theta - 1)$이므로 소문항 (i)을 이용하면

$$\frac{s_1 W\,a^2(2\cos\theta - 1)^2}{2a} = \tfrac{1}{2}Wa\,s_1(2\cos\theta - 1)^2 = \tfrac{1}{2}Wa\sin\theta\,(2\cos\theta - 1),$$

이고, 마찬가지로 PC의 에너지는 $\frac{1}{2}Wa\cos\theta\,(2\sin\theta - 1)$이다.

합. 모두 더하면

$$\begin{aligned} -paW &= -Wa\sin 2\theta + \tfrac{1}{2}Wa\big(2\sin\theta\cos\theta - \sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta - \cos\theta\big) \\ &= -Wa\sin 2\theta + Wa\sin 2\theta - \tfrac{1}{2}Wa(\sin\theta + \cos\theta), \end{aligned}$$

이므로

$$p = \tfrac{1}{2}(\sin\theta + \cos\theta) = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\big(\theta + \tfrac{\pi}{4}\big).$$

생각해 보기 θ는 0과 $\frac{\pi}{2}$ 사이의 아무 값이나 될 수 있을까?

그렇지 않다. 탄성 계수 s_1W와 s_2W는 양수이고 장력 $W\sin\theta$와 $W\cos\theta$도 양수이므로, 두 용수철은 모두 **늘어나** 있어야 한다. 즉 $2\cos\theta - 1 > 0$이고 $2\sin\theta - 1 > 0$이다. (어느 한쪽이 0이라면 그 용수철은 힘을 전혀 내지 못하는데도 0이 아닌 장력을 제공해야 한다.) 따라서 $\cos\theta > \frac{1}{2}$이고 $\sin\theta > \frac{1}{2}$, 즉

$$\tfrac{\pi}{6} < \theta < \tfrac{\pi}{3}, \qquad \text{따라서} \qquad \tfrac{5\pi}{12} < \theta + \tfrac{\pi}{4} < \tfrac{7\pi}{12}.$$

$\frac{\pi}{2}$에 대해 대칭인 이 구간에서 $\sin(\theta + \frac{\pi}{4})$는 최대 1이고($\theta = \frac{\pi}{4}$에서 달성된다), 양 끝점에서의 값 $\sin\frac{5\pi}{12} = \sin\frac{7\pi}{12}$보다 엄격하게 크다. 이제

$$\sin\tfrac{5\pi}{12} = \sin\left(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{\pi}{6}\right) = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\tfrac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4},$$

이므로

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2} \;\geq\; p \;>\; \tfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4} = \tfrac{1}{4}(1+\sqrt{3}),$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다.

유효숫자 한 자리. $0.65 \leq p < 0.75$임을 보여야 하며, 근호(surd)의 어림값은 제곱을 이용해 정당화한다. $1.6^2 = 2.56 < 3$이므로 $\sqrt{3} > 1.6$이고, 따라서 $p > \frac{1}{4}(2.6) = 0.65$이다. $1.5^2 = 2.25 > 2$이므로 $\sqrt{2} < 1.5$이고, 따라서 $p \leq \frac{1}{2}\sqrt{2} < 0.75$이다. 그러므로 유효숫자(significant figure) 한 자리로 $p = 0.7$이다.

검산

- $\theta = \frac{\pi}{4}$이면 배치가 대칭이고, 실제로 $s_1 = s_2 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$이며 $p = \frac{1}{2}\sqrt{2} \approx 0.7071$이다.
- $\theta \to \frac{\pi}{6}^{+}$일 때 $s_1 \to \infty$이다. 용수철 PB가 자연 길이에 있으므로 장력을 지탱하려면 무한히 뻣뻣해야 한다. 이때 $p \to \frac{1}{4}(1+\sqrt{3}) \approx 0.6830$으로 하한이 된다.
- $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$에서 무작위로 고른 많은 θ에 대해, 구한 위치가 전체 퍼텐셜 에너지의 정지점(stationary point)이고(따라서 실제로 평형(equilibrium)이고) 에너지가 $-\frac{1}{2}Wa(\sin\theta + \cos\theta)$와 같음을 컴퓨터로 확인하였다.

흔한 실수

- 중력 퍼텐셜 에너지에 양의 부호를 붙이는 것. P는 기준 높이보다 **아래**에 있다.
- $\frac{1}{2}(\sin\theta + \cos\theta)$를 $(0, \frac{\pi}{2})$ 전체에서 최적화하여 잘못된 하한 $\frac{1}{2}$를 얻는 것. 용수철은 장력을 받고 있어야 한다.

▶ 오차가 반올림 결과를 바꿀 수 없음을 보이지 않고 $\sqrt{3} \approx 1.732$를 그대로 인용하는 것.

STEP 너머

소문항 (ii)에서 항들이 소거된 것은 우연이 아니다. 평형 상태에서는 전체 퍼텐셜 에너지가 정상(stationary)이고, 훅의 법칙을 따르는 용수철의 탄성 에너지는 정확히 (장력 $\times$ 늘어난 길이)의 절반이므로, 이것이 중력에 대해 한 일과 연결된다. 평형을 퍼텐셜 에너지의 정지점으로 연구하고 그 안정성을 이계도함수로 살펴보는 것은 대학 $_1$학년 역학의 중심 주제이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 에너지 관점을 꼼꼼하게 전개한다.

풀이

STEP III 2022, 문제 11

확률과 통계 • 이항분포의 평균편차

> **STEP III 2022, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

핵심 아이디어

공정한 동전(fair coin)을 던지므로 X의 분포는 평균(mean)에 대하여 대칭(symmetric)이고, 따라서 평균보다 작은 쪽의 확률은 평균보다 큰 쪽의 확률과 같다. 이 대칭성 덕분에 절댓값(absolute value)이 들어간 합을 한쪽만의 합으로 바꿀 수 있다. 그다음 (i)(c)의 항등식(identity)이 $\sum r\binom{2n}{r}$를 더 작은 이항분포(binomial distribution)의 꼬리합(tail sum)으로 바꾸고, 이 꼬리합도 다시 대칭성으로 계산한다.

풀이

이 풀이 전체에서 $X \sim \mathrm{B}(N, \frac{1}{2})$이므로 $\mathrm{P}(X = r) = \binom{N}{r}2^{-N}$이고 $\mu = \frac{1}{2}N$이다. $\binom{N}{r} = \binom{N}{N-r}$이므로 $\mathrm{P}(X = r) = \mathrm{P}(X = N - r)$이다. 즉 분포는 $\frac{1}{2}N$에 대하여 대칭이다.

소문항 (i)(a)

$N = 2n$일 때 사상 $r \mapsto 2n - r$은 $\{0, \dots, n-1\}$을 $\{n+1, \dots, 2n\}$으로 보내므로, 대칭성에 의하여

$$\mathrm{P}(X \le n - 1) = \mathrm{P}(X \ge n + 1).$$

세 사건 $X \le n-1$, $X = n$, $X \ge n+1$이 모든 결과를 덮으므로 $2\,\mathrm{P}(X \le n-1) + \mathrm{P}(X = n) = 1$이고, 이로부터

$$\mathrm{P}(X \le n - 1) = \tfrac{1}{2}\big(1 - \mathrm{P}(X = n)\big).$$

소문항 (i)(b)

이때 $\mu = n$이므로

$$\delta = \sum_{r=0}^{2n} |r-n| \binom{2n}{r} \frac{1}{2^{2n}}.$$

$r = n$인 항은 0이다. $r \geq n+1$인 항들에 $r = 2n - s$를 대입하면 $0 \leq s \leq n-1$에 대하여 $|r-n| = n-s$이고 $\binom{2n}{r} = \binom{2n}{s}$이다. 따라서 평균보다 큰 쪽의 항들은 작은 쪽의 항들을 정확히 되풀이한다.

$$\delta = 2\sum_{r=0}^{n-1} (n-r)\binom{2n}{r}\frac{1}{2^{2n}} = \sum_{r=0}^{n-1}(n-r)\binom{2n}{r}\frac{1}{2^{2n-1}},$$

이것이 보이려던 식이다.

소문항 (i)(c)

$1 \leq r \leq 2n$일 때

$$r\binom{2n}{r} = \frac{r\,(2n)!}{r!\,(2n-r)!} = 2n \cdot \frac{(2n-1)!}{(r-1)!\,(2n-r)!} = 2n\binom{2n-1}{r-1}.$$

이제 (b)의 합을 $2^{2n-1}\delta = A - B$로 나눈다. 여기서

$$A = n\sum_{r=0}^{n-1}\binom{2n}{r}, \qquad B = \sum_{r=1}^{n-1} r\binom{2n}{r}$$

이다(B의 $r=0$인 항은 0이므로 뺀다).

합 A. (a)에 의하여 $\sum_{r=0}^{n-1}\binom{2n}{r} = 2^{2n}\,\mathrm{P}(X \leq n-1) = 2^{2n-1} - \frac{1}{2}\binom{2n}{n}$이므로

$$A = n\,2^{2n-1} - \tfrac{n}{2}\binom{2n}{n}.$$

? **생각해 보기** s가 0부터 $n-2$까지일 때 $\binom{2n-1}{s}$를 어떻게 모두 더할까?

합 B. 위의 항등식과 $s = r-1$에 의하여

$$B = 2n\sum_{s=0}^{n-2}\binom{2n-1}{s}.$$

$0 \leq s \leq 2n-1$인 행 $\binom{2n-1}{s}$는 항의 개수가 짝수이고 합이 2^{2n-1}이다. 이 행은 $\{0,\ldots,n-1\}$과 $\{n,\ldots,2n-1\}$을 서로 바꾸는 $s \mapsto 2n-1-s$에 대하여 대칭이므로, 앞쪽 절반의 합은 2^{2n-2}이다. 우리의 합은 그 절반에서 한 항 모자란 곳에서 멈추므로

$$\sum_{s=0}^{n-2}\binom{2n-1}{s} = 2^{2n-2} - \binom{2n-1}{n-1} = 2^{2n-2} - \tfrac{1}{2}\binom{2n}{n},$$

이다. 여기서 $\binom{2n}{n} = \binom{2n-1}{n-1} + \binom{2n-1}{n} = 2\binom{2n-1}{n-1}$을 이용하였다. 따라서

$$B = n\,2^{2n-1} - n\binom{2n}{n}.$$

종합하기.

$$2^{2n-1}\delta = A - B = \left(n - \frac{n}{2}\right)\binom{2n}{n} = \frac{n}{2}\binom{2n}{n}, \qquad \text{따라서} \qquad \delta = \frac{n}{2^{2n}}\binom{2n}{n}.$$

소문항 (ii)

이제 $N = 2n+1$이고 $\mu = n + \frac{1}{2}$이며, 이는 X가 가질 수 있는 값이 아니다. 대칭 $r \mapsto 2n+1-r$은 $\{0,\dots,n\}$과 $\{n+1,\dots,2n+1\}$을 서로 바꾸고, $|r-\mu|$와 $\binom{2n+1}{r}$을 모두 보존한다. 따라서 (i)(b)에서와 같이

$$\delta = 2\sum_{r=0}^{n}\left(n+\tfrac{1}{2}-r\right)\binom{2n+1}{r}\frac{1}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2^{2n+1}}\sum_{r=0}^{n}(2n+1-2r)\binom{2n+1}{r}.$$

- 같은 대칭성에 의하여 행 $\binom{2n+1}{r}$의 앞쪽 절반의 합은 2^{2n+1}의 절반이다. 즉 $\sum_{r=0}^{n}\binom{2n+1}{r} = 2^{2n}$이다.
- 항등식 $r\binom{2n+1}{r} = (2n+1)\binom{2n}{r-1}$((i)(c)와 똑같이 증명된다)과 (i)(a)에 의하여

$$\sum_{r=1}^{n} r\binom{2n+1}{r} = (2n+1)\sum_{s=0}^{n-1}\binom{2n}{s} = (2n+1)\left(2^{2n-1} - \tfrac{1}{2}\binom{2n}{n}\right).$$

그러므로

$$\sum_{r=0}^{n}(2n+1-2r)\binom{2n+1}{r} = (2n+1)2^{2n} - (2n+1)\left(2^{2n} - \binom{2n}{n}\right) = (2n+1)\binom{2n}{n},$$

이고, $N = 2n+1$일 때

$$\boxed{\delta = \frac{2n+1}{2^{2n+1}}\binom{2n}{n}}$$

이다.

검산

- $N = 3$ $(n=1)$: $|X - \frac{3}{2}|$는 확률 $\frac{1}{4}$로 $\frac{3}{2}$이고 확률 $\frac{3}{4}$로 $\frac{1}{2}$이므로 $\delta = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{3}{4}$이다. 공식은 $\frac{3\cdot 2}{8} = \frac{3}{4}$를 준다. $n=0$ $(N=1)$이면 공식은 $\frac{1}{2}$를 주는데, 이것도 옳다.
- $N = 4$ $(n=2)$: (i)(c)는 $\frac{2\cdot 6}{16} = \frac{3}{4}$를 주며, 이는 $N=3$일 때와 같다. 실제로 $N = 2n+1$일 때의 δ는 언제나 $N = 2n+2$일 때의 δ와 같다. $\binom{2n+2}{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+1}\binom{2n}{n}$이므로, 짝수 공식에서 n 대신 $n+1$을 넣으면 홀수 공식이 된다.

- 두 공식은 $N \leq 60$인 모든 N에 대하여 δ의 정의와 정확히 일치함을 컴퓨터로 확인하였다. 예를 들어 $N = 10$이면 $\delta = \frac{315}{256} \approx 1.230$이다.

흔한 실수

- 대칭성에서 나오는 인수 2를 잊는 것. (i)(b)에서 2^{2n}이 아니라 2^{2n-1}이 나오는 이유가 바로 이것이다.
- $s = r - 1$로 옮긴 뒤 s의 범위를 잘못 잡는 것. 합은 $n - 2$에서 멈추어 행의 절반에서 한 항이 모자라며, 그 빠진 항 $\binom{2n-1}{n-1}$ 덕분에 답이 0이 아니게 된다.
- (ii)에서 μ를 정수처럼 다루는 것. 이 경우 사라지는 항이 없으며, 행의 두 절반은 각각 $n + 1$개의 항을 가진다.

STEP 너머

스털링 공식(Stirling's formula)에 의하여 $\binom{2n}{n} \approx 4^n/\sqrt{\pi n}$이므로, N이 클 때 $\delta \approx \sqrt{N/(2\pi)}$이다. $\sigma = \frac{1}{2}\sqrt{N}$이므로 이는 $\delta \approx \sigma\sqrt{2/\pi}$이며, 중심극한정리(central limit theorem)가 예측하는 대로 정확히 정규분포(normal distribution)의 평균절대편차(mean absolute deviation)와 같다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 이항분포의 정규근사와 그 바탕에 있는 중심극한정리를 모두 다룬다.

풀이

STEP III 2022, 문제 12

확률과 통계 • 원의 임의의 현

STEP III 2022, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

이 문제는 *Beyond STEP*의 12.3 절 "무작위"란 무슨 뜻인가?에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch12/bertrand.html

핵심 아이디어

이 문제의 모든 현(chord)은 하나의 사실에서 나온다. 반지름이 a인 원의 중심에서 수직 거리가 d인 현의 길이는 $2\sqrt{a^2-d^2}$이다. 따라서 할 일은 확률변수(random variable)들로 d를 나타낸 다음 평균을 구하는 것이다. 소문항 (ii)에서 치환 $u = a^2 - r^2\sin^2 t$가 자연스러운 까닭은 R의 확률밀도함수(probability density function)가 이 치환에 필요한 인수 r를 정확히 제공하기 때문이다.

풀이

소문항 (i)

각 AOB를 Θ라 하면, Θ는 $[0, 2\pi]$에서 균등분포(uniform distribution)를 따르고 밀도는 $\frac{1}{2\pi}$이다. 삼각형 AOB는 꼭지각이 Θ인 이등변삼각형이다. O에서 AB에 내린 수선은 꼭지각과 현을 모두 이등분하므로

$$AB = 2a\sin\tfrac{1}{2}\Theta.$$

이 식은 모든 $\Theta \in [0, 2\pi]$에서 성립한다. 이 범위에서 $\sin\frac{1}{2}\Theta \geq 0$이기 때문이다. $\Theta > \pi$일 때는 우각(reflex angle)을 재는 셈이지만 현은 같다. 따라서

$$\mathrm{E}(AB) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2a\sin\tfrac{1}{2}\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{a}{\pi}\Big[-2\cos\tfrac{1}{2}\theta\Big]_0^{2\pi} = \frac{a}{\pi}(2+2) = \frac{4a}{\pi}.$$

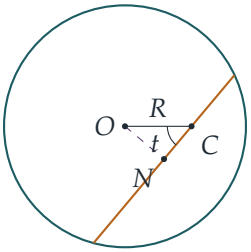
소문항 (ii)

R의 밀도. $0 \le r \le a$일 때, 사건 $R \le r$은 C가 O를 중심으로 하는 반지름 r인 원판 안에 있다는 뜻이다. 확률이 넓이에 비례하므로

$$\mathrm{P}(R \le r) = \frac{\pi r^2}{\pi a^2} = \frac{r^2}{a^2}, \qquad \text{따라서} \qquad f_R(r) = \frac{2r}{a^2} \quad (0 \le r \le a),$$

이고, 그 밖에서는 $f_R(r) = 0$이다.

현의 길이. O에서 현에 내린 수선의 발을 N이라 하자. 직각삼각형 ONC에서 빗변은 $OC = R$이고 C에서의 각은 t이므로 $ON = R\sin t$이다.



중심에서 내린 수선은 현을 이등분하고 N은 현의 중점이므로, O, N과 현의 한 끝점이 이루는 삼각형에 피타고라스(Pythagoras) 정리를 적용하면

$$\text{현의 길이} = 2\sqrt{a^2 - R^2\sin^2 t}.$$

$R < a$이므로 근호 안의 식은 양수이다. C의 양쪽에 걸친 현 전체를 센다는 점에 주의한다.

길이의 기댓값. t를 고정하고 C를 무작위로 택하면

$$\mathrm{L}(t) = \int_0^a 2\sqrt{a^2 - r^2\sin^2 t}\,\frac{2r}{a^2}\,\mathrm{d}r.$$

$\sin t \ne 0$이 되도록 $0 < t < \frac{1}{2}\pi$라 하자. $u = a^2 - r^2\sin^2 t$로 치환(substitution)하면 $\mathrm{d}u = -2r\sin^2 t\,\mathrm{d}r$이다. $r = 0$일 때 $u = a^2$이고, $r = a$일 때 $u = a^2(1 - \sin^2 t) = a^2\cos^2 t$이다. 그러면

$$\mathrm{L}(t) = \frac{2}{a^2\sin^2 t}\int_{a^2\cos^2 t}^{a^2} u^{1/2}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{a^2\sin^2 t}\cdot\frac{2}{3}\left(a^3 - a^3\cos^3 t\right) = \frac{4a(1-\cos^3 t)}{3\sin^2 t},$$

이다. 여기서 $(a^2\cos^2 t)^{3/2} = a^3\cos^3 t$를 사용했는데, 예각에서는 $\cos t \ge 0$이므로 이는 타당하다. 이것이 구하는 공식이다.

? **생각해 보기** 분모 $\sin^2 t$를 어떻게 바꾸면 $1 - \cos^3 t$와 약분할 수 있을까?

$c = \cos t$라 하자. 그러면 $\sin^2 t = 1 - c^2 = (1-c)(1+c)$이고, $1 - c^3$은 세제곱의 차로서 $(1-c)(1+c+c^2)$이다. $c \ne 1$이므로 $1 - c$를 약분할 수 있다.

$$\mathrm{L}(t) = \frac{4a}{3}\cdot\frac{1+c+c^2}{1+c} = \frac{4a}{3}\left(c + \frac{1}{1+c}\right),$$

여기서 $c(1+c)+1 = 1+c+c^2$을 썼다. 마지막으로 $1+\cos t = 2\cos^2\frac{1}{2}t$이므로 $\dfrac{1}{1+\cos t} = \frac{1}{2}\sec^2\frac{1}{2}t$이고,

$$\mathrm{L}(t) = \frac{4a}{3}\Big(\cos t + \tfrac{1}{2}\sec^2\big(\tfrac{1}{2}t\big)\Big),$$

이 되어 증명이 끝난다. 이 꼴은 $t=0$에서도 문제가 없다. 이때 값은 $\frac{4a}{3}\cdot\frac{3}{2} = 2a$이며, C를 지나 OC를 따라가는 현은 지름이므로 이는 옳다.

소문항 (iii)

T는 $[0, \frac{1}{2}\pi]$에서 밀도 $\frac{2}{\pi}$를 가지므로, L의 두 번째 꼴을 사용하면($\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tan\frac{1}{2}t = \frac{1}{2}\sec^2\frac{1}{2}t$이므로 적분하기 쉽다)

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\big(\mathrm{L}(T)\big) &= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{4a}{3}\int_0^{\pi/2}\Big(\cos t + \tfrac{1}{2}\sec^2\tfrac{1}{2}t\Big)\,\mathrm{d}t = \frac{8a}{3\pi}\Big[\sin t + \tan\tfrac{1}{2}t\Big]_0^{\pi/2}\\ &= \frac{8a}{3\pi}(1+1) = \frac{16a}{3\pi}.\end{aligned}$$

검산

- $t = \frac{1}{2}\pi$일 때 현은 OC에 수직이고 $\mathrm{L} = \frac{4a}{3}(0+\frac{1}{2}\cdot 2) = \frac{4a}{3}$이다. 직접 계산해도 $\int_0^a 2\sqrt{a^2-r^2}\,\frac{2r}{a^2}\,\mathrm{d}r = \frac{4a}{3}$이다.
- t가 0에서 $\frac{1}{2}\pi$까지 변할 때 $\mathrm{L}(t)$는 $2a$에서 $\frac{4}{3}a$로 줄어들어야 하며, (iii)의 답 $\frac{16}{3\pi}a \approx 1.698a$는 평균이라면 마땅히 그래야 하듯 이 두 값 사이에 있다.
- $a = 1.7$, $t = 0.7$일 때 현의 길이를 R의 밀도에 대해 수치적분하면 3.01799가 나오며, 이는 $\mathrm{L}(0.7)$에 대한 두 공식의 값과 일치한다. (i)의 답 $\frac{4}{\pi}a \approx 1.273a$ 역시 수치적분으로 확인하였다.

흔한 실수

- R이 $[0,a]$에서 균등분포를 따른다고 보는 것. 점은 **넓이**에 대해 균등하게 분포하며, 중심에서 멀수록 넓이가 더 많으므로 밀도가 $2r/a^2$이 된다.
- C의 한쪽에 있는 현의 일부만 사용하거나, $ON = R\cos t$로 쓰는 것(이것은 현을 따라 잰 거리 CN이다).
- 소문항 (iii)에서 $\mathrm{L}(t)$의 두 번째 꼴 대신 첫 번째 꼴을 적분하는 것. 문제는 두 번째 꼴을 한 줄에 적분할 수 있도록 설계되어 있다.

STEP 너머

이것은 기하확률(geometric probability)로, 여기서 "무작위로 택한다"는 말은 분포가 정해진 뒤에야 의미를 갖는다. 답 $\frac{4a}{\pi}$와 $\frac{16a}{3\pi}$가 다른 것은 두 답이 현을 고르는 서로 다른 방법을 나타내기 때문이며, 이것이 바로 베르트랑의 역설(Bertrand's paradox)의 요점이다. 적분기하학(integral geometry)은 회전과 평행이동에 대해 변하지 않는 직선 위의 측도를 사용하여 이를 체계화한다. 영역 위의 연속분포와 여기서 계산한 것과 같은 기댓값에 대해서는 Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)를 참고하라.

Beyond STEP

STEP은 대부분의 학생이 학창 시절에 치르는 수학 시험 가운데 가장 어려운 시험이다. 또한 가장 훌륭한 시험 가운데 하나이기도 하다. 문제는 짧고 낯설며 깊이가 있고, 그중 가장 뛰어난 문제들은 대학 수학의 작은 조각이 모습을 감추고 있는 것이다.

이 책은 1987년 첫 시험에 앞서 나온 예시 시험지(specimen papers)부터 2025년 시험지까지 가운데 가장 흥미로운 STEP 문제들을 골라, 각 문제를 하나의 문으로 삼는다. 모든 문제는 뛰어난 학생이 풀어 가면서 던질 법한 질문들과 함께 꼼꼼하게 풀이하고, 그런 다음 책은 그 문을 지나 한 걸음 더 나아간다. 그 아이디어가 어디에서 왔는지, 대학에서는 무엇으로 발전하는지, 그리고 다음에는 무엇을 읽으면 좋은지를 살펴본다.

이 책은 STEP을 준비하면서 기출 문제 연습 이상의 것을 원하는 재능 있는 예비 수학자를 위해 쓰였다. 수학과 학부생처럼 생각하기 시작하고, 앞으로 무엇이 자신을 기다리고 있는지 알아보고 싶은 학생들을 위한 책이다.

- 순수 수학(pure mathematics), 역학(mechanics), 확률(probability)과 통계(statistics)를 아우르는 13개의 장
- 이 36개의 STEP 기출 문제와 각 문제의 안내식 풀이
- 모든 문제 뒤에 숨은 대학 수학
- 답이 실린 후속 연습 문제와 더 읽을거리

2022년 풀이. 책 전체와 모든 장,
모든 풀이를 다음 주소에서 무료로 읽고, 내려받고, 공유할 수 있다.

beyondstep.keithmcnulty.org

본문은 퍼블릭 도메인(CC0 1.0)으로 공개한다. STEP 문제 © Cambridge University Press & Assessment.

