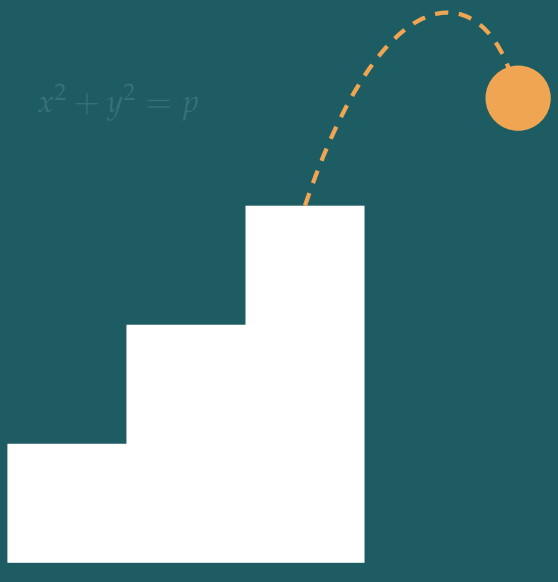
STEP 대비 · 대학 수학

Beyond STEP

STEP II 및 III

2020년 풀이



KEITH McNULTY

Beyond STEP

STEP 기출문제로 여는
대학 수학의 세계

STEP II 및 III

2020년 풀이

Keith McNulty

Beyond STEP: STEP 기출문제로 여는 대학 수학의 세계

2020년 풀이

2020년 STEP 문제지(STEP II 및 III)의 24개 문제 전체에 대한 풀이. 견본 문제지 이후 모든 STEP 문제의 풀이와 *Beyond STEP* 책 전체, 그리고 각 장을 `beyondstep.keithmcnulty.org`에서 무료로 읽고 내려받을 수 있다.

풀이를 읽기 전에 먼저 문제를 제대로 풀어 보자. 모든 답은 수치적으로 검증하였지만, 풀이가 이렇게 많으면 실수가 어느 정도 있을 수밖에 없다. 무언가 잘못된 것처럼 보이면 자신의 풀이를 믿고 꼼꼼히 확인해 보자.

영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.

2026년 11월 온라인 초판 발행.

이 PDF에서 지은이가 직접 만든 모든 것, 곧 본문, 풀이, 그림, 연습문제와 해답은 크리에이티브 커먼즈 CC0 1.0 Universal 라이선스에 따라 퍼블릭 도메인(public domain)으로 공개한다. 누구든 허락을 구하지 않고 어떤 목적으로든 복사하고, 고쳐 쓰고, 공유할 수 있다. 자세한 내용은 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`을 보라.

여기에서 다루는 STEP 문제의 저작권은 Cambridge University Press & Assessment에 있다. 문제는 이 책에 싣지 않았으며, 각 문제마다 공식 출처인 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스나 OCR의 기출 시험지로 가는 링크를 달았다.

오류 제보는 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty에 이슈로 남겨 주기 바란다.

차례

STEP II

Q1 치환적분 순수수학 . . . 3

Q2 변수분리형 미분방정식 순수수학 . . . 7

Q3 로그 오목 수열 순수수학 . . . 12

Q4 삼각부등식 순수수학 . . . 16

Q5 자릿수의 합과 나누어떨어짐 순수수학 . . . 20

Q6 행렬의 거듭제곱과 대각합 순수수학 . . . 24

Q7 복소 변환 순수수학 . . . 28

Q8 다항식과 적분 순수수학 . . . 32

Q9 충돌하는 포물체 역학 . . . 36

Q10 에너지와 평형 역학 . . . 40

Q11 동전 던지기에서의 연속된 결과 확률과 통계 . . . 45

Q12 편향된 주사위와 부등식 확률과 통계 . . . 49

STEP III

Q1 점화 공식 순수수학 . . . 53

Q2 쌍곡선 함수 곡선 그리기 순수수학 . . . 57

Q3 기하에서의 복소수 순수수학 . . . 62

Q4 대칭 행렬과 회전 행렬 순수수학 . . . 66

Q5 부분분수 순수수학 . . . 70

Q6 극곡선과 넓이 순수수학 . . . 74

Q7 2계 미분방정식 순수수학 . . . 79

Q8 수열과 무한 강하법 순수수학 . . . 83

Q9 강체의 평형 역학 . . . 88

Q10 단순 조화 운동 역학 . . . 92

Q11 확률변수의 함수 확률과 통계 96
Q12 기하분포와 독립성 확률과 통계 100

풀이

STEP II 2020, 문제 1

순수수학 • 치환적분

> **STEP II 2020, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2020년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

핵심 아이디어

각 피적분함수(integrand)는 두 일차 인수(linear factor)의 거듭제곱의 곱이고, 그 지수(exponent)의 합은 -2이다. 이런 피적분함수에 알맞은 치환(substitution)은 두 일차 인수의 비(ratio) 또는 그 제곱근이다. 이 치환은 두 괄호를 한꺼번에 흡수하고, 남는 것은 단순한 거듭제곱이나 표준적인 아크탄젠트(arctangent)이다. 소문항 (i)은 주어진 치환으로 이런 일이 일어나는 것을 보여 주고, 소문항 (ii)는 그 요령을 그대로 따라 하게 하며, 소문항 (iii)은 스스로 그것을 알아차리게 한다.

풀이

소문항 (i)

$x = \dfrac{1}{1-u}$로 놓으면

$$x - 1 = \frac{1-(1-u)}{1-u} = \frac{u}{1-u}, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \frac{1}{(1-u)^2}.$$

u가 $(0,1)$을 움직일 때 x는 $(1,\infty)$를 움직이고, $u = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$이다. $0 < u < 1$이므로 제곱근 안의 양은 모두 양수이고, 따라서

$$x^{3/2}(x-1)^{1/2} = \frac{1}{(1-u)^{3/2}} \cdot \frac{u^{1/2}}{(1-u)^{1/2}} = \frac{u^{1/2}}{(1-u)^2}.$$

이제 $(1-u)^2$ 인수가 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}u$와 정확히 약분된다.

$$\int \frac{1}{x^{3/2}(x-1)^{1/2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(1-u)^2}{u^{1/2}}\cdot\frac{1}{(1-u)^2}\,\mathrm{d}u = \int u^{-1/2}\,\mathrm{d}u$$
$$= 2u^{1/2}+c = 2\sqrt{\frac{x-1}{x}}+c.$$

소문항 (ii)

소문항 (i)에서 $u=\frac{x-1}{x}$는 두 일차 인수의 비였다. 여기서도 같은 아이디어를 따라

$$u=\frac{x-2}{x+1}, \qquad \text{즉} \qquad x+1=\frac{3}{1-u}, \quad x-2=\frac{3u}{1-u},$$

로 놓는다. $x-2=(x+1)-3$이기 때문이다. $x>2$이면 $0<u<1$이고, $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}=\dfrac{3}{(1-u)^2}$이다. 그러면

$$(x-2)^{3/2}(x+1)^{1/2} = \frac{3^{3/2}u^{3/2}}{(1-u)^{3/2}}\cdot\frac{3^{1/2}}{(1-u)^{1/2}} = \frac{9u^{3/2}}{(1-u)^2},$$

이므로

$$\int \frac{1}{(x-2)^{3/2}(x+1)^{1/2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(1-u)^2}{9u^{3/2}}\cdot\frac{3}{(1-u)^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\int u^{-3/2}\,\mathrm{d}u$$
$$= -\frac{2}{3}u^{-1/2}+c = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}+c.$$

미분하여 이를 확인할 수 있다. $f=\frac{x+1}{x-2}$로 놓으면 $f'=-\frac{3}{(x-2)^2}$이므로

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\tfrac{2}{3}\sqrt{f}\right) = -\frac{f'}{3\sqrt{f}} = \frac{1}{(x-2)^2}\sqrt{\frac{x-2}{x+1}} = \frac{1}{(x-2)^{3/2}(x+1)^{1/2}}.$$

소문항 (iii)

이번에는 치환이 주어지지 않는다. 여분의 인수 $x-1$ 때문에 피적분함수는 비의 순수한 거듭제곱이 아니지만, 두 제곱근은 앞에서와 같은 꼴이다.

> **생각해 보기** 앞의 두 답은 모두 일차 인수들의 비의 제곱근이었다. 그런 제곱근을 새 변수로 잡으면 어떻게 될까?

다음과 같이 놓아 보자.

$$t=\sqrt{\frac{x-2}{3x-2}}.$$

x가 2에서 ∞로 증가할 때 $\frac{x-2}{3x-2}=\frac{1}{3}-\frac{4}{3(3x-2)}$는 0에서 $\frac{1}{3}$을 향해 증가하므로, t는 0에서 $\frac{1}{\sqrt{3}}$까지 증가하고 구간 전체에서 $0\le t<\frac{1}{\sqrt{3}}$이다. $t^2(3x-2)=x-2$를 x에 대해 풀면

$$x=\frac{2(1-t^2)}{1-3t^2},$$

이고, 여기서 $1-3t^2>0$이다. 이로부터

$$x-1=\frac{1+t^2}{1-3t^2},\qquad 3x-2=\frac{4}{1-3t^2},$$

이고

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{2[-2t(1-3t^2)+6t(1-t^2)]}{(1-3t^2)^2}=\frac{8t}{(1-3t^2)^2}.$$

$\sqrt{x-2}=t\sqrt{3x-2}$이므로 두 제곱근은 깔끔하게 합쳐진다.

$$(x-2)^{1/2}(3x-2)^{1/2}=t\,(3x-2)=\frac{4t}{1-3t^2}.$$

따라서 분모 전체는

$$(x-1)(x-2)^{1/2}(3x-2)^{1/2}=\frac{4t(1+t^2)}{(1-3t^2)^2},$$

이고, 이번에도 모든 것이 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$와 약분된다.

$$\begin{aligned}\int_2^\infty\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x-2)^{1/2}(3x-2)^{1/2}}&=\int_0^{1/\sqrt{3}}\frac{(1-3t^2)^2}{4t(1+t^2)}\cdot\frac{8t}{(1-3t^2)^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^{1/\sqrt{3}}\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\\&=2\Big[\arctan t\Big]_0^{1/\sqrt{3}}=2\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3},\end{aligned}$$

이므로 요구한 결과를 얻는다.

원래 적분은 양 끝에서 모두 이상적분(improper integral)이지만 수렴(converge)한다. $x=2$ 근처에서 피적분함수는 $\frac{1}{2}(x-2)^{-1/2}$처럼 행동하고, x가 클 때는 $\frac{1}{\sqrt{3}}x^{-2}$처럼 행동한다. 치환을 하면 이 적분은 유한 구간에서 연속함수를 적분하는 보통의 적분이 되므로, 극한을 따로 취할 필요가 없다.

검산

- (i)과 (ii)의 답을 미분해 본다. (i)의 경우 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}2\sqrt{1-\frac{1}{x}}=\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-1/2}=x^{-3/2}(x-1)^{-1/2}$이다.
- 부호: (ii)의 피적분함수는 양수이므로 원시함수(antiderivative)는 증가해야 한다. 실제로 x가 커질수록 $\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$는 1을 향해 감소하므로 원시함수는 증가한다.
- 수치 검산: (i)의 $\int_{1.5}^{3}$와 (ii)의 $\int_{2.5}^{4}$를 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 원시함수로 구한 값(0.47829…와 0.70974…)과 일치한다. (iii)의 적분을 $x=3$에서 나누어 직접 계산하면 $1.0471975\ldots=\frac{\pi}{3}$를 얻는다.

흔한 실수

- (iii)에서 적분 구간을 바꾸는 것을 잊는 실수. 위끝은 ∞가 아니라 $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$이며, $\frac{\pi}{6}$는 바로 여기서 나온다.
- (i)이나 (ii)의 답을 u로 쓴 채 문제에서 요구하는 대로 x로 되돌리지 않는 실수.
- $1 - u$의 반정수 거듭제곱을 잘못 다루는 실수. 다음과 같이 꼼꼼히 모아야 한다: $(1-u)^{-3/2}(1-u)^{-1/2} = (1-u)^{-2}$.

STEP 너머

$\sqrt{(x-a)(x-b)}$로 이루어진 피적분함수는 언제나 우리가 쓴 것과 같은 치환으로 유리함수(rational function)로 만들 수 있다. 이는 x와 $\sqrt{\text{이차식}}$의 유리함수를 적분하는 고전 이론(오일러(Euler) 치환)의 일부이다. 소문항 (iii)은 무한 구간에서의 이상적분이기도 하며, 이런 적분을 극한으로 정의하여 이해하는 것은 대학 1학년 해석학(analysis)의 표준 주제이다. Abbott의 *Understanding Analysis*는 이상적분을 꼼꼼하게 다루고, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*에는 이런 종류의 STEP 적분 문제가 더 실려 있다.

풀이

STEP II 2020, 문제 2

순수수학 • 변수분리형 미분방정식

> **STEP II 2020, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2020년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

핵심 아이디어

이 미분방정식(differential equation)은 변수분리(separation of variables)가 되고, 적분한 뒤에는 곱 xy를 살펴보는 것이 자연스럽다. 이 곱은 2의 거듭제곱이 된다. 그러면 항등식 $(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$를 이용해 모든 것을 합 $s=x+y$와 차 $d=x-y$로 다시 쓸 수 있다. 이 변수들로 쓰면 각 곡선은 "d^2은 s의 함수와 같다"라는 꼴이 되고, 개형은 그 함수가 음이 아닌 곳이 어디인지를 따져 보면 얻어진다.

풀이

소문항 (i)

우변을 인수분해한다.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y(kx-1)}{x(1-ky)} \quad\Longrightarrow\quad \frac{1-ky}{y}\,\mathrm{d}y=\frac{kx-1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

적분하면 $\ln|y|-ky=kx-\ln|x|+c$, 즉

$$\ln|xy|=k(x+y)+c.$$

두 곡선 위에서 x와 y는 부호가 같으므로 $|xy|=xy$이다. $k=\ln 2$이므로 양변에 지수를 취하면 양의 상수 A에 대하여 $xy=A\,2^{x+y}$를 얻는다.

곡선 C_1. 점 $(1,1)$에서 $1=4A$이므로 $A=\frac{1}{4}$이고 $4xy=2^{x+y}$이다. 이제 $4xy=(x+y)^2-(x-y)^2$이므로

$$(x-y)^2=(x+y)^2-2^{x+y},$$

이고 $x,y>0$이다. 이것이 구하는 결과이다.

곡선 C_2. 점 $(-1,-1)$에서 $1 = A \cdot 2^{-2}$이므로 $A = 4$이고 $4xy = 16 \cdot 2^{x+y} = 2^{x+y+4}$이다. 따라서

$$(x-y)^2 = (x+y)^2 - 2^{x+y+4},$$

이고 $x, y < 0$이다.

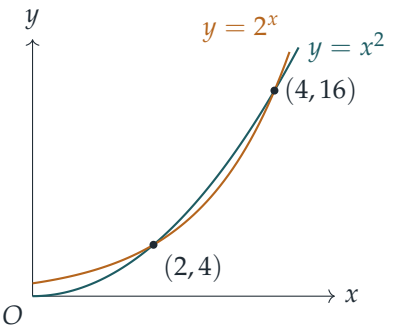
대칭성. x와 y를 서로 바꾸어도 $x+y$는 변하지 않고 $(x-y)^2 = (y-x)^2$도 변하지 않으므로 각 방정식은 그대로이다. 부호 조건($x, y > 0$ 또는 $x, y < 0$)도 그대로이다. 따라서 (a,b)가 곡선 위에 있으면 이 점을 $y = x$에 대하여 대칭이동한 (b,a)도 곡선 위에 있다. 그러므로 $y = x$는 각 곡선의 대칭축(line of symmetry)이다.

소문항 (ii)

$x \geq 0$에서 곡선 $y = x^2$과 $y = 2^x$는 $(2,4)$와 $(4,16)$에서 만난다. 교점은 이 두 점뿐이다. 이를 확인하기 위해 로그를 비교하자. $x > 0$에 대하여 $g(x) = 2\ln x - x\ln 2$라 하면 $g'(x) = \frac{2}{x} - \ln 2$이므로, g는 $x = 2/\ln 2$까지 증가하고 그 뒤로 감소한다. 따라서 g의 영점은 많아야 두 개이고, $g(2) = g(4) = 0$이다. 그러므로

$$x^2 \geq 2^x \iff 2 \leq x \leq 4 \qquad (x > 0),$$

이고, $[0,2)$와 $(4,\infty)$에서는 2^x가 x^2보다 위에 있다.



이제 C_1 위의 한 점을 잡고 $s = x + y > 0$이라 하자. C_1의 방정식의 좌변은 제곱이므로

$$s^2 - 2^s = (x-y)^2 \geq 0, \qquad \text{즉} \qquad s^2 \geq 2^s.$$

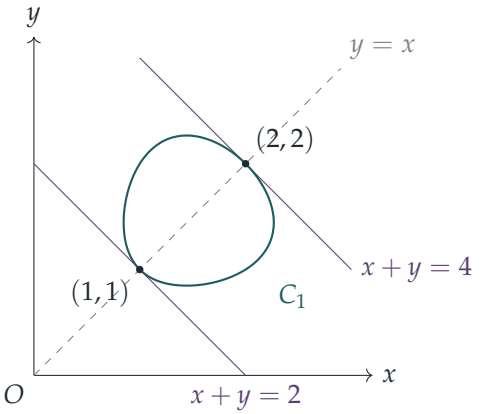
위의 그림에 따라 이로부터 $2 \leq s \leq 4$가 강제된다. 따라서 C_1은 두 직선 $x + y = 2$와 $x + y = 4$ 사이에 놓인다.

? **생각해 보기** $[2,4]$의 모든 s 값이 실제로 나타나는가? 그리고 양 끝에서 곡선은 어떤 모양인가?

각 $s \in [2,4]$에 대하여 $d = \pm\sqrt{s^2 - 2^s}$, $x = \frac{1}{2}(s+d)$, $y = \frac{1}{2}(s-d)$라 하자. $2^s > 0$이므로 $|d| < s$이고, 따라서 x와 y는 모두 양수이다. 그러므로 이러한 s마다 C_1 위의 점이 생기고, $2 < s < 4$일 때는 두 점이 생긴다. 따라서 이 곡선은 닫힌 고리(closed loop)이다.

- $s = 2$와 $s = 4$에서는 $d = 0$이므로 $y = x$ 위의 점 $(1,1)$과 $(2,2)$를 얻는다. 두 점 모두 $kxy - y = -(x - kxy)$를 만족하므로 그 점에서의 기울기(gradient)는 -1이다. 고리는 이 점들에서 직선 $x + y = 2$와 $x + y = 4$에 접한다.
- 기울기는 $x = 1/\ln 2 \approx 1.44$인 곳에서 0이고, $y = 1/\ln 2$인 곳에서 무한대이다. $x = 1/\ln 2$에서 고리의 y 값은 $y \approx 0.85$(가장 낮은 점)와 $y \approx 2.27$(가장 높은 점)이다.
- $y = x$를 가로지르는 방향의 폭이 가장 큰 곳은 $s^2 - 2^s$가 최대인 곳으로, $s \approx 3.21$이며 이 때 $|d| \approx 1.02$이다.

이 고리는 $y = x$에 대하여 대칭인 타원 모양의 곡선으로, 두 직선 사이에 끼어 있다.



소문항 (iii)

이번에는 $s = x + y < 0$이다. $t = -s > 0$이라 쓰자. 앞에서와 마찬가지로 다음이 필요하다.

$$s^2 \geq 2^{s+4} \iff t^2 \geq 2^{4-t} \iff t^2 2^t \geq 16.$$

함수 $t^2 2^t$는 $t > 0$에서 증가하고 $t = 2$에서 16이다. 따라서 조건은 $t \geq 2$, 즉 $x + y \leq -2$이다. (같은 말로, $x < 0$에서 $y = x^2$과 $y = 2^{x+4}$의 그래프를 그려 보면 포물선이 위에 있는 것은 $x \leq -2$일 때뿐이다.) 모든 $s \leq -2$에 대하여 (ii)와 같은 방법으로 $x, y < 0$인 두 점을 얻는다. 다만 $s = -2$에서는 한 점 $(-1,-1)$만 얻는다. 따라서 이번에는 C_2가 유계가 아니다(unbounded).

- 이 곡선은 $y = x$와 $(-1,-1)$에서만 만나고, 그 점에서의 기울기는 역시 -1이므로 그 점에서 직선 $x + y = -2$에 접한다.

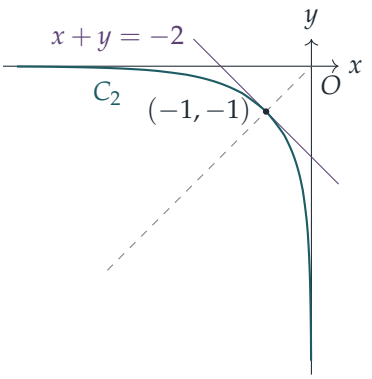
- $x, y < 0$이면 $kx - 1 < 0$이고 $1 - ky > 0$이므로

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y(kx-1)}{x(1-ky)} < 0,$$

  이다. 분자는 양수이고 분모는 음수이기 때문이다. 따라서 x가 증가하면 y는 계속 감소한다.

- $xy = 4 \cdot 2^{x+y}$로부터, $x \to -\infty$일 때 곱 xy는 0으로 가므로 $y \to 0^-$이다(실제로 $y \approx 4 \cdot 2^x / x$이다). 대칭성에 의해 $x \to 0^-$일 때 $y \to -\infty$이다. 음의 좌표축들이 점근선(asymptote)이다.

따라서 C_2는 제3사분면에 있는 직각쌍곡선(rectangular hyperbola)의 한 가지처럼 생겼지만, 좌표축에 훨씬 더 바짝 붙어 있다.



검산

- $4xy = 2^{x+y}$를 음함수 미분(implicit differentiation)하면 $4y + 4xy' = k\,2^{x+y}(1+y') = 4kxy(1+y')$이다. 정리하면 $y' = \dfrac{kxy - y}{x - kxy}$로, 처음의 방정식이 된다. C_2에 대해서도 똑같이 된다.

- $(2,2)$는 C_1 위에 있다: $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16 = 2^4$. C_2 위에서 $x + y = -4$인 점은 대략 $(-3.936, -0.064)$이고, 이때 $xy \approx 0.252$이며 $4 \cdot 2^{-4} = 0.25$이다. 위에서 제시한 타원 모양 곡선의 극점들은 컴퓨터로 확인하였다.

흔한 실수

- $1/x$와 $1/y$를 적분할 때 절댓값 기호를 빠뜨리는 것. C_2에서는 이것이 중요하며, 상수는 $\frac{1}{4}$가 아니라 $A = 4$가 된다.

- $(x+y)^2 \geq 2^{x+y}$만 보이고 멈추는 것. 이로부터 왜 $x+y$가 $[2,4]$에 갇히는지도 설명해야 하며, 바로 여기서 x^2과 2^x를 비교한 그래프가 필요하다.
- C_2를 좌표축과 만나도록 그리는 것. C_2 위에서는 두 좌표가 모두 음수로 유지되고, 좌표축은 점근선이다.

STEP 너머

좌표를 $s = x+y$, $d = x-y$로 회전하면 대칭인 방정식이 "$d^2 = f(s)$" 꼴로 바뀐다. 그러면 곡선은 정확히 $f(s) \geq 0$인 곳에 존재한다. 그 집합이 유계인 구간이면 곡선은 닫힌 고리이고, 반직선이면 유계가 아니다. 같은 논리로 보존량(conserved quantity)으로부터 상 초상(phase portrait)을 그릴 수 있다. $\ln(xy) - k(x+y)$는 모든 해를 따라 일정한데, 이는 로트카-볼테라(Lotka–Volterra) 포식자-피식자(predator–prey) 방정식에서 에너지가 하는 역할과 같으며, 그 궤도들도 같은 이유로 닫힌 고리가 된다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에서 두 아이디어를 모두 다룬다.

풀이

STEP II 2020, 문제 3

순수수학 • 로그 오목 수열

STEP II 2020, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2020년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

핵심 아이디어

성질 L은 각 비 u_{r+1}/u_r가 바로 앞의 비보다 크지 않다는 것을 말한다. 따라서 수열이 한 번 증가를 멈추면 다시는 증가하기 시작할 수 없다. 이것이 바로 단봉성(unimodality)이다. 소문항 (ii)에서 점화식(recurrence relation)의 특성방정식(auxiliary equation)은 중근(repeated root) α를 가지며, 조합 $u_r - \alpha u_{r-1}$을 쓰면 이 점화식이 간단한 등비수열(geometric sequence)로 바뀐다. 나머지는 모두 이 치환 하나에서 따라 나온다.

풀이

소문항 (i)

수열이 성질 L을 가지고, $2 \le r \le n-1$에 대해 $u_{r-1} \ge u_r$라고 하자. $u_{r-1} > 0$이므로 성질 L의 양변을 이것으로 나눌 수 있다.

$$u_{r+1} \le \frac{u_r^2}{u_{r-1}} = u_r \cdot \frac{u_r}{u_{r-1}} \le u_r,$$

여기서 마지막 단계는 $u_r/u_{r-1} \le 1$과 $u_r > 0$을 이용한 것이다. 따라서 $u_{r-1} \ge u_r \implies u_r \ge u_{r+1}$이다.

이제 성질 L을 가지는 임의의 수열을 생각하자. $u_1 \le u_2 \le \cdots \le u_n$이면 이 수열은 $k = n$인 단봉 수열이다. 그렇지 않으면 $u_k > u_{k+1}$을 만족하는 첫 번째 첨자 k가 존재한다(따라서 $k \le n-1$이다). k의 선택에 의해

$$u_1 \le u_2 \le \cdots \le u_k.$$

$u_k \ge u_{k+1}$이므로 방금 증명한 함의를 ($r = k+1$로) 적용하면 $u_{k+1} \ge u_{k+2}$를 얻는다. 다

시 $r = k+2$로 적용하면 $u_{k+2} \geq u_{k+3}$을 얻고, 이와 같이 수학적 귀납법(induction)으로 $u_{n-1} \geq u_n$까지 얻는다. 그러므로 $u_k \geq u_{k+1} \geq \cdots \geq u_n$이고, 이 수열은 단봉 수열이다.

소문항 (ii)

$2 \leq r \leq n$에 대해 $v_r = u_r - \alpha u_{r-1}$이라 하자. $3 \leq r \leq n$이면 점화식에 의해

$$v_r = 2\alpha u_{r-1} - \alpha^2 u_{r-2} - \alpha u_{r-1} = \alpha\left(u_{r-1} - \alpha u_{r-2}\right) = \alpha v_{r-1}.$$

따라서 (v_r)는 공비가 α인 등비수열이고 $v_r = \alpha^{r-2} v_2$이다. 즉,

$$u_r - \alpha u_{r-1} = \alpha^{r-2}(u_2 - \alpha u_1) \qquad (2 \leq r \leq n).$$

($r = 2$일 때는 자명하게 성립하고, r가 하나 커질 때마다 양변에 α가 곱해진다.)

$2 \leq r \leq n-1$이면 $3 \leq r+1 \leq n$이므로 $u_{r+1} = 2\alpha u_r - \alpha^2 u_{r-1}$을 대입할 수 있다.

$$u_r^2 - u_{r-1}u_{r+1} = u_r^2 - 2\alpha u_r u_{r-1} + \alpha^2 u_{r-1}^2 = (u_r - \alpha u_{r-1})^2.$$

양수이며 단봉이다. $u_2 > \alpha u_1 > 0$이라 하자. $\alpha > 0$이므로 $u_1 > 0$이고, $u_2 > 0$이기도 하다. 그 뒤의 항들에 대해서는 첫 번째 항등식에서

$$u_r = \alpha u_{r-1} + \alpha^{r-2}(u_2 - \alpha u_1) > \alpha u_{r-1},$$

를 얻는다. $\alpha^{r-2} > 0$이고 $u_2 - \alpha u_1 > 0$이기 때문이다. 따라서 $u_{r-1} > 0$이면 $u_r > 0$이고, 귀납법에 의해 모든 항이 양수이다. 이제 두 번째 항등식에서 $2 \leq r \leq n-1$에 대해 $u_{r-1}u_{r+1} = u_r^2 - (u_r - \alpha u_{r-1})^2 \leq u_r^2$를 얻는다. 이것은 양수 항으로 이루어진 수열에 대한 성질 L이므로, 소문항 (i)에 의해 이 수열은 단봉 수열이다.

$u_1 = 1, u_2 = 2$인 경우. $w_r = (2-r)\alpha^{r-1} + 2(r-1)\alpha^{r-2}$라 하자. 그러면 $w_1 = 1 = u_1$이고 $w_2 = 2 = u_2$이다. 이 초깃값에서 첫 번째 항등식은 다음과 같다.

$$u_r = \alpha u_{r-1} + (2-\alpha)\alpha^{r-2}.$$

$3 \leq r \leq n$인 어떤 r에 대해 $u_{r-1} = w_{r-1}$이라 하자. 그러면

$$\begin{aligned} u_r &= \alpha\left[(3-r)\alpha^{r-2} + 2(r-2)\alpha^{r-3}\right] + 2\alpha^{r-2} - \alpha^{r-1} \\ &= (2-r)\alpha^{r-1} + 2(r-1)\alpha^{r-2} = w_r, \end{aligned}$$

이므로 귀납법에 의해 $1 \leq r \leq n$에 대해 $u_r = (2-r)\alpha^{r-1} + 2(r-1)\alpha^{r-2}$이다. (원래의 점화식을 이용해 두 단계 귀납법을 써도 되지만, 1계 형태를 쓰는 편이 더 빠르다.)

$\alpha = 1 - \frac{1}{N}$일 때의 최댓값. 이 경우 $\frac{1}{2} \le \alpha < 1$이므로 $u_2 = 2 > \alpha = \alpha u_1 > 0$이고, 위에서 한 결과에 의해 이 수열은 양수이며 단봉이다. 최고점을 찾기 위해 이웃한 항의 차를 살펴보자. $u_{r+1} = \alpha u_r + (2-\alpha)\alpha^{r-1}$과 $\alpha - 1 = -\frac{1}{N}$으로부터

$$u_{r+1} - u_r = (2-\alpha)\alpha^{r-1} - \frac{u_r}{N} = \frac{\alpha^{r-2}}{N}\Big[N\alpha(2-\alpha) - (2-r)\alpha - 2(r-1)\Big].$$

그런데 $N\alpha = N - 1$이고 $2 - \alpha = \frac{N+1}{N}$이므로 $N\alpha(2-\alpha) = N - \frac{1}{N}$이며, $(2-r)\alpha = 2 - r - \frac{2-r}{N}$이다. 대괄호 안의 식은 다음과 같이 정리된다.

$$N - \frac{1}{N} - 2 + r + \frac{2-r}{N} - 2r + 2 = (N-r) - \frac{r-1}{N} = \frac{N^2 + 1 - r(N+1)}{N},$$

따라서

$$u_{r+1} - u_r = \frac{\alpha^{r-2}}{N^2}\Big(N^2 + 1 - r(N+1)\Big).$$

> **생각해 보기** $N^2 + 1 - r(N+1)$은 정확히 어디에서 부호가 바뀌는가? 또 이 값이 0이 될 수 있는가?

이 식이 0이 되는 것은 $r = \dfrac{N^2+1}{N+1} = N - 1 + \dfrac{2}{N+1}$일 때뿐이다. $N \ge 2$이므로 $0 < \frac{2}{N+1} < 1$이고, 따라서 이 값은 정수 $N-1$과 N 사이에 엄격하게 놓인다. $\alpha^{r-2} > 0$이므로

- $r \le N - 1$이면 $u_{r+1} > u_r$이고,
- $r \ge N$이면 $u_{r+1} < u_r$이다.

그러므로 $u_1 < u_2 < \cdots < u_N$이고 $u_N > u_{N+1} > \cdots > u_n$이다. $N \le n$이므로 항 u_N이 존재하며, u_r는 $r = N$일 때 최대이다(엄격하게, 즉 같은 값을 갖는 항 없이).

검산

$N = 5$, 즉 $\alpha = \frac{4}{5}$로 두자. 점화식으로 계산하면 1, 2, 2.56, 2.816, 2.8672, 2.78528, 2.62144, ... 이 되어, 주장한 대로 $r = 5$에서 최고점에 이른 뒤 감소한다. 차에 대한 공식은 $u_6 - u_5 = \alpha^3(26-30)/25 = -0.08192$를 예측하며, 이는 실제 값과 일치한다. 또 $u_3 = 2\alpha \cdot 2 - \alpha^2 = 2.56$은 닫힌 형태(closed form) $-\alpha^2 + 4\alpha$와 일치한다. 두 항등식과 최고점의 위치는 컴퓨터로도 정확한 산술(exact arithmetic)을 사용하여 α, u_1, u_2의 여러 값과 29까지의 N에 대해 확인하였다.

흔한 실수

- 소문항 (i)에서 u_{r-1}이 양수임을 언급하지 않고 그것으로 나누는 것. 음수 항이 있는 수열에서는 이 논증이 성립하지 않는다.

- 소문항 (ii)에서 양수 조건이 필요한 소문항 (i)을 인용하기 전에 항들이 양수임을 보이는 것을 잊는 것.
- $u_{N+1} < u_N$과 $u_{N-1} < u_N$만 보이는 것. 단봉성 덕분에 이것으로 충분하지만, 그렇다는 사실을 반드시 밝혀야 한다. 모든 차의 부호를 구하는 편이 더 깔끔하다.

STEP 너머

성질 L을 **로그 오목성**(*log-concavity*)이라 한다. 즉 $\ln u_r$가 r에 대한 오목함수(concave function)라는 뜻이다. 로그 오목 수열은 조합론과 확률론 곳곳에서 나타난다. 이항계수(binomial coefficients) $\binom{n}{r}$가 그 예이며, 뉴턴(Newton) 부등식은 실근만 가지는 다항식의 계수들이 로그 오목임을 말해 준다. 소문항 (ii)의 점화식은 중근을 가지는 선형 점화식(linear recurrence)이고, 그래서 해가 $(A + Br)\alpha^r$ 꼴이 된다. 이는 미분방정식(differential equation)에서 중근이 있을 때 $(A + Bx)\mathrm{e}^{\alpha x}$가 나타나는 것과 꼭 같다. 이 대응의 미분방정식 쪽에 대해서는 Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)을, 이와 같은 성격의 문제들에 대해서는 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)를 보라.

풀이

STEP II 2020, 문제 4

순수수학 • 삼각부등식

> **STEP II 2020, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2020년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

핵심 아이디어

모든 것은 삼각부등식(triangle inequality)에 기초한다. 즉 각 변의 길이는 나머지 두 변의 길이의 합보다 엄격히 작다. 사실 확인해야 할 부등식은 하나뿐인데, 바로 **가장 긴** 변에 대한 부등식이다. 나머지 두 부등식은 자동으로 성립하기 때문이다. 역(converse)을 보이려면 컴퍼스로 삼각형을 작도한다. 한 변을 먼저 그리고, 그 양 끝에서 원 두 개를 그린다.

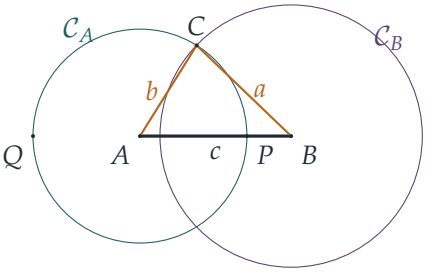
풀이

소문항 (i)

꼭짓점을 A, B, C라 하고 $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$라 하자. 선분 AB는 A에서 B로 가는 가장 짧은 경로이므로, 길이가 $b + a$인 경로 $A \to C \to B$는 c 이상이다. 그런데 이 값은 c와 같을 수 없다. 같아지는 것은 C가 선분 AB 위에 있을 때뿐이고, 그러면 삼각형이 만들어지지 않기 때문이다. 따라서 $c < a + b$이다. 나머지 두 쌍의 꼭짓점에 대해서도 같은 논리를 적용하면 $a < b + c$와 $b < a + c$를 얻는다.

소문항 (ii)

길이가 c인 선분 AB를 그린다. 중심이 A이고 반지름이 b인 원 $\mathcal{C}_A$와, 중심이 B이고 반지름이 a인 원 $\mathcal{C}_B$를 그린다. 두 원이 직선 AB 위에 있지 않은 점 C에서 만난다면, ABC는 $CA = b$, $CB = a$, $AB = c$인 삼각형이다.



두 원은 왜 반드시 만날까? $\mathcal{C}_A$가 직선 AB와 만나는 두 점을 P, Q라 하고, P는 A에 대하여 B와 같은 쪽에 있다고 하자. 그러면

$$PB = |c-b|, \qquad QB = c+b.$$

이다. 이제 $c-b<a$와 $b-c<a$는 주어진 부등식 가운데 두 개이므로 $|c-b|<a$이고, $c+b>a$는 세 번째 부등식이다. 따라서 한 점이 $\mathcal{C}_A$의 위쪽 반원을 따라 P에서 Q까지 움직이면, 그 점과 B 사이의 거리는 a보다 작은 값에서 a보다 큰 값으로 연속적으로(continuously) 변하므로 어딘가에서 a와 같아진다. 그 점은 두 원 위에 모두 있으며, 직선 AB 위에 있지 않다. $\mathcal{C}_A$ 위의 점 가운데 그 직선 위에 있는 것은 P와 Q뿐인데, 이 두 점과 B 사이의 거리는 a가 아니기 때문이다. 이 점이 바로 구하는 점 C이므로, 세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형이 존재한다.

소문항 (iii)

소문항 (i)과 (ii)를 합치면, 세 양수가 어떤 삼각형의 세 변의 길이가 될 필요충분조건은 각 수가 나머지 두 수의 합보다 작은 것이다. 세 수 가운데 가장 큰 것을 ℓ이라 하자. ℓ이 나머지 두 수의 합보다 작으면, 나머지 두 부등식은 바로 따라 나온다. 더 작은 각 수는 ℓ 이하이고 남은 수는 양수이기 때문이다. 따라서 가장 긴 길이만 확인하면 된다.

(A) 항상 그렇다. 세 길이는 모두 양수이다. $c<a+b$를 이용하면

$$c+1 < a+b+1 < (a+1)+(b+1),$$

이고, 나머지 두 부등식도 같은 방법으로 얻는다.

(B) 그럴 때도 있지만 항상 그렇지는 않다. 정삼각형이면 세 길이는 $1,1,1$이고, 이는 삼각형을 이룬다. 하지만 $a=b=1$, $c=\frac{1}{10}$으로 두면 $1<1+\frac{1}{10}$이므로 이는 진짜 삼각형이다. 이때 세 길이는 1, 10, $\frac{1}{10}$이 되고, $10>1+\frac{1}{10}$이므로 삼각형을 만들 수 없다.

(C) 결코 그렇지 않다. 세 길이는 a, b, c에 대하여 대칭(symmetric)이므로, $a \geq b \geq c$가 되도록 이름을 붙여도 된다. 그러면

$$|c-a| = a - c = (a-b) + (b-c) = |a-b| + |b-c|.$$

가장 긴 길이가 나머지 두 길이의 합과 같으므로 엄격한 부등식이 성립하지 않는다. (a, b, c 가운데 두 개가 같으면 길이 하나가 0이 되므로, 이 경우에도 성립하지 않는다.)

(D) 항상 그렇다. 집합 $\{a^2+bc,\ b^2+ca,\ c^2+ab\}$는 a, b, c 가운데 어느 두 개를 서로 바꾸어도 변하지 않는다. (예를 들어 a와 b를 바꾸면 b^2+ac, a^2+cb, c^2+ba가 된다.) 따라서 모든 삼각형에 대하여 세 부등식 가운데 하나, 이를테면 $a^2+bc < (b^2+ca)+(c^2+ab)$만 증명하면 충분하다. 두 변의 차는

$$\begin{aligned}(b^2+ca)+(c^2+ab)-(a^2+bc) &= (b^2-bc+c^2)+a(b+c)-a^2 \\ &= \left(b-\tfrac{1}{2}c\right)^2 + \tfrac{3}{4}c^2 + a(b+c-a).\end{aligned}$$

이다. $c > 0$이므로 첫 번째 괄호 부분은 양수이고, $a > 0$이고 $a < b+c$이므로 $a(b+c-a) > 0$이다. 따라서 차는 양수이다. 나머지 두 부등식은 문자를 바꾸어 얻을 수 있고, 세 길이가 모두 양수인 것은 분명하므로, 이 세 길이는 항상 삼각형을 이룬다.

소문항 (iv)

a, b, c의 역할은 서로 바꿀 수 있으므로, $a \geq b \geq c$가 되도록 이름을 붙여도 된다. $f(a), f(b), f(c)$는 모두 양수이다. f가 증가함수(increasing function)이므로 $f(a) \geq f(b) \geq f(c)$이고, 따라서 소문항 (iii)의 첫머리에서 한 관찰에 따라

$$f(a) < f(b) + f(c).$$

만 보이면 된다.

> **생각해 보기** $f(x)/x$에 대한 조건은 $f(a)$와 $f(b)+f(c)$를 비교하는 데 어떻게 도움이 될까?

이 조건을 이용하면 $f(b)$와 $f(c)$를 $f(a)$의 상수배로 아래에서 누를 수 있다. x가 증가할 때 $f(x)/x$는 감소하고 $a \geq b$이므로

$$\frac{f(b)}{b} \geq \frac{f(a)}{a}, \qquad \text{따라서} \qquad f(b) \geq \frac{b}{a} f(a),$$

이고, 등호는 $b = a$일 때만 성립할 수 있다. 같은 방법으로 $f(c) \geq \frac{c}{a} f(a)$이다. 두 식을 더하면

$$f(b) + f(c) \ \geq \ \frac{b+c}{a} f(a) \ > \ f(a),$$

이다. 여기서 마지막 단계에는 (삼각형에서 얻은) $b+c>a$와 $f(a)>0$을 이용하였다. 따라서 새로운 세 길이 가운데 가장 큰 것이 나머지 두 길이의 합보다 작으므로, $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$는 어떤 삼각형의 세 변의 길이이다.

검산

- (D)에서 $a=2, b=3, c=4$로 두어 보자. 세 길이는 16, 17, 22이고 $22<16+17$이다. 가장 긴 길이 c^2+ab에 맞게 문자를 바꾼 항등식은 차이가 $(a^2-ab+b^2)+c(a+b-c)=(4-6+9)+4\cdot 1=11$이라고 예측하며, 실제로 $16+17-22=11$이다.
- (C)에서 삼각형 3, 4, 5는 1, 1, 2를 주는데, 예측한 대로 정확히 납작한 삼각형이다.
- 무작위로 만든 삼각형 200 000개로 컴퓨터 검사를 해 보니 (A), (D), (C)가 (각각 항상, 항상, 결코) 확인되었고, (B)는 그 가운데 약 40%에서 성립하였으며, 소문항 (iv)도 $f(x)=\sqrt{x}$, $\ln(1+x)$, $x/(1+x)$, $x^{0.3}$, $1-\mathrm{e}^{-x}$에 대하여 확인되었다.

흔한 실수

- 삼각형 하나만 확인하고 (B)의 답을 "결코 그렇지 않다"나 "항상 그렇다"로 쓰는 것. "그럴 때도 있다"라는 답에는 두 종류의 예가 각각 하나씩 필요하다.
- (D)에서 부등식 하나만 확인하고 나머지 두 부등식이 왜 따라 나오는지 설명하지 않는 것. 이를 정당화하는 것은 대칭성(또는 가장 긴 변에 대한 관찰)이다.
- (iv)에서 a와 b가 같을 수도 있는데 $f(a)/a<f(b)/b$라고 쓰는 것. 이때 부등식은 $\leq$이고, 엄격한 부등식은 $b+c>a$에서 나와야 한다.

STEP 너머

삼각부등식은 **거리 함수**(metric)의 세 공리 가운데 하나이다. 거리 함수는 대학 1학년 해석학과 위상수학의 핵심에 있는 추상적인 거리 개념이다. 소문항 (iv)는 그 분야의 고전적인 사실이다. d가 거리 함수이고 f가 $f(0)=0$이며 $f(x)/x$가 감소하는 증가함수이면, $f\circ d$도 거리 함수이다. 이것이 $d/(1+d)$가 유계(bounded)인 거리 함수를 만드는 표준적인 방법인 이유이다. Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)는 이러한 개념을 처음 접하기에 좋은 책이다.

풀이

STEP II 2020, 문제 5

순수수학 • 자릿수의 합과 나누어떨어짐

STEP II 2020, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2020년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

핵심 아이디어

10의 모든 거듭제곱은 9로 나눈 나머지(remainder)가 1이므로, 어떤 수와 그 수의 자릿수의 합(digit sum)은 법(modulo) 9에 대하여 항상 같다. 이 사실 하나만으로 각 방정식이 강력한 나누어떨어짐 조건(divisibility condition)으로 바뀐다. 그다음 크기에 관한 논증으로 마무리한다. 자릿수의 합은 $9n$ 정도로만 커지지만 수 자체는 10^{n-1} 정도로 커지므로, 확인해야 할 후보는 몇 개밖에 남지 않는다.

풀이

소문항 (i)

$x = \sum_{r=0}^{n-1} a_r 10^r$, $\mathrm{d}(x) = \sum_{r=0}^{n-1} a_r$라 하면

$$x - \mathrm{d}(x) = \sum_{r=0}^{n-1} a_r \left(10^r - 1\right).$$

각 항에서 $a_r \geq 0$이고 $10^r - 1 \geq 0$이므로 합은 음이 아니다. 또한 $10^r - 1 = 99\ldots9$ (r개) $= 9 \times 11\ldots1$이므로 9로 나누어떨어진다($r = 0$이면 0이다). 따라서 모든 항이 9로 나누어떨어지고, 그러므로 $x - \mathrm{d}(x)$도 9로 나누어떨어진다. ■

합동식(congruence)의 언어로 쓰면, 모든 양의 정수 x에 대하여 $x \equiv \mathrm{d}(x) \pmod 9$이다. 아래에서 이 사실을 거듭 사용한다.

소문항 (ii)

동치(equivalence). $\mathrm{d}(x) \equiv x \pmod 9$이므로

$$x - 44\,\mathrm{d}(x) \equiv x - 44x = -43x \equiv 2x \pmod 9,$$

이다. 여기서 $-43 = -45 + 2$를 이용하였다. 따라서 $x - 44\,\mathrm{d}(x)$가 9의 배수일 필요충분조건은 $9 \mid 2x$이다. $\gcd(2, 9) = 1$이므로 $9 \mid 2x$일 필요충분조건은 $9 \mid x$이다. 이로써 양쪽 방향이 한꺼번에 증명된다. ■

범위. $x = 44\,\mathrm{d}(x)$이고 x가 n자리 수라고 하자. 각 자릿수는 많아야 9이므로 $\mathrm{d}(x) \le 9n$이고 $x = 44\,\mathrm{d}(x) \le 396n$이다. 또 n자리 수의 맨 앞자리 수는 $a_{n-1} \ge 1$이므로 $x \ge 10^{n-1}$이다. 이 둘을 합치면

$$10^{n-1} \le x \le 396n.$$

$n = 5$이면 $10\,000 \le 1980$이어야 하는데, 이는 거짓이다. 더욱이 어떤 $n \ge 5$에 대하여 $10^{n-1} > 396n$이면 $10^n = 10 \cdot 10^{n-1} > 3960n \ge 396(n+1)$이므로, 수학적 귀납법(induction)에 의하여 부등식 $10^{n-1} \le 396n$은 모든 $n \ge 5$에서 성립하지 않는다. 따라서 $n \le 4$이다. ■

> **생각해 보기** 9999 이하의 모든 수를 찾아보는 대신, 탐색 범위를 몇 개로 줄이려면 어떻게 해야 할까?

방금 증명한 동치를 이용한다. $x = 44\,\mathrm{d}(x)$이면 $x - 44\,\mathrm{d}(x) = 0$이고 이는 9의 배수이므로 $9 \mid x$이다. 그러면 $9 \mid 44\,\mathrm{d}(x)$이고, $\gcd(44, 9) = 1$이므로 반드시 $9 \mid \mathrm{d}(x)$이다. 따라서 $x = 44\,\mathrm{d}(x)$는 $44 \times 9 = 396$의 배수이다.

해 구하기. $n \le 4$이므로 $x \le 396 \times 4 = 1584$이고, 따라서 x는 396, 792, 1188, 1584 중 하나이다. 이들의 자릿수의 합은 모두 18이므로 어느 경우에나 $44\,\mathrm{d}(x) = 792$이다. 조건을 만족하는 것은 다음 하나뿐이다.

$$x = 792, \qquad \mathrm{d}(792) = 18, \quad 44 \times 18 = 792.$$

모든 해는 네 후보의 목록 안에 있고 그중 792만 조건을 만족하므로, 다른 값은 없다. ■

소문항 (iii)

$y = \mathrm{d}(x), z = \mathrm{d}(y)$라 하면 방정식은 $x = 107z$가 되고, $z = x/107 > 0$이다.

나누어떨어짐. 소문항 (i)에 의하여 $x \equiv y \equiv z \pmod 9$이다. 따라서

$$0 = x - 107z \equiv z - 107z = -106z \pmod 9.$$

그런데 $106 = 99 + 7$이므로 $9 \mid 7z$이고, $\gcd(7, 9) = 1$이므로 $9 \mid z$이다.

크기. 소문항 (i)에서 임의의 양의 정수 m에 대하여 $\mathrm{d}(m) \le m$도 얻는다. 따라서 x가 n자리 수이면 $z = \mathrm{d}(y) \le y \le 9n$이고,

$$10^{n-1} \le x = 107z \le 963n.$$

$n = 5$이면 $10\,000 \le 4815$이어야 하는데, 이는 거짓이다. 소문항 (ii)와 같은 귀납법 (이번에는 $10^n > 9630n \ge 963(n+1)$)으로 이 부등식이 모든 $n \ge 5$에서 성립하지 않음을 보일 수 있으므로 $n \le 4$이다.

> **생각해 보기** $z \le 36$이라는 범위로는 아직 9의 배수가 여러 개 남는다. 더 좁힐 수 있을까?

그렇다. 자릿수의 합을 한 번 더 적용하면 된다. $n \le 4$이면 $y = \mathrm{d}(x) \le 36$이다. $1, 2, \ldots, 36$ 중에서 자릿수의 합이 가장 큰 것은 $\mathrm{d}(29) = 11$이다. 37보다 작은 두 자리 수는 십의 자리 수가 많아야 3이고, 십의 자리 수가 3이면 일의 자리 수는 많아야 6이지만 (자릿수의 합은 많아야 9), 십의 자리 수가 2이면 $2 + 9 = 11$까지 가능하기 때문이다. 따라서 $1 \le z \le 11$이고, z는 9의 배수이다. 그러므로 $z = 9$이고

$$x = 107 \times 9 = 963.$$

확인: $\mathrm{d}(963) = 18$, $\mathrm{d}(18) = 9$이고 $107 \times 9 = 963$이다. 따라서 $x = 963$은 방정식을 만족한다. 모든 해는 $z = 9$이어야 하고, 따라서 $x = 963$이므로 다른 값은 없다. ■

검산

- 소문항 (i)을 예로 확인해 보자: $249 - 15 = 234 = 9 \times 26$.
- 컴퓨터로 모든 $x < 10^6$을 탐색하면 $x = 44\,\mathrm{d}(x)$의 해는 792뿐이고 $x = 107\,\mathrm{d}(\mathrm{d}(x))$의 해는 963뿐이며, 이는 위의 범위와 일치한다.
- $792 = 44 \times 18$이고 $963 = 107 \times 9$임에 주목하자. 나누어떨어짐 논증에서 요구하는 대로 둘 다 9의 배수이다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)에서 x가 9의 배수라는 것만 결론짓는 경우. $\mathrm{d}(x)$도 9의 배수이고 따라서 $396 \mid x$라는 더 강한 사실이 있어야 탐색이 짧아진다.
- $n = 5$만 확인하고 $n \le 4$라고 쓰는 경우. 더 큰 모든 n에 대하여 10^{n-1}이 $396n$보다 계속 크다는 이유가 필요하다. 귀납법(또는 좌변은 10배씩 커지는데 우변은 많아야 $\frac{6}{5}$배씩 커진다는 관찰)이 그 이유를 제공한다.
- 소문항 (iii)에서 $z > 0$임을 잊는 경우. 바로 이 조건이 $z = 0$을 배제한다.

STEP 너머

$x \equiv \mathrm{d}(x) \pmod 9$라는 사실은 오래된 계산 검산법인 "구거법(casting out nines)"의 원리이다. 이는 10이 1처럼 행동하는 환(ring) $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$에서 계산하는 첫 번째 예이다. $10 \equiv -1$로 같은 아이디어를 적용하면 11로 나누어떨어지는지 판정하는 교대합 판정법을 얻는다. 어떤 수와 그 자릿수들의 함수가 섞인 방정식은 대개 여기서와 똑같이 푼다. 합동식으로 가능성을 줄이고, 증가 속도를 비교하여 후보 목록을 유한하게 만든다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*은 합동식에 대한 훌륭한 입문서이다.

풀이

STEP II 2020, 문제 6

순수수학 • 행렬의 거듭제곱과 대각합

> **STEP II 2020, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2020년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

이 문제는 *Beyond STEP*의 7.4 절 **제자리로 돌아오는 행렬**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch07/finite-order.html

핵심 아이디어

모든 실수 2×2 행렬은 자기 자신의 특성방정식(characteristic equation)

$$\mathbf{M}^2 - t\,\mathbf{M} + \delta\,\mathbf{I} = \mathbf{0}, \qquad t = \operatorname{tr}(\mathbf{M}),\ \delta = \det(\mathbf{M}),$$

을 만족한다. 이것이 케일리–해밀턴 정리(Cayley–Hamilton theorem)이다(직접 곱해 보면 두 줄로 확인할 수 있다). 일단 $\mathbf{M}^2$을 $\mathbf{M}$과 $\mathbf{I}$로 나타내고 나면, $\mathbf{M}^2 = \mathbf{I}$ 같은 방정식은 모두 "$t\mathbf{M}$이 $\mathbf{I}$의 상수배이다"라는 꼴이 되고, 따라서 $t = 0$이거나 $\mathbf{M}$ 자체가 $\mathbf{I}$의 상수배여야 한다. 소문항 (iii)과 (iv)는 소문항 (ii)를 $\mathbf{M}$ 대신 $\mathbf{M}^2$과 $\mathbf{M}^4$에 적용하면 얻어진다.

이 풀이 전체에서 $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $t = a + d$, $\delta = ad - bc$로 둔다.

풀이

소문항 (i)

곱을 전개하면

$$\mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & bc + d^2 \end{pmatrix} = (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - (ad - bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

이다. 예를 들어 $(a+d)a-(ad-bc)=a^2+bc$이고 $(a+d)b=ab+bd$이기 때문이다. 따라서

$$\mathbf{M}^2 = t\mathbf{M} - \delta\mathbf{I}. \qquad (*)$$

$(*)$의 양변에 대각합(trace)을 취하고 $\mathrm{tr}(\mathbf{I})=2$를 이용하면

$$\mathrm{tr}(\mathbf{M}^2) = t\cdot t - 2\delta = \mathrm{tr}(\mathbf{M})^2 - 2\det(\mathbf{M}),$$

이므로 원하는 결과를 얻는다. (직접 계산하면 $a^2+2bc+d^2=(a+d)^2-2(ad-bc)$이다.)

소문항 (ii)

첫 번째 동치, $(\Rightarrow)$**.** $\mathbf{M}^2=\mathbf{I}$이고 $\mathbf{M}\neq\pm\mathbf{I}$라고 하자. 이를 $(*)$에 대입하면

$$t\,\mathbf{M} = (1+\delta)\,\mathbf{I}.$$

만약 $t\neq 0$이면 양변을 나누어 실수 $k=(1+\delta)/t$에 대해 $\mathbf{M}=k\mathbf{I}$를 얻는다. 그러면 $\mathbf{M}^2=k^2\mathbf{I}=\mathbf{I}$에서 $k=\pm1$이므로 $\mathbf{M}=\pm\mathbf{I}$가 되는데, 이는 가정에서 배제된 경우이다. 따라서 $t=0$이고, 그러면 $(1+\delta)\mathbf{I}=\mathbf{0}$이므로 $\delta=-1$이다.

$(\Leftarrow)$**.** $t=0$이고 $\delta=-1$이면 $(*)$에서 $\mathbf{M}^2=0\cdot\mathbf{M}+\mathbf{I}=\mathbf{I}$이다. 또 $\mathrm{tr}(\pm\mathbf{I})=\pm2\neq0$이므로 $\mathbf{M}\neq\pm\mathbf{I}$이다.

두 번째 동치, $(\Rightarrow)$**.** $\mathbf{M}^2=-\mathbf{I}$이면 $(*)$에서 $t\mathbf{M}=(\delta-1)\mathbf{I}$이다. 만약 $t\neq0$이면 어떤 실수 k에 대해 $\mathbf{M}=k\mathbf{I}$이고, $\mathbf{M}^2=k^2\mathbf{I}=-\mathbf{I}$가 되려면 $k^2=-1$이어야 하는데, 실수 k에 대해서는 불가능하다. 따라서 $t=0$이고, 그러면 $\delta=1$이다.

$(\Leftarrow)$**.** $t=0$이고 $\delta=1$이면 $(*)$에서 곧바로 $\mathbf{M}^2=-\mathbf{I}$를 얻는다.

> **?** **생각해 보기** $\mathbf{M}$이 실수 행렬이라는 사실은 정확히 어디에서 쓰였는가?

두 번째 동치에서만 쓰였다. $k^2=-1$은 실수해를 갖지 않는다. 복소 행렬의 경우 $\mathbf{M}=\mathrm{i}\mathbf{I}$는 대각합이 $2\mathrm{i}\neq0$이면서 $\mathbf{M}^2=-\mathbf{I}$를 만족하므로, 이 결과는 성립하지 않는다.

소문항 (iii)

$(\Leftarrow)$는 바로 나온다. $\mathbf{M}^2=\pm\mathbf{I}$이면 $\mathbf{M}^4=(\pm\mathbf{I})^2=\mathbf{I}$이다.

$(\Rightarrow)$**.** $\mathbf{N}=\mathbf{M}^2$이라 하자. 이는 $\mathbf{N}^2=\mathbf{I}$를 만족하는 실수 2×2 행렬이다. $\mathbf{N}=\pm\mathbf{I}$이면 원하는 결과이고, $\mathbf{N}\neq\pm\mathbf{I}$이면 소문항 (ii)에 의해 $\det(\mathbf{N})=-1$이다. 그런데

$$\det(\mathbf{N}) = \det(\mathbf{M})^2 \geq 0,$$

이므로 두 번째 경우는 일어날 수 없다. 따라서 $\mathbf{M}^2=\pm\mathbf{I}$이다.

$\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I}$일 조건. 다시 $\mathbf{N} = \mathbf{M}^2$으로 두자. 소문항 (ii)의 두 번째 동치를 $\mathbf{N}$에 적용하면

$$\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I} \iff \operatorname{tr}(\mathbf{N}) = 0 \text{ 이고 } \det(\mathbf{N}) = 1.$$

소문항 (i)과 $\det(\mathbf{N}) = \delta^2$을 이용하면, 이 조건은

$$t^2 - 2\delta = 0 \quad \text{이고} \quad \delta^2 = 1.$$

이 된다. 이제 $\delta^2 = 1$에서 $\delta = \pm 1$이고, $t^2 = 2\delta \geq 0$이므로 $\delta = -1$은 불가능하다. 따라서 $\delta = 1$이고 $t^2 = 2$이다. 모든 단계가 동치였으므로

$$\boxed{\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I} \iff \det(\mathbf{M}) = 1 \text{ 이고 } \operatorname{tr}(\mathbf{M}) = \pm\sqrt{2}}.$$

소문항 (iv)

소문항 (iii)을 $\mathbf{M}^2$에 적용하면 $\mathbf{M}^8 = \mathbf{I} \iff \mathbf{M}^4 = \pm\mathbf{I}$이므로, $\mathbf{M}^8 = \mathbf{I}$를 만족하는 행렬은 정확히

$$\mathbf{M}^2 = \pm\mathbf{I} \qquad \text{또는} \qquad \det(\mathbf{M}) = 1,\ \operatorname{tr}(\mathbf{M}) = \pm\sqrt{2}.$$

인 행렬들이다. 회전(rotation)과 반사(reflection)는 **직교**(*orthogonal*) 행렬이다. 즉 그 열벡터들은 서로 수직인 단위벡터이다(회전의 행렬식(determinant)은 1, 반사의 행렬식은 -1이다). 따라서 위 목록에 속하면서 열벡터가 단위벡터가 아닌 행렬을 하나 찾기만 하면 된다. 예를 들어

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

은 대각합이 0이고 행렬식이 -1이므로 소문항 (ii)에 의해 $\mathbf{M}^2 = \mathbf{I}$이고 (확인: $\mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$), 따라서 $\mathbf{M}^8 = \mathbf{I}$이다. 이 행렬의 두 번째 열 $(1, -1)$의 길이는 $\sqrt{2} \neq 1$이므로, 이 행렬은 회전도 반사도 아니다. (이것은 "비스듬한 반사"이다. x축 방향의 모든 벡터는 그대로 두고 $(1, -2)$ 방향의 모든 벡터는 방향을 뒤집는데, 이 두 방향은 서로 수직이 아니다.)

더 흥미로운 쪽의 예로는 $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$이 있다. 행렬식이 1이고 대각합이 $\sqrt{2}$이므로 $\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I}$이고 $\mathbf{M}^8 = \mathbf{I}$이지만, 첫 번째 열의 길이는 $\sqrt{3}$이다. 이것은 45° "찌그러진" 회전이다. 회전과 마찬가지로 위수(order)가 정확히 8이지만, 길이를 보존하지 않는다.

검산

- 45° 회전 $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$은 행렬식이 1이고 대각합이 $\sqrt{2}$이며, 45°씩 네 번 돌리면 반바퀴 회전, 즉 $-\mathbf{I}$가 된다. 이는 소문항 (iii)과 들어맞는다.

- $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$을 제곱하면 $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$이 되는데, 이는 대각합이 0이고 행렬식이 1이므로 소문항 (ii)에 의해 그 제곱은 $-\mathbf{I}$이다.
- 성분이 $\{-3, -\frac{5}{2}, \ldots, 3\}$에 속하는 모든 행렬을 컴퓨터로 탐색하여, 소문항 (ii)의 두 동치와 소문항 (iii)의 첫 번째 동치가 정확히 성립함을 확인하였다.

흔한 실수

- $t = 0$인 경우를 먼저 처리하지 않고 t로 나누는 것. 소문항 (ii)의 논증 전체는 t가 0인지 아닌지에 따른 경우 나누기이다.
- 소문항 (iii)에서 $\det(\mathbf{M}^2) = \det(\mathbf{M})^2$이 음수일 수 없다는 사실을 잊는 것. 바로 이 사실이 $\mathbf{I}$의 "다른" 제곱근들을 배제한다.
- 소문항 (iv)의 예로 45° 회전을 드는 것. 이 행렬은 $\mathbf{M}^8 = \mathbf{I}$를 만족하지만 바로 배제된 경우이다.

STEP 너머

항등식 $(*)$는 케일리–해밀턴 정리의 2×2 경우이다. 즉 모든 정사각행렬은 자신의 특성다항식(characteristic polynomial)을 만족한다. "어떤 $\mathbf{M}$이 $\mathbf{M}^n = \mathbf{I}$를 만족하는가?" 같은 질문은 사실 고윳값(eigenvalue)에 관한 질문이다. 여기서 고윳값은 8제곱근 단위근(roots of unity)이어야 하며, 위수가 8인 실수 행렬은 회전 그 자체가 아니면서도 회전과 **닮음**(*similar*)이다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수 입문)는 이러한 관점에서 고윳값, 닮음, 특성다항식을 전개한다.

풀이

STEP II 2020, 문제 7

순수수학 • 복소 변환

STEP II 2020, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2020년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

핵심 아이디어

사상 $z \mapsto w = \dfrac{2}{z-2}$는 평행이동(shift)을 한 뒤 반전(inversion)을 하는 것이며, 반전은 원점을 지나지 않는 직선을 원점을 지나는 원으로 보낸다. w가 특정한 원 위에 있음을 **증명**하려면, 중심 c를 먼저 추측한 다음 $|w-c|$가 상수로 간단히 정리됨을 보이는 것이 가장 깔끔하다. $w-c$를 하나의 분수로 쓰면 분자와 분모가 서로 켤레복소수(complex conjugate)이거나 거의 그런 관계가 되는데, 바로 이 점 때문에 절댓값(modulus)이 상수가 된다.

풀이

풀이 전체에서 $|\alpha/\beta| = |\alpha|/|\beta|$와, 실수 x, y에 대하여 $|x+yi| = |x-yi| = |y+xi| = \sqrt{x^2+y^2}$임을 사용한다.

소문항 (i)

$z = 3+ti$이면 $z-2 = 1+ti$이므로

$$w - 1 = \frac{2}{1+ti} - 1 = \frac{2-(1+ti)}{1+ti} = \frac{1-ti}{1+ti}.$$

분자와 분모는 서로 켤레복소수이므로 절댓값이 $\sqrt{1+t^2}$로 같고, 이 값은 결코 0이 아니다. 따라서

$$|w-1| = \frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+t^2}} = 1,$$

이고, 이 값은 t에 의존하지 않는다. 직선 $\mathrm{Re}(z) = 3$ 위의 모든 z는 어떤 실수 t에 대하여 $3+ti$의 꼴이므로, 그러한 모든 z에 대하여 점 w는 1로부터의 거리가 1이다. 즉 w는 중심이 1이고 반지름이 1인 원 위에 있다.

직선 V. 이제 $z = p + ti$이고, $a = p - 2$로 두면 편리하다. $p \neq 2$이므로 a는 0이 아닌 실수이다. 그러면 $z - 2 = a + ti$이고, 이는 결코 0이 아니다. $p = 3$일 때 중심은 $1 = 1/a$였으므로, 일반적인 경우에도 중심을 $1/a$로 두고 시도해 본다:

$$w - \frac{1}{a} = \frac{2}{a+ti} - \frac{1}{a} = \frac{2a - (a+ti)}{a(a+ti)} = \frac{a - ti}{a(a+ti)}.$$

이번에도 $|a - ti| = |a + ti|$이므로

$$\left| w - \frac{1}{p-2} \right| = \frac{1}{|a|} = \frac{1}{|p-2|}.$$

따라서 w는 다음과 같은 원 위에 있다.

$$\text{중심} \frac{1}{p-2}, \qquad \text{반지름} \frac{1}{|p-2|}.$$

반지름에 있는 절댓값 기호가 중요하다. $p < 2$이면 중심은 음의 실수축 위에 있지만, 반지름은 양수여야 하기 때문이다.

> **생각해 보기** $p = 3$인 경우를 미리 알려 주지 않았다면 중심 $1/(p-2)$를 어떻게 찾았을까?

점 $z = p (t = 0$인 경우)는 $w = 2/a$를 주고, $t \to \pm\infty$일 때 $w \to 0$이다. 이 두 점은 지름(diameter)의 양 끝에 있으므로(원은 실수축에 대하여 대칭이고, 이 두 점은 원 위에 있는 두 실수 점이다), 중심은 두 점의 중점인 $1/a$이다.

허수부(imaginary part)를 구하기 위해 분자와 분모에 켤레복소수를 곱한다:

$$w = \frac{2(a - ti)}{a^2 + t^2}, \qquad \text{따라서} \qquad \mathrm{Im}(w) = \frac{-2t}{a^2 + t^2}.$$

분모가 양수이므로 $\mathrm{Im}(w) > 0$일 필요충분조건은 $t < 0$이다. 따라서 V의 점 중 $\mathrm{Im}(w) > 0$인 점은 다음과 같다.

$$z = p + ti \text{에서} t < 0, \quad \text{즉} V \text{에서 실수축 아래쪽에 있는 점들} (\mathrm{Im}(z) < 0).$$

소문항 (ii)

이제 실수 s에 대하여 $z = s + qi$이고, $u = s - 2$로 두면 $z - 2 = u + qi$이며, $q \neq 0$이므로 이는 0이 아니다. 여기서 원의 두 "끝"은 $w = 0 (u \to \pm\infty$일 때)과 $w = 2/(qi) = -2i/q (u = 0$일 때)이므로, 중심이 $-i/q$일 것으로 짐작할 수 있다. 확인해 보자:

$$w + \frac{i}{q} = \frac{2}{u+qi} + \frac{i}{q} = \frac{2q + i(u+qi)}{q(u+qi)} = \frac{q + ui}{q(u+qi)}.$$

이제 $|q + ui| = \sqrt{q^2 + u^2} = |u + qi|$이므로

$$\left| w + \frac{i}{q} \right| = \frac{1}{|q|}.$$

따라서 w는 다음과 같은 원 위에 있다.

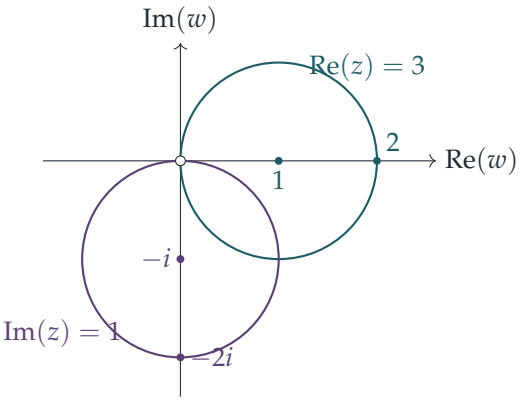
$$\text{중심} -\frac{i}{q}, \qquad \text{반지름} \frac{1}{|q|}.$$

실수부(real part)는

$$w = \frac{2(u-qi)}{u^2+q^2}, \qquad \text{따라서} \qquad \mathrm{Re}(w) = \frac{2u}{u^2+q^2},$$

이고, 분모는 양수이다. 따라서 $\mathrm{Re}(w) > 0$일 필요충분조건은 $u > 0$이며, 이는 다음 점들에 해당한다.

$$z = s + qi \text{에서} s > 2, \quad \text{즉} H\text{의 점 중 다음 직선의 오른쪽에 있는 점들: } \mathrm{Re}(z) = 2.$$



그림은 $\mathrm{Re}(z) = 3$의 상(image)(소문항 (i))과 $\mathrm{Im}(z) = 1$의 상($q = 1$인 소문항 (ii))을 보여 준다. 두 원 모두 원점을 지나지만, $2/(z-2) \neq 0$이므로 $w = 0$ 자체에는 결코 도달하지 않는다. 이 점은 직선을 따라 "무한히 먼 곳"에 있는 z에 대응한다.

검산

- V에 대한 공식에서 $p = 3$으로 두면 중심은 $1/(3-2) = 1$, 반지름은 1이 되어 첫 번째 결과와 일치한다.
- 특정 값 대입: $z = 3 - i$이면 $w = 2/(1-i) = 1 + i$이고, $|w-1| = 1$, $\mathrm{Im}(w) = 1 > 0$이므로 $t = -1 < 0$과 일치한다. $q = 1$인 H에서 $z = 3 + i$이면 $w = 1 - i$이고, 이 점은 $-i$로부터의 거리가 1이며, $3 > 2$이므로 실수부가 양수이다.
- $p \to 2$일 때 반지름 $1/|p-2|$는 커진다. 이때 직선 V는 무한대로 보내지는 점 $z = 2$가 까이를 지나므로, 그 상은 매우 커야 한다. 무작위로 고른 수천 개의 p, q와 각 직선 위의 점들로 컴퓨터 검사를 한 결과, 두 원과 두 부호 조건이 모두 확인되었다.

흔한 실수

- 반지름을 $1/(p-2)$나 $1/q$로 쓰는 것. 이 값은 $p<2$이거나 $q<0$일 때 음수가 된다.
- $\mathrm{Im}(w)$의 부호를 반대로 구하는 것. $z-2$로 나누면 실수축에 대한 대칭이동이 일어나므로, $\mathrm{Im}(w)$는 $\mathrm{Im}(z)$와 부호가 반대이다.

STEP 너머

사상 $z \mapsto 2/(z-2)$는 뫼비우스(Möbius) 변환(Möbius transformation) $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$의 하나이다. 이러한 사상은 항상 "일반화된 원"(generalised circles, 원과 직선)을 일반화된 원으로 보내며, 등각사상(conformal mapping)에서 쌍곡기하학(hyperbolic geometry)에 이르기까지 복소해석학(complex analysis) 첫 강좌의 기본적인 기하학적 도구이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)에는 이 변환을 다룬 아름다운 장이 있으며, 그 그림들을 보면 이번 결과와 같은 사실이 자명해 보인다.

풀이

STEP II 2020, 문제 8

순수수학 • 다항식과 적분

STEP II 2020, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2020년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

핵심 아이디어

$\mathrm{F}' = \mathrm{f}$이므로 f의 모든 근은 F의 극점(turning point)이고, 각 넓이 조건은 그 극점 중 하나에서의 F의 값에 대한 명제가 된다. F가 0과 c에서 중근(double root)을 가진다는 것을 알고 나면, 합 $\mathrm{F}(x) + \mathrm{F}(c-x)$는 부호를 결정하는 하나의 인수 $c - 2h$로 정리된다. 이 부호를 $[0, c]$에서 F의 최댓값과 최솟값에 대해 알고 있는 사실과 비교하면 대칭성이 강제된다.

풀이

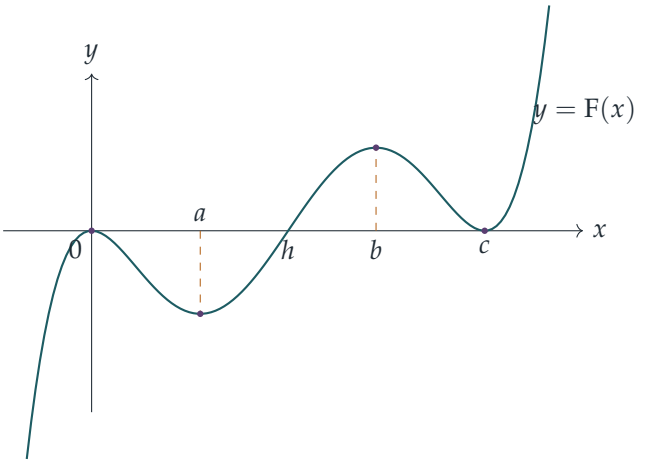
f는 최고차항의 계수가 1인 다항식(monic polynomial)이고 근이 $0, a, b, c$이므로 $\mathrm{f}(x) = x(x-a)(x-b)(x-c)$이다. 따라서 $(0,a)$에서 $\mathrm{f} < 0$, (a,b)에서 $\mathrm{f} > 0$, (b,c)에서 $\mathrm{f} < 0$이고, $x < 0$과 $x > c$에서 $\mathrm{f} > 0$이다. 0과 a 사이의 넓이를 A라 하자. 주어진 조건은 b와 c 사이의 넓이가 A이고 a와 b 사이의 넓이가 $2A$라는 것이며, $A > 0$이다.

소문항 (i)

$\mathrm{F}(x) = \int_0^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t$이므로, $\mathrm{f} < 0$인 구간에서의 적분값은 그 구간에서의 넓이에 음의 부호를 붙인 것이다. 따라서

$$\mathrm{F}(0) = 0, \qquad \mathrm{F}(a) = -A, \qquad \mathrm{F}(b) = -A + 2A = A, \qquad \mathrm{F}(c) = A - A = 0.$$

$\mathrm{F}' = \mathrm{f}$이므로 F의 극점은 $x = 0, a, b, c$에 있다. f의 부호는 0과 b에서 $+$에서 $-$로 바뀌므로 이 점들은 극대(maximum)이고, a와 c에서 $-$에서 $+$로 바뀌므로 이 점들은 극소(minimum)이다. F는 최고차항의 계수(leading coefficient)가 양수 $\frac{1}{5}$인 5차 다항식(quintic)이므로 $x \to \pm\infty$일 때 $\mathrm{F}(x) \to \pm\infty$이다.



이 곡선은 $(0,0)$에서 극대, $x=a$에서 $y=-A$인 극소, $x=b$에서 $y=A$인 극대를 가지며, $(c,0)$에서 축에 접하는 극소를 가진다.

F의 꼴. F는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{5}$인 5차 다항식이다. $x=0$에서 $\mathrm{F}(0)=0$이고 $\mathrm{F}'(0)=\mathrm{f}(0)=0$이므로, $x=0$은 중복도(multiplicity)가 적어도 2인 근이다. 마찬가지로 $\mathrm{F}(c)=0=\mathrm{F}'(c)$이므로 c는 중복도가 적어도 2인 근이다. 이것으로 다섯 개의 일차 인수 중 네 개가 정해진다:

$$\mathrm{F}(x)=\tfrac{1}{5}x^2(x-c)^2(x-h)$$

여기서 h는 어떤 실수이다. 또한 $\mathrm{F}(a)=-A<0<A=\mathrm{F}(b)$이므로 F는 a와 b 사이에 (양 끝점을 제외하고) 근을 가진다. 0과 c는 어느 것도 (a,b)에 속하지 않으므로 이 근은 h여야 한다. 따라서 $a<h<b$이고, 특히 $0<h<c$이다.

합. $(c-x)^2\big((c-x)-c\big)^2=x^2(x-c)^2$임에 주목하자. 따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(x)+\mathrm{F}(c-x)&=\tfrac{1}{5}x^2(x-c)^2\big[(x-h)+(c-x-h)\big]\\&=\tfrac{1}{5}x^2(x-c)^2(c-2h).\end{aligned}$$

소문항 (ii)

$[0,c]$에서 F는 $[0,a]$에서 순감소하고, $[a,b]$에서 순증가하며, $[b,c]$에서 순감소한다. 따라서 $[0,c]$에서 최솟값은 $\mathrm{F}(a)=-A$이다. 다른 후보는 끝점에서의 값 $\mathrm{F}(c)=0>-A$뿐이기 때문이다. 이 최솟값은 $x=a$에서만 얻어진다. 그러므로 $0\le x\le c$에 대하여

$$\mathrm{F}(b)+\mathrm{F}(x)\ \ge\ \mathrm{F}(b)+\mathrm{F}(a)=A-A=0$$

이고, $x\neq a$일 때는 등호가 성립하지 않는다.

생각해 보기 x를 어떤 값으로 잡아야 $\mathrm{F}(b)+\mathrm{F}(x)$가 소문항 (i)의 합과 같은 꼴이 될까?

$x=c-b$로 잡자. $0<b<c$이므로 이 값은 $[0,c]$에 속한다. 소문항 (i)에 의하여

$$\mathrm{F}(b)+\mathrm{F}(c-b)=\tfrac{1}{5}b^2(b-c)^2(c-2h).$$

$c-b\neq a$이면 좌변은 양수이다. $\frac{1}{5}b^2(b-c)^2>0$이므로 $c-2h>0$이다. 따라서 요구한 대로 $c-b=a$이거나 $c>2h$이다.

이제 같은 논증을 뒤집어서 적용해 보자. $[0,c]$에서 F의 최댓값은 $\mathrm{F}(b)=A$로, 끝점에서의 값 $\mathrm{F}(0)=\mathrm{F}(c)=0$보다 크며, 이 최댓값은 $x=b$에서만 얻어진다. 그러므로 $0\leq x\leq c$에 대하여

$$\mathrm{F}(a)+\mathrm{F}(x)\leq\mathrm{F}(a)+\mathrm{F}(b)=0$$

이고, $x\neq b$일 때는 등호가 성립하지 않는다. $x=c-a\in[0,c]$로 잡으면 $\frac{1}{5}a^2(c-a)^2(c-2h)\leq 0$이고, $c-a\neq b$이면 등호가 성립하지 않는다. 따라서 $c-a=b$이거나 $c<2h$이다.

$c\neq a+b$이면 두 결론에서 $c>2h$와 $c<2h$가 동시에 나오므로 모순이다. 따라서 $c=a+b$이다. 그러면 $c-b=a$이므로

$$0=\mathrm{F}(b)+\mathrm{F}(a)=\mathrm{F}(b)+\mathrm{F}(c-b)=\tfrac{1}{5}b^2a^2(c-2h).$$

$a,b\neq 0$이므로 $c=2h$를 얻는다.

소문항 (iii)

$h=\frac{1}{2}c$이면 $\mathrm{F}(x)=\frac{1}{5}u\left(x-\frac{1}{2}c\right)$이다. 여기서 $u=x^2(x-c)^2$이고, 따라서 $u'=2x(x-c)(2x-c)$이다. 곱의 미분법(product rule)으로 미분하면

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(x)=\mathrm{F}'(x)&=\tfrac{1}{5}\left[2x(x-c)(2x-c)\left(x-\tfrac{1}{2}c\right)+x^2(x-c)^2\right]\\&=\tfrac{1}{5}x(x-c)\left[(2x-c)^2+x(x-c)\right]\\&=\tfrac{1}{5}x(x-c)\left(5x^2-5cx+c^2\right)\\&=x(x-c)\left(x^2-cx+\tfrac{1}{5}c^2\right).\end{aligned}$$

(따라서 $a,b=\frac{1}{2}c\mp\frac{c}{2\sqrt{5}}$이고, 실제로 둘을 더하면 c가 된다.)

생각해 보기 근들은 $x=\frac{1}{2}c$에 대하여 대칭이다. 이를 이용해 이계도함수를 쉽게 구할 수 있을까?

그렇다. $y=x-\frac{1}{2}c$로 놓자. 그러면 $x(x-c)=y^2-\frac{1}{4}c^2$이고 $x^2-cx+\frac{1}{5}c^2=y^2-\frac{1}{20}c^2$이므로

$$\mathrm{f}=\left(y^2-\tfrac{1}{4}c^2\right)\left(y^2-\tfrac{1}{20}c^2\right)=y^4-\tfrac{3}{10}c^2y^2+\tfrac{1}{80}c^4.$$

$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 1$이므로

$$\mathrm{f}''(x) = 12y^2 - \tfrac{3}{5}c^2$$

이고, 이는 정확히 $y^2 = \frac{1}{20}c^2$일 때 o이 된다. 이 점들에서 f의 인수 $y^2 - \frac{1}{20}c^2$가 o이 되므로 $\mathrm{f} = 0$이다. 각 점은 y에 대한 이차식(quadratic) f″의 단근(simple root)이므로 f″의 부호가 그 점에서 바뀌고, 따라서 이 점들은 진짜 변곡점(point of inflection)이다. 그러므로 두 변곡점은 모두 x축 위에 있다. 실제로 이 점들은 $(a, 0)$과 $(b, 0)$이다.

검산

- $c = 2$로 잡으면 $a = 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0.5528$이고 $b \approx 1.4472$이다. f를 수치 적분(numerical integration)하면 $[0, a]$, $[a, b]$, $[b, c]$에서의 넓이는 각각 0.05724, 0.11449, 0.05724이다. 바깥쪽 두 넓이는 같고, 각각 가운데 넓이의 절반이다.
- $a + b = c$와 $ab = \frac{1}{5}c^2$을 이용해 $x(x-a)(x-b)(x-c)$를 전개하면 소문항 (iii)의 식이 다시 나온다.
- $c = 2$일 때, $x = a \approx 0.5528$에서 f″의 유한 차분(finite-difference) 근삿값은 반올림 오차 범위 안에서 o이고, $x = 0.54$와 $x = 0.56$ 사이에서 부호가 바뀐다.

흔한 실수

- $\mathrm{F}(0) = \mathrm{F}(c) = 0$뿐 아니라 $\mathrm{F}'(0) = \mathrm{F}'(c) = 0$이라는 사실을 잊어서 중근을 놓치는 것.
- $0 < h < c$를 정당화하지 않는 것. h의 위치를 정해 주는 것은 a와 b 사이에서 F의 부호가 바뀐다는 사실이다.
- 소문항 (ii)에서 첫 번째 부등식만 사용하는 것. 그 부등식은 "$c = a + b$ 또는 $c > 2h$"를 주는데, 이것만으로는 충분하지 않다. 논증을 마무리하려면 $\mathrm{F}(a)$를 이용한 반대 방향의 부등식이 필요하다.

STEP 너머

소문항 (ii)의 논증은 최대·최소 정리(extreme value theorem)를 사용한다. 닫힌 구간에서 연속인 함수는 최댓값과 최솟값을 가지며, 여기서는 그 값을 어디에서 갖는지까지 정확히 알고 있다. 넓이 조건이 강제하는 이 4차식(quartic)의 $x = \frac{1}{2}c$에 대한 대칭성은, 적분 조건이 다항식의 모양을 결정할 수 있음을 보여 주는 한 예이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해하기)는 최대·최소 정리와, F와 f를 연결하는 미적분학의 기본정리(fundamental theorem of calculus)를 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP II 2020, 문제 9

역학 • 충돌하는 포물체

STEP II 2020, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2020년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

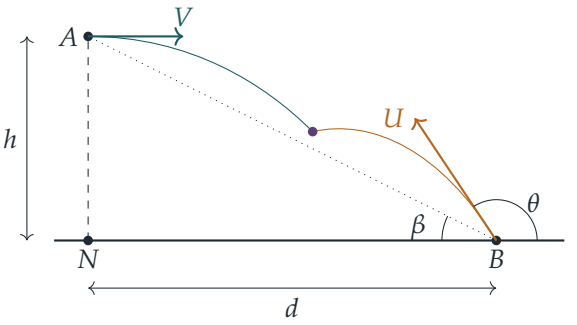
www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

핵심 아이디어

두 입자를 하나의 좌표계(coordinate system)에 놓고, 시각 t에서 각 입자의 위치를 적는다. 두 입자는 같은 아래 방향 가속도(acceleration) g를 받으므로, 높이를 비교하면 $-\frac{1}{2}gt^2$ 항이 소거된다. 즉 서로에 대해 보면 두 입자는 일정한 속도로 직선 운동을 한다. 따라서 충돌 시각이 매우 간단해지고, 이후의 각 소문항은 모두 이 사실에서 짧게 따라 나온다.

풀이

두 입자를 공기 저항(air resistance) 없이 중력만 받으며 자유롭게 움직이는 질점(point mass)으로 모형화한다. N을 원점(origin)으로 하고, x축을 NB 방향으로(따라서 $B = (d, 0)$, $A = (0, h)$), y축을 연직 위 방향으로 잡는다. A에서 출발한 입자는 B 쪽으로, B에서 출발한 입자는 N 쪽으로 움직이므로 두 입자의 수평 속도는 방향이 반대이다. 이것이 주어진 결과가 묘사하는 상황이다.



발사 후 시각 t에서 A에서 출발한 입자의 위치는

$$x_A = Vt, \qquad y_A = h - \tfrac{1}{2}gt^2,$$

이고, B에서 출발한 입자의 위치는

$$x_B = d - Ut\cos\theta, \qquad y_B = Ut\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

이다. 두 좌표가 모두 일치하면 두 입자는 시각 T에 충돌한다. 높이가 일치하는 것은

$$h - \tfrac{1}{2}gT^2 = UT\sin\theta - \tfrac{1}{2}gT^2 \quad \Longrightarrow \quad T = \frac{h}{U\sin\theta},$$

일 때이고, 이것이 가능한 유일한 충돌 시각이다(θ가 예각이므로 $\sin\theta > 0$). 같은 시각에 수평 위치도 일치해야 하므로

$$VT = d - UT\cos\theta \quad \Longrightarrow \quad (V + U\cos\theta)\,\frac{h}{U\sin\theta} = d.$$

양변에 $U\sin\theta$를 곱하면 $Vh + Uh\cos\theta = Ud\sin\theta$이고, U로 나누면

$$d\sin\theta - h\cos\theta = \frac{Vh}{U},$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

소문항 (i)

직각삼각형 ANB에서 $\tan\beta = h/d$이고 $0 < \beta < \frac{1}{2}\pi$이다. V, h, U가 양수이므로, 앞에서 보인 결과로부터 $d\sin\theta - h\cos\theta > 0$이다. θ가 예각이므로 $d\cos\theta > 0$으로 나누면

$$\tan\theta > \frac{h}{d} = \tan\beta.$$

두 각 모두 tan가 순증가(strictly increasing)하는 구간 $(0, \frac{1}{2}\pi)$에 있으므로 $\theta > \beta$이다.

소문항 (ii)

> **생각해 보기** 지금까지의 계산에서는 지면을 전혀 사용하지 않았다. 아직 부과하지 않은 물리적 조건은 무엇인가?

충돌은 어느 입자든 지면에 닿기 전에 일어나야 하므로, 시각 T에서의 공통 높이는 0 이상이어야 한다.

$$h - \tfrac{1}{2}gT^2 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad h \geq \frac{gh^2}{2U^2\sin^2\theta} \quad \Longleftrightarrow \quad U^2\sin^2\theta \geq \frac{gh}{2}.$$

(여기서 $h > 0$으로 나누고 $U^2\sin^2\theta > 0$을 곱했다.) $U\sin\theta > 0$이므로 양의 제곱근을 취하면

$$U\sin\theta \geq \sqrt{\frac{gh}{2}}.$$

등호는 두 입자가 지면에 닿는 바로 그 순간에 만나는 경우에 해당한다.

소문항 (iii)

$r = AB = \sqrt{d^2 + h^2}$라 하면 $d = r\cos\beta$, $h = r\sin\beta$이다. 그러면

$$d\sin\theta - h\cos\theta = r(\sin\theta\cos\beta - \cos\theta\sin\beta) = r\sin(\theta - \beta),$$

이고, 충돌 조건은

$$r\sin(\theta-\beta) = \frac{Vr\sin\beta}{U} \quad\Longrightarrow\quad \frac{U}{V} = \frac{\sin\beta}{\sin(\theta-\beta)}.$$

가 된다. 소문항 (i)에 의해 $\theta - \beta > 0$이고, 또 $\theta - \beta < \theta < \frac{1}{2}\pi$이다. 따라서 $0 < \sin(\theta-\beta) < 1$이고, $\sin\beta > 0$이므로

$$\frac{U}{V} = \frac{\sin\beta}{\sin(\theta-\beta)} > \sin\beta.$$

마지막 소문항

충돌 높이는 $h - \frac{1}{2}gT^2$이므로

$$\text{충돌 높이가 다음보다 높음: } \tfrac{1}{2}h \iff h - \tfrac{1}{2}gT^2 > \tfrac{1}{2}h \iff gT^2 < h.$$

B에서 출발한 입자의 연직 속도는 $U\sin\theta - gt$이므로

$$\text{다음 시각에 상승 중: } T \iff U\sin\theta - gT > 0 \iff gT < U\sin\theta.$$

생각해 보기 $gT < U\sin\theta$와 $gT^2 < h$를 어떻게 비교할 수 있을까?

충돌 시각 자체를 이용한다. $T = h/(U\sin\theta)$이므로 $U\sin\theta = h/T$이다. 따라서 $T > 0$을 곱하면

$$gT < U\sin\theta \iff gT < \frac{h}{T} \iff gT^2 < h.$$

두 조건이 모두 $gT^2 < h$와 동치이므로, 두 입자가 높이 $\frac{1}{2}h$보다 위에서 충돌할 필요충분조건은 충돌 순간에 B에서 출발한 입자가 아직 위로 움직이고 있는 것이다.

검산

- $g = 9.8$, $h = 10$, $d = 20$, $U = 20$, $\theta = \frac{1}{4}\pi$로 두자. 충돌 조건에서 $V = U(d\sin\theta - h\cos\theta)/h = 10\sqrt{2} \approx 14.14$이고, $T = 1/\sqrt{2} \approx 0.707$초이다. 이때 두 입자는 모두 $x = 10$, $y = 10 - 4.9 \times \frac{1}{2} = 7.55$에 있으며, 이는 $\frac{1}{2}h = 5$보다 위이다. B에서 출발한 입자의 연직 속도는 $10\sqrt{2} - 9.8/\sqrt{2} \approx 7.21 > 0$으로 상승 중이며, 마지막 소문항의 예측과 일치한다. 또한 $U/V = \sqrt{2} > \sin\beta = 1/\sqrt{5}$이다.

- 중력이 없을 때의 직관: $g = 0$이면 두 입자는 직선 운동을 하고, 조건 $U/V = \sin\beta/\sin(\theta-\beta)$는 A, B와 만나는 점이 이루는 삼각형에서의 사인 법칙(sine rule)일 뿐이다. 중력은 두 입자를 같은 양만큼 아래로 옮기므로 조건은 변하지 않는다.
- 컴퓨터로 h, d, U, θ를 수천 번 무작위로 골라 확인한 결과, 충돌과 세 부등식, 그리고 마지막 소문항의 동치가 모두 성립했다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)에서 지면을 잊는 것: 이 부등식은 충돌 방정식이 아니라, 충돌이 높이 0 이상에서 일어나야 한다는 사실에서 나온다.
- 두 각이 모두 tan가 증가하는 예각이라는 말 없이 $\tan\theta > \tan\beta$에서 $\theta > \beta$를 결론짓는 것.
- 소문항 (iii)에서 $\sin(\theta-\beta) \le 1$에서 멈추는 것: 엄격한 부등식을 얻으려면 $\theta - \beta < \frac{1}{2}\pi$가 필요하다.

STEP 너머

$-\frac{1}{2}gt^2$ 항이 소거되는 것은 자유 낙하 기준계(freely falling frame of reference)로 바꾸는 것의 한 예이다. g로 가속하는 기준계에서는 중력이 사라지고 두 입자 모두 직선 운동을 한다. 이것은 대학 첫 역학 강의를 여는 갈릴레이 변환(Galilean transformation)과 가속 기준계 개념의 가장 간단한 경우이며, 나중에는 아인슈타인(Einstein)의 등가 원리(equivalence principle)의 출발점이 된다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 비관성 기준계(non-inertial frame)를 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP II 2020, 문제 10

역학 • 에너지와 평형

STEP II 2020, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2020년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

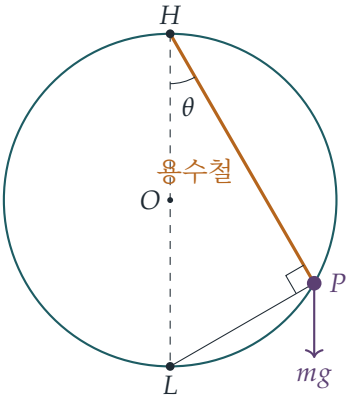
www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

핵심 아이디어

HL이 지름(diameter)이므로, 반원에 대한 원주각이 직각이라는 사실로부터 용수철의 길이와 P의 높이를 θ로 곧바로 나타낼 수 있다. 즉 $HP = 2a\cos\theta$이고, P는 H보다 $2a\cos^2\theta$만큼 아래에 있다. 철사는 매끄러우므로 철사의 수직항력(reaction)은 일을 하지 않는다. 따라서 문제 전체는 하나의 함수, 즉 $c = \cos\theta$의 함수로 본 위치 에너지(potential energy)에 관한 문제가 된다. 이 함수는 c에 대한 이차식이 되며, 완전제곱식으로 고치면(completing the square) 두 소문항이 한꺼번에 해결된다.

풀이

P를 매끄러운 철사 위의 입자로, 용수철을 (장력(tension)을 받든 압축(compression)을 받든) 훅의 법칙(Hooke's law)을 따르는 가벼운 용수철로 모형화한다. 원의 중심을 O라 하자.



기하. HL이 지름이므로 $\angle HPL = 90°$이다. 따라서 빗변(hypotenuse)이 $2a$인 직각삼각형 HPL에서 다음이 성립한다.

$$HP = 2a\cos\theta.$$

H에서 P까지의 수직 낙차는 $HP\cos\theta = 2a\cos^2\theta$이다. P가 어느 쪽으로든 L에서 H를 향해 돌아갈 때 θ는 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 범위를 움직이므로 $\cos\theta > 0$이다.

위치 에너지. H를 중력 위치 에너지의 기준(0)으로 잡고 $c = \cos\theta$라 하자. 용수철의 늘어난 길이는 $2ac - l$이므로 다음과 같다.

$$\begin{aligned} V &= -2mga\,c^2 + \frac{\lambda}{2l}(2ac - l)^2 \\ &= \frac{2a(a\lambda - mgl)}{l}\,c^2 - 2a\lambda\,c + \frac{\lambda l}{2}. \end{aligned}$$

소문항 (i)

매끄러운 철사의 수직항력은 일을 하지 않으므로, P는 정확히 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}\theta = 0$인 곳에서 평형(equilibrium)을 이룬다. (이는 접선(tangent) 방향의 힘이 균형을 이룬다는 것과 같다.) 연쇄 법칙(chain rule)에 의해 다음을 얻는다.

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta\,\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}c} = -\sin\theta\left(\frac{4a(a\lambda - mgl)}{l}\,c - 2a\lambda\right).$$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$인 $\theta = \alpha$에서는 $\sin\alpha \neq 0$이므로 괄호 안이 0이어야 한다.

$$\frac{4a(a\lambda - mgl)}{l}\cos\alpha = 2a\lambda.$$

우변이 0이 아니므로 $a\lambda \neq mgl$이고, 따라서 양변을 나눌 수 있다. 그러면 구하는 식

$$\cos\alpha = \frac{\lambda l}{2(a\lambda - mgl)},$$

을 얻는다.

이러한 α가 존재하려면 $0 < \cos\alpha < 1$이어야 한다.

- $\cos\alpha > 0$: 분자 λl이 양수이므로 $a\lambda > mgl$이어야 한다.
- $\cos\alpha < 1$: 양수 $2(a\lambda - mgl)$을 양변에 곱하면 $\lambda l < 2a\lambda - 2mgl$, 즉 $\lambda(2a - l) > 2mgl$이다.

$l < 2a$이므로 두 번째 조건은 $\lambda > \dfrac{2mgl}{2a - l}$이다. $\dfrac{2mgl}{2a - l} > \dfrac{2mgl}{2a} = \dfrac{mgl}{a}$이므로 이 조건은 첫 번째 조건도 함축한다. 따라서 $\alpha > 0$인 평형은 $\lambda > \dfrac{2mgl}{2a - l}$일 때에만 존재한다. (역으로 이 조건이 성립하면 위의 식은 실제 각 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$를 주며, 대칭성에 의해 $-\alpha$도 평형점이다.)

소문항 (ii)

생각해 보기 $\cos\alpha$가 저절로 드러나도록 V를 깔끔하게 나타내는 방법이 있을까?

있다. 완전제곱식으로 고치면 된다. $K = \dfrac{2a(a\lambda - mgl)}{l}$이라 하자. 소문항 (i)에서 $\dfrac{a\lambda - mgl}{l} = \dfrac{\lambda}{2\cos\alpha}$이므로 다음과 같다.

$$K = \frac{a\lambda}{\cos\alpha}, \qquad \frac{2a\lambda}{K} = 2\cos\alpha.$$

따라서

$$V = K\left(c^2 - 2c\cos\alpha\right) + \frac{\lambda l}{2} = \frac{a\lambda}{\cos\alpha}(c - \cos\alpha)^2 + \text{상수}.$$

(검산 삼아 보면, 이 식은 $c = \cos\alpha$에서 최솟값을 가지며, 이는 소문항 (i)에서 구한 평형점이다.) 평형이 존재하기 위해 소문항 (i)에서 요구한 대로 $a\lambda > mgl$이라 가정하면 $\cos\alpha > 0$이고 $K > 0$이다.

L에서는 $\theta = 0$, $c = 1$이다. L과 임의의 점 사이에 에너지 보존(conservation of energy)을 적용하면 다음을 얻는다.

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}mu^2 + \frac{a\lambda}{\cos\alpha}\left[(1 - \cos\alpha)^2 - (c - \cos\alpha)^2\right].$$

양변에 $\dfrac{\cos\alpha}{a\lambda} > 0$을 곱하면

$$\frac{mv^2\cos\alpha}{2a\lambda} = D - (c - \cos\alpha)^2, \qquad \text{여기서} D = (1 - \cos\alpha)^2 + \frac{mu^2}{2a\lambda}\cos\alpha. \qquad (*)$$

따라서 P가 $\theta = \beta$에서 멈춘다면 그곳에서 $v = 0$이므로

$$(\cos\alpha - \cos\beta)^2 = (1 - \cos\alpha)^2 + \frac{mu^2}{2a\lambda}\cos\alpha,$$

이고, 이것이 구하는 방정식이다.

생각해 보기 이 방정식은 $\cos\beta$에 대해 근이 두 개이다. 실제로 멈추는 지점은 어느 쪽이며, 그 지점이 H보다 앞에 있는 것은 언제일까?

P가 L에서 H를 향해 올라가면 c는 1에서 0을 향해 감소한다. $(*)$에 의해 P는 $(c - \cos\alpha)^2 < D$인 동안 계속 움직이므로, c가 1에서부터 감소하다가 구간 $(\cos\alpha - \sqrt{D},\ \cos\alpha + \sqrt{D})$의 가까운 쪽 끝점에 닿는 곳에서 처음으로 멈춘다. 그런데 $D \geq (1 - \cos\alpha)^2$이므로($u > 0$이면 등호는 성립하지 않는다) $\cos\alpha + \sqrt{D} > 1$이고 $\cos\alpha - \sqrt{D} < 1$이다. 따라서 $c = 1$은 구간 안에 있고, 멈추는 지점의 값은 다음과 같다.

$$\cos\beta = \cos\alpha - \sqrt{D}.$$

P가 $H(c=0$인 곳$)$에 닿기 전에 멈추는 것은 정확히 이 값이 양수일 때, 즉 $\sqrt{D} < \cos\alpha$, 다시 말해 $D < \cos^2\alpha$일 때이다.

$$\begin{aligned} & (1-\cos\alpha)^2 + \frac{mu^2}{2a\lambda}\cos\alpha < \cos^2\alpha \\ \iff \quad & 1 - 2\cos\alpha + \frac{mu^2}{2a\lambda}\cos\alpha < 0 \\ \iff \quad & \frac{mu^2}{2a\lambda} < 2 - \sec\alpha, \end{aligned}$$

마지막 단계에서는 $\cos\alpha > 0$으로 나누었다. 따라서 P가 H에 닿기 전에 멈추는 것은 다음 조건이 성립할 때뿐이다.

$$u^2 < \frac{2a\lambda}{m}(2-\sec\alpha).$$

특히 이를 위해서는 $\sec\alpha < 2$, 즉 $\alpha < \frac{\pi}{3}$이어야 한다. 그렇지 않으면 L에서의 속력이 얼마이든 P는 H에 도달한다.

검산

- (단위를 일관되게 하여) $m=1$, $g=10$, $a=1$, $l=1$, $\lambda=40$으로 잡자. 그러면 $\lambda > 2mgl/(2a-l) = 20$이고 $\cos\alpha = 40/60 = \frac{2}{3}$이다. 임계값은 $u^2 = 80(2-\frac{3}{2}) = 40$이다. $u^2=40$이면 $D = \frac{1}{9} + \frac{40}{80}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$이므로 $\cos\beta = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$이다. 입자는 마땅히 그래야 하듯 H에 겨우 도달한다.
- $u=0$이면 $D = (1-\cos\alpha)^2$이고 $\cos\beta = 1$이다. L에 정지해 있는 입자는 그대로 머무르는데, L 또한 평형점이므로 옳은 결과이다.
- 무작위로 고른 여러 매개변수 조합에 대해 운동 방정식을 컴퓨터로 수치 적분해 보았더니, 입자는 정확히 u^2이 임계값보다 작을 때 예측한 $\cos\beta$에서 멈추었다.

흔한 실수

- $HP = 2a\sin\theta$로 잡거나, 잘못된 각으로 O로부터의 높이를 재는 것. 중심각은 θ가 아니라 2θ임을 기억하자.
- 소문항 (i)에서 $\cos\alpha > 0$만 확인하는 것. λ의 범위를 주는 것은 $\cos\alpha < 1$이라는 조건이다.
- $\cos\beta$로 근 $\cos\alpha + \sqrt{D}$를 고르는 것. 이 값은 1보다 크므로 철사 위의 위치가 아니다.

STEP 너머

에너지를 $K(c-\cos\alpha)^2+$ 상수 꼴로 쓰는 것은 대학 역학의 핵심 아이디어를 일차원에서 구현한 것이다. 자유도(degree of freedom)가 하나인 계에서 평형점은 퍼텐셜의 정류점(stationary point)이고, 그 안정성(stability)은 그 점이 극소인지 극대인지에 따라 정해지며, 운동이 가능한 영역은 에너지가 퍼텐셜보다 큰 곳이다. 여기서 $\alpha>0$이 존재하면 L은 V의 극대점이 되므로 불안정한 평형점이 된다. 용수철 때문에 철사의 맨 아래 지점이 불안정해지는 것이다! Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 관점에서 에너지 도표와 안정성을 전개한다.

풀이

STEP II 2020, 문제 11

확률과 통계 • 동전 던지기에서의 연속된 결과

STEP II 2020, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2020년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

핵심 아이디어

이 게임은 기억이 거의 없다. 어느 순간에든 중요한 것은 마지막으로 나온 면이 무엇인지와 현재의 연속(run)이 얼마나 긴지뿐이다. 특히 나오는 면이 바뀌는 순간, 게임은 그 새로운 면이 맨 처음 던지기였던 경우와 정확히 같은 상황이 된다. 따라서 첫 번째 던지기에 대해 조건을 걸어(conditioning), 첫 던지기가 앞면일 때 A가 이길 확률을 첫 던지기가 뒷면일 때 A가 이길 확률로 나타내고, 그 반대도 마찬가지로 나타낸다. 그러면 두 개의 연립일차방정식(simultaneous linear equations)을 얻는다.

풀이

이 풀이 전체에서 $0 < p < 1$이다. ($p = 0$ 또는 $p = 1$이면 모든 던지기의 결과가 같으므로 게임은 두 번째 또는 세 번째 던지기에서 끝나고, 답은 자명하다.) 다음과 같이 놓는다.

$$\alpha = \mathrm{P}(\text{A가 이김} \mid \text{첫 던지기가 H}), \qquad \beta = \mathrm{P}(\text{A가 이김} \mid \text{첫 던지기가 T}).$$

각 던지기는 독립(independent)이므로, 어떤 던지기 이후에 일어나는 일은 앞으로 남은 던지기에만 의존한다.

소문항 (i)

게임은 끝난다. n번 던진 뒤에도 게임이 계속되려면 지금까지 연속한 두 던지기의 결과가 같은 경우가 없어야 한다. 즉 처음 n번의 던지기가 $HTHT\ldots$ 또는 $THTH\ldots$처럼 번갈아 나와야 한다. $n = 2m$이면 이 두 수열은 각각 앞면 m개와 뒷면 m개를 포함하므로

$$\mathrm{P}(2m\text{번 던진 뒤에도 끝나지 않음}) = 2p^m q^m = 2(pq)^m \leq 2\left(\tfrac{1}{4}\right)^m,$$

이다. 여기서 $pq = p(1-p) = \frac{1}{4} - \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$를 이용하였다. "게임이 결코 끝나지 않는다"는 사건은 이 사건들 모두에 포함되므로, 그 확률은 모든 m에 대하여 $2\left(\frac{1}{4}\right)^m$ 이하이고, $m \to \infty$로 보내면 그 확률이 0임을 알 수 있다.

첫 던지기가 앞면인 경우. 두 번째 던지기를 살펴보자.

- 확률 p로 앞면이 나오고, A가 곧바로 이긴다.
- 확률 q로 뒷면이 나온다. 이제 그 앞의 앞면은 의미가 없다. B는 뒷면이 한 번 더 나오면 되고 A는 앞면이 두 번 연속 나와야 하므로, 이 뒷면이 첫 던지기였던 경우와 정확히 같다. 따라서 이때 A가 이길 확률은 β이다.

마찬가지로 첫 던지기가 뒷면이면, 두 번째가 뒷면일 때 B가 곧바로 이기고, 두 번째가 앞면이면 "첫 던지기가 앞면"인 상황이 된다. 그러므로

$$\alpha = p + q\beta, \qquad \beta = p\alpha.$$

두 번째 식을 첫 번째 식에 대입하면 $\alpha = p + pq\,\alpha$이므로

$$\alpha = \frac{p}{1-pq},$$

이고, 이것이 구하는 결과이다($1 - pq \geq \frac{3}{4} > 0$). 그러면 $\beta = \dfrac{p^2}{1-pq}$이다.

전체 확률. 첫 던지기에 대해 조건을 걸면

$$\mathrm{P}(\text{A가 이김}) = p\alpha + q\beta = \frac{p^2 + p^2 q}{1-pq} = \frac{p^2(1+q)}{1-pq}.$$

소문항 (ii)

이제 α와 β는 세 번 연속이 필요한 게임에 대한 것이다. 첫 던지기가 앞면이라고 하자.

- HH 다음에 H, 확률 p^2: A가 이긴다.
- 확률 pq인 HHT, 또는 확률 q인 HT: 처음 이후 첫 뒷면이 방금 나왔고 그 앞의 앞면들은 더 이상 의미가 없으므로, "첫 던지기가 뒷면"인 상황이 되어 A가 이길 확률은 β이다.

이 경우들이 모든 경우를 포함하므로

$$\alpha = p^2 + (q + pq)\,\beta,$$

이고, 이것이 주어진 결과이다. 두 면의 역할을 바꾸면("첫 던지기가 뒷면"인 상황에서 TTT는 B의 승리이므로 0을 기여한다)

$$\beta = (p + pq)\,\alpha.$$

생각해 보기 인수 $q+pq$와 $p+pq$는 어떻게 $1-p^2$와 $1-q^2$가 되는가?

$p+q=1$이므로 $q+pq=q(1+p)=(1-p)(1+p)=1-p^2$이고, 마찬가지로 $p+pq=p(1+q)=1-q^2$이다. 이는 직접적으로도 이해할 수 있다. $1-p^2$는 처음 앞면 다음의 두 던지기가 모두 앞면은 아닐 확률이며, 이는 정확히 연속이 끊어지는 경우이다. 따라서 방정식은

$$\alpha = p^2 + (1-p^2)\beta, \qquad \beta = (1-q^2)\alpha,$$

이고, 대입하면 $\alpha\left[1-(1-p^2)(1-q^2)\right]=p^2$, 즉

$$\alpha = \frac{p^2}{1-(1-p^2)(1-q^2)}.$$

($0<1-p^2<1$이고 $0<1-q^2<1$이므로 분모는 양수이다.) 마지막으로

$$\mathrm{P}(\text{A가 이김}) = p\alpha + q\beta = \alpha\left(p+q(1-q^2)\right) = \alpha\left(p+q-q^3\right) = \alpha\left(1-q^3\right),$$

이므로

$$\mathrm{P}(\text{A가 이김}) = \frac{p^2(1-q^3)}{1-(1-p^2)(1-q^2)},$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

소문항 (iii)

같은 논증이 길이 a와 b의 연속에 대해서도 성립한다. 첫 던지기가 앞면이면, 다음 $a-1$번의 던지기가 모두 앞면이어서(확률 p^{a-1}) A가 이기거나, 그 사이에 뒷면이 나온다(확률 $1-p^{a-1}$). 두 번째 경우에는 게임이 그 뒷면에서 다시 시작되는 것과 같으므로 "첫 던지기가 뒷면"인 상황이 된다. 마찬가지로 첫 던지기가 뒷면이면 B는 확률 q^{b-1}로 이기고, 그렇지 않으면 B의 연속이 완성되기 전에 앞면이 나온다. 따라서

$$\alpha = p^{a-1} + \left(1-p^{a-1}\right)\beta, \qquad \beta = \left(1-q^{b-1}\right)\alpha,$$

이고, 그러므로

$$\alpha = \frac{p^{a-1}}{1-\left(1-p^{a-1}\right)\left(1-q^{b-1}\right)}.$$

이번에도 두 괄호의 값이 모두 0과 1 사이에 엄격히 놓이므로 분모는 양수이다. 그러면

$$p\alpha + q\beta = \alpha\left(p+q-q^b\right) = \alpha\left(1-q^b\right),$$

이므로

$$\boxed{\mathrm{P}(\text{A가 이김}) = \frac{p^{a-1}\left(1-q^b\right)}{1-\left(1-p^{a-1}\right)\left(1-q^{b-1}\right)}}$$

원한다면 분모를 전개하여 $p^{a-1} + q^{b-1} - p^{a-1}q^{b-1}$로 쓸 수도 있다.

$a = b = 2$**인 경우.** 공식은 다음과 같이 된다.

$$\frac{p(1-q^2)}{1-(1-p)(1-q)} = \frac{p(1-q)(1+q)}{1-pq} = \frac{p^2(1+q)}{1-pq},$$

여기서 분모에는 $1-p=q$, $1-q=p$를, 분자에는 $1-q=p$를 이용하였다. 이는 소문항 (i)의 결과와 일치한다. $a=b=3$을 대입하면 소문항 (ii)의 결과가 정확히 다시 나온다.

검산

- **공정한 동전, 소문항** (i). $p=q=\frac{1}{2}$이면 답은 $\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}/\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$이고, 이는 대칭성에서 기대되는 값이다. (iii)에서도 $a=b$이고 $p=\frac{1}{2}$이면 언제나 같은 결과가 나온다.
- **극단적인 경우.** $p\to 1$이면 (iii)의 답은 1로 수렴하고, $p\to 0$이면 0으로 수렴한다. 당연히 그래야 한다.
- **수치.** $p=0.4$이면 소문항 (i)의 답은 $0.16\times 1.6/0.76\approx 0.3368$이고, 소문항 (ii)의 답은 ≈ 0.2713이다. 200 000번의 게임을 컴퓨터로 시뮬레이션하면 0.336과 0.271이 나왔다. $p=0.55$, $a=4$, $b=2$이면 공식은 0.2450을 주며, 이 역시 시뮬레이션 결과와 일치한다.

흔한 실수

- 면이 바뀌고 나면 그 전의 연속은 아무 의미가 없다는 점을 잊는 것. 바로 이 때문에 면이 바뀐 뒤의 상황이 "그 면이 첫 던지기"인 상황과 같다.
- (ii)에서 HHT인 경우를 빠뜨리는 것. 연속은 두 번째 **또는** 세 번째 던지기에서 끊어질 수 있다.
- "A가 이길 확률"의 최종 답으로 α를 제시하는 것. 첫 던지기에 대해 평균을 내어 $p\alpha+q\beta$를 구해야 한다.

STEP 너머

이것은 흡수 마르코프 연쇄(absorbing Markov chain)의 첫걸음 분석(first-step analysis)이다. 상태는 "현재의 면과 연속의 길이"이고, 흡수 확률은 다음 단계에 대해 조건을 걸어 얻은 일차방정식을 만족한다. 같은 기법으로 동전 던지기에서 특정 패턴이 나올 때까지의 기대 대기 시간을 구할 수 있으며, 이는 페니 게임(Penney's game)으로 이어진다. 페니 게임에서는 패턴들의 순서가 놀라운 비추이적(non-transitive) 결과를 낳는다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 마르코프 연쇄와 흡수를 알맞은 수준에서 다룬다.

풀이

STEP II 2020, 문제 12

확률과 통계 • 편향된 주사위와 부등식

STEP II 2020, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2020년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

핵심 아이디어

확률의 합은 1이어야 하므로 치우침(bias)들은 $\sum \varepsilon_i = 0$을 만족한다. 이 사실을 적어 두면, $\sum(\frac{1}{n}+\varepsilon_i)^2$을 전개할 때 일차항이 모두 사라지고 눈에 띄게 음이 아닌 식만 남는다. 그러면 (ii)는 모습만 바꾼 (i)이다. 양수들을 그 합으로 나누면 어떤 주사위의 확률들이 되기 때문이다.

풀이

$p_i = \mathrm{P}(X=i) = \frac{1}{n}+\varepsilon_i$라 하자. $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$이므로

$$1 = n\cdot\frac{1}{n} + \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i \quad\Longrightarrow\quad \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i = 0.$$

또한 각 $p_i \geq 0$이므로 모든 i에 대하여 $\varepsilon_i \geq -\frac{1}{n}$이다. 아래의 합은 모두 $i=1,\ldots,n$에 대한 합이다.

소문항 (i)

두 번의 굴림은 독립(independent)이므로 두 번 모두 i가 나올 확률은 p_i^2이고, 서로 다른 i에 대한 이 사건들은 서로 배반(disjoint)이다. 따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\text{같은 눈이 두 번 나옴}) &= \sum p_i^2 = \sum\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2\varepsilon_i}{n}+\varepsilon_i^2\right)\\ &= \frac{1}{n}+\frac{2}{n}\sum\varepsilon_i+\sum\varepsilon_i^2 = \frac{1}{n}+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2.\end{aligned}$$

공정한 주사위에서는 모든 $\varepsilon_i = 0$이고 확률은 $\frac{1}{n}$이다. 치우친 주사위에서는 ε_i가 모두 0인 것은 아니므로 $\sum \varepsilon_i^2 > 0$이다. 따라서 치우친 주사위는 공정한 주사위보다 연속한 두 번의 굴림에서 같은 눈이 나올 가능성이 더 크다.

소문항 (ii)

먼저 이중합을 다시 쓰자. 이 합은 $j < i$인 모든 쌍에 대하여 $x_i x_j$를 더한 것, 즉 서로 다른 첨자의 순서 없는 쌍 각각에 대하여 정확히 한 번씩 더한 것이다. $S = \sum x_i$를 제곱하면 각 x_i^2이 한 번씩, 그리고 그러한 쌍이 각각 두 번씩 나오므로

$$\sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} x_i x_j = \frac{1}{2}\left(S^2 - \sum x_i^2\right).$$

생각해 보기 x_i가 그저 임의의 양수일 때, 주사위는 어디에서 나오는가?

$p_i = x_i / S$라 하자. 이들은 양수이고 합이 1이므로 어떤 n면 주사위의 확률들이다. (i)에 의하여 $\sum p_i^2 = \frac{1}{n} + \sum \varepsilon_i^2 \geq \frac{1}{n}$이다(등호는 주사위가 공정할 때, 즉 모든 x_i가 같을 때에만 성립한다). 양변에 $S^2 > 0$을 곱하면

$$\sum x_i^2 \geq \frac{S^2}{n}.$$

따라서

$$\sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} x_i x_j = \frac{1}{2}\left(S^2 - \sum x_i^2\right) \leq \frac{1}{2}\left(S^2 - \frac{S^2}{n}\right) = \frac{n-1}{2n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2,$$

이것이 구하는 부등식(inequality)이다. 등호는 모든 x_i가 같을 때 성립한다.

소문항 (iii)

이번에는 확률이 $\sum p_i^3$이다. 전개하고 다시 $\sum \varepsilon_i = 0$을 이용하면

$$\begin{aligned}\sum p_i^3 &= \sum \left(\frac{1}{n^3} + \frac{3\varepsilon_i}{n^2} + \frac{3\varepsilon_i^2}{n} + \varepsilon_i^3\right) \\ &= \frac{1}{n^2} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3\varepsilon_i^2}{n} + \varepsilon_i^3\right) = \frac{1}{n^2} + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 \left(\frac{3}{n} + \varepsilon_i\right).\end{aligned}$$

공정한 주사위에서 이 값은 $\frac{1}{n^2}$이다.

생각해 보기 세제곱 ε_i^3은 음수일 수 있다. 이것이 제곱항들보다 더 클 수 있을까?

그럴 수 없다. 치우침은 아주 큰 음수가 될 수 없기 때문이다. $p_i \geq 0$에서 $\varepsilon_i \geq -\frac{1}{n}$이므로

$$\frac{3}{n} + \varepsilon_i \geq \frac{2}{n} > 0.$$

따라서 각 항 $\varepsilon_i^2\left(\frac{3}{n}+\varepsilon_i\right)$은 ≥ 0이고, $\varepsilon_i \neq 0$일 때마다 양수인데, 치우친 주사위에서는 적어도 하나의 i에 대하여 이런 일이 일어난다. 그러므로

$$\sum p_i^3 > \frac{1}{n^2},$$

이고, 치우친 주사위는 이번에도 공정한 주사위보다 연속한 세 번의 굴림에서 같은 눈이 나올 가능성이 **더 크다**.

검산

- $n=4$이고 확률이 $\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6}$인 경우를 보자. 그러면 $\varepsilon=\frac{1}{4},-\frac{1}{12},-\frac{1}{12},-\frac{1}{12}$이다. 직접 계산하면 $\sum p_i^2=\frac{1}{4}+\frac{3}{36}=\frac{1}{3}$이고, $\frac{1}{4}+\sum\varepsilon_i^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{3}{144}=\frac{1}{3}$이며, 이는 공정한 경우의 $\frac{1}{4}$보다 크다. 세 번 굴리는 경우 $\sum p_i^3=\frac{1}{8}+\frac{3}{216}=\frac{5}{36}\approx 0.139$로, 공정한 경우의 $\frac{1}{16}=0.0625$보다 훨씬 크다.
- 가장 극단적인 주사위는 항상 1이 나오는 주사위이다. 이때 두 확률은 모두 1로, 가능한 가장 큰 값이다.
- (ii)에서 $n=2$이면 부등식은 $x_1x_2\leq\frac{1}{4}(x_1+x_2)^2$이 되는데, 이것은 산술-기하 평균 부등식(AM–GM)이다. (i), (ii), (iii)의 부등식은 수천 개의 무작위 사례에 대하여 컴퓨터로도 확인하였다.

흔한 실수

- $\sum\varepsilon_i=0$임을 잊어서, 부호를 알 수 없는 일차항이 남는 경우.
- (iii)에서 $\varepsilon_i\geq-\frac{1}{n}$을 이용하지 않고 $\sum\varepsilon_i^3$이 "작다"거나 부호가 어느 쪽이든 상관없다고 단정하는 경우. 이 논증을 성립시키는 것이 바로 그 하한이다.
- (ii)에서 part (i)을 $x_i/\sum x_j$가 아니라 x_i 자체에 적용하는 경우. x_i들의 합은 1이 아닐 수 있다.

STEP 너머

$\sum p_i^2$라는 양은 분포의 **충돌 확률**(collision probability)이며, (i)은 이 값이 균등분포(uniform distribution)에서 가장 작다는 것을 말한다. (iii)은 $\sum p_i^3$에 대한 같은 명제이다. 둘 다 $t\mapsto t^k$의 볼록성(convexity), 즉 옌센 부등식(Jensen's inequality)이나 멱평균 부등식(power-mean inequality)의 특수한 경우이며, $\sum p_i^k$의 로그를 취하면 정보 이론과 암호학에서 쓰이는 레니 엔트로피(Rényi entropy)를 얻는다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문서)은 이러한 아이디어를 확률론의 맥락에서 접하기에 좋은

책이다.

풀이

STEP III 2020, 문제 1

순수수학 • 점화 공식

STEP III 2020, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2020년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

핵심 아이디어

소문항 (i)은 점화 적분 공식(reduction formula)이므로 부분적분(integration by parts)이 자연스러운 첫 수이다. $\cos x$의 거듭제곱은 미분하고 $\cos bx$는 적분한다. 그러면 곱 $\sin x \sin bx$가 남는데, $\cos(b-1)x$에 대한 삼각함수의 덧셈정리(compound-angle formula)를 쓰면 이것을 다시 처음과 같은 꼴의 적분으로 바꿀 수 있다. 소문항 (ii)에서는 새로운 것이 필요 없다. 점화식(recurrence)은 a와 b를 동시에 하나씩 줄이므로 차 $b-a=2m+1$이 고정되고, 따라서 n에서 $n+1$로 깔끔하게 넘어간다.

풀이

소문항 (i)

$a, b \geq 1$이라 하자. $u = \cos^a x$, $\mathrm{d}v = \cos bx\,\mathrm{d}x$로 두고 부분적분하면 $\mathrm{d}u = -a\cos^{a-1}x \sin x\,\mathrm{d}x$이고 $v = \frac{1}{b}\sin bx$이다($b \neq 0$이므로 문제없다).

$$\mathrm{I}(a,b) = \left[\frac{\cos^a x \sin bx}{b}\right]_0^{\pi/2} + \frac{a}{b}\int_0^{\pi/2} \cos^{a-1}x \sin x \sin bx\,\mathrm{d}x.$$

경계항(boundary term)은 양 끝에서 모두 0이 된다. $x=\frac{\pi}{2}$에서는 $\cos^a\frac{\pi}{2}=0$이기 때문이고(여기서 $a\geq 1$이 쓰인다), $x=0$에서는 $\sin 0=0$이기 때문이다.

> **생각해 보기** $\sin x \sin bx$를 어떻게 다시 x의 배수에 대한 코사인으로 바꿀 수 있을까?

$\mathrm{I}(a-1,b-1)$이 나타나기를 원하므로 $\cos(b-1)x$를 살펴보자.

$$\cos(b-1)x = \cos bx\cos x + \sin bx \sin x \quad\Longrightarrow\quad \sin x \sin bx = \cos(b-1)x - \cos x \cos bx.$$

이를 대입하면

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(a,b) &= \frac{a}{b}\int_0^{\pi/2} \cos^{a-1} x\,\cos(b-1)x\,\mathrm{d}x - \frac{a}{b}\int_0^{\pi/2}\cos^a x\,\cos bx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{a}{b}\,\mathrm{I}(a-1,b-1) - \frac{a}{b}\,\mathrm{I}(a,b).\end{aligned}$$

b를 곱하고 $\mathrm{I}(a,b)$ 항을 모으면 $(a+b)\,\mathrm{I}(a,b) = a\,\mathrm{I}(a-1,b-1)$이고, $a+b>0$이므로

$$\mathrm{I}(a,b) = \frac{a}{a+b}\,\mathrm{I}(a-1,b-1),$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

소문항 (ii)

좌변의 적분은 $\mathrm{I}(n,\,n+2m+1)$이다. 우변을

$$R(n,m) = (-1)^m\,\frac{2^n\,n!\,(2m)!\,(n+m)!}{m!\,(2n+2m+1)!}$$

로 나타내자. 음이 아닌 정수(non-negative integer) m을 하나 고정하고, 모든 $n\geq 0$에 대하여 $\mathrm{I}(n,n+2m+1) = R(n,m)$임을 n에 대한 수학적 귀납법(induction)으로 증명한다.

기저 단계(base case), $n=0$.

$$\mathrm{I}(0,2m+1) = \int_0^{\pi/2}\cos(2m+1)x\,\mathrm{d}x = \frac{\sin\left((2m+1)\frac{\pi}{2}\right)}{2m+1} = \frac{(-1)^m}{2m+1},$$

이는 $\sin\left(m\pi+\frac{\pi}{2}\right) = \cos m\pi = (-1)^m$이기 때문이다. 한편

$$R(0,m) = (-1)^m\,\frac{1\cdot 1\cdot(2m)!\,m!}{m!\,(2m+1)!} = \frac{(-1)^m}{2m+1}.$$

따라서 $n=0$일 때 결과가 성립한다.

귀납 단계(inductive step). 어떤 $k\geq 0$에 대하여 $\mathrm{I}(k,k+2m+1) = R(k,m)$이라 가정하자. 소문항 (i)을 $a=k+1$, $b=k+2m+2$에 적용한다. 둘 다 양의 정수이고, $a-1=k$, $b-1=k+2m+1$, $a+b=2k+2m+3$이다.

$$\mathrm{I}(k+1,\,k+2m+2) = \frac{k+1}{2k+2m+3}\,\mathrm{I}(k,\,k+2m+1) = \frac{k+1}{2k+2m+3}\,R(k,m).$$

$k+2m+2 = (k+1)+2m+1$이므로, 좌변은 같은 m에 대하여 $n=k+1$일 때의 적분과 정확히 같다는 점에 주목하자.

? **생각해 보기** 공식에 따르면 $R(k+1,m)/R(k,m)$은 얼마가 되어야 할까?

R에서 $n = k$를 $n = k+1$로 바꾸어도 인수 $(-1)^m(2m)!/m!$은 변하지 않으며,

$$\begin{aligned}\frac{R(k+1,m)}{R(k,m)} &= \frac{2^{k+1}}{2^k}\cdot\frac{(k+1)!}{k!}\cdot\frac{(k+m+1)!}{(k+m)!}\cdot\frac{(2k+2m+1)!}{(2k+2m+3)!}\\ &= \frac{2(k+1)(k+m+1)}{(2k+2m+3)(2k+2m+2)} = \frac{k+1}{2k+2m+3},\end{aligned}$$

이다. 여기서 $2k+2m+2 = 2(k+m+1)$을 이용하였다. 따라서

$$\mathrm{I}(k+1,\, k+2m+2) = \frac{k+1}{2k+2m+3}\,R(k,m) = R(k+1,m),$$

이고, 이것이 바로 $n = k+1$일 때의 명제이다.

결과가 $n = 0$일 때 성립하고, $n = k$일 때 성립하면 $n = k+1$일 때도 성립하므로, 수학적 귀납법에 의하여 모든 음이 아닌 정수 n에 대하여 성립한다. m은 임의로 택한 것이었으므로 모든 음이 아닌 정수 m에 대해서도 성립한다.

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,\cos(n+2m+1)x\,\mathrm{d}x = (-1)^m\,\frac{2^n\,n!\,(2m)!\,(n+m)!}{m!\,(2n+2m+1)!}.$$

검산

- $n = 1$, $m = 0$으로 두면 공식은 $\frac{2\cdot1\cdot1\cdot1}{1\cdot3!} = \frac{1}{3}$을 준다. 직접 계산하면 $\cos x\cos 2x = \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos x)$를 $[0, \frac{\pi}{2}]$에서 적분한 값은 $\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}+1\right) = \frac{1}{3}$이다.
- $n = 1$, $m = 1$로 두면 공식은 $-\frac{2\cdot2\cdot2}{5!} = -\frac{1}{15}$을 주고, $\int_0^{\pi/2}\cos x\cos 5x\,\mathrm{d}x$를 수치적으로 계산하면 -0.066667이 나온다.
- (i)의 점화식과 (ii)의 닫힌 형태(closed form)는 $n \le 6$, $m \le 5$인 모든 경우에 대하여 컴퓨터로도 확인하였다.

흔한 실수

- 경계항이 왜 0이 되는지 밝히지 않는 것. 위끝에서는 $a \ge 1$이 필요하다.
- n에 대하여 귀납법을 쓰면서 m을 바꾸어 버리는 것. 소문항 (i)은 a와 b를 함께 줄이므로 m은 고정된 채로 남는다.
- $\sin\left((2m+1)\frac{\pi}{2}\right)$의 부호 실수. 이 값은 $1, -1, 1, \ldots$으로 번갈아 나타나며, 이것이 $(-1)^m$을 준다.

STEP 너머

이와 같은 점화 적분 공식은 점화 관계의 적분판이라 할 수 있다. 그리고 닫힌 형태는 월리스 곱(Wallis's product)이나 베타 함수(Beta function) $\int_0^{\pi/2} \cos^p x \sin^q x \, \mathrm{d}x$와 같은 방식으로 계승(factorial)의 비로 이루어지는데, 이는 대학의 해석학이나 응용수학 방법론 강의 초반에 만나게 된다. 이런 정신의 문제를 더 보고 싶다면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제집)를 참고하라.

풀이

STEP III 2020, 문제 2

순수수학 • 쌍곡선 함수 곡선 그리기

> **STEP III 2020, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2020년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

핵심 아이디어

음함수 미분(implicit differentiation)을 하고, $\cosh^2 = 1 + \sinh^2$를 계속 사용하여 모든 것을 다시 쌍곡사인으로 바꾼다. 그러면 이계도함수(second derivative)에 대한 조건이 인수분해되고, 그 인수 중 하나가 바로 곡선 자신의 방정식이 된다. 직선 $x + y = a$에 대해서는 $y = a - x$를 대입하고 모든 것을 지수함수로 나타낸다. 실수인 교점이 존재하려면 판별식(discriminant)이 음이 아니어야 하고, 이로부터 $\cosh a$의 범위가 나온다.

풀이

소문항 (i)

$\sinh$는 $\mathbb{R}$ 위의 전단사(bijection)이므로, 각 x에 대하여 $\sinh y = 2k - \sinh x$를 만족하는 y가 정확히 하나 존재한다. 따라서 C는 모든 실수 x에서 정의된 함수 $y = \operatorname{arsinh}(2k - \sinh x)$의 그래프이고, 음함수 미분을 할 수 있다.

$$\cosh x + \cosh y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\cosh x}{\cosh y}.$$

$\cosh x \geq 1$이므로 기울기(gradient)는 결코 0이 되지 않는다(항상 음수이다). 따라서 C는 정상점(stationary point)을 갖지 않는다.

$y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$로 쓰고 한 번 더 미분하면

$$\sinh x + \sinh y \, (y')^2 + \cosh y \, y'' = 0.$$

$y' = -\cosh x / \cosh y$를 대입하고 양변에 $\cosh^2 y$를 곱하면

$$\begin{aligned}\cosh^3 y\, y'' &= -\left(\sinh x \cosh^2 y + \sinh y \cosh^2 x\right)\\ &= -\left(\sinh x\,(1+\sinh^2 y) + \sinh y\,(1+\sinh^2 x)\right)\\ &= -(\sinh x + \sinh y) - \sinh x \sinh y\,(\sinh y + \sinh x)\\ &= -(\sinh x + \sinh y)(1 + \sinh x \sinh y).\end{aligned}$$

C 위에서 첫 번째 인수는 $2k$이므로

$$y'' = -\frac{2k\,(1+\sinh x \sinh y)}{\cosh^3 y}.$$

$k > 0$이고 $\cosh y > 0$이므로, $y'' = 0$일 필요충분조건은 $1 + \sinh x \sinh y = 0$이다. 이것이 증명하려던 것이다.

? 생각해 보기 $y'' = 0$이기만 하면 변곡점(point of inflection)이라고 할 수 있는가?

그렇지 않다. y''의 부호가 바뀌는 것도 확인해야 한다. $s = \sinh x$, $t = \sinh y$로 놓자. $y'' = 0$인 점에서는 $s + t = 2k$이고 $st = -1$이므로, s와 t는 $u^2 - 2ku - 1 = 0$의 두 근이다.

$$u = k \pm \sqrt{k^2+1}.$$

두 근 중 하나는 양수이고 하나는 음수이며, s는 둘 중 어느 값이든 될 수 있고 t는 나머지 값이 된다. 곡선을 따라가면 $1 + st = 1 + s(2k - s) = -(s^2 - 2ks - 1)$는 s에 대한 이차식이고 서로 다른 두 단순근을 가지므로, 각 근에서 부호가 바뀐다. $s = \sinh x$는 x에 대하여 증가하므로, 두 점 모두에서 y''의 부호가 실제로 바뀐다. 따라서 변곡점은

$$\left(\operatorname{arsinh}\left(k+\sqrt{k^2+1}\right),\ \operatorname{arsinh}\left(k-\sqrt{k^2+1}\right)\right) \quad \text{와}$$
$$\left(\operatorname{arsinh}\left(k-\sqrt{k^2+1}\right),\ \operatorname{arsinh}\left(k+\sqrt{k^2+1}\right)\right)$$

이다. 두 점은 직선 $y = x$에 대하여 서로 대칭인데, C의 방정식이 x와 y에 대하여 대칭이므로 이는 예상한 대로이다.

소문항 (ii)

직선 위에서는 $y = a - x$이다. $2\sinh u = \mathrm{e}^u - \mathrm{e}^{-u}$로 쓰면, C의 방정식의 양변을 두 배 한 식은 다음과 같이 된다.

$$\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{a-x} - \mathrm{e}^{x-a} = 4k.$$

양변에 e^x를 곱하면 $\mathrm{e}^{2x} - 1 + \mathrm{e}^a - \mathrm{e}^{2x-a} = 4k\mathrm{e}^x$, 즉

$$\mathrm{e}^{2x}(1 - \mathrm{e}^{-a}) - 4k\mathrm{e}^x + (\mathrm{e}^a - 1) = 0$$

이고, 이것이 구하려던 방정식이다.

생각해 보기 이러한 점이 존재한다는 사실은 이 방정식에 대해 무엇을 알려 주는가?

이 식은 $X = \mathrm{e}^x$에 대한 이차방정식이고(최고차항의 계수가 0이 아닌 경우), 실근을 가져야 한다.

먼저 $a \neq 0$이다. $a = 0$이면 방정식이 $-4k\mathrm{e}^x = 0$으로 줄어드는데, $k > 0$이므로 이는 불가능하다. 따라서 $\cosh a > 1$이다.

$a \neq 0$이면 최고차항의 계수 $1 - \mathrm{e}^{-a}$가 0이 아니므로, 이 이차방정식이 실근을 가지려면 판별식이 음이 아니어야 한다.

$$16k^2 - 4(1 - \mathrm{e}^{-a})(\mathrm{e}^a - 1) \geq 0.$$

그런데 $(1 - \mathrm{e}^{-a})(\mathrm{e}^a - 1) = \mathrm{e}^a - 2 + \mathrm{e}^{-a} = 2\cosh a - 2$이므로, 조건은 $16k^2 \geq 8(\cosh a - 1)$, 즉 $\cosh a \leq 2k^2 + 1$이다. 둘을 합치면

$$1 < \cosh a \leq 2k^2 + 1.$$

따라서 C 위의 모든 점에서 $x + y$는 $-2\operatorname{arsinh} k$와 $2\operatorname{arsinh} k$ 사이에 있고($\cosh(2\operatorname{arsinh} k) = 1 + 2\sinh^2(\operatorname{arsinh} k) = 1 + 2k^2$이기 때문이다), $x + y \neq 0$이다.

사실 C 위에서는 $x + y > 0$이다. $a < 0$이면 $1 - \mathrm{e}^{-a} < 0$이고 $\mathrm{e}^a - 1 < 0$이므로, 이차방정식의 세 계수가 모두 음수가 되어 양의 근 X를 갖지 않는다. (같은 내용을 다르게 말하면, $\sinh x + \sinh y = 2\sinh\frac{x+y}{2}\cosh\frac{x-y}{2}$이고 이 값의 부호는 $x + y$의 부호와 같다.) 최댓값 $x + y = 2\operatorname{arsinh} k$는 $x = y = \operatorname{arsinh} k$에서 나타나며, 이 점에서 판별식이 0이 되어 직선이 C에 접한다.

소문항 (iii)

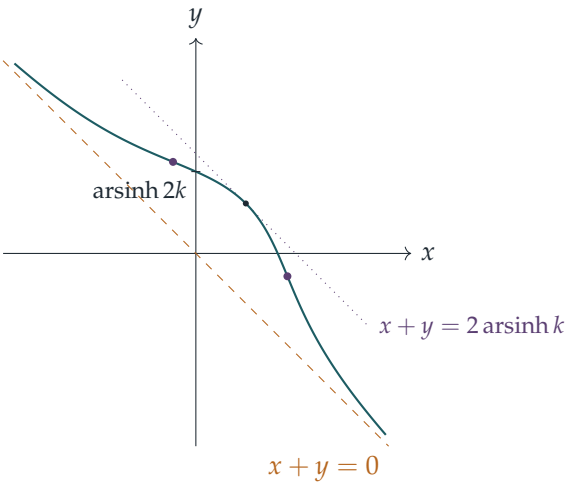
지금까지 알아낸 것을 정리하면 다음과 같다.

- C는 직선 $y = x$에 대하여 대칭이고, 이 직선과는 $(\operatorname{arsinh} k, \operatorname{arsinh} k)$에서만 만나며, 그 점에서 기울기는 -1이다.
- y는 모든 x에 대하여 정의되고 기울기는 항상 음수이다. 곡선은 좌표축과 $(\operatorname{arsinh} 2k, 0)$, $(0, \operatorname{arsinh} 2k)$에서 만난다.
- $0 < x + y \leq 2\operatorname{arsinh} k$이므로, C는 직선 $x + y = 0$보다 위쪽이면서 직선 $x + y = 2\operatorname{arsinh} k$ 위 또는 그 아래쪽인 띠 모양의 영역에 놓이며, 이 직선은 $y = x$ 위에 있는 C의 점에서 C에 접한다.
- $x \to +\infty$일 때 $\sinh y = 2k - \sinh x \to -\infty$이고 $\mathrm{e}^{-y} \approx \mathrm{e}^x - 4k$이므로, $x + y \approx -\ln(1 - 4k\mathrm{e}^{-x}) \approx 4k\mathrm{e}^{-x} \to 0^+$이다. 대칭성에 의해 $x \to -\infty$일 때도 마찬가지이다.

따라서 $x+y=0$은 양쪽 끝에서의 점근선(asymptote)이며, 곡선은 위쪽에서 점근선에 다가간다.

- y''의 식에 의해, 곡선은 $1+\sinh x \sinh y > 0$인 두 변곡점 사이(예를 들어 $y=x$ 위의 점)에서 오목(concave, 접선보다 아래에 놓임)하고, 그 바깥에서는 볼록(convex)하다.

아래 그림은 $k=1$인 경우를 나타낸 것이며, 변곡점이 표시되어 있다.



검산

- $k=1$일 때 변곡점은 $\left(\operatorname{arsinh}(1+\sqrt{2}), \operatorname{arsinh}(1-\sqrt{2})\right) \approx (1.615, -0.403)$와 그 대칭점이다. 이 점의 양쪽에서 $y=\operatorname{arsinh}(2-\sinh x)$의 이계차분을 계산해 보면 y''의 부호가 그곳에서 바뀜을 확인할 수 있고, $-8 \le x \le 8$ 범위를 조사해 보아도 y''의 다른 영점은 없다.
- 식 $y'' = -2k(1+\sinh x \sinh y)/\cosh^3 y$는 여러 k값에 대하여 임의로 고른 많은 점에서 수치적으로 구한 이계도함수와 일치한다.
- $k=1, x=6$일 때 $x+y \approx 0.00996$으로, 예측값 $4\mathrm{e}^{-6} \approx 0.00992$에 가깝다. 앞에서 말한 대로 곡선은 위쪽에서 점근선에 다가간다.
- $x=y=\operatorname{arsinh} k$에서 $\cosh(x+y) = 1+2\sinh^2 x = 1+2k^2$이므로, (ii)의 상한이 실제로 달성된다.

흔한 실수

- $y'' = 0$에서 멈추고 y''의 부호가 바뀌는지 확인하지 않는 것. 이 문제에서는 부호가 바뀌지만, 그 사실을 밝혀야 한다.
- $a = 0$인 경우를 배제하는 것을 잊는 것. 이 단계 덕분에 왼쪽 부등식에 등호가 빠진다.
- 변곡점을 하나만 적는 것. $u^2 - 2ku - 1 = 0$의 어느 근이든 $\sinh x$가 될 수 있으므로, $y = x$에 대하여 대칭인 두 점이 나온다.

STEP 너머

회전된 좌표 $u = x + y$, $v = x - y$를 쓰면 이 곡선의 모양이 한눈에 드러난다. 항등식 $\sinh x + \sinh y = 2\sinh\frac{u}{2}\cosh\frac{v}{2}$에 의해 C는 $\sinh\frac{u}{2} = k\,\mathrm{sech}\frac{v}{2}$가 되는데, 이는 점근선 $u = 0$ 위로 솟은 하나의 봉우리 모양이다. 대칭성에 맞춘 좌표를 고르는 것은 대학 1학년 미적분학과 선형대수학 전반에 걸쳐 나타나는 주제이다(이차형식(quadratic form)을 대각화(diagonalising)하는 것도 같은 생각이다). 음함수 곡선, 그리고 방정식 $F(x, y) = 0$이 언제 실제로 y를 x의 매끄러운 함수로 정의하는가 하는 문제는 음함수 정리(implicit function theorem)가 다루는 주제이다. Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)는 그 바탕에 있는 일변수 해석학을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP III 2020, 문제 3

순수수학 • 기하에서의 복소수

STEP III 2020, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2020년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

핵심 아이디어

복소평면(complex plane)에서 a를 중심으로 각 θ만큼 회전(rotation)하는 변환은 단순히 $z \mapsto a + (z-a)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$이므로, G_{AB}는 a와 b의 명시적인 일차결합(linear combination)이 된다. 소문항 (i)에서 이 공식을 얻고 나면 기하 문제가 대수 문제로 바뀐다. 평행사변형(parallelogram)은 꼭짓점에 대한 일차 조건이 되고, 정삼각형(equilateral triangle)은 한 변이 다른 변을 일정한 각만큼 돌린 것이라는 조건이 된다. 문제 전체가 ω의 거듭제곱에 관한 몇 가지 사실에 기대고 있다.

풀이

이 풀이 전체에서 $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$이므로 $\omega^* = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}$이고, 다음과 같이 쓴다.

$$\rho = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

앞으로 사용할 세 가지 사실은 다음과 같다.

$$\omega^2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}, \qquad \omega^3 = \mathrm{i}, \qquad \omega - \omega^* = 2\mathrm{i}\sin\tfrac{\pi}{6} = \mathrm{i}.$$

소문항 (i)

시계 방향으로 $\frac{1}{3}\pi$만큼 회전하는 것은 ρ를 곱하는 것이다. A를 중심으로 회전한다는 것은 변위 $b-a$를 회전시킨 뒤 다시 a에 더한다는 뜻이므로

$$k = a + (b-a)\rho.$$

따라서 ABK의 무게중심(centroid)은

$$g_{ab} = \tfrac{1}{3}(a+b+k) = \tfrac{1}{3}\left[(2-\rho)\,a + (1+\rho)\,b\right].$$

이제 두 계수를 정리한다.

$$2-\rho = \tfrac{3}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} = \sqrt{3}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = \sqrt{3}\,\omega,$$
$$1+\rho = \tfrac{3}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} = \sqrt{3}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = \sqrt{3}\,\omega^*.$$

그러므로

$$g_{ab} = \tfrac{1}{3}\left(\sqrt{3}\,\omega a + \sqrt{3}\,\omega^* b\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\omega a + \omega^* b\right),$$

이 되어 요구한 결과를 얻는다.

소문항 (ii)

사각형(quadrilateral) $PQRS$(꼭짓점은 이 순서대로)가 평행사변형일 필요충분조건은 $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$, 즉 $q-p = r-s$이고, 이는 다음과 동치이다.

$$p - q + r - s = 0.$$

(이는 대각선(diagonal) PR와 QS의 중점(midpoint)이 같다는 말과 같다.) 따라서 Q_1이 평행사변형일 필요충분조건은 $a-b+c-d=0$이고, Q_2가 평행사변형일 필요충분조건은

$$g_{ab} - g_{bc} + g_{cd} - g_{da} = 0.$$

네 점 각각에 소문항 (i)을 적용하면

$$\begin{aligned}\sqrt{3}\left(g_{ab} - g_{bc} + g_{cd} - g_{da}\right) &= \left(\omega a + \omega^* b\right) - \left(\omega b + \omega^* c\right) + \left(\omega c + \omega^* d\right) - \left(\omega d + \omega^* a\right)\\ &= \left(\omega - \omega^*\right)a - \left(\omega - \omega^*\right)b + \left(\omega - \omega^*\right)c - \left(\omega - \omega^*\right)d\\ &= \mathrm{i}\,(a - b + c - d).\end{aligned}$$

따라서

$$g_{ab} - g_{bc} + g_{cd} - g_{da} = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\,(a - b + c - d),$$

이고 $\mathrm{i}/\sqrt{3} \neq 0$이므로 한쪽 변이 0이 될 필요충분조건은 다른 쪽 변이 0이 되는 것이다. 그러므로 Q_1이 평행사변형일 필요충분조건은 Q_2가 평행사변형인 것이다.

> **생각해 보기** Q_2가 평행사변형 조건을 만족하면서도 두 꼭짓점이 일치하여 찌그러질 수 있을까?

그렇다. 한 가지 특수한 경우가 있다. ABC가 시계 방향으로 이름 붙인 정삼각형이면, B를 A 중심으로 시계 방향으로 회전한 점은 C가 되므로 G_{AB}와 G_{BC}는 모두 ABC의 무게중심이다. 마름모(rhombus) $ABCD$를 완성하면 Q_2는 선분으로 납작해진다. 이때에도 조건 $p-q+r-s=0$은 여전히 성립하므로, 이 동치 관계는 사실 이 벡터 조건에 관한 명제이며, 이런 문제에서 "평행사변형"이 뜻하는 바도 바로 이것이다.

소문항 (iii)

T_2의 한 변을 벡터로 보면 다른 변을 일정한 각만큼 돌린 것임을 보인다. 소문항 (i)로부터

$$\sqrt{3}\,(g_{bc} - g_{ab}) = (\omega b + \omega^* c) - (\omega a + \omega^* b) = -\omega a + \mathrm{i}\, b + \omega^* c,$$
$$\sqrt{3}\,(g_{ca} - g_{bc}) = (\omega c + \omega^* a) - (\omega b + \omega^* c) = \omega^* a - \omega b + \mathrm{i}\, c,$$

이며, 각 줄에서 $\omega - \omega^* = \mathrm{i}$를 사용하였다.

? **생각해 보기** 어떤 수 λ를 곱하면 두 번째 괄호가 첫 번째 괄호로 바뀔까?

a의 계수를 맞추면 $\lambda\omega^* = -\omega$여야 하므로 $\lambda = -\omega/\omega^* = -\omega^2 = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3} = \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}/3}$이다. 이 λ는 b와 c에 대해서도 성립한다.

$$\lambda \cdot (-\omega) = \omega^3 = \mathrm{i},$$
$$\lambda \cdot \mathrm{i} = -\omega^2 \cdot \omega^3 = -\omega^5 = -\mathrm{e}^{5\pi\mathrm{i}/6} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6} = \omega^*.$$

그러므로 모든 a, b, c에 대하여

$$g_{bc} - g_{ab} = \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}/3}\,(g_{ca} - g_{bc}).$$

$\left|\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}/3}\right| = 1$이므로 절댓값(modulus)을 취하면 $G_{AB}G_{BC} = G_{BC}G_{CA}$이다. 또한 T_2를 따라 이동하는 방향이 G_{BC}에서 $\frac{2}{3}\pi$만큼 꺾이므로, G_{BC}에서 T_2의 내각(interior angle)은 $\pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{1}{3}\pi$이다. 길이가 같은 두 변이 $\frac{1}{3}\pi$의 각을 끼고 있는 삼각형은 밑각이 $\frac{1}{2}(\pi - \frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{3}\pi$인 이등변삼각형(isosceles triangle)이므로 모든 각이 $\frac{1}{3}\pi$이고, 따라서 T_2는 정삼각형이다.

유일한 예외는 $g_{ca} = g_{bc}$인 경우인데, 이때 위의 관계식에서 $g_{ab} = g_{bc}$도 성립하므로 T_2는 한 점으로 줄어든다. $\omega^* a - \omega b + \mathrm{i}c = 0$에 ω를 곱하면 $a - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}b + \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}c = 0$을 얻는데, 이는 정확히 ABC 자신이 시계 방향으로 이름 붙인 정삼각형일 때 일어난다(소문항 (ii)의 설명에서와 같다). 퇴화된(degenerate) 삼각형을 포함하여 그 밖의 모든 삼각형 T_1은 진짜 정삼각형 T_2를 만든다.

검산

- $a = 0, b = 1$로 두자. 그러면 $k = \rho$이고, $0, 1, \rho$의 무게중심은 $\frac{1}{3}(1 + \rho) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\mathrm{i}$이다. 공식은 $\omega^*/\sqrt{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\mathrm{i}$를 주는데, 이는 같은 수이다.
- $a = 0, b = 1, c = \mathrm{i}$(직각삼각형)일 때, T_2의 세 점 사이의 거리는 모두 약 1.1154로 같다. 무작위로 만든 삼각형과 사각형 10^4개에 대해 컴퓨터로 확인한 결과, 소문항 (ii)와 (iii)의 항등식이 반올림 오차 범위 안에서 성립하였다.

흔한 실수

- b를 A가 아니라 원점을 중심으로 회전시켜 $k = b\rho$로 쓰는 것.
- 시계 방향 회전에 $e^{+i\pi/3}$을 사용하는 것. 시계 방향은 음의 방향이다.
- 소문항 (ii)에서 한쪽 방향만 증명하는 것. 인수 $i/\sqrt{3}$이 0이 아니라는 사실이 바로 "필요충분조건"을 보장한다.

STEP 너머

소문항 (iii)은 나폴레옹의 정리(Napoleon's theorem)이다. 임의의 삼각형의 각 변 위에 정삼각형을 세우면(여기서는 ABC를 반시계 방향으로 이름 붙였을 때 바깥쪽으로), 그 정삼각형들의 무게중심은 정삼각형을 이룬다. 복소수를 이용한 증명이 통하는 까닭은 회전과 무게중심이 모두 평면의 선형사상(linear map)이기 때문이다. 이것이 기하학에서 변환군(transformation group)을 연구하는 출발점이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 복소수 곱셈에 대한 이러한 기하학적 관점을 아름답게 다룬다.

풀이

STEP III 2020, 문제 4

순수수학 • 대칭 행렬과 회전 행렬

STEP III 2020, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2020년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

핵심 아이디어

첫 번째 결과에 사실상 문제 전체가 담겨 있다. $(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$을 빼면 점이 평면으로 곧장 내려가므로, 그 양의 두 배를 빼면 점은 평면 반대쪽으로 같은 거리만큼 더 나아간다. 이것이 바로 반사(reflection)이다. 반사를 $\mathbf{x}\mapsto\mathbf{x}-2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$으로 나타내고 나면, 그 행렬과 $\mathbf{n}$을 축으로 하는 반바퀴 회전(half-turn), 그리고 둘의 곱은 계산을 거의 하지 않고도 모두 얻을 수 있다.

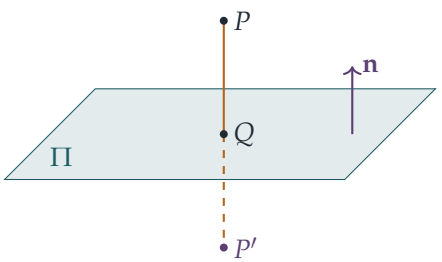
풀이

첫 번째 결과

$\mathbf{q}=\mathbf{x}-(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$이라 하자. $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}=1$이므로

$$\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}-(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})=0,$$

이고, 따라서 Q는 Π 위에 있다. 또한 $\overrightarrow{PQ}=\mathbf{q}-\mathbf{x}=-(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$이며, 이는 법선벡터(normal) $\mathbf{n}$의 실수배이다. P가 Π 위에 있지 않으므로($\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}\neq 0$이므로) 이 벡터는 영벡터가 아니다. 따라서 PQ는 Π에 수직이고, 증명이 끝난다.



그림은 우리가 나아갈 방향도 보여 준다. Π에 대한 P의 거울상 P'은 P가 Q 위에 있는 만큼 Q 너머에 있으므로, 그 위치벡터(position vector)는

$$\mathbf{x} - 2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}.$$

이다. (P가 Π 위에 있으면 이 식은 P 자신을 주는데, 이 역시 옳다.)

소문항 (i)

$\mathbf{n} = (a, b, c)^{\mathsf{T}}$로 잡자. $a^2 + b^2 + c^2 = 1$이므로 이것은 단위 법선벡터(unit normal)이다. $\mathbf{i}$에 대해서는 $\mathbf{i}\cdot\mathbf{n} = a$이므로

$$T(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - 2a\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-2a^2\\-2ab\\-2ac\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b^2+c^2-a^2\\-2ab\\-2ac\end{pmatrix},$$

이다. 여기서 첫 번째 성분에 $1 = a^2 + b^2 + c^2$을 사용하였다. 이것이 구하는 상이다. 같은 방법으로 $\mathbf{j}\cdot\mathbf{n} = b$, $\mathbf{k}\cdot\mathbf{n} = c$를 이용하면

$$T(\mathbf{j}) = \begin{pmatrix}-2ab\\a^2+c^2-b^2\\-2bc\end{pmatrix}, \qquad T(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix}-2ac\\-2bc\\a^2+b^2-c^2\end{pmatrix}.$$

이다. $\mathbf{M}$의 열은 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$의 상이므로

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix}b^2+c^2-a^2 & -2ab & -2ac\\-2ab & a^2+c^2-b^2 & -2bc\\-2ac & -2bc & a^2+b^2-c^2\end{pmatrix} = \mathbf{I} - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathsf{T}}.$$

이다.

소문항 (ii)

주어진 행렬을 $\mathbf{M}$과 비교한다. 각 대각성분을 $1-2a^2, 1-2b^2, 1-2c^2$으로 쓰면

$$1-2a^2 = 0.64, \quad 1-2b^2 = 0.36, \quad 1-2c^2 = 0 \implies a^2 = 0.18, \quad b^2 = 0.32, \quad c^2 = 0.5.$$

이다. 따라서 $|a| = \frac{3}{5\sqrt{2}}$, $|b| = \frac{4}{5\sqrt{2}}$, $|c| = \frac{5}{5\sqrt{2}}$이다.

? **생각해 보기** 대각성분으로부터는 a^2, b^2, c^2만 알 수 있다. 부호는 어떻게 정할까?

비대각성분으로부터 곱을 얻는다.

$$-2ab = 0.48, \quad -2ac = 0.6, \quad -2bc = -0.8 \implies ab = -0.24, \quad ac = -0.3, \quad bc = 0.4.$$

따라서 b와 c는 부호가 같고, a는 부호가 반대이다. (a, b, c)를 $(-a, -b, -c)$로 바꾸어도 달라지는 것이 없으므로(같은 평면이다) $c > 0$으로 잡을 수 있고, 그러면

$$(a, b, c) = \tfrac{1}{5\sqrt{2}}(-3, 4, 5).$$

이다. 이 값들로부터 $ab = -\frac{12}{50}$, $ac = -\frac{15}{50}$, $bc = \frac{20}{50}$을 얻으므로 서로 독립인 여섯 성분이 모두 일치한다. 양변에 $-5\sqrt{2}$를 곱하면 평면은

$$3x - 4y - 5z = 0.$$

이다.

소문항 (iii)

임의의 벡터를 $\mathbf{x} = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} + \big(\mathbf{x} - (\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}\big)$로, 즉 축 방향 성분과 축에 수직인 성분의 합으로 분해한다(첫 번째 결과). 축을 중심으로 하는 각 π의 회전(rotation)은 첫 번째 성분은 그대로 두고 두 번째 성분의 방향은 뒤집으므로

$$\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} - \big(\mathbf{x} - (\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}\big) = 2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{x}.$$

이다. 이것은 정확히 $-T(\mathbf{x})$이다. 따라서 $\mathbf{N} = 2\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathsf{T}} - \mathbf{I} = -\mathbf{M}$, 즉

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 - c^2 & 2ab & 2ac \\ 2ab & b^2 - a^2 - c^2 & 2bc \\ 2ac & 2bc & c^2 - a^2 - b^2 \end{pmatrix}.$$

이다.

소문항 (iv)

생각해 보기 여기서 a, b, c로 이루어진 3×3 행렬 두 개를 직접 곱해야 할까?

그렇지 않다. (iii)에 의해 $\mathbf{NM} = -\mathbf{M}^2$이다. 같은 평면에 대해 두 번 반사하면 모든 점이 제자리로 돌아오므로 $\mathbf{M}^2 = \mathbf{I}$이다. (대수적으로는 $\mathbf{n}^{\mathsf{T}}\mathbf{n} = 1$이므로 $(\mathbf{I} - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathsf{T}})^2 = \mathbf{I} - 4\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathsf{T}} + 4\mathbf{n}(\mathbf{n}^{\mathsf{T}}\mathbf{n})\mathbf{n}^{\mathsf{T}} = \mathbf{I}$이다.) 따라서

$$\mathbf{NM} = -\mathbf{I},$$

이고, 이 변환은 모든 $\mathbf{x}$를 $-\mathbf{x}$로 보낸다. 이것은 원점에 대한 대칭이며, 중심 반전(central inversion) 또는 원점을 중심으로 하는 배율 -1의 확대(enlargement)라고도 한다. 이 결과가 a, b, c에 전혀 의존하지 않는다는 점에 주목하자.

검산

- $\mathbf{M}$의 각 열은 단위벡터여야 한다. 첫 번째 열의 경우 $(b^2+c^2-a^2)^2+4a^2b^2+4a^2c^2=(b^2+c^2+a^2)^2=1$이다.
- (ii)에서 법선벡터 $(3,-4,-5)$는 그 음의 벡터로 옮겨져야 한다. 주어진 행렬은 이를 $(1.92-1.92-3,\ 1.44-1.44+4,\ 1.8+3.2)=(-3,4,5)$로 보낸다. 맞다.
- $\mathbf{n}=\mathbf{k}$로 잡으면 $\mathbf{M}=\mathrm{diag}(1,1,-1)$로 $z=0$에 대한 반사가 되고, $\mathbf{N}=\mathrm{diag}(-1,-1,1)$로 z축을 중심으로 하는 반바퀴 회전이 된다. 둘의 곱은 분명히 $-\mathbf{I}$이다.
- 무작위 단위벡터 $\mathbf{n}$ 1000개로 컴퓨터 검산을 하여 $\mathbf{M}$의 식, $\mathbf{N}$이 $\mathbf{n}$을 고정하고 수직인 벡터의 방향을 뒤집는다는 것, 그리고 $\mathbf{NM}=-\mathbf{I}$임을 확인하였다. (ii)의 행렬도 10^{-15} 이내의 오차로 재현되었다.

흔한 실수

- $\mathbf{x}-(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$을 반사로 사용하는 것. 이것은 수선의 발(foot of the perpendicular)이므로 인수 2가 빠져 있다.
- (ii)에서 제곱근으로부터 a,b,c의 부호를 각각 독립적으로 고르는 것. 상대적인 부호는 비대각성분으로만 정해진다.
- $\mathbf{NM}$이 "항등변환"이라고 말하는 것. 반사의 행렬식(determinant)은 -1이고 회전의 행렬식은 $+1$이므로 곱의 행렬식은 -1이다. 3차원에서 $\det(-\mathbf{I})=-1$이므로 이와 모순이 없다.

STEP 너머

행렬 $\mathbf{I}-2\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathsf{T}}$를 하우스홀더 반사(*Householder reflection*)라고 한다. 수치선형대수(numerical linear algebra)에서는 행렬을 삼각행렬(triangular form)로 바꾸는 데 이것을 끊임없이 사용하며, n차원의 모든 직교행렬(orthogonal matrix)은 이러한 반사를 많아야 n개 곱한 것이다. 소문항 (iv)는 이 구조의 작은 예이다. $\mathbb{R}^3$에서 반바퀴 회전과 그에 수직인 평면에 대한 반사를 합성하면 $-\mathbf{I}$가 된다. 직교행렬, 정사영(projection), 반사에 대해서는 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수 입문)를 보라.

풀이

STEP III 2020, 문제 5

순수수학 • 부분분수

STEP III 2020, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2020년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

핵심 아이디어

첫 번째 항등식은 모습을 바꾼 유한 등비급수(finite geometric series)이며, 바로 이것이 $(1-(x/k)^n)/(x-k)$를 명시적인 다항식(polynomial)으로 바꾸어 준다. 그 덕분에 계수를 번거롭게 비교하지 않고도 $1/\left(x^n(x-k)\right)$의 완전한 부분분수 분해(partial-fraction decomposition)를 얻는다. 이어서 미분하면 **중복** 인수 $(x-k)^2$를 갖는 분해가 나오고, 마지막 적분은 모든 항을 바로 적분할 수 있는 특수한 경우일 뿐이다.

풀이

첫 번째 항등식

우변을 전개하여 두 합으로 나눈다:

$$\begin{aligned}(x-y)\sum_{r=1}^{n} x^{n-r}y^{r-1} &= \sum_{r=1}^{n} x^{n-r+1}y^{r-1} - \sum_{r=1}^{n} x^{n-r}y^{r} \\ &= \left(x^n + x^{n-1}y + \cdots + xy^{n-1}\right) - \left(x^{n-1}y + \cdots + xy^{n-1} + y^n\right) \\ &= x^n - y^n,\end{aligned}$$

왜냐하면 x^n(첫 번째 합의 $r=1$ 항)과 y^n(두 번째 합의 $r=n$ 항)을 제외한 모든 항이 각 괄호에 한 번씩 나타나 소거되기 때문이다.

소문항 (i)(a)

$\mathrm{F}(x) = \dfrac{A}{x-k} + \dfrac{\mathrm{f}(x)}{x^n}$의 양변에 $x^n(x-k)$를 곱하면

$$1 = Ax^n + \mathrm{f}(x)(x-k).$$

이것은 다항식 사이의 항등식으로, $x \neq 0, k$일 때 항상 성립하므로 모든 x에 대해 성립한다 (무한히 많은 점에서 값이 같은 두 다항식은 같다). $x = k$를 대입하면 $1 = Ak^n$이므로 $A = 1/k^n$이다($k \neq 0$이므로 가능하다). 그러면

$$\mathrm{f}(x)(x-k) = 1 - \frac{x^n}{k^n}, \qquad \text{따라서} \qquad \mathrm{f}(x) = \frac{1}{x-k}\left(1 - \left(\frac{x}{k}\right)^n\right)$$

이 $x \neq k$에서 성립하며, 이것이 요구된 결과이다.

? **생각해 보기** 분모에 $x-k$가 없는 꼴로 어떻게 바꿀 수 있을까?

첫 번째 항등식에서 x 대신 1을, y 대신 x/k를 넣는다:

$$1 - \left(\frac{x}{k}\right)^n = \left(1 - \frac{x}{k}\right)\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{x}{k}\right)^{r-1} = -\frac{x-k}{k}\sum_{r=1}^{n}\frac{x^{r-1}}{k^{r-1}}.$$

$x-k$로 나누면

$$\mathrm{f}(x) = -\frac{1}{k}\sum_{r=1}^{n}\frac{x^{r-1}}{k^{r-1}}, \qquad \text{따라서} \qquad \frac{\mathrm{f}(x)}{x^n} = -\frac{1}{k}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{k^{r-1}x^{n+1-r}}.$$

(이로써 f가 실제로 다항식임도 확인된다.) 이제 $s = n+1-r$로 첨자를 바꾼다(re-index). r가 $1, \ldots, n$을 지나는 동안 이 값도 같은 범위를 지난다. 그러면 $r-1 = n-s$이고, 합은 $\sum_{s=1}^{n} 1/(k^{n-s}x^s)$가 된다. 따라서

$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{k^n(x-k)} - \frac{1}{k}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{k^{n-r}x^r}.$$

소문항 (i)(b)

$x^n\mathrm{F}(x) = \dfrac{1}{x-k}$이므로, 곱의 미분법(product rule)으로 양변을 미분하면

$$nx^{n-1}\mathrm{F}(x) + x^n\mathrm{F}'(x) = -\frac{1}{(x-k)^2}.$$

$-x^n$으로 나누면($x \neq 0$이므로 문제없다)

$$\frac{1}{x^n(x-k)^2} = -\frac{n}{x}\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}'(x).$$

(a)의 결과로부터

$$-\frac{n}{x}\mathrm{F}(x) = -\frac{n}{xk^n(x-k)} + \sum_{r=1}^{n}\frac{n}{k^{n+1-r}x^{r+1}},$$

이고, (a)의 결과를 항별로 미분하면

$$-\mathrm{F}'(x) = \frac{1}{k^n(x-k)^2} - \frac{1}{k}\sum_{r=1}^{n}\frac{r}{k^{n-r}x^{r+1}} = \frac{1}{k^n(x-k)^2} - \sum_{r=1}^{n}\frac{r}{k^{n+1-r}x^{r+1}}.$$

두 식을 더하면 두 합이 하나로 합쳐져

$$\frac{1}{x^n(x-k)^2} = \frac{1}{k^n(x-k)^2} - \frac{n}{xk^n(x-k)} + \sum_{r=1}^{n} \frac{n-r}{k^{n+1-r}x^{r+1}},$$

이 되고, 이것이 요구된 결과이다.

소문항 (ii)

(b)에서 $n=3, k=1$로 두자. 합의 $r=3$ 항은 0이 되고,

$$\frac{1}{x^3(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{3}{x(x-1)} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}.$$

가운데 항은 한 번 더 나누어야 한다: $\dfrac{1}{x(x-1)} = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x}$. $[2, N]$에서는 모든 것이 연속이고 $x-1>0$이므로, 그 구간에서의 원시함수(antiderivative)는

$$G(x) = -\frac{1}{x-1} - 3\ln\left(\frac{x-1}{x}\right) - \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2},$$

이고

$$\int_2^N \frac{1}{x^3(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = G(N) - G(2).$$

생각해 보기 왜 두 로그를 함께 묶어 두어야 할까?

따로 떼어 놓으면 $-3\ln(N-1)$과 $+3\ln N$은 각각 무한대로 발산하므로 항별로 극한을 취할 수 없다. 함께 묶으면 ln이 1에서 연속이므로 $N\to\infty$일 때 $\ln\big((N-1)/N\big) = \ln\big(1-\frac{1}{N}\big) \to \ln 1 = 0$이다. $G(N)$의 나머지 세 항은 분명히 0으로 수렴하므로 $G(N)\to 0$이다.

마지막으로

$$G(2) = -1 - 3\ln\tfrac{1}{2} - 1 - \tfrac{1}{8} = 3\ln 2 - \tfrac{17}{8},$$

이므로

$$\lim_{N\to\infty}\int_2^N \frac{1}{x^3(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{17}{8} - 3\ln 2.$$

검산

- 피적분함수가 양수이므로 답도 양수여야 한다. 실제로 $\frac{17}{8} - 3\ln 2 \approx 2.1250 - 2.0794 = 0.0456$이다.
- 또한 값이 작아야 한다. 피적분함수는 $x=2$에서 $\frac{1}{8}$이고 대략 x^{-5}처럼 감소한다. 거칠게 $\frac{1}{8}(2/x)^5$로 위에서 누르면 기껏해야 $\int_2^\infty 4x^{-5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{16}$이다. 수치 적분으로 값 $0.045558\ldots$를 소수점 아래 여러 자리까지 확인할 수 있다.

- (b)에서 $n = 1$을 대입해 보자. 합은 0이 되고(유일한 항에서 $n - r = 0$이므로), 우변은 $\dfrac{1}{k(x-k)^2} - \dfrac{1}{xk(x-k)} = \dfrac{x-(x-k)}{xk(x-k)^2} = \dfrac{1}{x(x-k)^2}$로, 마땅히 나와야 할 결과와 같다.

흔한 실수

- $1 - x/k$를 $-(x-k)/k$로 쓸 때 부호를 틀린다.
- (a)에서 합의 첨자를 바꾸는 것을 잊어, k와 x의 거듭제곱이 목표 식과 맞지 않게 된다.
- $\ln\big((x-1)/x\big)$를 두 로그로 나눈 뒤 적분이 발산한다고 주장하거나, "$\infty - \infty = 0$"이라고 쓴다.

STEP 너머

여기서 만든 것은 x^n과 $(x-k)^m$ 꼴의 인수에 대한 일반적인 부분분수 분해이다. x에 대해(또는 근 k에 대해) 미분하는 것은 중복 인수 항을 만들어 내는 표준적인 방법이다. (ii)에서처럼 무한 구간에서의 적분이 수렴하는지 판단하는 것은 해석학 입문 과정에서 다루는 이상적분(improper integral)의 주제이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해하기)는 이러한 극한을 신중하게 다룬다.

풀이

STEP III 2020, 문제 6

순수수학 • 극곡선과 넓이

STEP III 2020, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2020년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

핵심 아이디어

세 소문항은 모두 같은 함수 $\cos\theta + \sqrt{\cos 2\theta}$를 바탕으로 한다. C_2의 방정식은 r에 대한 이차방정식(quadratic)이고, 그 두 근은 $\cos\theta \pm \sqrt{\cos 2\theta}$이다. 따라서 C_2는 C_1(큰 근)에 두 번째 안쪽 가지(branch)(작은 근)를 합친 것이며, 두 가지는 판별식(discriminant) $\cos 2\theta$가 0이 되는 곳에서 만난다. 이것을 알고 나면 $r_+^2 - r_-^2$가 인수분해되기 때문에 두 가지 사이의 넓이는 하나의 적분으로 정리된다.

풀이

소문항 (i)

$y = \cos x + \sqrt{\cos 2x}$라 하자. 이 값은 정확히 $\cos 2x \geq 0$일 때 실수이며, 주어진 구간에서 이는 $[-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]$ 전체이다. 이 함수는 우함수(even function)이므로 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

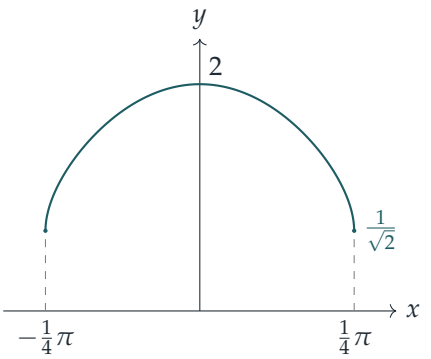
함숫값. $x = 0$에서 $y = 2$이다. $x = \pm\frac{1}{4}\pi$에서는 $\cos 2x = 0$이므로 $y = \cos\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$이다.

기울기. $0 < x < \frac{1}{4}\pi$에서는 두 항이 모두 음수이므로

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\sin x - \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}} < 0,$$

이다. 따라서 x가 0에서 $\frac{1}{4}\pi$까지 갈 때 y는 2에서 $\frac{1}{\sqrt{2}}$까지 감소하고, 최댓값은 $(0, 2)$에서 나타난다. $x \to \frac{1}{4}\pi^-$일 때 $\sin 2x \to 1$인 반면 $\sqrt{\cos 2x} \to 0^+$이므로 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x \to -\infty$이다. 즉 곡선은 **연직** 접선(vertical tangent)을 가지며 양 끝점에 도달한다.

$x = 0$ 근처. $\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$와 $\sqrt{\cos 2x} \approx \sqrt{1 - 2x^2} \approx 1 - x^2$를 이용하면 $y \approx 2 - \frac{3}{2}x^2$를 얻는다. 이는 매끄러운 극대이다.



소문항 (ii)

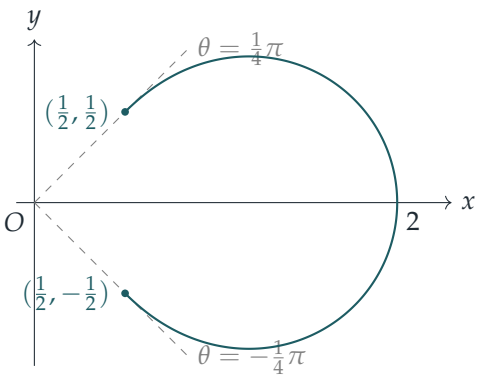
이제 같은 함수가 방향 θ에서 원점까지의 거리 r를 나타낸다. C_1의 끝점은 $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\theta = \pm\frac{1}{4}\pi$인 점이며, 직교좌표로는 $(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$이다. $\theta = 0$에서 곡선은 $(2, 0)$에 있으며, 이는 O에서 가장 먼 점이다. r가 θ에 대한 우함수이므로 C_1은 시초선(initial line)에 대하여 대칭이다.

? **생각해 보기** 극곡선에서 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$가 무한대라는 것은 무엇을 뜻하는가?

소문항 (i)에서 $\theta \to \frac{1}{4}\pi^-$일 때 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta \to -\infty$이다. 그 끝 근처에서는 θ가 거의 변하지 않는 동안 r가 크게 변하므로, 곡선은 동경 직선 $\theta = \frac{1}{4}\pi$(직선 $y = x$)를 따라 움직인다. r가 감소하므로 곡선은 $y = x$를 따라 원점 **쪽으로** 향하면서 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$에 도달한다. 특히 높이 $y = r\sin\theta$는 끝점에 이르기 전에 최댓값에 도달해야 한다. 실제로

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta + r\cos\theta$$

는 $\theta = 0$ 근처에서 양수이고 $\theta \to \frac{1}{4}\pi$일 때 $-\infty$로 간다. (최대 높이는 약 0.81이며, $\theta \approx 34°$에서 나타난다.) 따라서 C_1은 $(2, 0)$을 지나는 아치 모양으로, $y = \frac{1}{2}$보다 위로 불룩 솟았다가 다시 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$로 내려와 그곳에서 직선 $y = x$에 접하며, 축 아래에는 이와 대칭인 모양이 있다.



소문항 (iii)

두 가지. 방정식을 r에 대한 이차방정식으로 보자.

$$r^2 - 2r\cos\theta + \sin^2\theta = 0 \iff r = \cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - \sin^2\theta} = \cos\theta \pm \sqrt{\cos 2\theta}.$$

$r_\pm = \cos\theta \pm \sqrt{\cos 2\theta}$라 쓰자. 바깥 가지 r_+는 정확히 C_1이다. 안쪽 가지는 $\cos^2\theta \geq \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$이므로 $r_- \geq 0$을 만족하며, 등호는 $\sin\theta = 0$일 때만 성립한다. 따라서 r_-는 진짜 극곡선(polar curve)이며, 원점에는 $\theta = 0$에서만 도달한다.

$\theta = \pm\frac{1}{4}\pi$에서. 여기서는 $\cos 2\theta = 0$이므로 이차방정식은 중근(repeated root)

$$r = \cos\tfrac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

을 가진다. 두 가지 모두 $(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$를 지난다.

r가 작을 때. r가 작으면 r^2은 $2r\cos\theta$에 비해 무시할 수 있고, $\sin^2\theta = 2r\cos\theta - r^2$이 작으므로 θ도 작아야 한다. 그러면 $2r\cos\theta \approx \sin^2\theta$이고, $\cos\theta \approx 1$, $\sin\theta \approx \theta$를 이용하면

$$r \approx \frac{\sin^2\theta}{2\cos\theta} \approx \tfrac{1}{2}\theta^2,$$

이 되어 요구한 결과를 얻는다. (같은 방법으로, $r_- \approx (1 - \frac{1}{2}\theta^2) - (1 - \theta^2) = \frac{1}{2}\theta^2$이다.)

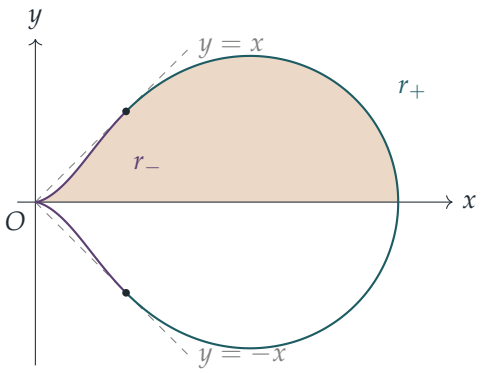
$r = 0$ 근처의 모양. 여기서 $x = r\cos\theta \approx \frac{1}{2}\theta^2$이고 $y = r\sin\theta \approx \frac{1}{2}\theta^3$이므로 $y^2 \approx 2x^3$이다. 따라서 안쪽 가지는 $x > 0$ 쪽에서 위아래로부터 시초선에 접하며 원점으로 들어와, O에서 왼쪽을 향하는 **첨점**(cusp)을 이룬다.

$\theta = \pm\frac{1}{4}\pi$ 근처의 모양. 방정식을 음함수 미분(implicit differentiation)하면

$$(2r - 2\cos\theta)\,\mathrm{d}r + (2r\sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r} = \frac{\cos\theta - r}{\sin\theta\,(r + \cos\theta)}.$$

$r = \frac{1}{\sqrt{2}}, \theta = \frac{1}{4}\pi$에서 분자는 0이고 분모는 0이 아니므로 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}r = 0$이다. 또한 곡선 전체에서 $\theta \leq \frac{1}{4}\pi$이다. 따라서 θ는 그곳에서 최댓값을 가지며, 곡선은 동경 직선 $y = x$에 접한다. 바깥 가지는 $y = x$를 따라 O 쪽으로 들어오고, 안쪽 가지는 $y = x$를 따라 O에서 멀어지는 방향으로 나가며, 두 가지는 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$에서 매끄럽게 이어진다. 꺾인 점은 없다. 대칭성에 의해 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$에서도 마찬가지이다.

따라서 C_2는 시초선에 대하여 대칭인 닫힌 곡선으로, 뾰족한 끝이 O의 첨점인 물방울 모양이다. 바깥쪽 경계는 C_1이고, 안쪽 경계는 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$에서 O의 첨점으로 내려왔다가 다시 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$로 나간다.



(그림은 $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin u$를 이용해 그렸으며, 이렇게 하면 $\sqrt{\cos 2\theta} = \cos u$가 된다. u를 한 바퀴 돌리면 무한대 기울기 없이 C_2 전체를 그릴 수 있다.)

넓이. $0 \le \theta \le \frac{1}{4}\pi$일 때, 각 θ의 반직선은 정확히 $r_- \le r \le r_+$인 부분에서 C_2의 내부에 있다. 따라서 색칠한 넓이는 두 극좌표 부채꼴(polar sector)의 넓이의 차이다.

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi/4} \tfrac{1}{2}\left(r_+^2 - r_-^2\right) \mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/4} \tfrac{1}{2}(r_+ - r_-)(r_+ + r_-)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} \tfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{\cos 2\theta}\cdot 2\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\pi/4} \cos\theta\sqrt{1-2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

$\sqrt{2}\sin\theta = \sin u$로 치환(substitution)하면 $\sqrt{2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \cos u\,\mathrm{d}u$이고, θ가 0에서 $\frac{1}{4}\pi$까지 변할 때 u는 0에서 $\frac{1}{2}\pi$까지 변한다.

$$A = 2\int_0^{\pi/2} \cos u\cdot\frac{\cos u}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\cos^2 u\,\mathrm{d}u = \sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

이것이 구하려던 결과이다. (같은 방법으로, 치환 $s = \sqrt{2}\sin\theta$를 쓰면 적분은 $\sqrt{2}\int_0^1\sqrt{1-s^2}\,\mathrm{d}s$가 되며, 이는 단위원판 넓이의 4분의 1에 $\sqrt{2}$를 곱한 것이다.)

검산

- $\theta = 0$에서 $r_\pm = 1 \pm 1$이므로 점 $(2,0)$과 O를 얻으며, 개형과 일치한다.
- $\theta = 0.01$에서 $r_- = \cos 0.01 - \sqrt{\cos 0.02} \approx 5.0002\times 10^{-5}$이고, 이를 $\frac{1}{2}\theta^2 = 5\times 10^{-5}$와 비교할 수 있다.
- 수치적으로 $\pi/(2\sqrt{2}) \approx 1.11072$이며, $[0, \frac{1}{4}\pi]$에서 $\frac{1}{2}(r_+^2 - r_-^2)$를 직접 수치적분하면 소수점 아래 여섯째 자리까지 같은 값을 얻는다.
- 대략적인 범위: C_2의 위쪽 절반은 넓이가 약 1.62인 직사각형 $[0,2]\times[0,0.81]$ 안에 있고, 꼭짓점이 $(\frac{1}{2},0)$, $(2,0)$, $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$이고 넓이가 0.375인 삼각형을 포함한다. 값 1.11은 이 둘 사이에 적절히 놓인다.

흔한 실수

- $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$에서 C_1을 꺾인 모양으로 그리거나 곡선이 $y = x$를 가로지르도록 그리는 것: $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$가 무한대라는 것은 곡선이 그곳에서 동경 직선에 접한다는 뜻이다.
- O에서 첨점 대신 둥글고 매끄러운 끝을 그리는 것: $y^2 \approx 2x^3$은 전형적인 첨점 모양이다.
- $\int \frac{1}{2} r_+^2 \, \mathrm{d}\theta$만 계산하는 것: 이것은 C_1까지의 넓이로, 안쪽 가지 안의 비어 있는 영역까지 포함한다.

STEP 너머

원점 근처의 곡선 $y^2 = 2x^3$은 반삼차 포물선(semicubical parabola)이며, 첨점의 대표적인 예이다. 첨점은 매끄러운 매개화(parametrisation)의 속도가 어느 순간 0이 될 때마다 나타난다. 여기서는 $(x, y) \approx (\frac{1}{2}\theta^2, \frac{1}{2}\theta^3)$의 도함수가 $\theta = 0$에서 0이다. 대수곡선의 이러한 특이점(singular point)을 분류하는 것이 대수기하학(algebraic geometry)의 출발점이다. 극곡선과 그 넓이는 또한 자연스럽게 그린 정리(Green's theorem)로 이어지는데, 이 정리는 둘러싸인 넓이를 그 경계를 따라 도는 선적분(line integral)으로 나타낸다. 이런 곡선을 기하학적으로 바라보고 싶다면 Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)를 읽어 보자.

풀이

STEP III 2020, 문제 7

순수수학 • 2계 미분방정식

STEP III 2020, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2020년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

핵심 아이디어

소문항 (i)은 2계 선형 방정식(second-order linear equation)을 때로는 두 개의 1계 선형 방정식으로 **인수분해**(factorise)할 수 있고, 각각은 적분인자(integrating factor)로 풀 수 있음을 보여 준다. 소문항 (ii)에서 할 일은 그 인수분해를 찾는 것이다. 계수를 비교하면 g에 대한 비선형 1계 방정식이 나오고, 거듭제곱 꼴을 추측하면 이를 풀 수 있다. 그 다음에는 초기 조건을 차례로 써 가며 두 1계 방정식을 순서대로 풀기만 하면 된다.

풀이

소문항 (i)

두 번째 방정식으로부터 u를 y로 나타내면

$$u = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \mathrm{g}(x)\, y.$$

이다. $\mathrm{g}(x)y$에 곱의 미분법(product rule)을 써서 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \mathrm{g}'(x)\, y + \mathrm{g}(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

이다. 두 식을 모두 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \mathrm{f}(x)u = \mathrm{h}(x)$에 대입하면

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \mathrm{g}'(x)\, y + \mathrm{g}(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \mathrm{f}(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \mathrm{f}(x)\mathrm{g}(x)\, y = \mathrm{h}(x),$$

이고, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$항과 y항을 각각 모으면 정확히 방정식 (1)이 된다.

소문항 (ii)

g에 대한 방정식. (2)를 (1)과 비교하면 다음이 필요하다.

$$\mathrm{g}(x)+\mathrm{f}(x)=1+\frac{4}{x},\qquad \mathrm{g}'(x)+\mathrm{f}(x)\mathrm{g}(x)=\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2},\qquad \mathrm{h}(x)=4x+12.$$

첫 번째 식에서 $\mathrm{f}=1+\frac{4}{x}-\mathrm{g}$이고, 이를 두 번째 식에 넣으면 f가 소거된다.

$$\mathrm{g}'(x)+\Big(1+\frac{4}{x}\Big)\mathrm{g}(x)-\big(\mathrm{g}(x)\big)^2=\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}.$$

이것이 구하는 g에 대한 1계 방정식이다.

거듭제곱 꼴의 해. $g(x)=kx^n$이라 하면 좌변은

$$knx^{n-1}+kx^n+4kx^{n-1}-k^2x^{2n}.$$

이다.

? **생각해 보기** k를 알기 전에 n을 어떻게 정할 수 있을까?

x의 거듭제곱을 살펴보자. 우변에는 x^{-1}과 x^{-2}만 있으므로, x^n, x^{n-1}, x^{2n}은 이 두 거듭제곱만 만들어야 한다. $n=-1$로 택하면 된다. 이때 $x^n=x^{-1}$이고, x^{n-1}과 x^{2n}은 둘 다 x^{-2}이다. 좌변은

$$\frac{k}{x}+\frac{-k+4k-k^2}{x^2}=\frac{k}{x}+\frac{3k-k^2}{x^2}.$$

이 된다. x^{-1}항을 비교하면 $k=2$이고, 그러면 $3k-k^2=6-4=2$이므로 x^{-2}항도 일치한다. 따라서

$$n=-1,\quad k=2:\qquad \mathrm{g}(x)=\frac{2}{x},\qquad \mathrm{f}(x)=1+\frac{4}{x}-\frac{2}{x}=1+\frac{2}{x}.$$

(2) 풀기. 소문항 (i)에 의해 이제 (2)는 다음 두 방정식의 쌍과 동치이다.

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\Big(1+\frac{2}{x}\Big)u=4x+12,\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{2}{x}y=u.$$

조건이 $x=1$에서 주어지므로 $x>0$에서 다룬다.

u에 대한 방정식. 적분인자는 $\exp\int\big(1+\frac{2}{x}\big)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x+2\ln x}=x^2\mathrm{e}^x$이므로

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(x^2\mathrm{e}^xu\big)=\big(4x^3+12x^2\big)\,\mathrm{e}^x.$$

이다. 우변은 (곱의 미분법에 의해) 정확히 $4x^3\mathrm{e}^x$의 도함수이므로

$$x^2\mathrm{e}^xu=4x^3\mathrm{e}^x+C,\qquad u=4x+\frac{C\mathrm{e}^{-x}}{x^2}.$$

이다. $x = 1$에서의 u의 값은 초기 조건(initial condition)에서 얻는다. $u = y' + \frac{2}{x}y = -3 + 2 \times 5 = 7$이다. 따라서 $4 + Ce^{-1} = 7$이므로 $C = 3e$이고

$$u = 4x + \frac{3e^{1-x}}{x^2}.$$

이다.

y에 대한 방정식. 적분인자는 $e^{2\ln x} = x^2$이므로

$$\frac{d}{dx}(x^2 y) = x^2 u = 4x^3 + 3e^{1-x}, \qquad \text{따라서} \qquad x^2 y = x^4 - 3e^{1-x} + D.$$

이다. $x = 1$에서 $5 = 1 - 3 + D$이므로 $D = 7$이다. 그러므로

$$\boxed{y = x^2 + \frac{7 - 3e^{1-x}}{x^2}}.$$

여기서 $y(1) = 5$를 썼고 C를 구할 때 $y'(1) = -3$을 썼으므로, 두 조건이 모두 성립한다.

검산

- $x = 1$에서 $y = 1 + 7 - 3 = 5$이다. 미분하면 $y' = 2x - 14x^{-3} + 3e^{1-x}x^{-2} + 6e^{1-x}x^{-3}$이고, $x = 1$에서 이 값은 $2 - 14 + 3 + 6 = -3$이다.
- 특수해 부분 $y = x^2$는 그것만으로 (2)를 만족해야 한다. $2 + (1 + \frac{4}{x})2x + (\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2})x^2 = 2 + 2x + 8 + 2x + 2 = 4x + 12$이므로 실제로 만족한다.
- 상자 안의 y를 $x = 0.3$과 $x = 5$ 사이의 여러 점에서 컴퓨터로 (2)에 대입해 보면, 두 변은 수치 미분의 오차(약 10^{-5}) 범위 안에서 일치한다.

흔한 실수

- $y'(1) = -3$을 그대로 u의 초깃값으로 쓰는 것. u의 초깃값은 -3이 아니라 $y' + gy = 7$이다.
- 소문항 (i)에서 $g'(x)$항을 빠뜨리는 것. g는 x에 의존하므로 gy는 곱의 미분법으로 미분해야 한다.
- 두 단계 중 하나에서 적분상수를 빠뜨리는 것. 적분상수는 두 개이며, 이는 두 개의 초기 조건과 맞아떨어진다.

STEP 너머

이것은 미분 연산자(differential operator)를 인수분해한다는 아이디어이다. 즉 $(D + f)(D + g)y = h$이고, 여기서 D는 d/dx를 뜻한다. g가 x에 의존하므로 두 인수는 교환

되지 않으며, 그래서 교차항 g'이 나타난다. 우리가 g에 대해 찾은 방정식은 **리카티 방정식**(Riccati equation)이다. 리카티 방정식은 비선형이지만, 이 문제에서처럼 알려진 해 하나만 있으면 선형 2계 문제를 두 개의 1계 문제로 줄일 수 있다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 적분인자, 계수 낮추기(reduction of order), 리카티 방정식을 다룬다.

풀이

STEP III 2020, 문제 8

순수수학 • 수열과 무한 강하법

> **STEP III 2020, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2020년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

이 문제는 *Beyond STEP*의 1.8 절 **유리수 세기**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch01/counting-rationals.html

핵심 아이디어

첨자가 큰 항은 모두 첨자가 그 절반 정도인 항들로부터 만들어진다. 따라서 쌍 (u_n, u_{n+1})에 관한 어떤 주장이든 첨자가 더 작은 쌍으로 되돌려 보낼 수 있고, **강하법**(descent)에 의한 논증(동치로, 가장 작은 반례(counterexample)를 고르는 논증)이 모든 소문항에서 제 역할을 한다. 처음 몇 항을 적어 보고, 연속한 각 쌍이 어떻게 새로운 두 쌍을 만들어 내는지 써 보면 증명에 앞서 패턴이 눈에 들어온다.

풀이

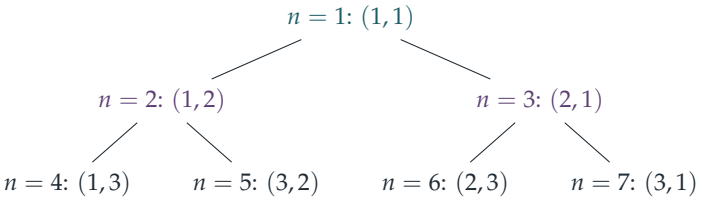
처음 열여섯 개의 항은 다음과 같다.

$$1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 2,\ 3,\ 1,\ 4,\ 3,\ 5,\ 2,\ 5,\ 3,\ 4,\ 1.$$

모든 항은 양의 정수이다. 이는 u_1에 대해 성립하고, 그 뒤의 각 항은 앞선 항 하나이거나 앞선 두 항의 합이므로 (강한) 수학적 귀납법(strong induction)에 의해 따라 나온다.

한 쌍이 뒤의 쌍들을 어떻게 만들어 내는지 적어 둘 만하다. $(u_k, u_{k+1}) = (a, b)$이면 정의로부터 바로

$$(u_{2k}, u_{2k+1}) = (a,\ a+b), \qquad (u_{2k+1}, u_{2k+2}) = (a+b,\ b). \tag{$*$}$$



위치 n의 쌍은 (u_n, u_{n+1})이다. $(*)$에 의해 그 왼쪽 자식은 위치 $2n$에, 오른쪽 자식은 위치 $2n+1$에 있다. 위치 $n \geq 2$의 모든 쌍은 정확히 이런 방식으로 위치 $\lfloor n/2 \rfloor$의 쌍으로부터 생겨난다.

소문항 (i)

$n \geq 2$인 연속한 쌍 (u_n, u_{n+1})을 잡고, $k = \lfloor n/2 \rfloor \geq 1$이라 하자.

- $n = 2k$이면 쌍은 $(u_k,\ u_k + u_{k+1})$이다. $u_{k+1} \geq 1$이므로 홀수 첨자 항 $u_{2k+1} = u_k + u_{k+1}$이 짝수 첨자 항 $u_{2k} = u_k$보다 크다.
- $n = 2k+1$이면 쌍은 $(u_k + u_{k+1},\ u_{k+1})$이다. 이번에는 $u_k \geq 1$이므로 $u_{2k+1} = u_k + u_{k+1}$이 $u_{2k+2} = u_{k+1}$보다 크다.

따라서 첫 번째 쌍 $(u_1, u_2) = (1,1)$을 제외한 모든 쌍에서 홀수 첨자 항이 순증가적으로 더 크다. 특히 **쌍의 두 항이 같은 것은 첫 번째 쌍뿐이다.**

소문항 (ii)

$d > 1$이 u_n과 u_{n+1}을 모두 나눈다고 하자. $u_1 = u_2 = 1$이므로 $n = 1$에서는 이런 일이 일어날 수 없고, 따라서 $n \geq 2$이다. $k = \lfloor n/2 \rfloor$라 하면 $1 \leq k < n$이다.

- $n = 2k$인 경우: $d \mid u_{2k} = u_k$이고 $d \mid u_{2k+1} = u_k + u_{k+1}$이므로, d는 그 차 u_{k+1}을 나눈다.
- $n = 2k+1$인 경우: $d \mid u_{2k+2} = u_{k+1}$이고 $d \mid u_{2k+1} = u_k + u_{k+1}$이므로 $d \mid u_k$이다.

어느 경우든 d는 더 앞의 연속한 쌍인 u_k와 u_{k+1}을 모두 나누며, 이것이 보여야 할 내용이었다.

이제 어떤 연속한 쌍이 공약수 $d > 1$을 가진다고 하고, 그러한 쌍 (u_n, u_{n+1}) 가운데 n이 가장 작은 것을 고르자. 위에서처럼 $n \neq 1$이고, 방금 한 논증은 같은 공약수를 가지는 위치 $k < n$의 쌍을 만들어 내므로 n의 최소성에 모순이다. 따라서 연속한 두 항은 언제나 서로소(co-prime)이다.

소문항 (iii)

어떤 순서쌍 (a,b)가 서로 다른 두 위치에서 나타난다고 하자. 즉 $m < n$에 대해 $(u_m, u_{m+1}) = (u_n, u_{n+1}) = (a,b)$이다. 이러한 모든 반복 가운데 m이 가장 작은 것을 고르자.

$m = 1$이면 $a = b = 1$이다. 그런데 $n \geq 2$이고, 소문항 (i)에 의해 위치 n의 쌍은 두 항이 다르다. 따라서 $m \geq 2$이고, 그러면 소문항 (i)에 의해 $a \neq b$이기도 하다.

? **생각해 보기** a와 b만 보고 위치가 홀수인지 짝수인지 어떻게 알 수 있을까?

소문항 (i)에 따르면 쌍에서 더 큰 항이 홀수 첨자를 가지므로, 위치의 홀짝성(parity)은 쌍 자체로 결정된다.

- $a < b$이면 두 번째 항이 홀수 첨자를 가지므로 m과 n은 모두 짝수이다. 즉 $j < k$인 $m = 2j, n = 2k$이다. 그러면 $u_j = u_{2j} = a$이고 $u_{j+1} = u_{2j+1} - u_j = b - a$이며, 마찬가지로 $(u_k, u_{k+1}) = (a, b-a)$이다.
- $a > b$이면 m과 n은 모두 홀수이다. 즉 $1 \leq j < k$인 $m = 2j+1$, $n = 2k+1$이다. 그러면 $u_{j+1} = u_{2j+2} = b$이고 $u_j = u_{2j+1} - u_{j+1} = a - b$이며, 마찬가지로 $(u_k, u_{k+1}) = (a-b, b)$이다.

두 경우 모두 하나의 순서쌍이 서로 다른 두 위치 j와 k에서 나타나고, $j \leq m/2 < m$이다. 이는 m의 선택에 모순이다. 따라서 양의 정수의 어떤 순서쌍도 서로 다른 두 곳에서 연속하여 나타나지 않는다.

소문항 (iv)

$a > b$이고 a, b가 서로소이며, (a,b)가 수열의 연속한 쌍이 아니라고 하자. 그러면 $a-b$와 b는 양의 정수이고 서로소이다. $a-b$와 b의 공약수는 $(a-b)+b = a$도 나누므로 a와 b의 공약수이고, 따라서 1이어야 하기 때문이다.

만약 어딘가에서 $a-b$ 바로 다음에 b가 온다면, 예컨대 $(u_k, u_{k+1}) = (a-b, b)$라면, $(*)$에 의해

$$(u_{2k+1}, u_{2k+2}) = \big((a-b)+b,\ b\big) = (a,b),$$

이고, 이는 (a,b)에 대한 가정에 모순이다. 따라서 $(a-b, b)$ 역시 연속하여 나타나지 않는 서로소 쌍이며, 그 합은 $a < a+b$이다.

$a < b$인 경우의 비슷한 결과는 다음과 같다. **a와 $b-a$는 서로소인 양의 정수이고, a 바로 다음에 $b-a$가 오는 방식으로 연속하여 나타나지 않으며, 그 합 b는 $a+b$보다 작다.** 증명도 같다. a와 $b-a$의 공약수는 $a + (b-a) = b$를 나누고, $(u_k, u_{k+1}) = (a, b-a)$이면 $(u_{2k}, u_{2k+1}) = (a,\ a+(b-a)) = (a,b)$이다.

소문항 (v)

모든 항이 양의 정수이므로 $f(n) = u_n/u_{n+1}$은 양의 유리수이고, 따라서 치역(range)은 양의 유리수 전체에 포함된다. 모든 양의 유리수가 값으로 나타나며, 단 한 번만 나타난다는 것을 보이자.

모든 양의 유리수는 치역에 속한다. 양의 유리수를 기약분수로 p/q라 쓰자. 여기서 p, q는 서로소인 양의 정수이다. 모든 서로소 쌍 (p,q)가 어떤 n에 대해 (u_n, u_{n+1})으로 나타난다고 주장한다. 그렇지 않다면 나타나지 않는 서로소 쌍 가운데 $a+b$가 가장 작은 것 (a,b)를 고르자. $a = b$일 수는 없다. 그러면 서로소 조건에 의해 $a = b = 1$이어야 하는데, $(1,1)$은 $n = 1$에서 나타나기 때문이다. 따라서 $a > b$ 또는 $a < b$이고, 소문항 (iv)는 나타나지 않으면서 합이 더 작은 서로소 쌍을 제공한다. 이는 최소성에 모순이므로 모든 서로소 쌍 (p,q)가 나타나며, 그 위치를 n이라 하면 $f(n) = p/q$이다.

f는 일대일(*one-to-one*)이다. $f(m) = f(n)$이라 하자. 소문항 (ii)에 의해 u_m/u_{m+1}과 u_n/u_{n+1}은 모두 분모가 양수인 기약분수이다. 양의 유리수의 이러한 표현은 하나뿐이므로 $u_m = u_n$이고 $u_{m+1} = u_{n+1}$이다. 소문항 (iii)에 의해 같은 순서쌍이 서로 다른 두 곳에서 나타날 수 없으므로 $m = n$이다.

따라서 f는 양의 정수 전체에서 양의 유리수 전체로의 전단사 함수(bijection)이고, 그러므로 역함수(inverse) f^{-1}을 가진다. 기약분수 p/q가 주어지면 $f^{-1}(p/q)$는 p 바로 다음에 q가 오는 유일한 위치이다. 예를 들어 3 다음에 5가 오는 곳은 위치 10뿐이므로 $f^{-1}(\frac{3}{5}) = 10$이다.

검산

- 나열한 항들로부터 쌍 $(1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (3,2), (2,3), (3,1), (1,4), \ldots$를 얻는다. 첫 번째 쌍 이후로는 홀수 첨자 항이 더 크고, 모든 쌍이 서로소이며, 반복되는 쌍이 없다.
- 소문항 (iv)의 강하를 3/5에 적용하면 $(3,5) \to (3,2) \to (1,2) \to (1,1)$이다. $(*)$를 써서 거슬러 올라가면, 위치 1의 $(1,1)$로부터 위치 2의 $(1,2)$, 위치 5의 $(3,2)$, 위치 10의 $(3,5)$를 얻는다. 실제로 $u_{10} = 3$, $u_{11} = 5$이다.
- 처음 이백만 개의 항에 대한 컴퓨터 검사로 소문항 (i)–(iii)을 확인했고, $p + q \leq 21$인 모든 서로소 쌍 (p,q)가 정확히 한 번씩 나타남을 확인했다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)와 (iii)에서 첫 번째 쌍 $(1,1)$을 따로 배제하는 것을 잊는 실수. 이 쌍은 각 강하 논증의 기본 단계이다.

- 소문항 (iii)에서 두 위치의 홀짝성이 같다고 근거 없이 가정하는 실수. 바로 소문항 (i)이 이를 강제한다.
- 소문항 (v)에서 치역이 양의 유리수 전체라는 것만 증명하는 실수. 역함수가 존재하려면 f가 일대일이어야 하며, 이를 위해서는 소문항 (ii)와 (iii)을 함께 써야 한다.

STEP 너머

이것은 슈테른(Stern)의 이원자 수열(diatomic sequence)이며, u_n/u_{n+1}을 나열하면 유리수의 Calkin–Wilf 열거를 얻는다. 이는 $\mathbb{N}$과 $\mathbb{Q}^+$ 사이의 명시적인 전단사 함수로, 유리수 전체가 가산(countable)임을 구체적으로 보여 준다. 소문항 (iv)와 (v)의 강하는 유클리드(Euclid) 호제법(Euclid's algorithm)의 뺄셈 형태이고, 트리에서 $(1,1)$부터 (p,q)까지의 경로는 p/q의 연분수(continued fraction)를 담고 있다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 정수론)은 유클리드 호제법과 연분수를 아름답게 다룬다.

풀이

STEP III 2020, 문제 9

역학 • 강체의 평형

STEP III 2020, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2020년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

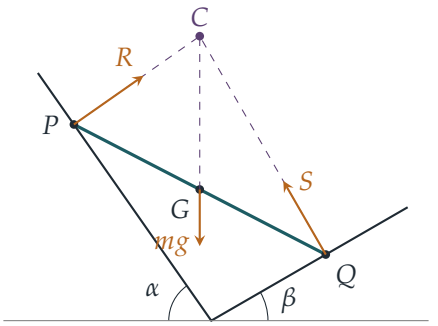
www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

핵심 아이디어

막대는 정확히 세 힘으로 지탱된다. 중심에 작용하는 무게, 그리고 양 끝에 하나씩 작용하는 접촉력이다. 평행하지 않은 세 힘을 받아 평형(equilibrium) 상태에 있는 물체에서는 세 힘의 작용선(line of action)이 한 점에서 만난다. 따라서 문제 전체가 기하 문제가 된다. 그 교점의 높이를 두 가지 방법으로 구하여 같다고 놓으면 된다. 소문항 (ii)에서는 Q에서의 수직항력(normal reaction)과 한계 마찰력(limiting friction)을 합하면 마찰각(angle of friction) λ만큼 기울어진 하나의 전체 반력이 되며, 여기서 $\tan\lambda = \mu$이다. 그러면 β를 $\beta + \lambda$로 바꾸어 같은 기하를 적용할 수 있다.

풀이

막대를 길이 $2l$, 중심 G인 균일한 강체(rigid body)로, 두 평면을 고정된 것으로 모형화한다. 두 평면이 만나는 직선의 왼쪽에 Π_1, 오른쪽에 Π_2를 두면, P는 왼쪽에 있으며 더 높고, Q는 오른쪽에 있으며 더 낮다.



소문항 (i)

두 평면이 모두 매끄러우므로(smooth) P에서의 반력 R는 Π_1에 수직이고, Q에서의 반력 S는 Π_2에 수직이다. 기울기 α인 평면에 수직인 직선은 연직선과 각 α를 이룬다. 따라서 R의 작용선은 P에서 위쪽 연직 방향과 각 α를 이루며 Q 쪽으로 기울어져 올라가고, S의 작용선은 Q에서 위쪽 연직 방향과 각 β를 이루며 P 쪽으로 기울어져 올라간다.

막대는 세 힘 R, S, 그리고 G를 지나 연직으로 작용하는 무게 mg를 받아 평형 상태에 있다. R와 S의 작용선이 만나는 점 C에 대한 모멘트(moment)를 취하면 R와 S의 모멘트는 0이므로 무게의 모멘트도 0이어야 한다. 즉 무게의 작용선은 C를 지난다. 따라서 C는 G의 연직 위에 있다.

> **생각해 보기** "C가 G의 바로 위에 있다"는 사실을 어떻게 식으로 바꿀 수 있을까?

Q로부터 C까지의 높이를 두 경로로 계산한다. G는 중점이고 막대가 수평선과 각 θ를 이루므로, G는 양 끝에서 각각 수평 거리 $l\cos\theta$만큼 떨어져 있고, P는 Q보다 $2l\sin\theta$만큼 높다.

- R의 작용선을 따라: 연직선과 각 α를 이루는 직선을 따라 수평 거리 $l\cos\theta$만큼 이동하면 높이가 $l\cos\theta\cot\alpha$만큼 올라간다. 따라서 C는 Q보다 $2l\sin\theta + l\cos\theta\cot\alpha$만큼 높다.
- S의 작용선을 따라: 같은 방법으로 C는 Q보다 $l\cos\theta\cot\beta$만큼 높다.

두 값을 같다고 놓고 $l\cos\theta \neq 0$으로 나누면

$$2\tan\theta + \cot\alpha = \cot\beta, \qquad \text{즉} \qquad 2\tan\theta = \cot\beta - \cot\alpha,$$

이고, 이것이 구하는 결과이다. $\beta < \alpha$이고 (둘 다 예각) $\cot\beta > \cot\alpha$이므로 $\theta > 0$이며, 이는 P가 Q보다 높다는 사실과 일치한다.

소문항 (ii)

이제 Π_1은 여전히 매끄러우므로 P에서의 반력은 앞과 똑같다. Q에서는 수직항력 N과 Π_2를 따르는 마찰력 F가 작용한다.

마찰력의 방향. 막대는 강체이므로 P와 Q의 속도는 막대 방향 성분이 같다. P가 속력 u로 Π_1을 따라 미끄러져 내려가기 시작하고 Q가 (부호가 있는) 속력 w로 Π_2를 따라 올라간다고 하자. 수평선 아래로 각 ϕ를 이루는 P에서 Q로의 막대 방향으로 분해하면

$$u\cos(\alpha - \phi) = w\cos(\beta + \phi).$$

여기서 $\cos(\alpha-\phi) > 0$이고, 아래에서 $\phi + \beta < \frac{1}{2}\pi$임을 보일 것이므로 $w > 0$이다. 즉 Q는 Π_2를 따라 **올라가려** 한다. 마찰력은 이를 방해하므로 F는 Π_2를 따라 아래쪽으로 작용하고, 평형이 한계 상태이므로 $F = \mu N$이다.

전체 반력. N과 F를 하나의 힘 S'로 합친다. 이 힘은 법선과 각 λ를 이루며, 여기서 $\tan\lambda =$

$F/N = \mu$이다. 또한 F가 평면 아래쪽(두 평면이 만나는 직선 쪽)을 향하므로, 반력은 P 쪽으로 더 기울어진다. 따라서 S'의 작용선은 Q에서 위쪽 연직 방향과 각 $\beta + \lambda$를 이루며 P 쪽으로 기울어져 올라간다. ($\beta + \lambda > \frac{1}{2}\pi$이면 이 직선은 실제로는 내려가지만, 아래의 높이 공식은 코탄젠트가 음수인 채로 여전히 성립한다.)

막대는 다시 세 힘을 받아 평형 상태에 있으므로 세 작용선은 G 위의 한 점에서 만나고, 소문항 (i)의 논증이 θ를 ϕ로, β를 $\beta + \lambda$로 바꾸어 그대로 적용된다.

$$2\tan\phi = \cot(\beta + \lambda) - \cot\alpha.$$

이로부터 $2\tan\phi < \cot\beta$이므로 $\tan\phi < \cot\beta = \tan(\frac{1}{2}\pi - \beta)$이고 $\phi + \beta < \frac{1}{2}\pi$이다. 이는 앞에서 가정한 마찰력의 방향이 옳음을 확인해 준다.

$2\tan\theta = \cot\beta - \cot\alpha$에서 빼면

$$2(\tan\theta - \tan\phi) = \cot\beta - \cot(\beta + \lambda) = \frac{\sin(\beta + \lambda)\cos\beta - \cos(\beta + \lambda)\sin\beta}{\sin\beta\,\sin(\beta + \lambda)}$$
$$= \frac{\sin\lambda}{\sin\beta\,(\sin\beta\cos\lambda + \cos\beta\sin\lambda)}.$$

분자와 분모를 $\cos\lambda$로 나누고 $\tan\lambda = \mu$를 이용한 다음 $\cos\beta$를 묶어 내면

$$2(\tan\theta - \tan\phi) = \frac{\mu}{\sin\beta\,(\sin\beta + \mu\cos\beta)} = \frac{\mu}{\sin\beta\cos\beta\,(\tan\beta + \mu)} = \frac{2\mu}{(\mu + \tan\beta)\sin 2\beta}.$$

양변을 반으로 나누면

$$\tan\theta - \tan\phi = \frac{\mu}{(\mu + \tan\beta)\sin 2\beta},$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

검산

- $\mu = 0$이면 우변이 0이므로 $\phi = \theta$이다. 마땅히 그래야 하듯 소문항 (ii)가 소문항 (i)로 돌아간다.
- 우변이 양수이므로 $\phi < \theta$이다. 마찰 덕분에 막대는 매끄러운 평면에서보다 더 평평하게 놓일 수 있으며, P가 미끄러져 내려가려는 끝이라는 점을 생각하면 이는 타당하다.
- $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$로 놓자. 그러면 $2\tan\theta = \sqrt{3} - 1/\sqrt{3} = 2/\sqrt{3}$이므로 $\theta = 30°$이다. $\mu = 0.5$일 때 공식은 $\tan\phi = 0.5774 - 0.5/(1.0774 \times 0.8660) \approx 0.0415$를 주므로 $\phi \approx 2.4°$이다. 이 값들에 대해 수평 방향 분해, 연직 방향 분해, G에 대한 모멘트의 방정식을 직접 풀어도 (컴퓨터로 확인했으며, 무작위로 고른 수천 가지 각과 계수에 대해 반복했다) 같은 ϕ를 얻는다.
- 어떤 μ든 $2\tan\phi = \cot(\beta + \lambda) - \cot\alpha$를 이용하면 빠르게 확인할 수 있다. 이 경우 $\lambda \approx 26.57°$, $\cot 56.57° \approx 0.6606$이고 $(0.6606 - 0.5774)/2 \approx 0.0416$이므로 반올림 오차 범위에서 일치한다.

흔한 실수

- 마찰력을 Π_2를 따라 위쪽으로 잡는 실수. P가 미끄러져 내려가면 막대의 길이 때문에 Q는 자기 평면을 따라 **올라가야** 하므로, Q에서의 마찰력은 평면 아래쪽으로 작용한다.
- 반력의 각을 연직선이 아니라 수평선으로부터 재는 실수. 기울기 α인 평면의 법선은 **연직선**과 각 α를 이룬다.

STEP 너머

여기서 사용한 세 힘의 공점(concurrency) 조건은 강체 평형의 일반 조건, 즉 합력이 $\mathbf{0}$이고 임의의 점에 대한 합모멘트가 0이라는 조건의 특수한 경우이다. 마찰력과 수직항력을 반꼭지각 λ인 "마찰 원뿔(cone of friction)"로 합쳐 생각하는 것은 공학자들이 사다리, 쐐기, 나사의 안정성을 따지는 방식이며, 마찰력의 방향을 정하는 속도 논증은 순간 회전 중심(instantaneous centre of rotation)이라는 개념에 해당한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 관점에서 강체 정역학과 마찰을 다룬다.

풀이

STEP III 2020, 문제 10

역학 • 단순 조화 운동

STEP III 2020, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2020년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

핵심 아이디어

용수철에 매달린 입자는 평형 위치(equilibrium position)를 중심으로 단순 조화 운동(simple harmonic motion)을 하며, 이로부터 Ω가 k, g, a로 정해진다. 받침대 위에서는 입자의 가속도가 받침대의 가속도와 같고 이는 x로 표현되므로, 뉴턴의 제2법칙(Newton's second law)으로 수직항력(reaction)을 바로 구할 수 있다. 접촉이 유지되려면 수직항력이 항상 음이 아니어야 한다. 수직항력은 x에 대한 **일차식**(*linear*)이므로 받침대가 움직이는 범위의 양 끝에서만 확인하면 되고, 어느 끝이 중요한지는 ω가 Ω보다 작은지 큰지에 따라 달라진다.

풀이

입자는 질점(point mass)으로, 용수철은 질량이 없고 늘어날 때와 압축(compression)될 때 모두 훅의 법칙(Hooke's law)을 따른다고 모형화한다. 풀이 전체에서 입자에 작용하는 힘은 위쪽을 양의 방향으로 잡는다.

매달린 입자. 입자가 A 아래로 떨어진 거리를 y라 하면, 용수철이 늘어난 길이(extension)는 $y-a$이고 장력(tension)은 $kmg(y-a)/a$로 입자에 위쪽으로 작용한다. 아래쪽을 양으로 하여 뉴턴의 제2법칙을 쓰면

$$m\ddot{y} = mg - \frac{kmg}{a}(y-a) \qquad \Longrightarrow \qquad \ddot{y} = -\frac{kg}{a}\left(y - a - \frac{a}{k}\right).$$

$z = y - a\left(1+\frac{1}{k}\right)$로 두면 이 식은 $\ddot{z} = -\frac{kg}{a}z$가 되며, 이는 평형점 $y = a\left(1+\frac{1}{k}\right)$를 중심으로 하는 단순 조화 운동이다. 입자는 이 점이 아닌 곳에서 정지 상태로 놓이므로(a/k가 아닌 어떤 늘어난 길이든 $z \neq 0$을 준다), 각진동수(angular frequency) $\sqrt{kg/a}$, 주기(period)

$2\pi\sqrt{a/(kg)}$로 연직 방향으로 진동한다. 이것을 $2\pi/\Omega$와 같다고 놓으면 $\Omega^2 = kg/a$, 즉

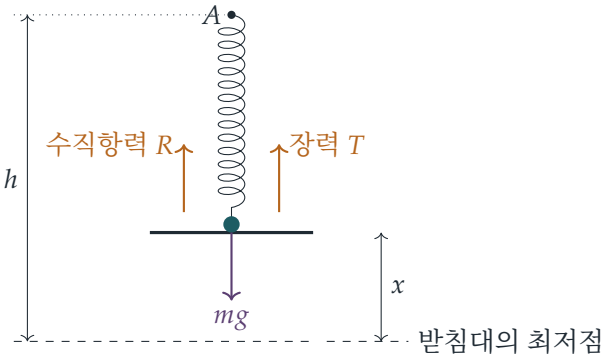
$$kg = a\Omega^2.$$

아래에서는 이를 $g/\Omega^2 = a/k$의 꼴로 사용한다.

받침대. 받침대는 진폭(amplitude) b, 각진동수 ω인 단순 조화 운동을 하므로, 최저점으로부터의 높이 x는 $0 \le x \le 2b$ 범위에 있고 중심은 $x = b$이다. 따라서 받침대의 가속도는

$$\ddot{x} = -\omega^2(x-b) = \omega^2(b-x).$$

(예를 들어 $x = b(1-\cos\omega t)$이면 $\ddot{x} = \omega^2 b\cos\omega t = \omega^2(b-x)$이다.)



수직항력. 입자가 접촉해 있는 동안에는 받침대와 함께 움직이므로, 받침대 최저점으로부터의 높이는 x이고 가속도는 $\ddot{x}$이다. 입자가 A 아래로 떨어진 거리는 $h-x$이므로 용수철이 늘어난 길이는 $h-x-a$이고, $kg/a = \Omega^2$를 이용하면 장력은

$$T = \frac{kmg}{a}(h-x-a) = m\Omega^2(h-x-a),$$

이다. ($h-x<a$이면 용수철이 압축되어 T는 음수, 즉 미는 힘(thrust)이 되며, 같은 식이 그대로 성립한다.) 입자에 작용하는 힘은 위쪽으로 R과 T, 아래쪽으로 mg이므로

$$R + T - mg = m\ddot{x} = m\omega^2(b-x),$$

이고, 따라서

$$R = mg - m\Omega^2(h-x-a) + m\omega^2(b-x) = mg + m\Omega^2(a+x-h) + m\omega^2(b-x),$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

접촉 유지. 입자가 계속 받침대 위에 머무를 필요충분조건은 $[0,2b]$의 모든 x에 대하여 $R \ge 0$인 것이다. x가 포함된 항을 모으면

$$\frac{R}{m} = g + \Omega^2(a-h) + \omega^2 b + (\Omega^2 - \omega^2)\,x.$$

? 생각해 보기 왜 x의 한 값만 살펴보아도 충분할까?

R은 x의 일차함수이므로 구간 $0 \le x \le 2b$에서의 최솟값은 한쪽 끝에서 나타난다. 기울기 $\Omega^2 - \omega^2$가 양수이면 $x = 0$에서, 음수이면 $x = 2b$에서이다. 받침대는 매 주기마다 양 끝에 도달하므로, 항상 $R \ge 0$인 것은 해당하는 끝에서 $R \ge 0$인 것과 동치이다.

$\omega < \Omega$인 경우. 최솟값은 $x = 0$(운동의 최저점)에서 나타나므로

$$g + \Omega^2(a-h) + \omega^2 b \ge 0 \iff h \le a + \frac{g}{\Omega^2} + \frac{\omega^2 b}{\Omega^2} = a\left(1 + \frac{1}{k}\right) + \frac{\omega^2 b}{\Omega^2},$$

이어야 한다. 여기서 $\Omega^2 > 0$으로 나누고 $g/\Omega^2 = a/k$를 이용하였다. 이것이 구하는 부등식(inequality)이다.

$\omega > \Omega$인 경우. 이번에는 최솟값이 $x = 2b$(운동의 최고점)에서 나타나므로

$$g + \Omega^2(a-h) + \omega^2 b + 2b(\Omega^2 - \omega^2) \ge 0 \iff h \le a\left(1 + \frac{1}{k}\right) + b\left(2 - \frac{\omega^2}{\Omega^2}\right).$$

이어야 한다.

모든 ω에 대한 한계. 입자가 접촉을 유지한다고 하자.

- $\omega < \Omega$이면 ($b > 0$이므로) $\omega^2 b/\Omega^2 < b$이고, 따라서 $h \le a(1+\frac{1}{k}) + \omega^2 b/\Omega^2 < a(1+\frac{1}{k}) + b$이다.
- $\omega > \Omega$이면 $2 - \omega^2/\Omega^2 < 1$이므로 $h \le a(1+\frac{1}{k}) + b(2-\omega^2/\Omega^2) < a(1+\frac{1}{k}) + b$이다.
- $\omega = \Omega$이면 R에서 x항이 소거되어 $R/m = g + \Omega^2(a-h) + \Omega^2 b$는 상수이고, $R \ge 0$에서 정확히 $h \le a(1+\frac{1}{k}) + b$를 얻는다.

그러므로 어느 경우든

$$h \le a\left(1 + \frac{1}{k}\right) + b$$

이어야 하며, 이는 ω의 값에 관계없이 필요조건이다. $h - b$는 받침대 운동의 중심이 A 아래로 떨어진 깊이이고 $a(1+\frac{1}{k})$는 매달린 입자의 평형 위치의 깊이이므로, 이 결과는 받침대가 입자의 본래 평형 위치보다 낮지 않은 점을 중심으로 진동해야 한다는 뜻이다.

검산

- $a = 1, k = 2, g = 9.8$로 두고 자유 운동을 수치적으로 따라가면 $a\Omega^2 \approx 19.600$인 주기를 얻으며, 이는 $kg = 19.6$과 일치한다.
- 받침대가 정지해 있으면($b = 0$) 두 한계 모두 $h \le a(1+\frac{1}{k})$가 된다. 즉 받침대가 평형점보다 아래에 있으면 안 되며, 그렇지 않으면 용수철이 입자를 들어 올려 떼어 놓는다. 정확히 맞는 결과이다.

- $\omega = \Omega$에서 두 경우의 한계는 모두 $a(1+\frac{1}{k})+b$로 일치하며, 연속성에 의해 당연히 그래야 한다.

흔한 실수

- 운동의 최고점만 확인하는 것. 받침대가 느릴 때($\omega < \Omega$)에는 용수철이 가장 세게 위로 당기는 **최저점**에서 입자가 가장 떨어지기 쉽다.
- 용수철이 압축될 수 있다는 점을 잊는 것. 장력 공식 $kmg(h-x-a)/a$는 부호에 관계없이 성립하므로 경우를 따로 나눌 필요가 없다.

STEP 너머

이것은 사실 강제 진동자(forced oscillator)이다. 용수철은 입자를 고유 진동수(natural frequency) Ω로 진동시키려 하고, 받침대는 진동수 ω를 강요하며, 수직항력은 이 둘을 맞추는 데 필요한 힘이다. 대학의 진동 과목에서는 구동되는 계, 공명(resonance), 그리고 응답이 ω/Ω에 따라 어떻게 달라지는지를 공부한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)가 이러한 내용을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP III 2020, 문제 11

확률과 통계 • 확률변수의 함수

STEP III 2020, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2020년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

핵심 아이디어

순감소함수(strictly decreasing function)는 부등식의 방향을 뒤집는다. 또한 f는 자기 자신의 역함수이므로 $\mathrm{f}(X) \le y$의 양변에 이 함수를 적용하면 X에만 관한 사건을 얻는다. 그다음 기댓값(expectation)은 부분적분(integration by parts)으로 구하는데, 이 과정에서 f'가 f로 바뀐다. 소문항 (ii)에서는 Z와 X 사이의 관계가 두 변수에 대해 대칭이므로, 자기역함수(self-inverse) f에 대해 $Z = \mathrm{f}(X)$이고 소문항 (i)을 적용할 수 있다. 그러면 부등식은 결국 분산(variance)이 양수라는 사실을 말하는 것일 뿐이다.

풀이

소문항 (i)

f^{-1}가 $[a, b]$ 전체에서 정의되므로 f는 $[a, b]$에서 자기 자신으로의 전단사(bijection)이고, 따라서 Y는 $[a, b]$ 안의 값을 가진다. $y \in [a, b]$를 고정하자. f는 순감소이므로 부등식의 양변에 이 함수를 적용하면 부등식의 방향이 바뀌고, 또 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = x$이다. 따라서 $x \in [a, b]$에 대해

$$\mathrm{f}(x) \le y \iff \mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) \ge \mathrm{f}(y) \iff x \ge \mathrm{f}(y).$$

(역방향 함의도 $x \ge \mathrm{f}(y)$에 f를 적용하면 같은 방식으로 성립한다.) X는 $[a, b]$에서 균등분포(uniform distribution)를 따르고 $\mathrm{f}(y) \in [a, b]$이므로

$$\mathrm{P}(Y \le y) = \mathrm{P}\big(X \ge \mathrm{f}(y)\big) = \frac{b - \mathrm{f}(y)}{b - a},$$

가 되어 요구된 식을 얻는다.

미분하면 Y의 확률밀도함수(probability density function)는

$$g(y) = -\frac{\mathrm{f}'(y)}{b-a} \quad \text{단, } a \le y \le b,$$

이고, 그 밖의 범위에서는 0이다. f가 감소함수이므로 이 값은 음이 아니다. 이제 $u = y^2$, $\mathrm{d}v = -\mathrm{f}'(y)\,\mathrm{d}y$로 두고 부분적분하면

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y^2) &= \frac{1}{b-a}\int_a^b y^2\big(-\mathrm{f}'(y)\big)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{b-a}\Big[-y^2\mathrm{f}(y)\Big]_a^b + \int_a^b \frac{2y\,\mathrm{f}(y)}{b-a}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{-b^2a + a^2b}{b-a} + \int_a^b \frac{2y\,\mathrm{f}(y)}{b-a}\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

이다. 여기서 $\mathrm{f}(b) = a$와 $\mathrm{f}(a) = b$를 이용했다. 첫째 항은 $-ab(b-a)/(b-a) = -ab$이다. 적분의 더미 변수(dummy variable) y를 x로 바꿔 쓰면

$$\mathrm{E}(Y^2) = -ab + \int_a^b \frac{2x\,\mathrm{f}(x)}{b-a}\,\mathrm{d}x.$$

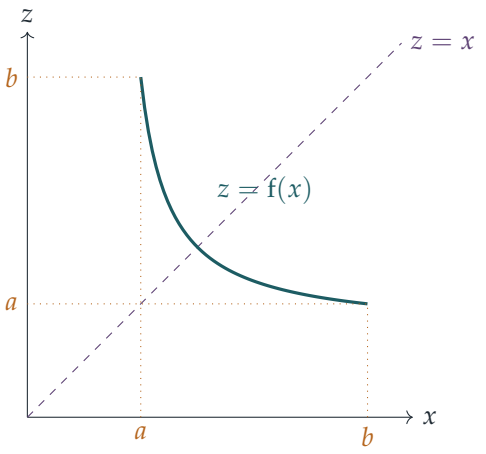
소문항 (ii)

$\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$에서 $c = \dfrac{ab}{a+b}$이고, $\frac{1}{c} > \frac{1}{a}$이므로 $c < a$임에 주의하자. Z에 대해 풀면

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{c} - \frac{1}{X} = \frac{X-c}{cX}, \qquad \text{따라서} \qquad Z = \mathrm{f}(X) \ \text{여기서}\ \mathrm{f}(x) = \frac{cx}{x-c}.$$

$x \ge a > c$이므로 분모는 $[a,b]$에서 양수이다. f가 소문항 (i)의 세 조건을 만족하는지 확인하자.

- $\frac{1}{\mathrm{f}(a)} = \frac{1}{c} - \frac{1}{a} = \frac{1}{b}$이므로 $\mathrm{f}(a) = b$이다. 마찬가지로 $\frac{1}{\mathrm{f}(b)} = \frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a}$이므로 $\mathrm{f}(b) = a$이다.
- $\frac{1}{\mathrm{f}(x)} = \frac{1}{c} - \frac{1}{x}$는 $[a,b]$에서 양수이고 순증가하므로, $\mathrm{f}(x)$는 그 구간에서 순감소한다.
- 관계식 $\frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{1}{c}$는 x와 z에 대해 대칭이다. 따라서 $z = \mathrm{f}(x)$일 필요충분조건은 $x = \mathrm{f}(z)$이고, 이는 $\mathrm{f} = \mathrm{f}^{-1}$임을 뜻한다.



f의 그래프는 (a,b)에서 (b,a)까지 이어지며, 자기역함수라면 마땅히 그래야 하듯 직선 $z=x$에 대해 대칭이다.

생각해 보기 왜 $\mathrm{E}(Z^2)$뿐 아니라 $\mathrm{E}(Z)$까지 구해야 할까?

부등식은 $\mathrm{Var}(Z)>0$에서 나와야 하고, 분산을 구하려면 두 적률(moment)이 모두 필요하다. 로그는 각 적률에 나타나는데, 그 일차 항은 소거되고 제곱 항만 남는다.

두 적분 모두 먼저 나눗셈을 해 두자.

$$\mathrm{f}(x)=c+\frac{c^2}{x-c},\qquad x\,\mathrm{f}(x)=\frac{cx^2}{x-c}=c\Big(x+c+\frac{c^2}{x-c}\Big).$$

$L=\ln\left(\dfrac{b-c}{a-c}\right)$라 두면, $b-c>a-c>0$이므로 이 값은 양수이다. 그러면

$$\mathrm{E}(Z)=\frac{1}{b-a}\int_a^b\Big(c+\frac{c^2}{x-c}\Big)\mathrm{d}x=c+\frac{c^2L}{b-a}.$$

소문항 (i)에 의해

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Z^2)&=-ab+\frac{2c}{b-a}\int_a^b\Big(x+c+\frac{c^2}{x-c}\Big)\mathrm{d}x\\&=-ab+\frac{2c}{b-a}\Big(\frac{b^2-a^2}{2}+c(b-a)+c^2L\Big)\\&=-ab+c(a+b)+2c^2+\frac{2c^3L}{b-a}.\end{aligned}$$

그런데 $c(a+b)=ab$이므로 처음 두 항은 소거된다. 여기서 $\mathrm{E}(Z)^2=c^2+\dfrac{2c^3L}{b-a}+\dfrac{c^4L^2}{(b-a)^2}$를 빼면 L을 포함한 일차 항이 소거되어

$$\mathrm{Var}(Z)=c^2-\frac{c^4L^2}{(b-a)^2}.$$

를 얻는다. Z는 상수가 아니다. 소문항 (i)에 의해 그 분포함수(distribution function) $(b-\mathrm{f}(y))/(b-a)$는 $[a,b]$에서 0부터 1까지 순증가하기 때문이다. 따라서 $\mathrm{Var}(Z)>0$이고, 이로부터

$$L^2 < \frac{(b-a)^2}{c^2}.$$

L과 $(b-a)/c$는 모두 양수이므로 양변에 제곱근을 취할 수 있다.

$$\ln\left(\frac{b-c}{a-c}\right) < \frac{b-a}{c}.$$

검산

- 소문항 (i)에서 가장 간단한 자기역함수의 예인 $\mathrm{f}(x)=a+b-x$를 시험해 보자. 이때 Y는 $[a,b]$에서 균등분포를 따르고, 공식은 $\mathrm{E}(Y^2) = -ab + \frac{2}{b-a}\int_a^b x(a+b-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(a^2+ab+b^2)$를 주는데, 이는 균등분포를 따르는 확률변수의 올바른 이차 적률이다.
- $a=1, b=3$이면 $c=\frac{3}{4}$, $L=\ln 9 \approx 2.197$이고, $(b-a)/c=\frac{8}{3}\approx 2.667$이다. 부등식이 성립하며, $\mathrm{Var}(Z)=\frac{9}{16}-\frac{81}{256}\cdot\frac{(\ln 9)^2}{4}\approx 0.180$이다. 컴퓨터로 f와 f^2를 수치적분하면 같은 분산을 얻는다.
- $b\to a$일 때 부등식의 양변은 모두 0으로 수렴하고, $\mathrm{Var}(Z)\to 0$이다. 이는 당연한 결과인데, Z가 $[a,b]$ 안에 갇히기 때문이다.

흔한 실수

- 감소함수가 부등식의 방향을 뒤집는다는 사실을 잊고 $\mathrm{P}(Y\le y)=\mathrm{P}(X\le \mathrm{f}(y))$라고 쓰는 실수.
- 밀도 $-\mathrm{f}'(y)/(b-a)$에서 음의 부호를 빠뜨리는 실수. 밀도는 음수일 수 없다.
- $\mathrm{Var}(Z)$가 왜 **엄격하게** 양수인지 설명하지 않거나, 양변이 모두 양수임을 밝히지 않고 제곱근을 취하는 실수.

STEP 너머

소문항 (i)은 밀도의 변수변환 공식(transformation rule)의 특수한 경우이다. 즉, $Y=\mathrm{f}(X)$이고 f가 단조함수이면 $g_Y(y)=g_X\big(\mathrm{f}^{-1}(y)\big)\,\big|(\mathrm{f}^{-1})'(y)\big|$이다. $\mathrm{Var}(Z)>0$에서 엄격한 부등식을 얻는 것은 강력한 기법의 한 예이다. $\mathrm{E}(Z)^2\le \mathrm{E}(Z^2)$는 사실 옌센(Jensen) 부등식(또는 코시–슈바르츠(Cauchy–Schwarz) 부등식)이 모습을 바꾼 것이며, 확률변수를 영리하게 고르면 여러 고전적인 부등식을 증명할 수 있다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 두 아이디어를 모두 다룬다.

풀이

STEP III 2020, 문제 12

확률과 통계 • 기하분포와 독립성

STEP III 2020, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2020년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

핵심 아이디어

모든 것은 서로 독립인 기하분포(geometric distribution) 확률변수의 쌍 (X, Y)의 함수이며, $\mathrm{P}(X = x,\, Y = y) = p^2 q^{x+y-2}$이다. 합과 차는 이 결합확률(joint probability)을 (x, y) 격자에서 한 직선을 따라 더해서 다루는 것이 가장 좋고, 최댓값과 최솟값은 $\mathrm{P}(T \le t)$와 같은 누적확률(cumulative probability)을 이용하는 것이 가장 쉽다. 독립성(independence)을 판단할 때는 한 변수의 어떤 값이 다른 변수를 완전히 결정해 버리는 경우를 찾아본다.

풀이

A는 처음 앞면이 나올 때까지 동전을 던지므로, 처음 $k-1$번이 모두 뒷면이고 k번째가 앞면일 때 X는 값 $k \ge 1$을 갖는다:

$$\mathrm{P}(X = k) = pq^{k-1}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

Y에 대해서도 마찬가지이다. 두 사람은 따로 동전을 던지므로 X와 Y는 독립이고,

$$\mathrm{P}(X = x,\, Y = y) = p^2 q^{x+y-2} \qquad (x, y \ge 1).$$

반복해서 사용할 두 가지 사실이 있다. $\mathrm{P}(X > k) = q^k$이고(처음 k번이 모두 뒷면), 따라서 $\mathrm{P}(X \le k) = 1 - q^k$이다. 또 $1 - q^2 = (1-q)(1+q) = p(1+q)$이다.

소문항 (i)

합. S는 $s \ge 2$인 값을 갖는다. $S = s$이려면 $1 \le x \le s-1$에 대하여 $X = x$이고 $Y = s - x$이어야 한다. 이 $s-1$개의 결과는 각각 확률이 $p^2 q^{s-2}$이므로

$$\mathrm{P}(S = s) = (s-1) p^2 q^{s-2}, \qquad s = 2, 3, 4, \ldots$$

최댓값. $T \le t$인 것은 $X \le t$와 $Y \le t$가 모두 성립할 때와 정확히 같으므로, 독립성에 의해 $\mathrm{P}(T \le t) = (1-q^t)^2$이다. 따라서 $t \ge 1$에 대하여

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(T=t) &= \mathrm{P}(T \le t) - \mathrm{P}(T \le t-1) = (1-q^t)^2 - (1-q^{t-1})^2 \\ &= \left[(1-q^t) - (1-q^{t-1})\right]\left[(1-q^t) + (1-q^{t-1})\right] \\ &= (q^{t-1}-q^t)(2-q^{t-1}-q^t) \\ &= pq^{t-1}(2-q^{t-1}-q^t),\end{aligned}$$

이며, 여기서 $q^{t-1}-q^t = q^{t-1}(1-q) = pq^{t-1}$을 이용하였다. 이것이 구하는 결과이다. ($t=1$일 때 이 식은 $p(1-q)=p^2$을 주며, 올바르다.)

소문항 (ii)

차. $U=0$이려면 어떤 $k \ge 1$에 대하여 $X=Y=k$이어야 한다:

$$\mathrm{P}(U=0) = \sum_{k=1}^{\infty} p^2 q^{2k-2} = \frac{p^2}{1-q^2} = \frac{p^2}{p(1+q)} = \frac{p}{1+q}.$$

$u \ge 1$이면 $Y = X+u$ 또는 $X = Y+u$이다. 이 둘은 서로 배반이고 대칭성에 의해 확률이 같으므로

$$\mathrm{P}(U=u) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}(X=k, Y=k+u) = 2\sum_{k=1}^{\infty} p^2 q^{2k+u-2} = \frac{2p^2q^u}{1-q^2} = \frac{2pq^u}{1+q}.$$

최솟값. $W > w$인 것은 $X > w$와 $Y > w$가 모두 성립할 때와 정확히 같으므로 $\mathrm{P}(W > w) = q^{2w}$이고, $w \ge 1$에 대하여

$$\mathrm{P}(W=w) = \mathrm{P}(W > w-1) - \mathrm{P}(W > w) = q^{2w-2} - q^{2w} = (1-q^2)\,q^{2(w-1)}.$$

따라서 W 자체도 "성공" 확률이 $1-q^2$인 기하분포를 따른다. A가 한 번, B가 한 번 던지는 각 회차에서 적어도 한 번 앞면이 나올 확률이 $1-q^2$이기 때문이다.

소문항 (iii)

$S=2$이면 $X, Y \ge 1$이므로 반드시 $X=Y=1$이고, 이때 $T=1$이다. 따라서 $S=2$와 $T=3$은 동시에 일어날 수 없다:

$$\mathrm{P}(S=2 \text{ 이고} T=3) = 0.$$

한편 $0<q<1$이면 $q^2+q^3<2$이므로 $\mathrm{P}(S=2) = p^2 > 0$이고 $\mathrm{P}(T=3) = pq^2(2-q^2-q^3) > 0$이다. 따라서 $\mathrm{P}(S=2) \times \mathrm{P}(T=3) > 0$이고, 양변은 서로 다르다.

소문항 (iv)

U와 W는 독립이다. 모든 $u \geq 0$과 $w \geq 1$에 대하여 $\mathrm{P}(U = u,\, W = w) = \mathrm{P}(U = u)\,\mathrm{P}(W = w)$임을 보여야 한다. U와 W를 모두 알면 작은 값이 w이고 큰 값이 $w + u$임을 알 수 있다.

> ? **생각해 보기** 어떤 쌍 (X, Y)가 $U = u$와 $W = w$를 주는가?

$u = 0$이면 가능한 쌍은 (w, w)뿐이다. $u \geq 1$이면 정확히 두 쌍 $(w,\, w + u)$와 $(w + u,\, w)$가 있으며, 각각의 확률은 $p^2 q^{2w+u-2}$이다.

$u = 0$일 때 $\mathrm{P}(U = 0,\, W = w) = p^2 q^{2w-2}$이고,

$$\mathrm{P}(U = 0)\,\mathrm{P}(W = w) = \frac{p}{1+q} \cdot p(1+q)\, q^{2w-2} = p^2 q^{2w-2}.$$

$u \geq 1$일 때 $\mathrm{P}(U = u,\, W = w) = 2p^2 q^{2w+u-2}$이고,

$$\mathrm{P}(U = u)\,\mathrm{P}(W = w) = \frac{2pq^u}{1+q} \cdot p(1+q)\, q^{2w-2} = 2p^2 q^{2w+u-2}.$$

모든 경우에 두 값이 일치하므로 U와 W는 독립이다.

다른 쌍은 독립이 아니다. 나머지 쌍은 (S, T), (S, U), (S, W), (T, U), (T, W)이다. 두 변수가 독립이 아님을 보이려면 $\mathrm{P}(A = a,\, B = b) \neq \mathrm{P}(A = a)\,\mathrm{P}(B = b)$인 값의 쌍 하나만 찾으면 충분하다.

> ? **생각해 보기** S 또는 T의 어떤 값 하나가 나머지를 모두 결정하는가?

사건 $S = 2$와 사건 $T = 1$은 같은 사건 $\{X = Y = 1\}$이며, 그 확률은 $p^2 > 0$이다. 이 사건에서 $T = 1, U = 0, W = 1$이다. $0 < p, q < 1$이므로 소문항 (i)과 (ii)의 식에 의해 아래 목록에 나오는 T, U, W의 모든 값은 양의 확률을 갖는다. 따라서

- (S, T): 소문항 (iii)에 의해 $\mathrm{P}(S = 2,\, T = 3) = 0 \neq \mathrm{P}(S = 2)\,\mathrm{P}(T = 3)$;
- (S, U): $\mathrm{P}(S = 2,\, U = 1) = 0$이지만 $\mathrm{P}(S = 2)\,\mathrm{P}(U = 1) > 0$;
- (S, W): $\mathrm{P}(S = 2,\, W = 2) = 0$이지만 $\mathrm{P}(S = 2)\,\mathrm{P}(W = 2) > 0$;
- (T, U): $\mathrm{P}(T = 1,\, U = 1) = 0$이지만 $\mathrm{P}(T = 1)\,\mathrm{P}(U = 1) > 0$;
- (T, W): $\mathrm{P}(T = 1,\, W = 2) = 0$이지만 $\mathrm{P}(T = 1)\,\mathrm{P}(W = 2) > 0$.

그러므로 S, T, U, W 가운데 독립인 쌍은 U와 W뿐이다.

검산

- 각 분포의 합은 1이다. 예를 들어 $\sum_{t \geq 1} \mathrm{P}(T = t)$는 망원급수(telescoping series)가 되어 $\lim(1 - q^t)^2 = 1$이고, $\frac{p}{1+q} + \sum_{u \geq 1} \frac{2pq^u}{1+q} = \frac{p}{1+q}\left(1 + \frac{2q}{p}\right) = \frac{p+2q}{1+q} = 1$이다.

- $p = q = \frac{1}{2}$일 때 $\mathrm{P}(T = 2) = \frac{1}{4}\left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{16}$이며, 이는 세 결과 $(1,2), (2,1), (2,2)$를 나열하여 얻은 확률 $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$과 일치한다.
- $p = q = \frac{1}{2}$일 때 $\mathrm{P}(U = 1, W = 1) = \mathrm{P}\{(1,2), (2,1)\} = \frac{1}{4}$이고, $\mathrm{P}(U = 1)\,\mathrm{P}(W = 1) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$이므로, 독립성이 요구하는 대로이다.
- 모든 식과 U, W의 독립성은 $p = 0.3, 0.55, 0.8$에 대하여 결합분포를 합산하는 컴퓨터 계산으로 확인하였다.

흔한 실수

- $u \geq 1$일 때 $\mathrm{P}(U = u)$에서 인수 2를 빠뜨리거나, $X = Y$가 한 번만 세어지는 $u = 0$일 때 잘못 포함하는 실수.
- 경우를 직접 더해서 $\mathrm{P}(T = t)$를 구하려다 $X = Y = t$를 두 번 세는 실수. 누적확률을 이용하면 이를 피할 수 있다.
- 값의 쌍 하나만 확인하면 독립성이 증명된다고 생각하는 실수. 독립성을 보이려면 **모든** u와 w를 확인해야 하지만, 종속성은 한 번 실패하는 것만으로 충분하다.

STEP 너머

U와 W의 독립성은 무기억성(memoryless property)의 이산 형태이다. 시각 W에 처음 앞면이 나오고 나면, 다른 사람이 남은 시간 동안 기다리는 시간은 그때까지 얼마나 걸렸는지와 상관없이 새로운 기하분포 확률변수가 된다. 서로 독립인 지수분포(exponential distribution) 확률변수에 대한 연속 버전은 최솟값과, 최솟값에서 최댓값까지의 간격이 서로 독립이라는 것으로, 이는 푸아송 과정(Poisson process)과 대기행렬 이론(queueing theory)의 바탕이 된다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)에서 이러한 개념들을 전개한다.

Beyond STEP

STEP은 대부분의 학생이 학창 시절에 치르는 수학 시험 가운데 가장 어려운 시험이다. 또한 가장 훌륭한 시험 가운데 하나이기도 하다. 문제는 짧고 낯설며 깊이가 있고, 그중 가장 뛰어난 문제들은 대학 수학의 작은 조각이 모습을 감추고 있는 것이다.

이 책은 1987년 첫 시험에 앞서 나온 예시 시험지(specimen papers)부터 2025년 시험지까지 가운데 가장 흥미로운 STEP 문제들을 골라, 각 문제를 하나의 문으로 삼는다. 모든 문제는 뛰어난 학생이 풀어 가면서 던질 법한 질문들과 함께 꼼꼼하게 풀이하고, 그런 다음 책은 그 문을 지나 한 걸음 더 나아간다. 그 아이디어가 어디에서 왔는지, 대학에서는 무엇으로 발전하는지, 그리고 다음에는 무엇을 읽으면 좋은지를 살펴본다.

이 책은 STEP을 준비하면서 기출 문제 연습 이상의 것을 원하는 재능 있는 예비 수학자를 위해 쓰였다. 수학과 학부생처럼 생각하기 시작하고, 앞으로 무엇이 자신을 기다리고 있는지 알아보고 싶은 학생들을 위한 책이다.

- 순수수학(pure mathematics), 역학(mechanics), 확률(probability)과 통계(statistics)를 아우르는 13개의 장
- 이 36개의 STEP 기출 문제와 각 문제의 안내식 풀이
- 모든 문제 뒤에 숨은 대학 수학
- 답이 실린 후속 연습 문제와 더 읽을거리

2020년 풀이. 책 전체와 모든 장,
모든 풀이를 다음 주소에서 무료로 읽고, 내려받고, 공유할 수 있다.

beyondstep.keithmcnulty.org

본문은 퍼블릭 도메인(CC0 1.0)으로 공개한다. STEP 문제 © Cambridge University Press & Assessment.

