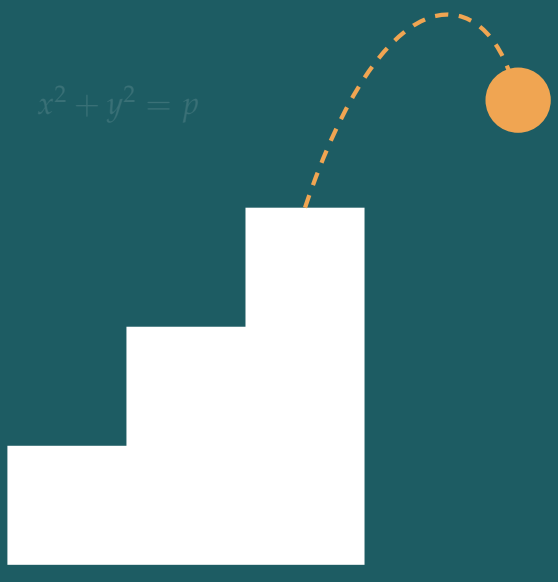
STEP 대비 · 대학 수학

Beyond STEP

STEP II 및 III

2021년 풀이



KEITH McNULTY

Beyond STEP

STEP 기출문제로 여는
대학 수학의 세계

STEP II 및 III

2021년 풀이

Keith McNulty

Beyond STEP: STEP 기출문제로 여는 대학 수학의 세계

2021년 풀이

2021년 STEP 문제지(STEP II 및 III)의 24개 문제 전체에 대한 풀이. 견본 문제지 이후 모든 STEP 문제의 풀이와 *Beyond STEP* 책 전체, 그리고 각 장을 `beyondstep.keithmcnulty.org`에서 무료로 읽고 내려받을 수 있다.

풀이를 읽기 전에 먼저 문제를 제대로 풀어 보자. 모든 답은 수치적으로 검증하였지만, 풀이가 이렇게 많으면 실수가 어느 정도 있을 수밖에 없다. 무언가 잘못된 것처럼 보이면 자신의 풀이를 믿고 꼼꼼히 확인해 보자.

영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.

2026년 11월 온라인 초판 발행.

이 PDF에서 지은이가 직접 만든 모든 것, 곧 본문, 풀이, 그림, 연습문제와 해답은 크리에이티브 커먼즈 CC0 1.0 Universal 라이선스에 따라 퍼블릭 도메인(public domain)으로 공개한다. 누구든 허락을 구하지 않고 어떤 목적으로든 복사하고, 고쳐 쓰고, 공유할 수 있다. 자세한 내용은 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`을 보라.

여기에서 다루는 STEP 문제의 저작권은 Cambridge University Press & Assessment에 있다. 문제는 이 책에 싣지 않았으며, 각 문제마다 공식 출처인 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스나 OCR의 기출 시험지로 가는 링크를 달았다.

오류 제보는 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty에 이슈로 남겨 주기 바란다.

차례

STEP II

Q1 삼각방정식 순수수학 . . . 3
Q2 근의 대칭함수 순수수학 . . . 7
Q3 정수 부분과 소수 부분 순수수학 . . . 11
Q4 람베르트 W 함수 순수수학 . . . 15
Q5 일계 미분방정식 순수수학 . . . 20
Q6 원 기하의 근사 순수수학 . . . 24
Q7 회전 행렬 순수수학 . . . 29
Q8 적분의 점화식 순수수학 . . . 33
Q9 정역학 역학 . . . 37
Q10 비관성 좌표계 역학 . . . 41
Q11 조건부 확률의 점화식 확률과 통계 . . . 45
Q12 도박꾼의 파산 확률과 통계 . . . 49

STEP III

Q1 매개변수 곡선의 법선 순수수학 . . . 53
Q2 행렬식과 부등식 순수수학 . . . 57
Q3 적분 부등식 순수수학 . . . 61
Q4 벡터와 정사영 순수수학 . . . 64
Q5 극곡선 순수수학 . . . 68
Q6 역함수와 도함수 순수수학 . . . 73
Q7 기하에서의 복소수 순수수학 . . . 78
Q8 점화식과 극한 순수수학 . . . 82
Q9 반발 계수가 있는 비스듬한 충돌 역학 . . . 86
Q10 감기는 줄의 운동 역학 . . . 90

Q11 지수분포 확률과 통계 94
Q12 합의 분산 확률과 통계 98

풀이

STEP II 2021, 문제 1

순수수학 • 삼각방정식

> **STEP II 2021, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

핵심 아이디어

사인과 코사인의 곱은 다루기 까다롭지만 합은 다루기 쉽다. 그래서 처음에 주어진 항등식(identity)을 이용하여 곱을 합으로 바꾼다. (i)에서는 이렇게 하면 세 개의 곱이 $\cos 2x$에 대한 삼차식(cubic)이 되고, 그 인수가 눈에 보인다. (ii)에서는 탄젠트를 없앤 뒤 각 인수를 종류가 반대인 짝과 묶으면, 방정식 전체가 간단한 두 인수의 곱으로 정리된다. 추가로 주의할 점은 탄젠트가 정의되지 않는 점들뿐이다.

풀이

항등식

두 전개식

$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B, \qquad \cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$$

를 더하면 $\cos(A+B)+\cos(A-B) = 2\cos A\cos B$를 얻는다. $A = 3a$, $B = a$로 두면

$$\cos a\cos 3a = \tfrac{1}{2}(\cos 4a + \cos 2a),$$

이므로 요구된 식이 성립한다. 같은 방법으로 $\sin(A\pm B) = \sin A\cos B \pm \cos A\sin B$를 더하면 $\sin(A+B)+\sin(A-B) = 2\sin A\cos B$를 얻는다. $A = a$, $B = 3a$로 두고 $\sin(-2a) = -\sin 2a$를 이용하면

$$\sin a\cos 3a = \tfrac{1}{2}(\sin 4a - \sin 2a).$$

(역할을 바꾸어 $A = 3a$, $B = a$로 두면 짝이 되는 식 $\cos a\sin 3a = \tfrac{1}{2}(\sin 4a + \sin 2a)$를 얻으며, 이 식도 뒤에서 필요하다.)

소문항 (i)

첫 번째 항등식에 의해 $4\cos x\cos 2x\cos 3x = 2\cos 2x\,(\cos 4x + \cos 2x)$이다. $c = \cos 2x$로 놓으면 $\cos 4x = 2c^2 - 1$이다. 방정식은

$$2c\,(2c^2 + c - 1) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 4c^3 + 2c^2 - 2c - 1 = 0.$$

이 된다. 항을 둘씩 묶으면 $2c^2(2c+1) - (2c+1) = 0$, 즉

$$(2c+1)(2c^2 - 1) = 0,$$

이므로 $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ 또는 $\cos 2x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$이다.

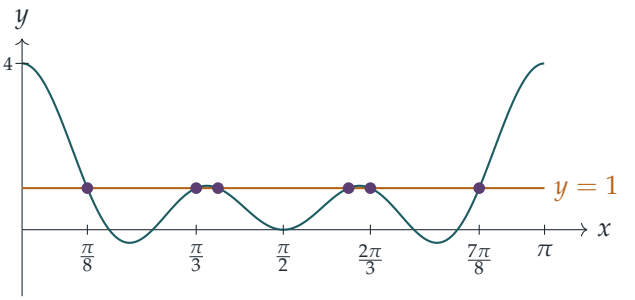
$0 \le x \le \pi$이면 $0 \le 2x \le 2\pi$이고, -1과 1 사이(양 끝 제외)에 있는 $\cos 2x$의 각 값은 이 범위에서 $2x$의 값을 두 개씩 준다.

$$\begin{aligned}
\cos 2x = -\tfrac{1}{2} &\implies 2x = \tfrac{2\pi}{3},\ \tfrac{4\pi}{3} &&\implies x = \tfrac{\pi}{3},\ \tfrac{2\pi}{3};\\
\cos 2x = \tfrac{1}{\sqrt{2}} &\implies 2x = \tfrac{\pi}{4},\ \tfrac{7\pi}{4} &&\implies x = \tfrac{\pi}{8},\ \tfrac{7\pi}{8};\\
\cos 2x = -\tfrac{1}{\sqrt{2}} &\implies 2x = \tfrac{3\pi}{4},\ \tfrac{5\pi}{4} &&\implies x = \tfrac{3\pi}{8},\ \tfrac{5\pi}{8}.
\end{aligned}$$

모든 단계가 가역(reversible)이었으므로 해는

$$x = \frac{\pi}{8},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{3\pi}{8},\ \frac{5\pi}{8},\ \frac{2\pi}{3},\ \frac{7\pi}{8}.$$

이다. 그래프를 보면 직선 $y = 1$과 정확히 여섯 번 만남을 확인할 수 있다.



소문항 (ii)

$\tan x = \tan 2x \tan 3x \tan 4x$라 하자. 이 식이 의미를 가지려면 네 탄젠트가 모두 정의되어야 하므로 $\cos x$, $\cos 2x$, $\cos 3x$, $\cos 4x$는 모두 0이 아니다. 따라서 양변에 $\cos x\cos 2x\cos 3x\cos 4x$를 곱하면

$$\sin x\cos 3x \cdot \cos 2x\cos 4x = \cos x\sin 3x \cdot \sin 2x\sin 4x.$$

를 얻는다.

생각해 보기 왜 $\sin x$를 $\cos 3x$와, $\cos x$를 $\sin 3x$와 짝지을까?

바로 이 곱들이 앞의 항등식으로 합으로 바뀌는 곱이고, 두 합 모두 방정식의 다른 곳에 이미 나타나는 $\sin 4x$와 $\sin 2x$만 포함하기 때문이다. $\sin x \cos 3x = \frac{1}{2}(\sin 4x - \sin 2x)$와 $\cos x \sin 3x = \frac{1}{2}(\sin 4x + \sin 2x)$를 이용하고 양변을 두 배 하면

$$(\sin 4x - \sin 2x)\cos 2x \cos 4x = (\sin 4x + \sin 2x)\sin 2x \sin 4x.$$

이제 좌변의 $\sin 2x \cos 2x$를 $\frac{1}{2}\sin 4x$로 바꾸면 모든 항이 인수 $\sin 4x$를 갖는다.

$$\sin 4x \cos 4x \cos 2x - \tfrac{1}{2}\sin 4x \cos 4x = \sin 4x \sin^2 2x + \sin 4x \sin 4x \sin 2x.$$

모든 항을 한쪽으로 옮기면

$$\sin 4x \left[(\cos 4x \cos 2x - \sin 4x \sin 2x) - \left(\sin^2 2x + \tfrac{1}{2}\cos 4x\right)\right] = 0.$$

첫 번째 괄호는 $\cos(4x + 2x) = \cos 6x$이다. 두 번째 괄호에서 $\sin^2 2x = \frac{1}{2}(1 - \cos 4x)$이므로 $\sin^2 2x + \frac{1}{2}\cos 4x = \frac{1}{2}$이다. 따라서

$$\sin 4x \left(\cos 6x - \tfrac{1}{2}\right) = 0,$$

이므로 요구된 대로 $\cos 6x = \frac{1}{2}$ 또는 $\sin 4x = 0$이다.

이제 $0 \le x \le \pi$에서 $(\star)$의 해를 구하자.

생각해 보기 $\sin 4x(\cos 6x - \frac{1}{2}) = 0$의 모든 해가 $(\star)$의 해일까?

반드시 그렇지는 않다. 거꾸로 되돌릴 수 없을 수도 있는 단계는 코사인들을 곱한 단계뿐이고, 이 단계는 네 탄젠트가 모두 정의될 때에만 가역이다. 따라서 $(\star)$의 해는 $\sin 4x(\cos 6x - \frac{1}{2}) = 0$의 해 가운데 $\cos x, \cos 2x, \cos 3x, \cos 4x \neq 0$인 것들이다.

$\sin 4x = 0$인 경우. $[0, \pi]$에서 이는 $x = 0,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{4},\ \pi$를 준다. $x = \frac{\pi}{4}$와 $x = \frac{3\pi}{4}$에서는 $\tan 2x$가 정의되지 않고, $x = \frac{\pi}{2}$에서는 $\tan x$가 정의되지 않는다. $x = 0$과 $x = \pi$에서는 모든 탄젠트가 0이고 $(\star)$는 $0 = 0$이 된다. 따라서 $x = 0$과 $x = \pi$는 해이다.

$\cos 6x = \frac{1}{2}$인 경우. 이때 $6x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$이므로 $x = \frac{(6k \pm 1)\pi}{18}$이다. $0 \le 6x \le 6\pi$이므로

$$x = \frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}, \frac{11\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{17\pi}{18}.$$

를 얻는다. 각각은 m이 3의 배수가 아닌 $\frac{m\pi}{18}$ 꼴이다. 코사인 $\cos nx$가 0이 되는 것은 nx가 $\frac{\pi}{2} = \frac{9\pi}{18}$의 홀수 배일 때뿐이고, 그러려면 $9 \mid nm$이어야 한다. $3 \nmid m$이므로 $9 \mid n$이어야 하는데, $n \in \{1, 2, 3, 4\}$에 대해서는 불가능하다. 따라서 네 탄젠트가 모두 정의되며 이 여섯 값은 모두 해이다.

종합하면 $(\star)$는 $0 \le x \le \pi$에서 여덟 개의 해를 갖는다.

$$x = 0,\ \frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}, \frac{11\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{17\pi}{18},\ \pi.$$

검산

- (i)에서 $x = \frac{\pi}{8}$일 때: $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$이고 $\cos\frac{3\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$이므로, 곱은 $4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} = 1$이다.
- (ii)에서 $x = \frac{\pi}{18} = 10°$일 때: $\tan 10° \approx 0.17633$이고, $\tan 20° \tan 30° \tan 40° \approx 0.36397 \times 0.57735 \times 0.83910 \approx 0.17633$이다.
- 컴퓨터로 $[0, \pi]$에서 두 방정식을 조사하면 각각 정확히 여섯 개와 여덟 개의 해가 위의 값에서 나타난다.

흔한 실수

- (ii)에서 $x = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$를 해로 남겨 두는 것: 이 값들은 $\sin 4x = 0$을 만족하지만 $(\star)$의 탄젠트 하나를 정의되지 않게 만든다.
- $x = 0$과 $x = \pi$를 빠뜨리거나, 각 주기에서 $2x$(또는 $6x$)의 두 번째 값을 놓치는 것.
- 정리하는 도중에 $\sin 4x$로 나누어, 문제에서 찾으라고 한 인수를 잃어버리는 것.

STEP 너머

곱을 합으로 바꾸는 공식(product-to-sum formulae)은 $e^{iA}e^{iB} = e^{i(A+B)}$가 실변수 세계에 드리운 그림자이다. $\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$로 쓰면 코사인의 어떤 곱이든 합으로 바뀌는데, 이는 함수를 $\cos nx$와 $\sin nx$의 합으로 전개하는 푸리에 급수(Fourier series)로 가는 첫걸음이다. (ii)에 숨어 있는 놀라운 항등식 $\tan 10° = \tan 20° \tan 30° \tan 40°$는 삼각함수 값을 단위근(roots of unity)으로 바라볼 때 나타나는 전형적인 놀라움이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이 관점을 아름답게 전개한다.

풀이

STEP II 2021, 문제 2

순수수학 • 근의 대칭함수

> **STEP II 2021, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

핵심 아이디어

두 수의 거듭제곱 합(power sum)은 단 두 개의 양, 곧 두 수의 합과 곱에 의해 결정된다. $a+b$와 a^2+b^2을 알면 곱 ab가 정해지고, 따라서 a^3+b^3도 정해진다. 이것이 소문항 (i)의 제약 조건이다. 소문항 (iii)은 같은 사실을 c를 "제거한" 상태에서 사용한다. 세 변수의 합에서 c, c^2, c^3을 빼면 두 변수의 합이 남고, 소문항 (i)의 제약 조건은 c가 만족해야 하는 삼차방정식(cubic equation)으로 바뀐다.

풀이

소문항 (i)

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$에서 $p^2 = q+2ab$를 얻으므로

$$ab = \frac{p^2-q}{2}.$$

이제 인수분해(factorisation) $a^3+b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$를 이용하면

$$\begin{aligned} r = a^3+b^3 &= p^3 - 3p\cdot\frac{p^2-q}{2} \\ &= \frac{2p^3-3p^3+3pq}{2} = \frac{3pq-p^3}{2}. \end{aligned}$$

따라서 요구한 대로 $3pq-p^3 = 2r$이다. 여기서 p, q, r이 실수라는 사실은 전혀 사용하지 않았다는 점에 주목하자. 이 항등식(identity)은 임의의 복소수(complex number) a, b에 대해 성립한다. 이 사실은 소문항 (iii)에서 필요하다.

소문항 (ii)

이차방정식(quadratic equation) $2x^2 - 2px + (p^2 - q) = 0$은 근의 공식(quadratic formula)으로 주어지는 두 근(root)을 항상 가진다(두 근이 같을 수도 있고, 실수가 아닐 수도 있다). 이 두 근을 a와 b라 하자. 양변을 2로 나누면 이차식은 $x^2 - px + \frac{1}{2}(p^2 - q)$이므로

$$a + b = p, \qquad ab = \frac{p^2 - q}{2}.$$

이로부터 $(*)$의 첫 번째 방정식이 바로 나온다. 다음으로

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = p^2 - (p^2 - q) = q,$$

이것이 두 번째 방정식이고,

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = p^3 - \frac{3p(p^2 - q)}{2} = \frac{3pq - p^3}{2} = r,$$

마지막 단계에서 가정 $3pq - p^3 = 2r$을 사용하였다. 따라서 $(*)$의 세 방정식이 모두 성립한다.

이차방정식을 이렇게 고른 것은 운이 아니다. 소문항 (i)이 ab가 무엇이어야 하는지 알려 주었고, 두 근의 합이 p, 곱이 $\frac{1}{2}(p^2 - q)$인 이차식은 정확히 $x^2 - px + \frac{1}{2}(p^2 - q)$이다.

소문항 (iii)

다음과 같이 놓자.

$$p = a + b = s - c, \qquad q = a^2 + b^2 = t - c^2, \qquad r = a^3 + b^3 = u - c^3.$$

? **생각해 보기** 소문항 (i)에서는 p, q, r이 실수라고 가정했지만, 여기서는 복소수일 수도 있는 c가 들어 있다. 그래도 소문항 (i)을 사용할 수 있을까?

그렇다. 소문항 (i)의 끝에서 언급했듯이 그 논증은 순수한 대수 계산이며 실수라는 성질을 전혀 사용하지 않았다. 따라서 $3pq - p^3 = 2r$, 곧

$$3(s - c)(t - c^2) - (s - c)^3 = 2(u - c^3).$$

전개하면

$$3(s - c)(t - c^2) = 3st - 3sc^2 - 3tc + 3c^3,$$
$$(s - c)^3 = s^3 - 3s^2c + 3sc^2 - c^3,$$

이므로 방정식은 다음과 같이 된다.

$$3st - 3sc^2 - 3tc + 3c^3 - s^3 + 3s^2c - 3sc^2 + c^3 = 2u - 2c^3.$$

c의 거듭제곱별로 정리하면

$$6c^3 - 6sc^2 + 3(s^2 - t)c + 3st - s^3 - 2u = 0.$$

따라서 요구한 대로 c는 $6x^3 - 6sx^2 + 3(s^2 - t)x + 3st - s^3 - 2u = 0$의 근이다.

계수(coefficient)는 s, t, u에만 의존하며, 이들은 a, b, c에 대해 대칭(symmetric)이다. c 대신 a(또는 b)를 놓고 같은 논증을 반복하면 a와 b도 근임을 알 수 있다. 따라서 나머지 두 근은 a와 b이다.

? **생각해 보기** a, b, c가 서로 다르다는 사실이 왜 중요할까?

삼차방정식의 근은 많아야 세 개이다. a, b, c는 서로 다른 세 근이므로 이것이 근의 전부이고, 각각 단순근(simple root)이다. 따라서

$$6x^3 - 6sx^2 + 3(s^2 - t)x + 3st - s^3 - 2u = 6(x - a)(x - b)(x - c).$$

(예를 들어 $a = b$라면 근을 두 개만 알 뿐이어서 세 번째 근을 확정할 수 없다.) 상수항(constant term)을 비교하면 $3st - s^3 - 2u = -6abc = -6v$, 곧

$$s^3 - 3st + 2u = 6v.$$

소문항 (iv)

여기서는 $s = 3$, $t = 1$, $u = -3$, $v = 2$이다. 먼저 조건이 모순되지 않는지 확인하자. 소문항 (iii)의 조건은 $27 - 9 - 6 = 12 = 6 \times 2$가 되어 성립한다. 소문항 (iii)에 따르면 a, b, c는

$$6x^3 - 18x^2 + 3(9 - 1)x + 9 - 27 + 6 = 6x^3 - 18x^2 + 24x - 12 = 0,$$

곧 $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$의 근이어야 한다. $x = 1$을 대입하면 $1 - 3 + 4 - 2 = 0$이므로

$$x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = (x - 1)(x^2 - 2x + 2) = (x - 1)\big((x - 1)^2 + 1\big),$$

따라서 근은 1, $1 + \mathrm{i}$, $1 - \mathrm{i}$이다. 다음과 같이 잡자.

$$a = 1, \qquad b = 1 + \mathrm{i}, \qquad c = 1 - \mathrm{i}.$$

소문항 (iii)은 어디를 찾아봐야 하는지만 알려 주었으므로, 이제 직접 확인해야 한다.

- $a + b + c = 1 + (1 + \mathrm{i}) + (1 - \mathrm{i}) = 3$;
- $(1 + \mathrm{i})^2 = 2\mathrm{i}$이고 $(1 - \mathrm{i})^2 = -2\mathrm{i}$이므로 $a^2 + b^2 + c^2 = 1 + 2\mathrm{i} - 2\mathrm{i} = 1$;
- $(1 + \mathrm{i})^3 = 2\mathrm{i}(1 + \mathrm{i}) = -2 + 2\mathrm{i}$이고 $(1 - \mathrm{i})^3 = -2\mathrm{i}(1 - \mathrm{i}) = -2 - 2\mathrm{i}$이므로 $a^3 + b^3 + c^3 = 1 - 4 = -3$;
- $abc = 1 \cdot (1 + \mathrm{i})(1 - \mathrm{i}) = 1 \cdot 2 = 2$.

네 방정식 $(**)$이 모두 성립한다. (이 세 수의 순서를 어떻게 바꾸어도 똑같이 성립한다.)

검산

- 소문항 (i)에서 $a = 1, b = 2$로 놓으면 $p = 3, q = 5, r = 9$이고 $3pq - p^3 = 45 - 27 = 18 = 2r$이다.
- 소문항 (iii)에서 $a, b, c = 1, 2, 3$으로 놓으면 $s = 6$, $t = 14$, $u = 36$, $v = 6$이고 $s^3 - 3st + 2u = 216 - 252 + 72 = 36 = 6v$이다. 삼차식은 $6x^3 - 36x^2 + 66x - 36 = 6(x-1)(x-2)(x-3)$으로, 마땅히 그래야 하는 대로이다.
- 소문항 (i)–(iii)의 항등식은 무작위로 고른 많은 복소수 a, b, c에 대해 컴퓨터로도 확인하였다.

흔한 실수

- 소문항 (iii)에서 삼차식의 계수가 a, b, c에 대해 대칭이라는 점을 언급하지 않고 "a와 b가 나머지 근이다"라고만 쓰는 것.
- 서로 다르다는 조건을 이용해 a, b, c가 근의 **전부**임을 확인하지 않고, 근의 곱으로부터 $s^3 - 3st + 2u = 6v$를 이끌어 내는 것.
- 소문항 (iv)에서 삼차방정식의 근을 구하는 데서 멈추는 것. 문제는 네 방정식을 직접 확인하라고 요구한다.

STEP 너머

이 문제는 거듭제곱 합 $a^k + b^k + c^k$를 기본 대칭 함수(elementary symmetric functions) $a + b + c$, $ab + bc + ca$, abc와 연결하는 뉴턴 항등식(Newton's identities)의 간단한 경우이다. 대칭 다항식의 기본 정리(fundamental theorem of symmetric polynomials)에 따르면 모든 대칭 다항식은 기본 대칭 다항식으로 나타낼 수 있으며, 이것이 갈루아 이론(Galois theory)의 출발점이다. 더 알고 싶다면 Allenby, *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)를 참고하라.

풀이

STEP II 2021, 문제 3

순수수학 • 정수 부분과 소수 부분

> **STEP II 2021, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

핵심 아이디어

모든 실수는 정수 부분(integer part)과 $[0,1)$에 속하는 소수 부분(fractional part)으로 유일하게 나뉜다. 그러므로 어떤 방정식이 "정수 더하기 $[0,1)$에 속하는 수는 4.9이다"라고 말하면 두 조각이 모두 결정된다. 정수는 4이어야 하고 소수 부분은 0.9이어야 한다. (ii)와 (iii)에서는 방정식들이 서로 얽혀 있지만, 세 방정식을 모두 더하면 각각의 $\lfloor t \rfloor + \{t\}$가 다시 합쳐져 t가 된다. 그러면 깔끔한 일차방정식(linear equation) 하나를 얻고, 여기서 원래 방정식을 하나씩 빼면 미지수들이 정확히 그 "정수 더하기 소수 부분" 꼴로 분리된다.

풀이

풀이 전체에서 다음 사실을 사용한다. n이 정수이고 $0 \le f < 1$이며 $n + f = c$이면 $n = \lfloor c \rfloor$이고 $f = \{c\}$이다. 이것이 성립하는 이유는 $n \le c < n+1$이므로 n이 c를 넘지 않는 가장 큰 정수로 정해지기 때문이다.

소문항 (i)

첫째 방정식에서 $\lfloor x \rfloor$는 정수이고 $0 \le \{y\} < 1$이므로

$$\lfloor x \rfloor = 4, \qquad \{y\} = 0.9.$$

둘째 방정식에서 $\lfloor y \rfloor$는 정수이고 $0 \le \{x\} < 1$이므로 $\lfloor y \rfloor = \lfloor -1.4 \rfloor = -2$이고 $\{x\} = -1.4 - (-2) = 0.6$이다. 따라서

$$x = 4 + 0.6 = 4.6, \qquad y = -2 + 0.9 = -1.1.$$

이 값들은 두 방정식을 모두 만족하며($4 + 0.9 = 4.9$이고 $0.6 - 2 = -1.4$), 이것이 유일한 해임을 보였다.

소문항 (ii)

세 방정식을 더한다. x, y, z는 각각 한 번은 그 자체로 나타나고, 또 한 번은 서로 다른 두 방정식에 걸쳐 $\lfloor\cdot\rfloor + \{\cdot\}$로 나뉘어 나타난다.

$$(x+y+z) + (\{x\}+\lfloor x\rfloor) + (\lfloor y\rfloor + \{y\}) + (\{z\}+\lfloor z\rfloor) = 3.9 + 5.3 + 5,$$

즉 $2(x+y+z) = 14.2$이므로

$$x+y+z = 7.1.$$

생각해 보기 이제 $x+y+z$를 알았으니, 여기서 원래 방정식 하나를 빼면 무엇이 남는가?

$x+y+z = 7.1$에서 첫째 방정식을 빼면 x가 없어지고 $y-\lfloor y\rfloor$와 $z-\{z\}$가 남는다.

$$\{y\} + \lfloor z\rfloor = 7.1 - 3.9 = 3.2,$$

이것이 보이라고 한 결과이다. 같은 방법으로 둘째와 셋째 방정식을 빼면

$$\lfloor x\rfloor + \{z\} = 7.1 - 5.3 = 1.8, \qquad \{x\} + \lfloor y\rfloor = 7.1 - 5 = 2.1.$$

이 식들은 모두 "정수 더하기 소수 부분" 꼴이므로

$$\begin{aligned} \lfloor z\rfloor &= 3, & \{y\} &= 0.2,\\ \lfloor x\rfloor &= 1, & \{z\} &= 0.8,\\ \lfloor y\rfloor &= 2, & \{x\} &= 0.1. \end{aligned}$$

따라서 $x = 1.1, y = 2.2, z = 3.8$이다. 이것이 가능한 유일한 해이며, 실제로 성립한다.

$$1.1 + 2 + 0.8 = 3.9, \qquad 0.1 + 2.2 + 3 = 5.3, \qquad 1 + 0.2 + 3.8 = 5.$$

소문항 (iii)

같은 요령이 통한다. 세 방정식을 더하고 $2\lfloor y\rfloor + 2\{y\} = 2y$를 이용하면

$$2x + 4y + 2z = 14.2, \qquad \text{따라서} \qquad x + 2y + z = 7.1.$$

여기서 각 방정식을 차례로 빼면

$$2\{y\} + \lfloor z\rfloor = 3.2, \qquad \lfloor x\rfloor + \{z\} = 1.8, \qquad \{x\} + 2\lfloor y\rfloor = 2.1.$$

가운데 방정식은 익숙한 꼴이므로 $\lfloor x\rfloor = 1$이고 $\{z\} = 0.8$이다.

셋째 방정식에서 $2\lfloor y\rfloor$는 여전히 정수이고 $0 \le \{x\} < 1$이므로 앞의 논리가 그대로 적용된다. 즉 $2\lfloor y\rfloor = 2$이고 $\{x\} = 0.1$이다. 따라서 $\lfloor y\rfloor = 1$이고 $x = 1.1$이다.

? 생각해 보기 첫째 방정식도 여전히 답을 하나로 정해 주는가?

그렇지 않다. 여기서 $2\{y\}$는 $[0,1)$이 아니라 $[0,2)$에 속하므로, 3.2를 정수 더하기 $[0,2)$에 속하는 수로 나타내는 방법이 두 가지 있다.

- $\lfloor z \rfloor = 3, 2\{y\} = 0.2$, 따라서 $\{y\} = 0.1$;
- $\lfloor z \rfloor = 2, 2\{y\} = 1.2$, 따라서 $\{y\} = 0.6$.

($\lfloor z \rfloor \geq 4$이면 $2\{y\} < 0$이고, $\lfloor z \rfloor \leq 1$이면 $2\{y\} \geq 2.2$이므로 둘 다 불가능하다.) $\lfloor y \rfloor = 1$과 $\{z\} = 0.8$을 함께 쓰면 두 후보를 얻는다.

$$(x,y,z) = (1.1,\ 1.1,\ 3.8) \qquad \text{또는} \qquad (x,y,z) = (1.1,\ 1.6,\ 2.8).$$

두 후보 모두 원래 연립방정식을 만족한다.

$$\begin{aligned}(1.1,1.1,3.8):&\quad 1.1+2+0.8=3.9,\quad 0.1+2.2+3=5.3,\quad 1+0.2+3.8=5;\\ (1.1,1.6,2.8):&\quad 1.1+2+0.8=3.9,\quad 0.1+3.2+2=5.3,\quad 1+1.2+2.8=5.\end{aligned}$$

따라서 (iii)의 연립방정식의 해는 정확히 이 두 개이다.

검산

위에서 한 것처럼 답을 다시 대입하면 모든 방정식이 성립한다. 독립적인 확인으로, x와 y를 $[-10,10]$에 속하는 0.1의 모든 배수에 걸쳐 컴퓨터로 탐색해 보면 (i)의 해는 정확히 하나, (ii)의 해도 하나, (iii)의 해는 정확히 위의 두 개가 나온다. 또한 (ii)의 해에 대하여 $\{y\} + \lfloor z \rfloor = 0.2 + 3 = 3.2$가 되어 마땅히 그래야 하는 대로 성립함에 주목하자.

흔한 실수

- 음수의 바닥함수(floor) 값을 잘못 구하는 실수. $\lfloor -1.4 \rfloor = -2$이지 -1이 아니므로, (i)에서 $\{x\} = 0.6$이다.
- (iii)에서 $2\{y\}$를 소수 부분이라고 가정하여 해를 하나만 찾는 실수. 이 값은 $[0,2)$에 속하며, 그 때문에 두 번째 해가 나타난다.
- 후보를 원래 방정식에 대입해 확인하지 않는 실수. 위의 추론은 그 값들만이 가능한 후보라는 것을 보일 뿐이다.

STEP 너머

$x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$로 쓰는 것은 법 1에 대하여(modulo 1) 계산하는 것과 같다. 소수 부분은 원 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$에서의 x의 상이다. 바닥함수와 소수 부분은 정수론 곳곳에 등장한다. 예를 들어 $n!$을 나누는 소수(prime)의 최고 거듭제곱을 구하는 르장드르(Legendre)의 공식에 나오고, 무리수(irrational) α에 대하여 $n\alpha$의 소수 부분들이 $[0,1)$에 어떻게 퍼져 있는지를 연구할 때에도 나온다. 대븐포트(Davenport)의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 이러한 생각들에 대한 훌륭한 입문서이다.

풀이

STEP II 2021, 문제 4

순수수학 • 람베르트 W 함수

STEP II 2021, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

이 문제는 *Beyond STEP*의 3.9 절 **새로운 함수 만들기**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch03/lambert-w.html

핵심 아이디어

함수 g는 xe^x를 되돌리는 함수이므로, 이 문제 전체는 각 방정식을 어떤 새로운 변수 u에 대하여 $ue^u = c$ 꼴로 변형하는 것에 관한 것이다. 일단 이 꼴이 되면 소문항 (i)의 그래프가 모든 것을 알려 준다. $c < -\frac{1}{e}$이면 해가 없고, $-\frac{1}{e} < c < 0$이면 해가 두 개인데, g는 그중 $u \geq -1$인 것만을 골라낸다. 로그(logarithm)는 $x = e^u$로 치환하여 처리한다.

풀이

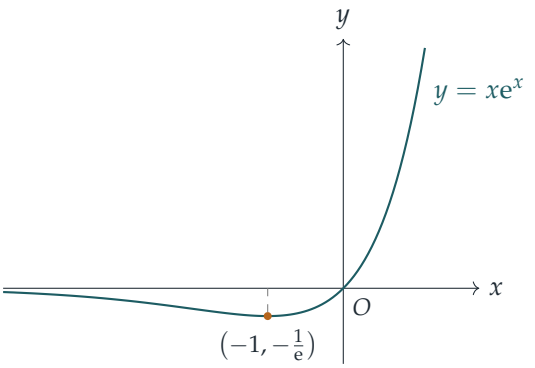
소문항 (i)

$y = xe^x$라 하자. 곱의 미분법(product rule)에 의하여

$$\frac{dy}{dx} = (1 + x)e^x,$$

이고, $e^x > 0$이므로 이 값은 $x = -1$에서만 0이 된다. 기울기는 $x < -1$에서 음수이고 $x > -1$에서 양수이므로, 유일한 정류점(stationary point)은 $\left(-1, -\frac{1}{e}\right)$에서의 극소점이다.

곡선의 부호는 x의 부호와 같고, 곡선은 원점을 지난다. $x \to \infty$일 때 $y \to \infty$로 빠르게 커진다. $x \to -\infty$일 때는 e^x가 x를 압도하므로, 아래쪽에서 $y \to 0$이다. 즉 x축의 음의 부분이 점근선(asymptote)이다.



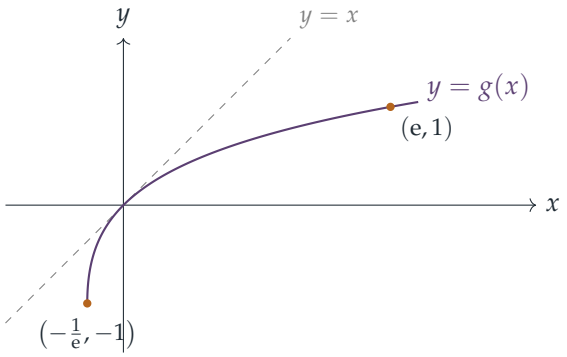
소문항 (ii)

f가 역함수(inverse function)를 가지려면 $[a, \infty)$에서 일대일(one-to-one)이어야 한다. $a < -1$이면 이 구간은 $x = -1$ 근처의 극소점 양쪽에 있는 점들을 포함하고, f는 연속이며 $(-\infty, -1]$에서 순감소, $[-1, \infty)$에서 순증가하므로, $-\frac{1}{\mathrm{e}}$보다 조금 큰 어떤 값을 두 번 갖게 된다. $a \geq -1$이면 f는 순증가하므로 일대일이다. 따라서 가능한 최솟값은

$$a = -1.$$

이다. 이때 f는 $[-1, \infty)$를 $[-\frac{1}{\mathrm{e}}, \infty)$ 위로 보내므로, g의 정의역(domain)은 $[-\frac{1}{\mathrm{e}}, \infty)$이고 치역(range)은 $[-1, \infty)$이다.

g의 그래프는 소문항 (i)의 오른쪽 가지를 직선 $y = x$에 대하여 대칭이동한 것이다. 이 그래프는 $\left(-\frac{1}{\mathrm{e}}, -1\right)$에서 수직 접선(극소점에서의 수평 접선을 대칭이동한 것)을 가지며 시작하고, 원점을 지나며 그곳에서 기울기는 1이다($f'(0) = 1$이므로). 그리고 점점 더 느리게 증가한다. $g(\mathrm{e}) = 1$이고, x가 클 때 $g(x)$는 $\ln x$보다 느리게 증가한다.



소문항 (iii)에서는 두 가지 사실을 반복해서 사용한다. $c \geq -\frac{1}{\mathrm{e}}$일 때 $u = g(c)$는 $u\mathrm{e}^u = c$의 해 가운데 $u \geq -1$인 것이다. 또 소문항 (i)의 그래프로부터 방정식 $u\mathrm{e}^u = c$는

- $c < -\frac{1}{\mathrm{e}}$이면 실수해가 없다.

- $-\frac{1}{\mathrm{e}} < c < 0$이면 실수해가 두 개, 즉 $g(c) \in (-1, 0)$과 -1보다 작은 다른 하나가 있다.
- $c \geq 0$이면 실수해가 $g(c)$ 하나뿐이다($u < 0$이면 좌변이 음수이기 때문이다).

소문항 (iii)

(a) (0이 되는 일이 없는) e^x를 곱하면

$$x\mathrm{e}^x = \tfrac{1}{5}.$$

이다. $\frac{1}{5} > 0$이므로 실근은 정확히 하나이고, 그것은

$$x = g\left(\tfrac{1}{5}\right).$$

이다.

(b) $\ln x$가 정의되려면 $x > 0$이어야 하므로, $u = \ln x$를 실수로 하여 $x = \mathrm{e}^u$로 놓는다. 그러면 방정식은

$$2u\mathrm{e}^u + 1 = 0 \iff u\mathrm{e}^u = -\tfrac{1}{2}.$$

이 된다. 그런데 모든 u에 대하여 $u\mathrm{e}^u \geq -\frac{1}{\mathrm{e}}$이고, $\mathrm{e} > 2$이므로 $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{\mathrm{e}}$이다. 따라서 실근은 없다.

(c) 앞에서처럼 $x = \mathrm{e}^u$로 놓으면

$$3u\mathrm{e}^u + 1 = 0 \iff u\mathrm{e}^u = -\tfrac{1}{3}.$$

이다. 이제 $\mathrm{e} < 3$이므로 $-\frac{1}{\mathrm{e}} < -\frac{1}{3} < 0$이고, 따라서 u의 값이 두 개 있으며, ($u \mapsto \mathrm{e}^u$가 일대일이므로) 실근 x도 두 개이다. 그중 하나는

$$x = \mathrm{e}^{g(-1/3)}.$$

이다.

? **생각해 보기** 이것은 두 근 중 큰 근인가, 작은 근인가?

u의 다른 값은 -1보다 작은 반면, $g(-\frac{1}{3}) > -1$이다. e^u는 u에 대하여 증가하므로, 근 $\mathrm{e}^{g(-1/3)}$은 두 근 중 큰 근이다.

(d) 이번에도 $x > 0$이다. 지수를 취하면 $x = 3\ln x \iff \mathrm{e}^{x/3} = x \iff x\mathrm{e}^{-x/3} = 1$이다. $u\mathrm{e}^u$ 꼴을 얻으려면 앞에 곱해진 인수가 지수와 일치해야 하므로, $u = -\frac{x}{3}$으로 놓고 양변에 $-\frac{1}{3}$을 곱한다.

$$\left(-\frac{x}{3}\right)\mathrm{e}^{-x/3} = -\frac{1}{3}.$$

(c)에서처럼 $-\frac{1}{\mathrm{e}} < -\frac{1}{3} < 0$이므로 u의 값이 두 개 있고, 둘 다 음수이므로 양의 근 $x = -3u$가 두 개 생긴다. 그중 한 근은

$$x = -3\,g\left(-\tfrac{1}{3}\right).$$

이다. 이번에는 사상 $u \mapsto x = -3u$가 감소한다. u의 다른 값은 -1보다 작으므로 다른 근은 3보다 크고, 우리가 구한 근은 $x = -3g(-\frac{1}{3}) < 3$을 만족한다. 따라서 우리가 구한 근은 두 근 중 작은 근이다.

소문항 (iv)

$x > 0$이므로 로그를 취하면 $x^x = 10 \iff x \ln x = \ln 10$이다. $x = \mathrm{e}^u$로 놓으면

$$u\mathrm{e}^u = \ln 10.$$

이다. $\ln 10 > 0$이므로 이 방정식의 해는 $u = g(\ln 10)$ 하나뿐이고, 따라서 근은

$$x = \mathrm{e}^{g(\ln 10)}.$$

이다. (동치로, $c \neq 0$일 때 $\mathrm{e}^{g(c)} = c/g(c)$이므로 근은 $\dfrac{\ln 10}{g(\ln 10)}$이다.)

검산

- 수치적으로 $g(-\frac{1}{3}) \approx -0.6191$이다. (c)에서 이로부터 $x \approx 0.5384$를 얻고, $3(0.5384)\ln(0.5384) \approx -1.000$이다. 다른 근은 약 0.2204로, 실제로 더 작다.
- (d)에서 $x \approx 1.8572$이고 $3\ln 1.8572 \approx 1.8572$이다. 다른 근은 약 $4.536 > 3$으로, 예측한 대로이다.
- (iv)에서 $g(\ln 10) \approx 0.9188$이므로 $x \approx 2.5062$이고, $2.5062^{2.5062} \approx 10.00$이다.
- (b)에서 $2x \ln x + 1$의 최솟값은 ($x = \frac{1}{\mathrm{e}}$에서) $1 - \frac{2}{\mathrm{e}} \approx 0.264 > 0$이므로, 근이 없음이 확인된다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)에서 곡선이 그곳에서 일대일로 "보인다"는 이유로 $a = 0$으로 잡는 것. 극점은 원점이 아니라 $x = -1$에 있다.
- (d)에서 $-\frac{1}{3}$을 곱하는 것을 잊어, 앞의 인수가 지수와 일치하지 않아 g를 적용할 수 없게 되는 것.
- g를 통해 구한 근이 항상 큰 근이라고 가정하는 것. $x = \mathrm{e}^u$가 u에 대하여 증가하는 (c)에서는 그렇지만, $x = -3u$가 순서를 뒤집는 (d)에서는 그렇지 않다.

STEP 너머

함수 g는 **램버트 W 함수**(Lambert W function)의 주가지(principal branch)로, 보통 W_0로 쓴다. $-\frac{1}{\mathrm{e}} < c < 0$일 때 $u\mathrm{e}^u = c$의 다른 해는 두 번째 가지 W_{-1}에서 나온다. 이 함수는 지연 미분방정식(delay differential equation), 조합론(레이블이 붙은 나무의 개수 세기), 물리학 등 미지수가 지수함수의 안과 밖에 동시에 나타나는 곳이면 어디서나 등장한다. 일대일이 되지 않는 점을 넘어 역함수를 연장하는 것은 복소해석학(complex analysis)에서 가지와 분기점(branch point) 이론의 출발점이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이러한 아이디어를 만나기에 아름다운 책이다.

풀이

STEP II 2021, 문제 5

순수수학 • 일계 미분방정식

STEP II 2021, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

핵심 아이디어

소문항 (i)은 변수분리형(separable)도 아니고 다루기 쉬운 꼴의 선형(linear) 방정식으로 바로 보이지도 않는 일계 미분방정식(first-order differential equation)이지만, 제시된 치환(substitution)을 하면 곧바로 적분할 수 있는 방정식으로 바뀐다. 소문항 (ii)는 기하 문제처럼 보이지만, 접선(tangent)의 방정식을 쓰고 그 접선이 $(1, t)$를 지나야 한다는 조건을 넣으면 $a = 1$인 소문항 (i)의 방정식이 정확히 나온다. 그래프의 개형은 도함수(derivative)에서 얻는데, 이 도함수는 놀랄 만큼 간단하다.

풀이

소문항 (i)

이 방정식은 $x \neq a$일 때만 의미가 있으므로, $x > a$인 구간이나 $x < a$인 구간에서 생각한다. $y = (x-a)u$로 두면 곱의 미분법(product rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + (x-a)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

이를 방정식에 대입하면

$$(x-a)u + (x-a)^2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = (x-a)u - x \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{(x-a)^2}.$$

u가 들어 있는 항이 소거되는데, 바로 이것이 이 치환의 핵심이다. $x = (x-a) + a$로 쓰면

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{x-a} - \frac{a}{(x-a)^2}, \qquad \text{따라서} \qquad u = -\ln|x-a| + \frac{a}{x-a} + c$$

이고, 여기서 c는 상수이다. 양변에 $x-a$를 곱하면

$$\boxed{y = a + (x-a)\big(c - \ln|x-a|\big)}$$

이다. 단, 상수 c는 $x = a$의 양쪽에서 서로 다를 수 있다.

확인해 보자. $y' = c - \ln|x-a| - 1$이므로 $(x-a)y' = (y-a) - (x-a) = y - x$이고, 이는 주어진 방정식과 같다.

소문항 (ii)

점 $\big(t, \mathrm{f}(t)\big)$에서의 접선은 $y = \mathrm{f}(t) + \mathrm{f}'(t)(x-t)$이다. 이 접선이 $(1,t)$를 지날 필요충분조건은

$$t = \mathrm{f}(t) + \mathrm{f}'(t)(1-t), \qquad \text{즉,} \qquad (t-1)\,\mathrm{f}'(t) = \mathrm{f}(t) - t.$$

t를 x로 바꾸어 쓰면, 이는 $x \neq 1$에서 성립하는 $a = 1$인 소문항 (i)의 방정식이다. 따라서 $x < 1$과 $x > 1$ 각각에서

$$\mathrm{f}(x) = 1 + (x-1)\big(c - \ln|x-1|\big),$$

이고, 상수는 양쪽에서 따로 정한다.

> **생각해 보기** $\mathrm{f}(0) = 0$과 같은 조건 하나로 모든 x에서 곡선을 결정할 수 없는 이유는 무엇인가?

이 방정식은 $x = 1$에서 아무것도 알려 주지 않으므로, $x < 1$에서의 해와 $x > 1$에서의 해는 서로 독립이다. 그래서 문제에서 각 부분마다 조건을 따로 준 것이다.

(a) $x < 1$이면 $|x-1| = 1 - x$이다. 조건 $\mathrm{f}(0) = 0$에서 $0 = 1 + (-1)(c - \ln 1) = 1 - c$이므로 $c = 1$이고

$$\boxed{\mathrm{f}(x) = 1 + (x-1)\big(1 - \ln(1-x)\big) \quad (x < 1).}$$

미분하면 $\mathrm{f}'(x) = 1 - \ln(1-x) + (x-1)\cdot\dfrac{1}{1-x} = -\ln(1-x)$이다. 따라서 다음이 성립한다.

- $\mathrm{f}'(x) = 0$은 $1 - x = 1$일 때뿐이므로 정류점(stationary point)은 $(0,0)$ 하나이다. $x < 1$에서 $\mathrm{f}''(x) = \dfrac{1}{1-x} > 0$이므로 곡선은 아래로 볼록(convex)하고 $(0,0)$은 극소점(minimum)이다. 따라서 $\mathrm{f}(x) \geq 0$이고, 곡선은 원점에서 x축에 접한다.
- $x \to 1^-$일 때 $z = x - 1 \to 0$으로 두면, $z\ln|z| \to 0$을 이용하여 $\mathrm{f}(x) = 1 + z - z\ln|z| \to 1$이다. 기울기(gradient) $-\ln(1-x) \to +\infty$이므로, 곡선은 $(1,1)$을 향해 가면서 그곳에서 수직이 된다.
- $x \to -\infty$일 때 $x - 1$과 $1 - \ln(1-x)$는 모두 절댓값이 큰 음수이므로 $\mathrm{f}(x) \to +\infty$이다.

그래프를 그리는 데 도움이 되는 점으로는 $\mathrm{f}(1-\mathrm{e}) = 1$과 $\mathrm{f}(-1) = 2\ln 2 - 1 \approx 0.39$가 있다.

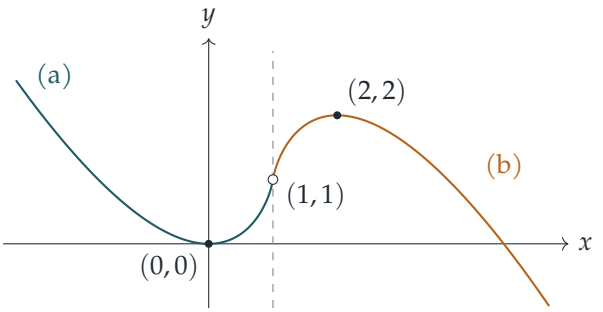
(b) $x > 1$이면 $|x-1| = x-1$이다. 조건 $f(2) = 2$에서 $2 = 1 + 1\cdot(c-0)$이므로 이번에도 $c = 1$이고

$$f(x) = 1 + (x-1)\big(1 - \ln(x-1)\big) \quad (x > 1), \qquad f'(x) = -\ln(x-1).$$

- 정류점은 $x = 2$, 즉 $(2,2)$ 하나뿐이다. 여기서 $f''(x) = -\dfrac{1}{x-1} < 0$이므로 곡선은 위로 볼록(concave)하고 $(2,2)$는 극대점(maximum)이다.
- $x \to 1^+$일 때 (같은 극한에 의해) $f(x) \to 1$이고 $f'(x) \to +\infty$이다. 즉 곡선은 $(1,1)$에서 수직으로 출발한다.
- $x \to \infty$일 때 $1 - \ln(x-1) \to -\infty$이므로 $f(x) \to -\infty$이다. 곡선은 $(1+\mathrm{e}, 1)$을 지나고, $x \approx 4.59$ 근처에서 x축과 한 번 만난다.

? 생각해 보기 (a)를 끝낸 뒤에 (b)의 개형을 더 빨리 알아내는 방법이 있을까?

있다. $s = |x-1|$로 두면 (a)의 곡선은 $f(1-s) = 1 - s(1-\ln s)$이고, (b)의 곡선은 $f(1+s) = 1 + s(1-\ln s)$이다. 따라서 $f(1+s) - 1 = -\big(f(1-s) - 1\big)$이다. 즉 (b)의 곡선은 (a)의 곡선을 $(1,1)$을 중심으로 반 바퀴 회전한 것이다. 극소점 $(0,0)$은 극대점 $(2,2)$로 옮겨진다.



곡선은 $x = 1$에서 정의되지 않지만(빈 원), 두 곡선 모두 수직인 접선을 가지며 $(1,1)$에 다가간다.

검산

- 접선의 성질을 직접 확인해 보자. $t = 0$에서 접선은 수평선 $y = 0$이고, 실제로 $(1,0)$을 지난다. $t = 2$에서 접선은 $y = 2$이고, $(1,2)$를 지난다.
- $t = -1$일 때: $f(-1) \approx 0.386$이고 $f'(-1) = -\ln 2 \approx -0.693$이다. $x = 1$에서 접선의 높이는 $0.386 + 2(-0.693) \approx -1.000$이고, 이는 t와 같다.

- 대칭성 확인: 모든 $s > 0$에 대하여 $f(1+s) + f(1-s) = 2$이다. 예를 들어 $f(4) + f(-2) = (4 - 3\ln 3) + (3\ln 3 - 2) = 2$이다.

흔한 실수

- $\ln|x-a|$에서 절댓값(modulus)을 빠뜨려서, 소문항 (a)에서 $x < 1$인 경우를 다루지 못하는 것.
- (a)에서 구한 상수가 $x > 1$에서도 저절로 적용된다고 가정하는 것. 이 문제에서는 우연히 같은 값이 나오지만, 이는 $f(2) = 2$를 이용해 확인해야 한다.
- $x \to 1$일 때 $f(x) \to 0$이라거나 발산한다고 결론짓는 것. 항 $(x-1)\ln|x-1|$은 0으로 수렴하므로 $f \to 1$이다. 발산하는 것은 기울기이다.

STEP 너머

방정식 $(x-a)y' = y - x$는 원점을 $x = a$, $y = a$로 옮기면 **동차**(homogeneous) 방정식이 된다. 즉 $X = x - a$, $Y = y - a$로 두면 $XY' = Y - X$가 된다. 이때 치환 $Y = Xu$는 동차 방정식을 푸는 표준적인 방법이다. y'의 계수가 0이 되는 점 $x = a$는 **특이점**(singular point)이며, 특이점 양쪽의 해는 서로 아무런 관계가 없을 수도 있다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에서 두 개념을 모두 다룬다.

풀이

STEP II 2021, 문제 6

순수수학 • 원 기하의 근사

STEP II 2021, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

핵심 아이디어

모든 일은 하나의 삼각형 안에서 일어난다. 바로 A, 도로의 중심 O, 그리고 자전거 타는 사람이 그리는 원의 중심 O'이 이루는 삼각형이다. 대칭성 때문에 O'은 O를 지나면서 $\angle AOB$를 이등분하는 직선 위에 놓이고, 접한다는 조건이 거리 OO'을 결정한다. 그러면 이 삼각형에서 코사인법칙(cosine rule)과 사인법칙(sine rule)을 쓰면 d와 $\alpha - \theta$를 구할 수 있다. 마지막 소문항에서 **1보다 훨씬 작다**는 말은 w/R에 대한 1차(first-order) 항까지만 남기고 작은 각 근사(small-angle approximation)를 쓴다는 뜻이다.

풀이

O를 원점으로 하고 대칭축(line of symmetry)이 수직이 되도록 잡으면 $A = \big(-(R+w)\sin\alpha,\ (R+w)\cos\alpha\big)$이고 B는 그 거울상이다. r을 O로부터의 거리라 할 때, 도로는 $R \le r \le R+w$인 영역이다.

소문항 (i)

현(chord) AB 위에서 O에 가장 가까운 점은 그 중점 M이다. 삼각형 OAB가 이등변삼각형(isosceles triangle)이므로 $OM \perp AB$이기 때문이다. 그러면

$$OM = (R+w)\cos\alpha \le \tfrac{1}{2}(R+w) < \tfrac{1}{2}(R+R) = R,$$

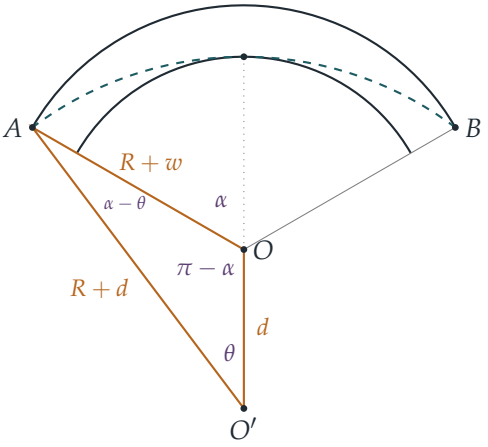
이다. 여기서 먼저 $\cos\alpha \le \frac{1}{2}$($\frac{1}{3}\pi \le \alpha \le \frac{1}{2}\pi$이므로)를, 그다음 $w < R$을 썼다. 따라서 M은 안쪽 원의 내부, 즉 도로 바깥에 있다. A에서 B까지 직선으로 달리면 반드시 M을 지나므로, 도로 위에 머무를 수 없다.

소문항 (ii)

O'은 어디에 있는가? 원이 A와 B를 지나므로 그 중심은 두 점에서 같은 거리에 있고, 따라서 AB의 수직이등분선(perpendicular bisector), 곧 O를 지나는 대칭축 위에 있다. 이 원은 안쪽 원에 접하고 안쪽 원보다 크므로($R + d > R$), 안쪽 원은 이 원의 내부에 놓여 내접(internally tangent)한다. 내접하는 두 원에서 중심 사이의 거리는 반지름의 차이다.

$$OO' = (R + d) - R = d.$$

경로는 바깥쪽, 즉 도로 쪽으로 볼록하므로, 그림처럼 O'은 O를 기준으로 도로의 반대편에 있다. 그러면 삼각형 AOO'에서 $OA = R + w$, $OO' = d$, $O'A = R + d$이고, O에서의 각은 $\pi - \alpha$이다($\angle AOM = \alpha$의 보각(supplementary angle)이다). O'에서의 각은 $\frac{1}{2}\angle AO'B = \theta$이므로, A에서의 각은 $\pi - (\pi - \alpha) - \theta = \alpha - \theta$이다.



(a) 삼각형 AOO'에서 $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$를 이용해 코사인법칙을 쓰면

$$\begin{aligned}(R + d)^2 &= (R + w)^2 + d^2 + 2(R + w)d\cos\alpha \\ R^2 + 2Rd &= R^2 + 2Rw + w^2 + 2(R + w)d\cos\alpha \\ 2d\big(R - (R + w)\cos\alpha\big) &= w(2R + w),\end{aligned}$$

이므로

$$d = \frac{w(2R + w)}{2\big(R - (R + w)\cos\alpha\big)}.$$

분모의 괄호는 소문항 (i)에 의해 양수이므로, 이것은 타당한 양의 길이이다.

(b) 같은 삼각형에서 각 $\alpha - \theta (OO' = d$의 대각)와 각 $\pi - \alpha (O'A = R + d$의 대각)를 짝지어 사인법칙을 쓰면

$$\frac{\sin(\alpha - \theta)}{d} = \frac{\sin(\pi - \alpha)}{R + d} \quad \Longrightarrow \quad \sin(\alpha - \theta) = \frac{d \sin \alpha}{R + d}.$$

소문항 (iii)

$\varepsilon = w/R$이라 하면 $0 < \varepsilon \ll 1$이다. (a)의 결과를 R로 나누면

$$\frac{d}{R} = \frac{\varepsilon(2 + \varepsilon)}{2\big(1 - (1 + \varepsilon)\cos\alpha\big)}.$$

$\cos\alpha \le \frac{1}{2}$이므로 분모는 적어도 $2\big(1 - \frac{1}{2}(1 + \varepsilon)\big) = 1 - \varepsilon$이고, 따라서

$$0 < \frac{d}{R} \le \frac{\varepsilon(2 + \varepsilon)}{1 - \varepsilon} \approx 2\varepsilon,$$

이며, 이는 1보다 훨씬 작다. (1차까지 보면 $d/R \approx \varepsilon/(1 - \cos\alpha)$이다.)

> **?** **생각해 보기** 사인 값이 작다는 것만으로는 각이 0에 가깝다는 것 또는 π에 가깝다는 것밖에 알 수 없다. 어느 쪽인가?

(b)에서 $0 < \sin(\alpha - \theta) = \dfrac{(d/R)\sin\alpha}{1 + d/R} < \dfrac{d}{R}$이고, 이는 작다. 각 $\alpha - \theta$는 삼각형 AOO'의 한 각이므로 양수이고, $\theta > 0$이므로 $\alpha \le \frac{1}{2}\pi$보다 작다. $(0, \frac{1}{2}\pi)$에서 사인함수는 증가하고 $\sin x \ge \frac{2}{\pi}x$이므로 $\alpha - \theta \le \frac{\pi}{2}\sin(\alpha - \theta) < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{d}{R}$이고, 이 역시 1보다 훨씬 작다.

소문항 (iv)

내 친구는 바깥쪽 가장자리를 따라 달린다. 이 경로는 반지름이 $R + w$이고 O에서 2α의 중심각을 이루는 호이므로, 그 길이는 $L = 2\alpha(R + w)$이다. 내 경로는 AB를 기준으로 O'의 반대편에 있는 반지름 $R + d$인 호이고, O'에서 2θ의 중심각을 이루므로 그 길이는 $2\theta(R + d)$이다. 따라서

$$\begin{aligned} S &= 2\alpha(R + w) - 2\theta(R + d) \\ &= 2(R + d)(\alpha - \theta) + 2\alpha(R + w) - 2\alpha(R + d) \\ &= 2(R + d)(\alpha - \theta) + 2\alpha(w - d), \end{aligned}$$

이고, 이것이 구하려던 식이다($2\alpha(R + d)$를 더하고 뺐다).

근사. 이제 ε에 대해 1차까지 계산하고, 남기는 항에 비해 ε^2 차수인 항은 무시한다. (iii)에 의해 $\alpha - \theta$는 작으므로 $\alpha - \theta \approx \sin(\alpha - \theta)$이고, 그 오차는 $(\alpha - \theta)^3$ 차수이다. (b)에 의해

$$2(R + d)(\alpha - \theta) \approx 2(R + d) \cdot \frac{d \sin\alpha}{R + d} = 2d \sin\alpha.$$

따라서

$$S \approx 2d\sin\alpha + 2\alpha w - 2\alpha d = 2\alpha w - 2d(\alpha - \sin\alpha).$$

이제 (iii)에서 얻은 $d \approx \dfrac{w}{1-\cos\alpha}$를 쓰면

$$S \approx 2w\left(\alpha - \frac{\alpha - \sin\alpha}{1-\cos\alpha}\right) = 2w \cdot \frac{\alpha - \alpha\cos\alpha - \alpha + \sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{2w(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)}{1-\cos\alpha}.$$

마지막으로 $L = 2\alpha R(1+\varepsilon) \approx 2\alpha R$이고, S가 이미 ε에 대해 1차이므로 L을 $2\alpha R$로 바꾸어도 S/L은 2차에서만 달라진다. 그러므로

$$\frac{S}{L} \approx \left(\frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{\alpha(1-\cos\alpha)}\right)\frac{w}{R},$$

이고, 이것이 구하려던 비율이다.

검산

- $\alpha = \frac{1}{2}\pi$일 때 이 비율은 $\frac{2}{\pi}\cdot\frac{w}{R} \approx 0.637\,\frac{w}{R}$이고, $\alpha = \frac{1}{3}\pi$일 때는 약 $0.654\,\frac{w}{R}$이다. 둘 다 양수인데, $\tan\alpha > \alpha$에서 $\sin\alpha > \alpha\cos\alpha$가 나오므로 당연히 그래야 한다.
- $R = 1, w = 0.01, \alpha = \frac{1}{2}\pi$일 때 정확한 공식으로 계산하면 $d \approx 0.01005$, $\alpha - \theta \approx 0.00995$, $S/L \approx 0.006285$이고, 근삿값은 0.006366이다. 상대오차는 약 1%로 w/R 차수이며, 마땅히 그래야 하듯 w를 10으로 나누면 오차도 10분의 1로 줄어든다.
- 컴퓨터로 A와 B를 좌표에 놓고 접하는 원을 직접 구하여, 무작위로 고른 수천 가지의 R, w, α에 대해 d, $\sin(\alpha-\theta)$, S의 공식을 확인하였다.

흔한 실수

- $OO' = R + d + R$ 또는 $OO' = w$로 잡는 것: 두 원은 **내접**하므로 중심 사이의 거리는 반지름의 차, 곧 d이다.
- 삼각형 AOO'에서 O에서의 각에 대해 $\cos(\pi-\alpha)$ 대신 $\cos\alpha$를 쓰는 것: 그러면 마지막 항의 부호가 바뀐다.
- (iii)에서 $\sin(\alpha-\theta)$가 작다는 것만 말하는 것: 각 자체가 작다고 결론 내리려면 $\alpha - \theta$가 $(0, \frac{1}{2}\pi)$에 있다는 것도 보여야 한다.

STEP 너머

"1보다 훨씬 작다"는 섭동 이론(perturbation theory)의 언어이다. 작은 매개변수 ε에 대해 전개하고, 주된 항을 남기고, 오차가 정말로 더 높은 차수인지 확인하는 것이다. 대학에서

는 이것을 테일러(Taylor) 정리(Taylor's theorem)와 빅오 표기법(big-O notation)으로 엄밀하게 다루며, 여기에 적용하면 S/L이 주어진 비율에 ε을 곱한 것에 ε^2 차수의 항을 더한 것과 같음을 보일 수 있다. 나머지항이 있는 테일러 정리를 꼼꼼히 다룬 책으로는 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 보라. 같은 성격의 문제를 더 풀어 보려면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제집)를 보라.

풀이

STEP II 2021, 문제 7

순수수학 • 회전 행렬

> **STEP II 2021, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

핵심 아이디어

2×2 회전행렬(rotation matrix)은 모양이 매우 엄격하게 정해져 있다. 즉 $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ 꼴이므로 각 열이 단위벡터(unit vector)이다. $\mathbf{R}+\mathbf{I}$도 이 모양을 유지하도록 요구하면 ϕ가 완전히 결정된다. $\mathbf{S}^3=\mathbf{I}$인 일반적인 행렬에 대해서는 (곱셈적인) 행렬식(determinant)과 관계식 $\mathbf{S}^2=(a+d)\mathbf{S}-\mathbf{I}$가 유용한 도구이다. 이 관계식을 이용하면 $\mathbf{S}$의 임의의 거듭제곱을 $\mathbf{S}$와 $\mathbf{I}$의 일차결합으로 나타낼 수 있다.

풀이

소문항 (i)

$c=\cos\phi, s=\sin\phi$라 하면

$$\mathbf{R}=\begin{pmatrix}c & -s\\ s & c\end{pmatrix},\qquad \mathbf{R}+\mathbf{I}=\begin{pmatrix}1+c & -s\\ s & 1+c\end{pmatrix}.$$

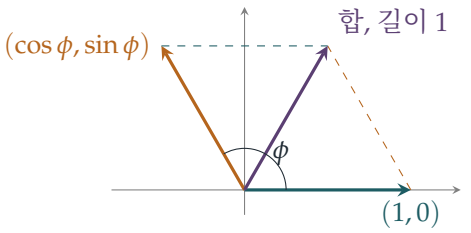
이 행렬은 이미 $\begin{pmatrix}p & -q\\ q & p\end{pmatrix}$ 꼴이고, 이러한 행렬은 $p^2+q^2=1$일 때 그리고 그때에만 회전이다(이때 어떤 θ에 대해 $(p,q)=(\cos\theta,\sin\theta)$이다). 따라서

$$(1+c)^2+s^2=1 \iff 2+2c=1 \iff \cos\phi=-\tfrac{1}{2}.$$

이어야 한다. $0^\circ\le\phi<360^\circ$이므로 $\phi=120^\circ$ 또는 $\phi=240^\circ$이다.

기하학적으로 보면, $\mathbf{R}+\mathbf{I}$의 첫째 열은 단위벡터 $(1,0)$과 $(\cos\phi,\sin\phi)$의 합이고, 이 합 역시 단위벡터여야 한다. 즉 세 벡터가 정삼각형(equilateral triangle)을 이루며, 그림은

$\phi = 120°$인 경우이다.



어느 경우든 $\mathbf{R}^3$은 3ϕ만큼의 회전이고, 이는 $360°$ 또는 $720°$로 정수 바퀴의 회전이다. 따라서 $\mathbf{R}^3 = \mathbf{I}$이다.

소문항 (ii)

행렬식. det는 곱셈적이므로 $(\det \mathbf{S})^3 = \det(\mathbf{S}^3) = \det \mathbf{I} = 1$이다. 행렬이 실행렬이므로 $\det \mathbf{S}$는 세제곱이 1인 실수이고, 그러한 수는 1뿐이다. 따라서 $\det \mathbf{S} = ad - bc = 1$이다.

이차 관계식. 곱을 전개하면

$$\mathbf{S}^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & bc + d^2 \end{pmatrix}, \qquad (a+d)\mathbf{S} - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} a^2 + ad - 1 & ab + bd \\ ac + dc & ad + d^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

비대각성분(off-diagonal entries)은 서로 같고, 대각성분(diagonal entries)은 $bc = ad - 1$(즉 $\det \mathbf{S} = 1$)이므로 서로 같다. 따라서 요구한 대로 $\mathbf{S}^2 = (a+d)\mathbf{S} - \mathbf{I}$이다.

대각합. $t = a + d$라 하자. 관계식에 $\mathbf{S}$를 곱하고 관계식을 한 번 더 이용하면

$$\mathbf{S}^3 = t\mathbf{S}^2 - \mathbf{S} = t(t\mathbf{S} - \mathbf{I}) - \mathbf{S} = (t^2 - 1)\mathbf{S} - t\mathbf{I}.$$

$\mathbf{S}^3 = \mathbf{I}$로 놓으면

$$(t^2 - 1)\mathbf{S} = (t+1)\mathbf{I}.$$

? 생각해 보기 그냥 $t^2 - 1$로 나누고 끝내도 될까?

조심하지 않으면 안 된다. $t^2 - 1 = 0$인 경우를 따로 살펴보아야 하며, 실제로 일어나는 것이 바로 이 경우이다.

- $t^2 \neq 1$이면 실수 k에 대해 $\mathbf{S} = \dfrac{t+1}{t^2-1}\mathbf{I} = k\mathbf{I}$이다. 그러면 $\mathbf{S}^3 = k^3\mathbf{I} = \mathbf{I}$에서 $k^3 = 1$이어야 하므로 $k = 1$이고 $\mathbf{S} = \mathbf{I}$인데, 이는 제외된 경우이다.
- 따라서 $t^2 = 1$이다. 식은 $\mathbf{0} = (t+1)\mathbf{I}$가 되므로 $t = -1$이다($t = 1$이면 $2\mathbf{I} = \mathbf{0}$이 되어 거짓이다).

그러므로 대각합(trace) $a + d = -1$이다.

소문항 (iii)

먼저 $\mathbf{S} \neq \mathbf{I}$이다. 그렇지 않으면 $\mathbf{S}+\mathbf{I} = 2\mathbf{I}$인데, 이 행렬은 행렬식이 4이고 길이를 두 배로 늘리므로 회전이 아니다. 따라서 소문항 (ii)를 적용할 수 있고, $a+d=-1$이다.

$\mathbf{S}+\mathbf{I}$가 회전이므로, 그 회전각을 θ라 하면

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \cos\theta - 1 & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - 1 \end{pmatrix}.$$

대각합 조건에서 $2\cos\theta - 2 = -1$이므로 $\cos\theta = \frac{1}{2}$이고 $\sin\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$이다. 그러면

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\sin\theta \\ \sin\theta & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

이 행렬은 회전 꼴이고 $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \sin^2\theta = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$이다. 따라서 $\mathbf{S}$는 코사인이 $-\frac{1}{2}$이고 사인이 $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$인 회전이다.

회전각은 $120°$($\theta = 60°$일 때) 또는 $240°$($\theta = 300°$일 때)이다. 두 경우 모두 실제로 일어난다. 소문항 (i)에 의해 이 두 회전 각각에 대해 $\mathbf{S}+\mathbf{I}$는 회전이고 $\mathbf{S}^3 = \mathbf{I}$이기 때문이다. (같은 말이지만, $\mathbf{S}$가 회전임을 알고 나면 소문항 (i) 자체가 가능한 각을 모두 알려 준다.)

검산

- $\phi = 120°$이면 $\mathbf{R}+\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$이고, 이는 $60°$만큼의 회전이다. $\phi = 240°$이면 $300°$만큼의 회전이다.
- 행렬 $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$은 $\mathbf{S}^3 = \mathbf{I}$를 만족하지만 (직접 곱해 보라) 회전이 아니다. 그래도 소문항 (ii)가 예측하는 대로 행렬식은 1, 대각합은 -1이다. 이 행렬의 $\mathbf{S}+\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$은 회전이 아니며, 이는 소문항 (iii)과 일치한다.
- $\mathbf{S}^3 = \mathbf{I}, \mathbf{S} \neq \mathbf{I}$인 무작위 실행렬을 컴퓨터로 많이 확인해 본 결과, 매번 행렬식 1, 대각합 -1, 그리고 $\mathbf{S}^2$에 대한 관계식이 성립함을 확인했다. 소문항 (iii)에서 θ를 훑어본 결과 $\theta = 60°, 300°$만 나왔다.

흔한 실수

- $t^2 - 1$이 0이 될 수 있는지 확인하지 않고 나누는 것. $t^2 = 1$인 경우가 바로 답이다.
- 소문항 (iii)에서 소문항 (ii)를 쓰기 전에 $\mathbf{S} \neq \mathbf{I}$임을 먼저 보여야 한다는 것을 잊는 것.

- $\det(\mathbf{S}+\mathbf{I}) = 1$이면 $\mathbf{S}+\mathbf{I}$가 회전이 된다고 생각하는 것. 여기서는 이 조건이 저절로 성립하므로 아무 정보도 주지 않는다.

STEP 너머

관계식 $\mathbf{S}^2 = (a+d)\mathbf{S} - (\det \mathbf{S})\mathbf{I}$는 케일리-해밀턴 정리(Cayley–Hamilton theorem)의 2×2인 경우이다. 이 정리는 모든 정사각행렬이 자기 자신의 특성다항식(characteristic polynomial)을 만족한다는 것이다. 소문항 (ii)는 위수(order)가 3인 실 2×2 행렬의 고윳값(eigenvalue)이 실수가 아닌 두 개의 1의 세제곱근(cube roots of unity)이라는 것을 말해주며, 이러한 행렬은 항상 120°만큼의 회전과 **닮음**(similar)이지만, 반드시 그 회전과 같은 것은 아니다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)에서 고윳값과 닮음을 자세히 다룬다.

풀이

STEP II 2021, 문제 8

순수수학 • 적분의 점화식

STEP II 2021, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

이 문제는 *Beyond STEP*의 2.9 절 *e*에 다가가는 분수들에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch02/e-approximations.html

핵심 아이디어

함수 $t^n(1-t)^n$은 하나의 이차식 $u = t(1-t)$의 거듭제곱이므로, 이를 미분하는 것은 연쇄법칙(chain rule)을 두 번 쓰는 것에 불과하다. 이 함수와 그 1계 도함수(derivative)는 모두 $t = 0$과 $t = 1$에서 0이 되므로, e^t에 대해 부분적분(integration by parts)을 두 번 하면 경계항(boundary term)이 모두 사라지고, 소문항 (i)의 2계 도함수가 곧바로 점화식(recurrence)으로 바뀐다. 이 적분들은 0과 아주 작은 값 사이에 끼어 있으며, 이 때문에 e는 분수 $-a_n/b_n$으로 매우 잘 근사된다.

풀이

소문항 (i)

$u = t(1-t) = t - t^2$이라 하면 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 1 - 2t$, $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} = -2$이고,

$$(1-2t)^2 = 1 - 4t + 4t^2 = 1 - 4u.$$

$f(t) = t^n(1-t)^n = u^n$이라 하면, 연쇄법칙에 의해 $f'(t) = nu^{n-1}(1-2t)$이다. 곱의 미분법(product rule)으로 한 번 더 미분하면 ($n \geq 2$일 때 성립하며, 이때 u^{n-2}는 다항식이다)

$$\begin{aligned} f''(t) &= n(n-1)u^{n-2}(1-2t)^2 - 2nu^{n-1} \\ &= nu^{n-2}\big[(n-1)(1-4u) - 2u\big] \\ &= nu^{n-2}\big[(n-1) - (4n-2)u\big] \\ &= nt^{n-2}(1-t)^{n-2}\big[(n-1) - 2(2n-1)t(1-t)\big], \end{aligned}$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

소문항 (ii)

$n \geq 2$에 대하여 계속 $f(t) = t^n(1-t)^n$으로 두면 $n!\,T_n = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$이다. 매번 다항식 쪽을 미분하고 e^t를 적분하는 방식으로 부분적분을 두 번 하면

$$\int_0^1 f\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \Big[f\,\mathrm{e}^t\Big]_0^1 - \Big[f'\,\mathrm{e}^t\Big]_0^1 + \int_0^1 f''\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

? 생각해 보기 두 경계항이 모두 사라지는 이유는 무엇인가?

$f(t) = u^n$과 $f'(t) = nu^{n-1}(1-2t)$가 모두 인수 $u = t(1-t)$를 포함하고(여기서 $n \geq 2$, 즉 $n-1 \geq 1$임을 이용한다), $t = 0$과 $t = 1$에서 $u = 0$이기 때문이다. 따라서

$$n!\,T_n = \int_0^1 f''(t)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

이제 소문항 (i)의 결과를 $f'' = n(n-1)u^{n-2} - 2n(2n-1)u^{n-1}$ 꼴로 써서 대입하면

$$\begin{aligned} n!\,T_n &= n(n-1)\int_0^1 u^{n-2}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t - 2n(2n-1)\int_0^1 u^{n-1}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \\ &= n(n-1)\,(n-2)!\,T_{n-2} - 2n(2n-1)\,(n-1)!\,T_{n-1} \\ &= n!\,T_{n-2} - 2(2n-1)\,n!\,T_{n-1}, \end{aligned}$$

이다. 여기서 $\int_0^1 u^k\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = k!\,T_k$를 이용하였다. 양변을 $n!$로 나누면

$$T_n = T_{n-2} - 2(2n-1)T_{n-1} \qquad (n \geq 2),$$

이므로 증명이 끝난다.

소문항 (iii)

먼저 $T_0 = \int_0^1 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e} - 1$이다.

$T_1 = \int_0^1 (t-t^2)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$에 대해서는, 미분하여 $\int t\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = (t-1)\mathrm{e}^t$와 $\int t^2\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = (t^2-2t+2)\mathrm{e}^t$임을 확인할 수 있으므로

$$\int_0^1 (t-t^2)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \Big[(-t^2+3t-3)\mathrm{e}^t\Big]_0^1 = -\mathrm{e} + 3,$$

즉 $T_1 = 3 - \mathrm{e}$이다.

따라서 $T_0 = a_0 + b_0\mathrm{e}$에서 $(a_0, b_0) = (-1, 1)$이고, $T_1 = a_1 + b_1\mathrm{e}$에서 $(a_1, b_1) = (3, -1)$이며, 이들은 모두 정수이다. 어떤 $n \geq 2$에 대하여 T_{n-2}와 T_{n-1}이 정수 계수를 갖는 이 꼴로 쓰인다고 가정하자. 소문항 (ii)에 의해

$$T_n = \big(a_{n-2} - 2(2n-1)a_{n-1}\big) + \big(b_{n-2} - 2(2n-1)b_{n-1}\big)\mathrm{e},$$

이고, $2(2n-1)$이 정수이므로 두 괄호 안의 값은 모두 정수이다. (강한) 수학적 귀납법(induction)에 의해, $n \geq 0$인 모든 T_n은 $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$인 $a_n + b_n\mathrm{e}$ 꼴로 쓸 수 있다.

소문항 (iv)

범위. $0 < t < 1$이면 $0 < t(1-t) \leq \frac{1}{4} < 1$이므로 $0 < t^n(1-t)^n \leq 1$이고, 또한 $0 < \mathrm{e}^t < \mathrm{e}$이다. 따라서 열린구간 $(0, 1)$에서

$$0 < \frac{t^n(1-t)^n}{n!}\,\mathrm{e}^t < \frac{\mathrm{e}}{n!}.$$

피적분함수(integrand)가 연속이므로, 이 엄격한 부등식을 (길이가 1인 구간) $[0, 1]$에서 적분해도 엄격한 부등식이 유지된다.

$$0 < T_n < \frac{\mathrm{e}}{n!} \qquad (n \geq 0).$$

($n = 0$이면 왼쪽 인수는 그냥 1이고, 엄격한 부등식은 $\mathrm{e}^t < \mathrm{e}$에서 나온다.)

극한. $b_n \neq 0$이므로 $T_n = a_n + b_n\mathrm{e}$를 b_n으로 나누면

$$-\frac{a_n}{b_n} - \mathrm{e} = -\frac{T_n}{b_n}, \qquad \text{이므로} \qquad \left|-\frac{a_n}{b_n} - \mathrm{e}\right| = \frac{T_n}{|b_n|} \leq T_n < \frac{\mathrm{e}}{n!}.$$

여기서 b_n이 0이 아닌 **정수**이므로 $|b_n| \geq 1$임을 이용하였다. $n \to \infty$일 때 $\mathrm{e}/n! \to 0$이므로 $-a_n/b_n \to \mathrm{e}$이다.

사실 이 범위는 매우 넉넉하다. 점화식으로부터 $(a_2, b_2) = (-19, 7)$, $(a_3, b_3) = (193, -71)$이고, 이로부터 근삿값 $\frac{19}{7} \approx 2.714$와 $\frac{193}{71} \approx 2.71831$을 얻는데, $\mathrm{e} \approx 2.71828$과 비교해 보라.

검산

- 소문항 (i)에 $n = 2$를 대입하면, $t^2(1-t)^2 = t^2 - 2t^3 + t^4$의 2계 도함수는 $2 - 12t + 12t^2$이고, 공식으로는 $2\big[1 - 6t(1-t)\big] = 2 - 12t + 12t^2$을 얻는다.
- $T_1 = 3 - \mathrm{e} \approx 0.2817$은 양수이고 $\mathrm{e}/1!$보다 작으므로, 소문항 (iv)의 결과와 맞는다. 또 $T_2 = T_0 - 6T_1 = 7\mathrm{e} - 19 \approx 0.0280$이며, 컴퓨터로 적분값을 계산하여 이 값과 함께 n이 11까지일 때의 점화식과 범위를 확인할 수 있다.

- $n = 4, 5, 6$일 때 $-a_n/b_n$의 값은 $\frac{2721}{1001}$, $\frac{49171}{18089}$, $\frac{1084483}{398959}$이며, e와의 차이는 각각 약 10^{-7}, 3×10^{-10}, 5×10^{-13}이다. 이는 $e/n!$만으로 예상되는 것보다 훨씬 빠르다.

흔한 실수

- 경계항이 사라지는 이유를 밝히지 않거나, 이를 위해 $n \geq 2$가 필요하다는 점을 놓치는 것. $n = 1$이면 도함수 $1 - 2t$는 양 끝점에서 0이 아니다.
- 소문항 (iv)에서 $|b_n| \geq 1$ 없이 $b_n \neq 0$만 이용하는 것. 0이 아닌 실수는 아주 작을 수도 있다. T_n/b_n이 한없이 커지지 않게 막아 주는 것은 b_n이 정수라는 사실이다.

STEP 너머

이것은 e가 무리수(irrational)이며 나아가 초월수(transcendental)임을 증명한 에르미트(Hermite)의 1873년 방법의 핵심이다. 즉 0은 아니지만 0으로 수렴하는 정수 결합 $a_n + b_n e$를 만드는 것이다. 만약 $e = p/q$라면 $q(a_n + b_n e) = qa_n + b_n p$는 $qe/n!$보다 작은 양의 정수가 되는데, 이는 n이 클 때 불가능하다. 같은 다항식 $t^n(1-t)^n$은 $\zeta(3)$이 무리수임을 보인 Beukers의 유명한 증명에도 등장한다. 수가 분수로 얼마나 잘 근사될 수 있는지에 대해 더 알고 싶다면 Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 정수론)을 읽어 보라.

풀이

STEP II 2021, 문제 9

역학 • 정역학

STEP II 2021, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

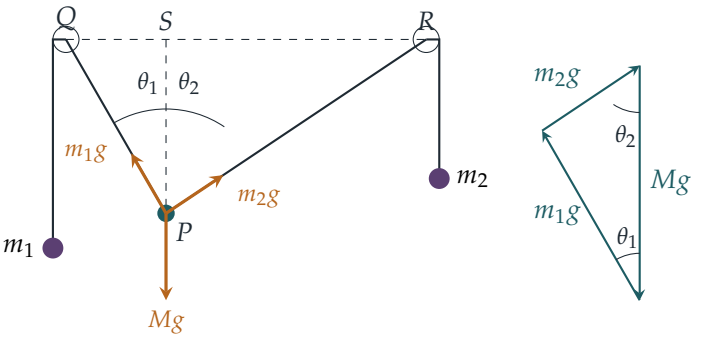
www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

핵심 아이디어

도르래(pulley)가 매끄러우므로 각 줄의 장력(tension)은 그 줄 반대쪽 끝에 매달린 입자의 무게와 같다. 따라서 P에 작용하는 세 힘의 크기의 비는 $m_1 : m_2 : M$이다. 이 세 힘을 이어 붙이면 변의 길이가 $m_1 g$, $m_2 g$, Mg이고 각이 θ_1과 θ_2로 이루어진 삼각형이 닫힌다. 이 삼각형에 코사인 법칙(cosine rule)을 적용하면 모든 것을 얻는다. 부등식은 두 각이 모두 예각(acute)인 삼각형이 존재해야 한다는 조건에서 나오고, 비는 $\tan\theta_1$과 $\tan\theta_2$에서 나온다.

풀이

모형. 입자는 질점(point mass)이고, 줄은 가볍고 늘어나지 않으며(inextensible), 도르래는 작고 매끄럽다. 따라서 PQ의 장력은 m_1을 지탱하는 수직 부분의 장력과 같고, m_1은 평형(equilibrium) 상태이므로 $T_1 = m_1 g$이다. 마찬가지로 PR의 장력은 $T_2 = m_2 g$이다. $h = SP$라 하자.



소문항 (i)

P에서 힘을 수평 방향과 수직 방향으로 분해하면(resolving) (g를 약분하여) 다음을 얻는다.

$$m_1 \sin\theta_1 = m_2 \sin\theta_2, \qquad m_1 \cos\theta_1 + m_2 \cos\theta_2 = M. \tag{$*$}$$

이는 세 힘을 머리와 꼬리를 이어 배치하면 변이 $m_1 g$, $m_2 g$, Mg인 닫힌 삼각형(그림의 오른쪽)이 된다는 것과 같다. 변 Mg는 수직이므로, 변 Mg와 $m_1 g$ 사이의 각은 θ_1($m_2 g$의 대각)이고, Mg와 $m_2 g$ 사이의 각은 θ_2($m_1 g$의 대각)이다. 나머지 한 각, 즉 Mg의 대각은 $180^\circ - \theta_1 - \theta_2$이다.

그림보다 대수를 선호한다면, 같은 사실을 ($*$)에서 바로 얻을 수 있다. $m_1 \cos\theta_1 = M - m_2 \cos\theta_2$와 $m_1 \sin\theta_1 = m_2 \sin\theta_2$로 쓰고 각각 제곱하여 더하면

$$m_1^2 = M^2 + m_2^2 - 2Mm_2 \cos\theta_2, \quad \text{이므로} \quad \cos\theta_2 = \frac{M^2 + m_2^2 - m_1^2}{2Mm_2},$$

이고, 두 변의 역할을 바꾸면

$$\cos\theta_1 = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2Mm_1}.$$

(a) $\theta_1 + \theta_2$가 0°와 180° 사이에 엄격하게 놓이므로, 힘의 삼각형(triangle of forces)은 납작하지 않은 진짜 삼각형이다. 따라서 삼각형 부등식(triangle inequality)이 등호 없이 성립하고, $M < m_1 + m_2$를 얻는다.

아래쪽 경계를 위해서는 θ_2가 예각이라는 사실, 즉 $\cos\theta_2 > 0$을 이용한다. $2Mm_2 > 0$이므로 위의 식에서

$$M^2 + m_2^2 - m_1^2 > 0 \iff M^2 > m_1^2 - m_2^2 \iff M > \sqrt{m_1^2 - m_2^2},$$

이고, 마지막 단계는 $M > 0$이고 $m_1^2 - m_2^2 > 0$이므로 타당하다. 둘을 합치면

$$\sqrt{m_1^2 - m_2^2} < M < m_1 + m_2.$$

? **생각해 보기** 왜 θ_1에 대한 조건이 아니라 θ_2에 대한 조건이 중요할까?

삼각형에서 더 긴 변의 대각이 더 크다. $m_1 > m_2$이므로 각 θ_2($m_1 g$의 대각)는 θ_1($m_2 g$의 대각)보다 크다. 따라서 θ_2가 예각이면 θ_1도 저절로 예각이 되며, 실질적인 제약은 θ_2에만 있다. (실제로 $m_1 > m_2$이므로 모든 $M > 0$에 대하여 $\cos\theta_1 > 0$이 성립한다.)

(b) $SP = h$인 직각삼각형 QSP와 RSP에서

$$QS = h\tan\theta_1, \qquad SR = h\tan\theta_2.$$

따라서

$$\begin{aligned} r = \frac{QS}{SR} = \frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} &= \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}\cdot\frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1} \\ &= \frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{M^2+m_2^2-m_1^2}{2Mm_2}\cdot\frac{2Mm_1}{M^2+m_1^2-m_2^2} \quad ((*)\text{와 코사인 값을 이용}) \\ &= \frac{M^2-m_1^2+m_2^2}{M^2-m_2^2+m_1^2}, \end{aligned}$$

이고, 이것이 구하는 비이다. (a)에 의해 두 괄호는 모두 양수이므로 $r>0$이고, $m_1>m_2$이므로 $r<1$이다. 즉 그림에서 보이듯 점 S는 Q에 더 가깝다.

소문항 (ii)

힘의 삼각형의 변 Mg에 대한 코사인 법칙은, 그 대각이 $180^\circ-(\theta_1+\theta_2)$이므로

$$M^2 = m_1^2+m_2^2+2m_1m_2\cos(\theta_1+\theta_2).$$

이다. (대수적으로는 $(*)$의 두 식을 제곱하여 더하면 된다.) $M^2=m_1^2+m_2^2$이면 $\cos(\theta_1+\theta_2)=0$이어야 한다. θ_1과 θ_2가 예각이므로 $0^\circ<\theta_1+\theta_2<180^\circ$이고, 가능한 경우는

$$\theta_1+\theta_2 = 90^\circ.$$

뿐이다. 따라서 줄은 P에서 직각을 이룬다. (이 M의 값은 (a)의 범위 안에 있으므로 이러한 배치가 실제로 존재한다.)

이제 코사인 값이 간단해진다. $\cos\theta_1 = \dfrac{2m_1^2}{2Mm_1} = \dfrac{m_1}{M}$이고 $\cos\theta_2 = \dfrac{m_2}{M}$이다. $\theta_2 = 90^\circ-\theta_1$이므로 $\sin\theta_1=\cos\theta_2=m_2/M$이고, 따라서

$$\tan\theta_1 = \frac{m_2}{m_1}, \qquad \tan\theta_2 = \frac{1}{\tan\theta_1} = \frac{m_1}{m_2}.$$

그러므로

$$\frac{QR}{SP} = \frac{h\tan\theta_1+h\tan\theta_2}{h} = \frac{m_2}{m_1}+\frac{m_1}{m_2} = \frac{m_1^2+m_2^2}{m_1m_2},$$

즉 $QR:SP=(m_1^2+m_2^2):m_1m_2$이다.

검산

- $m_1=5$, $m_2=3$, $M=6$($4<M<8$의 범위 안)일 때 $(*)$를 수치적으로 풀면 $\theta_1\approx 29.93^\circ$, $\theta_2\approx 56.25^\circ$이다. 그러면 $\tan\theta_1/\tan\theta_2\approx 0.3846=\frac{5}{13}$이고, 이는 $r=\frac{36-25+9}{36-9+25}=\frac{20}{52}$와 일치한다.
- 범위의 양 끝에서: $M\to\sqrt{m_1^2-m_2^2}$이면 $\theta_2\to 90^\circ$이고 $r\to 0$이다(줄 PR이 수평이 된다). $M\to m_1+m_2$이면 두 각이 모두 0으로 가고 P는 QR 아래로 한없이 내려간다.

- $m_1 = 4$, $m_2 = 3$, $M = 5$인 소문항 (ii): $\tan\theta_1 = \frac{3}{4}$, $\tan\theta_2 = \frac{4}{3}$이고 $QR/SP = \frac{25}{12}$이다. $(*)$를 확인하면 $4 \cdot \frac{3}{5} = 3 \cdot \frac{4}{5}$이고 $4 \cdot \frac{4}{5} + 3 \cdot \frac{3}{5} = 5$이다.

흔한 실수

- 힘의 삼각형에서 Mg의 대각을 $180^\circ - (\theta_1 + \theta_2)$가 아니라 $\theta_1 + \theta_2$로 잡는 것. 그러면 코사인 법칙의 부호가 뒤바뀐다.
- 등호가 포함된 삼각형 부등식을 쓰거나, 아래쪽 경계에 각이 예각이라는 조건이 필요하다는 것을 잊는 것.
- 비를 뒤집는 것: $r = QS/SR$이고, QS는 더 무거운 입자 쪽의 변이다.

STEP 너머

힘의 삼각형은 더 일반적인 사실의 가장 간단한 경우이다. 평형 상태의 힘들은 합이 영벡터이므로, 머리와 꼬리를 이어 그리면 닫힌 다각형을 이룬다. 공학자들은 이 아이디어("힘 다각형(force polygon)")를 이용하여 골조 구조를 해석하며, 대학 1학년 역학에서는 모멘트(moment)도 평형을 이루어야 한다는 조건과 함께 정역학(statics)의 벡터 형태로 다시 등장한다. 더 알고 싶다면 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 참고하라.

풀이

STEP II 2021, 문제 10

역학 • 비관성 좌표계

> **STEP II 2021, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

이 문제는 *Beyond STEP*의 11.5 절 **가속하는 기차 안의 중력**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch11/accelerating-frame.html

핵심 아이디어

좌표축이 기차와 함께 움직이므로 이 좌표계는 관성계(inertial frame)가 아니다. 가장 깔끔한 해결책은 구슬의 **실제** 가속도(acceleration), 곧 기차에 대한 구슬의 상대 가속도에 기차 자체의 가속도를 더한 것을 구하는 것이다. 그러면 뉴턴의 운동 제2법칙(Newton's second law)이 성립하고, 철사가 매끄러우므로 수직항력(reaction)은 철사에 수직이어서 구슬의 경로를 따라 일(work)을 하지 않는다. 운동 방정식(equation of motion)과 구슬의 (상대) 속도의 내적을 취하면 미지의 수직항력이 사라지고, 보존되는(conserved) 에너지와 비슷한 양이 남는다.

풀이

구슬을 질량 m인 입자로, 철사를 매끄러운(smooth) 것으로 모형화하면, 철사가 구슬에 작용하는 수직항력 $\mathbf{N}$은 항상 철사에 수직이다. 동쪽과 위쪽 방향의 단위벡터(unit vector)를 각각 $\mathbf{i}$와 $\mathbf{j}$로 쓴다.

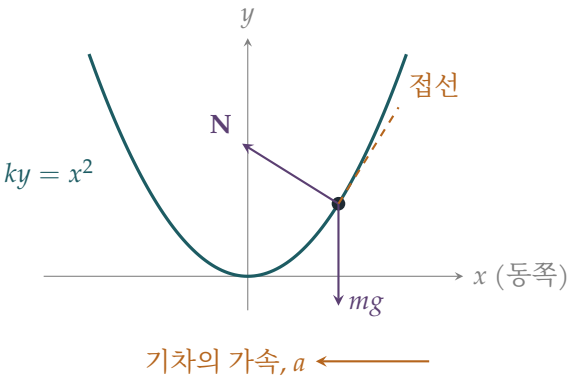
기차는 서쪽으로 가속하므로 기차의 가속도는 $-a\mathbf{i}$이다. 기차에 대한 구슬의 위치는 $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$이므로, 구슬의 실제 (지면 좌표계에서의) 가속도는

$$(\ddot{x} - a)\,\mathbf{i} + \ddot{y}\,\mathbf{j}.$$

이다. 구슬에 작용하는 힘은 무게 $-mg\mathbf{j}$와 $\mathbf{N}$뿐이므로, 뉴턴의 운동 제2법칙에 의해

$$m(\ddot{x}-a)\,\mathbf{i}+m\ddot{y}\,\mathbf{j}=\mathbf{N}-mg\,\mathbf{j}. \qquad (*)$$

이다.



소문항 (i)

구슬이 기차에 대해 원점에 머물러 있다고 가정하자. 그러면 구슬은 기차와 같은 가속도 $-a\mathbf{i}$를 가지므로, $a>0$일 때 수평 방향의 힘 $-ma\mathbf{i}$가 필요하다. 그런데 원점에서 철사 $y=x^2/k$의 기울기(gradient)는 $2x/k=0$이므로 철사는 그곳에서 수평이고, 매끄러운 철사의 수직항력은 철사에 수직, 즉 연직 방향이다. 중력도 연직 방향이다. 수평 방향으로 작용하는 힘이 없으므로 구슬은 기차와 함께 가속할 수 없고, 기차에 대해 움직여야 한다. (구슬의 실제 수평 가속도는 0인데 기차의 가속도는 서쪽으로 a이므로, 구슬은 철사를 따라 동쪽, 즉 x가 양수인 쪽으로 미끄러지기 시작한다.)

소문항 (ii)

구슬이 철사를 따라 움직이는 동안, 기차에 대한 구슬의 속도 $\dot{x}\,\mathbf{i}+\dot{y}\,\mathbf{j}$는 철사에 접한다. 철사가 기차에 고정되어 있기 때문이다. $\mathbf{N}$은 철사에 수직이므로

$$\mathbf{N}\cdot(\dot{x}\,\mathbf{i}+\dot{y}\,\mathbf{j})=0.$$

이다. $(*)$를 $m(\ddot{x}-a)\,\mathbf{i}+m(\ddot{y}+g)\,\mathbf{j}=\mathbf{N}$으로 정리하고 양변에 $\dot{x}\,\mathbf{i}+\dot{y}\,\mathbf{j}$와의 스칼라곱(scalar product)을 취한 뒤 m으로 나누면

$$\dot{x}(\ddot{x}-a)+\dot{y}(\ddot{y}+g)=0,$$

을 얻으므로 증명이 끝난다. 좌변은 어떤 식의 도함수(derivative)와 정확히 같다.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tfrac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-ax+gy\right)=\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}-a\dot{x}+g\dot{y}=0,$$

따라서 운동하는 동안 $\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-ax+gy$는 일정하다.

생각해 보기 지면 좌표계에서는 수직항력이 일을 하는데, 상대 속도와 내적을 취하는 것이 왜 정당한가?

지면 좌표계에서 구슬의 속도에는 철사 방향이 아닌 $-at\,\mathbf{i}$가 더해지므로, 그 좌표계에서는 $\mathbf{N}$이 일을 한다. 그러나 등식 $\mathbf{N}\cdot\mathbf{u}=0$은 순전히 기하학적인 사실이다. 이 등식은 철사에 접하는 임의의 벡터 $\mathbf{u}$에 대해 성립하며, 상대 속도는 바로 그런 벡터이다. 우리가 사용한 것은 이것뿐이다.

소문항 (iii)

처음에 $x=y=0$이고 $\dot{x}=\dot{y}=0$이므로 그 상수는 0이다. 기차에 대한 속력을 v로 쓰고 $y=x^2/k$를 이용하면

$$\tfrac{1}{2}v^2 = ax - gy = ax - \frac{gx^2}{k} = \frac{g}{k}\,x\Big(\frac{ak}{g}-x\Big). \qquad (\dagger)$$

이다. $v^2\geq 0$이므로 구슬은 $0\leq x\leq ak/g$ 범위에 갇혀 있고, $v=0$인 곳은 이 구간의 두 끝점뿐이다. 소문항 (i)에 의해 구슬은 x가 양수인 쪽으로 움직이기 시작한다. $0<x<ak/g$인 동안 속력이 양수이므로, 구슬은 $x=ak/g$에 도달할 때까지 철사를 따라 같은 방향으로 계속 움직이고, 그곳에서 순간적으로 멈춘다. (구슬은 그곳에서 실제로 되돌아온다. 그 점에서 $(*)$의 접선 방향 성분은 0이 아닌데, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(ax-gx^2/k)=a-2a=-a\neq 0$이기 때문이다.) 그 뒤 구슬은 $x=0$과 $x=ak/g$ 사이를 진동(oscillate)한다.

이 구간에서 $y=x^2/k$는 x에 대해 증가하므로, 최고 높이는 $x=ak/g$에서 도달한다.

$$b=\frac{1}{k}\Big(\frac{ak}{g}\Big)^2=\frac{a^2k}{g^2}.$$

소문항 (iv)

$(\dagger)$에 의해 $v^2=2\big(ax-gx^2/k\big)$인데, 이는 x에 대한 이차식으로 두 근 0과 ak/g의 중점에서 최댓값을 가진다. 따라서 기차에 대한 속력이 가장 큰 것은

$$x=\frac{ak}{2g}.$$

일 때이다. 그곳에서

$$v^2=2\Big(\frac{a^2k}{2g}-\frac{a^2k}{4g}\Big)=\frac{a^2k}{2g}, \qquad \text{이므로} \qquad v_{\max}=a\sqrt{\frac{k}{2g}}.$$

검산

- 극한의 경우(limiting case): $a=0$이면 구슬은 그냥 철사의 바닥에 머물러 있고, 실제로 $b=0$이고 $v_{\max}=0$이다.

- 유효 중력(effective gravity): 기차 안에서 구슬은 동쪽으로 기울어진 유효 중력 $(a, -g)$를 느낀다. 운동이 가장 빠른 점 $x = ak/(2g)$는 정확히 철사의 기울기 $2x/k$가 a/g와 같아지는 곳이므로, 그곳에서 접선은 유효 중력에 수직이다. 즉 이 점은 기울어진 중력장에서 철사의 "가장 낮은 점"이다. 되돌아오는 점 $x = ak/g$는 그보다 두 배 멀리 있는데, 이는 x에 대해 이차식인 퍼텐셜(potential)에서의 대칭적인 진동과 같다.
- 차원(dimensions): k는 길이이므로 a^2k/g^2는 길이이고 $a\sqrt{k/g}$는 속력이다.
- 수치적으로, $a = 2$, $k = 1.5$, $g = 9.8$ (SI 단위)로 두고 컴퓨터로 운동을 단계별로 진행시키면 최고 높이 $0.06247\,\mathrm{m}$와 $x = 0.1531\,\mathrm{m}$에서의 최대 속력 $0.5533\,\mathrm{m\,s^{-1}}$를 얻는데, 이는 a^2k/g^2, $a\sqrt{k/(2g)}$, $ak/(2g)$와 일치한다.

흔한 실수

- 구슬의 실제 수평 가속도를 $\ddot{x}$로 쓰는 것. 이것은 기차에 대한 상대 가속도이며, 기차 자체의 가속도 $-a$를 더해야 한다.
- a의 부호를 틀리는 것: 기차는 **서쪽**으로 가속하므로, 기차 안에서 구슬은 **동쪽**, 즉 x가 양수인 쪽으로 밀린다.
- 속력이 철사의 바닥 $x = 0$에서 가장 크다고 생각하는 것. 기차 안에서는 유효한 "아래" 방향이 기울어져 있으므로, 가장 빠른 점은 대신 $x = ak/(2g)$에 있다.

STEP 너머

소문항 (ii)는 비관성 좌표계(non-inertial frame)에서의 역학을 처음 맛보는 것이다. 기차의 좌표계에서 항 $-ax$는 동쪽으로 작용하는 균일한 "가상의 힘(fictitious force)" ma에 대한 퍼텐셜 에너지처럼 작용하며, 이를 중력에 더하면 기울어진 유효 중력을 얻는다. 대학에서는 이것이 원심력(centrifugal force)과 코리올리 힘(Coriolis force)이 나타나는 회전 좌표계로, 그리고 $\mathbf{N}$과 같은 구속력(constraint force)을 처음부터 제거하는 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)으로 확장된다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)에는 비관성계와 가상의 힘을 다루는 좋은 장이 있다.

풀이

STEP II 2021, 문제 11

확률과 통계 • 조건부 확률의 점화식

> **STEP II 2021, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

이 문제는 *Beyond STEP*의 12.5 절 **마지막 승객의 좌석**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch12/airline-seat.html

핵심 아이디어

T_1이 어디에 앉는지를 조건으로 놓는다(conditioning). T_1이 자기 좌석 S_1에 앉으면 나머지 모두는 문제없다. T_1이 S_k에 앉으면 $T_2, \ldots, T_{k-1}$은 무사히 자기 자리에 앉고, T_k가 새로운 "무작위 선택자"가 된다. 결정적인 관찰은, 이때 T_k가 처음의 T_1과 정확히 같은 처지에 놓인다는 것이다. 다만 열차가 더 작아졌고, 비어 있는 좌석 S_1이 T_k 자신의 좌석 역할을 한다. 이로써 문제는 점화식(recurrence)으로 바뀐다.

풀이

이 풀이 전체에서 "T_r이 밀려난다"는 것은 T_r이 도착했을 때 S_r이 이미 차 있다는 뜻이다. 무작위로 좌석을 고르는 사람은 밀려난 승객(또는 T_1)뿐이다.

소문항 (i)

$n = 2$일 때, T_1은 각각 확률(probability) $\frac{1}{2}$로 S_1 또는 S_2에 앉고, T_2가 S_2에 앉는 것은 정확히 T_1이 S_1에 앉았을 때이다. 따라서

$$P_2 = \frac{1}{2}.$$

$n = 3$일 때, 각각 확률 $\frac{1}{3}$인 T_1의 좌석을 조건으로 놓는다.

- S_1: T_2와 T_3 모두 자기 좌석이 비어 있으므로, T_3은 S_3에 앉는다.

- S_3: T_3은 확실히 S_3에 앉지 못한다.
- S_2: T_2가 밀려나서 S_1과 S_3 중 하나를 무작위로 고른다. T_3이 S_3에 앉는 것은 정확히 T_2가 S_1을 고를 때이며, 그 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

그러므로

$$P_3 = \tfrac{1}{3}\cdot 1 + \tfrac{1}{3}\cdot 0 + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}.$$

소문항 (ii)

T_1이 $2 \le k \le n-1$인 S_k에 앉는다고 하자. 그러면 $T_2, \ldots, T_{k-1}$은 모두 자기 좌석이 비어 있으므로 그 자리에 앉는다. T_k가 도착했을 때 빈 좌석은

$$S_1,\ S_{k+1},\ S_{k+2},\ \ldots,\ S_n,$$

으로 모두 $n-k+1$개이며, T_k는 이 중에서 균등하게 무작위로(uniformly at random) 하나를 고른다. 아직 오지 않은 승객은 $T_{k+1}, \ldots, T_n$이고, 이들은 각자 자기 좌석을 원하며, 아직 오지 않은 승객 중 누구에게도 S_1이 배정되어 있지 않다.

> ? **생각해 보기** 왜 이것이 정확히 좌석이 $n-k+1$개인 원래 문제와 같은가?

이름을 바꿔 붙여 보자. T_k를 "첫 번째 승객"이라 부르고, S_1을 T_k에게 배정된 좌석이라고 간주한다. 좌석이 m개인 원래 문제에서는 첫 번째 승객이 m개의 좌석 전체에서 균등하게 하나를 고르고, 이후의 각 승객은 자기 좌석이 비어 있으면 거기에 앉고 그렇지 않으면 빈 좌석 중에서 균등하게 하나를 고르며, 첫 번째 승객에게 배정된 좌석을 원하는 사람은 아무도 없다. 여기서 $m = n-k+1$이라 하면, 승객 $T_k, T_{k+1}, \ldots, T_n$은 좌석 $S_1, S_{k+1}, \ldots, S_n$을 가지고 정확히 이 규칙을 따르며, S_1을 원하는 사람은 아무도 없다. 규칙은 승객 자신의 좌석이 비어 있는지 판단할 때 말고는 좌석 이름을 전혀 쓰지 않으므로, 두 과정의 확률은 똑같다. 작아진 문제에서도 T_n은 여전히 마지막 승객이므로

$$\mathrm{P}(T_n\text{의 좌석이}S_n \mid T_1\text{의 좌석이}S_k) = P_{n-k+1}.$$

이제 $n \ge 3$일 때, $S_1, \ldots, S_n$ 각각의 확률이 $\frac{1}{n}$인 T_1의 좌석을 조건으로 놓는다. 그것이 S_1이면 T_n은 확실히 S_n에 앉고, S_n이면 T_n은 확실히 앉지 못한다. 따라서 전확률 법칙(law of total probability)에 의해

$$P_n = \frac{1}{n}\cdot 1 + \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n-1} P_{n-k+1} + \frac{1}{n}\cdot 0 = \frac{1}{n}\left(1 + \sum_{r=2}^{n-1} P_r\right),$$

이다. 여기서 $r = n-k+1$로 치환하였으며, k가 2부터 $n-1$까지 변할 때 이 값은 $n-1$부터 2까지 내려간다. 이것이 구하는 결과이다.

소문항 (iii)

모든 $n \geq 2$에 대하여 $P_n = \frac{1}{2}$임을 보이자. 강한 수학적 귀납법(strong induction)을 쓴다.

기본 단계. 소문항 (i)에서 $P_2 = \frac{1}{2}$이다.

귀납 단계. $n \geq 3$이라 하고, $r = 2, 3, \ldots, n-1$에 대하여 $P_r = \frac{1}{2}$라고 가정하자. 소문항 (ii)의 합은 $n-2$개의 항으로 이루어지고 각 항이 $\frac{1}{2}$이므로

$$P_n = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{n-2}{2}\right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{2} = \frac{1}{2}.$$

따라서 $r = 2, \ldots, n$에 대하여 $P_r = \frac{1}{2}$이고, 귀납법에 의해 모든 $n \geq 2$에 대하여 $P_n = \frac{1}{2}$이다. (소문항 (i)의 $P_3 = \frac{1}{2}$와도 일치한다.)

소문항 (iv)

$n = 2$이면 $T_{n-1} = T_1$이고, 이 승객은 확률 $\frac{1}{2}$로 S_1에 앉는다. 따라서 $Q_2 = \frac{1}{2}$이다.

이제 $n \geq 3$이라 하자. 그러면 T_{n-1}은 T_1이 아니며, 다시 T_1의 좌석 S_k를 조건으로 놓는다.

- $k = 1$: 모두가 자기 좌석에 앉으므로 T_{n-1}은 S_{n-1}에 앉는다.
- $k = n$: $T_2, \ldots, T_{n-1}$ 모두 자기 좌석이 비어 있으므로, 이번에도 T_{n-1}은 S_{n-1}에 앉는다.
- $k = n-1$: T_{n-1}은 확실히 S_{n-1}에 앉지 못한다.
- $2 \leq k \leq n-2$: 소문항 (ii)와 똑같이, 나머지 여정은 T_k가 이끄는 좌석 $m = n - k + 1$개짜리 원래 문제이다. 그 작아진 열차에서 T_{n-1}은 끝에서 두 번째 승객이므로 확률은 Q_{n-k+1}이다. 여기서 m은 $3, 4, \ldots, n-1$에 걸쳐 변한다.

그러므로 $n \geq 3$일 때

$$Q_n = \frac{1}{n}\left(2 + \sum_{m=3}^{n-1} Q_m\right).$$

$n = 3$이면 합은 빈 합이므로 $Q_3 = \frac{2}{3}$이다. $3 \leq m \leq n-1$에 대하여 $Q_m = \frac{2}{3}$이면

$$Q_n = \frac{1}{n}\left(2 + \frac{2(n-3)}{3}\right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{2n}{3} = \frac{2}{3},$$

이므로 강한 수학적 귀납법에 의해 모든 $n \geq 3$에 대하여 $Q_n = \frac{2}{3}$이다. 정리하면

$$Q_2 = \tfrac{1}{2}, \qquad Q_n = \tfrac{2}{3} \quad (n \geq 3).$$

생각해 보기 점화식 없이 $\frac{1}{2}$와 $\frac{2}{3}$을 알아낼 방법이 있는가?

있다. 누군가 무작위로 고를 때마다 S_1과, 나중에 올 승객의 아직 비어 있는 각 좌석은 똑같이 취급된다. 따라서 과정이 끝날 때까지 좌석 S_1과 S_n 중 어느 쪽이 먼저 차게 될지는 같은

정도로 가능하다. T_n이 성공하는 것은 정확히 S_1이 먼저 찰 때이므로 $\frac{1}{2}$를 얻는다. T_{n-1}의 경우($n \geq 3$), S_1, S_{n-1}, S_n 중 어느 것이 무작위 선택자에 의해 가장 먼저 차는지 살펴보자. 각각이 같은 정도로 가능하고, T_{n-1}이 밀려나는 것은 그것이 S_{n-1}일 때뿐이므로 $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$을 얻는다.

검산

- $n = 3$인 경우는 손으로 나열할 수 있다. (T_1, T_2, T_3)의 결과는 확률 $\frac{1}{3}$인 (S_1, S_2, S_3), 확률 $\frac{1}{3}$인 (S_3, S_2, S_1), 그리고 각각 확률 $\frac{1}{6}$인 (S_2, S_1, S_3), (S_2, S_3, S_1)이다. 따라서 T_3이 S_3에 앉을 확률은 $\frac{1}{2}$, T_2가 S_2에 앉을 확률은 $\frac{2}{3}$으로, 앞에서 구한 것과 같다.
- $n = 2, \ldots, 8$에 대해 가능한 모든 여정을 컴퓨터로 정확히 열거하면, 모든 경우에 $P_n = \frac{1}{2}$이고 $n \geq 3$에서 $Q_n = \frac{2}{3}$이며, 모든 k에 대해 소문항 (ii)의 조건부 확률(conditional probability)도 확인된다. $n = 20$으로 10^5번의 여정을 모의실험한 결과는 0.500과 0.668이었다.

흔한 실수

- T_1이 S_1 자체를 고를 수 있다는 것을 잊는 실수. 이 경우가 점화식의 "$1 +$"를 준다.
- 소문항 (iv)에서 T_1이 S_n에 앉는 경우를 빠뜨리는 실수. 이 경우는 T_{n-1}에게 좋은 소식이므로 상수는 1이 아니라 2가 된다.
- $n = 2$에서 Q에 대한 점화식을 적용하는 실수. 이때 T_{n-1}은 T_1이고 답은 $\frac{2}{3}$이 아니라 $\frac{1}{2}$이다.

STEP 너머

여기서 쓴 점화식은 첫 단계 분석(first-step analysis)이다. 즉 첫 번째 무작위 선택을 조건으로 놓고, 같은 문제의 더 작은 사본을 알아보는 것이다. 같은 기법으로 마르코프 연쇄(Markov chain)의 도달 확률(hitting probability)과 기대 도달 시간(expected hitting time)을 구할 수 있으며, 이는 대학 1학년 확률론의 핵심 주제이다. 위의 대칭성(symmetry) 논증은 잘 고른 "어느 것이 먼저 일어나는가?"라는 질문이 긴 계산을 대신할 수 있음을 맛보여 준다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)이 두 아이디어를 모두 다룬다.

풀이

STEP II 2021, 문제 12

확률과 통계 • 도박꾼의 파산

> **STEP II 2021, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

핵심 아이디어

각 경기는 이전에 있었던 상태로 계속 되돌아온다. 그러므로 이기는 방법을 무한히 나열해 더하지 않는다. 그 상태에서 이길 확률을 P라 하고, 다음에 일어나는 일로 조건을 나누어(conditioning) P가 양변에 모두 나타나는 방정식을 얻는다. 같은 방법을 신중한 게임에 적용하면, 그 게임은 소문항 (ii)의 경기로 바뀐다.

풀이

소문항 (i)

A가 경기에서 이길 확률을 P라 하자. 첫 판으로 조건을 나눈다. A가 확률 p_A로 첫 판을 이기면 경기는 끝난다. B가 확률 p_B로 첫 판을 이기면 A는 진 것이다. 그 밖의 경우에는 확률 $1-p_\mathrm{A}-p_\mathrm{B}$로 첫 판이 비기고, 각 판은 독립(independent)이므로 경기는 처음부터 다시 시작된다. 따라서 그 시점에서 A가 이길 확률은 다시 P이다. 그러므로

$$P = p_\mathrm{A} + (1-p_\mathrm{A}-p_\mathrm{B})P \quad\Longrightarrow\quad (p_\mathrm{A}+p_\mathrm{B})P = p_\mathrm{A} \quad\Longrightarrow\quad P = \frac{p_\mathrm{A}}{p_\mathrm{A}+p_\mathrm{B}},$$

이다. 여기서 $p_\mathrm{A}+p_\mathrm{B} > 0$으로 나누었다. (같은 결과를 다르게 얻을 수도 있다. A가 k번째 판에서 이길 확률은 $(1-p_\mathrm{A}-p_\mathrm{B})^{k-1}p_\mathrm{A}$이고, $0 < p_\mathrm{A}+p_\mathrm{B} < 1$이므로 이 기하급수(geometric series)는 수렴한다.)

소문항 (ii)

몇 판을 치른 뒤 A의 승수에서 B의 승수를 뺀 값을 D라 하자. 매 판마다 D는 $+1$ 또는 -1만큼 변하고, 경기는 처음으로 $|D| = 2$가 될 때 끝난다.

길이가 짝수임. n판을 치른 뒤 A가 a번, B가 b번 이겼다면 $a+b=n$이고 $D=a-b=n-2b$이므로 D는 n과 홀짝성(parity)이 같다. 경기는 $D=\pm 2$일 때 끝나고 이는 짝수이므로 n은 짝수이다.

확률. 판을 두 개씩 묶어서 보자. 처음에 경기는 동점($D=0$)이고, 짝수 판을 치른 뒤에만 끝날 수 있으므로 경기를 끝내지 않는 묶음이 지날 때마다 다시 동점이 된다. 동점 상태에서 다음 두 판의 결과는 확률 p^2로 AA(A가 이김), 확률 q^2로 BB(B가 이김), 또는 합한 확률 $2pq$로 AB나 BA이며, 마지막 경우에는 경기가 다시 동점이 된다. 동점 상태에서 A가 이길 확률을 P라 하자. 그러면

$$P = p^2 + 2pq\,P \quad\Longrightarrow\quad P = \frac{p^2}{1-2pq}.$$

$p+q=1$이므로 $1=(p+q)^2=p^2+2pq+q^2$이고, 따라서 $1-2pq=p^2+q^2$이며

$$P = \frac{p^2}{p^2+q^2},$$

이 되어 증명이 끝난다. 여기서 $p^2+q^2>0$이므로 나눗셈에는 문제가 없다.

소문항 (iii)

신중한 방식. 토큰의 개수는 매 라운드 하나씩 늘거나 줄며, 1에서 시작하여 0(패배) 또는 4(승리)에서 멈춘다. 4를 건너뛸 수 없으므로, 플레이어는 토큰 수가 0보다 먼저 4에 도달할 때 그리고 그때에만 이긴다.

> **생각해 보기** 토큰이 2개일 때 플레이어에게 필요한 것은 무엇인가? 이것을 전에 본 적이 있는가?

토큰이 2개일 때, 플레이어는 진 라운드보다 이긴 라운드가 두 번 더 많아지는 것(4에 도달)이 이긴 라운드보다 진 라운드가 두 번 더 많아지는 것(0에 도달)보다 먼저 일어나면 이긴다. 이것은 플레이어를 A로, 운의 게임을 B로 둔 소문항 (ii)의 경기이다. 따라서 토큰이 2개일 때 이길 확률은 $\dfrac{p^2}{p^2+q^2}$이다.

토큰이 1개일 때는 첫 라운드를 반드시 이겨야 한다. 그렇지 않으면 0으로 떨어져 지게 된다. 따라서 첫 라운드에서 확률 p로 토큰이 2개가 되고, 라운드들은 독립이므로

$$P_{\text{cautious}} = p\cdot\frac{p^2}{p^2+q^2} = \frac{p^3}{p^2+q^2}.$$

(방정식을 선호한다면, 토큰이 k개일 때 이길 확률을 P_k라 할 때 $P_1=pP_2$, $P_2=pP_3+qP_1$, $P_3=p+qP_2$로부터 같은 답을 얻는다.)

과감한 방식. 토큰이 1개이면 토큰 수는 2 또는 0이 되고, 2개이면 4 또는 0이 된다. 따라서 플레이어는 처음 두 라운드를 모두 이겨야만 이긴다.

$$P_{\text{bold}} = p^2.$$

비교. 두 확률은 모두 양수이므로 그 비를 1과 비교한다.

$$\frac{P_{\text{cautious}}}{P_{\text{bold}}} = \frac{p}{p^2+q^2}.$$

$p^2+q^2>0$이므로 이 비가 1보다 클 필요충분조건은

$$p > p^2+q^2 \iff p-p^2>q^2 \iff pq>q^2 \iff p>q,$$

이다. 마지막 단계에서는 $q>0$으로 나누었다($p<1$이므로 가능하다). 그리고 $p>q=1-p$는 정확히 $p>\frac{1}{2}$일 때 성립한다. 같은 방법으로, 비가 1보다 작은 것은 정확히 $p<q$, 즉 $p<\frac{1}{2}$일 때이다. 따라서 $\frac{1}{2}<p<1$일 때는 신중한 방식이 낫고, $0<p<\frac{1}{2}$일 때는 과감한 방식이 낫다. ($p=\frac{1}{2}$일 때는 둘 다 $\frac{1}{4}$이다.)

검산

- $p=\frac{1}{2}$일 때 신중한 게임은 공평한 확률보행(random walk)이고, 1에서 출발하여 0보다 먼저 4에 도달할 확률은 $\frac{1}{4}$이다. 우리 공식은 $\frac{1}{8}/\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$를 주며, 이는 과감한 게임의 $p^2=\frac{1}{4}$와 일치한다.
- $p=0.7$일 때: 신중한 방식은 $0.343/0.58\approx 0.591$, 과감한 방식은 0.49이다. $p=0.3$일 때: 신중한 방식은 $0.027/0.58\approx 0.0466$, 과감한 방식은 0.09이다. 두 결과 모두 토큰 분포를 라운드마다 추적하는 컴퓨터 검산과 일치한다.
- 소문항 (ii)에서 $p=\frac{1}{2}$이면 $\frac{1}{2}$가 나오는데, 이는 대칭성에서 기대되는 값이다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)에서 "AB"와 "BA"를 확률 $2pq$가 아니라 확률 pq인 하나의 결과로 취급하는 것.
- 경기를 끝내지 않는 두 판의 묶음이 항상 경기를 동점으로 되돌린다는 것을 정당화하지 않는 것. 경기는 홀수 판 뒤에는 끝날 수 없으므로 실제로 그렇다.
- 비교할 때, 양수라는 것을 밝히지 않고 곱하거나 나누는 것.

STEP 너머

신중한 게임은 **도박꾼의 파산**(*gambler's ruin*) 문제이다. 이것은 흡수 장벽(absorbing barriers)이 있는 확률보행이며, k에서 출발하여 목표가 N일 때 일반적인 답은 $p\neq q$이면 $\dfrac{1-(q/p)^k}{1-(q/p)^N}$이다. 불리한 게임에서는 과감하게, 유리한 게임에서는 소심하게 하는 것이

최선이라는 결과는 Dubins와 Savage의 최적 도박 연구로 거슬러 올라간다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 바로 이런 첫 단계 조건화를 통해 확률보행과 도박꾼의 파산을 다룬다.

풀이

STEP III 2021, 문제 1

순수수학 • 매개변수 곡선의 법선

> **STEP III 2021, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

핵심 아이디어

두 소문항 모두 같은 방법을 따른다. 매개변수방정식(parametric equations)을 미분하고, $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$의 음의 역수를 취해 법선(normal)의 기울기(gradient)를 구한 다음, 방정식을 정리한다. 진짜 재미있는 부분은 바로 이 정리 과정이다. 양변에 적당한 식을 곱해 분수를 없애면, 삼각함수 항들이 짧고 대칭적인 직선의 방정식으로 줄어든다. 직선이 $x\sin\phi + y\cos\phi = \ldots$ 또는 $x\cos\phi + y\sin\phi = \ldots$ 꼴이 되면, 그 기하학적 성질(절편(intercept), 원점까지의 거리)을 한눈에 읽어 낼 수 있다.

풀이

소문항 (i)

t에 대하여 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 12\cos^2 t\,\sin t, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 12\cos t - 12\sin^2 t\cos t = 12\cos t\,(1-\sin^2 t) = 12\cos^3 t.$$

따라서 $0 < t < \frac{1}{2}\pi$에서($\sin t$와 $\cos t$가 0이 아닌 범위)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{12\cos^3 t}{12\cos^2 t\sin t} = \frac{\cos t}{\sin t}.$$

$t = \phi$에서 접선(tangent)의 기울기는 $\cot\phi$이므로, 법선의 기울기는 $-\tan\phi = -\dfrac{\sin\phi}{\cos\phi}$이다. 그러므로 법선은

$$y - 12\sin\phi + 4\sin^3\phi = -\frac{\sin\phi}{\cos\phi}\left(x + 4\cos^3\phi\right).$$

양변에 $\cos\phi$를 곱하고 x와 y가 포함된 항을 좌변으로 모으면

$$\begin{aligned} x\sin\phi + y\cos\phi &= 12\sin\phi\cos\phi - 4\sin^3\phi\cos\phi - 4\cos^3\phi\sin\phi \\ &= 12\sin\phi\cos\phi - 4\sin\phi\cos\phi\,(\sin^2\phi + \cos^2\phi) \\ &= 8\sin\phi\cos\phi. \end{aligned}$$

따라서 법선은

$$\boxed{x\sin\phi + y\cos\phi = 8\sin\phi\cos\phi} \qquad \text{또는 동치로} \qquad \frac{x}{\cos\phi} + \frac{y}{\sin\phi} = 8.$$

두 번째 꼴을 보면 법선이 좌표축과 $(8\cos\phi, 0)$과 $(0, 8\sin\phi)$에서 만남을 알 수 있다.

접함(tangency). $P = (8\cos^3\phi,\ 8\sin^3\phi)$라 하자. 세 가지를 보여야 한다.

P는 곡선 $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ 위에 있다. $0 < \phi < \frac{1}{2}\pi$이므로 두 좌표는 모두 양수이고, 따라서 실수 세제곱근은 $2\cos\phi$와 $2\sin\phi$이다. 그러므로 $x^{2/3} + y^{2/3} = 4\cos^2\phi + 4\sin^2\phi = 4$이다.

P는 법선 위에 있다. 대입하면

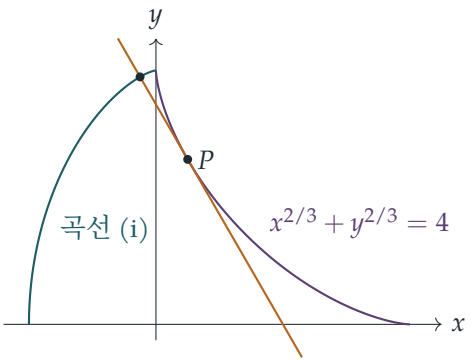
$$8\cos^3\phi\sin\phi + 8\sin^3\phi\cos\phi = 8\sin\phi\cos\phi\,(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = 8\sin\phi\cos\phi.$$

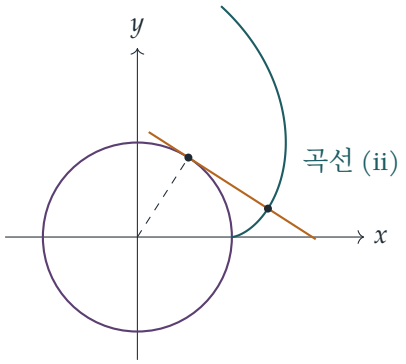
P에서 기울기가 일치한다. $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$를 음함수 미분(implicit differentiation)하면($x, y > 0$에서 성립)

$$\tfrac{2}{3}x^{-1/3} + \tfrac{2}{3}y^{-1/3}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}} = -\frac{2\sin\phi}{2\cos\phi} = -\tan\phi \ \text{ 점}P,$$

에서의 이 값은 정확히 법선의 기울기와 같다.

곡선 위의 한 점을 지나고 그 점에서 곡선과 같은 기울기를 갖는 직선은 그 점에서의 접선이다. 따라서 법선은 점 P에서 $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$에 접하는 접선이며, 이로써 증명이 끝난다.





각 그림에서 곡선(청록색) 위의 한 점에서 그은 법선(호박색)이 두 번째 곡선(자주색)에 접한다. 두 그림 모두 ϕ의 특정한 한 값에 대해 그린 것이다.

소문항 (ii)

t에 대하여 미분하면($t\sin t$와 $t\cos t$ 항에는 곱의 미분법(product rule)을 쓴다)

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\sin t + \sin t + t\cos t = t\cos t, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \cos t - \cos t + t\sin t = t\sin t.$$

$0 < t < \frac{1}{2}\pi$에서 $t\cos t \neq 0$이므로 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{t\sin t}{t\cos t} = \tan t$이다. $t = \phi$에서 법선의 기울기는 $-\cot\phi = -\dfrac{\cos\phi}{\sin\phi}$이고, 그 방정식은

$$y - \sin\phi + \phi\cos\phi = -\frac{\cos\phi}{\sin\phi}(x - \cos\phi - \phi\sin\phi).$$

양변에 $\sin\phi$를 곱하면

$$y\sin\phi - \sin^2\phi + \phi\sin\phi\cos\phi = -x\cos\phi + \cos^2\phi + \phi\sin\phi\cos\phi.$$

$\phi\sin\phi\cos\phi$ 항은 소거되고 $\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$이므로, 남는 식은

$$\boxed{x\cos\phi + y\sin\phi = 1}.$$

생각해 보기 수선의 발(foot of the perpendicular)을 구하지 않고 원점에서 직선까지의 거리를 어떻게 구할 수 있을까?

점 (x_0, y_0)에서 직선 $ax + by = c$까지의 거리는 $\dfrac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$이다. 여기서 $(x_0, y_0) = (0,0)$, $a = \cos\phi$, $b = \sin\phi$, $c = 1$이므로 거리는

$$\frac{|-1|}{\sqrt{\cos^2\phi + \sin^2\phi}} = 1.$$

이는 직접 확인할 수도 있다. $(\cos\phi, \sin\phi)$는 직선에 수직인 단위벡터(unit vector)이고, 점 $(\cos\phi, \sin\phi)$ 자체가 방정식을 만족한다. 따라서 O에서 내린 수선의 발은 $(\cos\phi, \sin\phi)$이고, 거리는 1이다.

곡선. ϕ의 값에 관계없이 모든 법선은 원점으로부터 거리가 1이다. O로부터 거리가 1인 직선은 O를 중심으로 하는 반지름 1인 원과 수선의 발에서만 만나고, 그 점에서 반지름과 수직이다. 그러므로 이 직선은 원의 접선이다. 따라서 모든 법선은

$$\boxed{x^2 + y^2 = 1},$$

에 접하며, 접점은 $(\cos\phi, \sin\phi)$이다.

검산

- (i)에서 $\phi = \frac{1}{3}\pi$로 두자. 곡선 위의 점은 $(-\frac{1}{2},\ 6\sqrt{3} - \frac{3}{2}\sqrt{3}) = (-0.5,\ 7.794)$이고, 법선 $2x + \frac{2}{\sqrt{3}}y = 8$은 좌표축과 $(4, 0)$과 $(0, 4\sqrt{3}) \approx (0, 6.928)$에서 만난다. 점 $P = (1,\ 3\sqrt{3}) \approx (1,\ 5.196)$은 $2 + 6 = 8$을 만족하므로 법선 위에 있고, $1^{2/3} + (3\sqrt{3})^{2/3} = 1 + 3 = 4$이다.
- (ii)에서 $\phi \to 0$일 때 곡선은 단위원 위의 점 $(1, 0)$에서 시작하고, 그 점에서의 법선은 수직선 $x = 1$에 가까워지는데, 이는 실제로 $x^2 + y^2 = 1$의 접선이다.
- 무작위로 고른 ϕ의 값 천 개에 대해 컴퓨터로 확인한 결과, 모든 법선의 방정식, (i)의 접함, (ii)의 단위 거리가 반올림 오차 범위 안에서 성립했다.

흔한 실수

- (i)에서 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$를 잘못 구하는 것: $12\cos t - 12\sin^2 t \cos t$는 $12\cos^3 t$로 간단해지며, 이 인수분해 덕분에 기울기가 이렇게 간단해진다.
- (i)에서 P가 법선 위에 있다는 것만 확인하는 것. 곡선 위의 한 점을 지나는 직선이 자동으로 그 점에서의 접선이 되는 것은 아니다. 기울기도 일치해야 한다.
- (ii)에서 방정식, 중심, 반지름을 밝히지 않고 "원"이라고만 답하는 것.

STEP 너머

곡선의 모든 법선의 포락선(envelope)을 그 곡선의 **축폐선**(*evolute*)이라 한다. 축폐선은 곡률 중심(centre of curvature)의 자취이다. 따라서 소문항 (i)은 아스트로이드(astroid) $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$가 첫 번째 곡선의 축폐선임을 보여 준다. (ii)의 곡선은 단위원의 **신개선**(*involute*)(실패에서 팽팽하게 풀려 나오는 실의 끝이 그리는 경로)이며, 그 축폐선은 원이다. 원의 신개선은 대부분의 톱니바퀴 이의 모양을 이룬다. 이러한 개념들은 곡선의 미분기하학(differential geometry)에 속한다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 평면곡선에 대한 이런 종류의 추론을 아름답게 기하학적으로 다루는 좋은 길잡이이다.

풀이

STEP III 2021, 문제 2

순수수학 • 행렬식과 부등식

> **STEP III 2021, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

핵심 아이디어

x, y, z의 각 정의에서 분모를 없애면 a, b, c에 대한 **일차**(linear) 방정식을 얻는다. 이러한 세 방정식은 영이 아닌 해 (a, b, c)를 갖는 동차 연립일차방정식(homogeneous linear system)을 이루므로, 계수행렬은 특이행렬(singular matrix)이어야 한다. 즉 그 행렬식(determinant)은 0이다. 이 행렬식이 바로 우리가 원하는 x, y, z에 대한 대칭식이다. 그 다음 부등식들은 목표하는 식을 x, y, z로 다시 쓰고, 제곱의 합에 관한 기본적인 사실과 산술-기하 평균 부등식(AM–GM)을 이용하면 얻어진다.

풀이

소문항 (i)

a, b, c가 서로 다르므로 분모는 어느 것도 0이 아니다. 분모를 없애면

$$x(b-c) = a, \qquad y(c-a) = b, \qquad z(a-b) = c.$$

이제 행렬의 곱을 행별로 전개하면

$$\begin{aligned} a - xb + xc &= a - x(b-c) = a - a = 0, \\ ya + b - yc &= b - y(c-a) = b - b = 0, \\ -za + zb + c &= c - z(a-b) = c - c = 0, \end{aligned}$$

이고, 이것이 구하는 행렬 방정식이다.

이 3×3 행렬을 M이라 하자. a, b, c가 서로 다르므로 이들이 모두 0일 수는 없고, 따라서 M은 **영이 아닌** 벡터를 영벡터로 보낸다.

? **생각해 보기** 왜 이로부터 $\det M = 0$이 되어야 하는가?

만약 $\det M \neq 0$이면 M^{-1}이 존재하고, $M\mathbf{v} = \mathbf{0}$의 양변 왼쪽에 M^{-1}을 곱하면 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$이 되어 $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$에 모순이다. 따라서 $\det M = 0$이다. 첫째 행을 따라 전개하면

$$\begin{aligned}\det M &= 1 \cdot (1 + yz) + x(y - yz) + x(yz + z) \\ &= 1 + yz + xy - xyz + xyz + xz \\ &= 1 + xy + yz + zx.\end{aligned}$$

이 값을 0으로 놓으면 $yz + zx + xy = -1$을 얻는다.

부등식에서 좌변은 $x^2 + y^2 + z^2$이다. 항등식 $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$를 이용하면

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) = (x + y + z)^2 + 2 \geq 2,$$

이다. 실수 $x + y + z$의 제곱은 음이 아니기 때문이다. 이것이 구하는 결과이다.

소문항 (ii)

여기서는 분모가 양수이고, 분모를 없애면 $x(b + c) = 2a$ 등을 얻는다. 이를 a, b, c에 대한 일차방정식으로 정리하면

$$\begin{pmatrix} -2 & x & x \\ y & -2 & y \\ z & z & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(첫째 행은 $-2a + x(b + c) = 0$이고, 나머지도 마찬가지이다.) $a, b, c > 0$이므로 이 벡터는 영벡터가 아니고, 따라서 소문항 (i)과 똑같이 행렬식은 0이 된다.

$$\begin{aligned}0 &= -2(4 - yz) - x(-2y - yz) + x(yz + 2z) \\ &= -8 + 2yz + 2xy + xyz + xyz + 2xz \\ &= -8 + 2(xy + yz + zx) + 2xyz.\end{aligned}$$

양변을 2로 나누면 $xyz + yz + zx + xy = 4$를 얻는다.

첫째 부등식. 요령은 좌변의 각 괄호를 우변의 대응하는 괄호로 나누는 것이다.

$$\frac{2a + b + c}{b + c} = \frac{2a}{b + c} + 1 = 1 + x,$$

나머지 둘도 마찬가지이다. $(b + c)(c + a)(a + b) > 0$이므로 이 부등식은 $(1 + x)(1 + y)(1 + z) > 5$와 동치이다. 전개하고 방금 증명한 결과를 이용하면

$$(1 + x)(1 + y)(1 + z) = 1 + (x + y + z) + (xy + yz + zx) + xyz = 5 + (x + y + z).$$

x, y, z가 모두 양수이므로 이 값은 5보다 크고, 이로써 첫째 부등식이 증명된다.

둘째 부등식. 같은 계산에 의해 이제 $x+y+z>2$를 보이면 된다. $S=x+y+z$라 하자.

> ? **생각해 보기** $xy+yz+zx+xyz=4$임을 알고 있다. 이로부터 어떻게 S가 충분히 크다는 것을 끌어낼 수 있을까?

$xy+yz+zx$와 xyz는 둘 다 S로 위로 유계이다.

- $S^2-3(xy+yz+zx)=\frac{1}{2}\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right]\geq 0$이므로 $xy+yz+zx\leq \frac{1}{3}S^2$이다.
- 양수 x, y, z에 대한 산술-기하 평균 부등식에 의해 $xyz\leq\left(\frac{1}{3}S\right)^3=\frac{1}{27}S^3$이다.

두 식을 더하면

$$4=xy+yz+zx+xyz\leq\frac{1}{3}S^2+\frac{1}{27}S^3.$$

우변은 $S>0$에서 S에 대한 증가함수(increasing function)이고, $S=3$일 때 $3+1=4$이다. 따라서 $S<3$이면 우변이 4보다 작아지는데, 이는 불가능하다. 그러므로 $S\geq 3$이고

$$\frac{(2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c)}{(b+c)(c+a)(a+b)}=5+S\geq 8>7,$$

이다. 이로써 둘째 부등식이 증명된다(실제로는 더 강한 하계 8을 얻으며, 이는 $a=b=c$일 때 등호가 성립한다).

검산

- 소문항 (ii)에서 $a=b=c=1$로 두자. 좌변은 $4^3=64$이고 $(b+c)(c+a)(a+b)=8$이므로 비는 8이며, 이는 $x=y=z=1$, $S=3$일 때의 $5+S$와 일치한다. 또한 $xyz+xy+yz+zx=1+3=4$이다.
- 소문항 (i)에서 $(a,b,c)=(0,1,2)$로 두자. 그러면 $x=0, y=\frac{1}{2}, z=-2$이고, 요구대로 $xy+yz+zx=-1$이다. 제곱의 합은 $\frac{17}{4}\geq 2$이다.
- 무작위로 고른 유리수 세 쌍 20 000개에 대해 컴퓨터로 확인한 결과 두 항등식이 정확히 성립하였다. 소문항 (ii)에서 찾은 가장 작은 비는 약 8.0001이었고, $a=b=1$, $c=10^{-6}$일 때는 약 9.0이므로, 하계 8은 실제 최솟값이며 7보다 넉넉히 크다.

흔한 실수

- 이유를 말하지 않고 $\det M=0$이라고 주장하는 것. 핵심은 (a,b,c)가 영이 아닌 벡터라는 점이며, 이를 위해 소문항 (i)에서는 "서로 다르다"는 조건이, 소문항 (ii)에서는 "양수"라는 조건이 필요하다.

- $2a+b+c$를 $b+c$로 나누어 $1+x$ 대신 $1+\frac{1}{2}x$를 얻는 것. x에는 이미 인수 2가 들어 있음을 기억하라.
- $xy+yz+zx<4$(상계(upper bound))를 이용해 S를 아래로 유계시키려 하는 것. 위에서처럼 부등식의 방향이 반대여야 한다.

STEP 너머

정사각행렬이 영이 아닌 벡터를 영벡터로 보내는 것은 그 행렬식이 0일 때, 그리고 그때에만 일어난다는 사실은 선형대수학(linear algebra)의 핵심이다. 고윳값(eigenvalue)을 $\det(A-\lambda I)=0$을 통해 구하는 것도 바로 이 사실 덕분이다. 소문항 (ii)의 하계 $S\geq 3$은 사실 네스빗 부등식(Nesbitt's inequality) $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$를 변장한 것이다. 선형대수학에 대해서는 Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)를 보라. 이런 종류의 부등식을 더 연습하려면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제)가 훌륭한 연습서이다.

풀이

STEP III 2021, 문제 3

순수수학 • 적분 부등식

> **STEP III 2021, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

핵심 아이디어

n제곱되는 대상을 미분한다. $u = \sec x + \tan x$의 도함수(derivative)는 $u \sec x$이므로 $u^{n-1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$는 정확히 적분할 수 있다. 따라서 할 일은 $I_{n+1} + I_{n-1}$의 피적분함수(integrand)를 이 꼴로 다시 쓰는 것이다. 부등식(inequality)은 피적분함수 $u^n = u^{n-1} \cdot u$를 정확히 적분할 수 있는 $u^{n-1} \cdot u'$과 비교하여 얻는다. $u < u'$이면 적분값은 $\left[u^n/n\right]$보다 작다.

풀이

소문항 (i)

$u = \sec x + \tan x$라 하자. 그러면

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \sec x \tan x + \sec^2 x = \sec x \left(\sec x + \tan x\right) = u \sec x.$$

또한 $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$를 이용하면

$$u^2 + 1 = \sec^2 x + 2 \sec x \tan x + \tan^2 x + 1 = 2\sec^2 x + 2 \sec x \tan x = 2u \sec x = 2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

따라서 $n \geq 1$일 때

$$\begin{aligned} I_{n+1} + I_{n-1} &= \int_0^\beta u^{n-1}\left(u^2+1\right)\mathrm{d}x = 2\int_0^\beta u^{n-1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n}\left[u^n\right]_0^\beta \\ &= \frac{2}{n}\left(\left(\sec\beta + \tan\beta\right)^n - 1\right), \end{aligned}$$

이다. 여기서 $x = 0$일 때 $u = 1$임을 이용하였다. 양변을 반으로 나누면 구하는 항등식(identity)을 얻는다.

생각해 보기 항등식에는 I_{n+1}과 I_{n-1}이 나오지만, 부등식은 I_n에 관한 것이다. 가운데 항을 어떻게 끼워 넣을 수 있을까?

u^2+1과 $2u$를 비교한다. $u^2+1-2u=(u-1)^2\geq 0$이고, $0<x\leq\beta$에서 $\sec x>1$, $\tan x>0$이므로 $u>1$이 되어 그 구간에서 부등식은 엄격하다. 양변에 $u^{n-1}>0$을 곱하면 $(0,\beta]$에서 $u^{n+1}+u^{n-1}>2u^n$이고, 이를 적분하면(피적분함수는 연속이고 길이가 양수인 구간에서 부등식이 엄격하므로)

$$I_{n+1}+I_{n-1}>2I_n, \qquad \text{따라서} \qquad I_n<\tfrac{1}{2}\left(I_{n+1}+I_{n-1}\right)=\frac{1}{n}\left((\sec\beta+\tan\beta)^n-1\right).$$

(같은 말이지만, $x>0$일 때 $u'-u=u(\sec x-1)>0$이므로 $I_n=\int_0^\beta u^{n-1}u\,\mathrm{d}x<\int_0^\beta u^{n-1}u'\,\mathrm{d}x$이다. 소문항 (ii)로 그대로 이어지는 것은 바로 이 관점이다.)

소문항 (ii)

$c=\cos\beta$라 쓰면 $0<c<1$이다. $v=c\sec x+\tan x$라 하자. 그러면

$$v'=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=c\sec x\tan x+\sec^2 x.$$

양 끝점에서 $v(0)=c=\cos\beta$, $v(\beta)=1+\tan\beta$인데, 이는 정확히 목표식에 나오는 두 수이다. 따라서 상계는 $\frac{1}{n}\left[v^n\right]_0^\beta=\int_0^\beta v^{n-1}v'\,\mathrm{d}x$이고, $[0,\beta]$ 전체에서 $v<v'$임을 보이면 충분하다.

생각해 보기 소문항 (i)에서 u^2+1은 정확히 $2u'$이었다. v에 대해서는 이에 대응하는 관계가 무엇인가?

소문항 (i)의 계산을 반복하면

$$v^2+1=c^2\sec^2x+2c\sec x\tan x+\tan^2x+1=(1+c^2)\sec^2x+2c\sec x\tan x,$$

이므로

$$2v'-(v^2+1)=(1-c^2)\sec^2x=\sin^2\beta\,\sec^2x.$$

이제는 등식이 아니지만, 남는 항이 양수이다. $v^2+1-2v=(v-1)^2$과 결합하면

$$2(v'-v)=(v-1)^2+\sin^2\beta\,\sec^2x>0,$$

이다. $0<\beta<\frac{\pi}{2}$에서 $\sin\beta\neq 0$이기 때문이다. 따라서 모든 $x\in[0,\beta]$에 대하여 $v<v'$이다.

마지막으로 $[0,\beta]$에서 $v>0$이므로($c>0$, $\sec x>0$, $\tan x\geq 0$이므로) $v^{n-1}>0$이고 $v^n=v^{n-1}v<v^{n-1}v'$이다. $[0,\beta]$에서 적분하면 $n\geq 1$일 때

$$J_n=\int_0^\beta v^n\,\mathrm{d}x<\int_0^\beta v^{n-1}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\left[v^n\right]_0^\beta=\frac{1}{n}\left((1+\tan\beta)^n-\cos^n\beta\right),$$

이므로 증명이 끝난다.

검산

- $n = 1$일 때 (i)의 항등식은 $\frac{1}{2}(I_2 + \beta) = \sec\beta + \tan\beta - 1$이다. $\beta = 1$에 대해 수치 적분을 하면 양변 모두 2.40822…이다.
- $\beta = 1, n = 3$일 때: 수치적으로 $I_3 \approx 8.774$이고 상계는 12.863이며, $J_3 \approx 3.326$이고 상계는 5.523이다.
- (ii)에 형식적으로 $\cos\beta = 1$을 넣으면 J_n은 I_n이 되고 남는 항 $\sin^2\beta\sec^2 x$는 사라진다. 소문항 (ii)는 실제로 소문항 (i)의 섭동(perturbation)이다.

흔한 실수

- 양수임을 확인하지 않는 것: $v < v'$에 v^{n-1}을 곱하려면 $v^{n-1} > 0$이어야 한다. $v > 0$이 중요한 이유가 이것이다.
- $\leq$만 주장하는 것: 엄격한 부등식을 얻으려면 한 점에서가 아니라 어떤 구간에서 $u > 1$(또는 $\sin\beta \neq 0$)이어야 한다.
- $v(\beta)$를 부주의하게 계산하는 것: $\sec\beta\cos\beta = 1$이며, $1 + \tan\beta$는 바로 여기서 나온다.

STEP 너머

"모든 점에서 $0 < f \leq g$이고 어딘가에서 엄격한 부등식이 성립하면 $\int f < \int g$이다"라는 논증은 적분의 단조성(monotonicity)이며, 해석학(analysis) 강의에서는 이를 리만 적분(Riemann integral)의 정의로부터 엄밀하게 증명한다. 다루기 까다로운 피적분함수를 정확한 도함수와 비교하는 것은 적분과 합의 범위를 구하는 표준적인 방법이며, 적분 판정법(integral test) 같은 추정에서도 다시 등장한다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해)는 적분과 이러한 비교 논증을 엄밀하게 다룬다.

풀이

STEP III 2021, 문제 4

순수수학 • 벡터와 정사영

STEP III 2021, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

핵심 아이디어

여기서는 모든 것을 스칼라곱(scalar product)으로 처리한다. 두 벡터 사이의 각은 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos$(각)에서 읽어 내고, 정사영(projection)은 선형(linear)이므로 $\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$의 정사영은 $\frac{1}{2}(\mathbf{a}_1+\mathbf{b}_1)$이다. 소문항 (i)에서는 **길이가 같은** 두 벡터의 평균이 두 벡터 사이의 각을 이등분(bisect)함을 보인다. 소문항 (iii)에서 정사영 $\mathbf{a}_1$과 $\mathbf{b}_1$은 대개 길이가 다르므로, 특별한 일이 일어나지 않는 한 이등분이 성립하지 않으리라고 예상해야 한다. 조건은 깔끔하게 인수분해(factorise)되어 두 가지 특별한 경우로 나뉜다.

풀이

소문항 (i)

$|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1$이고 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \cos\theta$이므로

$$|\mathbf{m}|^2 = \tfrac{1}{4}\left(1+2\cos\theta+1\right) = \tfrac{1}{2}(1+\cos\theta) = \cos^2\tfrac{\theta}{2},$$

따라서 $|\mathbf{m}| = \cos\frac{\theta}{2}$이고, $0<\theta<\pi$이므로 이 값은 양수이다. 특히 $\mathbf{m}\neq\mathbf{0}$이다. 또한

$$\mathbf{m}\cdot\mathbf{a} = \tfrac{1}{2}(1+\cos\theta) = \cos^2\tfrac{\theta}{2} = \mathbf{m}\cdot\mathbf{b}.$$

그러므로 $\mathbf{m}$과 $\mathbf{a}$ 사이의 각의 코사인은 $\cos^2\frac{\theta}{2}/\cos\frac{\theta}{2} = \cos\frac{\theta}{2}$이고, $\mathbf{b}$에 대해서도 마찬가지이다. 따라서 두 각은 모두 $\frac{\theta}{2}$이다. $\mathbf{m}$은 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$가 이루는 평면 위에 있고 두 각의 합이 θ이므로, $\mathbf{m}$은 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$ 사이의 각을 이등분한다.

소문항 (ii)

$\mathbf{c}$가 단위 법선벡터(unit normal)이고 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=\cos\alpha$이므로, 정의에 의해

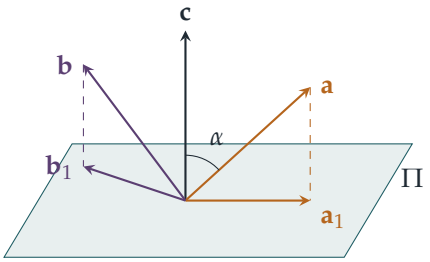
$$\mathbf{a}_1=\mathbf{a}-\cos\alpha\,\mathbf{c},\qquad \mathbf{b}_1=\mathbf{b}-\cos\beta\,\mathbf{c}.$$

그러면 $|\mathbf{c}|=1$이므로 $\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{c}=\cos\alpha-\cos\alpha\,(\mathbf{c}\cdot\mathbf{c})=0$이다. 마찬가지로 $\mathbf{b}_1\cdot\mathbf{c}=0$이다.

$\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{c}=0$이므로 $|\mathbf{a}_1|^2=\mathbf{a}_1\cdot(\mathbf{a}-\cos\alpha\,\mathbf{c})=\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}$를 얻고,

$$\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}-\cos\alpha\,(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})=1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha.$$

α가 예각(acute angle)이므로 $\sin\alpha>0$이고, 따라서 $|\mathbf{a}_1|=\sin\alpha$이다. 같은 방법으로 $|\mathbf{b}_1|=\sin\beta$이다. 둘 다 0이 아니므로 각 ϕ가 정의된다.



정사영 사이의 각을 구할 때도 다시 $\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{c}=0$을 이용하여 한 항을 없앤다.

$$\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{b}_1=\mathbf{a}_1\cdot(\mathbf{b}-\cos\beta\,\mathbf{c})=\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}-\cos\alpha\,(\mathbf{c}\cdot\mathbf{b})=\cos\theta-\cos\alpha\cos\beta.$$

이를 $|\mathbf{a}_1||\mathbf{b}_1|=\sin\alpha\sin\beta$로 나누면

$$\cos\phi=\frac{\cos\theta-\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$$

를 얻으며, 이것이 보이려던 식이다.

소문항 (iii)

정사영은 선형이므로

$$\mathbf{m}_1=\mathbf{m}-(\mathbf{m}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{c}=\tfrac{1}{2}(\mathbf{a}-\cos\alpha\,\mathbf{c})+\tfrac{1}{2}(\mathbf{b}-\cos\beta\,\mathbf{c})=\tfrac{1}{2}(\mathbf{a}_1+\mathbf{b}_1).$$

$\mathbf{m}_1\neq\mathbf{0}$이라고 가정한다. 그렇지 않으면 방향이 없으므로 아무것도 이등분할 수 없기 때문이다. $\mathbf{m}_1$은 $\mathbf{a}_1$과 $\mathbf{b}_1$의 양의 계수 결합이므로 두 벡터가 이루는 평면 위에, 두 벡터 사이에 놓인다. 따라서 이 벡터가 각을 이등분하는 것은 $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_1$과 같은 크기의 각을 이룰 때, 그리고 그때에만이다.

$$\frac{\mathbf{m}_1\cdot\mathbf{a}_1}{|\mathbf{a}_1|}=\frac{\mathbf{m}_1\cdot\mathbf{b}_1}{|\mathbf{b}_1|}.$$

(공통인수 $|\mathbf{m}_1|$을 약분하였고, cos는 $[0,\pi]$에서 일대일(one-to-one)이다.)

? 생각해 보기 왜 그냥 $\mathbf{a}_1$과 $\mathbf{b}_1$에 소문항 (i)을 적용하지 않는가?

소문항 (i)에는 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$가 필요했다. 여기서는 $|\mathbf{a}_1| = \sin\alpha$이고 $|\mathbf{b}_1| = \sin\beta$인데, 이 둘은 대개 다르다. 그러므로 직접 계산해야 한다.

$P = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1$, $s = \sin\alpha$, $t = \sin\beta$라 하자. 그러면

$$\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{a}_1 = \tfrac{1}{2}(s^2 + P), \qquad \mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{b}_1 = \tfrac{1}{2}(P + t^2).$$

양변에 $2st > 0$을 곱하면 조건은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} t(s^2 + P) = s(t^2 + P) &\iff st(s-t) - P(s-t) = 0 \\ &\iff (s-t)(st - P) = 0. \end{aligned}$$

따라서 $\mathbf{m}_1$이 각을 이등분할 필요충분조건은 $s = t$ 또는 $P = st$이다.

- $s = t$는 $\sin\alpha = \sin\beta$를 뜻한다. sin은 $(0, \frac{\pi}{2})$에서 순증가하고 두 각이 모두 예각이므로, 이는 $\alpha = \beta$와 동치이다.
- 소문항 (ii)에 의해 $P = \cos\theta - \cos\alpha\cos\beta$이다. 따라서 $P = st$는 다음을 뜻한다.

$$\cos\theta = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta).$$

각 단계가 동치(equivalence)였으므로, $\mathbf{m}_1$이 $\mathbf{a}_1$과 $\mathbf{b}_1$ 사이의 각을 이등분할 필요충분조건은 $\alpha = \beta$ 또는 $\cos\theta = \cos(\alpha - \beta)$이다.

기하학적으로 보면, 첫 번째 경우는 $\mathbf{a}_1$과 $\mathbf{b}_1$의 길이가 같다는 뜻이므로 결국 소문항 (i)이 적용된다. 두 번째 경우는 $\cos\phi = 1$, 즉 두 정사영이 같은 방향을 가리킨다는 뜻이다($\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$가 한 평면 위에 있고(coplanar) $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$가 $\mathbf{c}$의 같은 쪽에 있을 때). 이때 각은 0이 되어 자명하게 이등분된다.

검산

- $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$로 놓아 보자(여기서는 허용되지 않지만 유용한 극한이다). 그러면 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$는 이미 평면 위에 있고, 공식은 당연히 그래야 하듯 $\cos\phi = \cos\theta$를 준다.
- $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$이면 공식은 $\cos\phi = -\frac{\sqrt{2}/4}{\sqrt{6}/4} = -1/\sqrt{3} \approx -0.577$을 준다. 이는 벡터를 직접 구성하여 얻은 결과와 일치한다.
- $\cos\phi$에 대한 공식과 인수분해된 이등분 조건 모두, 단위벡터 세 개를 무작위로 고른 수천 개의 경우에 대해 컴퓨터로 확인하였다.

흔한 실수

- $|\mathbf{a}_1| \neq 1$임을 잊는 것. 단위벡터의 정사영은 단위벡터가 아니므로 분모 $\sin\alpha \sin\beta$가 반드시 필요하다.
- $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1$의 이등분선이 항상 $\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1$이라고 가정하는 것. 이는 길이가 같을 때에만 성립한다. 일반적으로 이등분선은 $\mathbf{a}_1/|\mathbf{a}_1| + \mathbf{b}_1/|\mathbf{b}_1|$이다.
- 인수분해하지 않고 $\sin\alpha - \sin\beta$로 나누어, $\alpha = \beta$인 경우를 놓치는 것.

STEP 너머

평면으로의 정사영은 **선형사상**(linear map) $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$이며, 그 행렬은 $I - \mathbf{n}\mathbf{n}^\mathsf{T}$이다. 선형사상은 합은 보존하지만 길이나 각은 보존하지 않으며, 이 문제가 이렇게 풀리는 것도 그 때문이다. $\cos\phi$에 대한 공식은 사실 구면 코사인 법칙(spherical cosine rule)이 모습을 바꾼 것이다. 여기서 ϕ는 꼭짓점이 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$이고 변이 α, β, θ인 구면삼각형(spherical triangle)의 꼭짓점 $\mathbf{c}$에서의 각이다. 정사영과 직교성(orthogonality)에 대해서는 Strang, *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)를 참고하라.

풀이

STEP III 2021, 문제 5

순수수학 • 극곡선

> **STEP III 2021, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

핵심 아이디어

두 곡선 모두 r가 θ의 식으로 주어져 있으므로, 두 곡선은 r에 대한 두 식이 같아지는 곳에서 만나고, 여기에 더해 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$의 두 값까지 같아지는 곳에서 접한다(touch). 모든 것을 $c = \cos\theta$로 나타내면 만날 조건은 c에 대한 이차방정식(quadratic)이 된다. 이 이차방정식의 중근(repeated root)은 접하는 한 가지 경우를 주지만, 그것만 있는 것은 아니다. $\cos\theta$ 자체가 $\theta = 0$과 $\theta = \pi$에서 정류(stationary)하므로, $c = \pm 1$에서의 단순근(simple root)도 θ에 대해서는 이중 영점을 준다.

풀이

풀이 전체에서 $c = \cos\theta$로 쓰고,

$$f(\theta) = a + 2\cos\theta, \qquad g(\theta) = 2 + \cos 2\theta = 1 + 2\cos^2\theta.$$

로 둔다. 모든 θ에 대하여 $g(\theta) \geq 1$이므로 두 번째 곡선은 원점 O를 지나지 않는다. O가 아닌 곳에서 $r > 0$인 점은 (2π의 배수 차이를 제외하면) 유일한 각 θ를 가진다. 따라서 두 곡선은 r와 θ가 모두 같은 점에서만 만날 수 있다.

소문항 (i)

두 곡선은 $f(\theta) = g(\theta)$일 때, 곧 $a + 2c = 1 + 2c^2$일 때 만난다. 이를 정리하면

$$2\cos^2\theta - 2\cos\theta + 1 - a = 0,$$

이 되어 구하는 식을 얻는다. 차이에 이름을 붙여 두면 편리하다.

$$h(\theta) = f(\theta) - g(\theta) = -(2c^2 - 2c + 1 - a).$$

언제 접하는가? 공통점에서 동경과 접선 사이의 각 ψ는 $\tan\psi = r/\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}$를 만족한다. 따라서 같은 점 (r,θ)를 지나는 두 곡선은 그 점에서 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$도 같을 때, 그리고 그때에만 같은 접선을 가진다. 그러므로 두 곡선은 $h(\theta) = 0$이고 $h'(\theta) = 0$인 곳에서 접한다. 미분하면

$$h'(\theta) = -2\sin\theta + 2\sin 2\theta = 2\sin\theta\,(2\cos\theta - 1).$$

이다. 따라서 $h'(\theta) = 0$인 것은 정확히 $\cos\theta = \frac{1}{2}$ 또는 $\sin\theta = 0$일 때이다.

> **생각해 보기** c에 대한 이차방정식이 중근을 가지는 것은 $a = \frac{1}{2}$일 때뿐이다. 그렇다면 왜 다른 a의 값이 있는가?

c에 대한 중근은 접하기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다. 사상 $\theta \mapsto \cos\theta$는 $\theta = 0$과 $\theta = \pi$에서 정류한다. 따라서 $c = \pm 1$이 근이기만 하면, h는 그곳에서 θ에 대한 이중 영점을 가진다. 조건 $h' = 0$은 이 두 가능성을 모두 담고 있다.

- $\cos\theta = \frac{1}{2}$: 만날 조건의 식에 대입하면 $\frac{1}{2} - 1 + 1 - a = 0$이므로 $a = \frac{1}{2}$이다. (같은 말이지만, 판별식(discriminant) $4 - 8(1-a)$는 $a = \frac{1}{2}$일 때 0이 되고, 이때 중근은 $c = \frac{1}{2}$이다.) 따라서 $a = \frac{1}{2}$일 때 두 곡선은 접하며, 이것이 보여야 할 내용이다.
- $\theta = 0$, $c = 1$: $2 - 2 + 1 - a = 0$이어야 하므로 $a = 1$이다. 이때 두 곡선 모두에서 $r = 3$이다.
- $\theta = \pi$, $c = -1$: $2 + 2 + 1 - a = 0$이어야 하므로 $a = 5$이다. 이때 두 곡선 모두에서 $r = 5 - 2 = 3$이므로 $r \geq 0$이 성립한다.

따라서 나머지 두 값은 $a = 1$과 $a = 5$이다.

두 번째 곡선의 특징

세 개의 개형 모두에 $r = 2 + \cos 2\theta$가 들어가므로, 이 곡선을 한 번에 설명해 둔다. 이 곡선은 $\theta \to -\theta$와 $\theta \to \pi - \theta$에 대해 변하지 않으므로 두 축 모두에 대해 대칭이다. 여기서 r는 $\theta = 0, \pi$에서의 최댓값 3부터 $\theta = \pm\frac{1}{2}\pi$에서의 최솟값 1까지 변한다. 이 곡선은 타원(ellipse)이 **아니다**. $\theta = \frac{1}{2}\pi$ 근처에서 $s = \sin\theta$로 두면

$$y = r\sin\theta = (3 - 2s^2)s = 3s - 2s^3, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = 3 - 6s^2 = -3 \text{ , 단} s = 1.$$

이다. 따라서 θ가 $\frac{1}{2}\pi$에서 멀어질 때 (s가 1보다 작아질 때) y는 **증가한다**. 그곳에서 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta = -2\sin 2\theta = 0$이고 접선이 수평이므로, 곡선은 $(0, \pm 1)$에서 첨점(cusp)이 아니라 매끄럽게 움푹 들어간 부분(오목한 홈)을 가진다. 반면 $x = r\cos\theta = c + 2c^3$은 c에 대한 증가함수이므로 $(\pm 3, 0)$의 양 끝은 그냥 둥글다.

첫 번째 곡선 $r = a + 2\cos\theta$는 $\theta \to -\theta$에 대해 변하지 않으므로 시초선(initial line)에 대해 대칭이다. 이 곡선은 $\theta = 0$에서 $r = a + 2$, $\theta = \pm\frac{1}{2}\pi$에서 $r = a$, 그리고 ($a \geq 2$일 때)

$\theta = \pi$에서 $r = a - 2$이다. $a < 2$이면 제한 조건 $r \geq 0$ 때문에 $\cos\theta = -\frac{1}{2}a$인 곳에서 곡선이 잘리고, 곡선은 그 두 방향을 따라 O에 도달한다.

소문항 (ii)

$a = \frac{1}{2}$이면

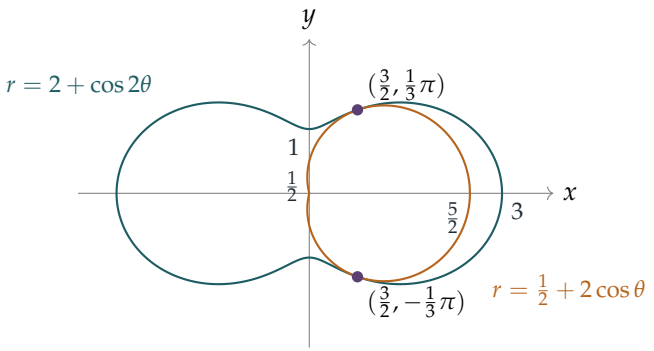
$$h(\theta) = -\left(2c^2 - 2c + \tfrac{1}{2}\right) = -2\left(c - \tfrac{1}{2}\right)^2 \leq 0.$$

이다. 따라서 첫 번째 곡선은 모든 곳에서 두 번째 곡선의 안쪽에 있고, $\cos\theta = \frac{1}{2}$인 곳에서만 두 번째 곡선과 만난다. 두 곡선은

$$\theta = \pm\tfrac{1}{3}\pi, \qquad r = \tfrac{1}{2} + 1 = \tfrac{3}{2}.$$

에서 접한다. (확인: $2 + \cos\frac{2}{3}\pi = \frac{3}{2}$이고, $\theta = \frac{1}{3}\pi$에서 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$의 두 값은 모두 $-\sqrt{3}$이다.)

첫 번째 곡선은 $\cos\theta \geq -\frac{1}{4}$, 곧 $|\theta| \leq \arccos(-\frac{1}{4}) \approx 104.5°$일 때에만 존재한다. 이 곡선은 시초선 위의 $r = \frac{5}{2}$에서 출발하여 $\theta = \pm\frac{1}{2}\pi$에서의 $r = \frac{1}{2}$를 거쳐 O까지 내려간다. 곡선은 직선 $\theta = \pm\arccos(-\frac{1}{4})$를 따라 O에 도달하므로, 원점에서 y축 바로 왼쪽에 모서리(뾰족한 끝)를 가진다.

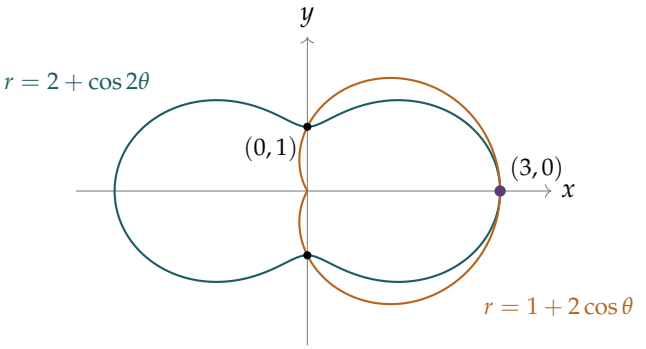


소문항 (iii)

$a = 1$인 경우. 이때 $h(\theta) = -(2c^2 - 2c) = 2c(1 - c)$이다. 두 곡선은 $c = 1$ 또는 $c = 0$인 곳에서 만난다.

- 두 곡선은 $\theta = 0$, $r = 3$, 곧 점 $(3, 0)$에서 접한다. $\theta = 0$ 근처에서는 $0 < c < 1$이므로 $h > 0$이고, 첫 번째 곡선은 접점의 양쪽 모두에서 두 번째 곡선의 바로 바깥쪽에 있다.
- $\theta = \pm\frac{1}{2}\pi$에서는 두 곡선 모두 $r = 1$이다. 이는 점 $(0, \pm 1)$, 곧 오목한 홈의 바닥이다. 여기서 h는 c와 함께 부호가 바뀌므로 두 곡선은 **교차한다**. 첫 번째 곡선은 $|\theta| < \frac{1}{2}\pi$에서 바깥쪽에, $|\theta| > \frac{1}{2}\pi$에서 안쪽에 있다.

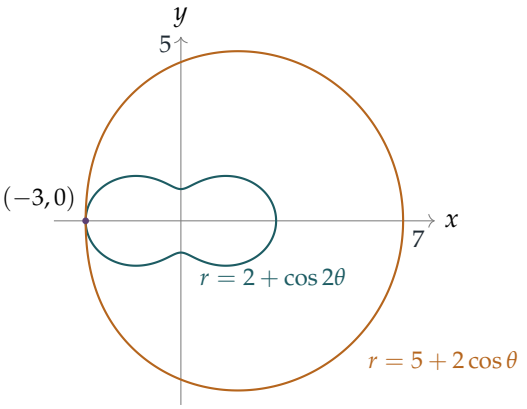
첫 번째 곡선은 $\cos\theta \geq -\frac{1}{2}$, 곧 $|\theta| \leq \frac{2}{3}\pi$일 때 존재한다. 이 곡선은 직선 $\theta = \pm\frac{2}{3}\pi$를 따라 O에 도달하며, 그곳에서 모서리를 만든다.



$a = 5$인 경우. 이때 $h(\theta) = -(2c^2 - 2c - 4) = 2(2 - c)(1 + c) \geq 0$이고, 등호는 $c = -1$일 때에만 성립한다. 따라서 첫 번째 곡선은 전부 두 번째 곡선의 바깥쪽에 있고,

$$\theta = \pi, \qquad r = 3,$$

곧 점 $(-3, 0)$에서만 두 번째 곡선과 접한다. $a > 2$이므로 이제 모든 곳에서 $r > 0$이고, 첫 번째 곡선은 닫힌 고리가 된다($a \geq 4$이므로 오목한 홈이 없는 리마송(limaçon)이다). 이 곡선은 $\theta = 0$에서 $r = 7$, $\theta = \pm\frac{1}{2}\pi$에서 $r = 5$, $\theta = \pi$에서 $r = 3$이다.



검산

- 각 접점에서 r의 두 값과 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$의 두 값을 비교한다. $a = 1, \theta = 0$에서는 두 곡선 모두 $r = 3$이고 두 도함수 값은 모두 0이다. $a = 5, \theta = \pi$에서도 마찬가지이다.
- $-3 \leq a < 9$ 범위를 0.01 간격으로 컴퓨터로 조사한 결과, ($r \geq 0$이면서) $h = h' = 0$인 경우는 $a = \frac{1}{2}, 1, 5$일 때뿐이었다. 이는 인수분해 $h' = 2\sin\theta(2\cos\theta - 1)$과 일치한다.
- 점 $(0, 1)$은 두 번째 곡선 위에 있고, 그 근처의 $\theta = \frac{1}{2}\pi + 0.1$인 점은 $y \approx 1.015 > 1$이다. 이로써 오목한 홈이 확인된다.

흔한 실수

- 판별식에서 멈추어 $a = 1$과 $a = 5$를 놓치는 것. $c = \cos\theta$에 대한 단순근이라도 θ에 대해서는 중근일 수 있다.
- $r = 2 + \cos 2\theta$를 타원으로 그리거나, $(0, \pm 1)$에서 매끄러운 오목한 홈 대신 첨점을 그리는 것.
- $a = \frac{1}{2}$ 또는 $a = 1$일 때 리마송의 안쪽 고리를 그리는 것. 그 고리에서는 $r < 0$인데, 문제에서 이를 제외하고 있다.

STEP 너머

접한다는 것은 사실 중복도(multiplicity)에 관한 명제이다. 두 곡선은 두 방정식의 차가 곡선을 따라 중복된 영점을 가지는 곳에서 접하며, 여기서 $\cos\theta$가 그랬듯이 매개화(parametrisation)는 그런 영점을 만들어 내기도 하고 숨기기도 한다. 곡선에 대한 첫 강의에서 이는 접촉 차수(order of contact)라는 개념이 되고, 극곡선의 곡률(curvature) $\left(r^2 + 2r'^2 - rr''\right) / \left(r^2 + r'^2\right)^{3/2}$은 $2 + \cos 2\theta$의 오목한 홈이 정확히 어디에서 생기는지 설명해 준다. 매개화된 곡선과 그 기하학에 대해 더 알고 싶다면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제)를, 매끄러움과 접함의 바탕에 있는 해석학에 대해서는 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학의 이해)를 읽어 보자.

풀이

STEP III 2021, 문제 6

순수수학 • 역함수와 도함수

STEP III 2021, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

핵심 아이디어

두 함수 모두 겉보기에는 까다로워 보이지만, 도함수(derivative)는 매우 간단하다. 도함수가 $\frac{1}{1+x^2}$인 함수는 $\tan^{-1} x$에 상수를 더한 것이어야 하고, 도함수가 0인 함수는 상수이다. 단, 이는 함수가 정의된 각 구간(interval)에서만 성립한다. 따라서 실제로 해야 할 일은 편리한 값이나 극한(limit)을 이용해 분리된 각 조각에서의 상수를 구하고, 함수가 정의되지 않는 점에서 생기는 도약(jump)을 주의 깊게 살피는 것이다.

풀이

소문항 (i)

$t = \tan\alpha$라 두면 $t > 0$이고, $u = \dfrac{xt+1}{t-x}$라 하면 $f_\alpha(x) = \tan^{-1} u$이다. 몫의 미분법(quotient rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{t(t-x)+(xt+1)}{(t-x)^2} = \frac{1+t^2}{(t-x)^2},$$

이고

$$1+u^2 = \frac{(t-x)^2+(xt+1)^2}{(t-x)^2} = \frac{t^2+x^2+x^2t^2+1}{(t-x)^2} = \frac{(1+t^2)(1+x^2)}{(t-x)^2}.$$

따라서 연쇄법칙(chain rule)에 의해

$$f'_\alpha(x) = \frac{1}{1+u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1+x^2},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

생각해 보기 이것은 하나의 상수 c에 대해 $f_\alpha(x) = \tan^{-1} x + c$라는 뜻인가?

그렇지 않다. 이 함수는 $x = \tan\alpha$에서 정의되지 않으므로 정의역(domain)은 분리된 두 구간이고, 각 구간에서 $f_\alpha(x) - \tan^{-1} x$의 도함수가 0이므로 상수이지만, 두 상수가 같을 필요는 없다.

$x < \tan\alpha$일 때: $0 < \frac{1}{2}\pi - \alpha < \frac{1}{2}\pi$이므로 $x = 0$에서 $f_\alpha(0) = \tan^{-1}(\cot\alpha) = \frac{1}{2}\pi - \alpha$이다. 따라서

$$f_\alpha(x) = \tan^{-1} x + \tfrac{1}{2}\pi - \alpha \qquad (x < \tan\alpha).$$

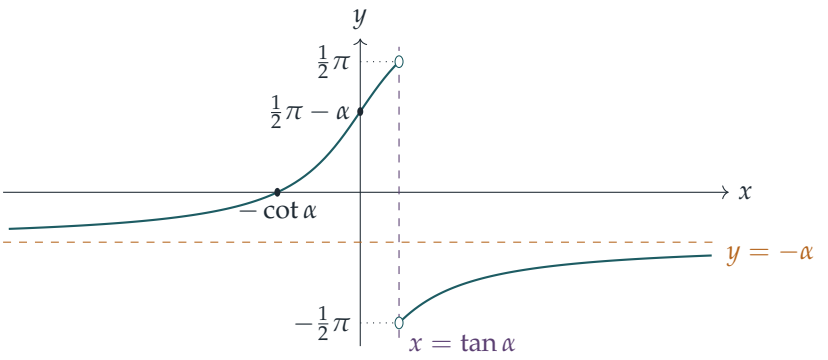
$x > \tan\alpha$일 때: 위쪽에서 $x \to \tan\alpha$일 때, 분자 $xt + 1$은 $1 + t^2 > 0$으로 가고 분모 $t - x$는 음수 값을 거쳐 0으로 가므로 $u \to -\infty$이고 $f_\alpha(x) \to -\frac{1}{2}\pi$이다. $\tan^{-1} x \to \alpha$이므로 상수는 $-\frac{1}{2}\pi - \alpha$이다:

$$f_\alpha(x) = \tan^{-1} x - \tfrac{1}{2}\pi - \alpha \qquad (x > \tan\alpha).$$

(아래쪽에서 같은 극한 논법을 쓰면 $u \to +\infty$이고 값은 $\frac{1}{2}\pi$가 되어 첫 번째 식과 일치한다.)

따라서 그래프는 $y = \tan^{-1} x$의 그래프를 두 조각으로 나누어, 한 조각은 $\frac{1}{2}\pi - \alpha$만큼 위로, 다른 조각은 $\frac{1}{2}\pi + \alpha$만큼 아래로 평행이동한 것이다. 그 특징은 다음과 같다.

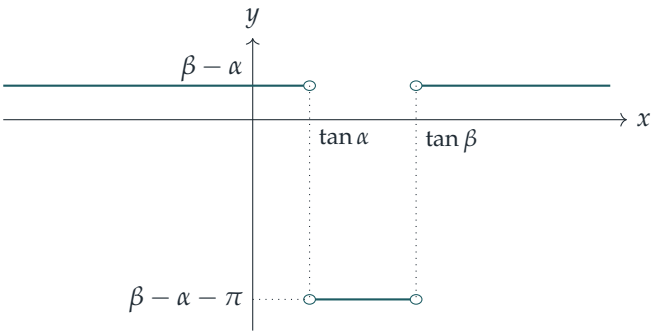
- 각 조각에서 증가하며, 기울기는 $\frac{1}{1+x^2}$이다;
- $x \to \pm\infty$일 때 $y \to -\alpha$이므로(왼쪽에서는 위에서, 오른쪽에서는 아래에서 다가간다) $y = -\alpha$는 양 끝에서 점근선(asymptote)이다;
- 왼쪽 조각은 $-\alpha$에서 $x = \tan\alpha$의 $\frac{1}{2}\pi$(도달하지 않음)까지 올라가며, y축과는 $\frac{1}{2}\pi - \alpha$에서 만나고, x축과는 $\tan^{-1} x = \alpha - \frac{1}{2}\pi$인 곳, 즉 $x = -\cot\alpha$에서 만난다;
- 오른쪽 조각은 $x = \tan\alpha$에서 $-\frac{1}{2}\pi$ 바로 위에서 시작해 $-\alpha$까지 올라가며, 전체가 x축 아래에 있다;
- $x = \tan\alpha$에서 $-\pi$만큼의 도약이 있고, 그 점에서 두 조각의 기울기는 모두 $\cos^2\alpha$이다.



차. $0 < \alpha < \beta < \frac{1}{2}\pi$이므로 $\tan\alpha < \tan\beta$이고, 따라서 구간이 세 개 생긴다. 각 함수에 대한 두 식을 이용하면 다음과 같다.

- $x < \tan\alpha$일 때: $f_\alpha(x) - f_\beta(x) = (\frac{1}{2}\pi - \alpha) - (\frac{1}{2}\pi - \beta) = \beta - \alpha$;
- $\tan\alpha < x < \tan\beta$일 때: $f_\alpha(x) - f_\beta(x) = (-\frac{1}{2}\pi - \alpha) - (\frac{1}{2}\pi - \beta) = \beta - \alpha - \pi$;
- $x > \tan\beta$일 때: $f_\alpha(x) - f_\beta(x) = (-\frac{1}{2}\pi - \alpha) - (-\frac{1}{2}\pi - \beta) = \beta - \alpha$.

$\tan^{-1}x$ 항이 소거되므로 그래프는 계단 함수(step function)이다. 즉 그래프는 수평선 $y = \beta - \alpha$(0과 $\frac{1}{2}\pi$ 사이에 있다)이되, $\tan\alpha$와 $\tan\beta$ 사이의 구간에서는 π만큼 내려가 $y = \beta - \alpha - \pi$($-\pi$와 $-\frac{1}{2}\pi$ 사이에 있다)가 된다. 함수는 $x = \tan\alpha$와 $x = \tan\beta$에서 정의되지 않는다.



소문항 (ii)

각 항을 미분한다. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\tanh^{-1}s = \dfrac{1}{1-s^2}$이므로

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tanh^{-1}(\sin x) = \frac{\cos x}{1-\sin^2 x} = \frac{1}{\cos x} = \sec x,$$

이고, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\sinh^{-1}s = \dfrac{1}{\sqrt{1+s^2}}$이므로

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh^{-1}(\tan x) = \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1+\tan^2 x}} = \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\sec^2 x}} = \frac{\sec^2 x}{|\sec x|} = |\sec x|.$$

제곱근은 양의 제곱근이므로 절댓값(modulus)이 나타난다. 따라서 $g'(x) = \sec x - |\sec x|$이다. $\frac{1}{2}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$에서는 $\cos x < 0$이므로 $|\sec x| = -\sec x$이고

$$g'(x) = 2\sec x,$$

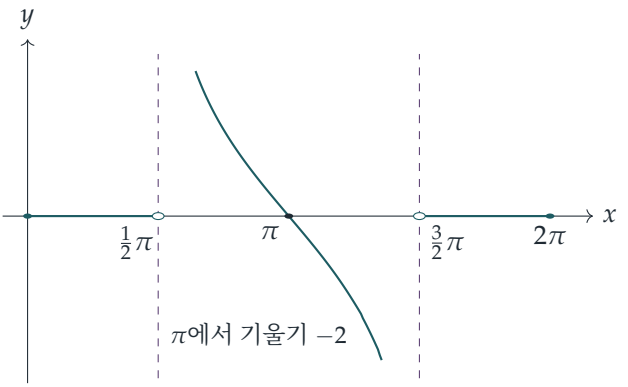
이 되어 원하는 결과를 얻는다. 나머지 두 구간 $0 \le x < \frac{1}{2}\pi$와 $\frac{3}{2}\pi < x \le 2\pi$에서는 $\cos x > 0$이므로 같은 계산으로 $g'(x) = 0$을 얻는다.

바깥쪽 구간. 여기서 g는 각 구간에서 상수이다. $g(0) = \tanh^{-1} 0 - \sinh^{-1} 0 = 0$이고 마찬가지로 $g(2\pi) = 0$이므로, $0 \le x < \frac{1}{2}\pi$와 $\frac{3}{2}\pi < x \le 2\pi$에서 $g(x) = 0$이다.

가운데 구간. 여기서 $g'(x) = 2\sec x < 0$이므로 g는 순감소(strictly decreasing)한다. 중점에서 $g(\pi) = \tanh^{-1} 0 - \sinh^{-1} 0 = 0$이고 $g'(\pi) = 2\sec \pi = -2$이다. 양 끝에서는 다음과 같다.

- $x \to \frac{1}{2}\pi^+$일 때 $\sin x \to 1$이므로 $\tanh^{-1}(\sin x) \to +\infty$이고, $\tan x \to -\infty$이므로 $-\sinh^{-1}(\tan x) \to +\infty$이다. 따라서 $g(x) \to +\infty$이다;
- $x \to \frac{3}{2}\pi^-$일 때 $\sin x \to -1$이고 $\tan x \to +\infty$이므로, 두 항 모두 $g(x) \to -\infty$가 되게 한다.

또한 $g''(x) = 2\sec x \tan x$이다. $\frac{1}{2}\pi < x < \pi$에서는 $\sec x$와 $\tan x$가 모두 음수이므로 $g'' > 0$이고, $\pi < x < \frac{3}{2}\pi$에서는 $\sec x < 0 < \tan x$이므로 $g'' < 0$이다. 따라서 $(\pi, 0)$은 기울기가 -2인 변곡점(point of inflection)이고, 곡선은 이 점에 대해 회전 대칭(rotational symmetry)이다(실제로 $g'(2\pi - x) = g'(x)$이고 $g(\pi) = 0$이다). 사실 이 구간에서 g와 $2\tanh^{-1}(\sin x)$는 도함수가 같고 둘 다 π에서 값이 0이므로, 이 구간에서 $g(x) = 2\tanh^{-1}(\sin x) = 2\ln|\sec x + \tan x|$이다.



검산

- $\alpha = 0.6$일 때: $f_\alpha(0) = \tan^{-1}(\cot 0.6) \approx 0.9708 = \frac{1}{2}\pi - 0.6$이고, 점근선이 예측하는 대로 $f_\alpha(\pm 10^9) \approx -0.6$이다.
- $g(1) = \tanh^{-1}(\sin 1) - \sinh^{-1}(\tan 1) = 1.2261 - 1.2261 = 0$이므로 평평한 조각이 확인된다. 수천 개의 무작위 점을 컴퓨터로 확인한 결과, 위의 모든 식이 10^{-6} 이내로 일치하였다.

흔한 실수

- 모든 곳에서 하나의 상수로 $f_\alpha(x) = \tan^{-1} x + c$라고 쓰는 것. 도함수가 0이라는 사실은 구간 위에서만 상수임을 보장한다.
- $\sqrt{\sec^2 x} = \sec x$라고 쓰는 것. 이는 $|\sec x|$이며, 바로 이 부호 때문에 g가 두 구간에서는 0이고 세 번째 구간에서는 그렇지 않다.

STEP 너머

구간에서 도함수가 0이면 상수라는 사실은 평균값 정리(Mean Value Theorem)의 결과이며, 두 소문항이 모두 보여 주듯 구간이 아닌 집합에서는 성립하지 않는다. 소문항 (i)은 $\pm\pi$만큼의 보정이 붙은 $\tan^{-1}$의 덧셈 정리(addition formula)로, 복소해석학(complex analysis)에서 핵심적인 분지(branch) 관리의 일종이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해하기)는 평균값 정리와 그 결과들을 꼼꼼하게 설명한다.

풀이

STEP III 2021, 문제 7

순수수학 • 기하에서의 복소수

STEP III 2021, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

핵심 아이디어

단위원(unit circle) 위의 두 점을 더하거나 뺄 때, 즉 $e^{i\theta} \pm e^{i\phi}$에서는 "평균" 인수 $e^{i(\theta+\phi)/2}$를 묶어 낸다. 그러면 남는 것은 순수한 코사인 또는 순수한 사인이 되며, 바로 이 점 덕분에 소문항 (i)이 풀린다. 그러면 소문항 (i)은 $(a+b)/(a-b)$가 순허수(purely imaginary)라는 것을 말해 주고, 복소평면(complex plane)에서 "비가 순허수"라는 것은 "수직"이라는 뜻이다. 그다음부터는 a, b, c, d의 합을 정리하는 일일 뿐이다.

풀이

소문항 (i)

$\alpha = \frac{1}{2}(\theta+\phi), \beta = \frac{1}{2}(\theta-\phi)$로 두면 $\theta = \alpha+\beta, \phi = \alpha-\beta$이다. 그러면

$$e^{i\theta} + e^{i\phi} = e^{i\alpha}\left(e^{i\beta} + e^{-i\beta}\right) = 2\cos\beta\, e^{i\alpha},$$
$$e^{i\theta} - e^{i\phi} = e^{i\alpha}\left(e^{i\beta} - e^{-i\beta}\right) = 2i\sin\beta\, e^{i\alpha}.$$

조건 $\theta - \phi \neq 2n\pi$는 정확히 β가 π의 배수가 아니라는 뜻이므로 $\sin\beta \neq 0$이고 분모는 0이 아니다. 나누면

$$z = \frac{2\cos\beta}{2i\sin\beta} = -i\cot\beta = -i\cot\left(\tfrac{1}{2}(\theta-\phi)\right) = i\cot\left(\tfrac{1}{2}(\phi-\theta)\right),$$

이다. 여기서 $1/i = -i$와 cot이 기함수(odd function)라는 사실을 썼다. 이것이 구하는 결과이다.

$\cot\left(\frac{1}{2}(\phi-\theta)\right)$는 실수이므로 z는 허수축 위에 있다.

$$|z| = \left|\cot\left(\tfrac{1}{2}(\phi-\theta)\right)\right|, \qquad \arg z = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi & \text{만약 } \cot\left(\frac{1}{2}(\phi-\theta)\right) > 0, \\ -\frac{1}{2}\pi & \text{만약 } \cot\left(\frac{1}{2}(\phi-\theta)\right) < 0. \end{cases}$$

$\cot\left(\frac{1}{2}(\phi-\theta)\right) = 0$이면, 즉 $\phi-\theta$가 π의 홀수 배이면 $z=0$이고 그 편각(argument)은 정의되지 않는다. (이는 두 점이 지름의 양 끝에 있어서 그 합이 O이 되는 경우이다.)

소문항 (ii)

A와 B는 원점이 중심인 단위원 위에 있으므로 $a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $b = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$로 쓴다. 두 점은 서로 다르므로 $\theta-\phi$는 2π의 배수가 아니고, 소문항 (i)을 적용할 수 있다.

$$\frac{x}{a-b} = \frac{a+b}{a-b} = \mathrm{i}k, \qquad k = \cot\left(\tfrac{1}{2}(\phi-\theta)\right) \in \mathbb{R}.$$

$x = a+b \neq 0$이므로 $k \neq 0$이다. 따라서 $x = \mathrm{i}k\,(a-b)$이다. 즉 (x가 나타내는) 벡터 $\overrightarrow{OX}$는 ($a-b$가 나타내는) 벡터 $\overrightarrow{BA}$를 직각만큼 회전하고 O이 아닌 실수 k배 한 것이다. 같은 말로, $\arg x - \arg(a-b) = \pm\frac{1}{2}\pi$이다. 그러므로 OX는 AB에 수직이다.

? 생각해 보기 왜 $a+b \neq 0$이 필요한가?

$a+b=0$이면 X는 원점 자체이다. 그러면 직선 OX가 없으므로 수직일 대상도 없다. 대수적으로는 이것이 $k=0$인 경우이며, 이때 x의 편각은 정의되지 않는다.

소문항 (iii)

$h = a+b+c$이면

$$h - a = b + c.$$

이다. 복소수 $h-a$는 벡터 $\overrightarrow{AH}$를 나타낸다. 두 가지 경우가 있다.

- $b+c=0$이면 $h-a=0$이므로 $h=a$이다.
- $b+c \neq 0$이면 단위원 위의 서로 다른 두 점 B와 C에 소문항 (ii)를 적용한다. 그러면 $b+c$가 나타내는 벡터는 BC에 수직이다. 그 벡터가 $\overrightarrow{AH}$이므로 AH는 BC에 수직이다. (이때 $H \neq A$이므로 AH는 실제로 직선이다.)

따라서 $h=a$이거나 $AH \perp BC$이며, 이것이 증명할 내용이다. 대칭성에 의해 BH와 CA, CH와 AB에 대해서도 같은 것이 성립하므로 H는 실제로 수선(altitude)들 위에 있다. $h=a$인 경우는 BC가 지름일 때이다. 이때 삼각형은 A에서 직각을 가지며, 수심(orthocentre)은 꼭짓점 A이다.

소문항 (iv)

수심의 정의에 의해

$$p = a + b + c, \qquad q = b + c + d, \qquad r = c + d + a, \qquad s = d + a + b.$$

이다. AQ의 중점은

$$\tfrac{1}{2}(a + q) = \tfrac{1}{2}(a + b + c + d).$$

이다. 이 식은 a, b, c, d에 대해 대칭이므로 BR, CS, DP의 중점이기도 하다.

$$\tfrac{1}{2}(b + r) = \tfrac{1}{2}(c + s) = \tfrac{1}{2}(d + p) = \tfrac{1}{2}(a + b + c + d).$$

$m = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$가 나타내는 점을 M이라 하자. 그러면

$$q = 2m - a, \qquad r = 2m - b, \qquad s = 2m - c, \qquad p = 2m - d.$$

이다. 따라서 하나의 사상

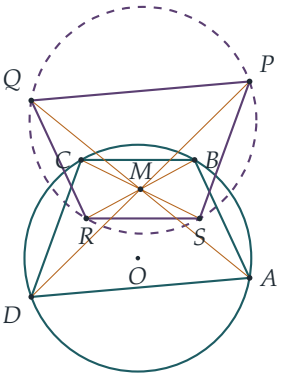
$$T : w \longmapsto 2m - w$$

가 $A \mapsto Q$, $B \mapsto R$, $C \mapsto S$, $D \mapsto P$로 보낸다. 그러므로 이 사상은 사각형 $ABCD$를 꼭짓점끼리 대응시켜 $QRSP$로 옮긴다.

T를 설명하기 위해 $T(w) - m = -(w - m)$으로 쓴다. M으로부터의 변위가 반대로 뒤집히는데, 이는 M을 중심으로 $e^{i\pi}$를 곱하는 것이다. 따라서

T는 복소수 $\frac{1}{2}(a + b + c + d)$가 나타내는 점 M을 중심으로 하는 180° 회전(반회전, *half-turn*)이다.

같은 말로, T는 점 M에 대한 점대칭(point reflection)이다. 특히 $QRSP$는 $ABCD$와 합동이고, 회전은 방향을 보존하므로 Q, R, S, P도 시계 반대 방향으로 놓인다. 네 수심은 복소수 $a + b + c + d$가 나타내는 점을 중심으로 하는 단위원 위에 있으며, 이 원은 A, B, C, D를 지나는 원의 상이다.



검산

- 소문항 (i): $\theta = 0, \phi = \frac{1}{2}\pi$이면 $z = (1+\mathrm{i})/(1-\mathrm{i}) = \mathrm{i}$이고, $\mathrm{i}\cot\frac{1}{4}\pi = \mathrm{i}$이다. 따라서 $|z| = 1, \arg z = \frac{1}{2}\pi$이다.
- 소문항 (iv): $a = 1$, $b = \mathrm{i}$, $c = -1$, $d = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}\mathrm{i}$로 잡자. 그러면 $m = 0.3 + 0.1\mathrm{i}$이고 $q = b + c + d = -0.4 + 0.2\mathrm{i}$이며, 이는 주장한 대로 $2m - a$와 같다. 정사각형$(a, b, c, d = 1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i})$이면 $m = 0$이고 Q, R, S, P는 그냥 C, D, A, B이다. 즉 반회전의 중심이 O이다.
- 네 소문항 모두 원 위의 무작위 점 수천 개에 대해 컴퓨터로도 확인하였다.

흔한 실수

- $\arg z = \frac{1}{2}\pi$만 답하는 것. 코탄젠트의 부호에 따라 $\pm\frac{1}{2}\pi$ 중 하나가 정해지며, $z = 0$은 편각이 없다.
- 소문항 (iv)에서 꼭짓점을 잘못된 순서로 대응시키는 것. A는 P가 아니라 Q로 간다. 각 꼭짓점에 대응하는 수심은 그 꼭짓점을 **빼고** 만든 삼각형의 수심이다.
- 사상을 중심과 각도 없이 "회전"이라고만 하거나, 중심 없이 "닮음비 -1인 확대"라고만 설명하는 것. 어느 설명이든 괜찮지만, 두 가지 정보가 모두 필요하다.

STEP 너머

(외심을 원점에 두었을 때의) 깔끔한 공식 $h = a + b + c$는 복소수를 이용한 기하학이라는 한 분야 전체의 출발점이다. 예를 들어 무게중심(centroid)은 $\frac{1}{3}(a + b + c)$이므로 O, 무게중심, H는 한 직선, 즉 오일러 직선(Euler line) 위에 있다. 소문항 (iv)는 원에 내접하는 사각형(cyclic quadrilateral)에 대한 같은 이야기의 작은 조각이다. Tristan Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 처음부터 끝까지 복소수의 곱셈을 회전과 확대로 다루며, 다음 단계로 삼기에 훌륭한 책이다.

풀이

STEP III 2021, 문제 8

순수수학 • 점화식과 극한

STEP III 2021, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

이 문제는 *Beyond STEP*의 2.8 절 **제곱하고 2 빼기**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch02/squaring-minus-two.html

핵심 아이디어

모든 것은 점화식(recurrence)을 인수분해(factorisation)하는 데 달려 있다. 양변에서 2를 빼면 $x_{n+1}-2=(x_n-2)(x_n+2)$가 되므로, 항들이 일단 2보다 커지면 2로부터의 거리는 매 단계마다 4보다 큰 수가 곱해진다. 이로부터 소문항 (i)이 나오고, 소문항 (ii)가 뒤따른다. 소문항 (iii)에서는 x_{n+1}^2에서 4를 빼도 똑같이 깔끔하게 인수분해되며, 바로 이 성질 때문에 곱 $x_1x_2\cdots x_n$이 연쇄적으로 소거된다(telescope).

풀이

소문항 (i)

n에 대한 수학적 귀납법(induction)을 사용한다. $n=1$일 때 주장은 $x_1\geq 2+4^0(a-2)=a$이고, 이는 등호로 성립한다($4^0=1$임에 유의한다).

어떤 $n\geq 1$에 대하여 $x_n\geq 2+4^{n-1}(a-2)$라고 가정하자. $a>2$이므로 우변은 2보다 크고, 따라서 $x_n>2$이다. 이제

$$x_{n+1}-2=x_n^2-4=(x_n-2)(x_n+2).$$

여기서 $x_n-2>0$이고 $x_n+2>4$이므로 $(x_n-2)(x_n+2)\geq 4(x_n-2)$이다. 귀납 가정(inductive hypothesis) $x_n-2\geq 4^{n-1}(a-2)$를 이용하면

$$x_{n+1}-2\geq 4(x_n-2)\geq 4\cdot 4^{n-1}(a-2)=4^n(a-2),$$

이고, 이는 $n+1$에 대한 주장이다. 귀납법에 의해 모든 $n \geq 1$에 대하여 $x_n \geq 2 + 4^{n-1}(a-2)$이다.

우리는 부등식을 한 번도 제곱하지 않았다. $x_n \geq$ (한계)를 제곱하는 것은 양변이 모두 음이 아닐 때에만 타당한데, 인수분해된 형태를 쓰면 이런 걱정을 아예 하지 않아도 된다.

소문항 (ii)

$|a| > 2$인 경우. 이때 $x_2 = a^2 - 2 > 4 - 2 = 2$이다. 수열 $x_2, x_3, \ldots$은 같은 점화식을 따르고 2보다 큰 값에서 시작하므로, a 대신 x_2를 넣어(첨자를 하나씩 옮겨) 소문항 (i)을 적용하면

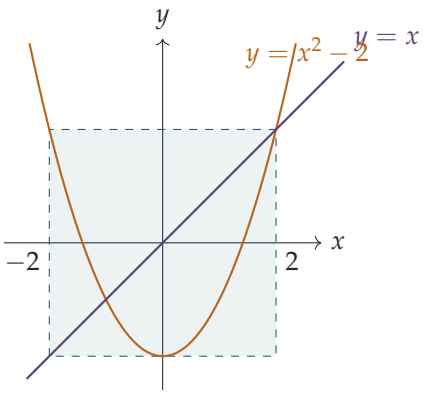
$$x_n \geq 2 + 4^{n-2}(x_2 - 2) \qquad (n \geq 2).$$

를 얻는다. $x_2 - 2 > 0$이고 $4^{n-2} \to \infty$이므로 $x_n \to \infty$이다.

$|a| \leq 2$인 경우. 모든 n에 대하여 $-2 \leq x_n \leq 2$임을 귀납법으로 보인다. 이는 $n = 1$일 때 성립한다. $-2 \leq x_n \leq 2$이면 $0 \leq x_n^2 \leq 4$이므로 $-2 \leq x_n^2 - 2 \leq 2$이고, 이는 $-2 \leq x_{n+1} \leq 2$를 뜻한다. 따라서 수열은 유계(bounded)이고 무한대로 발산할 수 없다.

> **생각해 보기** $|a| \leq 2$인 경우, 모든 n에 대하여 $x_n \leq 2$임을 보이는 것으로 충분한가?

그렇지 않다. 위쪽 한계만으로는 부족하다. -2보다 작은 항을 제곱하면 4보다 큰 값이 되고, 그다음 항은 2보다 커지기 때문이다. 그래서 귀납법에서 두 한계를 함께 다루어야 한다. 그래프를 보면 왜 이 방법이 통하는지 알 수 있다. 포물선(parabola) $y = x^2 - 2$는 구간 $[-2, 2]$를 자기 자신 위로 보낸다.



두 경우를 종합하면, $x_n \to \infty$일 필요충분조건은 $|a| > 2$이다.

소문항 (iii)

여기서 모든 것을 이끄는 인수분해는 다음과 같다.

$$x_{n+1}^2 - 4 = (x_n^2 - 2)^2 - 4 = x_n^4 - 4x_n^2 = x_n^2\,(x_n^2 - 4).$$

$a > 2$이므로 소문항 (i)에 의해 모든 n에 대하여 $x_n > 2$이고, 따라서 $x_n > 0$이며 $x_n^2 - 4 > 0$이다. 양의 제곱근을 취하면

$$\sqrt{x_{n+1}^2 - 4} = x_n \sqrt{x_n^2 - 4}.$$

이를 반복해서 적용하면(엄밀하게는 n에 대한 귀납법으로)

$$\sqrt{x_{n+1}^2 - 4} = x_n \sqrt{x_n^2 - 4} = x_n x_{n-1} \sqrt{x_{n-1}^2 - 4} = \cdots = x_1 x_2 \cdots x_n \sqrt{a^2 - 4}.$$

따라서 모든 $n \geq 1$에 대하여

$$\frac{\sqrt{x_{n+1}^2 - 4}}{x_{n+1}} = \frac{\sqrt{a^2 - 4}\, x_1 x_2 \cdots x_n}{x_{n+1}},$$

이고, 이를 y_n의 정의와 비교하면 요구된 식이 모든 n에 대하여 성립하는 것은 정확히 $A = \sqrt{a^2 - 4}$일 때임을 알 수 있다.

a 구하기. $A = \sqrt{a^2 - 4}$라는 값은 강제된다. $n = 1$일 때 요구된 식은 $Aa/x_2 = a\sqrt{a^2 - 4}/x_2$이고, $a > 0$이며 $x_2 > 0$이므로 $A = \sqrt{a^2 - 4}$를 얻는다. 역으로, $a > 2$에서 $A = \sqrt{a^2 - 4}$이면 $A^2 = a^2 - 4$이므로

$$a = \sqrt{A^2 + 4}.$$

이 값은 실제로 $a > 2$를 만족한다. $A > 0$이므로 $A^2 + 4 > 4$이기 때문이다. 이 a에 대하여 $\sqrt{a^2 - 4} = A$이고, 위에 보인 항등식은 모든 $n \geq 1$에 대하여 $y_n = \sqrt{x_{n+1}^2 - 4}\,/\,x_{n+1}$이 되어 요구된 결과를 얻는다.

수렴. 이 a의 값에 대하여, $x_{n+1} > 0$이므로

$$y_n = \frac{\sqrt{x_{n+1}^2 - 4}}{x_{n+1}} = \sqrt{1 - \frac{4}{x_{n+1}^2}}.$$

$a > 2$이므로 소문항 (ii)에 의해 $x_{n+1} \to \infty$이고, 따라서 $4/x_{n+1}^2 \to 0$이며 $y_n \to 1$이다. 두 번째 수열은 수렴(converge)하고, 그 극한(limit)은 1이다.

검산

- $A = 1$로 두면 $a = \sqrt{5} \approx 2.236$이다. 그러면 $x_2 = 3$, $x_3 = 7$이고 $y_1 = \sqrt{5}/3 \approx 0.745$이다. 공식으로 구하면 $\sqrt{9-4}/3 = \sqrt{5}/3$이므로 일치한다. 다음으로, $y_2 = \sqrt{5} \cdot$

$3/7 \approx 0.958$이고 $\sqrt{49-4}/7 = 3\sqrt{5}/7$이므로 역시 일치한다. 항 $y_3 \approx 0.99909$와 $y_4 \approx 0.9999996$은 1을 향해 빠르게 다가간다.

- $t > 1$인 $a = t + 1/t$로 치환하면 $x_n = t^{2^{n-1}} + t^{-2^{n-1}}$을 얻는다. 이를 보면 증가가 실제로 얼마나 빠른지 알 수 있으며(이중 지수적(doubly exponential)으로, 소문항 (i)의 4^{n-1}보다 훨씬 빠르다), 위의 모든 결과와도 들어맞는다.
- 소문항 (i)의 한계와 소문항 (ii)의 유계성은 여러 무작위 초깃값에 대하여 컴퓨터로도 확인하였다.

흔한 실수

- 양변이 모두 음이 아닌지 먼저 확인하지 않고 귀납 가정의 부등식을 제곱하는 것.
- 소문항 (ii)에서 $|a| \leq 2$일 때 $x_n \leq 2$만 보이는 것. $x_n \geq -2$도 필요하다. 그렇지 않으면 다음 항이 2보다 커질 수 있다.
- 거꾸로 계산하여 a를 구하고 나서, 그 값이 모든 n에 대하여 성립하는지, 그리고 $a > 2$를 만족하는지 확인하지 않는 것.

STEP 너머

사상(map) $x \mapsto x^2 - 2$는 이차 사상족(quadratic family) $x \mapsto x^2 + c$에서 가장 유명한 사상이다. $[-2, 2]$ 위에서 $x = 2\cos\theta$로 두면 이 사상은 각을 두 배로 하는 사상 $\theta \mapsto 2\theta$가 되는데, 이는 혼돈 역학(chaotic dynamics)의 대표적인 첫 번째 예이다. 그 구간 밖에서는 모든 궤도(orbit)가 무한대로 달아난다. $a > 2$일 때는 $x = 2\cosh u$로 두면 같은 아이디어가 통하며, 이때 소문항 (iii)의 곱은 고전적인 연쇄 소거 곱 $\prod \cos(\theta/2^k)$의 쌍곡(hyperbolic) 버전이 된다. 여기에 나온 극한과 귀납법의 바탕이 되는 해석학(analysis)에 대해서는 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 읽어 보라.

풀이

STEP III 2021, 문제 9

역학 • 반발 계수가 있는 비스듬한 충돌

STEP III 2021, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

핵심 아이디어

기하 부분은 모서리에 있는 두 삼각형 CPQ와 BRP에 사인 법칙(sine rule)을 한 번씩 적용하는 것이다. 두 식을 곱하면 CB 위에서 잰 QR의 공통 높이가 소거된다. 튕김에 대해서는, 매끄러운(smooth) 벽은 벽을 따르는 속도 성분을 그대로 두고 벽을 가로지르는 성분에는 e를 곱한다. 따라서 충돌 전후에 경로가 벽과 이루는 각은 $\tan(\text{충돌 후}) = e\tan(\text{충돌 전})$를 만족한다. 그러면 각 튕김에서 첫 번째 결과의 두 괄호 중 하나씩이 얻어진다.

풀이

기하학적 항등식

직선 QR와 BC 사이의 거리를 h라 하자. $QR \parallel CB$이므로 삼각형 AQR는 정삼각형이고, 따라서 $CQ = BR = h/\sin 60^\circ = 2h/\sqrt{3}$이다.

삼각형 CPQ에서 C에서의 각은 60°이고 P에서의 각은 θ이므로, Q에서의 각은 $120^\circ - \theta$이다. 사인 법칙에 의해

$$\frac{CP}{\sin(120^\circ - \theta)} = \frac{CQ}{\sin\theta} \quad \Longrightarrow \quad (a-x)\sin\theta = \frac{2h}{\sqrt{3}}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \tfrac{1}{2}\sin\theta\right).$$

$\sin\theta$로 나누고($0 < \theta < 180^\circ$이므로 이 값은 0이 아니다) 정리하면

$$\sqrt{3}\cot\theta + 1 = \frac{\sqrt{3}\,(a-x)}{h}.$$

삼각형 BRP에서 B에서의 각은 60°, R에서의 각은 ϕ, P에서의 각은 $120^\circ - \phi$이다. 사인 법칙에 의해

$$\frac{BP}{\sin\phi} = \frac{BR}{\sin(120^\circ - \phi)} \quad \Longrightarrow \quad x\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\phi + \tfrac{1}{2}\sin\phi\right) = \frac{2h}{\sqrt{3}}\sin\phi,$$

이므로

$$\sqrt{3}\cot\phi + 1 = \frac{4h}{\sqrt{3}\,x}.$$

두 결과를 곱하면 h와 $\sqrt{3}$이 소거된다.

$$(\sqrt{3}\cot\phi + 1)(\sqrt{3}\cot\theta + 1) = \frac{4(a-x)}{x},$$

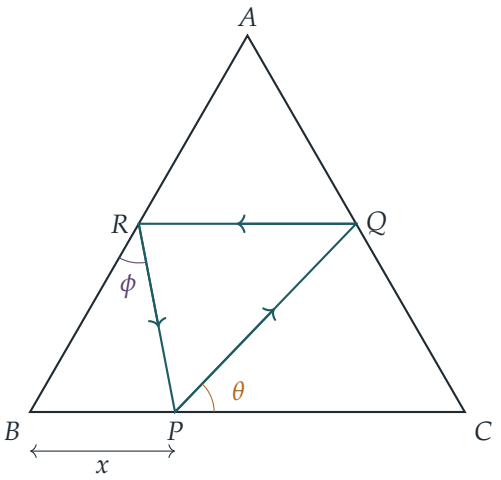
여기에 x를 곱하면 구하려는 항등식이 된다.

튕김

공을 매끄러운 탁자 위를 움직이는 입자로 모형화하면, 공은 충돌과 충돌 사이에 직선으로 움직인다. 틀도 매끄럽다고 하면, 각 충돌은 벽에 수직인 충격량(impulse)만 준다. 공이 속력 u로 벽과 각 α를 이루며 벽에 부딪히고, 속력 v로 벽과 각 β를 이루며 떠난다고 하자. 벽을 따르는 성분은 변하지 않고, 벽을 가로지르는 성분은 방향이 반대가 되며 e배가 된다.

$$v\cos\beta = u\cos\alpha, \qquad v\sin\beta = eu\sin\alpha \quad\Longrightarrow\quad \tan\beta = e\tan\alpha.$$

또한 공은 벽을 따라 같은 방향으로 계속 움직이므로, 그 방향에서 잰 α와 β는 모두 예각(acute angle)이다. ($e > 0$이어야 한다. 그렇지 않으면 공은 첫 충돌 후 벽을 따라 미끄러질 것이다.)



Q에서. 공은 PQ를 따라 벽 CA와 각 $\angle PQC = 120^\circ - \theta$를 이루며 A 쪽으로 움직이면서 도착한다. 그리고 QR를 따라 벽과 각 $\angle AQR = 60^\circ$를 이루며 떠난다($QR \parallel CB$이므로 동위각(corresponding angles)이다). 따라서

$$\tan 60^\circ = e\tan(120^\circ - \theta).$$

$\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$와 함께 차의 공식(subtraction formula)을 쓰고, 분모와 분자에 $\cot\theta$를 곱하면

$$\tan(120^\circ - \theta) = \frac{-\sqrt{3} - \tan\theta}{1 - \sqrt{3}\tan\theta} = \frac{\sqrt{3}\cot\theta + 1}{\sqrt{3} - \cot\theta}.$$

$c = \sqrt{3}\cot\theta$라 하자. 튕김 조건 $\sqrt{3}(\sqrt{3} - \cot\theta) = e(\sqrt{3}\cot\theta + 1)$은 $3 - c = e(c+1)$, 즉 $4 - (c+1) = e(c+1)$이 되므로

$$\sqrt{3}\cot\theta + 1 = \frac{4}{1+e}.$$

*R*에서. 공은 QR를 따라 벽 AB와 각 $\angle ARQ = 60^\circ$를 이루며 B 쪽으로 움직이면서 도착하고, RP를 따라 각 $\angle BRP = \phi$를 이루며 떠난다. 따라서

$$\tan\phi = e\tan 60^\circ = \sqrt{3}\,e, \qquad \text{따라서} \qquad \sqrt{3}\cot\phi = \frac{1}{e}, \qquad \sqrt{3}\cot\phi + 1 = \frac{1+e}{e}.$$

x 구하기. 두 괄호를 항등식에 대입하면

$$\frac{1+e}{e}\cdot\frac{4}{1+e}\cdot x = 4(a-x) \quad\Longrightarrow\quad x = e(a-x) \quad\Longrightarrow\quad x = \frac{ae}{1+e},$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

다시 한 바퀴 돌기

> ? **생각해 보기** 공이 다시 한 번 PQ를 따라 출발하려면 P에서 무슨 일이 일어나야 하는가?

공은 RP를 따라 P에 도달한다. 삼각형 BRP에서 이 경로는 BC와 각 $\angle RPB = 120^\circ - \phi$를 이루므로, 이 각이 예각일 때에만 공은 C 쪽으로 움직이며 도착한다. PQ를 다시 따라가려면 공은 PC와 각 θ를 이루며 떠나야 하므로, 다음이 필요하다.

$$\tan\theta = e\tan(120^\circ - \phi).$$

Q에서의 계산으로부터 $\sqrt{3}\cot\theta = \frac{4}{1+e} - 1 = \frac{3-e}{1+e}$이므로 $\tan\theta = \dfrac{\sqrt{3}(1+e)}{3-e}$이고, 이 값은 양수이다. 즉 PQ는 실제로 C 쪽을 향한다.

Q에서와 같은 공식에 θ 대신 ϕ를 넣고 $\sqrt{3}\cot\phi = \frac{1}{e}$를 쓰면

$$\tan(120^\circ - \phi) = \frac{\sqrt{3}\,(\sqrt{3}\cot\phi + 1)}{3 - \sqrt{3}\cot\phi} = \frac{\sqrt{3}\,(1+e)/e}{(3e-1)/e} = \frac{\sqrt{3}(1+e)}{3e-1}.$$

$e \le \frac{1}{3}$이면 $120^\circ - \phi \ge 90^\circ$이므로, 충돌 후 공은 BC에서 곧바로 멀어지거나 B 쪽으로 되돌아간다. 그러면 C 쪽으로 기울어진 PQ를 따라갈 수 없다. 따라서 $e > \frac{1}{3}$이고, 조건은 다음과 같이 된다.

$$\frac{\sqrt{3}(1+e)}{3-e} = \frac{\sqrt{3}e(1+e)}{3e-1} \quad\Longleftrightarrow\quad 3e - 1 = 3e - e^2 \quad\Longleftrightarrow\quad e^2 = 1.$$

$e > 0$이므로 $e = 1$이고, 이것이 구하려던 결과이다. 공의 속력은 충돌할 때마다 변하지만($e = 1$인 경우는 제외), 여기서 속력은 아무 역할도 하지 않는다. 오직 방향만이 중요하다.

검산

- $e = 1$일 때: $x = \frac{a}{2}$이고 $\tan\theta = \tan\phi = \sqrt{3}$이므로 $\theta = \phi = 60°$이며, PQR는 각 변의 중점을 이은 삼각형이다. 대칭성에 의해 이것은 예상대로 닫힌 완전 탄성(perfectly elastic) 궤도이다.
- $a = 1, e = \frac{1}{2}$일 때: $x = \frac{1}{3}$이고 $\theta \approx 46.10°$이다. 컴퓨터로 공을 세 번의 충돌에 걸쳐 따라가 보면 공은 정확히 P로 돌아온다. 그다음 충돌 후 공은 BC와 $46.10°$가 아니라 약 $68.95°$를 이루며 떠나므로, PQR를 다시 돌지 않는다.
- $e \to 0$이면 $x \to 0$이다. 즉 P는 모서리 B로 미끄러져 들어간다. 이는 공이 각 벽을 가로지르는 속도를 거의 모두 잃는 것과 잘 들어맞는다.

흔한 실수

- e를 속도 전체에, 또는 벽을 따르는 성분에 적용하는 것. 매끄러운 벽에 수직인 성분만 변한다.
- 입사각(angle of incidence)을 법선(normal)에서 잰 뒤, 벽에서 잰 각에 대해 성립하는 $\tan\beta = e\tan\alpha$를 쓰는 것. 법선에서 재면 법칙은 $\cot\beta = e\cot\alpha$이다.
- 마지막 부분에서 $120° - \phi$가 둔각(obtuse angle)일 수 있다는 것, 또는 $e = -1$을 버려야 한다는 것을 잊는 것.

STEP 너머

어떤 영역 안에서 튕기는 공의 경로는 **수학적 당구**(*mathematical billiards*)의 주제이다. $e = 1$일 때 중점을 이은 삼각형은 파냐노(Fagnano) 궤도이다. 임의의 예각삼각형에서 이 궤도는 수선의 발(feet of the altitudes)을 잇고, 둘레가 가장 짧은 내접 삼각형(inscribed triangle)이다. $e < 1$이면 튕길 때마다 경로가 벽 쪽으로 납작해지며, 여기서 확인했듯이 공은 닫힌 경로를 반복할 수 없다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 충격량과 충돌을 꼼꼼하게 다룬다. 당구 자체에 대해서는 Tabachnikov의 *Geometry and Billiards*(기하와 당구)가 다음 단계로 읽기에 훌륭한 책이다.

풀이

STEP III 2021, 문제 10

역학 • 감기는 줄의 운동

STEP III 2021, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

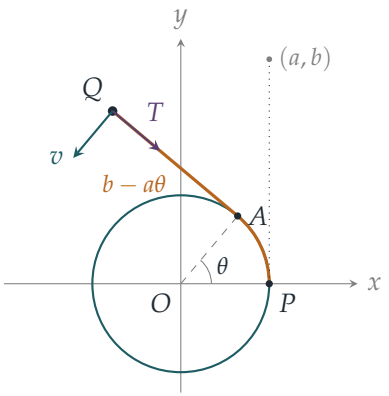
핵심 아이디어

줄의 곧은 부분이 회전한 각 θ로 모든 것을 나타낸다. 줄은 원기둥에서 접선(tangent)을 따라 떨어져 나가므로, 입자는 접점에 길이가 $b - a\theta$인 접선 벡터를 더한 위치에 있다. 미분해 보면 입자의 속도는 항상 줄과 수직이므로, 장력(tension)은 일을 하지 않고 속력은 변하지 않는다. 매 순간 입자는 줄이 원기둥에서 떨어져 나가는 점을 중심으로 하는 원 위를 움직이고 있으며, 장력이 구심력(centripetal force)을 제공한다.

풀이

입자를 매끄러운 수평 탁자 위를 움직이는 점으로 모형화한다. 따라서 입자에 작용하는 수평 방향의 힘은 가볍고 늘어나지 않는 줄의 장력 T뿐이다(무게는 탁자의 수직항력(normal reaction)과 평형을 이룬다). 줄은 운동하는 내내 팽팽하다.

줄이 원기둥에 감기려면 충격량(impulse)이 입자를 (a, b)에서 x축의 음의 방향으로 보내야 하므로, 줄은 시계 반대 방향으로 돈다. 시각 t에서 줄의 곧은 부분이 원기둥에서 떨어져 나가는 점을 A라 하자.



소문항 (i)

P로 향하는 반지름이 θ만큼 회전했으므로 점 A는 $(a\cos\theta, a\sin\theta)$이다. 원기둥에 감긴 줄의 길이는 호 PA의 길이 $a\theta$이므로, 곧은 부분의 길이는 $b-a\theta$이다. 곧은 부분은 A에서의 접선을 따라 θ가 증가하는 방향으로 놓이며, 이 방향의 단위벡터는 $(-\sin\theta, \cos\theta)$이다. ($\theta = 0$일 때 이는 $(0,1)$이 되어 처음 위치 (a,b)와 일치한다.) 따라서 입자의 위치는

$$x = a\cos\theta - (b-a\theta)\sin\theta, \qquad y = a\sin\theta + (b-a\theta)\cos\theta.$$

곱의 미분법(product rule)과 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(b-a\theta) = -a\dot\theta$를 이용하여 t에 대하여 미분하면

$$\dot x = -a\dot\theta\sin\theta + a\dot\theta\sin\theta - (b-a\theta)\dot\theta\cos\theta = -(b-a\theta)\dot\theta\cos\theta,$$
$$\dot y = a\dot\theta\cos\theta - a\dot\theta\cos\theta - (b-a\theta)\dot\theta\sin\theta = -(b-a\theta)\dot\theta\sin\theta.$$

따라서 $\dot x^2 + \dot y^2 = (b-a\theta)^2\dot\theta^2$이고, $b-a\theta > 0$이며 $\dot\theta > 0$(줄이 감기고 있다)이므로 속력은

$$v = (b-a\theta)\dot\theta.$$

소문항 (ii)

> **생각해 보기** 왜 속력이 u로 유지되어야 할까? 줄은 내내 입자를 당기고 있는데 말이다.

소문항 (i)에서 속도는 $-(b-a\theta)\dot\theta\,(\cos\theta, \sin\theta)$이며, 이는 반지름 OA와 평행하므로 방향이 $(-\sin\theta, \cos\theta)$인 줄과 수직이다. 장력은 줄을 따라 작용하므로 장력이 일을 하는 비율 $\mathbf{T}\cdot\mathbf{v}$는 매 순간 0이다. 다른 수평 방향의 힘은 작용하지 않으므로 운동 에너지(kinetic energy), 따라서 속력은 일정하다. 처음 속력이 u이므로

$$\dot\theta\,(b-a\theta) = u,$$

이고, 이것이 보이려던 식이다.

소문항 (iii)

(ii)를 이용하면 속도는 $\mathbf{v} = -u(\cos\theta, \sin\theta)$이고 u는 상수이므로, 가속도는

$$\dot{\mathbf{v}} = -u\dot{\theta}(-\sin\theta, \cos\theta).$$

이 가속도의 크기는 $u\dot{\theta}$이고, 입자에서 A를 향하여 정확히 줄을 따라 놓인다. (같은 말로, 매 순간 입자는 A를 중심으로 하는 반지름 $b - a\theta$인 원 위를 속력 u로 움직이므로, 그 가속도는 A를 향하는 $u^2/(b - a\theta)$이다.) 줄 방향으로 뉴턴(Newton)의 운동 제2법칙을 적용하면

$$T = mu\dot{\theta} = \frac{mu^2}{b - a\theta}.$$

이제 $b - a\theta$를 t로 나타내기만 하면 된다. $t = 0$일 때 $\theta = 0$임을 이용하여 (ii)를 t에 대하여 적분하면

$$b\theta - \tfrac{1}{2}a\theta^2 = ut.$$

그러면

$$(b - a\theta)^2 = b^2 - 2a\left(b\theta - \tfrac{1}{2}a\theta^2\right) = b^2 - 2aut,$$

이고, $b - a\theta > 0$이므로 양의 제곱근을 택하여 $b - a\theta = \sqrt{b^2 - 2aut}$이다. 따라서

$$T = \frac{mu^2}{\sqrt{b^2 - 2aut}},$$

이고, 이것이 보이려던 식이다.

검산

- $t = 0$일 때 장력은 mu^2/b이다. 예상대로 입자는 P를 중심으로 하는 반지름 b인 원 위를 속력 u로 움직이기 시작한다.
- 줄은 $a\theta = b$일 때 완전히 감기며, 이는 $t = b^2/(2au)$일 때 일어난다. 이때 $b^2 - 2aut = 0$이 되어 장력은 한없이 커지는데, 속력은 일정한 채로 순간 원의 반지름이 0으로 줄어들기 때문이다.
- 차원(dimensions): b^2과 aut는 모두 넓이이고, mu^2/길이는 힘이다.
- 컴퓨터로도 결과를 확인하였다. a, b, u, m을 여러 번 무작위로 골라 운동을 수치적으로 단계별 계산하고 위치를 수치 미분한 결과, 속력은 u로 유지되었고 줄 방향으로 측정한 힘은 상대오차 약 3×10^{-5} 이내에서 $mu^2/\sqrt{b^2 - 2aut}$와 일치하였다.

흔한 실수

- O에 대한 각운동량(angular momentum)이 보존된다고 가정하는 것. 그렇지 않다. 장력은 원기둥의 접선을 따라 작용하는데, 이 접선은 O를 지나지 않으므로 장력은 O에 대

한 모멘트(moment)를 가진다. 여기서 보존되는 양은 에너지이다.

- 이미 원기둥에 감긴 줄을 잊고, 곧은 부분의 길이로 $b - a\theta$ 대신 b를 쓰는 것.
- 장력을 계산할 때 곡률 반지름(radius of curvature)으로 곧은 부분의 길이 AQ 대신 입자 경로의 반지름 OQ를 쓰는 것.

STEP 너머

곡선에서 풀려나는(또는 곡선에 감기는) 줄의 끝이 그리는 경로를 **신개선**(*involute*)이라 한다. 원의 신개선은 대부분의 톱니바퀴 이 모양에 쓰이는데, 맞물린 톱니바퀴가 운동을 매끄럽게 전달하게 해 주기 때문이다. 이 문제는 대학 1학년 역학에서 만나는 일반 원리도 보여 준다. 속도에 수직인 구속력(constraint force)은 일을 하지 않으므로, 운동량(momentum)과 각운동량이 보존되지 않을 때에도 에너지는 보존될 수 있다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)에 바로 이런 종류의 문제에 대한 좋은 논의가 있다.

풀이

STEP III 2021, 문제 11

확률과 통계 • 지수분포

STEP III 2021, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

이 문제는 *Beyond STEP*의 12.18 절 **무기억성**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch12/memoryless.html

핵심 아이디어

Y와 Z에 관한 모든 질문은 사실 X가 어느 구간에 떨어지는가에 관한 질문이다. 사건 $Y = n$은 $n \leq X < n+1$이고, 사건 $Z < z$는 각 n마다 하나씩, 서로 배반인(disjoint) 조각 $n \leq X < n+z$들로 나뉜다. 지수분포(exponential distribution)의 꼬리 확률(tail) $\mathrm{P}(X \geq x) = \mathrm{e}^{-\lambda x}$ 덕분에 각 조각은 등비급수(geometric series)의 한 항이 된다.

풀이

이 풀이 전체에서 $q = \mathrm{e}^{-\lambda}$로 쓴다. $\lambda > 0$이므로 $0 < q < 1$이다. $x \geq 0$에 대하여

$$\mathrm{P}(X \geq x) = \int_x^\infty \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-\lambda x},$$

이고, X는 연속(continuous) 확률변수이므로 $0 \leq a < b$에 대하여 $\mathrm{P}(a \leq X < b) = \mathrm{P}(a < X < b) = \mathrm{e}^{-\lambda a} - \mathrm{e}^{-\lambda b}$이다.

소문항 (i)

Y는 X의 정수 부분(integer part)이므로, $Y = n$인 것은 정확히 $n \leq X < n+1$일 때이다. 따라서

$$\mathrm{P}(Y = n) = \mathrm{e}^{-n\lambda} - \mathrm{e}^{-(n+1)\lambda} = (1 - \mathrm{e}^{-\lambda})\mathrm{e}^{-n\lambda},$$

이고, 이것이 구하는 결과이다. (즉 Y는 0에서 시작하고 공비가 q인 기하분포(geometric distribution)를 따른다.)

소문항 (ii)

$Z = X - Y$는 X의 소수 부분(fractional part)이므로 $0 \le Z < 1$이다. $0 \le z \le 1$이라 하자. 사건 $Z < z$는 정확히 정수 $n = Y$에 대하여 $n \le X < n + z$일 때 일어난다. $n = 0, 1, 2, \ldots$에 대한 이 사건들은 서로 배반이므로

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(Z < z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}(n \le X < n + z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\mathrm{e}^{-n\lambda} - \mathrm{e}^{-n\lambda - \lambda z}\right) \\ &= (1 - \mathrm{e}^{-\lambda z}) \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda z}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}, \end{aligned}$$

이다. 여기서 $0 < q < 1$이므로 수렴(converge)하는 등비급수의 합을 구하였다. 이것이 구하는 결과이다.

소문항 (iii)

(ii)의 분포함수(distribution function)를 미분하면 Z의 확률밀도함수(density)는

$$g(z) = \frac{\lambda \mathrm{e}^{-\lambda z}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}} \qquad (0 \le z \le 1),$$

이고, 그 밖의 경우에는 $g(z) = 0$이다. $u = z$, $\mathrm{d}v = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda z}\,\mathrm{d}z$로 놓고 부분적분(integration by parts)하면

$$\int_0^1 z\lambda \mathrm{e}^{-\lambda z}\,\mathrm{d}z = \left[-z\mathrm{e}^{-\lambda z}\right]_0^1 + \int_0^1 \mathrm{e}^{-\lambda z}\,\mathrm{d}z = -\mathrm{e}^{-\lambda} + \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}.$$

이것을 $1 - \mathrm{e}^{-\lambda}$로 나누면

$$\mathrm{E}(Z) = \frac{1}{\lambda} - \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}} = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mathrm{e}^{\lambda} - 1}.$$

소문항 (iv)

$0 \le z_1 < z_2 \le 1$이라 하자. 사건 $\{Y = n$ 이고$z_1 < Z < z_2\}$는 정확히 $n + z_1 < X < n + z_2$이므로

$$\mathrm{P}(Y = n \text{ 이고} z_1 < Z < z_2) = \mathrm{e}^{-\lambda(n+z_1)} - \mathrm{e}^{-\lambda(n+z_2)} = \mathrm{e}^{-n\lambda}\left(\mathrm{e}^{-\lambda z_1} - \mathrm{e}^{-\lambda z_2}\right).$$

? **생각해 보기** 독립성을 판정하려면 이것을 무엇과 비교해야 할까?

곱 $\mathrm{P}(Y = n)\,\mathrm{P}(z_1 < Z < z_2)$와 비교해야 한다. Z는 연속 확률변수이므로 $\mathrm{P}(Z = z_1) = 0$이고, 따라서 (ii)에 의하여

$$\mathrm{P}(z_1 < Z < z_2) = \mathrm{P}(Z < z_2) - \mathrm{P}(Z < z_1) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda z_1} - \mathrm{e}^{-\lambda z_2}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}.$$

여기에 (i)의 $\mathrm{P}(Y = n) = (1 - \mathrm{e}^{-\lambda})\mathrm{e}^{-n\lambda}$를 곱하면 인수 $1 - \mathrm{e}^{-\lambda}$가 약분되어 위의 결합 확률(joint probability)과 정확히 같아진다. 따라서 모든 음이 아닌 정수 n과 모든 구간 $(z_1, z_2) \subseteq [0, 1]$에 대하여

$$\mathrm{P}(Y = n \text{ 이고} z_1 < Z < z_2) = \mathrm{P}(Y = n)\,\mathrm{P}(z_1 < Z < z_2)$$

이다. Y는 음이 아닌 정수값만 갖고 Z는 $[0, 1)$의 값만 가지므로, 이러한 꼴의 사건들이 결합분포(joint distribution) 전체를 결정한다. 그러므로 Y와 Z는 **독립**(*independent*)**이다**. 즉 X가 어느 단위 구간에 떨어졌는지 안다고 해서 그 구간 안의 어디에 떨어졌는지에 대해서는 아무것도 알 수 없다.

검산

- (ii)에 $z = 1$을 대입하면 당연히 그래야 하듯 $\mathrm{P}(Z < 1) = 1$이 되고, $z = 0$을 대입하면 0이 된다.
- $\lambda \to 0$일 때 X의 밀도는 각 단위 구간 위에서 거의 평평하므로, Z는 $[0, 1]$ 위의 균등분포(uniform distribution)에 가까워야 한다. 실제로 $\mathrm{e}^{\lambda} - 1 = \lambda + \frac{1}{2}\lambda^2 + \cdots$로부터 $\frac{1}{\mathrm{e}^{\lambda} - 1} = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2} + O(\lambda)$이므로 $\mathrm{E}(Z) \to \frac{1}{2}$이다. $\lambda \to \infty$일 때는 X가 거의 항상 아주 작으므로 $\mathrm{E}(Z) \to 0$이다.
- $\lambda = 1$일 때 $\mathrm{E}(Z) = 1 - \frac{1}{\mathrm{e} - 1} \approx 0.4180$이며, 이는 X의 값 200 000개를 컴퓨터로 모의실험한 결과와 일치한다. (iv)의 모의실험 결합 빈도 역시 주변분포(marginal distribution)들의 곱과 일치하였다.

흔한 실수

- $Z < z$가 첫 번째 단위 구간뿐 아니라 모든 단위 구간에서 일어날 수 있다는 점을 잊고 $\mathrm{P}(Z < z) = \mathrm{P}(X < z)$로 쓰는 것.
- n, z_1, z_2를 한 가지만 골라 확인하고 독립이라고 결론 내리는 것. 인수분해(factorisation)는 이들 모두에 대하여 성립해야 한다.

STEP 너머

(iv)의 독립성은 지수분포의 **무기억성**(*memoryless property*)이 드리운 그림자이다. 즉 $X \geq n$이라는 조건 아래에서 초과량 $X - n$은 n이 무엇이든 다시 같은 비율의 지수분포를 따른다. 이 때문에 지수분포는 포아송 과정(Poisson process)의 대기 시간(waiting time)을 모형화하며, 그 정수 부분은 이산 무기억 분포인 기하분포가 된다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 두 분포와 포아송 과정을 모두 다룬다.

풀이

STEP III 2021, 문제 12

확률과 통계 • 합의 분산

> **STEP III 2021, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2021년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

이 문제는 *Beyond STEP*의 12.4 절 **둘씩은 독립이지만 한꺼번에는 독립이 아닌**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch12/pairwise-independence.html

핵심 아이디어

팀의 점수를 선수 쌍마다 하나씩 대응하는 지시 변수(indicator variable) 꼴의 확률변수들의 합으로 쓰고, 그 합의 분산(variance)을 전개한다. 그러면 모든 것은 **서로 다른** 두 쌍이 어떻게 상호작용하는지에 달려 있다. 두 쌍에 공통인 선수가 없으면 분명히 독립(independent)이므로, 실제로 다뤄야 할 것은 선수 한 명을 공유하는 쌍들이다. (i)에서는 그런 쌍들이 독립임이 밝혀지므로 교차항이 사라진다. (iii)에서는 독립이 아니며, (ii)의 항등식이 그런 쌍들의 기여를 세는 도구가 된다.

풀이

소문항 (i)

각 주사위는 공정하고 선수들은 독립적으로 주사위를 던진다. 주어진 두 선수가 같은 수를 낼 확률은 첫 번째 선수가 무엇을 내든 $\frac{1}{6}$이다. 따라서

$$\mathrm{P}(X_{12}=1)=\mathrm{P}(X_{23}=1)=\tfrac{1}{6}.$$

$X_{12}=1$과 $X_{23}=1$이 모두 일어나는 것은 정확히 선수 1, 2, 3이 모두 같은 수를 낼 때이므로

$$\mathrm{P}(X_{12}=1,\ X_{23}=1)=\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{6}=\tfrac{1}{36}=\mathrm{P}(X_{12}=1)\,\mathrm{P}(X_{23}=1).$$

이 값을 주변 확률(marginal probability)에서 빼면 나머지 세 칸을 얻는다. 예를 들어 $\mathrm{P}(X_{12}=1,X_{23}=0)=\frac{1}{6}-\frac{1}{36}=\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}$이고, 마찬가지로 $\mathrm{P}(X_{12}=0,X_{23}=1)=\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}$,

$\mathrm{P}(X_{12}=0, X_{23}=0) = 1-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}+\frac{1}{36} = \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}$이다. 따라서 결합 분포(joint distribution)는 주변 분포들의 곱이고, X_{12}와 X_{23}은 독립이다.

? **생각해 보기** $X_{12}=1$임을 알아도 왜 X_{23}에 대해 아무것도 알 수 없는가?

선수 1과 2가 같은 수를 냈다는 조건 아래에서도 선수 2의 수는 여전히 $\{1,\dots,6\}$ 위에서 균등하게 분포하고, 선수 3이 그 수와 같을 확률은 이전과 똑같이 $\frac{1}{6}$이다. 모든 눈이 똑같이 나올 수 있으므로 공유된 선수는 아무 정보도 전달하지 않는다.

$T=\sum_{i<j} X_{ij}$를 총점이라 하자. 이는 $N=\binom{n}{2}$개 항의 합이다. 각 X_{ij}는 모수가 $\frac{1}{6}$인 베르누이(Bernoulli) 확률변수이므로 $\mathrm{E}(X_{ij})=\frac{1}{6}$이고 $\mathrm{Var}(X_{ij})=\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{36}$이다. 그러므로

$$\mathrm{E}(T)=\frac{N}{6}=\frac{n(n-1)}{12}.$$

분산을 구하기 위해 서로 다른 두 쌍을 아무거나 택하자. 공통인 선수가 없으면 두 쌍은 서로소인 주사위 집합에 의존하므로 독립이다. 선수 한 명을 공유하면, 선수 번호를 다시 붙인 뒤 위의 논증에 의해 독립이다. 따라서 X_{ij}들은 쌍별 독립이고, 모든 공분산(covariance)이 0이며, 합의 분산은 분산들의 합이다.

$$\mathrm{Var}(T)=N\cdot\frac{5}{36}=\frac{5n(n-1)}{72}.$$

소문항 (ii)

$S=Y_1+\cdots+Y_m$이라 하자. 선형성(linearity)에 의해 $\mathrm{E}(S)=0$이므로 $\mathrm{Var}(S)=\mathrm{E}(S^2)-0^2=\mathrm{E}(S^2)$이다. 제곱을 전개하면 각 Y_i^2은 한 번, $i<j$인 각 곱 Y_iY_j는 두 번 나타난다.

$$S^2=\sum_{i=1}^{m} Y_i^2+2\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=i+1}^{m} Y_iY_j.$$

기댓값(expectation)을 취하고 선형성을 이용하면 구하는 공식을 얻는다.

소문항 (iii)

두 선수에 대해 $\mathrm{P}(\text{같은 짝수})=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$이고, 마찬가지로 $\mathrm{P}(\text{같은 홀수})=\frac{1}{12}$이다. 따라서

$$\mathrm{P}(Z_{ij}=1)=\mathrm{P}(Z_{ij}=-1)=\frac{1}{12},\qquad \mathrm{P}(Z_{ij}=0)=\frac{5}{6}.$$

독립이 아님. $Z_{12}=1$이고 $Z_{23}=-1$이라면 선수 2의 수는 짝수이면서 동시에 홀수여야 한다. 따라서

$$\mathrm{P}(Z_{12}=1,\ Z_{23}=-1)=0\neq\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{12}=\mathrm{P}(Z_{12}=1)\,\mathrm{P}(Z_{23}=-1),$$

이고, Z_{12}와 Z_{23}은 독립이 아니다.

평균. 대칭성에 의해 $\mathrm{E}(Z_{ij}) = \frac{1}{12} - \frac{1}{12} = 0$이므로 총점 $U = \sum_{i<j} Z_{ij}$의 평균은 0이다.

분산. 모든 Z_{ij}의 평균이 0이므로 $N = \binom{n}{2}$개의 변수 Z_{ij}에 (ii)를 쓸 수 있다. 두 종류의 기댓값이 필요하다.

- 제곱: Z_{ij}^2은 정확히 선수 i와 j가 같은 수를 낼 때 1이므로 $\mathrm{E}(Z_{ij}^2) = \frac{1}{6}$이다.
- 서로 다른 두 쌍의 곱. 두 쌍에 공통인 선수가 없으면 두 변수는 평균이 0이고 독립이므로 $\mathrm{E}(Z_{ij}Z_{kl}) = \mathrm{E}(Z_{ij})\,\mathrm{E}(Z_{kl}) = 0$이다. 선수를 공유하면, 예를 들어 $Z_{12}Z_{23}$의 경우 세 선수가 모두 같은 수를 낼 때에만 곱이 0이 아니다. 이때 두 인수는 모두 $+1$(짝수)이거나 모두 -1(홀수)이므로 곱은 1이다. 그러므로 $\mathrm{E}(Z_{12}Z_{23}) = \frac{1}{36}$이다.

? **생각해 보기** 정확히 한 명의 선수를 공유하는 쌍들의 (순서 없는) 쌍은 몇 개인가?

공유되는 선수를 n가지 방법으로 고르고, 그 선수의 두 짝을 나머지 $n-1$명 중에서 $\binom{n-1}{2}$가지 방법으로 고른다. 그러면 이런 쌍들의 쌍이 $n\binom{n-1}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$개이고 각각 한 번씩 세어지는데, 이것이 바로 (ii)의 이중합에 필요한 것이다.

이를 종합하면

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(U) &= \binom{n}{2}\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{2}\cdot\frac{1}{36}\\ &= \frac{n(n-1)}{36}\big(3+(n-2)\big)\\ &= \frac{n(n-1)(n+1)}{36} = \frac{1}{36}\,n(n^2-1),\end{aligned}$$

이므로 증명이 끝난다.

검산

- 예시로 주어진 결과 $3,3,3,3,6,6,2$에 대해 쌍의 개수는 $6+1=7$, 부호를 붙여 센 값은 $-6+1=-5$로 문제와 일치한다.
- $n=2$이면 쌍이 하나뿐이므로 $\mathrm{Var}(U) = \mathrm{E}(Z_{12}^2) = \frac{1}{6}$이고, 공식도 $\frac{2\cdot3}{36} = \frac{1}{6}$을 준다.
- $n=3$일 때, 세 주사위가 모두 같으면 $U = \pm3$이다(각각 확률 $\frac{1}{72}$). 그렇지 않으면 정확히 한 쌍만 같고 $U = \pm1$이며, 그 확률의 합은 $\frac{15}{36}$이다. 따라서 $\mathrm{E}(U^2) = 9\cdot\frac{1}{36} + \frac{15}{36} = \frac{2}{3}$으로 $\frac{3\cdot8}{36}$과 일치한다. $n \le 6$에 대해 모든 결과를 컴퓨터로 정확히 열거해 보면 두 평균과 두 분산이 모두 확인된다. 예를 들어 $n=6$이면 (i)에서 $\frac{25}{12}$, (iii)에서 $\frac{35}{6}$이다.

흔한 실수

- 한 칸만 확인하고 나머지 칸이 왜 따라 나오는지 말하지 않은 채 X_{12}와 X_{23}이 독립이라고 주장하는 것. 두 값만 갖는 변수에서는 실제로 따라 나오지만, 그 사실을 밝혀야 한다.
- (iii)에서 선수를 공유하는 쌍들은 공통인 수가 짝수이든 홀수이든 $+\frac{1}{36}$을 기여한다는 점을 잊는 것. 곱에서 음의 부호는 상쇄된다.
- 겹치는 쌍들의 쌍을 잘못 세는 것. 예를 들어 (순서 있는) $n(n-1)(n-2)$를 쓰고 거기에 또 2를 곱하는 경우.

STEP 너머

소문항 (i)은 **쌍별** 독립(pairwise independent)이지만 **상호** 독립(mutually independent)은 아닌 변수의 고전적인 예이다. $X_{12} = X_{23} = 1$이면 $X_{13} = 1$이 강제되기 때문이다. 분산 계산에는 쌍별 독립만 있으면 충분하며, 이 아이디어는 무작위 알고리즘(randomised algorithms)과 생일 문제(birthday problem)에 쓰인다. 소문항 (iii)은 항들이 종속일 때 합의 공분산을 다루는 일반적인 방법을 보여 준다. 두 내용 모두 Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)에서 전개된다.

Beyond STEP

STEP은 대부분의 학생이 학창 시절에 치르는 수학 시험 가운데 가장 어려운 시험이다. 또한 가장 훌륭한 시험 가운데 하나이기도 하다. 문제는 짧고 낯설며 깊이가 있고, 그중 가장 뛰어난 문제들은 대학 수학의 작은 조각이 모습을 감추고 있는 것이다.

이 책은 1987년 첫 시험에 앞서 나온 예시 시험지(specimen papers)부터 2025년 시험지까지 가운데 가장 흥미로운 STEP 문제들을 골라, 각 문제를 하나의 문으로 삼는다. 모든 문제는 뛰어난 학생이 풀어 가면서 던질 법한 질문들과 함께 꼼꼼하게 풀이하고, 그런 다음 책은 그 문을 지나 한 걸음 더 나아간다. 그 아이디어가 어디에서 왔는지, 대학에서는 무엇으로 발전하는지, 그리고 다음에는 무엇을 읽으면 좋은지를 살펴본다.

이 책은 STEP을 준비하면서 기출 문제 연습 이상의 것을 원하는 재능 있는 예비 수학자를 위해 쓰였다. 수학과 학부생처럼 생각하기 시작하고, 앞으로 무엇이 자신을 기다리고 있는지 알아보고 싶은 학생들을 위한 책이다.

- 순수 수학(pure mathematics), 역학(mechanics), 확률(probability)과 통계(statistics)를 아우르는 13개의 장
- 이 36개의 STEP 기출 문제와 각 문제의 안내식 풀이
- 모든 문제 뒤에 숨은 대학 수학
- 답이 실린 후속 연습 문제와 더 읽을거리

2021년 풀이. 책 전체와 모든 장,
모든 풀이를 다음 주소에서 무료로 읽고, 내려받고, 공유할 수 있다.

beyondstep.keithmcnulty.org

본문은 퍼블릭 도메인(CC0 1.0)으로 공개한다. STEP 문제 © Cambridge University Press & Assessment.

