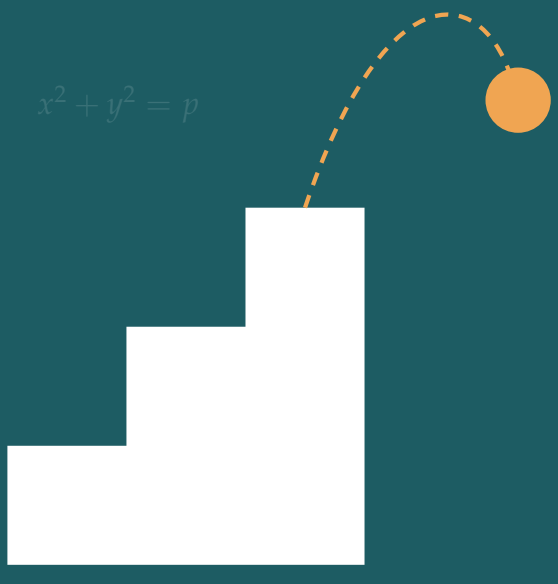
STEP 대비 · 대학 수학

Beyond STEP

STEP I, II 및 III

2019년 풀이



KEITH McNULTY

Beyond STEP

STEP 기출문제로 여는
대학 수학의 세계

STEP I, II 및 III

2019년 풀이

Keith McNulty

Beyond STEP: STEP 기출문제로 여는 대학 수학의 세계

2019년 풀이

2019년 STEP 문제지(STEP I, II 및 III)의 35개 문제 전체에 대한 풀이. 견본 문제지 이후 모든 STEP 문제의 풀이와 *Beyond STEP* 책 전체, 그리고 각 장을 `beyondstep.keithmcnulty.org`에서 무료로 읽고 내려받을 수 있다.

풀이를 읽기 전에 먼저 문제를 제대로 풀어 보자. 모든 답은 수치적으로 검증하였지만, 풀이가 이렇게 많으면 실수가 어느 정도 있을 수밖에 없다. 무언가 잘못된 것처럼 보이면 자신의 풀이를 믿고 꼼꼼히 확인해 보자.

영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.

2026년 11월 온라인 초판 발행.

이 PDF에서 지은이가 직접 만든 모든 것, 곧 본문, 풀이, 그림, 연습문제와 해답은 크리에이티브 커먼즈 CC0 1.0 Universal 라이선스에 따라 퍼블릭 도메인(public domain)으로 공개한다. 누구든 허락을 구하지 않고 어떤 목적으로든 복사하고, 고쳐 쓰고, 공유할 수 있다. 자세한 내용은 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`을 보라.

여기에서 다루는 STEP 문제의 저작권은 Cambridge University Press & Assessment에 있다. 문제는 이 책에 싣지 않았으며, 각 문제마다 공식 출처인 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스나 OCR의 기출 시험지로 가는 링크를 달았다.

오류 제보는 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty에 이슈로 남겨 주기 바란다.

차례

STEP I

Q1 삼각함수의 최적화 순수수학 . . . 3

Q2 매개변수 곡선의 접선 순수수학 . . . 7

Q3 적분 순수수학 . . . 11

Q4 사차방정식의 인수분해 순수수학 . . . 14

Q5 3차원 벡터 순수수학 . . . 18

Q6 부등식과 한계 순수수학 . . . 23

Q7 무리성과 합동식 순수수학 . . . 28

Q8 치환적분 순수수학 . . . 32

Q9 넘어짐과 마찰 역학 . . . 35

Q10 포물체 운동 역학 . . . 39

Q11 기하분포 확률과 통계 . . . 43

STEP II

Q1 삼차함수의 접선 순수수학 . . . 47

Q2 역함수의 적분 순수수학 . . . 51

Q3 다항식 근의 한계 순수수학 . . . 55

Q4 삼각함수의 망원곱 순수수학 . . . 59

Q5 반복의 고정점 순수수학 . . . 62

Q6 일계 미분방정식 순수수학 . . . 66

Q7 벡터와 내적 순수수학 . . . 71

Q8 곱셈적 행렬 함수 순수수학 . . . 75

Q9 원점으로부터 포물체까지의 거리 역학 . . . 79

Q10 강체의 평형 역학 . . . 83

Q11 삼각형의 개수 세기 확률과 통계 . . . 88

Q12 연속 분포와 분위수 확률과 통계 92

STEP III

Q1 연립 미분방정식 순수수학 96
Q2 함수방정식 순수수학 100
Q3 행렬의 불변 직선 순수수학 104
Q4 근과 계수 순수수학 108
Q5 치환적분 순수수학 112
Q6 복소평면 위의 원 순수수학 116
Q7 곡선 그리기 순수수학 120
Q8 벡터와 3차원 기하 순수수학 126
Q9 움직이는 반구 위의 입자 역학 130
Q10 비스듬한 충돌 역학 134
Q11 푸아송 솎아내기 확률과 통계 138
Q12 무작위 부분집합 확률과 통계 142

풀이

STEP I 2019, 문제 1

순수수학 • 삼각함수의 최적화

> **STEP I 2019, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP I 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

핵심 아이디어

모든 것은 직선이 좌표축과 만나는 위치에서 출발한다. 둘레(perimeter)의 경우, 고정점 $P = (1, k)$가 빗변(hypotenuse) XY를 두 조각으로 나누고, 각 조각은 한 변의 길이를 알고 있는 작은 직각삼각형의 빗변이 되므로 제곱근을 전개할 필요가 전혀 없다. 최솟값(minimum)의 경우, 넓이는 곱이 일정한 두 항의 합이고(산술-기하 평균 부등식을 쓸 상황이다), 둘레의 도함수(derivative)는 $\cos^2\theta = (1-\sin\theta)(1+\sin\theta)$를 이용하면 놀랍도록 간단해진다.

풀이

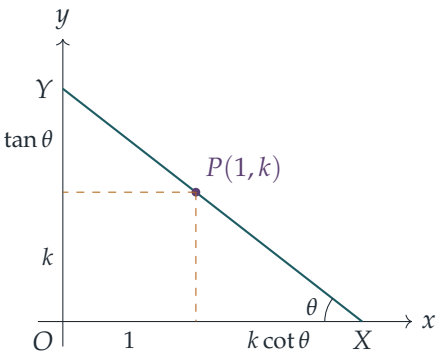
$(1, k)$를 지나고 기울기(gradient)가 $-\tan\theta$인 직선은

$$y - k = -\tan\theta\,(x-1).$$

이다. $y = 0$을 대입하면 $x - 1 = k\cot\theta$이고, $x = 0$을 대입하면 $y = k + \tan\theta$이므로

$$X = (1 + k\cot\theta,\ 0), \qquad Y = (0,\ k + \tan\theta).$$

이다. $k > 0$이고 $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$이므로 두 절편(intercept)은 모두 양수이다. 따라서 OXY는 제1사분면에 놓인 진짜 직각삼각형이고, $P = (1, k)$는 그 빗변 위에 있다.



소문항 (i)

삼각형은 O에서 직각이므로

$$A = \tfrac{1}{2}(1 + k\cot\theta)(k + \tan\theta) = \tfrac{1}{2}\big(k + \tan\theta + k^2\cot\theta + k\big)$$
$$= k + \tfrac{1}{2}\big(\tan\theta + k^2\cot\theta\big),$$

이다. 여기서 $\cot\theta\tan\theta = 1$을 이용하였다.

최솟값을 구하자. $\tan\theta$와 $k^2\cot\theta$는 모두 양수이고 그 곱은 상수 k^2이다. 산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)에 의해

$$\tan\theta + k^2\cot\theta \geq 2\sqrt{\tan\theta \cdot k^2\cot\theta} = 2k,$$

이고, 등호는 정확히 $\tan\theta = k^2\cot\theta$, 즉 $\tan\theta = k$일 때 성립한다($k > 0$이므로 이 값은 범위 안의 어떤 θ에서 실제로 얻어진다). 따라서 $A \geq k + k = 2k$이고,

$$A_{\min} = 2k.$$

이다. (미분해도 같은 결과를 얻는다. $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\theta} = \frac{1}{2}(\sec^2\theta - k^2\operatorname{cosec}^2\theta) = 0$이 되는 것은 $\tan^2\theta = k^2$일 때이다.) 최소일 때 $X = (2, 0)$, $Y = (0, 2k)$이므로 P는 XY의 중점이다.

소문항 (ii)

두 직각변은 $OX = 1 + k\cot\theta$와 $OY = k + \tan\theta$이다. 빗변은 그림에서처럼 P에서 나누어 생각한다.

- P에서 Y까지: 수평 거리가 1이고 직선이 수평선과 이루는 각이 θ이므로 $PY = 1/\cos\theta = \sec\theta$이다.
- P에서 X까지: 수직 거리가 k이므로 $PX = k/\sin\theta = k\operatorname{cosec}\theta$이다.

네 길이를 더하면

$$L = 1 + \tan\theta + \sec\theta + k\big(1 + \cot\theta + \operatorname{cosec}\theta\big),$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

생각해 보기 도함수에는 $\sec^2\theta + \sec\theta\tan\theta$가 들어 있다. 이것을 0으로 놓기 전에 훨씬 간단하게 만드는 방법이 있을까?

있다. 항별로 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta} = \sec^2\theta + \sec\theta\tan\theta - k\left(\operatorname{cosec}^2\theta + \operatorname{cosec}\theta\cot\theta\right) = \frac{1+\sin\theta}{\cos^2\theta} - k\,\frac{1+\cos\theta}{\sin^2\theta}.$$

이다. 그런데 $\cos^2\theta = (1-\sin\theta)(1+\sin\theta)$이고 $\sin^2\theta = (1-\cos\theta)(1+\cos\theta)$이며, $1+\sin\theta, 1+\cos\theta$는 0이 아니므로 약분할 수 있다.

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta} = \frac{1}{1-\sin\theta} - \frac{k}{1-\cos\theta}.$$

이것은 정확히 $1-\cos\theta = k(1-\sin\theta)$일 때 0이다. 따라서 최솟값은

$$\frac{1-\cos\alpha}{1-\sin\alpha} = k,$$

를 만족하는 $\theta = \alpha$에서 나타나며, 이것이 보여야 할 내용이었다. (사실 이 정류점(stationary point)은 유일하며 최소점이다. $(0, \frac{1}{2}\pi)$에서 θ가 증가하면 $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta}$의 첫째 항은 증가하고 둘째 항은 감소하므로, $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta}$는 증가함수이고 음에서 양으로 단 한 번 부호가 바뀐다.)

생각해 보기 최솟값에서 k를 어떻게 없앨 수 있을까?

L의 항들을 공통분모로 묶는다.

$$1+\tan\alpha+\sec\alpha = \frac{1+\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha}, \qquad 1+\cot\alpha+\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1+\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

$s = \sin\alpha, c = \cos\alpha, k = \dfrac{1-c}{1-s}$로 쓰면 둘째 부분은

$$k\,\frac{1+s+c}{s} = \frac{(1+s+c)(1-c)}{s(1-s)} = \frac{1+s-sc-c^2}{s(1-s)} = \frac{s^2+s-sc}{s(1-s)} = \frac{1+s-c}{1-s},$$

이 된다. 여기서 $1-c^2 = s^2$을 이용하였다. 따라서

$$\begin{aligned} L_{\min} = \frac{1+s+c}{c} + \frac{1+s-c}{1-s} &= \frac{(1+s+c)(1-s)+c(1+s-c)}{c(1-s)} \\ &= \frac{1-s^2+c-sc+c+sc-c^2}{c(1-s)} \\ &= \frac{2c}{c(1-s)}, \end{aligned}$$

이다. $1-s^2-c^2 = 0$이기 때문이다. 그러므로

$$L_{\min} = \frac{2}{1-\sin\alpha}.$$

이다.

검산

$k = 1$로 놓자. 그러면 $\tan\theta = 1$에서 $X = (2,0)$, $Y = (0,2)$이고 $A = 2 = 2k$로 예측과 같다. 둘레 조건 $(1-\cos\alpha)/(1-\sin\alpha) = 1$에서 $\alpha = \frac{1}{4}\pi$이고, $2/(1-\frac{1}{\sqrt{2}}) = 4+2\sqrt{2} \approx 6.828$인데, 이는 꼭짓점이 $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,2)$인 삼각형의 둘레 $2+2+2\sqrt{2}$와 정확히 일치한다. 다른 여러 k 값에 대해서도 θ에 대한 컴퓨터 탐색으로 두 최솟값과 둘레가 최소가 되는 위치를 확인하였다.

흔한 실수

- 빗변을 P에서 나누지 않고 $\sqrt{(1+k\cot\theta)^2+(k+\tan\theta)^2}$를 전개하는 것.
- 정리하지 않은 도함수를 0으로 놓고 헤매는 것. 먼저 $1+\sin\theta$와 $1+\cos\theta$를 약분하라.
- 최종 답에 k를 남겨 두는 것. 문제는 최솟값을 α만으로 나타내기를 요구한다.

STEP 너머

이 깔끔한 답에는 기하학적 설명이 있다. P를 지나면서 둘레를 최소로 하는 직선은 두 좌표축에 모두 접하는 원(OXY의 방접원(excircle))에 P에서 접하는 직선이며, 이때 둘레는 O에서 그 원까지의 접선 길이의 두 배가 된다. 이 원은 P를 지나고 반지름이 r인 원으로, $r = 1/(1-\sin\alpha)$이다. "직선이 P를 지난다"와 같은 제약 조건이 붙은 최적화 문제는 대학 1학년 미적분학 과목에서 라그랑주 승수(Lagrange multipliers)를 배우는 출발점이 된다. 이런 흐름의 문제를 더 많이 보려면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제집)를 참고하라.

풀이

STEP I 2019, 문제 2

순수수학 • 매개변수 곡선의 접선

> **STEP I 2019, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP I 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

핵심 아이디어

매개변수 t에서의 기울기(gradient)가 그냥 t가 되도록 매개변수화(parametrisation)를 골랐기 때문에, 모든 접선(tangent line)이 매우 깔끔하게 나온다. 그러면 두 접선이 만나는 점을 찾는 일은 세제곱의 차(difference of cubes)를 인수분해하는 문제가 되고, 수직(perpendicular) 조건 $pq = -1$을 이용하면 모든 것을 합 $p + q$로 다시 쓸 수 있다. 공통점을 구할 때는 한 매개변수화를 다른 쪽에 대입하면 중근(repeated root)을 가진 다항식이 나오는데, 이 중근은 기하학적으로 무언가를 말해 준다.

풀이

접선

$x = 3t^2, y = 2t^3$이면

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{6t^2}{6t} = t \qquad (t \neq 0).$$

따라서 $(3p^2, 2p^3)$에서의 접선은 기울기가 p이고 방정식은

$$y - 2p^3 = p\,(x - 3p^2) \quad \Longrightarrow \quad y = px - 3p^3 + 2p^3 = px - p^3,$$

이므로 요구한 결과를 얻는다. ($p = 0$일 때 그 점은 원점이며 첨점(cusp)이다. 그곳에서 곡선은 $y = \pm 2(x/3)^{3/2}$이고, 이는 x축 $y = 0$에 접하므로 공식은 여전히 성립한다.)

두 접선이 만나는 점

$p \neq q$일 때, 접선 $y = px - p^3$과 $y = qx - q^3$은

$$(p - q)\,x = p^3 - q^3 = (p - q)(p^2 + pq + q^2).$$

인 곳에서 만난다. $p \neq q$이므로 $p-q$로 나눌 수 있고, $x = p^2+pq+q^2$를 얻으며, 이어서

$$y = px - p^3 = p^3 + p^2q + pq^2 - p^3 = pq(p+q).$$

따라서 두 접선은 다음 점에서 만난다.

$$\left(p^2+pq+q^2,\ pq(p+q)\right).$$

두 접선의 기울기는 p와 q이므로, 두 접선이 수직일 필요충분조건은 $pq = -1$이다. $u = p+q$라 두면 $p^2+pq+q^2 = (p+q)^2 - pq = u^2+1$이고 $pq(p+q) = -u$이다. 그러므로 수직인 두 접선은 $(u^2+1,\ -u)$에서 만나며, 이는 요구한 결과이다.

? **생각해 보기** $\widetilde{C}$의 모든 점이 실제로 수직인 접선 쌍에서 나오는가?

그렇다. 임의의 실수 u가 주어지면 $p+q=u$, $pq=-1$이어야 하므로 p와 q는 $z^2-uz-1=0$의 두 근이다. 이 방정식의 판별식(discriminant) u^2+4는 양수이므로 항상 서로 다른 두 실근이 존재한다. 따라서 $\widetilde{C}$는 정확히 C에 수직인 두 접선을 그을 수 있는 점들의 집합이다.

두 곡선 위에 모두 있는 점

매개변수를 소거하면 $\widetilde{C}$는 포물선 $x = y^2+1$이다. C 위의 점 $(3t^2, 2t^3)$이 이 포물선 위에 있을 필요충분조건은

$$3t^2 = 4t^6+1 \quad\Longleftrightarrow\quad 4s^3-3s+1=0, \quad \text{여기서} s = t^2.$$

이다. $s=-1$이 근이므로 다음과 같이 인수분해할 수 있다.

$$4s^3-3s+1 = (s+1)(4s^2-4s+1) = (s+1)(2s-1)^2.$$

$s = t^2 \geq 0$이므로 가능한 것은 $s=\frac{1}{2}$뿐이고, 따라서 $t = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$이다. 그러면 $x = 3t^2 = \frac{3}{2}$, $y = 2t^3 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$이다. 공통점은

$$\left(\tfrac{3}{2},\ \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{그리고} \quad \left(\tfrac{3}{2},\ -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

이다.

? **생각해 보기** 중복된 인수 $(2s-1)^2$은 무엇을 말해 주는가?

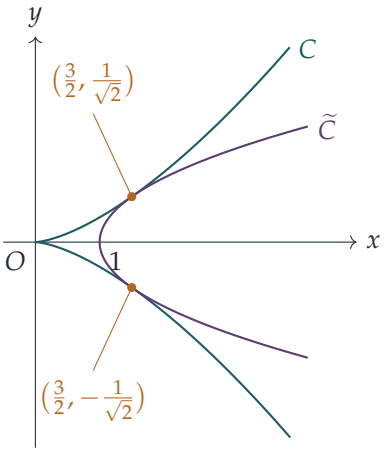
중근은 보통 접함(tangency)을 나타내며, 여기서도 실제로 그렇다. $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$에서 C의 기울기는 $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$이다. $\widetilde{C}$에서는 $x = y^2+1$로부터 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2/\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$를 얻으며, 이는 같은 값이다. 대칭성에 의해 아래쪽 점에서도 마찬가지이다. 따라서 두 곡선은 두 점 모두에서 서로 접하며 교차하지 않는다.

그래프 그리기

C에서 t를 소거하면 $y^2 = \frac{4}{27}x^3$ $(x \geq 0)$를 얻는다. 이는 반삼차 포물선(semicubical parabola)으로, x축에 대하여 대칭이고 원점에 왼쪽을 향한 첨점이 있다. $\widetilde{C}$는 꼭짓점(vertex)이 $(1,0)$이고 오른쪽으로 열린 포물선 $y^2 = x - 1$이다. 어느 곡선이 다른 곡선의 바깥에 있는지 알아보기 위해, $x \geq 1$에서 두 y^2 값을 비교하자.

$$f(x) = \tfrac{4}{27}x^3 - (x-1), \qquad f'(x) = \tfrac{4}{9}x^2 - 1,$$

따라서 f는 $x \geq 1$에서 $x = \frac{3}{2}$일 때 최솟값을 가지며, 이때 $f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$이다. 그러므로 $f(x) \geq 0$이고, 등호는 $x = \frac{3}{2}$일 때만 성립한다. 따라서 $\widetilde{C}$는 C의 안쪽(x축에 더 가까운 쪽)에 있으며 두 공통점에서 C에 접한다.



검산

- $p = 1, q = -1$로 잡자(그러면 $pq = -1, u = 0$). 접선은 $y = x - 1$과 $y = -x + 1$이며, 이 둘은 수직이고 $(u^2 + 1, -u)$가 예측하는 대로 $\widetilde{C}$의 꼭짓점 $(1,0)$에서 만난다.
- $p = 2, q = -\frac{1}{2}$로 잡으면 $u = \frac{3}{2}$이다. 접선 $y = 2x - 8$과 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}$은 $\frac{5}{2}x = \frac{65}{8}$인 곳에서 만나므로 $x = \frac{13}{4} = u^2 + 1, y = -\frac{3}{2} = -u$이다.
- 점 $(1.5, 0.7071)$은 $y^2 = \frac{4}{27}x^3$($\frac{4}{27} \cdot \frac{27}{8} = \frac{1}{2}$이므로)과 $y^2 = x - 1$을 모두 만족한다. 컴퓨터로 확인한 결과 $3t^2 - 4t^6 - 1$은 결코 0보다 커지지 않았으므로, 다른 공통점은 없다.

흔한 실수

- $s = t^2$이 음수일 수 없다는 사실을 잊고 근 $s = -1$을 사용하려고 하는 것.
- 포물선이 공통점에서 C에 접하는 대신 C를 가로지르도록 그리는 것.

STEP 너머

곡선 $\widetilde{C}$는 C의 **직교 접선 궤적**(orthoptic)이다. 즉 C에 수직인 두 접선을 그을 수 있는 점들의 자취이며, 포물선의 경우에는 준선(directrix)이 된다. 곡선을 그 접선들의 족으로 기술하는 관점은 포락선(envelope)과 사영기하학(projective geometry)의 쌍대성(duality)으로 이어진다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)에 이런 종류의 문제가 더 실려 있다.

풀이

STEP I 2019, 문제 3

순수수학 • 적분

> **STEP I 2019, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP I 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

핵심 아이디어

분모와 분자에 $1-\sin x$를 곱하면 $1+\sin x$가 $1-\sin^2 x=\cos^2 x$로 바뀌고, $\cos x$의 거듭제곱을 분모로 하는 식은 모두 표준적인 조각 $\sec^2 x$, $\sec x\tan x$, $\tan^2 x\sec^2 x$, $\sin x/\cos^4 x$로 나뉜다. 이들은 모두 보자마자 적분할 수 있다. 나머지 두 적분도 모양만 바뀐 같은 기법이다. 두 번째 적분은 $1+\cos x$ 꼴의 적분이 되는데, 치환(substitution) $x=\frac{1}{2}\pi-u$를 하면 첫 번째와 같은 꼴이 된다. 세 번째 적분은 인수 $1-\sin x$를 제곱하여 곱한다.

풀이

첫 번째 적분

$(1+\sin x)(1-\sin x)=1-\sin^2 x=\cos^2 x$이므로

$$\frac{1}{1+\sin x}=\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}=\sec^2 x-\sec x\tan x.$$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan x=\sec^2 x$이고 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec x=\sec x\tan x$임을 알고 있으므로

$$\int\frac{1}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x=\tan x-\sec x+C. \qquad (*)$$

$\tan\frac{1}{4}\pi=1$, $\sec\frac{1}{4}\pi=\sqrt{2}$, $\tan 0=0$, $\sec 0=1$을 이용하면

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi}\frac{1}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x=\left(1-\sqrt{2}\right)-\left(0-1\right)=2-\sqrt{2}.$$

(적분 구간 전체에서 $\sin x<1$이므로 0을 곱하는 일이 없어서, $1-\sin x$를 곱해도 괜찮다.)

두 번째 적분

분모와 분자에 $\cos x$를 곱하면($[\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{3}\pi]$에서 0이 아니다)

$$\frac{1}{1+\sec x} = \frac{\cos x}{\cos x + 1} = 1 - \frac{1}{1+\cos x}.$$

생각해 보기 $\dfrac{1}{1+\cos x}$에 $(*)$를 어떻게 이용할 수 있을까?

$\cos x = \sin(\frac{1}{2}\pi - x)$이므로 $u = \frac{1}{2}\pi - x$로 치환하면 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$이다. $x = \frac{1}{4}\pi$일 때 $u = \frac{1}{4}\pi$이고, $x = \frac{1}{3}\pi$일 때 $u = \frac{1}{6}\pi$이다. 따라서

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \frac{1}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \frac{1}{1+\sin u}\,\mathrm{d}u &= \Big[\tan u - \sec u\Big]_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \\ &= (1-\sqrt{2}) - \Big(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}\Big) = 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{3}},\end{aligned}$$

여기서 $\tan\frac{1}{6}\pi = 1/\sqrt{3}$과 $\sec\frac{1}{6}\pi = 2/\sqrt{3}$을 이용하였다. 구간의 길이는 $\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{12}\pi$이므로

$$\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \frac{1}{1+\sec x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{12} - \Big(1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\Big) = \frac{\pi}{12} + \sqrt{2} - 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(마찬가지로 $\frac{1}{1+\cos x}$에 $\frac{1-\cos x}{1-\cos x}$를 곱하여 $\operatorname{cosec}^2 x - \cot x \operatorname{cosec} x$를 얻을 수도 있다. 그 부정적분(antiderivative)은 $\operatorname{cosec} x - \cot x = \tan\frac{1}{2}x$이고, $\tan\frac{1}{8}\pi = \sqrt{2} - 1$이므로 같은 답이 나온다.)

세 번째 적분

이번에는 분모와 분자에 $(1-\sin x)^2$을 곱하여 분모를 $\cos^4 x$로 만든다.

$$\frac{1}{(1+\sin x)^2} = \frac{(1-\sin x)^2}{\cos^4 x} = \frac{1+\sin^2 x}{\cos^4 x} - \frac{2\sin x}{\cos^4 x}.$$

첫 번째 조각은 분자의 1을 $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$로 바꾸어 쓴다.

$$\frac{1+\sin^2 x}{\cos^4 x} = \frac{\cos^2 x + 2\sin^2 x}{\cos^4 x} = \sec^2 x + 2\tan^2 x \sec^2 x.$$

생각해 보기 $\tan^2 x \sec^2 x$와 $\sin x / \cos^4 x$를 적분하면 무엇이 될까?

둘 다 $f(x)^n f'(x)$ 꼴이다. $f = \tan x$이면 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan^3 x = 3\tan^2 x \sec^2 x$이고, $f = \cos x$이면 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x)^{-3} = 3\sin x\,(\cos x)^{-4}$이다. 따라서

$$\int \frac{1}{(1+\sin x)^2}\,\mathrm{d}x = \tan x + \tfrac{2}{3}\tan^3 x - \tfrac{2}{3}\sec^3 x + C.$$

$x = \frac{1}{4}\pi$에서는 $\tan = 1$, $\sec^3 = (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$이므로 $1 + \frac{2}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{2}$이다. $x = 0$에서는 $0 + 0 - \frac{2}{3}$이다. 그러므로

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{1}{(1+\sin x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3} = \frac{7-4\sqrt{2}}{3}.$$

검산

- 크기: $[0, \frac{1}{4}\pi]$에서 첫 번째 피적분함수(integrand)는 1에서 $2-\sqrt{2} \approx 0.59$로 감소하므로, 적분값은 0.46과 0.79 사이에 있다. $2-\sqrt{2} \approx 0.586$은 이에 맞는다. 마찬가지로 세 번째 피적분함수는 첫 번째 피적분함수의 제곱이므로 적분값이 더 작아야 한다. 실제로 $(7-4\sqrt{2})/3 \approx 0.448$이다.
- 구한 부정적분을 미분해 본다. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tan x - \sec x) = \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{1+\sin x}$.
- 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 세 적분은 각각 0.585786, 0.098663, 0.447715이고, 이는 $2-\sqrt{2}$, $\frac{\pi}{12} + \sqrt{2} - 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{1}{3}(7-4\sqrt{2})$와 소수점 아래 열 자리까지 일치한다.

흔한 실수

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec x$나 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec^3 x$에서 부호를 틀리는 실수: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x)^{-n} = n\sin x(\cos x)^{-n-1}$이므로 둘 다 양의 부호이다.
- 첫 번째와 세 번째 적분에서 아래끝을 빠뜨리는 실수: $\sec 0 = 1$이지 0이 아니다.
- $u = \frac{1}{2}\pi - x$로 치환한 뒤 적분 구간의 위끝과 아래끝을 잘못 바꾸는 실수: $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$에서 나오는 음의 부호는 위끝과 아래끝을 다시 증가하는 순서로 되돌리는 데 쓰인다.

STEP 너머

"켤레(conjugate)"를 곱하는 기법은 체계적인 방법의 특수한 경우이다. 치환 $t = \tan\frac{1}{2}x$를 하면 $\sin x$와 $\cos x$의 유리함수(rational function)는 모두 t의 유리함수가 되고, 이는 부분분수(partial fractions)로 적분할 수 있다. ($\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}$에 대해 얻은 답 $\tan\frac{1}{2}x$가 이를 암시한다.) 대학 1학년 해석학(analysis)에서는 이런 적분이 애초에 존재하는지도 묻는다. 예를 들어 $1+\sin x$가 0이 되는 $x = -\frac{1}{2}\pi$ 근처에서 그렇다. 두 아이디어 모두 Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)를 참고하고, 이런 형태의 적분을 더 많이 보려면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)를 참고하라.

풀이

STEP I 2019, 문제 4

순수수학 • 사차방정식의 인수분해

STEP I 2019, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP I 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

핵심 아이디어

x^3항이 없는 사차식(quartic)의 근을 모두 더하면 0이다. 따라서 네 근을 두 쌍으로 나누면 두 쌍의 합은 서로 부호만 반대이고, 바로 이 때문에 두 이차 인수의 x의 계수가 s와 $-s$가 된다. 이제 계수를 비교(comparing coefficients)하면 세 개의 방정식을 얻고, p와 q를 소거하면 s^2에 대한 삼차방정식이 남는다. 소문항 (i)은 마지막 단계의 무리수(surd) 계산을 돕기 위해 있다.

풀이

소문항 (i)

$m+n\sqrt{2}$를 제곱하면 $m^2+2n^2+2mn\sqrt{2}$이므로 $m^2+2n^2=3$이고 $mn=1$이어야 한다. $m=n=1$로 두면 성립한다.

$$(1+\sqrt{2})^2 = 1+2\sqrt{2}+2 = 3+2\sqrt{2},$$

그리고 $1+\sqrt{2}>0$이므로 이것이 양의 제곱근이다. 따라서 $m=1, n=1$이고

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}.$$

마찬가지로 $(\sqrt{2}-1)^2 = 3-2\sqrt{2}$이므로 $\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$이다. 이 두 결과가 모두 필요하다.

소문항 (ii)

인수분해가 가능한 이유. 네 실근을 a, b, c, d라 하면 $\mathrm{f}(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$이다. f에서 x^3의 계수는 $-(a+b+c+d)$이고 이것이 0이므로 $c+d=-(a+b)$이다. 근을

쌍으로 묶으면

$$\mathrm{f}(x) = \big(x^2 - (a+b)x + ab\big)\big(x^2 - (c+d)x + cd\big) = \big(x^2 + sx + p\big)\big(x^2 - sx + q\big),$$

이고, 여기서 $s = -(a+b)$, $p = ab$, $q = cd$이며, 근이 실수이므로 이들은 모두 실수이다.

세 개의 방정식. 전개하면

$$(x^2 + sx + p)(x^2 - sx + q) = x^4 + (p + q - s^2)x^2 + s(q-p)x + pq.$$

이를 $x^4 - 10x^2 + 12x - 2$와 비교하면

$$\begin{aligned} p + q - s^2 &= -10, \\ s(q-p) &= 12, \\ pq &= -2. \end{aligned}$$

s에 대한 방정식. 두 번째 식에서 $s \neq 0$이므로 s로 나눌 수 있다. 즉 $q - p = 12/s$이다. 첫 번째 식에서 $p + q = s^2 - 10$이다. 이제 항등식(identity) $(p+q)^2 - (q-p)^2 = 4pq = -8$을 이용하면

$$(s^2 - 10)^2 - \frac{144}{s^2} = -8.$$

양변에 s^2(0이 아니다)을 곱하면

$$s^2(s^2 - 10)^2 + 8s^2 - 144 = 0,$$

이 되어 원하는 식을 얻는다.

s^2의 값. $u = s^2$으로 놓고 전개하면

$$u(u-10)^2 + 8u - 144 = u^3 - 20u^2 + 108u - 144.$$

144의 작은 약수들을 대입해 보면 $u = 2$일 때 $8 - 80 + 216 - 144 = 0$이므로 $u - 2$가 인수이고,

$$u^3 - 20u^2 + 108u - 144 = (u-2)(u^2 - 18u + 72) = (u-2)(u-6)(u-12).$$

따라서 가능한 세 값은 $s^2 = 2, 6, 12$이다.

? **생각해 보기** 인수분해는 하나만 있으면 되는데, 왜 s^2의 값이 세 개나 나올까?

네 근을 두 쌍으로 나누는 방법은 세 가지이고, 각 쌍짓기마다 $s^2 = (a+b)^2$인 이차 인수의 쌍이 하나씩 생긴다. 방정식을 푸는 데는 어느 것을 써도 되지만, 가장 작은 값이 가장 깔끔한 무리수를 준다.

$f(x) = 0$ **풀기.** $s^2 = 2$, $s = \sqrt{2}$로 택한다($s = -\sqrt{2}$를 택하면 두 인수의 순서만 바뀐다). 그러면

$$p + q = 2 - 10 = -8, \qquad q - p = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2},$$

이므로 $p = -4 - 3\sqrt{2}$, $q = -4 + 3\sqrt{2}$이다. (확인: $pq = 16 - 18 = -2$.) 따라서

$$f(x) = \left(x^2 + \sqrt{2}\,x - 4 - 3\sqrt{2}\right)\left(x^2 - \sqrt{2}\,x - 4 + 3\sqrt{2}\right).$$

첫 번째 인수의 판별식(discriminant)은 소문항 (i)을 이용하면

$$2 + 4(4 + 3\sqrt{2}) = 18 + 12\sqrt{2} = 6(3 + 2\sqrt{2}) = 6(1 + \sqrt{2})^2,$$

이므로 그 제곱근은 $\sqrt{6}(1 + \sqrt{2}) = \sqrt{6} + 2\sqrt{3}$이다. 근은

$$x = \frac{-\sqrt{2} \pm \left(\sqrt{6} + 2\sqrt{3}\right)}{2}.$$

두 번째 인수의 판별식은

$$2 - 4(-4 + 3\sqrt{2}) = 18 - 12\sqrt{2} = 6(3 - 2\sqrt{2}) = 6(\sqrt{2} - 1)^2,$$

이고 그 제곱근은 $\sqrt{6}(\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{3} - \sqrt{6}$이다($2\sqrt{3} = \sqrt{12} > \sqrt{6}$이므로 양수이다). 근은

$$x = \frac{\sqrt{2} \pm \left(2\sqrt{3} - \sqrt{6}\right)}{2}.$$

따라서 $f(x) = 0$의 네 해는

$$x = \tfrac{1}{2}\left(-\sqrt{2} + \sqrt{6} + 2\sqrt{3}\right), \qquad x = \tfrac{1}{2}\left(-\sqrt{2} - \sqrt{6} - 2\sqrt{3}\right),$$
$$x = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{6}\right), \qquad x = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \sqrt{6}\right).$$

검산

- 근의 근삿값은 약 2.2497, −3.6639, 1.2144, 0.1998이다. x^3항이 없으므로 합이 0이어야 하는데 실제로 그렇고, 곱은 상수항인 약 −2이다.
- $x \approx 0.1998$을 대입하면 $x^4 - 10x^2 + 12x - 2 \approx 0.0016 - 0.3992 + 2.3976 - 2 \approx 0$이다.
- f의 부호 변화도 맞아떨어진다. $f(0) = -2$, $f(1) = 1$, $f(2) = -2$, $f(3) = 25$, $f(-4) = 46$이므로 $(-4, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$에 근이 하나씩 있다.

흔한 실수

- x의 계수가 왜 s와 $-s$인지 설명하지 않는 것. 이는 x^3의 계수가 0이라는 사실, 즉 근의 합이 0이라는 사실에서 나온다.

- s로 나누기 전에 $s \neq 0$임을 밝히지 않는 것.
- 근을 $\sqrt{18 \pm 12\sqrt{2}}$ 꼴로 남겨 두는 것. 문제는 완전히 간단히 할 것을 요구하며, 소문항 (i)이 바로 그것을 위해 있다.

STEP 너머

이것은 사차방정식에 대한 페라리(Ferrari)의 방법을 모습만 바꾼 것이다. s^2에 대한 삼차식은 **분해 삼차식**(resolvent cubic)이고, 그 세 근은 네 근을 쌍으로 묶는 세 가지 방법에 대응한다. 사차방정식은 삼차방정식으로 환원할 수 있는데 일반적인 오차방정식(quintic)은 왜 거듭제곱근(radical)으로 아예 풀 수 없는지는 갈루아(Galois) 이론의 주제이며, 이 이론은 방정식의 가해성(solvability)을 근들의 대칭성과 연결한다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 이 이론으로 나아가는 대학 1학년 수준의 좋은 길잡이이다.

풀이

STEP I 2019, 문제 5

순수수학 • 3차원 벡터

STEP I 2019, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP I 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

핵심 아이디어

두 벡터는 성분(component)이 모두 같을 때 정확히 서로 같으므로, 이 문제의 모든 기하학적 조건은 p, q, r, s에 대한 몇 개의 간단한 방정식으로 바뀐다. 네 점이 한 평면 위에 있다(coplanar)는 것은 스칼라 삼중곱(scalar triple product), 즉 3×3 행렬식(determinant)이 0이라는 것이다. 조건을 좌표로 나타내고 나면, 각 소문항은 짧은 대수 계산이 된다.

풀이

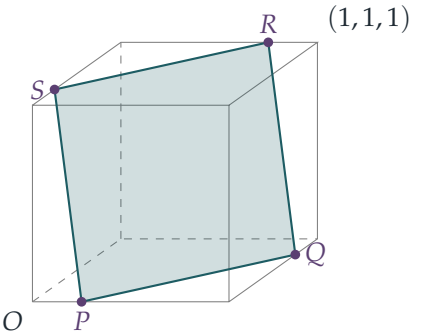
소문항 (i)

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$이면 마주 보는 두 변 PQ와 SR는 평행하고 길이가 같으므로 $PQRS$는 **평행사변형(parallelogram)**이다. (이때 $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} - \overrightarrow{SR}$로부터 $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$도 성립한다.)

또한 $|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{PS}|$이면 평행사변형의 이웃한 두 변의 길이가 같으므로 네 변의 길이가 모두 같다. 따라서 $PQRS$는 **마름모(rhombus)**이다.

소문항 (ii): 한 평면 위에 있을 조건

네 점은 단위 정육면체(unit cube)의 모서리 위에 있으므로 $p, q, r, s \in [0, 1]$이다. 여기서 P와 Q는 면 $z = 0$ 위에, R와 S는 면 $z = 1$ 위에 있다.



네 점이 한 평면 위에 있을 필요충분조건은 $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PS}, \overrightarrow{PR}$가 일차종속(linearly dependent)인 것, 즉 이들의 스칼라 삼중곱이 0인 것이다.

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1-p \\ q \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} -p \\ s \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} r-p \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

이므로 행렬식을 첫째 행을 따라 전개하면

$$\begin{vmatrix} 1-p & q & 0 \\ -p & s & 1 \\ r-p & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1-p)(s-1) - q\big(-p-(r-p)\big) + 0$$

$$= (1-p)(s-1) + qr.$$

이다. 이것을 0으로 놓으면 요구한 대로 $rq = (1-s)(1-p)$를 얻는다.

행렬식을 쓰고 싶지 않다면, P, Q, R를 지나는 평면을 $\overrightarrow{OP} + \lambda\overrightarrow{PQ} + \mu\overrightarrow{PR}$로 나타내자. 이 평면 위의 점은

$$\big(p + \lambda(1-p) + \mu(r-p),\ \lambda q + \mu,\ \mu\big).$$

이다. $S = (0, s, 1)$가 이 평면 위에 있으려면 z성분에서 $\mu = 1$, 그다음 y성분에서 $\lambda q = s - 1$, x성분에서 $r + \lambda(1-p) = 0$이어야 한다. 마지막 식에 q를 곱하고 대입하면 같은 조건 $rq + (s-1)(1-p) = 0$을 얻는다. (여기서는 P, Q, R가 한 직선 위에 있지 않다는 사실을 이용했는데, R는 윗면에, P와 Q는 아랫면에 있으므로 이는 참이다.)

소문항 (ii)(a)

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1-p \\ q \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{SR} = \begin{pmatrix} r \\ 1-s \\ 0 \end{pmatrix}.$$

이다. z성분은 이미 같으므로

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR} \iff r = 1-p \text{ 그리고 } q = 1-s \iff p+r = 1 \text{ 그리고 } q+s = 1.$$

이다. 무게중심(centroid)은

$$\tfrac{1}{4}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{OS}) = \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} p+1+r \\ q+1+s \\ 2 \end{pmatrix},$$

이고, 정육면체의 중심은 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$이다. 셋째 성분은 항상 같으므로, 무게중심이 중심에 있을 필요충분조건은 $p+1+r=2$이고 $q+1+s=2$인 것이며, 이는 앞의 두 조건 $p+r=1$, $q+s=1$과 같다. 따라서 두 명제는 동치이다.

($r=1-p$, $s=1-q$일 때 한 평면 위에 있을 조건 $rq=(1-s)(1-p)$는 $(1-p)q=q(1-p)$가 되어 자동으로 성립한다는 점에 주목하자. 즉 배제되는 배치는 없다.)

소문항 (ii)(b)

(a)에 의해 $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}$로부터 $r=1-p, s=1-q$이다. 두 번째 조건에 대해서는 $s=1-q$일 때의 $\overrightarrow{PS}=(-p,\ s,\ 1)$을 이용하여 길이의 제곱을 비교한다.

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PQ}|^2=|\overrightarrow{PS}|^2 &\iff (1-p)^2+q^2=p^2+(1-q)^2+1 \\ &\iff 1-2p=2-2q \\ &\iff q=p+\tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

따라서

$$q=p+\tfrac{1}{2}, \qquad r=1-p, \qquad s=\tfrac{1}{2}-p.$$

이다. $q\le 1$이고 $s\ge 0$이므로, 점들이 모서리 위에 있는 것은 $0\le p\le\frac{1}{2}$일 때뿐이다.

생각해 보기 각 PQR를 주는 두 벡터는 무엇인가?

Q에서의 각은 $\overrightarrow{QP}$와 $\overrightarrow{QR}$ (둘 다 Q에서 **멀어지는** 방향) 사이의 각이다. 방금 구한 값을 이용하면

$$\overrightarrow{QP}=\begin{pmatrix} p-1 \\ -p-\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{QR}=\begin{pmatrix} r-1 \\ 1-q \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -p \\ \frac{1}{2}-p \\ 1 \end{pmatrix}.$$

이다. 그러면

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR} &= -p(p-1)-\left(p+\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}-p\right)=p-p^2-\left(\tfrac{1}{4}-p^2\right)=p-\tfrac{1}{4}, \\ |\overrightarrow{QP}|^2 &= (1-p)^2+\left(p+\tfrac{1}{2}\right)^2=2p^2-p+\tfrac{5}{4}, \\ |\overrightarrow{QR}|^2 &= p^2+\left(\tfrac{1}{2}-p\right)^2+1=2p^2-p+\tfrac{5}{4}. \end{aligned}$$

이다. 마름모이므로 당연히 두 길이는 같고, 따라서 분자와 분모에 4를 곱하면

$$\cos PQR=\frac{p-\frac{1}{4}}{2p^2-p+\frac{5}{4}}=\frac{4p-1}{5-4p+8p^2},$$

이다. 이것이 요구한 결과이다.

정사각형. 마름모가 정사각형(square)일 필요충분조건은 각이 직각인 것, 즉 $\cos PQR = 0$인 것이다. 분모 $8p^2 - 4p + 5 = 8(p - \frac{1}{4})^2 + \frac{9}{2}$는 항상 양수이므로, 이는 $4p - 1 = 0$일 때만 일어난다.

$$p = \tfrac{1}{4}, \qquad q = \tfrac{3}{4}, \qquad r = \tfrac{3}{4}, \qquad s = \tfrac{1}{4}.$$

이때 한 변의 길이의 제곱은

$$2 \cdot \tfrac{1}{16} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{5}{4} = \tfrac{9}{8},$$

이므로 각 변의 길이는 $\sqrt{9/8} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$이다. 이를 $\frac{21}{20}$과 비교하기 위해 두 양수의 제곱을 비교하면

$$\left(\tfrac{21}{20}\right)^2 = \tfrac{441}{400} < \tfrac{450}{400} = \tfrac{9}{8}.$$

이다. 따라서 정사각형의 한 변은 $\frac{21}{20}$보다 길다. (실제로 약 1.0607이다.)

검산

- $p = \frac{1}{4}$일 때 네 점은 $(\frac{1}{4}, 0, 0)$, $(1, \frac{3}{4}, 0)$, $(\frac{3}{4}, 1, 1)$, $(0, \frac{1}{4}, 1)$이다. 이들의 평균은 (a)가 예측한 대로 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$이고, 직접 계산하면 $\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR} = \frac{3}{16} - \frac{3}{16} = 0$이다.
- $p = 0$일 때 공식은 $\cos PQR = -\frac{1}{5}$를 준다. 직접 계산하면 $\overrightarrow{QP} = (-1, -\frac{1}{2}, 0)$, $\overrightarrow{QR} = (0, \frac{1}{2}, 1)$이고, 내적(dot product)은 $-\frac{1}{4}$, 길이의 제곱은 $\frac{5}{4}$이므로 $\cos PQR = -\frac{1}{5}$이다. ✓
- 한 평면 위에 있을 조건의 항등식, (a)의 동치, $\cos PQR$의 공식은 모두 컴퓨터로 많은 무작위 값에 대해 정확한 산술로 확인하였다.

흔한 실수

- Q에서의 각을 구할 때 $\overrightarrow{QP}$와 $\overrightarrow{RQ}$(하나는 들어오고 하나는 나가는 벡터)를 사용하는 것. 이렇게 하면 코사인의 부호가 바뀐다.
- 문자의 순서를 헷갈리는 것. $\overrightarrow{SR}$는 $S - R$가 아니라 $R - S$이다.
- 정확한 비교 없이 계산기 값만으로 $\frac{3\sqrt{2}}{4} > \frac{21}{20}$이라고 주장하는 것. 두 수가 모두 양수이므로 양변을 제곱하면 엄밀성이 유지된다.

STEP 너머

한 평면 위에 있는지를 판정하는 행렬식 판정법은 일반적인 사실의 3차원 경우이다. 즉 벡터들은 그것들로 만든 행렬의 행렬식이 0일 때 정확히 일차종속이다. 정육면체의 평면 단

면 또한 풍부한 예의 원천이다(중심을 지나고 긴 대각선에 수직인 평면은 정육각형(regular hexagon)을 잘라 낸다). 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 이러한 기하학적 관점에서 행렬식, 부피, 일차종속을 전개한다.

풀이

STEP I 2019, 문제 6

순수수학 • 부등식과 한계

> **STEP I 2019, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP I 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

핵심 아이디어

각 방정식은 직접 풀기에는 막막해 보이지만, "어떤 것 = 다른 어떤 것"의 꼴로 나누어 쓸 수 있다. 이때 좌변은 어떤 수보다 결코 작아질 수 없고, 우변은 같은 수보다 결코 커질 수 없다. 그러면 방정식은 **양변이 모두** 정확히 그 수에 있을 때에만 성립하고, 각각의 조건은 쉽게 풀 수 있다. 각 부분의 앞쪽 소문항들은 이 두 한계(bound)를 세우기 위해 있는 것이다.

풀이

소문항 (i)

완전제곱식으로 고치면(completing the square)

$$\begin{aligned} 9x^2 - 12x\cos\theta + 4 &= (3x - 2\cos\theta)^2 - 4\cos^2\theta + 4 \\ &= (3x - 2\cos\theta)^2 + 4\sin^2\theta. \end{aligned}$$

제곱은 결코 음수가 아니므로 최솟값은 $4\sin^2\theta$이고, 이 값은 정확히 $x = \frac{2}{3}\cos\theta$일 때 얻어진다.

사차식(quartic)을 x^2에 대한 이차식(quadratic)으로 보면

$$12x^2\sin\theta - 9x^4 = -\left(3x^2 - 2\sin\theta\right)^2 + 4\sin^2\theta.$$

따라서 $12x^2\sin\theta - 9x^4 \leq 4\sin^2\theta$이고, 등호는 정확히 $x^2 = \frac{2}{3}\sin\theta$일 때 성립한다. $0 < \theta < \pi$이므로 $\sin\theta > 0$이고, 따라서 이 x^2의 값은 실제로 얻어지며 최댓값은 $4\sin^2\theta$이다.

이제 주어진 방정식의 x^2 항을 $9x^2 - 12x^2\sin\theta$로 나누어 쓰고 정리하면

$$\underbrace{9x^2 - 12x\cos\theta + 4}_{\geq 4\sin^2\theta} = \underbrace{12x^2\sin\theta - 9x^4}_{\leq 4\sin^2\theta}.$$

생각해 보기 적어도 $4\sin^2\theta$인 양이 어떻게 많아야 $4\sin^2\theta$인 양과 같을 수 있을까?

둘 다 $4\sin^2\theta$와 같을 때뿐이다. 따라서 방정식은

$$x = \tfrac{2}{3}\cos\theta \qquad \text{그리고} \qquad x^2 = \tfrac{2}{3}\sin\theta.$$

가 **모두** 성립할 때, 그리고 그때에만 성립한다. x를 소거하면 $\frac{4}{9}\cos^2\theta = \frac{2}{3}\sin\theta$이므로 $2\cos^2\theta = 3\sin\theta$, 즉 $2 - 2\sin^2\theta = 3\sin\theta$이다. 따라서

$$2\sin^2\theta + 3\sin\theta - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (2\sin\theta - 1)(\sin\theta + 2) = 0.$$

$\sin\theta \neq -2$이므로 $\sin\theta = \frac{1}{2}$이고, 따라서 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 또는 $\theta = \frac{5\pi}{6}$이다. 그러면 $x = \frac{2}{3}\cos\theta$로부터 각각 $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 또는 $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$을 얻고, 두 경우 모두 요구한 대로 $x^2 = \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\sin\theta$이다. 해는

$$(x,\theta) = \left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{\pi}{6}\right) \quad \text{그리고} \quad (x,\theta) = \left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{5\pi}{6}\right).$$

이다.

소문항 (ii)

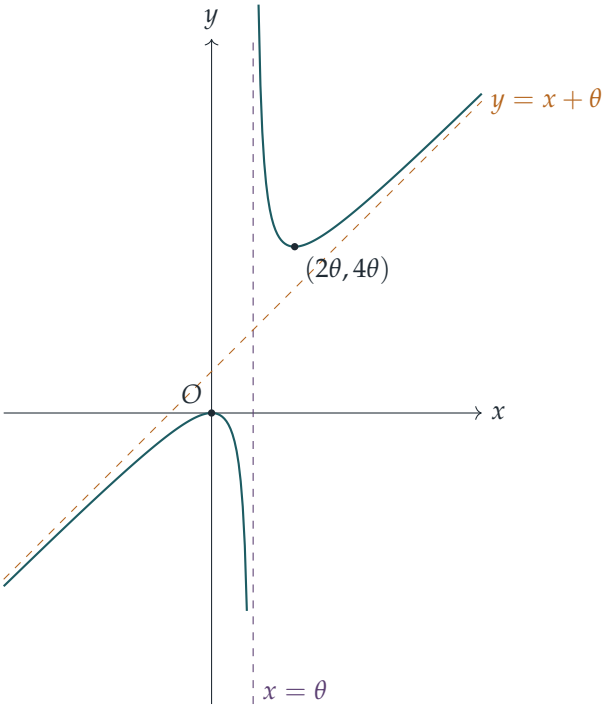
개형 그리기. 여기서 $\theta > 0$이다. 곡선 $y = \dfrac{x^2}{x-\theta}$는 원점을 지나고(다른 곳에서는 축과 만나지 않는다), 수직 점근선(asymptote) $x = \theta$를 가진다. 나눗셈을 하면

$$\frac{x^2}{x-\theta} = x + \theta + \frac{\theta^2}{x-\theta},$$

이므로 $y = x + \theta$는 기울어진 점근선이다. 곡선은 $x > \theta$에서는 이 점근선 위에, $x < \theta$에서는 그 아래에 있다. 몫의 미분법(quotient rule)으로 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2x(x-\theta) - x^2}{(x-\theta)^2} = \frac{x(x-2\theta)}{(x-\theta)^2},$$

이므로 정류점(stationary point)은 극대점(local maximum)인 $(0,0)$과 극소점(local minimum)인 $(2\theta, 4\theta)$이다(기울기의 부호가 $x = 0$에서 $+$에서 $-$로, $x = 2\theta$에서 $-$에서 $+$로 바뀐다).



추론하기. $x < \theta$이면 분자 $x^2 \geq 0$이고 분모는 음수이므로 $y \leq 0$이다. $x > \theta$이면 이 가지의 가장 낮은 점이 $(2\theta, 4\theta)$이므로 $y \geq 4\theta$이다. 대수적으로는 $x > \theta$일 때

$$x^2 - 4\theta(x-\theta) = (x-2\theta)^2 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x^2}{x-\theta} \geq 4\theta,$$

이다. 여기서 양수인 $x-\theta$로 나누었다. 따라서 곡선은 0과 4θ 사이의 값(양 끝 제외)을 결코 갖지 않는다.

삼각함수의 한계. 분자는 $\sin^2\theta\cos^2 x \leq 1 \cdot 1 = 1$을 만족하고, 분모는 $1 + \cos^2\theta\sin^2 x \geq 1$을 만족한다. 많아야 1인 수를 적어도 1인(그리고 양수인) 수로 나누면 많아야 1이다.

$$\frac{\sin^2\theta\cos^2 x}{1+\cos^2\theta\sin^2 x} \leq 1.$$

등호가 성립하려면 $\sin^2\theta\cos^2 x = 1$과 $\cos^2\theta\sin^2 x = 0$이 모두 필요하다. 또한 이 분수는 제곱을 양수로 나눈 것이므로 ≥ 0임에 주목하자.

마지막 방정식. $L = \dfrac{x^2}{4\theta(x-\theta)}$라 하고, 우변을 R이라 하자. 앞의 결과를 $4\theta > 0$으로 나누면 $L \leq 0$이거나 $L \geq 1$이다. 그런데 $0 \leq R \leq 1$이다.

생각해 보기 ≤ 0이거나 ≥ 1인 수가 $[0,1]$에 있는 수와 어디에서 만날 수 있을까?

0 또는 1에서뿐이다. 따라서 $L = R = 0$ 또는 $L = R = 1$이어야 한다.

- $L = 0$이면 $x = 0$이어야 하는데, 그러면 $0 < \theta < \pi$이므로 $R = \sin^2\theta > 0$이다. 해가 없다.
- $L = 1$은 $x^2 = 4\theta(x - \theta)$, 즉 $(x - 2\theta)^2 = 0$을 뜻하므로 $x = 2\theta$이다. $R = 1$이려면 $\sin^2\theta\cos^2 x = 1$이어야 하고, 이로부터 $\sin^2\theta = 1$이고 $\cos^2 x = 1$이어야 한다. $0 < \theta < \pi$이므로 $\theta = \frac{\pi}{2}$이고, 따라서 $x = \pi$이며, 실제로 $\cos^2\pi = 1$이고 $\cos^2\theta\sin^2 x = 0$이다.

유일한 해는 $x = \pi, \theta = \frac{\pi}{2}$이다.

검산

- 사차식에 $x = \frac{1}{\sqrt{3}}, \theta = \frac{\pi}{6}$을 대입하면 $9\cdot\frac{1}{9} + (9-6)\cdot\frac{1}{3} - 12\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 4 = 1 + 1 - 6 + 4 = 0$이다.
- 마지막 방정식에서 $x = \pi, \theta = \frac{\pi}{2}$일 때 $L = \pi^2/(2\pi\cdot\frac{\pi}{2}) = 1$이고 $R = 1\cdot 1/(1+0) = 1$이다.
- (x, θ)의 촘촘한 격자에서 컴퓨터로 탐색해 보았더니, 제외된 끝점 $\theta \to 0$과 $\theta \to \pi$ 근처에서 끼어드는 가짜 해($\sin\theta \to 0$이 되어 한계가 무너지는 곳)를 빼면 어느 방정식에서도 다른 근사해는 발견되지 않았다.

흔한 실수

- $\sin\theta = \frac{1}{2}$을 찾고 멈추는 것: x는 $x = \frac{2}{3}\cos\theta$를 만족해야 하고, 이것이 각 θ에 대해 x의 **부호**를 정하므로 $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5\pi}{6})$은 해가 아니다.
- 마지막 부분에서 $L = R = 0$인 경우를 잊는 것: 이 경우는 배제해야 하며, 오직 $\sin\theta \neq 0$이기 때문에 배제된다.
- 분모가 이를 망치지 않는 이유를 말하지 않고 "$\sin^2$과 $\cos^2$이 많아야 1이므로" 분수가 ≤ 1이라고 주장하는 것.

STEP 너머

방정식을 한 값에서 만나는 하한과 상한 사이에 가두는 기법은 해석학의 기본 도구이다. 이것은 산술-기하 평균 부등식(AM–GM)이나 코시-슈바르츠(Cauchy–Schwarz) 부등식 같은 부등식에서 등호가 성립함을 증명하는 방법이며, 조임 정리(squeeze theorem)가 극한을 결정하는 방법이기도 하다. "이 부등식은 언제 등호가 성립하는가?"라고 묻는 법을 익히는 것이 흔히 풀이에 이르는 가장 빠른 길이다. 이런 정신의 내용을 더 보려면 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)나 Siklos의 문제집 *Advanced Problems in*

Mathematics(고급 수학 문제집)를 참고하라.

풀이

STEP I 2019, 문제 7

순수수학 • 무리성과 합동식

STEP I 2019, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP I 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

핵심 아이디어

$\sqrt{2}+\sqrt{3}=a/b$를 기약분수(lowest terms)로 나타낼 수 있다고 하면, 두 번 제곱하여 근호(surd)를 없애고 정수 a와 b에 대한 다항식 방정식을 얻는다. 그다음 이 방정식을 작은 소수(prime)를 법(modulo)으로 하여 살펴본다. 방정식에 의해 그 소수는 a와 b를 모두 나누거나, 둘 다 나누지 않아야 한다. "모두 나눈다"는 기약분수라는 가정에 모순이고, "둘 다 나누지 않는다"는 나머지를 따져 보면 불가능하다. 결국 핵심은 나머지가 실제로 충돌하는 소수를 고르는 데 있다.

풀이

소문항 (i)

1단계. 모든 정수는 어떤 정수 k에 대하여 $3k$, $3k+1$, $3k-1$ 중 하나이므로, $3\nmid a$이면 $a=3k\pm1$이다. 어느 경우든

$$a^2=9k^2\pm6k+1=3(3k^2\pm2k)+1,$$

이므로 a^2은 3의 배수보다 1만큼 크다.

3단계. $\dfrac{a}{b}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$의 양변을 제곱하면

$$\frac{a^2}{b^2}=2+2\sqrt{6}+3,\qquad \text{따라서}\qquad a^2-5b^2=2\sqrt{6}\,b^2.$$

이제 근호가 한쪽에만 있으므로 다시 제곱하면 근호가 사라진다.

$$a^4-10a^2b^2+25b^4=24b^4,$$
$$a^4+b^4=10a^2b^2,$$

이것이 보이려던 식이다. (여기서는 이 방향의 함의만 필요하다. 즉 2단계의 a, b는 반드시 이 방정식을 만족해야 한다.)

4단계. $3 \mid a$라고 하자. 3단계의 식을 정리하면

$$b^4 = 10a^2b^2 - a^4 = a^2\,(10b^2 - a^2),$$

이고 우변은 3으로 (사실은 9로도) 나누어떨어진다. 만약 $3 \nmid b$이면 1단계에 의해 $b^2 = 3m + 1$이므로 $b^4 = (b^2)^2 = 9m^2 + 6m + 1$은 3의 배수가 아니다. 이는 모순이다. 따라서 $3 \mid b$이다.

> **생각해 보기** 4단계는 $3 \mid a$인 경우를 다룬다. 3이 a와 b 중 어느 것도 나누지 않는 경우는 어떻게 되는가?

5단계. 3단계의 방정식은 a와 b에 대하여 대칭이므로, 4단계는 두 문자의 역할을 바꾸어도 성립한다. 즉 $3 \mid b$이면 $3 \mid a$이다. a와 b는 1보다 큰 공약수를 갖지 않으므로 둘 다 3의 배수일 수는 없고, 따라서 4단계에 의해 둘 다 3의 배수가 아니다. 이 경우는 2–4단계에서 다루지 않았으며, 바로 여기서 1단계가 쓰인다. $a^2 = 3r + 1$, $b^2 = 3s + 1$이라 하자. 그러면 a^4, b^4, a^2b^2은 모두 3의 배수보다 1만큼 크다(이런 꼴의 두 수의 곱은 다시 이런 꼴이다). 3단계의 식을 3을 법으로 하여 계산하면 $10 \equiv 1$이므로

$$a^4 + b^4 \equiv 1 + 1 = 2, \qquad 10a^2b^2 \equiv 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \pmod 3,$$

이다. 3단계 식의 양변을 3으로 나눈 나머지가 서로 다르므로 이는 불가능하다. 따라서 그러한 a와 b는 존재하지 않는다. 또한 $\sqrt{2} + \sqrt{3} > 0$이므로 이 수가 유리수라면 서로소(coprime)인 양의 정수 a, b로 나타낼 수 있다. 그러므로 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$은 무리수(irrational)이다.

소문항 (ii)

a, b가 1보다 큰 공약수를 갖지 않는 양의 정수이고 $\sqrt{6} + \sqrt{7} = a/b$라고 가정하자. 앞에서와 같이

$$\frac{a^2}{b^2} = 13 + 2\sqrt{42} \quad \Longrightarrow \quad (a^2 - 13b^2)^2 = 168\,b^4,$$

이고, 이를 전개하면 $a^4 - 26a^2b^2 + 169b^4 = 168b^4$, 즉

$$a^4 + b^4 = 26a^2b^2.$$

5를 법으로 한 제곱수. $5 \nmid a$이면 $a = 5k \pm 1$ 또는 $a = 5k \pm 2$이므로

$$a^2 = 5(5k^2 \pm 2k) + 1 \qquad \text{또는} \qquad a^2 = 5(5k^2 \pm 4k) + 4.$$

따라서 $a^2 \equiv \pm 1 \pmod 5$이고, 그러므로 $a^4 \equiv 1 \pmod 5$이다.

나누어떨어짐. $5 \mid a$이면 $b^4 = a^2(26b^2 - a^2)$은 5의 배수이다. 그런데 $5 \nmid b$이면 $b^4 \equiv 1 \pmod 5$이므로 $5 \mid b$이어야 한다. 대칭성에 의해 $5 \mid b$이면 $5 \mid a$이다. a와 b는 서로소이므로 둘 다 5로 나누어떨어지지 않는다.

모순. 이제 $a^4 \equiv b^4 \equiv 1$이고 $a^2b^2 \equiv (\pm 1)(\pm 1) = \pm 1 \pmod 5$이다. $26 \equiv 1$이므로

$$a^4 + b^4 \equiv 2, \qquad 26a^2b^2 \equiv \pm 1 \pmod 5.$$

그런데 $2 \not\equiv \pm 1 \pmod 5$이므로 방정식이 성립할 수 없다. 따라서 $\sqrt{6} + \sqrt{7}$은 무리수이다.

생각해 보기 여기서 5 대신 3을 쓰려고 하면 어느 단계가 무너지는가?

3이 실패하는 이유. 논증의 앞부분은 3을 법으로 해도 여전히 성립한다. $3 \mid a$이면 $3 \mid b^4$이므로 $3 \mid b$이고, 따라서 a와 b는 둘 다 3의 배수가 아니다. 그러나 그러면 $a^4 \equiv b^4 \equiv a^2b^2 \equiv 1 \pmod 3$이고, $26 \equiv 2 \pmod 3$이므로

$$a^4 + b^4 \equiv 2 \qquad \text{그리고} \qquad 26a^2b^2 \equiv 2 \pmod 3.$$

양변이 일치하므로 모순이 생기지 않는다. 3을 법으로 하면 방정식 $a^4 + b^4 = 26a^2b^2$은 3의 배수가 아닌 **모든** 쌍에 대해 성립하므로, 3으로 나누어떨어지는지를 따져서는 이 방정식을 배제할 수 없다. (소문항 (i)에서는 계수가 $10 \equiv 1$이었고, $2 \neq 1$이라는 사실이 충돌을 일으켰다. 여기서는 계수가 $26 \equiv 2$이므로 충돌이 사라진다.)

검산

- 수치로 확인하면, $x = \sqrt{2} + \sqrt{3} \approx 3.1463$에 대하여 $x^4 - 10x^2 + 1 \approx 0$이다(오차 약 10^{-14}). 마찬가지로 $y = \sqrt{6} + \sqrt{7} \approx 5.0952$에 대하여 $y^4 - 26y^2 + 1 \approx 0$이다. 따라서 두 사차방정식은 옳다.
- 나머지의 모든 쌍을 대입해 보자. $a^4 + b^4 \equiv 10a^2b^2 \pmod 3$의 해는 $a \equiv b \equiv 0$뿐이고, $a^4 + b^4 \equiv 26a^2b^2 \pmod 5$도 마찬가지이다. 그러나 $a^4 + b^4 \equiv 26a^2b^2 \pmod 3$은 $(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)$로도 성립한다. 바로 이 때문에 소문항 (ii)에서 3이 실패한다.
- 컴퓨터로 탐색한 결과, $a, b \leq 400$인 서로소인 양의 정수 중 두 방정식 가운데 어느 하나라도 만족하는 것은 없었다.

흔한 실수

- 4단계에서 멈추는 것. 4단계는 a와 b가 모두 3의 배수일 수 없음만 보여 준다. 둘 다 3의 배수가 아닌 경우를 처리하려면 여전히 1단계가 필요하다.
- 이유 없이 $3 \mid b^4 \Rightarrow 3 \mid b$라고 주장하는 것. 그 이유는 1단계가 제공한다. $3 \nmid b$이면 b^4을 3으로 나눈 나머지는 1이다.

▶ 소문항 (ii)에서 제곱수를 5로 나눈 나머지가 4(즉 -1)일 수도 있다는 점을 잊는 것. 따라서 a^2b^2은 1만이 아니라 $\equiv \pm 1$일 수 있다.

STEP 너머

수 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$은 x^4-10x^2+1의 근이며, 여기서의 논증은 사실 이 다항식이 유리근을 갖지 않는다는 증명이다. 유리근 정리(rational root theorem)를 쓰면 더 빨리 보일 수 있다. 유리근이 있다면 ± 1이어야 하는데, 둘 다 근이 아니다. 다항식을 소수를 법으로 하여 줄여서 근이나 인수가 없음을 보이는 것은 대학 1학년 대수학의 표준적인 도구이다(예를 들어 기약성(irreducibility) 판정에서). 흥미롭게도 x^4-10x^2+1은 유리수 위에서 기약이지만 모든 소수를 법으로 하면 **인수분해된다**. 이는 유명한 예이다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)에서 이러한 아이디어를 전개하며, Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 합동식(congruence)에 대한 훌륭한 입문서이다.

풀이

STEP I 2019, 문제 8

순수수학 • 치환적분

STEP I 2019, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP I 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

핵심 아이디어

f를 직접 계산하지 말라고 했으므로, 모든 소문항은 적분을 **변형**하여 어떤 위끝 X에 대해

$$\int_1^X \sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\,\mathrm{d}t = \mathrm{f}(X)$$

와 정확히 같은 꼴이 되도록 만드는 문제이다. 거의 모든 일은 두 가지 조작이 해낸다. 하나는 $\frac{u-k}{u+k}$를 $\frac{t-1}{t+1}$로 바꾸는 **늘이기**$(u = kt)$이고, 다른 하나는 분수 속 두 수가 0에 대하여 대칭이 되게 하는 **평행이동**$(u = t + c)$이다. 마지막 소문항에서는 몫의 제곱근을 알맞은 꼴의 함수로 바꾸기 위해 치환이 하나 더 필요하다.

풀이

풀이 전체에 걸쳐, 치환(substitution)은 피적분함수(integrand)와 미분소(differential), 그리고 적분 구간의 끝도 바꾼다는 사실을 이용한다. 답이 드러나는 곳은 위끝이다.

소문항 (i)

$u = 2t$로 놓으면 $\frac{2t-2}{2t+2} = \frac{t-1}{t+1}$이므로 피적분함수 $\sqrt{\frac{u-2}{u+2}}$는 $\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}$가 된다. $\mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}t$이고 적분 구간의 끝은 $u = 2 \mapsto t = 1$, $u = x \mapsto t = \frac{1}{2}x$이므로

$$\int_2^x \sqrt{\frac{u-2}{u+2}}\,\mathrm{d}u = \int_1^{x/2} \sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\,2\,\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{f}\left(\tfrac{1}{2}x\right).$$

조건 $x > 2$는 바로 $\frac{1}{2}x > 1$이 되게 하여 $\mathrm{f}(\frac{1}{2}x)$가 정의되도록 해 준다. 이것이 구하는 결과이다.

소문항 (ii)

여기서 분수 속의 수는 0과 -4로, o에 대하여 대칭이 아니다. 두 수의 중점은 -2이므로 2만큼 평행이동하여 $u = v - 2$로 놓는다. 그러면 $\frac{u}{u+4} = \frac{v-2}{v+2}$, $\mathrm{d}u = \mathrm{d}v$이고, 적분 구간의 끝 $u = 0, x$는 $v = 2, x+2$가 된다. 이제 x 대신 (2보다 큰) $x+2$를 넣어 소문항 (i)을 적용하면 끝난다.

$$\int_0^x \sqrt{\frac{u}{u+4}}\,\mathrm{d}u = \int_2^{x+2} \sqrt{\frac{v-2}{v+2}}\,\mathrm{d}v = 2\,\mathrm{f}\left(\tfrac{1}{2}x+1\right).$$

소문항 (iii)

분수 속의 수는 5와 -1이고, 중점은 2이다. 따라서 $u = v + 2$로 놓으면

$$\frac{u-5}{u+1} = \frac{v-3}{v+3},$$

이고, 적분 구간의 끝 $u = 5, x$는 $v = 3, x-2$가 된다. 이제 $v = 3t$로 놓아 3배로 늘이면 $\frac{v-3}{v+3} = \frac{t-1}{t+1}$, $\mathrm{d}v = 3\,\mathrm{d}t$이고 적분 구간의 끝은 $t = 1, \frac{1}{3}(x-2)$이다.

$$\begin{aligned}\int_5^x \sqrt{\frac{u-5}{u+1}}\,\mathrm{d}u &= \int_3^{x-2} \sqrt{\frac{v-3}{v+3}}\,\mathrm{d}v = \int_1^{(x-2)/3} \sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\,3\,\mathrm{d}t \\ &= 3\,\mathrm{f}\Big(\frac{x-2}{3}\Big).\end{aligned}$$

$x > 5$이므로 함수에 넣는 값 $\frac{x-2}{3}$는 당연히 1보다 크다. (두 치환을 합치면 하나의 치환 $u = 3t + 2$가 된다.)

소문항 (iv)

이 피적분함수에는 몫의 제곱근이 전혀 보이지 않고, 거듭제곱도 맞지 않는다. 분자에는 u^2이, 근호 안에는 $u^2 + 4$가 있다.

> ? **생각해 보기** 어떤 치환을 하면 $u^2 + 4$가 소문항 (ii)의 $u + 4$로 바뀔까?

$u^2 = w$로 놓으면 ($[1,2]$에서 $u > 0$이므로) $u = \sqrt{w}$이고 $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}w}{2\sqrt{w}}$이다. 적분 구간의 끝 $u = 1, 2$는 $w = 1, 4$가 되고,

$$\frac{u^2}{\sqrt{u^2+4}}\,\mathrm{d}u = \frac{w}{\sqrt{w+4}} \cdot \frac{\mathrm{d}w}{2\sqrt{w}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{w+4}}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{w}{w+4}}\,\mathrm{d}w,$$

이는 정확히 소문항 (ii)의 피적분함수이다. 적분 구간을 0에서 나누고 소문항 (ii)를 두 번($x = 4$와 $x = 1$) 이용하면

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{u^2}{\sqrt{u^2+4}}\,\mathrm{d}u &= \frac{1}{2}\left(\int_0^4 \sqrt{\frac{w}{w+4}}\,\mathrm{d}w - \int_0^1 \sqrt{\frac{w}{w+4}}\,\mathrm{d}w\right) \\ &= \frac{1}{2}\Big(2\,\mathrm{f}(3) - 2\,\mathrm{f}\big(\tfrac{3}{2}\big)\Big) = \mathrm{f}(3) - \mathrm{f}\big(\tfrac{3}{2}\big).\end{aligned}$$

검산

- 각 답은 아래끝에서 올바르게 행동한다. (i)에서 $x = 2$이면 $2\,\mathrm{f}(1) = 0$, (ii)에서 $x = 0$이면 $2\,\mathrm{f}(1) = 0$, (iii)에서 $x = 5$이면 $3\,\mathrm{f}(1) = 0$이다.
- 미분해 보는 것은 빠른 검사 방법이다. (iii)의 경우 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,3\,\mathrm{f}\left(\frac{x-2}{3}\right) = \mathrm{f}'\left(\frac{x-2}{3}\right) = \sqrt{\frac{x-5}{x+1}}$로, 마땅히 나와야 할 결과가 나온다.
- 수치적으로, (iv)의 양변은 모두 0.91007이고, (iii)에서 $x = 11$일 때 양변은 모두 3.19704이다. 각각 직접 수치적분(numerical integration)으로 구한 값이다.

흔한 실수

- $\mathrm{d}u = k\,\mathrm{d}t$에서 생기는 인수를 빠뜨려 $2\,\mathrm{f}(\frac{1}{2}x)$ 대신 $\mathrm{f}(\frac{1}{2}x)$를 얻는 실수.
- 피적분함수만 바꾸고 적분 구간의 끝, 특히 답이 자리하는 위끝을 바꾸지 않는 실수.
- (iv)에서 결과를 $\frac{1}{2} \cdot 2\,\mathrm{f}(3)$로만 쓰는 실수. 소문항 (ii)는 0부터의 적분을 주므로, 0부터 1까지의 부분을 빼야 한다.

STEP 너머

여기서 핵심은, 한 무리의 적분이 실제로는 서로 다른 아핀 변수변환(affine change of variable) $u = at + b$를 통해 본 하나의 적분이라는 점이다. 식 속에 숨어 있는 "표준형"을 알아보는 능력은 대학의 해석학(analysis)에서, 그리고 미분방정식을 표준형(canonical form)으로 바꿀 때 끊임없이 쓰인다. (사실 함수 f는 쌍곡선함수(hyperbolic function)를 써서 닫힌 형태로 구할 수 있지만, 이 문제는 그것 없이도 꽤 멀리 갈 수 있음을 보여 준다.) 치환과 적분에 대한 엄밀한 이론은 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를, 이런 유형의 문제를 더 많이 보려면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(STEP 대비 문제집)를 참고하라.

풀이

STEP I 2019, 문제 9

역학 • 넘어짐과 마찰

STEP I 2019, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP I 시험지에 있다:

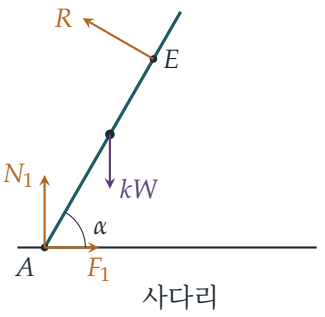
www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

핵심 아이디어

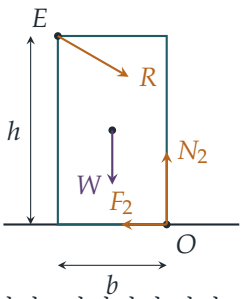
사다리와 상자를 하나의 힘으로 연결된 두 개의 별개 물체로 다룬다. 접촉면이 매끄러우므로(smooth) 그 힘은 사다리에 수직이고, 따라서 힘의 작용선은 α에 의해 정해지며 미지수는 힘의 크기뿐이다. 사다리의 밑단에 대하여 사다리의 모멘트(moment)를 구하면 힘의 크기를 얻고, 상자가 넘어질 때 기준이 되는 모서리에 대하여 상자의 모멘트를 구하면 넘어짐(toppling) 조건을 얻는다. 관계식 $h = b\tan\alpha$는 상자의 모멘트를 배각 공식 꼴의 식으로 간단히 정리하기 위해 주어진 것이다.

풀이

상자는 균일한 강체(rigid body) 직육면체(cuboid)로, 사다리는 가벼운 막대로, 페인트공은 질점(particle)으로 모형화한다. 사다리와 상자 사이의 접촉은 매끄럽고, 두 지면 접촉은 모두 거칠다(rough). 사다리가 닿는 모서리를 E, 사다리의 밑단을 A, 상자의 아래 모서리 중 사다리에서 가장 먼 것(상자가 넘어질 때 회전축이 되는 모서리)을 O라 하자.



사다리



상자 (넘어지기 직전)

소문항 (i)

E에는 마찰(friction)이 없으므로, 상자가 사다리에 작용하는 힘 R는 사다리에 수직이다. E의 높이가 h이므로 사다리를 따라 잰 길이는 $AE = h/\sin\alpha$이다. 페인트공이 높이 λh에 있을 때 사다리를 따라 $\lambda h/\sin\alpha$만큼 올라가 있으므로, A로부터의 수평 거리는 $\lambda h\cot\alpha$이다.

사다리는 가벼우므로 A에 대한 모멘트는 R와 페인트공의 무게에서만 생긴다(N_1과 F_1은 A에 작용한다). R는 AE에 수직이므로 모멘트 팔의 길이는 AE 자체이다.

$$R\cdot\frac{h}{\sin\alpha} = kW\cdot\lambda h\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad\Longrightarrow\quad R = k\lambda W\cos\alpha,$$

따라서 원하는 결과를 얻는다. (엄밀히 말하면 이 식은 올라가는 모든 순간에 성립하며, 이 때 λh는 페인트공의 현재 높이이다.)

소문항 (ii)

뉴턴의 제3법칙(Newton's third law)에 의해 사다리는 E에서 상자를 사다리에 수직이고 상자 안쪽을 향하는 크기 R의 힘으로 민다. 이 힘의 성분은 수평 방향으로 $R\sin\alpha$(사다리에서 멀어지는 쪽, 즉 O 쪽)이고 연직 아래 방향으로 $R\cos\alpha$이다.

상자가 O를 축으로 넘어지기 직전에는 지면의 반작용이 전부 O에 작용하므로, N_2와 F_2는 O에 대한 모멘트가 없다. O에 대한 모멘트를 구하되, 시계 방향(상자가 넘어지는 방향)을 양으로 잡는다. E는 O로부터 수평 거리 b, 높이 h만큼 떨어져 있으므로

- 높이 h에 작용하는 수평 성분 $R\sin\alpha$의 모멘트는 $+Rh\sin\alpha$이다.
- O에서 사다리 쪽으로 거리 b만큼 떨어진 곳에 작용하는 연직 성분 $R\cos\alpha$의 모멘트는 $-Rb\cos\alpha$이다(그쪽을 아래로 누르면 넘어짐에 저항한다).
- O로부터 거리 $\frac{1}{2}b$에 작용하는 무게 W의 모멘트는 $-\frac{1}{2}Wb$이다.

전체 모멘트가 0이 될 때 상자가 넘어지기 시작한다.

$$R(h\sin\alpha - b\cos\alpha) = \tfrac{1}{2}Wb.$$

생각해 보기 여기서 $h = b\tan\alpha$는 어떻게 도움이 되는가?

이를 대입하면

$$h\sin\alpha - b\cos\alpha = b\,\frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{b\cos 2\alpha}{\cos\alpha}.$$

소문항 (i)의 $R = k\lambda W\cos\alpha$를 이용하면 조건은

$$-k\lambda W\cos\alpha\cdot\frac{b\cos 2\alpha}{\cos\alpha} = \tfrac{1}{2}Wb \quad\Longrightarrow\quad 2k\lambda\cos 2\alpha + 1 = 0,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. 이 식이 성립하려면 $\cos 2\alpha < 0$, 즉 $\alpha > 45°$이어야 하며, 이는 $h > b$와 일치한다.

소문항 (iii)

상자에 대하여 힘을 분해하면(지면의 반작용은 사다리 쪽 성분 F_2와 위쪽 성분 N_2를 가진다)

$$F_2 = R\sin\alpha, \qquad N_2 = W + R\cos\alpha.$$

상자가 미끄러지지 않으므로 $F_2 \le \mu N_2$, 즉 $\mu \ge \dfrac{R\sin\alpha}{W + R\cos\alpha}$이다.

? **생각해 보기** 올라가는 동안 어느 순간에 이 조건을 만족하기가 가장 어려운가?

비 $\dfrac{R\sin\alpha}{W + R\cos\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{W/R + \cos\alpha}$는 R에 대하여 증가하고, R는 페인트공이 올라갈수록 커진다. 따라서 마찰이 가장 크게 요구되는 때는 넘어지기 직전이며, 그 순간에 부등식이 성립해야 한다. (ii)에서 $k\lambda = -\dfrac{1}{2\cos 2\alpha}$이므로

$$R = -\frac{W\cos\alpha}{2\cos 2\alpha}.$$

그러면

$$R\sin\alpha = -\frac{W\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos 2\alpha} = -\frac{W\sin 2\alpha}{4\cos 2\alpha},$$

$$W + R\cos\alpha = W\left(1 - \frac{\cos^2\alpha}{2\cos 2\alpha}\right) = W\,\frac{4\cos 2\alpha - (1+\cos 2\alpha)}{4\cos 2\alpha} = W\,\frac{3\cos 2\alpha - 1}{4\cos 2\alpha},$$

이다. 여기서 $2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$를 이용하였다. 나누면

$$\mu \ge \frac{-\sin 2\alpha}{3\cos 2\alpha - 1} = \frac{\sin 2\alpha}{1 - 3\cos 2\alpha},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. $45° < \alpha < 90°$이면 $\sin 2\alpha > 0$이고 $\cos 2\alpha < 0$이므로 분자와 분모는 모두 양수이다.

검산

- $\alpha = 60°$로 잡으면 $\cos 2\alpha = -\frac{1}{2}$이다. 소문항 (ii)에서 $k\lambda = 1$이므로 $R = \frac{1}{2}W$이다. 그러면 $F_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}W$, $N_2 = \frac{5}{4}W$이므로 $\mu \ge \frac{\sqrt{3}}{5} \approx 0.346$이고, 이는 $\sin 120° / (1 - 3\cos 120°) = \frac{\sqrt{3}}{2} / \frac{5}{2}$와 일치한다.
- $\alpha \to 45°$일 때(높이가 너비보다 아주 조금만 큰, 정육면체에 가까운 상자), $\cos 2\alpha \to 0$이고 (ii)에서 $k\lambda \to \infty$가 필요하다. E에서 미는 힘이 거의 직선 EO를 따르므로 회전 효과가 거의 없기 때문이다. 이는 기하적 상황과 맞아떨어진다. $h = b\tan\alpha$일 때 α가 $45°$에 가까우면 E를 지나는 R의 작용선이 거의 O를 지난다.

- 모멘트 방정식, 넘어지는 높이, 마찰 한계는 α, b, k, W를 무작위로 여러 번 골라 컴퓨터로도 확인하였다.

흔한 실수

- E에서의 힘을 (매끄러운 벽의 경우처럼) 수평으로 잡는 것. 여기서는 모서리와 접촉하므로 힘은 사다리에 수직이다.
- R의 연직 성분이 상자의 수직항력(normal reaction)에 더해진다는 사실을 잊어, $N_2 = W + R\cos\alpha$가 아니라 W로 놓는 것.
- 상자의 엉뚱한 아래 모서리에 대하여 모멘트를 구하는 것. 상자는 사다리에서 먼 쪽 모서리를 축으로 넘어진다.

STEP 너머

이것은 두 물체의 정역학(statics)이다. 각 물체를 따로 떼어 내고, 접촉점에서 뉴턴의 제3법칙을 적용하며, 미지수가 사라지도록 모멘트의 중심을 고른다. 물체가 먼저 미끄러지는지 넘어지는지, 하중이 커질 때 어떤 제약이 먼저 깨지는지에 관한 질문은 공학 역학과 접촉하는 강체에 관한 연구 전반에 걸쳐 나타난다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 관점에서 강체의 정역학과 마찰을 다룬다.

풀이

STEP I 2019, 문제 10

역학 • 포물체 운동

STEP I 2019, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP I 시험지에 있다:

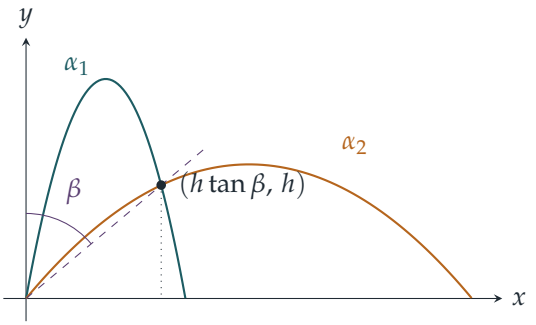
www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

핵심 아이디어

y를 x에 대한 식으로 나타낸 궤적(trajectory)의 방정식을 쓰고, 주어진 고정점을 대입한 다음, $1/\sin^2\alpha = 1 + \cot^2\alpha$를 이용하면 이 식이 $c = \cot\alpha$에 대한 이차방정식(quadratic)이 된다는 것을 알아차린다. 그 다음부터 (i)의 내용은 모두 이차방정식의 대수이다. 근의 합과 곱(sum and product of roots)을 cot의 덧셈정리(addition formula)에 넣으면 $\alpha_1 + \alpha_2$를 얻고, "서로 다른 두 근"은 판별식(discriminant) 조건이다. 소문항 (ii)는 에너지(energy)(또는 $v^2 = u^2 + 2as$)를 이용하는 한 줄짜리 논증이다.

풀이

입자를 공기 저항(air resistance) 없이 중력만 받으며 자유롭게 움직이는 질점(point mass)으로 모형화한다. 각 α는 위쪽 연직(vertical) 방향으로부터 잰 각이므로, 처음 속도의 수평 성분은 $u\sin\alpha$이고 연직 성분은 $u\cos\alpha$이다.



그림은 이 점을 지나는 두 가지 가능한 궤적을 나타낸다($\beta = 50°, k = 8$일 때). 이 점은 O를

지나고 연직 방향과 각 β를 이루는 직선 위에 있다.

소문항 (i)

시각 t에서

$$x = ut\sin\alpha, \qquad y = ut\cos\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

$0 < \beta < 90^\circ$이므로 이 점에서 $x > 0$이고, 따라서 $\sin\alpha \neq 0$이므로 $t = x/(u\sin\alpha)$를 소거할 수 있다.

$$y = x\cot\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\sin^2\alpha} = cx - \frac{gx^2}{2u^2}(1+c^2),$$

여기서 $\csc^2\alpha = 1 + \cot^2\alpha$를 이용하였다. 이제 $x = h\tan\beta$, $y = h$를 대입하고 $h > 0$으로 나누면

$$1 = c\tan\beta - \frac{gh}{2u^2}\tan^2\beta\,(1+c^2) = c\tan\beta - \frac{\tan^2\beta}{k}(1+c^2).$$

양변에 $k\cot^2\beta$를 곱하면 $k\cot^2\beta = ck\cot\beta - 1 - c^2$, 즉

$$c^2 - ck\cot\beta + 1 + k\cot^2\beta = 0, \qquad (*)$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

(a) 두 값 $c_1 = \cot\alpha_1$과 $c_2 = \cot\alpha_2$는 c에 대한 이차방정식 $(*)$의 두 근이다. (cot은 $(0,\pi)$에서 일대일(one-to-one)이므로 두 값은 서로 다르다.) 따라서 근의 합과 곱에 의하여

$$\cot\alpha_1 + \cot\alpha_2 = k\cot\beta, \qquad \cot\alpha_1\cot\alpha_2 = 1 + k\cot^2\beta.$$

이 중 첫 번째 식이 첫 번째 결과이다. 두 번째 결과를 얻으려면 cot의 덧셈정리를 이용한다.

$$\cot(\alpha_1+\alpha_2) = \frac{\cot\alpha_1\cot\alpha_2 - 1}{\cot\alpha_1 + \cot\alpha_2} = \frac{k\cot^2\beta}{k\cot\beta} = \cot\beta.$$

? **생각해 보기** $\cot(\alpha_1+\alpha_2) = \cot\beta$이면 정말로 $\alpha_1+\alpha_2 = \beta$일 수밖에 없는가?

그것만으로는 아니다. cot은 주기(period)가 180°이므로 $\alpha_1+\alpha_2$의 범위도 확정해야 한다. 여기서는 합 $k\cot\beta$와 곱 $1+k\cot^2\beta$가 모두 양수이므로($k>0$이고 $\cot\beta>0$이므로) 두 근 c_1, c_2는 모두 양수이다. 따라서 두 각은 모두 예각(acute)이고, $0 < \alpha_1+\alpha_2 < 180^\circ$이며, 이 구간에서 cot은 일대일이다. β도 이 구간에 속하므로 $\alpha_1+\alpha_2 = \beta$이다.

(b) c의 값이 서로 다른 두 실수이려면 $(*)$의 판별식이 양수여야 한다.

$$k^2\cot^2\beta - 4(1+k\cot^2\beta) > 0.$$

양변에 $\tan^2\beta > 0$을 곱하면

$$k^2 - 4k - 4\tan^2\beta > 0.$$

좌변의 k에 대한 이차식의 근은 $k = 2 \pm \sqrt{4 + 4\tan^2\beta} = 2 \pm 2\sec\beta$이다($1 + \tan^2\beta = \sec^2\beta$와 $\sec\beta > 0$을 이용). 따라서 이 부등식은 $k < 2 - 2\sec\beta$ 또는 $k > 2 + 2\sec\beta$일 때, 그리고 그때에만 성립한다. 그런데 $\sec\beta > 1$이므로 $2 - 2\sec\beta < 0 < k$이고, 첫 번째 경우는 불가능하다. 그러므로

$$k > 2(1 + \sec\beta).$$

소문항 (ii)

입자는 높이 $h > 0$까지 올라가야 하므로 처음 연직 속도 $u\cos\alpha$는 양수이다. 연직 방향의 운동은 일정한 가속도 $-g$를 가지며, 최고점에서 연직 속도는 0이므로 $v^2 = u^2 + 2as$에 의하여 최대 높이는

$$H = \frac{u^2\cos^2\alpha}{2g}.$$

입자는 높이 h인 점을 지나므로 $H \geq h$이다.

$$\frac{u^2\cos^2\alpha}{2g} \geq h \quad \Longrightarrow \quad \frac{2u^2}{gh}\cos^2\alpha \geq 4 \quad \Longrightarrow \quad k \geq 4\sec^2\alpha,$$

여기서 $4/(gh) > 0$을 곱한 다음 $\cos^2\alpha > 0$으로 나누었다. 등호는 점 $(h\tan\beta, h)$가 궤적의 최고점일 때, 그리고 그때에만 성립한다.

검산

- $\beta = 50°$, $k = 8$로 놓자. 그러면 $2(1 + \sec 50°) \approx 5.11 < 8$이므로 두 각이 존재한다. $(*)$를 풀면 $\alpha_1 \approx 10.29°$와 $\alpha_2 \approx 39.71°$를 얻고, 그 합은 $50°$이다. 운동을 수치적으로 한 단계씩 진행시켜 보면 두 궤적 모두 $x = h\tan\beta$에서 높이 $1.0000\,h$에 도달한다.
- 이 각들에 대하여 $k\cos^2\alpha \approx 7.74$와 4.73이고, (ii)에서 요구하는 대로 둘 다 4 이상이다.
- 수천 개의 임의의 β, h, k에 대하여 컴퓨터로 확인한 결과, $(*)$가 서로 다른 두 근을 가지는 것은 정확히 $k > 2(1 + \sec\beta)$일 때이고, 매번 $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta$였다.
- 단위: $u^2/(gh)$는 무차원(dimensionless)이며, k도 당연히 그래야 한다.

흔한 실수

- 습관적으로 α를 수평 방향에서 재는 것. 여기서 수평 성분은 $u\cos\alpha$가 아니라 $u\sin\alpha$이다.
- 두 각이 모두 예각임을 보이지 않고 $\cot(\alpha_1 + \alpha_2) = \cot\beta$로부터 $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta$라고 결론짓는 것.
- (b)에서 음수인 근 $k < 2 - 2\sec\beta$를 남겨 두는 것.

STEP 너머

$\alpha_1 + \alpha_2 = \beta$라는 결과는 두 발사 방향이 연직 방향과 목표점까지의 직선이 이루는 각의 이등분선(bisector)에 대하여 대칭임을 말해 준다. 이는 "안전 포물선(parabola of safety)"에 관한 고전적인 사실이다. 안전 포물선은 속력이 u인 모든 궤적의 포락선(envelope)으로, 두 근이 하나로 합쳐지는 경계의 경우 $k = 2(1 + \sec\beta)$에 해당한다. 곡선족의 포락선은 미적분과 기하를 잇는 대학 1학년 수준의 멋진 주제이다. 이러한 분위기의 역학을 더 보고 싶다면 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 참고하라.

풀이

STEP I 2019, 문제 11

확률과 통계 • 기하분포

STEP I 2019, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP I 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

이 문제는 *Beyond STEP*의 12.9 절 **치우친 동전으로 공정하게 정하기**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch12/von-neumann.html

핵심 아이디어

두 사람 절차의 각 라운드는 결정이 나거나 나지 않는 독립(independent) 시행이므로, 결정이 나는 라운드는 기하분포(geometric distribution)를 따른다. 그러면 "p의 값에 관계없이" 성립하는 부등식은 $p+q=1$일 때 pq가 얼마나 커질 수 있는가 하는 문제로 귀결되고, 이는 산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)으로 해결된다. 소문항 (ii)에서는 둘째 라운드가 더 이상 처음부터 다시 시작하는 것이 아니므로, 첫째 라운드에서 일어난 일에 따라 경우를 나누고, 같은 pq의 상한으로 마무리한다.

풀이

소문항 (i)

어느 한 라운드에서 두 동전은 독립이다. 둘 다 앞면이 나오거나(확률 p^2) 둘 다 뒷면이 나오면(확률 q^2) 결정이 이루어지므로

$$\mathrm{P}(\text{주어진 한 라운드에서 결정됨}) = p^2+q^2, \qquad \mathrm{P}(\text{결정 안 됨}) = pq+qp = 2pq.$$

검산하면 $p^2+q^2+2pq=(p+q)^2=1$이다.

매번 새로 동전을 던지므로 각 라운드는 독립이다. n번째 라운드에서 결정이 난다는 것은 결정이 나지 않는 라운드가 $n-1$번 이어진 뒤 결정이 나는 라운드가 한 번 온다는 뜻이므로

$$\mathrm{P}(\text{결정 라운드가} n) = (2qp)^{n-1}(q^2+p^2),$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

둘째 결과는 여사건(complement)을 이용하는 것이 가장 쉽다. n번째 라운드까지 결정이 나지 않는다는 것은 결정이 나지 않는 라운드가 연속으로 n번 나온다는 뜻이고, 그 확률은 $(2pq)^n$이다. 따라서

$$\mathrm{P}(\text{결정이 늦어도 라운드}n) = 1 - (2pq)^n.$$

($p^2 + q^2 = 1 - 2pq$를 이용하여 등비급수 $\sum_{r=1}^{n}(p^2+q^2)(2pq)^{r-1}$의 합을 구해도 같은 결과를 얻는다.)

이제 모든 p에 대하여 성립하는 pq의 상한이 필요하다. $p, q \geq 0$이므로 산술-기하 평균 부등식에 의해

$$\sqrt{pq} \leq \frac{p+q}{2} = \frac{1}{2}, \qquad \text{따라서} \qquad pq \leq \frac{1}{4},$$

이고, 등호는 정확히 $p = q = \frac{1}{2}$일 때 성립한다. (같은 말로, $pq = p(1-p) = \frac{1}{4} - (p - \frac{1}{2})^2$이다.) 그러므로 $0 \leq 2pq \leq \frac{1}{2}$이고, 따라서 $(2pq)^n \leq \frac{1}{2^n}$이며

$$\mathrm{P}(\text{결정이 늦어도 라운드}n) = 1 - (2pq)^n \geq 1 - \frac{1}{2^n}$$

이 모든 p의 값에 대하여 성립하여, 증명이 끝난다. 공정한 동전이 최악의 경우이다.

소문항 (ii)

D_1을 라운드 1에서 결정이 나는 사건, D_2를 라운드 2에서 결정이 나는 사건이라 하자. 이 두 사건은 서로 배반(mutually exclusive)이므로 $\mathrm{P}(D_1) + \mathrm{P}(D_2)$를 구하면 된다.

라운드 1. 셋 모두 앞면이거나 셋 모두 뒷면인 경우이므로 $\mathrm{P}(D_1) = p^3 + q^3$이다.

라운드 2. 라운드 1에서 결정이 나지 않았다면, 동전은 앞면 둘과 뒷면 하나이거나 뒷면 둘과 앞면 하나였다.

- **앞면 둘, 뒷면 하나** (세 사람 중 누구든 뒷면이 나온 사람이 될 수 있으므로 확률은 $3p^2q$). 앞면이 나온 두 사람은 다시 던지고, 셋째 사람은 뒷면을 뒤집어 앞면이 보이게 한다. 이제 모두 뒷면인 경우는 불가능하고, 모두 앞면인 경우는 새로 던진 두 동전이 모두 앞면일 때, 즉 확률 p^2로 일어난다. 이 경로의 기여는 $3p^2q \cdot p^2 = 3p^4q$이다.
- **뒷면 둘, 앞면 하나** (확률 $3pq^2$). 같은 논리로 셋째 동전은 이제 뒷면을 보이고, 새로 던진 두 동전이 모두 뒷면이어야 하며 그 확률은 q^2이다. 이 경로의 기여는 $3pq^2 \cdot q^2 = 3pq^4$이다.

라운드 2에서 던지는 것은 라운드 1과 독립이므로 곱할 수 있다. 따라서

$$\mathrm{P}(D_2) = 3p^4q + 3pq^4 = 3pq\,(p^3 + q^3).$$

? 생각해 보기 $p^3+q^3+3pq(p^3+q^3)$를 깔끔하게 정리할 방법이 있을까?

p^3+q^3으로 묶어 낸 다음, $p+q=1$과 세제곱의 합(sum of cubes) 공식을 이용한다.

$$p^3+q^3=(p+q)(p^2-pq+q^2)=(p+q)^2-3pq=1-3pq.$$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\text{결정이 늦어도 라운드 2까지}) &= (p^3+q^3)(1+3pq)\\ &= (1-3pq)(1+3pq)\\ &= 1-9p^2q^2.\end{aligned}$$

소문항 (i)에서 $0\le pq\le\frac{1}{4}$이므로 $p^2q^2\le\frac{1}{16}$이고

$$\mathrm{P}(\text{결정이 늦어도 라운드 2까지})\ge 1-\frac{9}{16}=\frac{7}{16}$$

이 p의 값에 관계없이 성립하며, 등호는 $p=\frac{1}{2}$일 때 성립한다. 이로써 증명이 끝난다.

검산

- $p=1$(양면이 모두 앞면인 동전)이면 즉시 결정이 난다. 소문항 (i)에서 $1-(2pq)^n=1$, 소문항 (ii)에서 $1-9p^2q^2=1$이 되어 마땅히 그래야 하는 결과와 일치한다.
- 소문항 (ii)에서 $p=\frac{1}{2}$이면, 라운드 1에서 확률 $\frac{1}{4}$로 결정이 난다. 그렇지 않은 경우($\frac{3}{4}$)에는 라운드 2에서 확률 $\frac{1}{4}$로 결정이 나므로 $\frac{1}{4}+\frac{3}{16}=\frac{7}{16}$이 되어, 하한이 실제로 달성된다.
- $p=0.3$이면 공식은 $1-9(0.21)^2=0.6031$을 준다. 세 사람 절차를 200 000번 컴퓨터로 시뮬레이션한 결과는 0.602였다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)의 라운드 1에서 누가 홀로 다른 면이 나온 사람인지에 대한 인수 3을 빠뜨린다.
- 소문항 (ii)의 라운드 2를 동전 세 개를 새로 던지는 라운드처럼 취급한다. 뒤집어 놓은 동전은 고정되어 있으므로 "모두 앞면"과 "모두 뒷면" 중 하나만 가능하다.
- 부등식을 $p=\frac{1}{2}$에서만 증명한다. **모든** p에 대하여 $pq\le\frac{1}{4}$가 필요하며, 산술-기하 평균 부등식 같은 부등식이 이를 보장해 준다.

STEP 너머

소문항 (i)은 흔히 폰 노이만(von Neumann)의 것으로 알려진, 편향된 동전으로 공정한 결정을 얻는 고전적인 기법과 관련이 있다. 두 사람 절차에서 "호텔"과 "찻집"은 $p = \frac{1}{2}$일 때에만 같은 확률로 나오지만, 한 사람이 두 번 던져 HT와 TH를 결과로 사용하면 모든 p에 대하여 공정한 결과를 얻는다. 결정이 날 때까지의 라운드 수는 기하 확률변수(geometric random variable)이며, 이런 절차가 얼마나 빨리 멈추는가에 대한 질문은 정지 시간(stopping time)과 마르코프 연쇄(Markov chain)의 연구로 이어진다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문서)이 두 주제를 모두 다룬다.

풀이

STEP II 2019, 문제 1

순수수학 • 삼차함수의 접선

> **STEP II 2019, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

핵심 아이디어

$x = a$에서의 접선(tangent)이 $(p, 0)$을 지날 조건을 쓰고 $f(x) = (x - p)g(x)$를 대입한다. 그러면 거의 모든 항이 소거되고 $g'(a)$의 상수배만 남는다. 따라서 삼차함수(cubic)의 경우, 근(root) p에서 그은 접선은 **나머지** 이차 인수가 정류(stationary)하는 곳, 즉 나머지 두 근의 한가운데에서 곡선에 접한다. 소문항 (ii)는 결국 두 기울기를 비교하는 문제와, 접선이 삼차함수와 만나는 점을 구하는 방정식을 인수분해하는 문제로 귀결된다. 이 방정식은 접점에서 항상 중근(double root)을 가진다.

풀이

첫 번째 결과

$x = a$에서의 접선은 $y = f(a) + f'(a)(x - a)$이다. 곱의 미분법(product rule)에 의해 $f'(x) = g(x) + (x - p)g'(x)$이다. 접선이 $(p, 0)$을 지나는 것은 정확히 다음이 성립할 때이다.

$$\begin{aligned} 0 &= f(a) + f'(a)(p - a) \\ &= (a - p)g(a) + \big[g(a) + (a - p)g'(a)\big](p - a) \\ &= (a - p)g(a) - (a - p)g(a) - (a - p)^2 g'(a) \\ &= -(a - p)^2 g'(a). \end{aligned}$$

$a \neq p$이므로 인수 $(a - p)^2$은 0이 아니다. 따라서 이 식은 $g'(a) = 0$일 때, 그리고 그때에만 성립한다. 이로써 양방향의 결과가 한꺼번에 증명된다.

소문항 (i)

여기서 $f(x) = (x-p)g(x)$이고 $g(x) = A(x-q)(x-r) = A\big(x^2 - (q+r)x + qr\big)$이므로 $g'(x) = A\big(2x - (q+r)\big)$이다. 첫 번째 결과와 $A \neq 0$에 의해

$$g'(a) = 0 \iff 2a = q + r.$$

($a = \frac{1}{2}(q+r) > q > p$이므로 요구한 대로 $a \neq p$임에 유의한다.)

기울기(gradient)는 $g'(a) = 0$이므로 $f'(a) = g(a) + (a-p)g'(a) = g(a)$이다. $a - q = \frac{1}{2}(r-q)$, $a - r = -\frac{1}{2}(r-q)$이므로

$$f'(a) = A \cdot \tfrac{1}{2}(r-q) \cdot \big(-\tfrac{1}{2}(r-q)\big) = -\frac{A(r-q)^2}{4}.$$

소문항 (ii)

이번에는 근 r을 인수로 빼낸다. 즉 $f(x) = (x-r)h(x)$, $h(x) = A(x-p)(x-q)$이다. 첫 번째 결과는 p 대신 r을 넣어도 그대로 적용된다(어느 근을 골랐는지는 증명에서 전혀 쓰이지 않았다). 따라서 $x = c$에서의 접선이 $(r, 0)$을 지나는 것은 $h'(c) = 0$, 즉 $c = \frac{1}{2}(p+q)$일 때, 그리고 그때에만이다. 소문항 (i)과 똑같이 그 기울기는

$$f'(c) = h(c) = A \cdot \tfrac{1}{2}(q-p) \cdot \big(-\tfrac{1}{2}(q-p)\big) = -\frac{A(q-p)^2}{4}.$$

그러므로 $A \neq 0$이므로

$$\text{두 접선이 평행} \iff (r-q)^2 = (q-p)^2 \iff r - q = q - p \iff q = \tfrac{1}{2}(p+r)$$

이다. 여기서 가운데 단계는 $r - q > 0$, $q - p > 0$을 이용한 것이므로 양의 제곱근을 취할 수 있다.

> **생각해 보기** 삼차방정식을 풀지 않고, 접선이 삼차함수와 다시 만나는 곳을 어떻게 구할까?

우리는 이미 근 하나를, 그것도 두 번 겹친 근으로 알고 있다. 바로 접점이다. $x = q$에서 기울기는 $f'(q) = A(q-p)(q-r)$이고(곱의 미분법의 나머지 두 항은 $x - q$를 포함하므로 사라진다), $f(q) = 0$이므로 그 점에서의 접선은 $y = A(q-p)(q-r)(x-q)$이다. 이 접선은 다음이 성립하는 곳에서 곡선과 만난다.

$$A(x-p)(x-q)(x-r) = A(q-p)(q-r)(x-q).$$

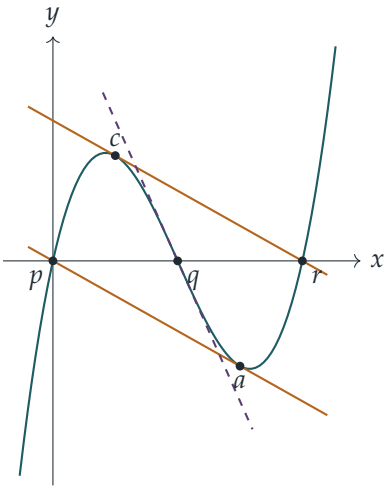
$A \neq 0$으로 나누고 인수 $x - q$를 묶어 내면

$$\begin{aligned} 0 &= (x-q)\big[(x-p)(x-r) - (q-p)(q-r)\big] \\ &= (x-q)\big[x^2 - q^2 - (p+r)(x-q)\big] \\ &= (x-q)^2\,(x+q-p-r). \end{aligned}$$

따라서 접선은 $x = q$(접점이므로 예상대로 중근)와 $x = p + r - q$에서 곡선과 만나고, 그 밖의 곳에서는 만나지 않는다. 접선이 곡선과 다시 만나지 않는 것은 이 세 번째 근이 q와 일치할 때, 그리고 그때에만이다.

$$p + r - q = q \iff q = \tfrac{1}{2}(p + r).$$

이는 앞의 조건과 같다. 따라서 소문항 (i)과 (ii)의 두 접선이 평행한 것은 $x = q$에서의 접선이 곡선과 다시 만나지 않을 때, 그리고 그때에만이다.



그림은 $q = \frac{1}{2}(p + r)$인 경우를 나타낸다. 두 접선(호박색)은 평행하고, q에서의 접선(점선)은 그 점에서 곡선을 관통하지만 다른 어느 곳에서도 곡선과 만나지 않는다. 이때 q가 변곡점(point of inflection)이기 때문이다.

검산

- $p = 0, q = 1, r = 2, A = 3$으로 두면 $f(x) = 3x^3 - 9x^2 + 6x$이다. 그러면 $f'(x) = 9x^2 - 18x + 6$이고, $f'(\frac{3}{2}) = -\frac{3}{4}$, $f'(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{4}$이다. 둘 다 $-A(r-q)^2/4 = -A(q-p)^2/4 = -\frac{3}{4}$와 같으므로 두 접선은 평행하다. q가 p와 r의 중점이므로 예측한 그대로이다.
- $x = \frac{3}{2}$에서의 접선은 $y = -\frac{9}{8} - \frac{3}{4}(x - \frac{3}{2})$이고, 이 값은 $x = 0$에서 0이다. 즉 실제로 $(p, 0)$을 지난다.
- 위의 모든 항등식은 $p < q < r$와 A를 무작위로 약 2천 번 골라 컴퓨터로 정확한 산술 계산을 하여서도 확인하였다.

흔한 실수

- $(a-p)^2$을 소거할 수 있는 근거가 $a \neq p$라는 점을 잊는 것. 이 조건이 없으면 "그때에만" 방향이 성립하지 않는다. p 자신에서의 접선은 항상 $(p,0)$을 지나기 때문이다.
- 음의 제곱근이 왜 제외되는지 말하지 않고 $(r-q)^2 = (q-p)^2 \Rightarrow r-q = q-p$라고 쓰는 것.
- 접점에서 이미 알고 있는 중근을 이용하지 않고, 교점을 구하기 위해 삼차방정식을 처음부터 풀려고 하는 것.

STEP 너머

$x = q$에서의 접선이 특별한 까닭은, 이때 q가 변곡점, 즉 삼차함수의 대칭중심(centre of symmetry)이기 때문이다. 모든 삼차함수의 그래프는 변곡점을 중심으로 반 바퀴 회전하는 것에 대하여 대칭이며, 바로 이 때문에 두 접선이 평행해진다. 여기서 사용한 접선과 현의 작도는 삼차곡선의 기하학으로 나아가는 첫걸음이다. 삼차곡선의 기하학에서는 직선이 삼차곡선과 만나는 세 번째 교점을 이용하여 곡선 위의 점들에 덧셈 법칙을 정의한다(타원곡선(elliptic curves)). Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제집)에 이런 성격의 문제가 더 실려 있다.

풀이

STEP II 2019, 문제 2

순수수학 • 역함수의 적분

> **STEP II 2019, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

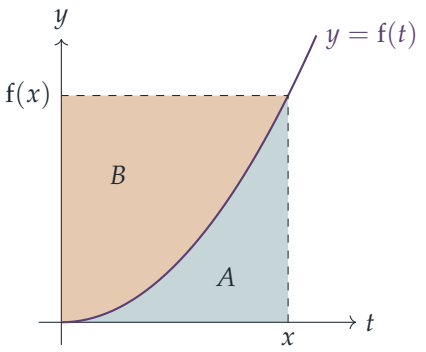
핵심 아이디어

$y = \mathrm{f}(t)$의 그래프는 꼭짓점이 $(0,0)$과 $(x, \mathrm{f}(x))$인 직사각형을 두 조각으로 나눈다. 한 조각은 곡선 아래의 넓이이고, 다른 조각은 곡선과 y축 사이의 넓이로, 이는 역함수(inverse function)의 적분(integral)이다. 따라서 두 적분의 합은 직사각형의 넓이와 같다. 소문항 (i)과 (ii)는 함수를 음함수(implicit function) 꼴로만 정의하므로 직접 적분할 수는 없지만, 그 **역함수**는 간단한 삼차식(cubic)이다. 이 항등식(identity)을 이용하면 어려운 적분을 쉬운 적분으로 바꿀 수 있다.

풀이

처음 결과

$t > 0$에서 $\mathrm{f}'(t) > 0$이고 $\mathrm{f}(0) = 0$이므로 f는 $[0, x]$에서 순증가(strictly increasing)한다. 따라서 $t > 0$이면 $\mathrm{f}(t) > 0$이고, f는 $[0, \mathrm{f}(x)]$에서 $[0, x]$로 가는 역함수 f^{-1}를 가진다. 같은 곡선을 $y = \mathrm{f}(t)$로도, $t = \mathrm{f}^{-1}(y)$로도 나타낼 수 있다.



$0 \le t \le x$에서 곡선과 t축 사이의 영역 A의 넓이는

$$A = \int_0^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t.$$

이다. $0 \le y \le \mathrm{f}(x)$에서 곡선과 y축 사이의 영역 B는 가로 띠들로 이루어져 있다. 높이 y에서의 띠는 $t = 0$부터 $t = \mathrm{f}^{-1}(y)$까지 뻗어 있으므로

$$B = \int_0^{\mathrm{f}(x)} \mathrm{f}^{-1}(y)\,\mathrm{d}y.$$

이다. 곡선이 증가하면서 $(0,0)$에서 $(x,\mathrm{f}(x))$까지 이어지므로, A와 B는 겹치지 않고 정확히 맞물려 직사각형 $0 \le t \le x, 0 \le y \le \mathrm{f}(x)$를 채운다. 이 직사각형의 넓이는 $x\,\mathrm{f}(x)$이므로

$$\int_0^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\mathrm{f}(x)} \mathrm{f}^{-1}(y)\,\mathrm{d}y = x\,\mathrm{f}(x),$$

가 되어 증명이 끝난다.

소문항 (i)

$\phi(y) = y^3 + y$라 하자. 그러면 $\phi'(y) = 3y^2 + 1 > 0$이므로 ϕ는 순증가하고, $y \to \pm\infty$일 때 $\phi(y) \to \pm\infty$이다. 따라서 각 실수 t에 대하여 $\phi(y) = t$를 만족하는 실수 y가 꼭 하나 존재하며, 이것이 $\mathrm{g}(t)$이다. 다시 말해 $\mathrm{g} = \phi^{-1}$이다.

$\mathrm{g}(0) = 0$. $t = 0$을 대입하면 $\mathrm{g}(0)\big(\mathrm{g}(0)^2 + 1\big) = 0$이다. 실수 $\mathrm{g}(0)$에 대하여 $\mathrm{g}(0)^2 + 1 \ge 1$이므로 $\mathrm{g}(0) = 0$이다.

$\mathrm{g}'(t) > 0$. $\mathrm{g}(t)^3 + \mathrm{g}(t) = t$를 t에 대하여 음함수 미분(implicit differentiation)하면

$$\big(3\,\mathrm{g}(t)^2 + 1\big)\,\mathrm{g}'(t) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{g}'(t) = \frac{1}{3\,\mathrm{g}(t)^2 + 1} > 0,$$

이다. 분모가 1 이상이기 때문이다.

생각해 보기 $\mathrm{g}(t)$를 식으로 적을 수 없는데, 어떻게 적분할 수 있을까?

그럴 필요가 없다. g는 처음 결과의 조건을 만족하고, 그 역함수는 적분하기 쉬운 $\phi(y) = y^3 + y$이다. $x = 2$로 결과를 적용하려면 $g(2)$, 즉 $y^3 + y = 2$의 실근이 필요하다. 이 근은 $y = 1$이며, ϕ가 순증가하므로 유일한 근이다. 따라서

$$\int_0^2 g(t)\,dt = 2\,g(2) - \int_0^1 (y^3 + y)\,dy = 2 - \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}.$$

소문항 (ii)

두 정의를 비교하면 $h(t)$는 $y^3 + y = t + 2$의 실근이므로 $h(t) = g(t+2)$이다. $u = t + 2$로 치환하면

$$\int_0^8 h(t)\,dt = \int_2^{10} g(u)\,du = \int_0^{10} g(u)\,du - \int_0^2 g(u)\,du.$$

첫 번째 적분에는 $x = 10$으로 처음 결과를 이용한다. $2^3 + 2 = 10$이므로 $g(10) = 2$이고, 따라서

$$\int_0^{10} g(u)\,du = 10 \times 2 - \int_0^2 (y^3 + y)\,dy = 20 - (4 + 2) = 14.$$

두 번째 적분에 소문항 (i)의 결과를 쓰면

$$\int_0^8 h(t)\,dt = 14 - \frac{5}{4} = \frac{51}{4}.$$

다른 방법. 그림을 h에 직접 적용할 수도 있다. 이번에는 0이 아니라 $h(0) = 1$이다. 곡선은 $(0,1)$에서 $(8,2)$까지 이어지고, $h^{-1}(y) = y^3 + y - 2$이다. 곡선 아래의 넓이는 8×2 직사각형에서 0×1 직사각형(여기서는 비어 있다)을 빼고, 다시 $1 \le y \le 2$에서 곡선 왼쪽의 넓이를 뺀 것이다.

$$16 - \int_1^2 (y^3 + y - 2)\,dy = 16 - \left(\tfrac{15}{4} + \tfrac{3}{2} - 2\right) = 16 - \tfrac{13}{4} = \tfrac{51}{4}.$$

검산

- $[0,2]$에서 $0 \le g(t) \le 1$이므로 (i)의 적분값은 0과 2 사이에 있어야 한다. 또한 g는 이 구간에서 오목(concave)하므로(증가하는 볼록(convex) 함수의 역함수이기 때문이다), 적분값은 삼각형의 넓이 $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1$ 이상이다. 답 $\frac{5}{4}$는 이에 들어맞는다.
- (ii)에서는 $[0,8]$에서 $1 \le h(t) \le 2$이므로 적분값은 8과 16 사이에 있으며, 12.75도 그렇다.
- 여러 점에서 삼차방정식을 수치적으로 풀고 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 적분하면 1.25000과 12.75000을 얻으며, 이는 정확한 답과 일치한다.

흔한 실수

- 역함수 적분의 위끝을 잘못 쓰는 것: 위끝은 2가 아니라 $g(2) = 1$이다.
- $h(0) = 0$인 것처럼 h에 처음 결과를 적용하는 것. $h(0) = 1$이므로 그림에 띠가 하나 더 생기고, 항등식을 조정해야 한다(또는 $h(t) = g(t+2)$를 이용한다).
- g가 잘 정의됨, 즉 $y^3 + y = t$가 실근을 꼭 하나 가짐을 보이는 것을 잊는 것.

STEP 너머

처음 항등식은 **영의 부등식**(*Young's inequality*)에서 등호가 성립하는 경우이다. $f(0) = 0$인 증가함수 f와 임의의 $a, b \geq 0$에 대하여 $ab \leq \int_0^a f + \int_0^b f^{-1}$가 성립한다. $f(t) = t^{p-1}$로 두면 $ab \leq a^p/p + b^q/q$를 얻는데, 이는 해석학(analysis)에서 휠더(Hölder) 부등식의 출발점이다. g가 미분가능하고 $g' = 1/\phi'(g)$라는 사실은 **역함수 정리**(*inverse function theorem*)이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)가 이를 꼼꼼히 증명한다.

풀이

STEP II 2019, 문제 3

순수수학 • 다항식 근의 한계

> **STEP II 2019, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

핵심 아이디어

삼각부등식(triangle inequality)을 쓰면 다항식(polynomial)의 각 항을 그 크기로 바꾸어 다항식을 위에서 누를 수 있고, $|x| < 1$일 때 그 크기들은 기하급수(geometric series)를 이룬다. 이로부터 작은 근(root)의 하한을 얻는다. 큰 근에 대해서는 $1/\omega$를 보는 것이 요령이다. f의 계수(coefficient)를 거꾸로 배열하면 모양이 정확히 같은 다항식이 되므로, 작은 근에 대한 결과가 한 번 더 일을 해 준다. 소문항 (ii)에서는 이 범위 덕분에 정수근 후보가 네 개로 줄어든다.

풀이

삼각부등식

양변이 모두 음이 아니므로 제곱끼리 비교하면 충분하다. $x_1x_2 \le |x_1x_2| = |x_1||x_2|$이므로

$$|x_1 + x_2|^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \le |x_1|^2 + 2|x_1||x_2| + |x_2|^2 = \left(|x_1| + |x_2|\right)^2,$$

이고, 음이 아닌 제곱근을 취하면 $|x_1 + x_2| \le |x_1| + |x_2|$를 얻는다.

n개의 수에 대해서는 n에 대한 수학적 귀납법(induction)을 쓴다. $n = 1$인 경우는 등식이고 $n = 2$인 경우는 방금 보였다. 결과가 $n-1$개의 수에 대해 성립한다고 하면, $x_1 + \cdots + x_{n-1}$과 x_n에 두 수의 경우를 적용하여

$$\begin{aligned} |x_1 + \cdots + x_{n-1} + x_n| &\le |x_1 + \cdots + x_{n-1}| + |x_n| \\ &\le |x_1| + \cdots + |x_{n-1}| + |x_n|, \end{aligned}$$

를 얻으며, 이것이 n개의 수에 대한 결과이다.

소문항 (i)(a)

$\mathrm{f}(x) - 1 = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$이다. 삼각부등식을 쓰고, 이어서 $|a_i| \le A$를, 마지막 항에는 $1 \le A$를 쓰면

$$\begin{aligned} |\mathrm{f}(x) - 1| &\le |a_1||x| + \cdots + |a_{n-1}||x|^{n-1} + |x|^n \\ &\le A\left(|x| + |x|^2 + \cdots + |x|^n\right). \end{aligned}$$

이다. $0 \le |x| < 1$이므로 유한 기하급수의 합은 모든 항이 음이 아닌 무한급수의 합보다 크지 않다.

$$|x| + |x|^2 + \cdots + |x|^n \le \sum_{k=1}^{\infty} |x|^k = \frac{|x|}{1 - |x|}.$$

따라서 요구한 대로 $|\mathrm{f}(x) - 1| \le \dfrac{A|x|}{1 - |x|}$이다.

소문항 (i)(b)

$\mathrm{f}(\omega) = 0$이므로 $|\mathrm{f}(\omega) - 1| = 1$이고, 소문항 (a)에 의해

$$1 \le \frac{A|\omega|}{1 - |\omega|}.$$

이다. $1 - |\omega| > 0$이므로 부등호 방향을 바꾸지 않고 양변에 곱할 수 있다. 즉 $1 - |\omega| \le A|\omega|$, 곧 $1 \le (1 + A)|\omega|$이므로

$$|\omega| \ge \frac{1}{1 + A}.$$

이다. 상한은 바로 나온다. $|\omega| < 1 \le 1 + A$. 따라서 $(*)$가 성립한다.

소문항 (i)(c)

이제 $|\omega| \ge 1$이다. 하한은 쉽다. $A \ge 1 > 0$이므로 $|\omega| \ge 1 > \frac{1}{1+A}$이다. 실제 핵심은 상한이다.

$|\omega| = 1$이면 곧바로 $|\omega| \le 1 + A$이므로, $|\omega| > 1$이라 하자. $\mathrm{g}(y) = y^n \mathrm{f}(1/y)$로 두면

$$\mathrm{g}(y) = 1 + a_{n-1}y + a_{n-2}y^2 + \cdots + a_1 y^{n-1} + y^n.$$

이다.

> **생각해 보기** 왜 g에 소문항 (a)와 (b)의 결과를 쓸 수 있는가?

이 다항식은 f와 꼴이 정확히 같다. 상수항이 1, 최고차항의 계수가 1이고, 나머지 계수는 $a_{n-1}, \ldots, a_1$을 거꾸로 배열한 것이므로 각각의 크기가 여전히 A 이하이다. 따라서 같은 A로 소문항 (b)를 g에 적용할 수 있다.

$\omega \neq 0$이므로 $g(1/\omega) = \omega^{-n} f(\omega) = 0$이고, 따라서 $1/\omega$는 $|1/\omega| < 1$인 g의 실근이다. g에 대한 소문항 (b)에 의해

$$\frac{1}{|\omega|} \geq \frac{1}{1+A}, \qquad \text{따라서} \qquad |\omega| \leq 1 + A.$$

이다. 그러므로 크기에 관계없이 f의 모든 실근에 대해 $(*)$가 성립한다. ($f(0) = 1$이므로 0은 결코 근이 아님에 유의한다.)

소문항 (ii)

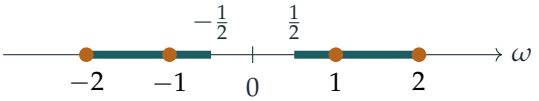
135로 나누고 항을 오름차순으로 쓰면, 방정식은 $f(x) = 0$이며 여기서

$$f(x) = 1 - \tfrac{126}{135}x - \tfrac{91}{135}x^2 - \tfrac{100}{135}x^3 - x^4 + x^5.$$

이다. 이는 $n = 5$인 소문항 (i)의 꼴이다. 상수항과 최고차항의 계수가 모두 1이고, 나머지 계수의 크기는 $\frac{126}{135}, \frac{91}{135}, \frac{100}{135}, 1$로 모두 $A = 1$ 이하이다. 따라서 모든 실근은

$$\tfrac{1}{2} \leq |\omega| \leq 2.$$

를 만족한다.



허용된 영역(색칠한 부분)에 있는 정수는 ± 1과 ± 2뿐이다. 원래의 5차식(quintic) $p(x) = 135x^5 - 135x^4 - 100x^3 - 91x^2 - 126x + 135$에 대입하면

$$\begin{aligned} p(1) &= 135 - 135 - 100 - 91 - 126 + 135 = -182, \\ p(-1) &= -135 - 135 + 100 - 91 + 126 + 135 = 0, \\ p(2) &= 4320 - 2160 - 800 - 364 - 252 + 135 = 879, \\ p(-2) &= -4320 - 2160 + 800 - 364 + 252 + 135 = -5657. \end{aligned}$$

이다. 따라서 정수근은 $x = -1$뿐이다. 실제로

$$p(x) = (x+1)\big(135x^4 - 270x^3 + 170x^2 - 261x + 135\big),$$

이고, 4차 인수는 $x = -1$에서 971이므로 -1은 단순근(simple root)이다.

검산

- $(x+1)(135x^4 - 270x^3 + 170x^2 - 261x + 135)$를 전개하여 원래의 5차식이 나오는지 확인한다.

- 이 5차식에는 실근이 두 개 더 있으며 대략 0.595와 1.725이다. 소문항 (i)이 예측하듯 둘 다 $[\frac{1}{2}, 2]$에 들어 있다.
- $A = 2$인 $f(x) = 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$을 시험해 보면 근 1이 $[\frac{1}{3}, 3]$에 들어 있다. 이 범위는 수백 개의 무작위 다항식에 대해 컴퓨터로도 확인하였다.

흔한 실수

- 소문항 (a)에서 x^n 항을 빠뜨리는 것. 이 항의 계수는 어떤 a_n이 아니라 1이며, $A \geq 1$이기 때문에 이 항도 기하급수에 합류할 수 있다.
- 소문항 (c)에서 $|\omega| \geq 1$인데도 ω에서 소문항 (a)를 그대로 다시 쓰려는 것. 이때는 기하급수가 더 이상 수렴하지 않는다. 대신 $1/\omega$로 넘어가야 한다.
- 소문항 (ii)에서 135의 약수를 모두 근의 후보로 시험하는 것. 틀린 방법은 아니지만, 소문항 (i)의 범위를 쓰면 시험할 후보가 네 개만 남는다.

STEP 너머

다항식의 근을 계수로 제한하는 것은 고전적인 주제이다. 이 결과는 코시(Cauchy)의 근의 상한의 한 형태이며, 절댓값 대신 복소수의 절댓값(modulus)을 쓰면 똑같은 논증이 복소근에 대해서도 글자 그대로 성립한다. 뒤집기 $y^n f(1/y)$는 작은 근과 큰 근을 맞바꾸어 주며, 대수학과 복소해석학에서 흔히 쓰는 도구이다. 이와 같은 범위와 복소근의 기하에 관한 더 많은 내용은 Needham, *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)를 읽어 보라.

풀이

STEP II 2019, 문제 4

순수수학 • 삼각함수의 망원곱

> **STEP II 2019, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

핵심 아이디어

각이 매번 두 배가 되는(또는 절반이 되는) 코사인들의 곱은 가장 작은 각의 사인을 곱하면 연쇄적으로 소거(telescoping)된다. 그러면 배각 공식(double-angle formula) $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$가 인수들을 하나씩 차례로 흡수한다. 곱을 닫힌 형태(closed form)로 나타내고 나면, 로그(logarithm)를 취해 곱을 합으로 바꾸고, 미분하여 $\ln\cos$를 $\tan$로 바꿀 수 있다. 탄젠트의 합은 바로 여기서 나온다. 무한 버전은 두 가지 표준적인 극한(limit)을 이용하여 $n \to \infty$로 보내면 얻어진다.

풀이

소문항 (i)

곱을 P라 하자. $\sin\frac{\pi}{9} \neq 0$이므로 이것을 곱한 뒤 항등식을 세 번 적용할 수 있다.

$$\begin{aligned} 8\sin\tfrac{\pi}{9}\,P &= 4\big(2\sin\tfrac{\pi}{9}\cos\tfrac{\pi}{9}\big)\cos\tfrac{2\pi}{9}\cos\tfrac{4\pi}{9} = 2\big(2\sin\tfrac{2\pi}{9}\cos\tfrac{2\pi}{9}\big)\cos\tfrac{4\pi}{9} \\ &= 2\sin\tfrac{4\pi}{9}\cos\tfrac{4\pi}{9} = \sin\tfrac{8\pi}{9} = \sin\big(\pi - \tfrac{\pi}{9}\big) = \sin\tfrac{\pi}{9}. \end{aligned}$$

양변을 $8\sin\frac{\pi}{9}$로 나누면

$$\cos\tfrac{\pi}{9}\cos\tfrac{2\pi}{9}\cos\tfrac{4\pi}{9} = \frac{1}{8}.$$

소문항 (ii)

여기서는 각 $x, \frac{x}{2}, \ldots, \frac{x}{2^n}$이 절반씩 줄어들므로 가장 작은 각은 $x/2^n$이다. $0 < x/2^n < \frac{1}{2}\pi$이므로 그 사인은 0이 아니다. $\sin(x/2^n)$을 곱하면 인수 $\cos(x/2^n)$이 이것과 짝을 이루어 $\frac{1}{2}\sin(x/2^{n-1})$이 되고, 이것은 다시 $\cos(x/2^{n-1})$과 짝을 이루며, 이런 식으로 $\cos x$까지 올

라간다. $n+1$번의 단계마다 인수 $\frac{1}{2}$이 하나씩 생긴다.

$$\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\prod_{k=0}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)=\frac{1}{2^{n+1}}\sin 2x, \qquad \text{이므로} \qquad \prod_{k=0}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)=\frac{\sin 2x}{2^{n+1}\sin(x/2^n)}.$$

생각해 보기 미분을 이용하여 코사인들의 곱을 어떻게 탄젠트들의 합으로 바꿀 수 있을까?

로그를 취한다. 각 k에 대하여 $0<x/2^k<\frac{1}{2}\pi$이므로 모든 인수는 양수이고, $\sin 2x>0$이기도 하다. 따라서

$$\sum_{k=0}^{n}\ln\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)=\ln\sin 2x-(n+1)\ln 2-\ln\sin\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

연쇄 법칙(chain rule)에 의해 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\cos(x/2^k)=-\frac{1}{2^k}\tan(x/2^k)$임을 이용하여 x에 대하여 미분하면

$$-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\left(\frac{x}{2^k}\right)=2\cot 2x-\frac{1}{2^n}\cot\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

양변에 -1을 곱하면 정확히 구하는 결과를 얻는다.

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\left(\frac{x}{2^k}\right)=\frac{1}{2^n}\cot\left(\frac{x}{2^n}\right)-2\cot 2x.$$

소문항 (iii)

곱의 공식을 $\cos x\neq 0$으로 나누고 $\sin 2x=2\sin x\cos x$를 이용하면

$$\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)=\frac{2\sin x\cos x}{2^{n+1}\sin(x/2^n)\cos x}=\frac{\sin x}{2^n\sin(x/2^n)}.$$

생각해 보기 $n\to\infty$일 때 $2^n\sin(x/2^n)$은 어떻게 되는가?

$\theta=x/2^n$으로 놓으면 $n\to\infty$일 때 $\theta\to 0$이다. 그러면

$$2^n\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)=x\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\longrightarrow x\cdot 1=x,$$

이고, 따라서

$$\prod_{k=1}^{\infty}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin(x/2^n)}=\frac{\sin x}{x}.$$

급수(series)에 대해서는 $j=k+2$로 치환한다. 그러면 $\frac{1}{2^{j-2}}=\frac{1}{2^k}$이고 $\frac{\pi}{2^j}=\frac{\pi/4}{2^k}$이므로, 이 합은 $(0,\frac{1}{2}\pi)$에 속하는 $x=\frac{\pi}{4}$를 소문항 (ii)의 급수에 대입한 것이다. 이 x에 대하여 $2\cot 2x=2\cot\frac{\pi}{2}=0$이므로, $k=n$까지의 부분합(partial sum)은

$$\frac{1}{2^n}\cot\left(\frac{\pi}{4\cdot 2^n}\right)=\frac{1}{x}\cdot\frac{\theta}{\tan\theta}\qquad\left(\theta=\frac{x}{2^n},\ x=\frac{\pi}{4}\right).$$

$n \to \infty$일 때 $\theta \to 0$이고 $\theta / \tan\theta \to 1$이므로, 부분합은 $1/x$로 수렴(converge)한다.

$$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{2^{j-2}} \tan\left(\frac{\pi}{2^j}\right) = \frac{4}{\pi}.$$

검산

- 소문항 (i): $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ \approx 0.9397 \times 0.7660 \times 0.1736 \approx 0.1250$.
- 소문항 (ii)에서 $n = 0$인 경우: 곱은 $\cos x$이고 공식은 $\sin 2x/(2\sin x) = \cos x$를 준다. $n = 0$일 때 합의 항등식은 $\tan x = \cot x - 2\cot 2x$가 되는데, 이는 cot에 대한 배각 공식을 정리한 것이다.
- 소문항 (iii): 급수의 처음 몇 항은 $\tan\frac{\pi}{4} = 1$, $\frac{1}{2}\tan\frac{\pi}{8} \approx 0.2071$, $\frac{1}{4}\tan\frac{\pi}{16} \approx 0.0497$, ...이고, 컴퓨터로 확인한 합은 $1.27324\ldots = 4/\pi$이다.
- $\prod \cos(x/2^k) = \sin x / x$에서 $x \to 0$으로 보내면 당연히 그래야 하듯 $1 = 1$을 얻는다.

흔한 실수

- $\frac{1}{2}$ 인수의 개수를 잘못 세는 것: $k = 0$부터 n까지의 곱에는 $n+1$개의 인수가 있으므로 분모는 2^n이 아니라 2^{n+1}이다.
- 모든 인수가 양수임을 확인하지 않고 로그를 취하는 것. 범위 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$가 중요한 이유가 바로 이것이다.
- $x = \frac{\pi}{4}$에서 $2\cot 2x$가 0이 된다는 것을 잊거나, $x = \frac{\pi}{2}$를 사용하는 것($j = 1$인 항은 정의되지 않는 $\tan\frac{\pi}{2}$가 된다).

STEP 너머

$\prod \cos(x/2^k) = \sin x / x$에 $x = \frac{\pi}{2}$를 대입하고 각 코사인을 중첩된 제곱근으로 나타내면 비에트(Viète)의 공식 $\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdots$을 얻는데, 이는 수학의 역사에서 최초의 무한곱(infinite product)이다. 유한한 곱에서 했던 것처럼 무한곱의 로그를 항별로 미분하려면 정당화가 필요하다. 해석학(analysis) 입문 과정에서 언제 그것이 허용되는지를 다룬다. 오일러(Euler)의 곱 $\sin x = x\prod_{n\geq 1}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$도 같은 아이디어에서 비롯된다. 엄밀한 배경 지식을 원한다면 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해)를 읽어 보라.

풀이

STEP II 2019, 문제 5

순수수학 • 반복의 고정점

> **STEP II 2019, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

핵심 아이디어

상수 수열은 **고정점**(fixed point), 즉 $f(x) = x$의 해에서 시작한다. 주기(period)가 2인 수열은 $f(f(x)) = x$의 해 가운데 고정점이 아닌 것에서 시작한다. 모든 고정점은 $f(f(x)) = x$도 만족하므로, $f(x) - x$는 사차식(quartic) $f(f(x)) - x$의 인수(factor)여야 한다. 나머지 인수인 이차식(quadratic)을 구하고 나면, 모든 것이 판별식(discriminant)의 문제로 귀결된다.

풀이

두 소문항에 공통인 인수분해

두 소문항 모두에서 상수 c에 대하여 $f(x) = x^2 - px + c$이다((i)에서는 $c = p$, (ii)에서는 $c = q$). 임의의 x와 y에 대하여

$$f(y) - f(x) = (y^2 - x^2) - p(y - x) = (y - x)(y + x - p).$$

$y = f(x)$를 대입하고 양변에 $f(x) - x$를 더하면

$$\begin{aligned} f(f(x)) - x &= \big[f(f(x)) - f(x)\big] + \big[f(x) - x\big] \\ &= \big(f(x) - x\big)\big(f(x) + x - p + 1\big). \end{aligned}$$

앞으로 사용할 두 가지 결과는 다음과 같다.

- 수열의 주기가 2인 것은 a가 $Q(x) = f(x) + x - p + 1$의 근이면서 $f(x) - x$의 근이 아닌 경우와 정확히 같다. 실제로 $f(f(a)) = a$이면 $u_2 = u_0$이고, 각 항은 바로 앞의 항에 의해 결정되므로 수학적 귀납법(induction)에 의해 모든 n에 대하여 $u_{n+2} = u_n$이다. 이때 수열이 상수가 아닌 것은 정확히 $u_1 \neq u_0$, 즉 $f(a) \neq a$인 경우이다.

- x가 고정점이면 $Q(x) = 2x - p + 1$이다. 따라서 고정점이 동시에 Q의 근이 되는 것은 $x = \frac{1}{2}(p-1)$인 경우뿐이다.

소문항 (i)

여기서는 $\mathrm{f}(x) = x^2 - px + p$이므로

$$\mathrm{f}(a) - a = a^2 - (p+1)a + p = (a-1)(a-p).$$

수열이 상수인 것은 정확히 $u_1 = u_0$인 경우이므로(이때 모든 항이 a와 같다), 구하는 값은

$$a = 1 \quad \text{그리고} \quad a = p.$$

주기 2의 경우, 나머지 인수는

$$Q(x) = x^2 - px + p + x - p + 1 = x^2 + (1-p)x + 1,$$

이고, 그 판별식은

$$(1-p)^2 - 4 = (p-1-2)(p-1+2) = (p-3)(p+1).$$

- $-1 < p < 3$이면 판별식이 음수이므로 Q는 실근을 갖지 않고, 주기 2를 주는 실수 a는 없다.
- $p = 3$ 또는 $p = -1$이면 Q는 오직 하나의 근 $x = \frac{1}{2}(p-1)$을 가지며, 이는 각각 1 또는 -1이다. $p = 3$일 때 고정점은 1과 3이고, $p = -1$일 때 고정점은 1과 -1이다. 두 경우 모두 Q의 근이 고정점이므로, 거기서 시작하는 수열은 주기 2가 아니라 상수 수열이다.
- $p > 3$ 또는 $p < -1$이면 Q는 서로 다른 두 실근을 갖는다. 어느 쪽도 고정점이 아니다. 위의 두 번째 항목에 따르면 고정점이려면 $\frac{1}{2}(p-1)$이어야 하는데,

  $$Q\left(\tfrac{1}{2}(p-1)\right) = \tfrac{1}{4}(p-1)^2 - \tfrac{1}{2}(p-1)^2 + 1 = 1 - \tfrac{1}{4}(p-1)^2 \neq 0$$

  이다. $(p-1)^2 > 4$이기 때문이다. 따라서 a를 두 근 중 어느 것으로 잡든 주기 2인 수열을 얻는다.

그러므로 주기 2를 주는 a의 값이 존재할 필요충분조건은 $p > 3$ 또는 $p < -1$이다.

소문항 (ii)

이제 $\mathrm{f}(x) = x^2 - px + q$이므로

$$\mathrm{f}(x) - x = x^2 - (p+1)x + q.$$

상수 수열이 되려면 $\mathrm{f}(a) = a$인 a, 즉 이 이차식의 실근이 필요하다.

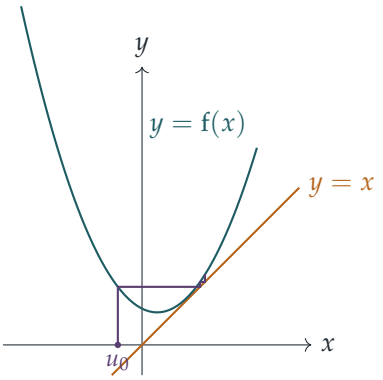
모든 x에 대하여 $f(x) > x$이면, 모든 a에 대하여 $f(a) \neq a$이므로 어떤 수열도 상수가 아니다.

역으로, 어떤 a도 상수 수열을 주지 않는다고 하자. 그러면 $g(x) = x^2 - (p+1)x + q$는 실근을 갖지 않는다. 이때 g는 연속(continuous)이고 결코 영이 되지 않으므로 부호가 바뀌지 않으며, $x \to \infty$일 때 $g(x) \to +\infty$이므로 모든 곳에서 양수이다. (동치인 표현으로, 판별식이 음수이고 최고차항 계수(leading coefficient)가 양수이다.) 즉 모든 x에 대하여 $f(x) > x$이고, 이로써 "필요충분조건"의 증명이 완성된다.

추론. 상수 수열이 없다고 하자. 그러면 모든 x에 대하여 $f(x) > x$이므로, 임의의 a에 대하여

$$u_{n+1} = f(u_n) > u_n \quad \text{모든} n.$$

이 수열은 순증가(strictly increasing)하므로 $u_2 > u_1 > u_0$이다. 특히 $u_2 \neq u_0$이므로, 수열의 주기는 2일 수 없다.



그림이 이 상황을 보여 준다. 포물선이 $y = x$보다 완전히 위에 있으므로, 반복값들이 그리는 "계단"은 위로 올라갈 수밖에 없다.

마지막 부분. 역(converse)은 거짓이다. $p = q = 0$으로 잡으면 $f(x) = x^2$이다. 이 수열은 $a = 0$과 $a = 1$에서 상수이다. 주기 2가 되려면 $f(f(a)) = a^4 = a$, 즉 $a(a-1)(a^2+a+1) = 0$이어야 한다. 인수 $a^2 + a + 1$의 판별식은 음수이므로, 실수해는 $a = 0$과 $a = 1$뿐이고 둘 다 고정점이다. 따라서 어떤 값은 상수 수열을 주지만, 주기 2를 주는 a의 값은 존재하지 않는다.

? 생각해 보기 $f(x) = x^2$은 그저 운 좋은 우연일까?

그렇지 않다. 일반적으로 고정점에 대한 이차식의 판별식은 $D = (p+1)^2 - 4q$이고, $Q(x) = x^2 + (1-p)x + q - p + 1$의 판별식은

$$(1-p)^2 - 4(q-p+1) = (p+1)^2 - 4q - 4 = D - 4.$$

(i)에서와 마찬가지로, Q의 근이 고정점이 되는 것은 Q의 판별식이 영일 때뿐이다. 따라서 상수 수열은 $D \geq 0$일 때 존재하고, 주기 2인 수열은 $D > 4$일 때 존재한다. $0 \leq D \leq 4$인 임의의 p, q가 반례(counterexample)가 된다.

검산

- (i)에서 $p = 4$이면 $Q(x) = x^2 - 3x + 1$의 근은 $\frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5}) \approx 2.618,\ 0.382$이다. 2.618에서 시작하면 $\mathrm{f}(2.618) = 4 + (2.618 - 4)(2.618) \approx 0.382$이고 $\mathrm{f}(0.382) \approx 2.618$이다. 예측대로 주기 2이다.
- $p = 3$에서 Q의 근은 $x = 1$이고 $\mathrm{f}(1) = 3 + (1 - 3) = 1$이다. 고정점이므로, 경계값이 제외된다는 것이 확인된다.
- $(x^2 - (p+1)x + p)(x^2 + (1-p)x + 1)$을 전개하면 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) - x$가 된다. 수천 개의 임의의 (p, x)에서 컴퓨터로 확인하고, (ii)의 조건 "$D > 4$일 때 그리고 그때에만 주기 2"도 함께 확인했으나 예외는 발견되지 않았다.

흔한 실수

- $p = 3$과 $p = -1$을 포함하는 것. 이때 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(a)) = a$는 중근(repeated root)을 갖지만, 그 근은 고정점이므로 수열은 상수이다.
- 주기 2인 점을 찾기 전에 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) - x$에서 인수 $\mathrm{f}(x) - x$를 제거해야 한다는 것을 잊는 것.
- 마지막 부분에서 부등식의 방향만으로 논증하는 것. "...는 참인가?"라는 질문을 결론짓는 것은 구체적인 반례 하나이다.

STEP 너머

이것은 **이산 동역학계**(discrete dynamical systems)로 들어가는 첫걸음이다. 모든 이차 사상은 일차 변수 변환에 의해 로지스틱 사상(logistic map) $x \mapsto rx(1-x)$와 동등하다. 매개변수가 커짐에 따라 고정점은 2-주기 궤도에 자리를 내주고, 이어서 4-주기 궤도가 나타나는 식으로 계속되어, 혼돈(chaos)으로 끝나는 주기 배가(period-doubling) 연쇄가 일어난다. 여러분이 찾은 임계값, 즉 Q의 판별식이 영이 되는 곳은 이러한 분기(bifurcation) 가운데 첫 번째이다. Strogatz의 *Nonlinear Dynamics and Chaos*(비선형 동역학과 혼돈)는 매우 읽기 쉬운 입문서이다.

풀이

STEP II 2019, 문제 6

순수수학 • 일계 미분방정식

> **STEP II 2019, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

핵심 아이디어

두 방정식 모두에서 우변은 x와 y의 한 가지 조합에만 의존한다. 소문항 (i)에서는 $y+x$이고, 소문항 (ii)에서는 $y-x$이다. 소문항 (ii)의 이차식은 사실 $(y-x)^2+4(y-x)+3$이기 때문이다. 이 관찰 하나로 직선 해를 찾고, 정류점(stationary point)이 놓이는 직선을 정하며, (소문항 (i)에서는) 방정식을 변수분리(separation of variables)할 수 있는 꼴로 바꿀 수 있다. 나머지는 해곡선(solution curve)이 서로 교차하지 않는다는 문제의 설명이 해결해 준다. 두 직선 해 사이에서 출발한 곡선은 영원히 그 사이에 갇혀 있다.

풀이

소문항 (i)

직선 해. $y=mx+c$이면 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=m$이므로 다음이 성립해야 한다.

$$m=mx+c+x+1=(m+1)x+(c+1) \quad \text{모든} x.$$

x의 계수를 비교하면 $m=-1$이고, 상수항을 비교하면 $c+1=m=-1$이므로 $c=-2$이다. 따라서 해는 $y=-x-2$이다.

정류점의 위치. $y=y_3(x)$의 정류점에서는 $0=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y+x+1$이므로, 그 점은 직선 $y=-x-1$ 위에 있다.

이제 $k<-2$라 하자. 곡선 $y=y_3(x)$와 직선 $y=-x-2$는 둘 다 해이고, $x=0$에서 곡선은 직선보다 아래에 있다($k<-2$). 두 해는 결코 만나지 않으므로 곡선은 모든 x에 대하여 직선 아래에 머문다. 즉 $y_3(x)<-x-2<-x-1$이다. 따라서 모든 곳에서 $y_3(x)+x+1<-1<0$이다. 기울기는 결코 0이 되지 않으므로(사실 항상 -1보다 작다)

정류점이 없다.

모든 정류점은 극소점이다. 방정식을 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 1.$$

정류점에서 도함수는 0이므로 이계도함수(second derivative)는 $1 > 0$이고, 따라서 그 점은 극소점(local minimum)이다.

풀기. $Y = y + x$로 두면 $\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 1 = Y + 2$이다. 직선 $Y = -2$ 위에서는 이것이 이미 구한 해이고, 그렇지 않으면 변수를 분리한다.

$$\int \frac{\mathrm{d}Y}{Y+2} = \int \mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \ln|Y+2| = x + \text{상수} \quad \Longrightarrow \quad Y + 2 = Ae^x,$$

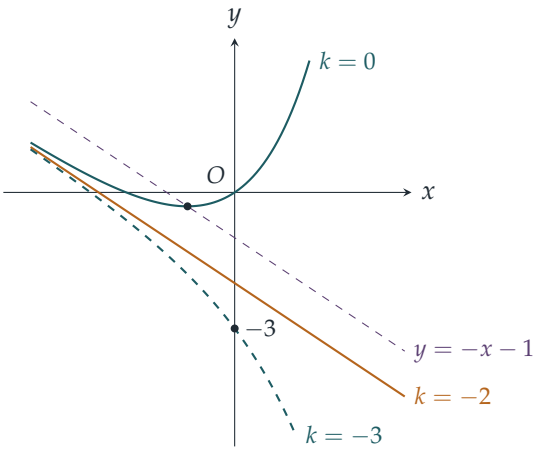
여기서 A는 상수이다($A = 0$이면 직선이 된다). 따라서 $y = Ae^x - x - 2$이고, $y(0) = k$에서 $A = k + 2$이다.

$$y_3(x) = (k+2)e^x - x - 2.$$

이는 앞에서 알아낸 사실과 일치한다. $y_3'(x) = (k+2)e^x - 1$은 $k \le -2$일 때 결코 0이 되지 않고, $k > -2$일 때는 $e^x = 1/(k+2)$인 곳에서 단 한 번 0이 된다.

세 곡선.

- $k = 0$: $y = 2e^x - x - 2$이며 원점을 지난다. 극소점은 $e^x = \frac{1}{2}$인 곳, 즉 $(-\ln 2,\ \ln 2 - 1) \approx (-0.69, -0.31)$이며, 직선 $y = -x - 1$ 위에 있다. $x \to -\infty$일 때 $2e^x \to 0$이므로 곡선은 위쪽에서 $y = -x - 2$에 가까워지고, $x \to \infty$일 때는 지수함수가 지배한다.
- $k = -2$: 직선 $y = -x - 2$ 자체이다.
- $k = -3$: $y = -e^x - x - 2$이며 $(0, -3)$을 지나고, 항상 감소한다. $x \to -\infty$일 때 아래쪽에서 $y = -x - 2$에 가까워지고, $x \to \infty$일 때 $-e^x$처럼 급격히 떨어진다.



소문항 (ii)

우변 다시 쓰기. 항을 묶으면

$$x^2+y^2-2xy-4x+4y+3=(y-x)^2+4(y-x)+3=(y-x+1)(y-x+3).$$

$u=y-x$로 두어 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(u+1)(u+3)$으로 쓰면 편리하다.

직선 해. $y=mx+c$이면 $u=(m-1)x+c$이고, 다음이 성립해야 한다.

$$m=\big((m-1)x+c+1\big)\big((m-1)x+c+3\big)\quad \text{모든} x.$$

$m\neq 1$이면 우변은 x에 대한 진짜 이차식이 되어 상수와 같을 수 없으므로 $m=1$이다. 그러면 $1=(c+1)(c+3)$, 즉 $c^2+4c+2=0$이고, $c=-2\pm\sqrt{2}$를 얻는다. 두 해는 다음과 같다.

$$y=x-2+\sqrt{2}\qquad \text{그리고}\qquad y=x-2-\sqrt{2}.$$

y_4의 정류점. 기울기는 정확히 $u=-1$ 또는 $u=-3$일 때 0이므로, 모든 정류점은 다음 직선 위에 있다.

$$y=x-1\qquad \text{또는}\qquad y=x-3.$$

두 직선 사이에서는 $-3<y-x<-1$이므로 $u+1<0<u+3$이고, 기울기 $(u+1)(u+3)$은 **음수**이다. (그 바깥에서는 양수이다.)

곡선이 사는 곳. $x=0$에서 $u=-2$이고, 이는 $-2-\sqrt{2}\approx -3.41$과 $-2+\sqrt{2}\approx -0.59$ 사이에 있다. 따라서 $x=0$에서 곡선은 두 직선 해 사이에 있고, 해곡선은 서로 교차하지 않으므로

$$x-2-\sqrt{2}<y_4(x)<x-2+\sqrt{2}\quad \text{모든} x.$$

정류점이 놓이는 두 직선 사이의 띠$(-3<u<-1)$는 이 띠 안에 들어 있다.

> ? **생각해 보기** 곡선은 두 평행선 사이에 갇혀 있다. 그런데 띠 안에서 곡선은 어디로 갈까?

$u=y_4-x$를 추적하자. u는 다음을 만족한다.

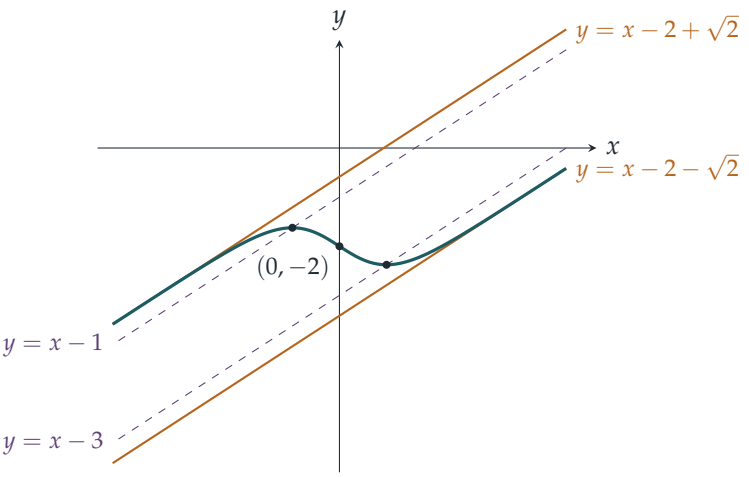
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=(u+1)(u+3)-1=u^2+4u+2=\big(u+2-\sqrt{2}\big)\big(u+2+\sqrt{2}\big),$$

이는 $-2-\sqrt{2}<u<-2+\sqrt{2}$인 동안, 즉 항상 음수이다. 따라서 u는 순감소하고 유계이므로 $x\to\pm\infty$일 때 극한을 가진다. 그 극한에서 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$는 0으로 수렴해야 하므로(그렇지 않으면 u가 한없이 변할 것이다) 극한값은 근이다. 즉 $x\to-\infty$일 때 $u\to-2+\sqrt{2}$이고, $x\to+\infty$일 때 $u\to-2-\sqrt{2}$이다.

따라서 왼쪽에서 오른쪽으로 읽으면 다음과 같다.

- 멀리 왼쪽에서 곡선은 아래쪽에서 $y = x - 2 + \sqrt{2}$에 바짝 붙어 있고, 기울기는 1에 가깝다.
- u가 -1을 지나 떨어질 때 곡선은 $y = x - 1$과 한 점에서 만나며, 이 점은 **극대점**(local maximum)이다 (기울기가 양에서 음으로 바뀐다).
- 곡선은 기울기 $(-1)(1) = -1$로 $(0, -2)$를 지나 내려간다.
- u가 -3을 지나 떨어질 때 곡선은 $y = x - 3$과 한 점에서 만나며, 이 점은 **극소점**이다.
- 그 뒤 곡선은 다시 올라가며, 위쪽에서 $y = x - 2 - \sqrt{2}$에 바짝 붙고 기울기는 1로 수렴한다.

u는 순감소하므로 $u = -1$과 $u = -3$을 각각 정확히 한 번씩 지나고, 따라서 정류점은 정확히 두 개이다. 멋진 성질이 하나 더 있다. (x, y)를 $(-x, -4 - y)$로 바꾸어도 방정식과 출발점 $(0, -2)$는 변하지 않으므로, 곡선은 $(0, -2)$에 대하여 점대칭(half-turn symmetry)이고, 극대점과 극소점은 그 점에 대하여 서로 대칭인 상이다.



검산

- 소문항 (i)에서 다시 대입해 보자. $y = (k+2)e^x - x - 2$이면 $y' = (k+2)e^x - 1$이고 $y + x + 1 = (k+2)e^x - 1$이다. $k = -2$로 두면 직선이 다시 나온다.
- $k = 0$일 때 극소점 $(-\ln 2, \ln 2 - 1) \approx (-0.693, -0.307)$은 실제로 $y = -x - 1$ 위에 있다.
- 소문항 (ii)에서 $(0, -2)$로부터 출발한 단계별 수치해(컴퓨터로 확인함)는 두 직선 사이에 머물고, $y = x - 1$ 위의 $(-0.623, -1.623)$ 근처에서 극대, $y = x - 3$ 위의 $(0.623, -2.377)$ 근처에서 극소에 이르며, $x = \pm 6$에서는 점근선(asymptote)과의 차이

가 약 10^{-7} 이내가 된다. 대칭성이 예측하듯이 이 두 점은 $(0, -2)$에 대하여 서로 대칭이다.

흔한 실수

- 교차하지 않는다는 성질을 쓰는 것을 잊는 실수. "$k < -2$이면 정류점이 없다"를 보이려면 곡선이 $x = 0$에서만이 아니라 **모든** x에 대하여 $y = -x - 2$ 아래에 머문다는 사실이 필요하다.
- y_4를 직선 해 중 하나와 교차하도록 그리거나, 극대점과 극소점을 거꾸로 그리는 실수. 점선 사이에서 $(u+1)(u+3)$의 부호를 보면 어느 쪽이 어느 것인지 결정된다.
- 소문항 (ii)에서 m과 c를 구할 때, $m = 1$인 경우를 먼저 배제하거나 포함하지 않은 채 $m - 1$로 나누는 실수.

STEP 너머

문제 첫머리의 설명은 피카르(Picard)-린델뢰프 정리(Picard–Lindelöf theorem)의 유일성(uniqueness) 부분이다. 우변이 매끄러우면 각 점을 지나는 해는 정확히 하나뿐이므로 해곡선은 교차할 수 없다. 소문항 (ii)는 사실 **자율**(autonomous) 방정식 $u' = u^2 + 4u + 2$가 변장한 것이며, 공식 없이 평형점(equilibrium)과 그 사이에서의 u'의 부호로부터 곡선이 어디로 가는지 알아낸 방법은 미분방정식의 정성적 이론(qualitative theory)의 출발점이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 유일성과 이러한 위상선(phase line) 그림을 모두 다룬다.

풀이

STEP II 2019, 문제 7

순수수학 • 벡터와 내적

> **STEP II 2019, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

핵심 아이디어

단위벡터(unit vector)에서는 길이와 각이 모두 스칼라곱(scalar product)으로부터 나온다: $|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 = 2 - 2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$. 따라서 요령은 합이 영벡터라는 조건을 쪼개어 일부 벡터는 한쪽에, 나머지는 다른 쪽에 두고, 양변의 길이의 제곱을 구하는 것이다. 그러면 벡터 방정식이 스칼라곱 사이의 등식으로 바뀌고, 이 등식들이 도형의 모양을 알려 준다.

풀이

풀이 전체에서 단위벡터 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$에 대하여 다음 사실을 이용한다.

$$|\mathbf{u}\pm\mathbf{v}|^2 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} \pm 2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = 2 \pm 2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}.$$

소문항 (i)

$\mathbf{a}+\mathbf{b} = -\mathbf{c}$이므로 양변의 길이의 제곱을 구하면

$$2 + 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{c}|^2 = 1,$$

이고, 따라서 요구한 대로 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -\frac{1}{2}$이다.

조건은 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$에 대하여 대칭이므로, 같은 방법으로 ($\mathbf{b}+\mathbf{c} = -\mathbf{a}$와 $\mathbf{c}+\mathbf{a} = -\mathbf{b}$로 쓰면) $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = \mathbf{c}\cdot\mathbf{a} = -\frac{1}{2}$를 얻는다. 그러므로

$$AB^2 = |\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 = 2 - 2\left(-\tfrac{1}{2}\right) = 3,$$

이고, 마찬가지로 $BC^2 = CA^2 = 3$이다. 세 변의 길이가 모두 $\sqrt{3}$이므로 **삼각형 ABC는 정삼각형(equilateral triangle)이다**. (위치벡터의 각 쌍은 120°의 각을 이루며, $\frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{0}$이므로 O는 삼각형의 외심(circumcentre)이자 무게중심(centroid)이다.)

소문항 (ii)

조건을 $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = -(\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4)$로 쓰고 양변의 길이의 제곱을 구하면

$$2 + 2\,\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = 2 + 2\,\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_4 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_4.$$

벡터를 나머지 두 가지 방법으로 묶으면 같은 방식으로

$$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_4, \qquad \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_4 = \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3.$$

를 얻는다. $A_iA_j^2 = 2 - 2\,\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j$이므로, 이는 마주 보는 모서리의 길이가 같다는 뜻이다: $A_1A_2 = A_3A_4$, $A_1A_3 = A_2A_4$, $A_1A_4 = A_2A_3$.

(a) 네 점이 한 평면 위에 있는 경우

? **생각해 보기** 네 점이 놓인 평면은 반드시 원점을 지나야 하는가?

그렇다. 네 점의 무게중심은 $\frac{1}{4}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4) = \mathbf{0}$이고, 한 평면 위에 있는 점들의 무게중심은 그 평면 위에 있다. 따라서 평면은 O를 포함하며, 모든 A_i가 O로부터 거리 1에 있으므로 네 점은 그 평면에서 O를 중심으로 하는 반지름 1인 원 위에 있다. 이제부터는 이 평면에서 생각한다.

$\mathbf{w} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$라 하면 $\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4 = -\mathbf{w}$이다.

$\mathbf{w} = \mathbf{0}$이면 $\mathbf{a}_2 = -\mathbf{a}_1$이고 $\mathbf{a}_4 = -\mathbf{a}_3$이다.

$\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$이면 $\mathbf{a}_3$와 $\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4 = -\mathbf{w}$의 스칼라곱을 구하고 (ii)를 이용하면

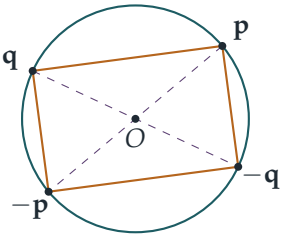
$$\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{w} = -(1 + \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_4) = -(1 + \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2) = -\tfrac{1}{2}|\mathbf{w}|^2.$$

따라서 $\mathbf{a}_3$는 $\mathbf{w}$ 방향 성분이 고정된 단위벡터이다. 즉 그 끝점은 $\mathbf{w}$에 수직인 고정된 직선 위에 있고, 직선과 원은 많아야 두 점에서 만난다. 그런데

$$(-\mathbf{a}_1) \cdot \mathbf{w} = -(1 + \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2) = -\tfrac{1}{2}|\mathbf{w}|^2,$$

이고 $-\mathbf{a}_2$에 대해서도 마찬가지이므로 $-\mathbf{a}_1$과 $-\mathbf{a}_2$는 이러한 벡터 두 개이며, $A_1 \neq A_2$이므로 서로 다르다. 그러므로 $\mathbf{a}_3 = -\mathbf{a}_1$ 또는 $\mathbf{a}_3 = -\mathbf{a}_2$이고, 그러면 $\mathbf{a}_4 = -\mathbf{w} - \mathbf{a}_3$는 나머지 하나가 된다.

어느 경우든 네 위치벡터는 $\mathbf{q} \neq \pm\mathbf{p}$인 어떤 단위벡터들에 대하여 $\mathbf{p}, -\mathbf{p}, \mathbf{q}, -\mathbf{q}$이다. 따라서 네 점은 원의 두 지름(diameter)의 양 끝점이다. 이 점들이 이루는 사각형은 대각선이 (O에서) 서로를 이등분하므로 평행사변형(parallelogram)이고, 대각선의 길이가 (둘 다 2로) 같으므로 **직사각형(rectangle)**이다. 두 지름이 수직일 때, 그리고 그때에만 정사각형이 된다.



(엄밀히 말하면 꼭짓점은 원을 따라 차례대로 잡아야 한다. 만약 이름이 $A_1 = \mathbf{p}$, $A_2 = \mathbf{q}$, $A_3 = -\mathbf{q}$, $A_4 = -\mathbf{p}$ 순서로 붙어 있다면, 그 순서대로 이으면 이 직사각형의 두 변과 두 대각선을 그리게 된다.)

(b) 정사면체 이제 여섯 모서리 A_iA_j의 길이가 모두 같으므로, 여섯 개의 스칼라곱 $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j$ $(i \neq j)$는 모두 같은 값을 가진다. 이 값을 k라 하자. $\mathbf{a}_1$과 합이 영벡터인 식의 스칼라곱을 구하면

$$0 = \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4) = 1 + 3k,$$

이므로 $k = -\frac{1}{3}$이다. 그러면 각 모서리에 대하여

$$A_1A_2^2 = 2 - 2k = 2 + \tfrac{2}{3} = \tfrac{8}{3}, \qquad \text{이므로 한 변의 길이는} \qquad \sqrt{\tfrac{8}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

이다.

검산

- 꼭짓점이 $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,-1)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1,1)$인 사면체는 정사면체(regular tetrahedron)이고, 위치벡터가 단위벡터이며 그 합이 $\mathbf{0}$이고, 모서리의 길이는 $\frac{1}{\sqrt{3}}|(0,2,2)| = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \approx 1.633$이다.
- (i)과 비교해 보자. 120°를 이루는 세 단위벡터는 변의 길이 $\sqrt{3} \approx 1.732$를 주어 약간 더 길다. 정사면체의 꼭짓점들이 구면 위에 "더 빽빽하게" 모여 있으므로 이는 타당하다.
- 합이 영벡터인 네 단위벡터의 무작위 집합 수천 개에 대해 컴퓨터로 확인한 결과, (ii)의 세 스칼라곱 등식이 모두 성립하였고, 평면인 경우에는 점들이 항상 $\pm\mathbf{p}$, $\pm\mathbf{q}$처럼 마주보는 쌍으로 나타났다.

흔한 실수

- (i)에서 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -\frac{1}{2}$에서 멈추는 것: 삼각형이 정삼각형이라고 결론짓기 전에 세 스칼라곱(또는 세 변의 길이)을 모두 구해야 한다.

▶ (a)에서 꼭짓점이 어떻게 배열되어 있는지 확인하지 않고 마주 보는 변이 같다는 것만으로 "평행사변형"이라고 결론짓거나, 평면이 O를 지난다는 것을 보이는 것을 잊는 것.

STEP 너머

합이 영벡터이고 모든 쌍의 스칼라곱이 같은 단위벡터들의 집합은 **정단체**(*regular simplex*)의 꼭짓점이다. n차원에서는 이러한 벡터가 $n+1$개 있고 $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = -\frac{1}{n}$이며, 이것이 위의 $-\frac{1}{2}$와 $-\frac{1}{3}$을 준다. 이러한 배치는 화학(메테인의 결합각 109.5°는 $\cos^{-1}(-\frac{1}{3})$이다)과 부호 이론(coding theory)에도 나타난다. 모든 스칼라곱 $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j$로 이루어진 행렬을 **그람 행렬**(*Gram matrix*)이라 하는데, 이 행렬은 벡터들의 배치를 회전의 차이를 제외하고 결정하며, 이것이 이 문제 전체의 바탕에 깔린 아이디어이다. 더 읽어 보려면 Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)가 좋은 출발점이다.

풀이

STEP II 2019, 문제 8

순수수학 • 곱셈적 행렬 함수

> **STEP II 2019, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

이 문제는 *Beyond STEP*의 7.3 절 **행렬식을 행렬식이게 하는 것**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch07/determinant-axioms.html

핵심 아이디어

모든 것은 단 하나의 규칙 $\mathrm{f}(\mathbf{MN}) = \mathrm{f}(\mathbf{M})\mathrm{f}(\mathbf{N})$을 잘 고른 곱에 적용하는 데서 나온다. 매번 쓰는 요령은 같은 행렬을 두 가지 다른 방식으로 쓰거나, 어떤 행렬을 자기 자신과 다른 행렬의 곱으로 나타낸 다음 f의 값을 비교하는 것이다. 행렬식(determinant)이 바로 이런 함수 가운데 하나이므로 답이 무엇이어야 하는지 가늠하는 데 유용한 길잡이가 되지만, f가 행렬식 이라고 가정해서는 안 된다.

풀이

소문항 (i)

$\mathbf{MI} = \mathbf{M}$이므로

$$\mathrm{f}(\mathbf{M}) = \mathrm{f}(\mathbf{MI}) = \mathrm{f}(\mathbf{M})\,\mathrm{f}(\mathbf{I}).$$

문제에서 $\mathrm{f}(\mathbf{M}) \neq 0$이라고 했으므로 양변을 이것으로 나눌 수 있다. 따라서 $\mathrm{f}(\mathbf{I}) = 1$이다.

(이 가정이 없으면 이런 결론을 내릴 수 없다. 항상 0인 함수도 곱을 보존하기 때문이다.)

소문항 (ii)

곱을 전개하면 $\mathbf{J}^2 = \mathbf{I}$이므로

$$\mathrm{f}(\mathbf{J})^2 = \mathrm{f}(\mathbf{J}^2) = \mathrm{f}(\mathbf{I}) = 1.$$

따라서 $\mathrm{f}(\mathbf{J}) = \pm 1$이고, $\mathrm{f}(\mathbf{J}) \neq 1$이므로 $\mathrm{f}(\mathbf{J}) = -1$이다.

? 생각해 보기 $\mathbf{J}$를 곱하면 행렬은 어떻게 바뀌는가?

$\mathbf{J}$를 왼쪽에 곱하면 두 행이 바뀌고, 오른쪽에 곱하면 두 열이 바뀐다.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}.$$

각각에 f를 적용하고 $\mathrm{f}(\mathbf{J}) = -1$을 이용하면

$$\mathrm{f}\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = -\mathrm{f}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{f}\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} = -\mathrm{f}\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}.$$

첫 번째 식에서 $\mathrm{f}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -\mathrm{f}\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$를 얻고, 두 번째 식에 -1을 곱하면 이것이 $\mathrm{f}\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$와도 같음을 알 수 있다. 이로써 원하는 결과가 증명된다.

소문항 (iii)

$\mathbf{A}$의 첫째 행을 $(a \;\; b)$라 하고, 둘째 행을 그것의 λ배라 하자. $\mathbf{B}$를 두 행이 같은 행렬이라 하고, $\mathbf{K}$에서 $k = \lambda$로 잡는다. $\mathbf{K}$를 왼쪽에 곱하면 둘째 행이 k배가 되므로

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ \lambda a & \lambda b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} = \mathbf{KB}.$$

그런데 $\mathbf{B}$의 두 행을 바꾸어도 행렬은 그대로이므로, 소문항 (ii)에 의해 ($c = a, d = b$로 두면)

$$\mathrm{f}(\mathbf{B}) = -\mathrm{f}(\mathbf{B}),$$

이고, 따라서 반드시 $\mathrm{f}(\mathbf{B}) = 0$이다. 그러므로 $\mathrm{f}(\mathbf{A}) = \mathrm{f}(\mathbf{K})\,\mathrm{f}(\mathbf{B}) = 0$이다. 이 논증은 $\lambda = 0$을 포함한 모든 실수 λ에 대해 성립한다.

소문항 (iv)

먼저 세 행렬을 계산한다. $k \neq 0$일 때 $\mathbf{K}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/k \end{pmatrix}$이고,

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{K}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

다음으로, $\mathbf{K}$에 의한 켤레(conjugation)는 f의 값을 바꾸지 않는다. 실제로 $\mathrm{f}(\mathbf{K}^{-1})\mathrm{f}(\mathbf{K}) = \mathrm{f}(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{K}) = \mathrm{f}(\mathbf{I}) = 1$이므로

$$\mathrm{f}(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{K}) = \mathrm{f}(\mathbf{K}^{-1})\,\mathrm{f}(\mathbf{P})\,\mathrm{f}(\mathbf{K}) = \mathrm{f}(\mathbf{P}).$$

? **생각해 보기** k가 어떤 값일 때 $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{PK}$가 $\mathbf{P}^2$와 $\mathbf{P}^{-1}$이 되는가?

$k = 2$로 잡으면 $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{PK} = \mathbf{P}^2$이므로

$$\mathrm{f}(\mathbf{P}) = \mathrm{f}(\mathbf{P}^2) = \mathrm{f}(\mathbf{P})^2,$$

이고, 따라서 $\mathrm{f}(\mathbf{P}) = 0$ 또는 1이다.

$k = -1$로 잡으면 $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{PK} = \mathbf{P}^{-1}$이므로 $\mathrm{f}(\mathbf{P}^{-1}) = \mathrm{f}(\mathbf{P})$이다. 그런데 $\mathrm{f}(\mathbf{P})\,\mathrm{f}(\mathbf{P}^{-1}) = \mathrm{f}(\mathbf{I}) = 1$이므로

$$\mathrm{f}(\mathbf{P})^2 = 1,$$

이고, 특히 $\mathrm{f}(\mathbf{P}) \neq 0$이다. 두 결과를 합치면

$$\mathrm{f}(\mathbf{P}) = 1.$$

검산

행렬식은 모든 가정을 만족한다. 곱을 보존하고, $\det \mathbf{I} = 1$이며 $\det \mathbf{J} = -1$이다. 또한 우리가 얻은 모든 결론과도 일치한다. 행이나 열을 바꾸면 부호가 바뀌고, 행이 비례하는 행렬의 행렬식은 0이며, $\det \mathbf{P} = 1$이다. 덜 뻔한 예로 $\mathrm{f}(\mathbf{M}) = \mathrm{sgn}(\det \mathbf{M})\,|\det \mathbf{M}|^{0.7}$이 있다. 수천 개의 무작위 행렬로 컴퓨터 검사를 해 보았더니, 두 함수 모두에서 곱셈 규칙, 행과 열을 바꾸는 항등식, 행이 비례할 때 $\mathrm{f}(\mathbf{A}) = 0$, 그리고 $\mathrm{f}(\mathbf{P}) = 1$이 확인되었다.

흔한 실수

- $\mathrm{f} = \det$라고 가정하는 것. 문제는 곱을 보존한다는 성질만으로 여러 성질을 이끌어 내라고 요구한다. 행렬식은 길잡이일 뿐이다.
- 근거 없이 $\mathrm{f}(\mathbf{K}^{-1}) = 1/\mathrm{f}(\mathbf{K})$를 쓰는 것. 이 식에는 소문항 (i)의 $\mathrm{f}(\mathbf{I}) = 1$과, $\mathbf{K}$가 가역(invertible)이 되도록 하는 $k \neq 0$이 필요하다.
- $\mathrm{f}(\mathbf{P})^2 = \mathrm{f}(\mathbf{P})$에서 멈추고 $\mathrm{f}(\mathbf{P}) = 0$인 경우를 배제하는 것을 잊는 것.

STEP 너머

f처럼 곱셈을 보존하는 사상은 가역인 2×2 행렬들의 군에서 0이 아닌 실수들로 가는 **준동형사상**(homomorphism)이다. 소문항 (iv)는 고전적인 논증의 출발점이다. $\mathbf{P}$와 같은 층밀림 행렬(shear matrix)은 교환자(commutator)들의 곱이므로, 이러한 준동형사상은 모두 이 행렬들을 1로 보내고, 결국 f는 행렬식에만 의존하게 된다. 또한 각 행에 대해 선형

이고, 교대적(alternating)이며, **I**에서 1인 함수는 행렬식뿐임을 보일 수도 있다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*는 이와 같은 성질들로부터 행렬식을 세우며, Allenby의 *Rings, Fields and Groups*는 준동형사상을 다룬다.

풀이

STEP II 2019, 문제 9

역학 • 원점으로부터 포물체까지의 거리

STEP II 2019, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

이 문제는 *Beyond STEP*의 11.10 절 **나에게로 되돌아오는 공**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch11/coming-back.html

핵심 아이디어

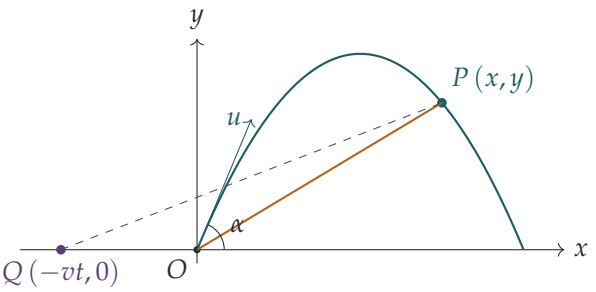
거리는 미분하기 번거롭지만 거리의 제곱은 그렇지 않다. OP가 증가하는 것은 정확히 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(OP^2) > 0$일 때이다. $x^2 + y^2$를 미분하면 t에 t에 대한 이차식(quadratic)을 곱한 꼴이 나오므로, 문제 전체는 "이 이차식이 언제 양수인가?"로 바뀌고, 이는 판별식(discriminant)이 답해 준다. 소문항 (ii)는 수평 거리에 Q의 운동을 더했을 뿐 같은 계산이다.

풀이

P와 Q를 입자로 모형화하고 공기 저항은 무시하며, O를 원점으로, x축을 수평 방향(P가 움직이는 방향)으로, y축을 연직 위 방향으로 잡는다. $s = \sin\alpha$, $c = \cos\alpha$로 두면 $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$이므로 둘 다 양수이다. 시각 t에서

$$x = uct, \qquad y = ust - \tfrac{1}{2}gt^2,$$

이고, P는 다시 $y = 0$이 될 때, 즉 $T = \dfrac{2us}{g}$에 착지한다.



소문항 (i)

$r = OP$로 두면 $r^2 = x^2 + y^2$이고, $\dot{x} = uc$와 $\dot{y} = us - gt$를 이용하면

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\right) = 2(x\dot{x} + y\dot{y}) &= 2\left[u^2c^2t + \left(ust - \tfrac{1}{2}gt^2\right)(us - gt)\right] \\ &= 2t\left[u^2c^2 + u^2s^2 - \tfrac{3}{2}usgt + \tfrac{1}{2}g^2t^2\right] \\ &= t\left(g^2t^2 - 3usg\,t + 2u^2\right),\end{aligned}$$

이다. 여기서 $c^2 + s^2 = 1$을 이용하였다. 비행하는 동안 $r > 0$이므로 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2) = 2r\dot{r}$의 부호는 $\dot{r}$의 부호와 같고, $t > 0$이므로 그 부호는

$$f(t) = g^2t^2 - 3usg\,t + 2u^2.$$

의 부호와 같다. 이 이차식은 최고차항의 계수가 양수이고 판별식은

$$9u^2s^2g^2 - 8u^2g^2 = u^2g^2\left(9s^2 - 8\right).$$

이다.

$s < \frac{2\sqrt{2}}{3}$**인 경우,** ($s > 0$이므로) $9s^2 < 8$이 되어 판별식이 음수이고, 모든 t에 대하여 $f(t) > 0$이다. 따라서 비행하는 내내 $\dot{r} > 0$이다. 즉 OP는 증가한다.

$s > \frac{2\sqrt{2}}{3}$**인 경우,** 판별식이 양수이므로 f는 서로 다른 두 근

$$t_{1,2} = \frac{u\left(3s \mp \sqrt{9s^2 - 8}\right)}{2g},$$

을 가지며, $t_1 < t < t_2$에서 $f(t) < 0$이다. 두 근은 모두 양수이다(두 근의 합 $3us/g$와 곱 $2u^2/g^2$이 양수이기 때문이다). 이제 이 구간이 실제로 P가 공중에 있는 동안에 놓이는지 확인해야 한다.

생각해 보기 이차식이 어딘가에서 음수가 되기는 하지만, 그것이 P가 착지하기 전에 일어난다는 것을 어떻게 알 수 있을까?

착지 시각에서 f의 값을 구하면

$$f(T) = g^2 \cdot \frac{4u^2s^2}{g^2} - 3usg \cdot \frac{2us}{g} + 2u^2 = 2u^2(1-s^2) = 2u^2c^2 > 0.$$

이다. 따라서 T는 두 근 사이에 있지 않다. 그런데 f의 꼭짓점은 $t = \frac{3us}{2g} < \frac{2us}{g} = T$에 있으므로 T는 꼭짓점의 오른쪽에 있고, $[t_1, t_2]$ 바깥에 있으므로 $T > t_2$를 만족해야 한다. 따라서 $0 < t_1 < t_2 < T$이고, $t_1 < t < t_2$에서 $\dot{r} < 0$이다. 즉 P가 착지하기 전 어느 시점에 OP가 감소하므로, 증명이 끝난다.

소문항 (ii)

Q는 매끄러운 지면 위를 P 쪽에서 멀어지는 방향으로 일정한 속력 v로 미끄러지므로, 시각 t에서 $(-vt, 0)$에 있다. P와 Q의 수평 거리는 $x + vt = wt$이고, 여기서

$$w = uc + v > 0,$$

이며, 연직 거리는 y이다. 따라서 $QP^2 = w^2t^2 + y^2$이고, 앞에서와 똑같이

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(QP^2\right) &= 2\left[w^2t + \left(ust - \tfrac{1}{2}gt^2\right)(us - gt)\right] \\ &= t\left(g^2t^2 - 3usg\,t + 2w^2 + 2u^2s^2\right).\end{aligned}$$

이다. 비행하는 동안 그 부호는 $h(t) = g^2t^2 - 3usg\,t + 2(w^2 + u^2s^2)$의 부호와 같고, 이 식의 판별식은

$$9u^2s^2g^2 - 8g^2\left(w^2 + u^2s^2\right) = g^2\left(u^2s^2 - 8w^2\right).$$

이다. 이 값이 음수인 것은 정확히 $8w^2 > u^2s^2$일 때, 즉 (w와 us가 모두 양수이므로) $2\sqrt{2}\,w > us$일 때이다. $w = uc + v$를 대입하면

$$2\sqrt{2}\,(uc + v) > us \iff 2\sqrt{2}\,v > \left(\sin\alpha - 2\sqrt{2}\cos\alpha\right)u.$$

이다. 따라서 주어진 조건 아래에서 모든 t에 대하여 $h(t) > 0$이고, 그러므로 $t > 0$에서 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(QP^2) > 0$이 되어 P가 비행하는 내내 QP는 증가한다. 이로써 증명이 끝난다.

소문항 (i)과 같은 논증(이번에는 $h(T) = 2w^2 > 0$)을 쓰면, 부등식이 엄격하게 반대로 성립할 때 P가 착지하기 전에 QP가 한동안 실제로 감소함을 보일 수 있다. 따라서 등호가 성립하는 경계의 경우를 제외하면, 이 조건은 사실 필요조건이기도 하다.

검산

- 소문항 (ii)에서 $v = 0$으로 두면 $2\sqrt{2}\cos\alpha > \sin\alpha$, 즉 $\tan\alpha < 2\sqrt{2}$, 즉 $\sin\alpha < \frac{2\sqrt{2}}{3}$가 되어 다시 소문항 (i)을 얻는다. 이때 Q는 O에 머물러 있으므로 당연한 결과이다.

- 임계각은 $\arcsin \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 70.5^\circ$로 u와 g에 무관하다. 이는 차원 분석(dimensional analysis)이 요구하는 바와 같다(쓸 수 있는 무차원량은 α뿐이다).
- $u = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $\sin\alpha = 0.97$일 때 두 근은 $t_1 \approx 1.14\,\mathrm{s}$와 $t_2 \approx 1.83\,\mathrm{s}$로, 둘 다 착지 시각 $T \approx 1.98\,\mathrm{s}$보다 앞선다. 컴퓨터로 비행 과정을 단계별로 계산해 보면 이 두 시각 사이에서 OP가 줄어든다는 것과, 무작위로 고른 많은 u, α, v에 대하여 거리 QP가 증가하는 것이 정확히 소문항 (ii)의 부등식이 성립할 때임을 확인할 수 있다.

흔한 실수

- 소문항 (i)에서 "판별식이 양수이다"에서 멈추는 것. OP가 줄어드는 구간이 P가 착지한 뒤가 아니라 착지하기 전에 나타남을 보여야 한다.
- Q를 $(vt, 0)$에 두는 것. Q는 P 쪽에서 멀어지는 방향으로 움직이므로, P와의 수평 거리는 $uct + vt$이다.
- 인수 t를 빠뜨리거나, $t > 0$임을 밝히지 않고 그것으로 나누는 것.

STEP 너머

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\mathbf{r}|^2 = 2\,\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}$의 부호를 조사하는 것은 물체가 다가오는지 멀어지는지를 판단하는 표준적인 방법이며, 궤도 역학(orbital mechanics)과 두 물체의 상대 운동(relative motion)에서 다시 등장한다. 소문항 (ii)는 사실 Q에 대한 P의 상대 위치에 관한 문제이다. 약 70.5°보다 가파르게 던진 포물체는 비행 도중 한동안 던진 사람 쪽으로 다가온다는 깔끔한 사실은 역학 교재들이 즐겨 다루는 내용이다. 더 알고 싶다면 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 참고하라.

풀이

STEP II 2019, 문제 10

역학 • 강체의 평형

> **STEP II 2019, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

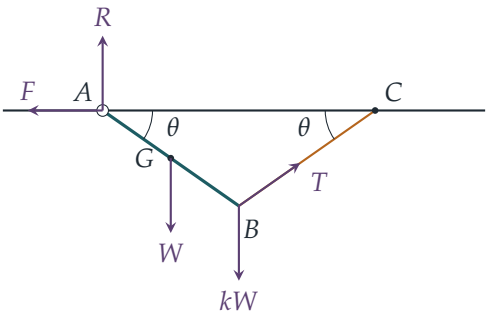
핵심 아이디어

$AB = BC = 2a$이고 A, C가 모두 레일 위에 있으므로 삼각형 ABC는 이등변삼각형(isosceles triangle)이다. 따라서 줄도 레일과 각 θ를 이룬다. 이 기하적 사실을 확보하면 문제는 전형적인 강체(rigid body)의 평형(equilibrium) 문제가 된다. A에 대한 모멘트(moment)를 취하면 고리에 작용하는 미지의 힘들을 거치지 않고 장력(tension)을 구할 수 있고, 이어서 힘을 분해하면 수직항력(normal reaction)과 마찰력(friction)을 얻는다. 마지막 소문항에서는 k에 대한 두 문턱값을 비교한다. k가 커질 때 어느 쪽에 먼저 도달하는가?

풀이

모형과 힘. 막대는 균일한(uniform) 강체이므로 무게 W는 중점 G에 작용하고, $AG = a$이다. 고리는 가벼우므로(light) 레일이 고리에 가하는 힘은 그대로 A에서 막대에 전달된다. 즉 연직 위 방향의 수직항력 R와 레일 방향의 마찰력 F이다. 줄은 가볍고 늘어나지 않으며(inextensible), 장력 T가 B에서 BC 방향으로 작용한다. 추가 하중 kW는 B에서 연직 아래 방향으로 작용한다.

삼각형 ABC에서 변 AB와 BC는 모두 $2a$이므로 A와 C에서의 밑각이 같다. 즉 줄은 레일과 각 θ를 이룬다. 수평 방향으로 B는 A에서 $2a\cos\theta$만큼, C는 A에서 $4a\cos\theta$만큼 떨어져 있다.



F는 레일을 따라 C에서 멀어지는 방향으로 작용한다고 하자. 줄이 막대를 C 쪽으로 당기므로 실제로 그래야 함을 곧 확인할 것이다.

소문항 (i)

A에 대한 모멘트를 취하면 R와 F가 사라진다. 무게와 하중의 모멘트 팔 길이는 각각 $a\cos\theta$와 $2a\cos\theta$이다. 장력은 B에서 수평 성분 $T\cos\theta$(C 쪽)와 연직 위 방향 성분 $T\sin\theta$로 나눈다. 연직 성분의 팔 길이는 $2a\cos\theta$이고 수평 성분의 팔 길이는 $2a\sin\theta$(레일 아래로 B까지의 깊이)이며, 두 성분 모두 막대를 같은 방향, 즉 그림에서 반시계 방향으로 돌린다. 따라서

$$T\sin\theta\cdot 2a\cos\theta + T\cos\theta\cdot 2a\sin\theta = W\cdot a\cos\theta + kW\cdot 2a\cos\theta,$$
$$4aT\sin\theta\cos\theta = aW(1+2k)\cos\theta.$$

$0<\theta<90^\circ$에서 $\cos\theta\neq 0$이므로 $a\cos\theta$로 나눌 수 있다.

$$T=\frac{(2k+1)W}{4\sin\theta}.$$

이 식은 고리가 미끄러지지만 않는다면 언제나 성립한다. 줄은 $T>W$일 때, 즉 ($4\sin\theta>0$을 곱하여) $(2k+1)W>4W\sin\theta$일 때 끊어지며, 이는

$$2k+1>4\sin\theta,$$

와 같다. 이것이 보이려던 결과이다.

소문항 (ii)

막대 전체에 대해 힘을 분해한다. 연직 방향으로

$$R+T\sin\theta = W+kW \quad\Longrightarrow\quad R=(1+k)W-\frac{(2k+1)W}{4}=\frac{(2k+3)W}{4}.$$

수평 방향으로 작용하는 힘은 F와 장력의 수평 성분뿐이므로

$$F=T\cos\theta=\frac{(2k+1)W\cos\theta}{4\sin\theta}.$$

이 값은 양수이므로 마찰력이 C에서 멀어지는 방향으로 작용함이 확인된다. 또 $R > 0$이므로 고리는 실제로 위에서 레일을 누르고 있다.

? 생각해 보기 거친 레일 위의 고리는 정확히 언제 미끄러지는가?

마찰력은 최대 μR까지만 작용할 수 있다. 평형을 유지하는 데 $F > \mu R$가 필요하다면 마찰력은 고리를 붙잡아 둘 수 없고 고리는 미끄러진다. 따라서 고리는

$$\frac{(2k+1)W\cos\theta}{4\sin\theta} > \mu\,\frac{(2k+3)W}{4}.$$

일 때 미끄러진다. 양변에 $4\sin\theta/(W\cos\theta) > 0$을 곱하면

$$2k+1 > (2k+3)\mu\tan\theta,$$

를 얻는다. 이것이 보이려던 결과이다.

소문항 (iii)

$t = \tan\theta$, $s = \sin\theta$라 하자. 각 조건은 k가 어떤 문턱값을 넘어섰다는 뜻이다.

줄. 소문항 (i)에 의해 줄은 $2k+1 > 4s$가 되는 순간, 즉

$$k > k_{\text{끊김}} = \frac{4s-1}{2}.$$

가 되는 순간 끊어진다.

고리. 소문항 (ii)의 조건을 정리하면

$$2k+1 > (2k+3)\mu t \iff 2k(1-\mu t) > 3\mu t - 1.$$

여기서 $\mu t < 1$을 이용한다. $2(1-\mu t) > 0$으로 나누어도 부등호의 방향은 그대로이므로, 고리는

$$k > k_{\text{미끄럼}} = \frac{3\mu t - 1}{2(1-\mu t)}.$$

가 되는 순간 미끄러진다. ($\mu t < 1$이 아니라면 고리는 결코 미끄러지지 않는다. $\mu t \geq 1$이면 모든 k에 대해 $(2k+3)\mu t \geq 2k+3 > 2k+1$이기 때문이다. 이 조건이 주어진 이유가 바로 이것이다.)

k가 0에서부터 커질 때, 두 문턱값 중 더 낮은 쪽을 먼저 넘게 된다. 따라서 줄이 끊어지기 전

에 고리가 미끄러질 필요충분조건은 $k_{\text{미끄럼}} < k_{\text{끊김}}$이다. 먼저 $1-\mu t > 0$을 곱하면

$$\begin{aligned}
\frac{3\mu t - 1}{1-\mu t} < 4s - 1 &\iff 3\mu t - 1 < (4s-1)(1-\mu t) \\
&\iff 3\mu t - 1 < 4s - 1 - 4s\mu t + \mu t \\
&\iff 2\mu t + 4s\mu t < 4s \\
&\iff \mu t(1+2s) < 2s \\
&\iff \mu < \frac{2\sin\theta}{\tan\theta\,(1+2\sin\theta)} = \frac{2\cos\theta}{1+2\sin\theta},
\end{aligned}$$

이며, 마지막 단계에서는 $t(1+2s) > 0$으로 나누었다. 이것이 구하는 조건이다.

막대는 처음에 평형 상태에 있으므로 $k = 0$에서는 어느 문턱값도 아직 넘지 않았다. 각 조건이 "k가 어떤 값보다 크다"의 꼴이므로 두 문턱값은 각각 한 번씩만 넘게 된다. 따라서 두 문턱값을 비교하면 실제로 어느 쪽이 먼저 일어나는지 결정된다.

검산

- 대신 B에 대한 모멘트를 취해도 같은 답을 얻는다. A에 작용하는 힘들의 B에 대한 모멘트는 $R \cdot 2a\cos\theta - F \cdot 2a\sin\theta$이고, 무게의 모멘트는 $Wa\cos\theta$이다. R와 F의 값을 대입하면 $\frac{1}{2}(2k+3)Wa\cos\theta - \frac{1}{2}(2k+1)Wa\cos\theta = Wa\cos\theta$가 되어 무게와 정확히 균형을 이룬다.
- $\theta = 30°$라 하자. 그러면 $k_{\text{끊김}} = \frac{1}{2}$이고, 임계 마찰계수(coefficient of friction)는 $2\cos 30°/(1+2\sin 30°) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$이므로 $\mu t = 0.866 \times 0.577 = \frac{1}{2}$이다. 이 μ에 대해 $k_{\text{미끄럼}} = \frac{3/2-1}{2\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$이기도 하므로, 경계에서 마땅히 그래야 하듯 두 문턱값이 일치한다.
- 무작위로 고른 여러 θ와 k에 대해 모든 힘과 모멘트가 균형을 이룸을 컴퓨터로 확인하였다. 또 무작위 θ와 μ에 대해 k를 조금씩 늘려 보았더니, 고리가 먼저 미끄러지는 것은 정확히 $\mu < 2\cos\theta/(1+2\sin\theta)$일 때였다.

흔한 실수

- A에 대한 모멘트에서 장력의 수평 성분을 빠뜨리는 것. 수평 성분의 팔 길이는 $2a\sin\theta$이며 장력의 모멘트를 두 배로 만든다. $4\sin\theta$의 4는 여기서 나온다.
- $R = (1+k)W$로 두는 것. 줄이 무게의 일부를 떠받치므로 수직항력은 전체 하중보다 작다.
- $1-\mu\tan\theta$가 양수임을 밝히지 않고 이것으로 나누는 것. 주어진 조건 $\mu\tan\theta < 1$은 바로 이를 위한 것이다.

STEP 너머

이 문제는 정정(statically determinate) 문제이다. 미지수가 세 개(T, R, F)이고, 평면 위의 강체에 대한 평형 방정식도 세 개이다. 소문항 (iii)은 이러한 구조물이 파괴되는 전형적인 방식을, 각 구속 조건이 무너지는 하중을 비교함으로써 보여 준다. 공학자들도 구조물의 어느 부재가 먼저 파괴되는지에 대해 같은 질문을 던진다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 강체 정역학과 토크(torque)를 꼼꼼히 다루고, 이어서 회전 동역학(rotational dynamics)으로 나아간다.

풀이

STEP II 2019, 문제 11

확률과 통계 • 삼각형의 개수 세기

STEP II 2019, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

핵심 아이디어

세 길이가 넓이가 0이 아닌 삼각형을 이루는 것은 짧은 두 길이의 합이 가장 긴 길이보다 클 때이며, 그때뿐이다. 따라서 모든 문제는 고정된 최댓값보다 작은 수의 쌍을 세는 것으로 귀결되고, 가장 깔끔하게 세는 방법은 가운데 수 n_2를 고정한 다음 n_1으로 가능한 값이 몇 개인지 묻는 것이다. 소문항 (i)에서 이 세기를 하고, 소문항 (ii)와 (iii)에서는 같은 정도로 일어날 법한(equally likely) 선택의 수로 알맞게 나누기만 하면 된다.

풀이

소문항 (i)

$m = n_3$이라 하자. $k \leq m-1$인 k에 대해 $n_2 = k$로 고정한다. 그러면 n_1은

$$m - k < n_1 < k,$$

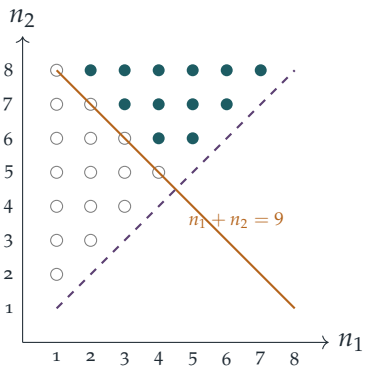
를 만족해야 하므로 n_1은 $m-k+1, \ldots, k-1$의 값을 가지며, 이 수가 양수일 때 선택의 가짓수는 $2k-m-1$이다. ($m-k \geq 1$이므로 조건 $n_1 > 0$은 저절로 성립한다.)

$m = 9$일 때 가짓수는 $2k-10$이고, $k = 6, 7, 8$일 때 양수이다:

$$2 + 4 + 6 = 12.$$

$m = 10$일 때 가짓수는 $2k-11$이고, $k = 6, 7, 8, 9$일 때 양수이다:

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16.$$



그림은 $n_3 = 9$인 경우를 나타낸다. 색칠된 점들은 직선 $n_1 + n_2 = 9$의 위쪽이면서 대각선 $n_1 = n_2$의 위쪽에 있고, 모두 $2 + 4 + 6 = 12$개이며, 삼각형 모양 영역에서 각 n_2마다 한 줄씩 차지한다.

홀수인 경우, $n_3 = 2n + 1$**.** $n_2 = k$일 때의 가짓수는 $2k - 2n - 2 = 2(k - n - 1)$이고, $k = n + 2, \ldots, 2n$일 때 양수이다. 1부터 $n - 1$까지 변하는 $j = k - n - 1$을 놓으면

$$\sum_{j=1}^{n-1} 2j = (n-1)n = n(n-1).$$

짝수인 경우, $n_3 = 2n$**.** $n_2 = k$일 때의 가짓수는 $2k - 2n - 1$이고, $k = n + 1, \ldots, 2n - 1$일 때 양수이다. 1부터 $n - 1$까지 변하는 $j = k - n$을 놓으면

$$\sum_{j=1}^{n-1} (2j-1) = (n-1)^2,$$

이고, 이는 처음 $n - 1$개의 홀수의 합이다. 두 공식 모두 $12 = 4 \cdot 3$, $16 = 4^2$과 일치한다.

소문항 (ii)

길이가 N인 막대가 세 막대 중 가장 길므로, 세 막대가 넓이가 0이 아닌 삼각형을 이룰 필요충분조건은 선택된 두 길이 $a < b$가 $a + b > N$을 만족하는 것이다. ($a + N > b$와 같은 나머지 두 삼각부등식(triangle inequality)은 $N > b$이므로 저절로 성립한다.) 따라서 유리한 선택은 정확히 $n_3 = N$일 때 소문항 (i)에서 센 쌍들이다.

두 막대는 남은 $N - 1$개 중에서 선택하므로, 같은 정도로 일어날 법한 선택은 $\binom{N-1}{2}$가지이다.

$N = 2n + 1$일 때: 선택은 $\binom{2n}{2} = n(2n-1)$가지이므로

$$\mathrm{P}(\text{삼각형}) = \frac{n(n-1)}{n(2n-1)} = \frac{n-1}{2n-1},$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다.

$N = 2n$일 때: 선택은 $\binom{2n-1}{2} = (2n-1)(n-1)$가지이다. 이것이 0이 아니려면 $n \geq 2$이어야 한다($N = 2$이면 다른 막대가 하나뿐이어서 두 개를 고를 수 없다). 그러면

$$\mathrm{P}(\text{삼각형}) = \frac{(n-1)^2}{(2n-1)(n-1)} = \frac{n-1}{2n-1}.$$

꽤 놀랍게도, N이 하나 더 작은데도 답은 홀수인 경우와 같은 공식이다.

소문항 (iii)

서로 다른 세 막대에는 가장 긴 막대가 있으며, 그 길이를 m이라 하면 $3 \leq m \leq 2M+1$이다. 이 선택이 삼각형을 이루는 것은 나머지 두 길이가 $n_3 = m$일 때 소문항 (i)에서 센 쌍 중 하나를 이룰 때이며, 그때뿐이다. 유리한 선택은 각각 가장 긴 막대를 기준으로 한 번씩만 세어지므로, 유리한 선택의 수는

$$T = \sum_{m=2}^{2M+1} c(m),$$

이다. 여기서 $c(m)$은 소문항 (i)에서 구한 가짓수이다. ($c(2) = 0$이므로 $m = 2$를 포함해도 아무 상관이 없다.)

> **생각해 보기** $c(m)$이 m이 홀수일 때와 짝수일 때 공식이 다르다면, 어떻게 더할 수 있을까?

둘씩 짝을 짓는다. 각 $n = 1, \ldots, M$에 대해 짝수 값 $m = 2n$과 홀수 값 $m = 2n+1$을 함께 묶으면, 이들은 $m = 2, 3, \ldots, 2M+1$을 정확히 한 번씩 덮는다. 이 둘을 합한 기여는

$$(n-1)^2 + n(n-1) = (n-1)(2n-1) = 2n^2 - 3n + 1.$$

이다. 주어진 $\sum k^2$의 공식과 $\sum k = \frac{1}{2}M(M+1)$을 이용하면

$$\begin{aligned} T &= \sum_{n=1}^{M} \left(2n^2 - 3n + 1\right) \\ &= \tfrac{1}{3}M(M+1)(2M+1) - \tfrac{3}{2}M(M+1) + M \\ &= \tfrac{1}{6}M\left[2(2M^2+3M+1) - 9(M+1) + 6\right] \\ &= \tfrac{1}{6}M\left(4M^2 - 3M - 1\right) \\ &= \tfrac{1}{6}M(4M+1)(M-1). \end{aligned}$$

세 막대를 고르는, 같은 정도로 일어날 법한 선택의 총수는

$$\binom{2M+1}{3} = \frac{(2M+1)(2M)(2M-1)}{6}.$$

이다. 나누고 $M/6$을 약분하면

$$\mathrm{P}(\text{삼각형}) = \frac{M(4M+1)(M-1)}{2M(2M+1)(2M-1)} = \frac{(4M+1)(M-1)}{2(2M+1)(2M-1)},$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다.

검산

- $M = 1$: 막대는 $1, 2, 3$이고 $1 + 2 = 3$이므로 퇴화 삼각형(degenerate triangle)이 되어 확률은 0이어야 하며, 공식도 0을 준다.
- $M = 2$: 막대는 1부터 5까지이다. 삼각형은 $\{2, 3, 4\}$, $\{2, 4, 5\}$, $\{3, 4, 5\}$이므로 확률은 $3/10$이고, 공식은 $\frac{9 \cdot 1}{2 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{3}{10}$을 준다.
- $M \to \infty$일 때 확률은 $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$로 수렴한다. 이는 연속 버전과 일치한다. $[0, 1]$에서 균등분포(uniform distribution)를 따르는 서로 독립인 세 길이에 대해, 작은 두 길이의 합이 가장 긴 길이보다 클 확률은 $\frac{1}{2}$이다.
- 소문항 (i)의 모든 가짓수와 소문항 (ii), (iii)의 확률은 n이 39까지, M이 19까지인 경우에 대해 모든 쌍 또는 세 쌍을 직접 나열하는 컴퓨터 검사로 확인했다(예를 들어 $M = 3$이면 $13/35$이다).

흔한 실수

- $n_1 + n_2 = n_3$을 허용하는 것: 길이가 $2, 3, 5$인 세 막대는 일직선으로 놓여 넓이가 0이므로, 부등식은 등호 없이 성립해야 한다.
- 소문항 (ii)에서 $\binom{N-1}{2}$ 대신 $\binom{N}{2}$를 쓰는 것: 길이가 N인 막대는 이미 뽑혀 있다.
- 소문항 (iii)에서 m의 홀수 값만(또는 짝수 값만) 더하는 것: 가장 긴 막대의 길이는 3부터 $2M + 1$까지 어떤 값이든 될 수 있다.

STEP 너머

가장 큰 원소를 기준으로 경우를 나누어 센 다음 더하는 것은 조합론(combinatorics)의 표준적인 기법이며, 같은 아이디어로 최댓값에 대해 적분하면 연속 버전의 답 $\frac{1}{2}$를 얻는다. 그림에서처럼 어떤 영역 안의 격자점(lattice point)을 세어 그 영역의 넓이와 비교하는 것은 이산 확률과 연속 확률을 잇는 다리이다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)에는 고전적인 "부러진 막대" 삼각형 문제를 비롯하여 이런 종류의 문제가 많이 실려 있다.

풀이

STEP II 2019, 문제 12

확률과 통계 • 연속 분포와 분위수

STEP II 2019, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

핵심 아이디어

여기서 누적분포함수(cumulative distribution function)는 $[0,1]$에서 단순히 x^n이므로, 모든 분위수(quantile)를 정확히 적을 수 있다. 분포의 비율 p가 그 아래에 놓이는 값은 $p^{1/n}$이다. 그러면 평균(mean)과 분위수의 비교는 거듭제곱의 비교가 되고, 양변을 n제곱하면 이는 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$에 관한 명제로 바뀐다. 이것이 바로 이항전개(binomial expansion)로 어림하기에 알맞은 양이다.

풀이

소문항 (i)

확률밀도함수(density)를 곱하여 적분하면

$$\mu = \mathrm{E}(X) = \int_0^1 x \cdot nx^{n-1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 nx^n\,\mathrm{d}x = \frac{n}{n+1},$$
$$\mathrm{E}(X^2) = \int_0^1 nx^{n+1}\,\mathrm{d}x = \frac{n}{n+2}.$$

따라서

$$\sigma^2 = \mathrm{E}(X^2) - \mu^2 = \frac{n}{n+2} - \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n\left[(n+1)^2 - n(n+2)\right]}{(n+1)^2(n+2)}$$
$$= \frac{n\left[n^2+2n+1-n^2-2n\right]}{(n+1)^2(n+2)} = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)},$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

소문항 (ii)

$0 \le x \le 1$에서 분포함수(distribution function)는

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{P}(X \le x) = \int_0^x nt^{n-1}\,\mathrm{d}t = x^n.$$

$n = 2$이면 $\mathrm{F}(x) = x^2$이다. 하위 사분위수(lower quartile) q_1은 $q_1^2 = \frac{1}{4}$를 만족하고, 상위 사분위수(upper quartile) q_3은 $q_3^2 = \frac{3}{4}$를 만족한다. 둘 다 $[0,1]$에 속하므로 양의 제곱근을 택한다.

$$q_1 = \tfrac{1}{2}, \qquad q_3 = \tfrac{\sqrt{3}}{2}, \qquad q_3 - q_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

소문항 (i)에 의해 $\sigma^2 = \dfrac{2}{9\cdot 4} = \dfrac{1}{18}$이므로 $\sigma = \dfrac{1}{3\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{6}$이고 $2\sigma = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$이다.

$\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} < \dfrac{\sqrt{2}}{3}$임을 보이고자 한다. 6을 곱하면 이는 다음과 동치(equivalent)이다.

$$3\sqrt{3} - 3 < 2\sqrt{2} \iff 3\sqrt{3} < 3 + 2\sqrt{2}.$$

마지막 부등식의 양변은 모두 양수이므로, 이는 양변의 제곱 사이의 부등식과 동치이다.

$$27 < 9 + 12\sqrt{2} + 8 = 17 + 12\sqrt{2} \iff 10 < 12\sqrt{2},$$

그런데 $\sqrt{2} > 1$이므로 $12\sqrt{2} > 12 > 10$이 되어 이 부등식은 참이다. 모든 단계가 동치였으므로 이 사슬을 거슬러 올라가면 사분위범위(interquartile range)는 2σ보다 작다.

> **생각해 보기** 여기서는 양변을 제곱해도 안전한데, 일반적으로는 왜 그렇지 않은가?

제곱이 부등식 $a < b$를 보존하는 것은 a와 b가 음이 아닐 때뿐이다(예를 들어 $-3 < 2$이지만 $9 > 4$이다). 그래서 빨셈이 남아 있는 $3\sqrt{3} - 3 < 2\sqrt{2}$를 바로 제곱하지 않고, 먼저 양변이 분명히 양수인 $3\sqrt{3} < 3 + 2\sqrt{2}$ 꼴로 정리한 것이다.

소문항 (iii)

이항정리(binomial theorem)에 의해

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}\,x^2 + \cdots,$$

이고 $(k+1)$번째 항은

$$\binom{n}{k} x^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\,x^k.$$

중앙값과 하위 사분위수. $\mathrm{F}(x) = x^n$이므로 중앙값(median) m은 $m^n = \frac{1}{2}$를, 하위 사분위수 q는 $q^n = \frac{1}{4}$를 만족한다. 따라서

$$m = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{1/n}, \qquad q = \left(\tfrac{1}{4}\right)^{1/n}.$$

μ, m, q는 모두 양수이고 $t \mapsto t^n$은 $t > 0$에서 순증가하므로, 이들의 n제곱을 비교하여 대소를 비교할 수 있다. 또한

$$\mu^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

$A = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$이라 하자. 그러면

$$\mu < m \iff \mu^n < \tfrac{1}{2} \iff A > 2, \qquad \mu > q \iff \mu^n > \tfrac{1}{4} \iff A < 4.$$

μ는 중앙값보다 작다. 전개식에 $x = \frac{1}{n}$을 대입한다. 모든 항이 음이 아니므로 A는 처음 세 항의 합 이상이다.

$$A \geq 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2} = 2 + \frac{n-1}{2n} > 2,$$

여기서 마지막 부등식은 $n > 1$이므로 등호 없이 성립한다. ($n \geq 2$이면 셋째 항이 실제로 전개식에 나타난다.) 따라서 $\mu < m$이다.

μ는 하위 사분위수보다 크다. $x = \frac{1}{n}$일 때 $(k+1)$번째 항은

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} \leq \frac{1}{k!},$$

인데, k개의 분수 $\frac{n-j}{n}$ $(0 \leq j \leq k-1)$이 각각 0과 1 사이에 있기 때문이다. ($k = 0$이면 항은 $1 = \frac{1}{0!}$이다.) $k = 0, 1, \ldots, n$에 대해 더하면

$$A \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots < 4,$$

가운데 부등식은 무한급수(infinite series)에 양의 항이 더 있기 때문에 성립하고, 마지막 부등식은 가정해도 된다고 주어진 결과이다. 따라서 $A < 4$이고, 그러므로 $\mu > q$이다.

두 결과를 합치면, 모든 정수 $n > 1$에 대해 하위 사분위수는 μ보다 작고, μ는 중앙값보다 작다.

? **생각해 보기** n제곱을 비교하는 것이 왜 μ와 m의 대소를 결정해 주는가?

양수 a와 b에 대해 t^n은 $t > 0$에서 순증가하므로, $a < b$일 필요충분조건은 $a^n < b^n$이다. 세 수가 모두 양수이므로 n제곱을 해도 잃는 것이 없고, 그렇게 하면 m과 q에 있는 번거로운 n제곱근이 사라진다.

검산

- $n = 2$일 때: $\mu = \frac{2}{3}$이고 $\sigma^2 = \frac{2}{9 \cdot 4} = \frac{1}{18}$이며, 이는 $\mathrm{E}(X^2) - \mu^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9}$와 일치한다.
- 수치로 보면, $n = 2$일 때 사분위범위는 0.366이고 $2\sigma = 0.471$이다.
- $n = 2$일 때 세 값은 $q = 0.5$, $\mu \approx 0.667$, $m \approx 0.707$이고, $n = 10$일 때는 $q \approx 0.871$, $\mu \approx 0.909$, $m \approx 0.933$이다. 순서 $q < \mu < m$은 2부터 2000까지의 모든 n에 대해 컴퓨터로 확인하였다.
- $n \to \infty$일 때 $A = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to \mathrm{e} \approx 2.718$이며, 이는 2와 4 사이에 여유 있게 들어간다.

흔한 실수

- 양변이 양수인지 먼저 확인하지 않고 $3\sqrt{3} - 3 < 2\sqrt{2}$를 바로 제곱하는 것.
- 역수(reciprocal)를 취할 때 부등호 방향을 틀리는 것: $\mu^n < \frac{1}{2}$는 $A < 2$가 아니라 $A > 2$에 대응한다.
- $(k+1)$번째 항이 $\frac{1}{k!}$ 이하라고 하지 않고 $\frac{1}{k!}$와 같다고 주장하는 것.

STEP 너머

양 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$은 n이 커짐에 따라 증가하며 극한 e에 수렴(converge)한다. 여러분이 $\sum 1/k!$와 항별로 비교하여 증명한 부등식은, 해석학(analysis) 입문 과목의 표준 결과인 $\mathrm{e} = \sum_{k \geq 0} 1/k!$를 보이는 첫 단계이다. 이 분포 자체는 $\mathrm{Beta}(n, 1)$ 분포, 즉 베타 분포(Beta distribution)이다. 또한 $\mathrm{P}(\max \leq x) = x^n$이므로, 이는 $[0, 1]$ 위의 독립인 균등(uniform) 확률변수 n개의 최댓값의 분포이기도 하다. 두 갈래에 대해 더 알고 싶다면 Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)와 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해)를 참고하라.

풀이

STEP III 2019, 문제 1

순수수학 • 연립 미분방정식

STEP III 2019, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

핵심 아이디어

$k = 1$일 때 우변은 정확히 $x + \mathrm{i}y$에 복소수 상수를 곱해서 얻는 것과 같으므로, 두 방정식은 $z = x + \mathrm{i}y$에 대한 하나의 방정식 $\dot{z} = cz$로 합쳐진다. 그러면 운동은 회전(rotation)과 지수적 감쇠(exponential decay)가 결합된 것, 곧 나선(spiral)이 된다. $k = 0$일 때는 결합이 한 쪽 방향으로만 작용한다. x는 y에 의존하지 않으므로, 먼저 x를 구한 다음 그것을 y에 대한 방정식에 대입하면 된다.

풀이

소문항 (i)

$k = 1$이면 $\dot{x} = -x - y$, $\dot{y} = x - y$이다. $z = x + \mathrm{i}y$로 놓자. 그러면

$$\begin{aligned}\dot{z} = \dot{x} + \mathrm{i}\dot{y} &= (-x - y) + \mathrm{i}(x - y) \\ &= (-1 + \mathrm{i})(x + \mathrm{i}y) = (-1 + \mathrm{i})z,\end{aligned}$$

이며, 이는 $(-1 + \mathrm{i})(x + \mathrm{i}y) = -x - \mathrm{i}y + \mathrm{i}x - y$로 전개하여 확인할 수 있다. $z(0) = 1$이므로 해는

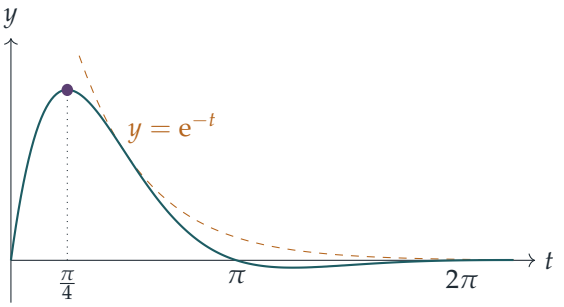
$$z = \mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})t} = \mathrm{e}^{-t}(\cos t + \mathrm{i}\sin t),$$

이고, 따라서

$$x = \mathrm{e}^{-t}\cos t, \qquad y = \mathrm{e}^{-t}\sin t.$$

(복소수를 쓰고 싶지 않다면, 첫 번째 방정식을 미분하고 y를 소거하여 $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0$을 얻는다. 이 방정식의 특성방정식(auxiliary equation)의 근은 $-1 \pm \mathrm{i}$이며, 여기에 $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = -1$을 이용하면 된다.)

t에 대한 y의 그래프. 이것은 포락선(envelope) $\pm e^{-t}$ 안에 있는 사인파이므로 감쇠 진동(damped oscillation)이다. $t = n\pi$에서 0이 되고, 극점은 $\dot{y} = x - y = e^{-t}(\cos t - \sin t) = 0$인 곳, 즉 $t = \frac{\pi}{4} + n\pi$이다. 연이은 각 봉우리는 $e^{-\pi} \approx 0.04$배씩 작아지므로, 첫 번째 봉우리 이후의 진동은 실제 축척에서는 거의 보이지 않는다.



경로. 극형식(polar form)으로 쓰면 $z = e^{-t}e^{it}$의 절댓값은 $r = e^{-t}$, 편각은 $\theta = t$이다. 따라서 경로는 나선

$$r = e^{-\theta}, \qquad \theta \geq 0,$$

이며, $(1, 0)$에서 출발하여 시계 반대 방향으로 감기며 원점으로 들어가고, $t \to \infty$일 때에만 원점에 다다른다. 출발할 때 $\dot{x} = -1, \dot{y} = 1$이므로 $(1, 0)$에서 왼쪽 위로 움직이며 떠난다. 한 바퀴 돌 때마다 원점까지의 거리가 $e^{-2\pi} \approx 0.002$배로 줄어들므로, 실제 축척에서는 첫 바퀴만 보인다.

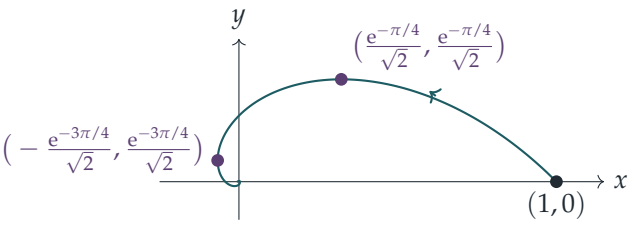
y의 최댓값. y의 극점은 $t = \frac{\pi}{4} + n\pi$이다. $t = \frac{\pi}{4}$에서 $y = e^{-\pi/4}/\sqrt{2} > 0$이다. 모든 $t \geq \frac{\pi}{2}$에 대하여 $y \leq e^{-t} \leq e^{-\pi/2}$이고, $e^{-\pi/2} < e^{-\pi/4}/\sqrt{2}$이다. 이 부등식은 $\sqrt{2} < e^{\pi/4} \approx 2.19$와 동치이기 때문이다. $[0, \frac{\pi}{2}]$에서 극점은 $t = \frac{\pi}{4}$ 하나뿐이다. 따라서 y가 최대가 되는 점은

$$\left(\frac{e^{-\pi/4}}{\sqrt{2}}, \frac{e^{-\pi/4}}{\sqrt{2}}\right) \approx (0.322,\ 0.322).$$

x의 최솟값. 이제 $\dot{x} = -x - y = -e^{-t}(\cos t + \sin t)$이고, 이것은 $\tan t = -1$일 때, 즉 $t = \frac{3\pi}{4} + n\pi$일 때 0이 된다. $x < 0$이려면 $\cos t < 0$이어야 하므로 $t = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi$가 골라지고, 이때 $x = -e^{-t}/\sqrt{2}$이다. e^{-t}는 감소하므로, 이 값은 그러한 t 가운데 가장 작은 $t = \frac{3\pi}{4}$에서 가장 작다. ($x(0) = 1 > 0$이고 $t \to \infty$일 때 $x \to 0$이므로, 최솟값은 반드시 이 극점들 가운데 하나에서 나타난다.) 따라서 x가 최소가 되는 점은

$$\left(-\frac{e^{-3\pi/4}}{\sqrt{2}}, \frac{e^{-3\pi/4}}{\sqrt{2}}\right) \approx (-0.067,\ 0.067).$$

예상대로 두 점 모두 직선 $y = \pm x$ 위에 있다. 나선 위에서 y는 경로가 x축 방향으로 나아가는 곳에서 최대이고, x는 경로가 y축 방향으로 나아가는 곳에서 최소이다.



소문항 (ii)

$k = 0$이면 첫 번째 방정식은 그 자체로 $\dot{x} = -x$이므로, $x(0) = 1$에서

$$x = e^{-t}.$$

그러면 $\dot{y} + y = e^{-t}$이다. 적분인자(integrating factor) e^{t}를 곱하면 $\frac{d}{dt}(ye^{t}) = 1$이므로 $ye^{t} = t + c$이고, $y(0) = 0$에서 $c = 0$이다.

$$y = te^{-t}.$$

생각해 보기 이것을 어떻게 경로의 방정식으로 바꿀 수 있을까?

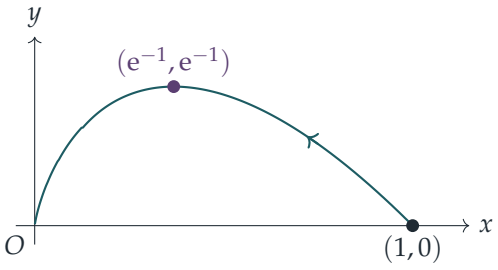
t를 소거한다. $x = e^{-t}$이므로 $t = -\ln x$이고, 따라서

$$y = -x \ln x, \qquad 0 < x \leq 1.$$

t가 0에서 ∞까지 변할 때 x는 1에서 0을 향해 감소하므로, 입자는 $(1, 0)$에서 출발하여 이 곡선을 따라 왼쪽으로 움직이고, $t \to \infty$일 때 원점에 가까워진다.

개형을 그리기 위한 특징은 다음과 같다.

- $\frac{dy}{dx} = -\ln x - 1$이고, 이것은 $x = e^{-1}$에서 0이다. 따라서 가장 높은 점은 (e^{-1}, e^{-1})이며, $t = 1$일 때 도달한다.
- $(1, 0)$에서 기울기는 -1이고, 이는 $t = 0$에서 $\dot{x} = -1, \dot{y} = 1$인 것과 맞아떨어진다.
- $x \to 0^{+}$일 때 $x \ln x \to 0$이므로 $y \to 0$이다. 그러나 기울기 $-\ln x - 1 \to +\infty$이므로, 곡선은 y축에 접하면서 원점으로 들어간다.
- $0 < x < 1$에서 $y > 0$이므로, 경로 전체가 x축 위쪽에 있다.



소문항 (i)과의 차이에 주목하자. $k = 0$일 때는 더 이상 회전이 없으므로 입자는 어느 축도 가로지르지 않는다. 그저 휘어지며 원점으로 들어갈 뿐이다.

검산

- 다시 대입해 본다. $x = \mathrm{e}^{-t}\cos t$에 대하여 $\dot{x} = -\mathrm{e}^{-t}\cos t - \mathrm{e}^{-t}\sin t = -x - y$이므로 조건을 만족한다. $\dot{y}$도 같은 방법으로 확인된다. 두 해 모두 $x(0) = 1, y(0) = 0$도 만족한다.
- 방정식을 작은 시간 간격으로 수치적으로 진행시키면 두 해가 모두 재현되며, 소문항 (i)에서 y의 최댓값은 $t \approx 0.785$에서 약 0.3224, x의 최솟값은 $t \approx 2.356$에서 약 -0.0670이고, 소문항 (ii)에서 y는 $t = 1$에서 최댓값 $1/\mathrm{e} \approx 0.3679$를 가짐이 확인된다.
- (ii)에 대한 타당성 점검: $y = t\mathrm{e}^{-t}$는 익숙한 "중근" 꼴이며, 연립방정식의 행렬이 중복 고윳값(repeated eigenvalue) -1을 가지므로 이는 자연스럽다.

흔한 실수

- x의 최솟값을 $t = -\frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{7\pi}{4}$에서 잡는 실수: 그곳에서도 $\dot{x} = 0$이지만 $x > 0$이다(극댓값이다). $\cos t$의 부호를 확인하자.
- 나선이 $t \to \infty$일 때에만 원점에 도달한다는 사실을 잊거나, 시계 방향으로 감기도록 그리는 실수: $\theta = t$가 증가하므로 시계 반대 방향으로 감긴다.
- (ii)에서 원점에서의 수직 접선을 놓치는 실수: $y \to 0$이지만 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x \to \infty$이다.

STEP 너머

모든 선형계(linear system) $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$는 A의 고윳값에 의해 결정된다. 여기서 $A = \begin{pmatrix} -1 & -k \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$의 고윳값은 $-1 \pm \sqrt{-k}$이다. $k = 1$일 때는 켤레복소수 쌍 $-1 \pm \mathrm{i}$이므로 **안정 나선점**(*stable spiral*)이 되고, $k = 0$일 때는 중복 고윳값 -1이 있어 **퇴화 마디점**(*degenerate node*)이 되며, $k < 0$이면 서로 다른 두 실수 고윳값을 얻는다. 이런 식으로 고정점(fixed point)을 분류하는 것(상평면 분석(phase-plane analysis))은 대학 1학년의 핵심 주제이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 이 내용을 많은 그림과 함께 다룬다.

풀이

STEP III 2019, 문제 2

순수수학 • 함수방정식

STEP III 2019, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

이 문제는 *Beyond STEP*의 3.8 절 **덧셈 법칙으로 정해지는 함수**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch03/addition-laws.html

핵심 아이디어

함수방정식(functional equation)은 함수가 한 점 근처에서 어떻게 행동하는지만 알면 그 함수에 대한 모든 것을 알려 준다. $x = y = 0$을 대입하면 0에서의 값이 정해진다. 그다음 일반적인 x에서 차분몫(difference quotient)을 쓰고 함수방정식을 이용하면, 이것이 0에서의 차분몫으로 바뀌는데, 그 극한이 k임은 이미 알고 있다. 이로부터 미분방정식(differential equation)을 얻고, 앞에서 찾은 초깃값(initial value)을 이용하여 이를 푼다.

풀이

소문항 (i)

0에서의 값. 함수방정식에 $x = y = 0$을 대입하면 $f(0) = f(0)^2$이므로 $f(0) = 0$ 또는 $f(0) = 1$이다.

$f(0) = 0$이라고 하자. 그러면 $y = 0$을 대입하여 모든 x에 대해 $f(x) = f(x)f(0) = 0$을 얻으므로, f는 영함수(zero function)이고 $f'(0) = 0$이다. 이는 $f'(0) = k \neq 0$에 모순이다. 따라서 $f(0) = 1$이다.

도함수. $(*)$와 $y = h$로 둔 함수방정식으로부터

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x)f(h) - f(x)}{h} = f(x) \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - 1}{h}.$$

$\mathrm{f}(0) = 1$이므로 마지막 극한은 $\lim_{h\to 0} \dfrac{\mathrm{f}(0+h)-\mathrm{f}(0)}{h}$이고, 이는 $x = 0$에서의 $(*)$에 의해 $\mathrm{f}'(0) = k$이다. 따라서

$$\mathrm{f}'(x) = k\,\mathrm{f}(x),$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. ($\mathrm{f}(x)$는 h에 의존하지 않으므로 극한 밖으로 꺼낼 수 있었다.)

풀기. f로 나누는 대신(그러려면 $\mathrm{f} \neq 0$이어야 한다) $u(x) = \mathrm{e}^{-kx}\mathrm{f}(x)$를 생각한다. 그러면

$$u'(x) = \mathrm{e}^{-kx}\big(\mathrm{f}'(x) - k\,\mathrm{f}(x)\big) = 0,$$

이므로 u는 상수이고, 그 값은 $u(0) = \mathrm{f}(0) = 1$이다. 따라서

$$\mathrm{f}(x) = \mathrm{e}^{kx}.$$

이 함수는 실제로 모든 조건을 만족한다. $\mathrm{e}^{k(x+y)} = \mathrm{e}^{kx}\mathrm{e}^{ky}$이고, 0에서의 미분계수는 k이다.

소문항 (ii)

0에서의 값. $x = y = 0$을 대입하면

$$\mathrm{g}(0) = \frac{2\mathrm{g}(0)}{1+\mathrm{g}(0)^2} \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{g}(0)\big(\mathrm{g}(0)^2 - 1\big) = 0,$$

이므로 $\mathrm{g}(0) \in \{0, 1, -1\}$이다. 모든 x에 대해 $|\mathrm{g}(x)| < 1$이므로 $\mathrm{g}(0) = 0$이어야 한다. 또한 $|\mathrm{g}| < 1$이면 $1 + \mathrm{g}(x)\mathrm{g}(y) > 0$이 보장되므로, 함수방정식에서 0으로 나누는 일은 결코 생기지 않는다는 점에도 주목하자.

차분몫. $y = h$로 둔 함수방정식을 이용하고 모든 항을 하나의 분모로 통분하면

$$\mathrm{g}(x+h) - \mathrm{g}(x) = \frac{\mathrm{g}(x) + \mathrm{g}(h) - \mathrm{g}(x) - \mathrm{g}(x)^2\mathrm{g}(h)}{1+\mathrm{g}(x)\mathrm{g}(h)} = \frac{\mathrm{g}(h)\big(1-\mathrm{g}(x)^2\big)}{1+\mathrm{g}(x)\mathrm{g}(h)}.$$

h로 나누면

$$\frac{\mathrm{g}(x+h)-\mathrm{g}(x)}{h} = \big(1-\mathrm{g}(x)^2\big)\cdot\frac{\mathrm{g}(h)}{h}\cdot\frac{1}{1+\mathrm{g}(x)\mathrm{g}(h)}.$$

? **생각해 보기** $h \to 0$일 때 우변의 각 인수는 어떻게 되는가?

첫 번째 인수는 h를 포함하지 않는다. $\mathrm{g}(0) = 0$이므로 가운데 인수는 $\dfrac{\mathrm{g}(0+h)-\mathrm{g}(0)}{h}$이고, 이는 $\mathrm{g}'(0) = k$로 수렴한다. 마지막 인수에 대해서는 $\mathrm{g}(h) \to \mathrm{g}(0) = 0$이 필요하다. 이것은 g가 0에서 미분가능(differentiable)하므로 연속(continuous)이기 때문에 성립한다. 따라서 마지막 인수는 1로 수렴하고,

$$\mathrm{g}'(x) = k\big(1-\mathrm{g}(x)^2\big).$$

풀기. $|g(x)| < 1$이므로 인수 $1 - g(x)^2$는 결코 0이 아니다. 따라서 변수분리(separation of variables)를 할 수 있다.

$$\int \frac{dg}{1-g^2} = \int k\,dx.$$

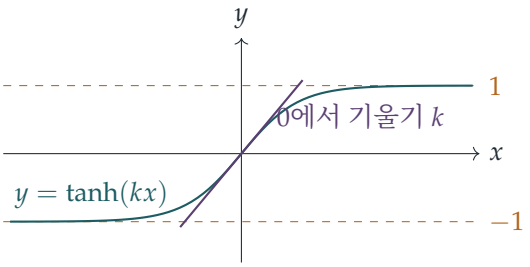
부분분수(partial fractions)로 분해하면 $\frac{1}{1-g^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+g} + \frac{1}{1-g}\right)$이고, $1 \pm g$는 둘 다 양수이므로

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+g(x)}{1-g(x)} = kx + c.$$

$x = 0$에서 좌변은 $\frac{1}{2}\ln 1 = 0$이므로 $c = 0$이다. 따라서 $\frac{1+g}{1-g} = e^{2kx}$이고, 이를 g에 대해 풀면

$$g(x) = \frac{e^{2kx}-1}{e^{2kx}+1} = \tanh(kx).$$

이 함수는 실제로 조건을 만족한다. $|\tanh(kx)| < 1$이고, 덧셈정리(addition formula) $\tanh(a+b) = \frac{\tanh a + \tanh b}{1 + \tanh a \tanh b}$가 바로 주어진 함수방정식이며, $\tanh(kx)$의 0에서의 미분계수는 k이다.



검산

- (i)에서 $f(x) = e^{kx}$, $k = 1$, $x = 0.3$, $y = 0.5$로 두면 $e^{0.3}e^{0.5} = 1.3499 \times 1.6487 = 2.2255 = e^{0.8}$이다.
- (ii)에서 $k = 1$, $x = 0.3$, $y = 0.5$로 두면 $\tanh 0.3 = 0.29131$, $\tanh 0.5 = 0.46212$이고, $(0.29131 + 0.46212)/(1 + 0.29131 \times 0.46212) = 0.66404 = \tanh 0.8$이다.
- 두 답 모두 무작위로 고른 많은 k, x, y에 대해 컴퓨터로도 확인하였으며, 도함수 관계식 $f' = kf$와 $g' = k(1-g^2)$도 함께 확인하였다.
- 두 소문항은 서로 연결되어 있다. $\tanh(kx) = \frac{e^{2kx}-1}{e^{2kx}+1}$은 소문항 (i)의 지수함수에서 k 대신 $2k$를 넣어 만든 것이다.

흔한 실수

- 이유 없이 $\mathrm{f}(0) = 0$이나 $\mathrm{g}(0) = \pm 1$을 버리는 것. 조건 $k \neq 0$과 $|\mathrm{g}| < 1$은 바로 이 경우들을 배제하기 위해 주어진 것이다.
- 이유를 말하지 않고 분모 안에서 $\mathrm{g}(h) \to 0$으로 보내는 것. 이를 위해서는 g가 0에서 연속이어야 하며, 이는 미분가능성에서 나온다.
- f나 $1 - \mathrm{g}^2$가 0이 아닌지 확인하지 않고 그것으로 나누는 것.

STEP 너머

이것들은 **코시**(*Cauchy*)**형 함수방정식**의 예이다. 해석학(analysis) 첫 강좌에서는 지수방정식 $\mathrm{f}(x+y) = \mathrm{f}(x)\mathrm{f}(y)$가 미분가능성보다 훨씬 약한 가정, 예를 들어 한 점에서의 연속성만으로도 $\mathrm{f}(x) = \mathrm{e}^{kx}$(또는 $\mathrm{f} \equiv 0$)를 강제한다는 것을 보이며, 반면 아무런 정칙성(regularity)도 가정하지 않으면 기괴한 해들이 존재한다. tanh 방정식은 특수 상대성 이론(special relativity)에서의 속도 덧셈 법칙으로, 여기서는 속도의 $\tanh^{-1}$ 값(빠르기, rapidity)이 단순히 더해진다. 이 뒤에 있는 해석학에 대해서는 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 참고하라.

풀이

STEP III 2019, 문제 3

순수수학 • 행렬의 불변 직선

STEP III 2019, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

핵심 아이디어

점 (x, y)가 불변점(invariant point)이 될 필요충분조건은 $(\mathbf{A} - \mathbf{I})$가 그 점을 영벡터로 보내는 것이고, 이로부터 두 개의 일차방정식을 얻는다. 소문항 (i)과 (ii)의 모든 내용은 이 두 방정식이 언제 같은 직선을 나타내는지를 묻는 데서 나오며, 그 조건은 $(a-1)(d-1) = bc$, 즉 $\det(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = 0$이다. 소문항 (iii)에서는 직선 위의 일반적인 점을 변환에 대입하고 계수를 비교(compare coefficients)한다.

풀이

소문항 (i)

점 (x, y)가 불변점이라는 것은 $ax + by = x$이고 $cx + dy = y$라는 것, 즉

$$(a-1)x = -by, \tag{1}$$

$$(d-1)y = -cx. \tag{2}$$

라는 것이다. (1)과 (2)를 변끼리 곱하면 $(a-1)(d-1)xy = bc\,xy$이므로, L_1 위의 모든 점 (x, y)에 대하여

$$\big((a-1)(d-1) - bc\big)xy = 0$$

이 성립한다. 이것이 증명하려던 것이다.

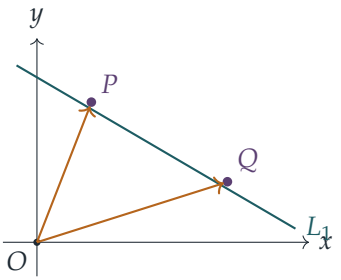
두 번째 결과를 위해서는 xy로 나눌 수 있도록 $xy \neq 0$인 L_1 위의 점이 필요하다.

생각해 보기 L_1 위의 모든 점에서 $x = 0$ 또는 $y = 0$이라면 어떻게 될까?

집합 $xy = 0$은 두 좌표축일 뿐이다. 두 좌표축의 합집합 안에 놓인 직선은 둘 중 하나의 축이어야 하므로, L_1이 좌표축이 아니라면 $xy \neq 0$인 점을 포함한다. 이때 xy로 나누면 $(a-1)(d-1) = bc$를 얻는다.

이제 좌표축인 경우가 남는다. L_1이 y축이면 모든 $(0, y)$가 불변점이므로, (1)과 (2)에서 모든 y에 대하여 $by = 0$이고 $(d-1)y = 0$이다. 따라서 $b = 0, d = 1$이고, $(a-1)(d-1) = bc$의 양변은 모두 0이다. L_1이 x축이면 같은 방법으로 $c = 0, a = 1$이고, 역시 양변이 모두 0이다. 따라서 모든 경우에 $(a-1)(d-1) = bc$이다.

이제 L_1이 원점을 지나지 않는다고 하자. L_1 위의 서로 다른 두 점 P, Q를 잡고, 그 위치벡터(position vector)를 각각 $\mathbf{p}, \mathbf{q}$라 하자.



O, P, Q는 한 직선 위에 있지 않으므로 $\mathbf{p}$와 $\mathbf{q}$는 평행하지 않고, 따라서 모든 벡터는 $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{p} + \mu\mathbf{q}$ 꼴로 나타낼 수 있다. 선형성(linearity)에 의하여

$$\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{Ap} + \mu\mathbf{Aq} = \lambda\mathbf{p} + \mu\mathbf{q} = \mathbf{v},$$

이므로 평면 위의 모든 점이 불변점이고 $\mathbf{A} = \mathbf{I}$이다. (이때 $a = d = 1, b = c = 0$이므로 $(a-1)(d-1) = bc$와도 일치한다.)

소문항 (ii)

$(a-1)(d-1) = bc$라고 하자. (1)과 (2)가 모두 성립하는 직선을 찾아야 한다.

$b \neq 0$인 경우. 직선 $(a-1)x + by = 0$을 생각하자. $b \neq 0$이므로 이것은 원점을 지나는 진짜 직선이다. 이 직선 위의 모든 점은 (1)을 만족한다. 이 직선 위에서 $y = -\frac{(a-1)x}{b}$이므로

$$cx + (d-1)y = cx - \frac{(a-1)(d-1)}{b}\,x = cx - \frac{bc}{b}\,x = 0,$$

이고, (2)도 성립한다. 따라서 $(a-1)x + by = 0$은 불변점으로 이루어진 직선이다.

$b = 0$인 경우. 이때 조건은 $(a-1)(d-1) = 0$이 되므로 $a = 1$ 또는 $d = 1$이다.

- $a \neq 1$이면 $d = 1$이다. 방정식 (1)은 $(a-1)x = 0$이 되어 $x = 0$이고, (2)는 $cx = 0$이 되는데 이는 $x = 0$일 때 성립한다. 불변점으로 이루어진 직선은 y축 $x = 0$이다.

- $a = 1$이면 (1)은 모든 점에서 성립하므로 (2), 즉 $cx + (d-1)y = 0$만 확인하면 된다.
  - c와 $d-1$이 동시에 0은 아니면, 이것은 원점을 지나는 직선이고 불변점으로 이루어진 직선이다.
  - $c = 0$이고 $d = 1$이면 $\mathbf{A} = \mathbf{I}$이므로 모든 점이 불변점이고, 모든 직선이 불변점으로 이루어진 직선이다.

따라서 $(a-1)(d-1) = bc$이면 항상 불변점으로 이루어진 직선이 존재한다.

소문항 (iii)

L_2는 원점을 지나지 않으므로 $k \neq 0$인 $y = mx + k$로 쓸 수 있다. L_2 위의 일반적인 점은 $(x, mx+k)$이고, 그 상은

$$(X, Y) = \big((a+bm)x + bk,\ (c+dm)x + dk\big).$$

이다. 이 직선이 불변직선(invariant line)일 필요충분조건은 모든 실수 x에 대하여 $Y = mX + k$인 것이다.

$$(c+dm)x + dk = m(a+bm)x + mbk + k.$$

양변은 모두 x에 대한 일차식이고 모든 x에 대하여 같으므로, 계수가 같아야 한다.

$$\text{상수항:}\quad dk = mbk + k, \tag{3}$$

$$\text{계수 비교, } x:\quad c + dm = am + bm^2. \tag{4}$$

생각해 보기 L_2가 원점을 지나지 않는다는 사실은 어디에서 쓰일까?

그 사실은 (3)에서 쓰인다. $k \neq 0$이므로 k로 나눌 수 있고, 그러면 $d - 1 = mb$를 얻는다. $d = 1 + mb$를 (4)에 대입하면

$$c = am + bm^2 - dm = am + bm^2 - m - bm^2 = m(a-1).$$

이다. 따라서

$$bc = bm(a-1) = (d-1)(a-1),$$

이고, 이것이 증명하려던 결과이다. ($k = 0$이면 방정식 (3)에서 아무 정보도 얻을 수 없다. 이 때문에 원점을 지나는 직선은 이 조건 없이도 불변직선이 될 수 있다. 그 예로 π만큼의 회전(rotation)이 있는데, 이 변환은 O를 지나는 모든 직선을 자기 자신으로 보내지만 $(a-1)(d-1) = 4 \neq 0 = bc$이다.)

검산

- $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$을 시험해 보자. 이때 $(a-1)(d-1) = -2 = bc$이다. 소문항 (ii)에 따르면 불변직선은 $2x+2y=0$, 즉 $y=-x$이고, 실제로 $\mathbf{A}(1,-1)^{\mathrm{T}} = (1,-1)^{\mathrm{T}}$이다.
- 소문항 (iii)에 대하여 $m=2$, $k=1$, $a=3$, $b=1$로 잡자. 그러면 $d = 1+mb = 3$이고 $c = m(a-1) = 4$이다. $y = 2x+1$ 위의 점 $(1,3)$은 $(6,13)$으로 옮겨지고, $13 = 2\times 6+1$이다. 또한 $(a-1)(d-1) = 4 = bc$이다.
- 컴퓨터로 수천 개의 무작위 행렬을 확인하였다. 찾아낸 $k \neq 0$인 불변직선 $y = mx+k$는 모두 $d-1 = mb$, $c = m(a-1)$, $(a-1)(d-1) = bc$를 만족하였고, 원점을 지나지 않는 고정점들의 직선은 모두 $\mathbf{A} = \mathbf{I}$에서 나왔다.

흔한 실수

- 소문항 (i)에서 L_1이 좌표축인 경우를 다루지 않고 xy로 나누는 것.
- 소문항 (ii)의 $b=0$인 경우에서 하위 경우를 빠뜨리는 것. 특히 모든 직선이 조건을 만족하는 $\mathbf{A} = \mathbf{I}$인 경우를 빠뜨리기 쉽다.
- 소문항 (iii)에서 **불변직선**(점들이 직선 위에 머무름)과 **불변점으로 이루어진 직선**(점들이 제자리에 머무름)을 혼동하여 $X = x$로 놓는 것.

STEP 너머

조건 $(a-1)(d-1) = bc$는 $\det(\mathbf{A}-\mathbf{I}) = 0$, 즉 행렬식(determinant) 조건이며, 이는 1이 $\mathbf{A}$의 고윳값(eigenvalue)이라는 뜻이다. 이때 원점을 지나는 불변점으로 이루어진 직선은 그 고윳값에 대한 고유공간(eigenspace)이다. 소문항 (iii)은 원점을 지나지 않는 불변직선이 있어도 고윳값 1이 반드시 존재함을 보여 준다. 관계식 $c = m(a-1)$과 $d-1 = mb$는 $\mathbf{A}-\mathbf{I}$의 둘째 행이 첫째 행의 m배라는 뜻이므로, $\mathbf{A}-\mathbf{I}$의 랭크(rank)는 많아야 1이고 모든 점을 L_2에 평행한 방향으로 움직인다. 고윳값, 고유벡터(eigenvector), 그리고 선형사상(linear map)의 기하는 Strang, *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)에서 다룬다.

풀이

STEP III 2019, 문제 4

순수수학 • 근과 계수

STEP III 2019, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

핵심 아이디어

번갈아 나타나는 부호는 정확히 비에트 공식(Vieta's formulas)의 부호이다. 근이 $r_1, \ldots, r_n$인 최고차항의 계수가 1인 다항식(monic polynomial)은 $x^n - e_1 x^{n-1} + e_2 x^{n-2} - \cdots + (-1)^n e_n$이고, 여기서 e_k는 근 가운데 k개를 곱한 것을 모두 더한 값이다. 따라서 "반사적(reflexive)"이라는 말은 모든 k에 대하여 $e_k(a_1, \ldots, a_n) = a_k$라는 뜻일 뿐이다. 그러면 작은 경우는 몇 개의 연립방정식(simultaneous equations)이 되고, 근의 제곱의 합 $e_1^2 - 2e_2$에서 (ii)의 항등식이 나온다. 일단 $a_n = 0$이 강제되면 인수 x가 빠져나오므로 다항식을 한 겹씩 벗겨 낼 수 있다.

풀이

이 풀이 전체에서 e_k는 $a_1, \ldots, a_n$의 k차 기본 대칭함수(elementary symmetric function)를 나타낸다. 비에트 공식에 의하여, P의 근이 $a_1, \ldots, a_n$일 필요충분조건은

$$e_k(a_1, \ldots, a_n) = a_k \qquad \text{단, } k = 1, 2, \ldots, n.$$

이다.

소문항 (i)

1차. $\mathrm{P}(x) = x - a_1$의 근은 a_1이므로, 이러한 다항식은 모두 반사적이다. 즉 임의의 실수 a에 대하여 $\mathrm{P}(x) = x - a$이다.

2차. $a_1 + a_2 = a_1$이고 $a_1 a_2 = a_2$이어야 한다. 첫째 식에서 $a_2 = 0$이고, 그러면 둘째 식은 저절로 성립한다. 따라서 임의의 실수 a에 대하여 $\mathrm{P}(x) = x^2 - ax = x(x - a)$이다. 실제로 그 근 a와 0은 a_1과 a_2이다.

3차. 다음이 성립해야 한다.

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_1,$$
$$a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 = a_2,$$
$$a_1a_2a_3 = a_3.$$

첫째 식에서 $a_3 = -a_2$이다. 그러면 둘째 식은 $a_1(a_2 + a_3) + a_2a_3 = a_2$, 즉 $-a_2^2 = a_2$가 되므로 $a_2 = 0$ 또는 $a_2 = -1$이다.

- $a_2 = 0$이면 $a_3 = 0$이고 셋째 식은 $0 = 0$이 된다. 따라서 a_1은 임의의 값이다. 즉 $\mathrm{P}(x) = x^3 - ax^2 = x^2(x - a)$이다.
- $a_2 = -1$이면 $a_3 = 1$이고 셋째 식에서 $-a_1 = 1$이므로 $a_1 = -1$이다. 이로부터

$$\mathrm{P}(x) = x^3 + x^2 - x - 1 = (x + 1)^2(x - 1),$$

을 얻고, 실제로 그 근 $-1, -1, 1$은 a_1, a_2, a_3이다.

따라서 차수가 3 이하인 반사적 다항식은

$$x - a, \qquad x^2 - ax, \qquad x^3 - ax^2 \quad (a \in \mathbb{R}), \qquad \text{그리고} \qquad x^3 + x^2 - x - 1.$$

이다.

소문항 (ii)

근의 제곱의 합은

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = e_1^2 - 2e_2,$$

이다. e_1을 제곱하면 각 a_i^2은 한 번씩, 각 곱 a_ia_j $(i < j)$는 두 번씩 나오기 때문이다. 반사적 다항식에서는 $e_1 = a_1$이고 $e_2 = a_2$이므로

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = a_1^2 - 2a_2, \qquad \text{즉} \qquad 2a_2 = -a_2^2 - a_3^2 - \cdots - a_n^2,$$

이고, 이것이 증명하려던 식이다. (이는 모든 $n \geq 2$에 대하여 성립한다.)

이제 a_k가 정수이고 $a_n \neq 0$이라 하고, 모순을 이끌어 내기 위해 $n > 3$이라고 가정하자. a_2^2을 반대쪽으로 옮기고 완전제곱식을 만들면

$$(a_2 + 1)^2 = 1 - (a_3^2 + a_4^2 + \cdots + a_n^2).$$

이다.

? **생각해 보기** 정수라는 조건은 이 등식을 어떻게 옥죄는가?

좌변은 0 이상이므로 $a_3^2 + \cdots + a_n^2 \leq 1$이다. 그런데 a_n은 0이 아닌 정수이므로 $a_n^2 \geq 1$이다. 따라서 그 합은 정확히 1이다. 즉 $a_n^2 = 1$이고 나머지 항은 모두 0이므로 $a_3 = a_4 = \cdots = a_{n-1} = 0$이며, 또한 $a_2 = -1$이다. $n \geq 4$이므로 $a_3, \ldots, a_{n-1}$은 비어 있지 않고, 특히 $a_3 = 0$이다. 이제 비에트 공식의 마지막 식은 근의 곱이 a_n이라는 것을 말해 준다.

$$a_n = e_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n = 0,$$

$a_3 = 0$이기 때문이다. 이는 $a_n \neq 0$에 모순이다. 그러므로 $n \leq 3$이다.

소문항 (iii)

인수 x 떼어 내기. P가 차수 $n \geq 2$인 반사적 다항식이고 $a_n = 0$이라 하자. 그러면 $\mathrm{P}(x) = x\mathrm{Q}(x)$이고, 여기서

$$\mathrm{Q}(x) = x^{n-1} - a_1 x^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1} a_{n-1}.$$

이다. P의 근은 $a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$이고 $a_n = 0$이며, 인수 x가 근 0 하나를 차지한다. 따라서 Q의 근은 나머지인 $a_1, \ldots, a_{n-1}$이다. 즉 Q는 같은 (정수) 계수를 가진 반사적 다항식이다. 역으로, Q가 계수 $a_1, \ldots, a_m$을 가진 차수 m의 반사적 다항식이면, $x\mathrm{Q}(x)$의 계수는 $a_1, \ldots, a_m, 0$이고 근은 $a_1, \ldots, a_m, 0$이므로 이것 역시 반사적이다.

한 겹씩 벗겨 내기. 정수 계수를 가진 임의의 반사적 다항식 P에서 출발하자. 차수가 2 이상이고 마지막 계수가 0인 동안 인수 x를 떼어 낸다. 이 과정은 $\mathrm{P}(x) = x^m \mathrm{R}(x)$에서 멈추는데, 여기서 $m \geq 0$이고 R은 차수 k인 정수 계수 반사적 다항식으로서 $k = 1$이거나 마지막 계수 a_k가 0이 아니다.

- $a_k \neq 0$이면 소문항 (ii)에 의하여 $k \leq 3$이다 ($k \leq 3$이면 증명할 것이 없다). 소문항 (i)의 목록에서, $k = 1$이면 $a \neq 0$인 $x - a$를 얻고, $k = 2$이면 마지막 계수가 항상 0이므로 해당하는 것이 없으며, $k = 3$이면 $a_3 \neq 0$인 것은 $x^3 + x^2 - x - 1$뿐이다.
- $k = 1$이고 $a_1 = 0$이면 $\mathrm{R}(x) = x$이다.

$\mathrm{R}(x) = x$를 $a = 0$인 $x - a$의 경우에 포함시키고, 앞의 역을 이용하여 x^m을 곱한 것이 모두 반사적임을 확인하면, 정수 계수를 가진 반사적 다항식은 정확히 다음과 같다.

$$x^m(x - a) \quad (m \geq 0,\ a \in \mathbb{Z}),$$
$$x^m(x^3 + x^2 - x - 1) = x^m(x+1)^2(x-1) \quad (m \geq 0).$$

검산

- $x^2(x+1)^2(x-1) = x^5 + x^4 - x^3 - x^2$의 계수는 $a_1, \ldots, a_5 = -1, -1, 1, 0, 0$이고 근은 $-1, -1, 1, 0, 0$이므로 반사적이다. (ii)의 항등식은 $2(-1) = -(1 + 1 + 0 + 0)$이 되어 성립한다.

- $n \leq 7$이고 $a_1, \ldots, a_n$이 $\{-3, \ldots, 3\}$의 정수인 모든 경우를 컴퓨터로 탐색한 결과, 위에 나열한 것 외의 반사적 다항식은 찾지 못하였다. 또 $n = 2, 3$에 대하여 작은 유리수 범위를 탐색하여 소문항 (i)의 목록을 확인하였다.

흔한 실수

- 자유 매개변수를 가진 족을 빠뜨리는 것. $x^2 - ax$와 $x^3 - ax^2$은 특정한 값뿐 아니라 모든 실수 a에 대하여 반사적이다.
- (ii)에서 $a_n = \pm 1$, $a_2 = -1$을 찾고 거기서 멈추는 것. 모순은 근의 곱에서 나오는데, $n \geq 4$이면 $a_3, \ldots, a_{n-1}$ 가운데 0인 것이 있으므로 이 곱이 0이 된다.
- (iii)에서 몫이 다시 반사적인지 확인하지 않고 "$a_n = 0$이므로 x로 나눈다"라고만 말하는 것. 0인 근 하나는 인수 x와 짝을 이루고, 나머지 근은 나머지 계수와 일치해야 한다.

STEP 너머

방정식 $e_k(a_1, \ldots, a_n) = a_k$는 해집합이 대수다양체(algebraic variety)를 이루는 다항식 연립방정식의 작은 예이며, 여기서 그 다양체는 직선들과 고립된 점들의 합집합이다. "제곱의 합 $= e_1^2 - 2e_2$"라는 사실은 뉴턴 항등식(Newton's identities)의 첫 번째 식으로, 이 항등식들은 근의 거듭제곱 합을 계수와 연결하며 대칭함수 이론의 바탕이 된다. "제곱수인 정수들의 합이 1 이하"라는 단계는 디오판토스(Diophantine) 논증에서 전형적으로 쓰이는 수법이다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*과 Allenby의 *Rings, Fields and Groups*는 이러한 아이디어를 더 탐구하기에 좋은 책이다.

풀이

STEP III 2019, 문제 5

순수수학 • 치환적분

STEP III 2019, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

핵심 아이디어

(i)의 함수는 $[0,\infty)$를 $[0,1)$ 위로 매끄럽게, 그리고 증가하면서(increasing) 보낸다. 따라서 이 함수에 상수를 곱해 크기를 조절하면 $[0,c)$의 일부 구간에서의 y에 대한 적분을 $[0,\infty)$의 일부 구간에서의 x에 대한 적분으로 바꿀 수 있다. 또한 이렇게 하면 c^2-y^2이 겉모습만 다를 뿐 사실상 완전제곱식이 되므로, 다루기 까다로운 제곱근이 사라진다. 제곱근이 없어지면 피적분함수(integrand)는 유리함수(rational function)가 되고, 이것은 주어진 참고 사항의 아크탄젠트(arctangent) 적분으로 계산할 수 있다. 역수 치환(reciprocal substitution) $y=1/u$는 뒤의 적분들을 첫 번째 적분과 연결해 준다.

풀이

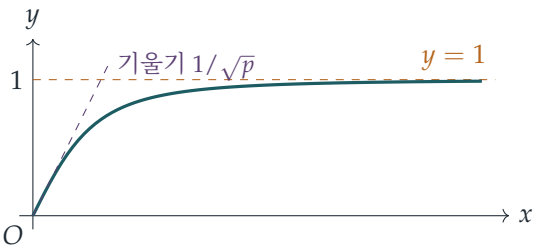
소문항 (i)

$f(x)=x(x^2+p)^{-1/2}$이고 $p>0$이면 $f(0)=0$이고

$$f'(x)=(x^2+p)^{-1/2}-x^2(x^2+p)^{-3/2}=\frac{p}{(x^2+p)^{3/2}}>0,$$

$$f''(x)=-\frac{3px}{(x^2+p)^{5/2}}<0 \quad \text{단, } x>0.$$

따라서 곡선은 기울기 $1/\sqrt{p}$로 원점을 출발하여 꾸준히 올라가며, 아래로 휘어진다(즉 위로 볼록한 오목(concave) 함수이다). $x>0$에서 $f(x)=1/\sqrt{1+p/x^2}$이므로 $x\to\infty$일 때 $f(x)\to 1$이 아래쪽에서 성립한다. 따라서 $y=1$은 곡선이 결코 닿지 않는 점근선(asymptote)이다.



소문항 (ii)

문제지에 인쇄된 치환(substitution)은 분자에 b가 있다. 이것으로는 풀리지 않는다. b^2-y^2은 깔끔해지지만 $c^2(x^2+p)-b^2x^2$의 제곱근이 남는데, 이것은 완전제곱식이 아니기 때문이다. 실제로 통하는 치환(그리고 출제자가 의도한 치환)은 분자에 c가 있는 것이다.

$$y=\frac{cx}{\sqrt{x^2+p}},\qquad p>0.$$

소문항 (i)에 의해 이것은 $x\in[0,\infty)$를 $y\in[0,c)$ 위로 보내는 증가하는 사상이고, 이 범위는 바로 $\sqrt{c^2-y^2}$이 정의되는 범위이다. 이제

$$\begin{aligned}c^2-y^2&=\frac{c^2(x^2+p)-c^2x^2}{x^2+p}=\frac{c^2p}{x^2+p},\\ b^2-y^2&=\frac{b^2p+(b^2-c^2)x^2}{x^2+p},\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}&=\frac{cp}{(x^2+p)^{3/2}}\quad\text{(소문항 (i)에서).}\end{aligned}$$

$c>0$이고 $p>0$이므로 $\sqrt{c^2-y^2}=c\sqrt{p}/\sqrt{x^2+p}$이다. 이를 대입하면

$$I=\int\frac{x^2+p}{b^2p+(b^2-c^2)x^2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+p}}{c\sqrt{p}}\cdot\frac{cp}{(x^2+p)^{3/2}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\sqrt{p}}{b^2p+(b^2-c^2)x^2}\,\mathrm{d}x.$$

$p=1$로 택하면

$$I=\int\frac{1}{b^2+(b^2-c^2)x^2}\,\mathrm{d}x,$$

이고, 이것이 구하는 결과이다. 치환은 $y=cx/\sqrt{x^2+1}$이고, 그 역은 $x=y/\sqrt{c^2-y^2}$이다.

첫 번째 적분. $b=\sqrt{3}$, $c=\sqrt{2}$로 놓는다. 그러면 $x=y/\sqrt{2-y^2}$이므로 $y=1$이면 $x=1$이고, $y\to\sqrt{2}$일 때 $x\to\infty$이다. 원래의 피적분함수는 $y=\sqrt{2}$에서 $(2-y^2)^{-1/2}$처럼 발산하는데, 이것은 적분 가능하다. 치환한 뒤의 적분은 $[1,\infty)$에서 수렴하는 이상적

분(improper integral)이다.

$$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}y}{(3-y^2)\sqrt{2-y^2}} = \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{3+x^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big[\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}\Big]_1^{\infty}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\Big) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

생각해 보기 새 적분에는 예전 적분의 $3-y^2$과 $2-y^2$ 자리에 $3y^2-1$과 $2y^2-1$이 있다. 어떤 치환을 하면 y^2과 상수의 역할이 서로 바뀔까?

두 번째 적분. $u>0$인 $y=1/u$로 놓으면 $\mathrm{d}y = -\mathrm{d}u/u^2$이다. 그러면

$$3y^2-1 = \frac{3-u^2}{u^2}, \qquad \sqrt{2y^2-1} = \frac{\sqrt{2-u^2}}{u},$$

이고, 적분 구간의 끝 $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$와 $y=1$은 각각 $u=\sqrt{2}$와 $u=1$이 된다. 따라서

$$\int_{1/\sqrt{2}}^{1} \frac{y\,\mathrm{d}y}{(3y^2-1)\sqrt{2y^2-1}} = \int_{\sqrt{2}}^{1} \frac{1}{u}\cdot\frac{u^2}{3-u^2}\cdot\frac{u}{\sqrt{2-u^2}}\cdot\Big(-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\Big) = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}u}{(3-u^2)\sqrt{2-u^2}}.$$

이것은 첫 번째 적분과 정확히 같으므로, 그 값 역시 $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$이다.

소문항 (iii)

같은 역수 치환 $y=1/u$를 쓰면 피적분함수는 $u/\big((3-u^2)\sqrt{2-u^2}\big)$이 된다. 이번에는 여분의 인수 u가 있으므로 $w=\sqrt{2-u^2}$로 치환하고 싶어진다. 그러면 $3-u^2 = 1+w^2$이기 때문이다. 두 단계를 합치면 하나의 치환이 된다.

$$w = \frac{\sqrt{2y^2-1}}{y} = \sqrt{2-\frac{1}{y^2}}, \qquad \text{따라서} \qquad w^2 = 2-\frac{1}{y^2}, \quad 2w\,\mathrm{d}w = \frac{2}{y^3}\,\mathrm{d}y.$$

$y\in[\frac{1}{\sqrt{2}},1]$에서 w는 0에서 1까지 증가한다. 또한 $\mathrm{d}y = wy^3\,\mathrm{d}w$, $\sqrt{2y^2-1} = wy$이고 $3y^2-1 = y^2\big(3-\frac{1}{y^2}\big) = y^2(1+w^2)$이다. 따라서

$$\int_{1/\sqrt{2}}^{1} \frac{\mathrm{d}y}{(3y^2-1)\sqrt{2y^2-1}} = \int_0^1 \frac{wy^3\,\mathrm{d}w}{y^2(1+w^2)\cdot wy} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}w}{1+w^2} = \frac{\pi}{4}.$$

($y=1/\sqrt{2}$에서의 특이점(singularity)도 역시 적분 가능한 $(2y^2-1)^{-1/2}$ 꼴일 뿐이며, 치환하면 사라진다.)

이것은 사실 소문항 (ii)의 방법이 모습만 바꾼 것이다. $x=1/w$로 쓰면 $y = x/\sqrt{2(x^2-1)}$이 되는데, 이것은 $c^2=\frac{1}{2}$, $p=-1$인 일반적인 치환이다. 소문항 (i)에서 p가 음수인 경우도 허용한 것은 이 때문이다.

검산

- $\pi/(3\sqrt{3}) \approx 0.6046$이고 $\pi/4 \approx 0.7854$이다. 두 값 모두, 끝점의 특이점을 매끄럽게 하기 위해 삼각치환을 한 뒤 원래 적분을 수치적분하여 확인하였다.
- 첫 번째 적분의 대략적인 크기 확인: $[1, \sqrt{2}]$에서 $1 \leq 3 - y^2 \leq 2$이므로, 적분값은 $\int_1^{\sqrt{2}} (2 - y^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{4}$의 $\frac{1}{2}$배와 1배 사이에 있다. 이로부터 0.39에서 0.79까지의 범위를 얻고, 0.6046은 이 범위 안에 여유 있게 들어간다.
- 소문항 (ii)의 항등식을 한 점에서 확인한다. $b = \sqrt{3}$, $c = \sqrt{2}$, $x = 1$이면 $y = 1$이다. 피적분함수의 값은 $\frac{1}{2}$, $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = \sqrt{2}/2^{3/2} = \frac{1}{2}$이고, 둘의 곱은 예상대로 $\frac{1}{4} = 1/(3+1)$이다.

흔한 실수

- 문제지에 인쇄된 대로 b를 넣은 치환을 고집하다가 막히는 경우: 없애야 할 제곱근은 $\sqrt{c^2 - y^2}$이므로, 크기를 조절하는 상수는 c여야 한다.
- 적분 구간의 끝을 잘못 바꾸는 경우. 여기서 $y = \sqrt{2} = c$는 유한한 x 값이 아니라 $x = \infty$에 대응한다.
- $\mathrm{d}y = -\mathrm{d}u/u^2$에서 음의 부호를 빠뜨리거나, 적분 구간의 끝을 다시 바꾸어 놓는 것을 잊는 경우. 그러면 피적분함수가 양수인데도 답이 음수가 된다.

STEP 너머

여기서 쓴 치환은 유리화 치환(rationalising substitution)이다. 이차식의 제곱근이 들어 있는 피적분함수를 유리함수로 바꾸어 주며, 그다음에는 부분분수(partial fractions)나 $\tan^{-1}$으로 마무리하면 된다. 대학 1학년 해석학(analysis)에서는 여기서 사용한 이상적분의 이론적 배경을 배운다. 적분 구간의 끝이 무한대이거나 피적분함수가 유계가 아닌 적분이 언제 수렴하는지, 그리고 그런 적분에서도 왜 치환적분이 여전히 성립하는지를 다룬다. Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)가 이 두 가지를 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP III 2019, 문제 6

순수수학 • 복소평면 위의 원

STEP III 2019, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

핵심 아이디어

처음에 주어진 식은 사실 $|z-a|^2 - r^2$를 다른 모양으로 쓴 것이다. 따라서 자취(locus)는 a로부터 거리가 r인 점들의 집합이다. $\omega = 1/z$에 의한 상(image)을 구하려면 $z = 1/\omega$를 대입하고 분모를 없앤 다음, 그 결과를 처음 식과 **같은** 모양으로 다시 정리한다. 그 모양이 되면 계수 비교(matching coefficients)로 중심과 반지름을 곧바로 읽어 낼 수 있다. 그런 다음 중심과 반지름을 비교하면 C'과 C가 언제 같은 원인지 결정된다.

풀이

$(z-a)^* = z^* - a^*$이므로

$$|z-a|^2 = (z-a)(z^*-a^*) = zz^* - a^*z - az^* + aa^*,$$

이다. 따라서 주어진 방정식은 정확히 $|z-a|^2 = r^2$, 즉 ($r > 0$이므로) $|z-a| = r$라는 뜻이다. 그러므로 C는 **중심이 a이고 반지름이 r인** 원이다.

더 일반적으로, $s > 0$일 때 방정식 $ww^* - bw^* - b^*w + bb^* - s^2 = 0$은 중심이 b이고 반지름이 s인 원이다. 이것을 틀로 사용하자.

소문항 (i)

먼저 $z = 0$은 C 위에 있지 않다. 그러려면 $|a| = r$, 즉 $a^*a = r^2$이어야 하는데, 이는 가정에서 제외되어 있다. 따라서 $\omega = 1/z$는 C의 모든 점에서 정의되고, $\omega \neq 0$이다. 또 $z = 1/\omega$이므로, Q가 C' 위에 있을 필요충분조건은 $\omega \neq 0$이고

$$\left|\frac{1}{\omega} - a\right| = r \iff |1 - a\omega| = r|\omega| \iff (1-a\omega)(1-a^*\omega^*) = r^2\omega\omega^*.$$

인 것이다. 전개하여 항을 정리하면

$$(a^*a - r^2)\,\omega\omega^* - a\omega - a^*\omega^* + 1 = 0.$$

이다. $k = a^*a - r^2 = |a|^2 - r^2$라 두면, 가정에 의해 k는 0이 아닌 실수이다. k로 나누면

$$\omega\omega^* - \frac{a^*}{k}\,\omega^* - \frac{a}{k}\,\omega + \frac{1}{k} = 0.$$

이다. 이 식은 $b = a^*/k$로 두면 (k가 실수이므로 $b^* = a/k$) 틀과 일치한다. 단, $bb^* - s^2 = 1/k$, 즉

$$s^2 = \frac{|a|^2}{k^2} - \frac{1}{k} = \frac{|a|^2 - k}{k^2} = \frac{r^2}{k^2}.$$

이어야 한다. 이 값은 양수이므로 C'은 실제로 원이고,

$$\text{중심}\,\frac{a^*}{|a|^2 - r^2}, \qquad \text{반지름}\,\frac{r}{\left||a|^2 - r^2\right|}.$$

이다. ($\omega = 0$은 $1 = 0$이 되므로 이 방정식을 만족하지 않는다. 따라서 이 원의 모든 점은 실제로 C 위의 어떤 z에 대한 $1/z$이다.)

? 생각해 보기 두 원이 같을 필요충분조건은...?

두 원이 같을 필요충분조건은 중심이 같고 반지름이 같은 것이다. 따라서 $C' = C$이려면

$$\frac{r}{|k|} = r \qquad \text{이고} \qquad \frac{a^*}{k} = a.$$

이어야 한다. 첫째 조건에서 $|k| = 1$, 즉 $k^2 = 1$이다.

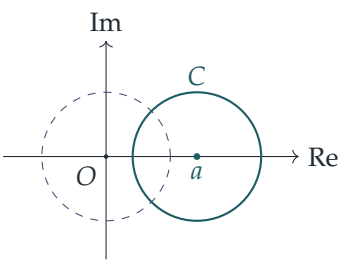
$$\left(|a|^2 - r^2\right)^2 = 1.$$

따라서 $k = 1$ 또는 $k = -1$이고, 둘째 조건에서 다음을 얻는다.

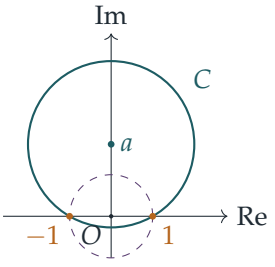
- $k = 1$이면 $a^* = a$이므로 a는 **실수**이다.
- $k = -1$이면 $a^* = -a$이므로 a는 **허수**(순허수(purely imaginary))이다.

($a = 0$이면 둘 다에 해당하고, 이때 $r = 1$이다.) 역으로, 이 둘 중 어느 경우든 반지름 조건과 함께 성립하면 중심과 반지름이 실제로 일치한다.

그림. a가 실수이면 $|a|^2 = r^2 + 1 > r^2$이므로, 중심은 실수축 위에서 O로부터 거리 $\sqrt{r^2+1}$인 곳에 있고, 원점은 C의 **바깥**에 있다. 이 원은 실수축과 $a - r$, $a + r$에서 만나고, 두 수의 곱은 $a^2 - r^2 = 1$이다. $1/z$가 두 점을 서로 바꾸므로 당연히 그래야 한다. a가 순허수이면 $|a|^2 = r^2 - 1$이므로 이 경우에는 $r \geq 1$이어야 한다. 중심은 허수축 위에 있고 원점은 C의 **안쪽**에 있다. $a = \mathrm{i}c$로 쓰면 실수축과 만나는 점은 $x^2 + c^2 = r^2$를 만족하므로 $x = \pm 1$이다. 두 경우 모두 $|a|^2 = r^2 \pm 1$이므로 C는 단위원(점선)과 직각으로 만난다(왼쪽 그림은 $a = \sqrt{2}$, $r = 1$이고 오른쪽 그림은 $a = \mathrm{i}\sqrt{3}$, $r = 2$이다).



a는 실수



a는 순허수

물론 a가 실수이면 음수일 수도 있고, 이때는 왼쪽 그림을 허수축에 대해 대칭이동한 그림이 된다. 마찬가지로 순허수 a가 실수축 아래에 있을 수도 있다.

소문항 (ii)

이번에는 $z = 1/\omega^*$이므로, Q가 자취 위에 있을 필요충분조건은

$$\left|\frac{1}{\omega^*} - a\right| = r \iff |1 - a\omega^*| = r|\omega^*| \iff |1 - a^*\omega| = r|\omega|,$$

이다. 여기서 첫째 절댓값(modulus) 안에 켤레(conjugate)를 취했다(어떤 수와 그 켤레복소수는 절댓값이 같다). 이것은 소문항 (i)의 방정식에서 a를 a^*로 바꾼 것이다. 따라서 소문항 (i)에 의해 자취는

$$\text{중심}\frac{a}{k}, \qquad \text{반지름}\frac{r}{|k|}, \qquad k = |a|^2 - r^2.$$

인 원이다. 이것이 C가 되려면 $|k| = 1$이고 $a/k = a$이어야 한다. $a \neq 0$이면 둘째 조건에서 $k = 1$이어야 하고, 조건은 이것이 전부이다. 즉 조건은 정확히

$$|a|^2 = r^2 + 1,$$

이고, 이는 a의 편각(argument)에 대해 아무것도 말해 주지 않는다. ($a = 0$이면 앞에서와 같이 $r = 1$이어야 한다.)

? **생각해 보기** 실수도 아니고 순허수도 아닌 구체적인 a를 찾을 수 있는가?

$a = 1 + \mathrm{i}$, $r = 1$로 잡자. 그러면 $|a|^2 = 2 = r^2 + 1$이므로 Q의 자취는 C이지만, a는 실수도 아니고 순허수도 아니다. 따라서 답은 **아니다**. a가 반드시 실수이거나 순허수여야 하는 것은 아니다.

검산

- $a = \sqrt{5}$, $r = 2$일 때($|a|^2 - r^2 = 1$), C 위의 점 $z = \sqrt{5} \pm 2$는 $1/(\sqrt{5} \pm 2) = \sqrt{5} \mp 2$로 옮겨지고, 이 점들은 다시 C 위에 있다.

- 소문항 (ii)에서 $a = 1 + \mathrm{i}$, $r = 1$일 때, 점 $z = 1$은 C 위에 있고 $1/z^* = 1$도 그렇다. 점 $z = 2 + \mathrm{i}$에서는 $1/z^* = (2+\mathrm{i})/5 = 0.4 + 0.2\mathrm{i}$이고, $|(0.4 + 0.2\mathrm{i}) - (1+\mathrm{i})|^2 = 0.36 + 0.64 = 1$이다. 그러나 $1/z = 0.4 - 0.2\mathrm{i}$는 C 위에 있지 않으므로, 이 원은 소문항 (i)의 사상에 의해 고정되지 않는다.
- 두 소문항의 상인 원은 컴퓨터로도 확인하였다. 임의의 원 위의 많은 점을 사상으로 옮긴 다음, 예측한 중심으로부터의 거리를 측정하였다.

흔한 실수

- C'의 중심을 $a^*/(|a|^2 - r^2)$ 대신 $a/(|a|^2 - r^2)$로 쓰는 것. 중심을 읽어 내려면 ω의 계수가 아니라 ω^*의 계수가 필요하다.
- 반지름 $r/\big||a|^2 - r^2\big|$에서 절댓값을 빠뜨리는 것. 절댓값이 없으면 $|a| < r$인 경우 반지름이 음수가 된다.
- 켤레가 조건 $a^* = \pm a$를 없앤다는 사실을 알아채지 못하고, 소문항 (i)에서 유추하여 소문항 (ii)에 "그렇다"라고 답하는 것.

STEP 너머

사상 $z \mapsto 1/z^*$는 **단위원에 대한 반전**(*inversion in the unit circle*)이고, $z \mapsto 1/z$는 그 반전을 한 다음 실수축에 대해 대칭이동한 것이다. 둘 다 뫼비우스 변환(Möbius transformation)의 한 종류이며, 뫼비우스 변환은 언제나 원과 직선을 원과 직선으로 옮긴다. 소문항 (ii)는 어떤 원이 반전에 의해 고정될 필요충분조건은 그 원이 반전의 기준원과 직각으로 만나는 것, 즉 $|a|^2 = r^2 + 1$인 것(또는 그 원이 단위원 자체인 것)이라는 고전적인 사실이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이러한 아이디어를 그림과 함께 아름답게 전개한다.

풀이

STEP III 2019, 문제 7

순수수학 • 곡선 그리기

STEP III 2019, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

핵심 아이디어

이 방정식에는 x^2과 y^2만 들어 있으므로, x^2에 대한(또는 y^2에 대한) 이차방정식(quadratic)이다. 이로부터 두 가지 도구를 한꺼번에 얻는다. 하나는 곡선이 도달할 수 있는 y의 값을 알려 주는 판별식(discriminant)이고, 다른 하나는 x^2을 y로 나타낸 명시적인 공식이다. 원점 근처의 모양을 알아볼 때는 차수가 가장 낮은 항만 남기고, 원점에서 멀리 떨어진 곳에서는 차수가 가장 높은 항만 남긴다. 특별한 경우인 $a = b$일 때는 방정식이 완전히 인수분해된다.

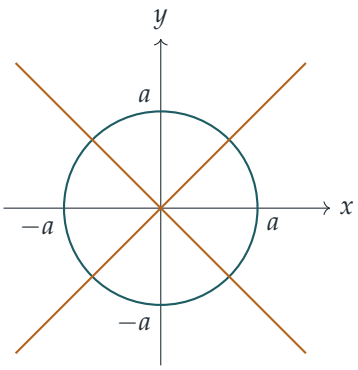
풀이

소문항 (i)

$a = b$일 때 모든 항을 한쪽으로 옮기고 사차항(quartic term)과 이차항을 묶는다.

$$\begin{aligned} 0 &= (y^4 - x^4) - a^2(y^2 - x^2) \\ &= (y^2 - x^2)(y^2 + x^2) - a^2(y^2 - x^2) \\ &= (y^2 - x^2)(x^2 + y^2 - a^2). \end{aligned}$$

따라서 점이 곡선 위에 있을 필요충분조건은 $y = \pm x$ 또는 $x^2 + y^2 = a^2$이다. 즉 악마의 곡선(Devil's Curve)은 두 직선 $y = x$, $y = -x$와 원점을 중심으로 하는 반지름 a인 원을 합친 것이다.



소문항 (ii)(a)

이제 $a = 2$, $b = \sqrt{5}$이고, 곡선은 $y^4 - 5y^2 = x^4 - 4x^2$이다. $y \geq 0$을 고정하고 $X = x^2$이라 하자. $x \geq 0$인 점 (x, y)가 곡선 위에 있을 필요충분조건은 $X \geq 0$이 다음을 만족하는 것이다.

$$X^2 - 4X - (y^4 - 5y^2) = 0.$$

이 방정식이 실근을 가지려면 판별식이 음이 아니어야 한다.

$$\begin{aligned} 16 + 4(y^4 - 5y^2) &= 4(y^4 - 5y^2 + 4) = 4(y^2 - 1)(y^2 - 4) \\ &= 4(y + 1)(y + 2)(y - 1)(y - 2) \geq 0. \end{aligned}$$

$y \geq 0$이므로 인수 $y + 1$과 $y + 2$는 양수이다. 따라서 $(y - 1)(y - 2) \geq 0$이어야 하고, 즉

$$0 \leq y \leq 1 \quad \text{또는} \quad y \geq 2.$$

역으로, 이러한 y는 모두 실제로 나타난다. 두 근은

$$X = 2 \pm \sqrt{D}, \qquad D = (y^2 - 1)(y^2 - 4),$$

이고, 큰 근은 2 이상이므로 x^2의 값으로 유효하다. 아래에서 이 x^2 공식을 사용할 것이다.

소문항 (ii)(b)

원점 가까이에서는 사차항 y^4과 x^4이 y^2과 x^2에 비해 아주 작다. 따라서 곡선은 근사적으로

$$-5y^2 \approx -4x^2, \qquad \text{즉} \qquad y \approx \tfrac{2}{\sqrt{5}}\, x \quad (x, y \geq 0).$$

곡선은 기울기가 $2/\sqrt{5} \approx 0.89$인 직선을 따라 원점을 떠나며, 이 직선은 직선 $y = x$보다 약간 아래에 있다. ((a)의 공식도 이와 일치한다. 근 $X = 2 - \sqrt{D}$에서 이항전개(binomial expansion)를 하면 $x^2 = \frac{5}{4}y^2 + O(y^4)$를 얻는다.)

원점에서 아주 멀리 떨어진 곳에서는 차수가 가장 높은 항이 지배한다. $y^4 \approx x^4$이므로 $y \approx x$이다. 이보다 더 정밀하게 할 수 있다. 방정식을 다음과 같이 쓰자.

$$(y^2 - x^2)(y^2 + x^2) = 5y^2 - 4x^2 \quad \Longrightarrow \quad y^2 - x^2 = \frac{5y^2 - 4x^2}{y^2 + x^2}.$$

$y/x \to 1$이므로 우변은 $\frac{5-4}{2} = \frac{1}{2}$로 수렴한다. 따라서 $y^2 \approx x^2 + \frac{1}{2}$이고, 이로부터

$$y \approx x + \frac{1}{4x}.$$

곡선은 직선 $y = x$를 점근선(asymptote)으로 가지며, **위쪽에서** 이 직선에 다가간다. 사실 곡선은 원점 이외에서는 이 직선과 만나지 않는다. 방정식에 $y = x$를 대입하면 $x^2 = 0$이 되기 때문이다.

소문항 (ii)(c)

$y^4 - 5y^2 = x^4 - 4x^2$을 x에 대하여 음함수 미분(implicit differentiation)하면

$$(4y^3 - 10y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4x^3 - 8x \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2x(x^2-2)}{y(2y^2-5)}.$$

x축에 평행한 접선(*tangent*): 분자는 0이고 분모는 0이 아니어야 한다. 따라서 $x = 0$ 또는 $x = \sqrt{2}$이다.

- $x = 0$: 이때 $y^4 = 5y^2$이므로 $y = 0$ 또는 $y = \sqrt{5}$이다. $(0, \sqrt{5})$에서 분모는 $\sqrt{5}(10-5) \neq 0$이므로 이 점은 조건을 만족한다.
- $x = \sqrt{2}$: 이때 $y^4 - 5y^2 = 4 - 8$이므로 $y^4 - 5y^2 + 4 = 0$이고, 따라서 $y = 1$ 또는 $y = 2$이다. 각 점에서 분모는 -3과 6으로 모두 0이 아니다.

> ? **생각해 보기** 분자가 역시 0이 되는 원점은 왜 포함하지 않을까?

$(0,0)$에서는 분모도 0이 되므로 공식은 $0/0$이 되어 아무것도 알려 주지 않는다. 이 문제는 (b)에서 이미 해결되었다. 곡선은 기울기 0이 아니라 기울기 $2/\sqrt{5}$로 원점을 지난다.

따라서 접선이 수평인 점은 $(0, \sqrt{5})$, $(\sqrt{2}, 1)$, $(\sqrt{2}, 2)$이다.

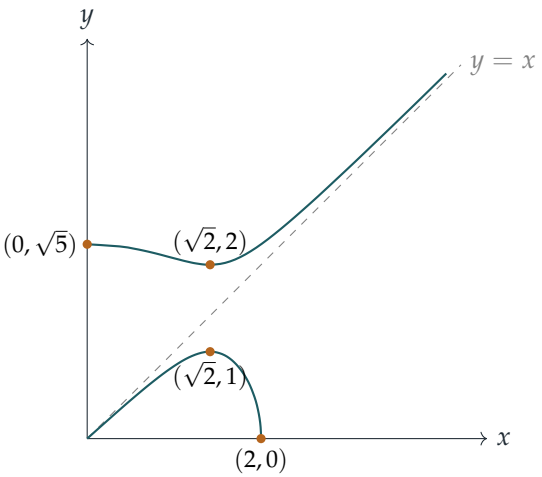
y축에 평행한 접선: 분모는 0이고 분자는 0이 아니어야 하므로 $y = 0$ 또는 $y^2 = \frac{5}{2}$이다. 그런데 $\sqrt{5/2} \approx 1.58$은 1과 2 사이에 엄격하게 놓이므로 (a)에 의해 제외된다. $y = 0$이면 $x^4 = 4x^2$이므로 $x = 0$(다시 원점이며, 위와 같은 이유로 제외된다) 또는 $x = 2$이다. $(2,0)$에서 분자는 $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \neq 0$이다. 따라서 이러한 점은 $(2,0)$뿐이다.

$x \geq 0, y \geq 0$에서의 개형 $x^2 = 2 \pm \sqrt{D}$를 이용하면 곡선은 두 부분으로 이루어진다.

- **$0 \leq y \leq 1$에서의 고리.** 근 $2 - \sqrt{D}$는 0($y = 0$일 때)에서 2($y = 1$일 때)까지 증가하고,

$2+\sqrt{D}$는 4에서 2까지 감소한다. 따라서 곡선은 기울기 $2/\sqrt{5}$로 원점을 떠나 $(\sqrt{2},1)$에서 극대에 이른 뒤, 내려와서 $(2,0)$에서 x축과 수직으로 만난다.

- **$y \geq 2$에서의 날개.** $2 \leq y \leq \sqrt{5}$일 때 근 $2-\sqrt{D}$는 2에서 0까지 감소하고, $y=\sqrt{5}$를 넘어서면 음수가 되므로 x^2의 값으로 유효하지 않다. 근 $2+\sqrt{D}$는 2에서 한없이 증가한다. 따라서 이 가지는 수평 접선을 가지고 $(0,\sqrt{5})$에서 시작하여 $(\sqrt{2},2)$에서 극소까지 내려간 뒤, 다시 올라가며 위쪽에서 $y=x$에 다가간다.

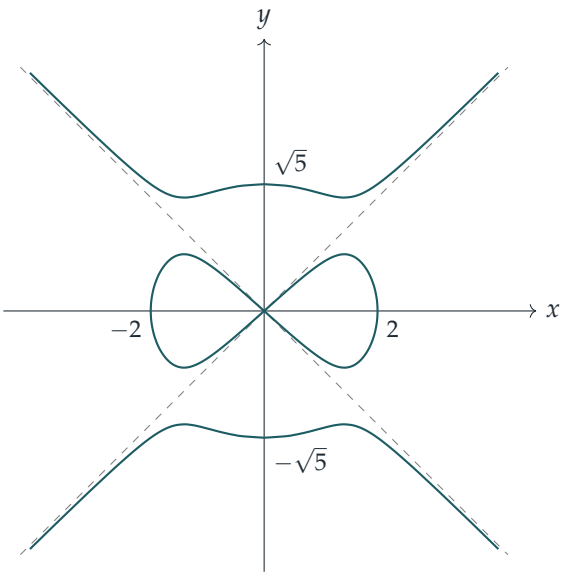


소문항 (iii)

방정식에는 x^2과 y^2만 들어 있으므로, 곡선은 y축에 대하여 대칭(x를 $-x$로 바꾼다)이고 x축에 대하여 대칭(y를 $-y$로 바꾼다)이다. 사분면 하나의 곡선을 두 축에 대하여 대칭이동하면 다음과 같다.

- 고리는 $x=-2$와 $x=2$ 사이에서 $|y| \leq 1$인 8자 모양이 된다. 두 고리는 직선 $y=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}x$를 따라 원점에서 교차하며, $(\pm\sqrt{2},\pm1)$에서 극점을 가진다.
- 날개는 $y \geq 2$인 가지와 $y \leq -2$인 가지, 두 개의 가지가 된다. 각 가지는 $(0,\pm\sqrt{5})$에서 극대 또는 극소를 가지고 $(\pm\sqrt{2},\pm2)$에서 극점을 가지며, 둘 다 바깥쪽에서 점근선 $y=\pm x$에 다가간다.

곡선의 어떤 부분도 띠 영역 $1<|y|<2$에 놓이지 않는다.



검산

- 표시한 각 점은 방정식을 만족한다. 예를 들어 $(\sqrt{2}, 2)$에서는 양변이 모두 -4이고, $(0, \sqrt{5})$에서는 양변이 모두 0이다.
- 점 $(1, 1.5)$는 금지된 띠 영역 안에 있다. 이 점에서 좌변은 $2.25 \times (-2.75) \approx -6.19$인데, 우변 $x^2(x^2-4)$는 결코 -4보다 작아질 수 없다($x^2 = 2$일 때가 최솟값이다). 이것이 판별식 논증을 축소해서 보여 주는 예이다.
- 날개 위의 $y = 100$에서 공식은 $x^2 = 2 + \sqrt{(10^4-1)(10^4-4)}$를 준다. 이때 $4x(y-x) \approx 1.0002$이므로 $y - x \approx \frac{1}{4x}$와 일치한다. 원점 근처에서 고리 위의 비 y/x는 $0.8944 \approx 2/\sqrt{5}$로 수렴한다.

흔한 실수

- $(0,0)$을 수평(또는 수직) 접선을 가지는 점으로 포함하는 것. 이 점에서 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$는 $0/0$이고, 실제 기울기는 (b)에서 얻는다.
- 고리가 $y = x$를 따라 원점을 떠나도록 그리거나, 날개가 $y = x$를 가로지르도록 그리는 것. 고리는 기울기 $2/\sqrt{5} < 1$로 출발하며, 날개는 항상 $y = x$보다 엄격하게 위에 있다.
- 조건 $x^2 \geq 0$을 잊는 것. 이 조건 때문에 안쪽 근은 $y = \sqrt{5}$에서 끊긴다.

STEP 너머

악마의 곡선은 **대수 곡선**(*algebraic curve*), 즉 다항식 $F(x,y)$의 영점 집합이다. 원점은 두 편도함수(partial derivative) F_x와 F_y가 모두 0이 되는 **특이점**(*singular point*)이다. 그 점에서의 접선은 F의 차수가 가장 낮은 항으로부터 얻어지는데, 이것이 바로 (b)에서 한 일이다. 또한 차수가 가장 높은 항은 점근선의 방향을 알려 준다. 대학에서는 이러한 아이디어가 음함수 정리(implicit function theorem)와 대수기하학(algebraic geometry)에서 다시 등장한다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*에는 꼼꼼한 해설이 달린 STEP 스타일의 곡선 그리기 문제가 더 실려 있다.

풀이

STEP III 2019, 문제 8

순수수학 • 벡터와 3차원 기하

STEP III 2019, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

핵심 아이디어

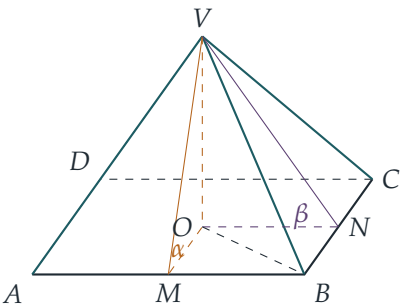
각뿔(pyramid)에 좌표를 설정한다. 각 옆면은 수평인 밑면의 모서리를 하나씩 포함하므로, 그 법선(normal)은 그 모서리에 수직이다. 따라서 법선은 연직 평면 안에 놓이게 되고, 그 평면에서 옆면과 밑면 사이의 각을 바로 읽어 낼 수 있다. 그다음 두 옆면 사이의 각은 법선의 내적(dot product)에서 얻어지며, 나머지는 신중한 삼각함수 계산과 산술-기하 평균 부등식(AM–GM)을 한 번 쓰는 것으로 충분하다.

풀이

밑면의 중심을 원점 O로 하고, $\mathbf{i}$는 AB 방향, $\mathbf{j}$는 BC 방향, $\mathbf{k}$는 위쪽 방향으로 잡는다. 다음과 같이 놓는다.

$$A=(-a,-b,0),\quad B=(a,-b,0),\quad C=(a,b,0),\quad D=(-a,b,0),\quad V=(0,0,h),$$

여기서 $a,b,h>0$이다.



$M=(0,-b,0)$을 AB의 중점, $N=(a,0,0)$을 BC의 중점이라 하자. $VA=VB$이므로 직선

VM은 면 AVB 위에 있고 AB에 수직이다. 밑면 위의 OM도 마찬가지이다. 따라서 옆면과 밑면 사이의 각은 각 VMO이고,

$$\tan\alpha = \frac{h}{b}, \qquad \text{이며, 마찬가지로} \qquad \tan\beta = \frac{h}{a}.$$

소문항 (i)

면 AVB는 방향 $\overrightarrow{AB} \parallel \mathbf{i}$와 $\overrightarrow{MV} = b\,\mathbf{j} + h\,\mathbf{k}$를 포함한다. 법선 하나는 다음과 같다.

$$\mathbf{i} \times (b\,\mathbf{j} + h\,\mathbf{k}) = -h\,\mathbf{j} + b\,\mathbf{k}.$$

이를 길이 $\sqrt{h^2+b^2}$로 나누고 $\tan\alpha = h/b$를 이용하면 단위 법선(unit normal)을 얻는다.

$$\mathbf{n}_1 = -\sin\alpha\,\mathbf{j} + \cos\alpha\,\mathbf{k}.$$

$\mathbf{j}$ 성분이 음수이므로 이 법선은 각뿔의 바깥쪽을 향한다(면 AVB는 $y<0$ 쪽에 있다).

정확히 같은 방법으로, 면 BVC는 $\mathbf{j}$와 $\overrightarrow{NV} = -a\,\mathbf{i} + h\,\mathbf{k}$를 포함하고, 바깥쪽 단위 법선은 다음과 같다.

$$\mathbf{n}_2 = \sin\beta\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{k}.$$

따라서

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = \cos\alpha\cos\beta.$$

생각해 보기 법선 사이의 각은 두 면 사이의 각인가, 아니면 그 보각(supplement)인가?

공통 모서리 VB에 수직인 단면을 살펴보자. 두 면은 내각 $\pi-\theta$로 만나는 두 직선으로 나타나고, 각 바깥쪽 법선은 자기 직선에 수직이며 입체에서 멀어지는 방향을 향한다. 한 면을 내각만큼 돌려 다른 면에 겹치면 바깥쪽 법선도 같은 각만큼 돌아가지만, 단면에서 두 법선은 모두 **바깥쪽**을 향하므로 둘이 이루는 각은 $\pi-(\pi-\theta)=\theta$이다. (정육면체를 떠올려 보자. 면은 $\frac{\pi}{2}$로 만나고 법선도 $\frac{\pi}{2}$를 이룬다. 각뿔을 납작하게 하면 면 사이의 각은 π에 가까워지고 법선 사이의 각은 0에 가까워진다.) 따라서

$$\cos\theta = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = \cos\alpha\cos\beta,$$

이고, 이것이 보이려던 결과이다. $0 < \cos\alpha\cos\beta < 1$이므로 θ는 예각(acute angle)이며, 이는 두 면이 둔각으로 만난다는 사실과 들어맞는다.

소문항 (ii)

V에서 내린 수선의 발은 O이므로, BV와 밑면 사이의 각은 각 VBO이고

$$\cot\phi = \frac{OB}{h} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{h}.$$

따라서

$$\cot^2\phi = \frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{h^2} = \cot^2\beta + \cot^2\alpha,$$

이다. 여기서 $\cot\beta = a/h$와 $\cot\alpha = b/h$를 이용하였다. 이것이 첫 번째 결과이다.

두 번째 결과를 위해 $p = \cos^2\alpha$, $q = \cos^2\beta$로 놓으면, 소문항 (i)에 의해 $\cos^2\theta = pq$이다. 그러면

$$\cot^2\phi = \frac{p}{1-p} + \frac{q}{1-q} = \frac{p+q-2pq}{(1-p)(1-q)}.$$

$\cos^2\phi = \dfrac{\cot^2\phi}{1+\cot^2\phi}$이므로 다음이 필요하다.

$$1+\cot^2\phi = \frac{(1-p)(1-q)+p+q-2pq}{(1-p)(1-q)} = \frac{1-pq}{(1-p)(1-q)},$$

이제 나누면

$$\cos^2\phi = \frac{p+q-2pq}{1-pq} = \frac{\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos^2\theta}{1-\cos^2\theta}.$$

($\cos\theta < 1$이므로 분모는 양수이다.)

이제 $\cos\alpha$와 $\cos\beta$는 양수이므로 산술-기하 평균 부등식에 의해

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta \;\geq\; 2\cos\alpha\cos\beta = 2\cos\theta,$$

이고, $1-\cos^2\theta > 0$이므로

$$\cos^2\phi \;\geq\; \frac{2\cos\theta - 2\cos^2\theta}{1-\cos^2\theta}.$$

생각해 보기 이 하한은 ϕ와 θ에 대해 무엇을 알려 주는가?

이를 간단히 하여 $\cos^2\theta$와 비교해 보자. 양의 인수 $1-\cos\theta$를 약분하면

$$\frac{2\cos\theta(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)} = \frac{2\cos\theta}{1+\cos\theta}.$$

$c = \cos\theta \in (0,1)$로 놓으면

$$\frac{2c}{1+c} - c^2 = \frac{c\,(2-c-c^2)}{1+c} = \frac{c\,(1-c)(2+c)}{1+c} > 0.$$

따라서 $\cos^2\phi \geq \dfrac{2c}{1+c} > \cos^2\theta$이다. ϕ와 θ는 모두 $(0, \frac{\pi}{2})$에 있고, 이 구간에서 코사인은 양수이며 감소하므로 $\cos\phi > \cos\theta$에서 $\phi < \theta$를 얻는다.

검산

- 밑면이 정사각형이고 h가 한 변의 절반인 경우($a = b = h$): $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$이므로 $\cos\theta = \frac{1}{2}$이고 $\theta = 60°$이다. 직접 계산하면 $\cot\phi = \sqrt{2}$이므로 $\cot^2\phi = 2 = 1 + 1$이고 $\phi \approx 35.26° < 60°$이다. 또한 $\cos^2\phi = \frac{2}{3}$이며, 이는 $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2})/(1 - \frac{1}{4}) = \frac{2}{3}$과 일치한다.
- 무작위로 만든 10^5개의 각뿔에 대해 VB를 지나는 단면에서 두 면 사이의 각을 직접 측정하는 컴퓨터 검사를 한 결과, $\cos\theta = \cos\alpha\cos\beta$ 및 ϕ에 대한 두 공식과 모두 일치했고, 언제나 $\phi < \theta$였다.

흔한 실수

- 한 면에는 안쪽 법선을, 다른 면에는 바깥쪽 법선을 잡는 실수: 그러면 내적의 부호가 반대가 되어 $\cos(\pi - \theta)$를 얻게 된다.
- α를 빗높이(slant height) VM이 아니라 모서리 VA를 따라 재는 실수: 두 평면 사이의 각은 두 평면의 교선에 수직인 방향으로 재야 한다.
- $\cos^2\phi \geq \dfrac{2\cos\theta}{1+\cos\theta}$에서 멈추고, 이 값이 $\cos^2\theta$보다 크다는 것을 보이지 않는 실수.

STEP 너머

두 평면 사이의 각은 (보각을 취하는 차이를 제외하면) 법선 사이의 각과 같으며, 이는 다변수 미적분학(multivariable calculus)과 미분기하학(differential geometry)에서 법선을 이용해 곡면을 기술하는 방법의 출발점이다. 항등식 $\cos\theta = \cos\alpha\cos\beta$는 구면 피타고라스 정리(spherical Pythagoras theorem)가 모습을 바꾼 것이기도 하다. 세 법선 $\mathbf{k}$, $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$가 직각 구면삼각형을 이루기 때문이다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 내적과 외적(cross product)에 대한 감각을 깊게 다지기에 좋은 책이다.

풀이

STEP III 2019, 문제 9

역학 • 움직이는 반구 위의 입자

STEP III 2019, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

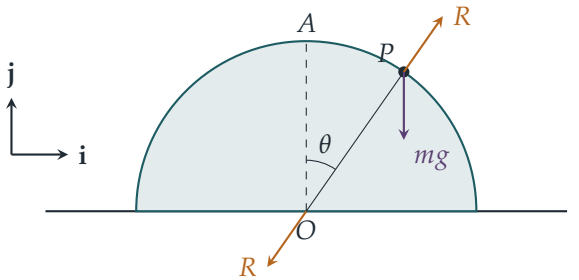
www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

핵심 아이디어

두 면이 모두 매끄러우므로(smooth) 계(입자와 반구)에 작용하는 외력에는 수평 성분이 없다. 따라서 수평 운동량(horizontal momentum)이 보존되며(conserved), 이것이 반구의 속력과 입자의 각속력(angular speed)을 이어 준다. 중력 외에는 일을 하는 힘이 없으므로 에너지도 보존되고, 이 두 법칙으로 (ii)를 얻는다. 입자가 면에서 떨어지는지를 판정하는 깔끔한 기준은 수직항력(normal reaction)이 0이 되는 것이다. 문제에서 제시한 벡터는 성분을 취할 때 미지의 θ가 사라지도록 고른 것이다.

풀이

모형: P는 입자(particle)이고 반구(hemisphere)는 강체(rigid body)이며 모든 접촉면은 매끄럽다. 둘이 닿아 있는 동안 P와 반구 사이에 작용하는 힘은 OP 방향의 수직항력 R뿐이고, 탁자는 반구를 연직 방향으로 민다.



반구에 작용하는 반작용(알아보기 쉽도록 O에 그렸다)은 P에 작용하는 힘과 크기가 같고 방향이 반대이다.

소문항 (i)

시각 t에서 중심 O는 $-s\,\mathbf{i}$로 이동해 있고, P는 O로부터 $\sin\theta\,\mathbf{i}+\cos\theta\,\mathbf{j}$ 방향으로 거리 a만큼 떨어져 있다. 따라서

$$\mathbf{r}=(a\sin\theta-s)\,\mathbf{i}+a\cos\theta\,\mathbf{j},$$

이고, 이를 t에 대하여 미분하면($\sin\theta$와 $\cos\theta$에 연쇄 법칙(chain rule)을 적용한다)

$$\dot{\mathbf{r}}=(a\dot\theta\cos\theta-\dot s)\,\mathbf{i}-a\dot\theta\sin\theta\,\mathbf{j},$$

를 얻으며, 이것이 보이려던 식이다.

계에 작용하는 외력은 두 무게와 탁자의 반작용으로 모두 연직 방향이므로, 전체 수평 운동량은 처음 값인 0으로 유지된다(처음의 작은 변위로 생기는 속력은 무시할 수 있다고 본다). 반구의 속도는 $-\dot s\,\mathbf{i}$이므로

$$m(a\dot\theta\cos\theta-\dot s)-M\dot s=0\quad\Longrightarrow\quad \dot s=\frac{m}{m+M}\,a\dot\theta\cos\theta=(1-k)\,a\dot\theta\cos\theta,$$

이다. 여기서 $1-k=\dfrac{m}{m+M}$이기 때문이다. 이를 $\dot{\mathbf{r}}$의 $\mathbf{i}$ 성분에 대입하면

$$a\dot\theta\cos\theta-(1-k)a\dot\theta\cos\theta=k\,a\dot\theta\cos\theta,\qquad \text{따라서}\qquad \dot{\mathbf{r}}=a\dot\theta\,(k\cos\theta\,\mathbf{i}-\sin\theta\,\mathbf{j}).$$

소문항 (ii)

반작용들이 하는 알짜 일은 없다. 탁자의 반작용은 반구의 운동 방향에 수직이고, P와 반구 사이에 작용하는 한 쌍의 힘 $\pm R$은 P가 면 위에 머무르므로 전체 일이 0이다(둘의 상대 속도는 면을 따르는 방향이어서 R에 수직이다). 따라서 운동 에너지(kinetic energy)와 위치 에너지(potential energy)의 합이 보존된다. P는 $a(1-\cos\theta)$만큼 내려왔고 처음에는 모든 것이 (사실상) 정지해 있었으므로

$$\tfrac12 ma^2\dot\theta^2\left(k^2\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)+\tfrac12 M\dot s^2=mga(1-\cos\theta).$$

이다. (i)에 의해 $M\dot s^2=M(1-k)^2a^2\dot\theta^2\cos^2\theta$이다. 그러면 $a^2\dot\theta^2\cos^2\theta$의 전체 계수는

$$mk^2+M(1-k)^2=\frac{mM^2+Mm^2}{(m+M)^2}=\frac{mM}{m+M}=mk.$$

이다. 그러므로 $\tfrac12 ma^2\dot\theta^2\left(k\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)=mga(1-\cos\theta)$이고, 양변을 $\tfrac12 ma$로 나누면

$$a\dot\theta^2\left(k\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)=2g(1-\cos\theta).$$

이다.

소문항 (iii)

$\mathbf{u} = \sin\theta\,\mathbf{i} + k\cos\theta\,\mathbf{j}$라 하자. (i)의 마지막 결과를 미분하면

$$\ddot{\mathbf{r}} = a\ddot{\theta}\,(k\cos\theta\,\mathbf{i} - \sin\theta\,\mathbf{j}) - a\dot{\theta}^2\,(k\sin\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}).$$

이다. $k\cos\theta\sin\theta - \sin\theta\,k\cos\theta = 0$이므로 첫 번째 괄호는 $\mathbf{u}$에 수직이다. 따라서

$$\ddot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{u} = -a\dot{\theta}^2\left(k\sin^2\theta + k\cos^2\theta\right) = -k\,a\dot{\theta}^2.$$

이다.

> ? **생각해 보기** 왜 하필 이 벡터가 유용할까?

이 벡터는 우리가 아무것도 모르는 $\ddot{\theta}$ 항을 없애고, (ii)에서 구한 $\dot{\theta}^2$만 남겨 준다. 이제 P에 대한 뉴턴의 제2법칙(Newton's second law)과 비교하자.

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -mg\,\mathbf{j} + R(\sin\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}).$$

$\mathbf{u}$ 방향 성분을 취하여 위의 결과와 같다고 놓으면

$$-mk\,a\dot{\theta}^2 = -mgk\cos\theta + R\left(\sin^2\theta + k\cos^2\theta\right),$$

이므로

$$R\left(\sin^2\theta + k\cos^2\theta\right) = mk\left(g\cos\theta - a\dot{\theta}^2\right).$$

이다. 입자는 R이 0으로 떨어질 때 반구에서 떨어진다. $k > 0$이므로 $\theta = \alpha$에서

$$a\dot{\theta}^2 = g\cos\alpha.$$

를 얻는다.

삼차방정식. $c = \cos\alpha$로 놓고, $\sin^2\alpha = 1 - c^2$을 이용하여 $\theta = \alpha$에서 (ii)를 쓰면

$$gc\left(kc^2 + 1 - c^2\right) = 2g(1-c) \quad\Longrightarrow\quad (1-k)\,c^3 - 3c + 2 = 0.$$

이다. $f(x) = (1-k)x^3 - 3x + 2$라 하자. m과 M이 모두 양수이므로 $0 < 1-k < 1$이다.

- $-1 \le x \le 1$에서 $f'(x) = 3\left((1-k)x^2 - 1\right) < 0$이므로, 이 구간에서 f는 순감소(strictly decreasing)하고 $[-1,1]$에서 근을 많아야 하나 가진다.
- $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27}(1-k) - 2 + 2 = \frac{8}{27}(1-k) > 0$이고 $f(1) = -k < 0$이다.

따라서 $[-1,1]$에 있는 유일한 근은 $\frac{2}{3}$과 1 사이(양 끝 제외)에 있다. $\cos\alpha$는 $[-1,1]$에 있어야 하므로 바로 이 근이며,

$$\cos\alpha > \tfrac{2}{3}.$$

이다. (이는 R에 대한 식과도 들어맞는다. (ii)를 대입하면 $g\cos\theta - a\dot{\theta}^2$의 부호가 $-f(\cos\theta)$의 부호와 같음을 알 수 있는데, 이 값은 $\theta = 0$에서 양수이고 이 근에서 처음으로 0이 된다. 따라서 P는 실제로 그때까지 접촉을 유지한다.)

검산

- $M \to \infty$이면 $k \to 1$이 되어 반구는 움직이지 않고, 삼차방정식은 $-3c + 2 = 0$이 된다. 이는 고정된 구에서 미끄러져 떨어지는 입자에 대한 익숙한 결과 $\cos\alpha = \frac{2}{3}$이다. 반구가 움직이면 입자는 더 일찍, 즉 더 큰 $\cos\alpha$에서 떨어진다.
- 두 질량이 같으면 $1 - k = \frac{1}{2}$이고, 삼차방정식 $c^3 - 6c + 4 = 0$은 $(c-2)(c^2 + 2c - 2) = 0$으로 인수분해되어 $\cos\alpha = \sqrt{3} - 1 \approx 0.732$를 얻는다. 이 값은 $\frac{2}{3}$보다 크다.
- 여러 질량비에 대하여 컴퓨터로 전체 운동을 단계별 수치 시뮬레이션해 보니, 운동하는 동안 (i)과 (ii)의 관계식이 성립함이 확인되었고, $m = M$일 때 $\cos\theta \approx 0.732$에서 반작용이 0이 되어 삼차방정식의 결과와 일치하였다.

흔한 실수

- 고정된 구에 대한 조건 $a\dot{\theta}^2 = g\cos\theta$를 근거 없이 사용하는 것. 여기서는 반구가 가속하므로 입자의 가속도는 단순히 고정점을 중심으로 하는 원운동의 가속도가 아니다. 떨어지는 순간에 이 식이 마침 성립하는 것은 오직 $R = 0$이면 그 순간 반구의 수평 가속도가 0이기 때문이다.
- 에너지 방정식에서 반구의 운동 에너지 $\frac{1}{2}M\dot{s}^2$을 빠뜨리는 것.
- $[-1, 1]$에 다른 근이 있을 가능성을 배제하지 않고, $\frac{2}{3}$과 1 사이에 근이 있다는 것만 보이는 것.

STEP 너머

이것은 자유도(degree of freedom)가 2인 계이며, 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)으로 체계적으로 다룰 수 있다. 운동 에너지와 위치 에너지를 θ와 s로 나타내면, s가 라그랑지안(Lagrangian)에 나타나지 않으므로 수평 운동량 보존이 저절로 나온다(이러한 좌표를 "무시 가능한(ignorable)" 좌표라 하며, 뇌터 정리(Noether's theorem)에 의해 대칭성과 연결된다). R과 같은 구속력(constraint force)은 여기서 한 것과 똑같이 나중에 구한다. 먼저 뉴턴 역학의 직관을 기르려면 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)가 좋은 출발점이다.

풀이

STEP III 2019, 문제 10

역학 • 비스듬한 충돌

STEP III 2019, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

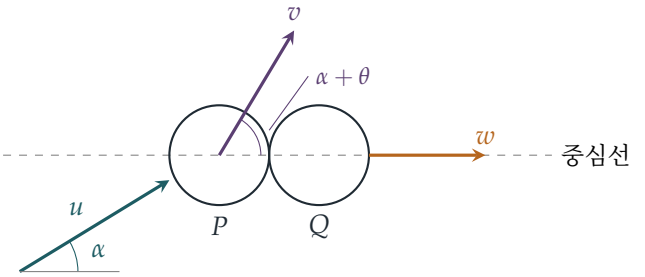
www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

핵심 아이디어

모든 속도를 중심선(line of centres) 방향 성분과 그에 수직인 성분으로 나눈다. 두 구가 매끄러우므로 충격량(impulse)은 중심선 방향으로만 작용한다. 따라서 P의 수직 성분은 변하지 않고, Q는 그 직선을 따라 움직이기 시작한다. 그러면 운동량 보존(conservation of momentum)과 뉴턴의 실험 법칙(Newton's experimental law)을 1차원 충돌에서와 똑같이 중심선 방향으로 적용할 수 있다. 나머지는 삼각함수 계산이다.

풀이

P와 Q를 매끄러운 수평 탁자 위에 놓인, 질량이 m으로 같은 매끄러운 구로 모형화한다. 충돌 순간의 중심선을 P에서 Q를 향하는 x축 방향으로 잡고, 운동 평면에서 이에 수직이며 P의 처음 속도가 있는 쪽을 y축 방향으로 잡는다.



소문항 (i)

충돌 전 P의 속도는 중심선 방향 성분이 $u\cos\alpha$, 그에 수직인 성분이 $u\sin\alpha$이다.

매끄러운 두 구 사이의 접촉력은 중심선 방향으로 작용한다. 따라서 그 직선에 수직인 방향으로는 P에 충격량이 가해지지 않고, P의 수직 성분은 변하지 않는다. 또 Q는 정지 상태에서 출발하여 중심선 방향으로만 충격량을 받으므로, 그 직선을 따라 속력 w로 움직이기 시작한다.

생각해 보기 P의 새 운동 방향이 중심선과 이루는 각이 왜 $\alpha-\theta$가 아니라 $\alpha+\theta$일까?

P가 받는 충격량은 중심선을 따라 뒤쪽을 향한다. 이 충격량은 P의 x성분을 $u\cos\alpha$에서 아래에서 구할 값 v_x로 줄이고, y성분은 그대로 둔다. 따라서 속도는 중심선에서 멀어지는 쪽으로 돌아가고, 중심선과 이루는 각은 α에서 $\alpha+\theta$로 커진다. $e<1$일 때 $v_x>0$임을 아래에서 확인할 것이므로 $0<\alpha+\theta<\frac{\pi}{2}$이다.

충돌 후 P의 속도는 중심선 방향 성분이 $v\cos(\alpha+\theta)$, 수직 성분이 $v\sin(\alpha+\theta)$이다. 수직 성분을 같다고 놓으면

$$u\sin\alpha = v\sin(\alpha+\theta),$$

이고, 이것이 증명할 식이다.

중심선 방향으로 운동량 보존을 적용하면(두 질량이 같으므로 m을 약분한다)

$$u\cos\alpha = v\cos(\alpha+\theta)+w. \tag{1}$$

첫 번째 결과에서 얻은 $u=v\sin(\alpha+\theta)/\sin\alpha$를 대입하면

$$\begin{aligned} w &= \frac{v\sin(\alpha+\theta)\cos\alpha}{\sin\alpha} - v\cos(\alpha+\theta) \\ &= \frac{v\big[\sin(\alpha+\theta)\cos\alpha-\cos(\alpha+\theta)\sin\alpha\big]}{\sin\alpha} = \frac{v\sin\theta}{\sin\alpha}, \end{aligned}$$

이다. 여기서 $\sin\big((\alpha+\theta)-\alpha\big)$의 전개를 이용하였다. 따라서

$$w=\frac{v\sin\theta}{\sin\alpha}.$$

이 결과는 깔끔하게 해석할 수 있다. 벡터로 운동량 보존을 쓰면 $\mathbf{u}=\mathbf{v}+\mathbf{w}$이고, 이를 $\mathbf{u}$에 수직인 방향으로 분해하면 $0=v\sin\theta-w\sin\alpha$를 얻는다.

소문항 (ii)

중심선 방향의 뉴턴의 실험 법칙에 따르면 멀어지는 속력은 가까워지는 속력의 e배이다.

$$w-v\cos(\alpha+\theta)=e\,u\cos\alpha. \tag{2}$$

소문항 (i)에서 얻은 $w=v\sin\theta/\sin\alpha$와 $u=v\sin(\alpha+\theta)/\sin\alpha$를 대입하면

$$\frac{v\sin\theta}{\sin\alpha}-v\cos(\alpha+\theta)=\frac{e\,v\sin(\alpha+\theta)\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

양변에 $\sin\alpha/v$를 곱하고($v>0$이고 $\sin\alpha\neq 0$이므로 가능하다) 정리하면

$$\sin\theta=\cos(\theta+\alpha)\sin\alpha+e\sin(\theta+\alpha)\cos\alpha,$$

이고, 이것이 증명할 식이다.

$\tan\theta$를 구하기 위해 두 합의 각을 모두 전개한다.

$$\sin\theta=(\cos\theta\cos\alpha-\sin\theta\sin\alpha)\sin\alpha+e(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha)\cos\alpha.$$

$\sin\theta$가 들어 있는 항을 좌변으로 모으면

$$\sin\theta\left(1+\sin^2\alpha-e\cos^2\alpha\right)=(1+e)\cos\theta\sin\alpha\cos\alpha.$$

양변을 $\cos\theta\cos^2\alpha$로 나누고 $t=\tan\alpha$로 놓은 뒤 $1/\cos^2\alpha=1+t^2$를 이용하면

$$\tan\theta\left(1+t^2+t^2-e\right)=(1+e)\,t,\qquad \text{따라서}\qquad \tan\theta=\frac{(1+e)\tan\alpha}{1-e+2\tan^2\alpha}.$$

$e<1$이므로 분모는 양수이다. 따라서 $\tan\theta>0$이고, θ는 실제로 예각만큼의 방향 변화이다.

$\tan\theta$의 최댓값

α가 예각 전체를 움직이면 $t=\tan\alpha$는 $(0,\infty)$의 모든 값을 갖는다. $t>0$이므로 분자와 분모를 t로 나눌 수 있다.

$$\tan\theta=\frac{1+e}{\dfrac{1-e}{t}+2t}.$$

생각해 보기 미분을 쓰지 않고 이 값을 최대로 만들려면 어떻게 해야 할까?

분모를 가능한 한 작게 만들면 된다. $(1-e)/t$와 $2t$가 모두 양수이므로 산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)에 의해

$$\frac{1-e}{t}+2t\geq 2\sqrt{\frac{1-e}{t}\cdot 2t}=2\sqrt{2(1-e)},$$

이고, 등호는 정확히 $(1-e)/t=2t$일 때, 즉 $\tan\alpha=\sqrt{(1-e)/2}$일 때 성립한다. 이는 실제로 존재하는 예각이므로 최솟값에 도달한다. 따라서 $\tan\theta$의 최댓값은

$$\tan\theta_{\max}=\frac{1+e}{2\sqrt{2(1-e)}}.$$

(t에 대해 미분해도 같은 정상점 $2t^2=1-e$를 얻는다.)

검산

- 탄성 충돌에 가까운 극한 $e \to 1$: 두 구는 중심선 방향 성분을 서로 맞바꾸므로 P에는 $u\sin\alpha$만 남고, P는 중심선에 수직인 방향으로 움직인다. 그러면 $\alpha + \theta = \frac{\pi}{2}$이고 $\tan\theta = \cot\alpha$이다. 공식은 $\tan\theta = 2t/(2t^2) = 1/t$를 주므로 일치한다. $\alpha \to 0$일 때 $\theta \to \frac{\pi}{2}$이므로 최댓값이 한없이 커지는 것도 당연하다.
- $e = \frac{1}{2}$이면 최댓값은 $\frac{3/2}{2\sqrt{1}} = \frac{3}{4}$이고, $\tan\alpha = \frac{1}{2}$(약 26.6°)에서 도달한다. α를 촘촘하게 바꿔 가며 계산해 보면 0.75가 확인된다. 무작위 충돌을 많이 만들어 본 컴퓨터 시뮬레이션도 이 문제의 네 가지 결과를 모두 재현하였다.
- 작은 α(거의 정면충돌): $\tan\theta \approx \frac{1+e}{1-e}\,\alpha \to 0$이므로, 예상대로 정면충돌에서는 방향이 바뀌지 않는다.

흔한 실수

- 뉴턴의 실험 법칙을 중심선 방향 성분이 아니라 속력 전체에 적용하는 것. 반발(restitution)은 충격량의 방향으로만 작용한다.
- P의 새 각을 $\alpha - \theta$로 쓰는 것. 충격량이 중심선 방향 성분의 일부를 없애므로 P는 그 직선에서 멀어지는 쪽으로 돈다.
- $1 - e + 2\tan^2\alpha$를 양수로 만드는 것이 $e < 1$이라는 조건이라는 점, 그리고 $\tan\alpha$가 $(0, \infty)$ 전체를 움직이므로 산술-기하 평균 부등식의 등호가 실제로 성립한다는 점을 잊는 것.

STEP 너머

매끄러운 구의 비스듬한 충돌은 산란(scattering)의 가장 간단한 예이다. 이 문제에서는 같은 두 보존 법칙을 한 직선의 방향과 그에 수직인 방향으로 적용하는데, 이 아이디어는 입자 물리학과 기체 분자 운동론으로까지 확장된다. 질량이 같은 두 물체가 탄성 충돌하면, 충돌 후 두 속도가 직각을 이룬다는 유명한 결과가 나온다. 질량중심 좌표계에서는 모든 충돌이 상대 속도를 회전시키기만(그리고 이 문제에서는 줄이기도) 하는데, 이렇게 보면 이 모든 결과를 더 매끄럽게 이해할 수 있다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 관점에서 충돌을 다룬다.

풀이

STEP III 2019, 문제 11

확률과 통계 • 푸아송 솎아내기

STEP III 2019, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

핵심 아이디어

모든 것은 도착한 손님의 수, 또는 모래를 가져간 손님의 수에 대해 조건을 걸고(conditioning) 푸아송 급수를 더하는 데서 출발한다. 소문항 (i)은 푸아송 분포(Poisson distribution)의 고전적인 "솎아내기(thinning)"이다. 이항 확률과 푸아송 확률을 곱하면, 관찰되지 않은 전체 수에 대한 합이 하나의 지수함수로 정리된다. 모래를 가져가는 손님의 수가 푸아송 분포를 따른다는 것을 알고 나면, 소문항 (ii)와 (iii)에서는 $(1-k)^Y$의 기댓값(expectation)만 구하면 되고, 이것 역시 지수 급수 하나로 계산된다.

풀이

하루 동안 오는 손님의 수를 N이라 하면 $N \sim \mathrm{Po}(\lambda)$이고, 그중 모래를 가져가는 손님의 수를 Y라 하자. 손님들은 서로 독립적으로, 그리고 N과도 독립적으로 결정한다고 가정한다. 따라서 $N = n$이 주어지면 $Y \sim \mathrm{B}(n, p)$이다.

소문항 (i)

$y = 0, 1, 2, \ldots$에 대하여 N에 조건을 걸면($n \geq y$인 항만 기여한다) 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y = y) &= \sum_{n=y}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{(p\lambda)^y}{y!} \sum_{n=y}^{\infty} \frac{\big(\lambda(1-p)\big)^{n-y}}{(n-y)!} \qquad \text{왜냐하면} \frac{\lambda^n}{n!} \cdot \frac{n!}{y!\,(n-y)!} = \frac{\lambda^y \lambda^{n-y}}{y!\,(n-y)!} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{(p\lambda)^y}{y!} \mathrm{e}^{\lambda(1-p)} = \mathrm{e}^{-p\lambda} \frac{(p\lambda)^y}{y!},
\end{aligned}$$

여기서 $m = n - y$로 놓고 $\sum_{m\geq 0} x^m/m! = \mathrm{e}^x$를 이용하였다. 이것은 $\mathrm{Po}(p\lambda)$의 확률이므로, 요구한 대로 $Y \sim \mathrm{Po}(p\lambda)$이다.

소문항 (ii)

모래를 가져가는 손님은 각각 그때 남아 있던 양의 $1-k$만큼을 남긴다. 따라서 모래를 가져가는 손님 Y명이 지나간 뒤 남은 질량은 $S(1-k)^Y$이고, 가져간 질량은 다음과 같다.

$$T = S\big(1-(1-k)^Y\big).$$

소문항 (i)에 의하여

$$\mathrm{E}\big[(1-k)^Y\big] = \sum_{y=0}^{\infty}(1-k)^y\,\mathrm{e}^{-p\lambda}\frac{(p\lambda)^y}{y!} = \mathrm{e}^{-p\lambda}\,\mathrm{e}^{p\lambda(1-k)} = \mathrm{e}^{-kp\lambda}.$$

그러므로 기댓값의 선형성(linearity of expectation)에 의하여

$$\mathrm{E}(T) = S\big(1-\mathrm{E}[(1-k)^Y]\big) = \big(1-\mathrm{e}^{-kp\lambda}\big)S,$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

소문항 (iii)

> **생각해 보기** "모래의 k만큼의 비율"을 특정한 모래알 하나에 대한 확률로 어떻게 바꿀 수 있을까?

모래알은 매우 많고 어느 하나도 특별히 구별되지 않으므로, 누군가 남은 모래의 k만큼을 가져갈 때마다 아직 자루에 남아 있는 모래알은 이전에 일어난 일과 독립적으로 확률 k로 선택된다. (같은 말로, 황금 모래알이 어떤 몫 안에 들어 있을 확률은 그 몫이 전체 질량에서 차지하는 비율과 같다.)

점원이 황금 모래알을 가져가는 사건을 G라 하자. $Y = y$가 주어지면, 모래알이 y명의 손님을 모두 견디고 남을 확률은 $(1-k)^y$이고, 그다음 점원이 그것을 가져갈 확률은 k이다. 따라서

$$\mathrm{P}(G \mid Y = y) = k(1-k)^y,$$

이고, 소문항 (ii)에서 구한 기댓값을 이용하면

$$\mathrm{P}(G) = k\,\mathrm{E}\big[(1-k)^Y\big] = k\,\mathrm{e}^{-kp\lambda}.$$

이것은 소문항 (ii)와 맞아떨어진다. 황금 모래알이 하루를 견디고 남을 확률은 $\mathrm{e}^{-kp\lambda}$이고, 이는 정확히 남아 있는 모래 비율의 기댓값이다.

$k = 0$인 경우. 이때 $\mathrm{P}(G) = 0$이다. 이는 타당하다. $k = 0$이면 점원을 포함하여 아무도 모래를 가져가지 않으므로 모래알은 자루에 그대로 남는다.

$k \to 1$일 때의 극한. 이때 $\mathrm{P}(G) \to \mathrm{e}^{-p\lambda}$이고, 이는 $\mathrm{P}(Y=0)$이다. k가 1에 가까우면 모래를 가져가는 첫 손님이 거의 모든 모래를 가져가고, 황금 모래알도 거의 확실히 함께 가져간다. 점원은 사실상 어떤 손님도 모래를 가져가지 않은 경우에만 모래알을 얻으며, 그때 (거의) 자루 전체를 가져간다.

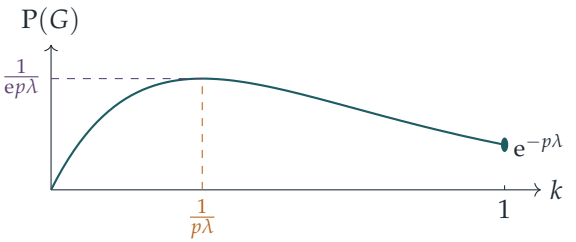
최댓값 구하기. $0 \le k < 1$에 대하여 $\mu = p\lambda$, $f(k) = k\,\mathrm{e}^{-\mu k}$라 하자. 그러면

$$f'(k) = \mathrm{e}^{-\mu k}(1-\mu k),$$

이고, 이는 $k < 1/\mu$이면 양수, $k > 1/\mu$이면 음수이다. $\mu > 1$이므로 점 $k = 1/\mu$는 $(0,1)$ 안에 있다. 따라서 f는 이 점까지 증가하다가 그 뒤로 감소하므로, 이 점에서 $[0,1)$ 위의 최댓값을 갖는다. 그러므로 확률은

$$k = \frac{1}{p\lambda},$$

일 때 최대이고, 최대 확률은 $\dfrac{1}{\mathrm{e}\,p\lambda}$이다. ($p\lambda \le 1$이면 f는 $[0,1)$ 전체에서 증가하므로 최댓값이 없고, $k \to 1$일 때의 상한(supremum) $\mathrm{e}^{-p\lambda}$만 있다. 문제에서 $p\lambda > 1$로 제한한 이유가 이것이다.)



그래프는 $p\lambda = 3$인 경우의 $\mathrm{P}(G) = k\,\mathrm{e}^{-kp\lambda}$를 나타낸다.

검산

- 소문항 (i)은 당연한 시험을 통과한다. $p = 1$이면 $\mathrm{Po}(\lambda)$가 다시 나오고, $p = 0$이면 확실히 $Y = 0$이다.
- 소문항 (ii)에서 $k = 0$이면 가져간 모래가 0이고, $\lambda \to \infty$이면 가져간 질량의 기댓값은 마땅히 그래야 하듯 S로 수렴한다.
- $\lambda = 3$, $p = 0.6$, $k = 0.4$이면 공식은 $\mathrm{P}(G) = 0.4\,\mathrm{e}^{-0.72} \approx 0.1947$을 준다. 200 000일에 대한 컴퓨터 모의실험에서는 0.1953이 나왔다.
- $p\lambda = 3$일 때, 촘촘한 격자에서 $k\,\mathrm{e}^{-3k}$의 가장 큰 값은 $k \approx 0.3333$에서 나타나며 그 값은 $0.1226 \approx 1/(3\mathrm{e})$이다.

흔한 실수

- 각 손님이 **처음** 모래의 k만큼을 가져가는 것처럼 가져간 모래를 kSY로 쓰는 것. 각 손님은 **남은** 모래의 일부를 가져가므로, 가져가는 양은 등비수열(geometric sequence)을 이룬다.
- $\mathrm{E}[(1-k)^Y]$를 $(1-k)^{\mathrm{E}(Y)} = (1-k)^{p\lambda}$로 계산하는 것. 비선형 함수의 기댓값은 기댓값의 함숫값이 아니다.
- $1/(p\lambda)$가 실제로 허용 범위 $0 \leq k < 1$ 안에 있는지 확인하지 않는 것. 바로 이 부분에서 조건 $p\lambda > 1$이 쓰인다.

STEP 너머

소문항 (i)은 푸아송 분포의 솎아내기 성질이다. 소문항 (ii)와 (iii)에 나타나는 기댓값 $\mathrm{E}[s^Y] = \mathrm{e}^{\mu(s-1)}$는 $\mathrm{Po}(\mu)$의 **확률생성함수**(*probability generating function*)를 $s = 1-k$에서 계산한 값이다. 생성함수를 쓰면 솎아내기는 거의 한 줄로 끝난다. $\mathrm{E}[s^N] = \mathrm{e}^{\lambda(s-1)}$이면 $\mathrm{E}[s^Y] = \mathrm{E}[(1-p+ps)^N] = \mathrm{e}^{\lambda p(s-1)}$이다. 푸아송 과정(Poisson process)의 이론에서 이것은 푸아송 과정의 점들에 독립적으로 표시를 하면 다시 푸아송 과정들을 얻는다는 명제가 된다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 생성함수와 이러한 아이디어들을 명료하게 다룬다.

풀이

STEP III 2019, 문제 12

확률과 통계 • 무작위 부분집합

> **STEP III 2019, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2019년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

이 문제는 *Beyond STEP*의 9.12 절 **무작위 부분집합**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch09/random-subsets.html

핵심 아이디어

S의 부분집합(subset)을 균등하게 무작위로(uniformly at random) 고르는 것은 정수 $1, 2, \ldots, n$을 하나씩 차례로 살피면서 각 정수마다 공정한 동전을 던져 그 정수를 넣을지 말지 정하는 것과 같다. 이 점을 알아차리면 문제의 모든 사건(event)은 각 정수에 대한 개별적인 진술이 되고, 정수들은 서로 독립(independent)으로 행동하며, 답은 하나의 작은 확률을 n제곱한 값이 된다.

풀이

부분집합의 개수 세기

S의 부분집합은 n개의 정수 각각에 대해 넣을지 뺄지를 정하면 완전히 결정된다. 각 정수마다 독립적으로 2가지 선택이 있고, 선택의 패턴이 다르면 서로 다른 부분집합이 나온다. 따라서 $\varnothing$(모두 뺀 경우)과 S(모두 넣은 경우)를 포함한 부분집합의 개수는

$$2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^n.$$

이다.

> ? **생각해 보기** 왜 정수들을 독립적인 동전 던지기로 취급해도 되는가?

A가 T 위에서 균등분포를 따른다고 하자. 2^n개의 넣기/빼기 패턴 각각이 하나의 부분집합

이므로, 각 패턴의 확률은 $2^{-n} = (\frac{1}{2})^n$이다. 이는 독립적인 공정한 동전 n개를 던질 때 특정한 패턴이 나올 확률과 정확히 같다. 따라서 사건 "$1 \in A$", "$2 \in A$", ..., "$n \in A$"는 서로 독립이고, 각각의 확률은 $\frac{1}{2}$이다. 또 $A_1, \ldots, A_m$도 서로 독립적으로 선택되므로, mn개의 사건 "$i \in A_k$"는 모두 독립이고 각각의 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

소문항 (i)

2^n개의 부분집합 중 정확히 절반이 1을 포함한다(1을 포함하는 각 부분집합을, 그 부분집합에서 1을 제거한 부분집합과 짝지으면 된다). 따라서

$$\mathrm{P}(1 \in A_1) = \tfrac{1}{2}.$$

이다.

소문항 (ii)

정수 i에 대하여, i가 A_1과 A_2에 동시에 속하지는 **않는** 사건을 E_i라 하자. 그러면 $A_1 \cap A_2 = \varnothing$인 것은 모든 E_i가 일어날 때, 그리고 그때에만 성립한다. 독립성에 의해

$$\mathrm{P}(i \in A_1 \text{ 그리고} i \in A_2) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}, \qquad \text{이므로} \qquad \mathrm{P}(E_i) = \tfrac{3}{4}.$$

이다. 사건 E_i는 정수 i에 대한 동전에만 의존하므로 $E_1, \ldots, E_n$은 독립이고,

$$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 = \varnothing) = \mathrm{P}(E_1) \cdots \mathrm{P}(E_n) = \left(\tfrac{3}{4}\right)^n,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

같은 논증은 집합이 몇 개이든 성립한다. 정수 i가 $A_1 \cap A_2 \cap A_3$에 속할 확률은 $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$이므로, 교집합(intersection)을 피할 확률은 $\frac{7}{8}$이고,

$$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \varnothing) = \left(\tfrac{7}{8}\right)^n.$$

이다. 일반적으로 i가 m개의 집합 모두에 속할 확률은 2^{-m}이므로

$$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m = \varnothing) = \left(1 - \frac{1}{2^m}\right)^n.$$

이다.

소문항 (iii)

이번에는 $A_1 \subseteq A_2$가 A_1에는 있지만 A_2에는 없는 정수가 하나도 없다는 뜻이다. 각 정수 i에 대해 (A_1에 속하는가?, A_2에 속하는가?)의 경우는 똑같이 가능한 네 가지이고, 그중 "A_1에 속하고 A_2에 속하지 않음" 하나만 금지된다. 따라서 각 정수는 독립적으로 확률 $\frac{3}{4}$로 조건을 만족하고,

$$\mathrm{P}(A_1 \subseteq A_2) = \left(\tfrac{3}{4}\right)^n.$$

이다. (이는 소문항 (ii)와 일치한다. $A_1 \subseteq A_2$인 것은 A_1과 A_2의 여집합(complement)이 서로소(disjoint)일 때, 그리고 그때에만 성립하며, 균등한 무작위 부분집합의 여집합은 다시 균등한 무작위 부분집합이기 때문이다.)

$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3$의 경우, 정수 하나 i가 (A_1, A_2, A_3)에 속하는지를 나타내는 패턴을 살펴보자. "속함"은 1, "속하지 않음"은 0으로 쓴다. 사슬(chain) 조건에 따르면 i가 어떤 A_k에 속하면 그 뒤의 모든 집합에도 속해야 하므로, 패턴은 다음 중 하나여야 한다.

$$000, \quad 001, \quad 011, \quad 111.$$

이는 똑같이 가능한 8개의 패턴 중 4개이므로, 각 정수가 조건을 만족할 확률은 $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$이고,

$$\mathrm{P}(A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3) = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

이다.

m개의 집합으로 이루어진 사슬의 경우, 허용되는 패턴은 0들이 이어진 뒤 1들이 이어지는 형태이다. 이 패턴은 1이 시작되는 위치로 결정되는데, 그 위치는 $1, 2, \ldots, m$ 중 하나이거나 "시작하지 않음"이다. 그러면 2^m개 중 허용되는 패턴이 $m+1$개이므로

$$\mathrm{P}(A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_m) = \left(\frac{m+1}{2^m}\right)^n.$$

이다.

검산

- $m = 2$이면 일반 공식은 $(1 - \frac{1}{4})^n$과 $(\frac{3}{4})^n$을 주고, $m = 3$이면 $(\frac{7}{8})^n$과 $(\frac{4}{8})^n$을 주어 특수한 경우와 일치한다. $m = 1$이면 $(\frac{1}{2})^n$($A_1 = \varnothing$인 경우만 가능)과 1(집합 하나는 언제나 사슬)을 주는데, 마땅히 그래야 한다.
- $n = 1$이면 모든 경우를 손으로 나열할 수 있다. 예를 들어 네 가지 선택 중 교집합이 공집합이 아닌 것은 $A_1 = A_2 = \{1\}$ 하나뿐이므로 $\frac{3}{4}$를 얻는다.
- 집합의 모든 선택을 나열하는 컴퓨터 검사로 작은 n과 m에 대해 모든 공식을 확인하였다. 예를 들어 $n = 3$일 때 $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 = \varnothing) = \frac{27}{64}$이고, $\mathrm{P}(A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3) = \frac{1}{8}$이다.

흔한 실수

- A_1의 각 원소가 A_2에 속해야 한다는 논리로 $\mathrm{P}(A_1 \subseteq A_2)$의 답을 $\left(\frac{1}{2}\right)^n$이라고 하는 것. 이는 A_1 자체의 크기도 무작위라는 점을 고려하지 않은 것이다.
- 정수가 어느 집합에도 속하지 않는 패턴을 잊어버려서 사슬 패턴의 개수를 $m+1$이 아니라 m으로 세는 것.

STEP 너머

무작위 부분집합을 독립적인 동전 던지기의 나열(**지시 벡터**(indicator vector))로 나타내는 것은 조합론(combinatorics)의 표준적인 도구이며, 여기서의 사슬 세기는 **부분순서집합**(poset)과 불 격자(Boolean lattice) 이론의 출발점이다. 같은 아이디어를 쓰면 사슬 개수의 기댓값이나 무작위 집합들이 S를 덮을 확률도 별다른 추가 노력 없이 구할 수 있다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 이러한 관점에서 독립성과 지시 변수(indicator variable)를 전개한다.

Beyond STEP

STEP은 대부분의 학생이 학창 시절에 치르는 수학 시험 가운데 가장 어려운 시험이다. 또한 가장 훌륭한 시험 가운데 하나이기도 하다. 문제는 짧고 낯설며 깊이가 있고, 그중 가장 뛰어난 문제들은 대학 수학의 작은 조각이 모습을 감추고 있는 것이다.

이 책은 1987년 첫 시험에 앞서 나온 예시 시험지(specimen papers)부터 2025년 시험지까지 가운데 가장 흥미로운 STEP 문제들을 골라, 각 문제를 하나의 문으로 삼는다. 모든 문제는 뛰어난 학생이 풀어 가면서 던질 법한 질문들과 함께 꼼꼼하게 풀이하고, 그런 다음 책은 그 문을 지나 한 걸음 더 나아간다. 그 아이디어가 어디에서 왔는지, 대학에서는 무엇으로 발전하는지, 그리고 다음에는 무엇을 읽으면 좋은지를 살펴본다.

이 책은 STEP을 준비하면서 기출 문제 연습 이상의 것을 원하는 재능 있는 예비 수학자를 위해 쓰였다. 수학과 학부생처럼 생각하기 시작하고, 앞으로 무엇이 자신을 기다리고 있는지 알아보고 싶은 학생들을 위한 책이다.

- 순수수학(pure mathematics), 역학(mechanics), 확률(probability)과 통계(statistics)를 아우르는 13개의 장
- 이 36개의 STEP 기출 문제와 각 문제의 안내식 풀이
- 모든 문제 뒤에 숨은 대학 수학
- 답이 실린 후속 연습 문제와 더 읽을거리

2019년 풀이. 책 전체와 모든 장,
모든 풀이를 다음 주소에서 무료로 읽고, 내려받고, 공유할 수 있다.

beyondstep.keithmcnulty.org

본문은 퍼블릭 도메인(CC0 1.0)으로 공개한다. STEP 문제 © Cambridge University Press & Assessment.

