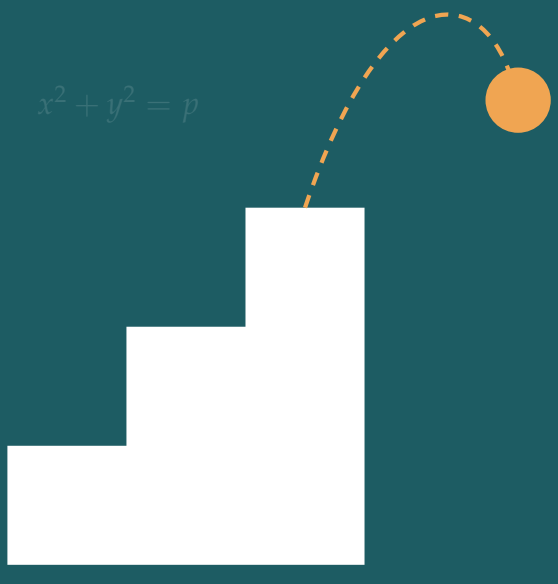
STEP 대비 · 대학 수학

Beyond STEP

STEP I, II 및 III

2018년 풀이



KEITH McNULTY

Beyond STEP

STEP 기출문제로 여는
대학 수학의 세계

STEP I, II 및 III

2018년 풀이

Keith McNulty

Beyond STEP: STEP 기출문제로 여는 대학 수학의 세계

2018년 풀이

2018년 STEP 문제지(STEP I, II 및 III)의 39개 문제 전체에 대한 풀이. 견본 문제지 이후 모든 STEP 문제의 풀이와 *Beyond STEP* 책 전체, 그리고 각 장을 `beyondstep.keithmcnulty.org`에서 무료로 읽고 내려받을 수 있다.

풀이를 읽기 전에 먼저 문제를 제대로 풀어 보자. 모든 답은 수치적으로 검증하였지만, 풀이가 이렇게 많으면 실수가 어느 정도 있을 수밖에 없다. 무언가 잘못된 것처럼 보이면 자신의 풀이를 믿고 꼼꼼히 확인해 보자.

영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.

2026년 11월 온라인 초판 발행.

이 PDF에서 지은이가 직접 만든 모든 것, 곧 본문, 풀이, 그림, 연습문제와 해답은 크리에이티브 커먼즈 CC0 1.0 Universal 라이선스에 따라 퍼블릭 도메인(public domain)으로 공개한다. 누구든 허락을 구하지 않고 어떤 목적으로든 복사하고, 고쳐 쓰고, 공유할 수 있다. 자세한 내용은 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`을 보라.

여기에서 다루는 STEP 문제의 저작권은 Cambridge University Press & Assessment에 있다. 문제는 이 책에 싣지 않았으며, 각 문제마다 공식 출처인 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스나 OCR의 기출 시험지로 가는 링크를 달았다.

오류 제보는 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty에 이슈로 남겨 주기 바란다.

차례

STEP I

Q1 곡선 사이의 넓이 순수수학 3

Q2 로그 부등식 순수수학 7

Q3 각과 쌍곡선 순수수학 10

Q4 적분으로 정의된 함수의 그래프 그리기 순수수학 14

Q5 다항식과 인수정리 순수수학 18

Q6 중점 공식과 사다리꼴 공식 순수수학 22

Q7 삼차방정식의 해법 순수수학 26

Q8 연립 미분방정식 순수수학 30

Q9 경사면 위의 운동 역학 34

Q10 연결된 입자 역학 38

Q11 경사면 위의 마찰 역학 42

Q12 복원추출 확률과 통계 46

Q13 이항분포와 베이즈 정리 확률과 통계 50

STEP II

Q1 다항식의 근 순수수학 54

Q2 오목함수 순수수학 59

Q3 회전 대칭과 적분 순수수학 63

Q4 삼각방정식 순수수학 67

Q5 급수의 적분 순수수학 71

Q6 계승과 소수 순수수학 74

Q7 기하에서의 벡터 순수수학 77

Q8 베르누이 미분방정식 순수수학 81

Q9 중력 아래에서의 충돌 역학 86

Q10 늘어나는 줄 위의 운동학 역학 90
Q11 마찰과 모멘트 역학 94
Q12 최적 정지와 기댓값 확률과 통계 98
Q13 점화식 확률과 통계 102

STEP III

Q1 이차방정식의 근과 부등식 순수수학 106
Q2 에르미트 다항식 순수수학 110
Q3 오일러 미분방정식 순수수학 114
Q4 쌍곡선의 접선 순수수학 118
Q5 산술-기하 평균 부등식 순수수학 123
Q6 복소수와 기하 순수수학 127
Q7 드무아브르 정리와 급수 순수수학 131
Q8 소수 부분의 적분 순수수학 135
Q9 충돌과 점화식 역학 139
Q10 복합 진자 역학 143
Q11 느슨한 줄과 포물체 운동 역학 147
Q12 순서통계량 확률과 통계 151
Q13 푸아송 분포 확률과 통계 155

풀이

STEP I 2018, 문제 1

순수수학 • 곡선 사이의 넓이

> **STEP I 2018, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/18-s1-q1

핵심 아이디어

삼차식(cubic)과 직선을 같다고 놓으면 x라는 인수가 나오고, 남은 부분은 제곱의 차(difference of two squares)가 되므로 세 교점(intersection)이 모두 깔끔하게 구해진다. 그 뒤로는 모두 정형적인 미적분 계산이며, 치환(substitution) $c = b - a$(P의 x좌표)를 쓰면 식 계산이 간결해진다. 마지막 부등식은 처음에는 어려워 보이지만, 두 넓이를 모두 c로 나타내고 나면 $b > a$로 간단히 정리된다.

풀이

교점과 개형

교점에서는 $x(b-x)^2 = a^2x$이므로 $x = 0$(원점)이거나

$$(b-x)^2 = a^2 \quad \Longrightarrow \quad b - x = \pm a \quad \Longrightarrow \quad x = b - a \text{ 또는 } x = b + a.$$

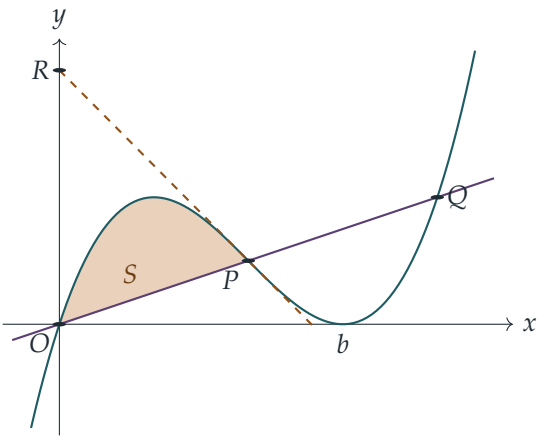
이다. $a > 0$이므로 $b - a < b + a$이고, 따라서

$$P = (b-a,\ a^2(b-a)), \qquad Q = (b+a,\ a^2(b+a)).$$

이다. $0 < a < b$이므로 두 점은 모두 제1사분면(first quadrant)에 있다.

개형을 그려 보자. 삼차곡선 $y = x(b-x)^2$은 O에서 단순근을 가지고 $x = b$에서 중근(repeated root)을 가지며, 그 점에서 x축에 접한다. $x < 0$이면 음수이고, $x > 0$이면($x = b$를 제외하고) 양수이며, $x \to \infty$일 때 $+\infty$로 발산한다. 도함수(derivative)는 (아래에서 구하듯이) $(b-x)(b-3x)$이므로, $x = b/3$에서 극대(local maximum)를 가지고 $(b, 0)$에서 극소(local minimum)를 가진다. O를 지나는 직선은 O 근처에서 증가하는 부분을 자르고, P에서 다시 곡선과 만나며($a < \frac{2}{3}b$이면 $b/3$과 b 사이에서, 그렇지 않으면 $b/3$보

다 앞에서), 접점 $x = b$를 지난 곳의 Q에서 세 번째로 곡선과 만난다. 그림은 $a = 1, b = 3$인 경우이며, P에서의 접선, 점 R, 그리고 넓이가 S인 영역도 함께 나타냈다.



P에서의 접선

곱의 미분법(product rule)으로 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (b-x)^2 - 2x(b-x) = (b-x)(b-3x).$$

이다. P에서는 $x = b - a$이므로 $b - x = a$이고 $b - 3x = 3a - 2b$이다. 따라서 그 점에서의 기울기(gradient)는 $m = a(3a - 2b)$이다.

접선(tangent)을 $y = mx + k$라 하고, 이 직선이 P를 지나도록 k를 정하면

$$\begin{aligned} k &= a^2(b-a) - a(3a-2b)(b-a) \\ &= a(b-a)(a-3a+2b) \\ &= 2a(b-a)^2. \end{aligned}$$

이다. 그러므로 P에서의 접선은 요구한 대로 $y = a(3a - 2b)x + 2a(b - a)^2$이다. 특히 $R = (0, 2a(b-a)^2)$이며, 이 점은 y축의 양의 부분 위에 있다.

넓이 S

P의 x좌표를 $c = b - a > 0$이라 하자. $0 < x < c$에서

$$x(b-x)^2 - a^2x = x\,(b-x-a)(b-x+a) > 0,$$

이다. 이 구간에서 세 인수가 모두 양수이기 때문이다. 따라서 O와 P 사이에서는 곡선이 직선보다 위에 있고,

$$S = \int_0^c (x(b-x)^2 - a^2x)\,\mathrm{d}x = \int_0^c ((b^2-a^2)x - 2bx^2 + x^3)\,\mathrm{d}x = \frac{(b^2-a^2)c^2}{2} - \frac{2bc^3}{3} + \frac{c^4}{4}.$$

이다. 이제 $b^2 - a^2 = c(b+a) = c(c+2a)$와 $b = c + a$를 대입하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{c^3(c+2a)}{2} - \frac{2c^3(c+a)}{3} + \frac{c^4}{4} \\ &= c^3\left[\, c(\tfrac{1}{2} - \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{4}) + a(1 - \tfrac{2}{3})\right] \\ &= c^3\Big(\frac{c}{12} + \frac{a}{3}\Big) = \frac{c^3(c+4a)}{12}. \end{aligned}$$

이다. $c + 4a = b + 3a$이므로 이는

$$S = \frac{1}{12}(b-a)^3(3a+b),$$

이고, 요구한 결과와 같다.

> ? **생각해 보기** 그냥 모든 것을 a와 b로 전개하면 안 될까?

그래도 되지만, 목표식에는 $(b-a)^3$이라는 인수가 있고, a와 b에 관한 사차식에서 이 인수를 뽑아내는 것은 고통스럽다. $c = b - a$로 쓰면 적분의 모든 항이 이미 c^2 이상을 포함하므로, 이 인수가 저절로 나타난다.

삼각형 T와 부등식

삼각형 OPR의 밑변을 OR로 잡자. 이 변은 y축 위에 있고 길이는 $2ac^2$이다. 높이는 P에서 y축까지의 거리, 즉 c이다. 따라서

$$T = \tfrac{1}{2} \cdot 2ac^2 \cdot c = ac^3 = a(b-a)^3.$$

이다. 그러므로 $(b-a)^3 > 0$이므로

$$S - \tfrac{1}{3}T = \frac{(b-a)^3}{12}(3a + b - 4a) = \frac{(b-a)^4}{12} > 0,$$

이다. $b \neq a$이기 때문이다. 따라서 요구한 대로 $S > \frac{1}{3}T$이다.

검산

- $a = 1, b = 3$일 때(그림의 경우): $P = (2,2)$, $Q = (4,4)$이고, 곡선의 식은 $x = 2$에서 $y = 2$, $x = 4$에서 $y = 4$를 준다. 접선 공식은 $y = -3x + 8$을 주며, 기울기 공식 $(3-x)(3-3x)$은 $x = 2$에서 -3이다. 직접 적분하면 $S = \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,\mathrm{d}x = 4 - 16 + 16 = 4$이고, 이는 $\frac{1}{12} \cdot 8 \cdot 6 = 4$와 일치한다. 또한 $T = 8$이고 $4 > \frac{8}{3}$이다.
- 비 $S/(\frac{1}{3}T) = (3a+b)/(4a)$는 $b \to a$일 때 1로 수렴하므로, 상수 $\frac{1}{3}$은 가능한 최선의 값이다. 이는 납득할 만하다. 포물선(parabola) $y = px - qx^2$에 대해 같은 작도를 하면 $S = qc^3/6$, $T = qc^3/2$이므로 정확히 $S = \frac{1}{3}T$이고, P가 O에 매우 가까우면 두 점 사이의 삼차곡선은 거의 포물선이기 때문이다.

- $0 < a < b$인 무작위 쌍 수천 개에 대해 교점, 접선, (수치적분으로 구한) 넓이, 부등식을 컴퓨터로 확인한 결과 모두 공식과 일치했다.

흔한 실수

- $x(b-x)^2 = a^2x$를 x로 나누면서 근 $x = 0$을 언급하지 않거나, $b - x = a$만 택해서 Q를 놓치는 것.
- 직선에서 곡선을 빼서 적분하여 음수인 "넓이"를 얻는 것. 적분하기 전에 어느 그래프가 위에 있는지 확인해야 한다.
- 개형에서 삼차곡선이 $x = b$에서 x축에 접하지 않고 x축을 가로지르도록 그리는 것.

STEP 너머

마지막 부분에서 극한 비가 1이 된다는 사실은 아르키메데스(Archimedes)의 포물선 구적(quadrature of the parabola)과 같은 정신을 담고 있다. 포물선의 경우 활꼴의 넓이는 삼각형 OPR 넓이의 정확히 3분의 1이고, O 근처에서 삼차곡선은 국소적으로 포물선이므로, 극한에서 부등식은 등식으로 좁혀진다. 국소적인 행동이 왜 테일러(Taylor) 전개의 처음 몇 항에 의해 결정되는지 이해하고, "거의 포물선"이라는 말을 엄밀하게 만드는 것이 대학 1학년 해석학(analysis)의 일이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 테일러 정리(Taylor's theorem)를 제대로 다루는 모습을 볼 수 있는 친절한 책이다.

풀이

STEP I 2018, 문제 2

순수수학 • 로그 부등식

> **STEP I 2018, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/18-s1-q2

핵심 아이디어

모든 것은 밑변환 공식(change-of-base rule)에 달려 있다. 어떤 밑의 로그든 공통된 밑의 로그들의 비로 나타낼 수 있고, $\frac{1}{\log_b c} = \log_c b$이다. 모든 로그를 ln으로 다시 쓰고 나면, 각 소문항은 부등식을 다루는 짧은 대수 계산이 된다. $e^2 < 8$과 같이 주어진 사실들은 사실 $\ln 2$와 $\ln 10$에 대한 범위를 변장시켜 놓은 것일 뿐이다. 풀이 내내 ln이 증가함수라는 사실을 이용하므로, 양수 사이의 부등식에서 양변에 로그를 취해도 부등호의 방향은 그대로 유지된다.

풀이

첫 번째 결과

로그의 정의에 의해 $x = \log_b c$는

$$c = b^x.$$

를 뜻한다. 양변에 밑이 a인 로그를 취하고 $\log_a(b^x) = x \log_a b$를 이용하면

$$\log_a c = x \log_a b.$$

이다. 여기서 ($\log_b$가 의미를 가지려면) $b \neq 1$이므로 $\log_a b \neq 0$이고, 따라서 양변을 나눌 수 있다.

$$\frac{\log_a c}{\log_a b} = x = \log_b c,$$

이므로 증명이 끝난다. 아래에서는 이로부터 얻는 두 가지 결과를 사용한다. $a = c$로 두면 $\log_b c = \dfrac{1}{\log_c b}$를 얻고, $a = e$로 두면 $\log_b c = \dfrac{\ln c}{\ln b}$를 얻는다.

소문항 (i)

역수 법칙에 의해 $\dfrac{1}{\log_2 \pi} = \log_\pi 2$이고 $\dfrac{1}{\log_5 \pi} = \log_\pi 5$이다. 따라서

$$\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} = \log_\pi 2 + \log_\pi 5 = \log_\pi 10.$$

이다. $\pi > 1$이므로 함수 $\log_\pi$는 증가함수이고, $10 > \pi^2$로부터

$$\log_\pi 10 > \log_\pi \pi^2 = 2,$$

를 얻는다. 이것이 바로 구하는 부등식이다.

소문항 (ii)

첫 번째로 주어진 사실을 자연로그(natural logarithm)로 쓰면

$$\log_2 \frac{\pi}{\mathrm{e}} = \frac{\ln \pi - 1}{\ln 2} > \frac{1}{5} \quad \Longrightarrow \quad \ln \pi > 1 + \frac{\ln 2}{5},$$

이다. 여기서 $\ln 2 > 0$을 곱했으므로 부등호의 방향은 바뀌지 않는다.

생각해 보기 $\mathrm{e}^2 < 8$은 무엇을 말해 주는가?

이것은 $\ln 2$의 하한이다. 양변에 ln을 취하면(ln이 증가함수이므로 가능하다) $2 < \ln 8 = 3 \ln 2$이므로 $\ln 2 > \frac{2}{3}$이다. 이를 대입하면

$$\ln \pi > 1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} = 1 + \frac{2}{15} = \frac{17}{15},$$

이므로 증명이 끝난다.

소문항 (iii)

$\pi^2 < 10$의 양변에 로그를 취하면 $2 \ln \pi < \ln 10$이다. 따라서 $\ln 10 < \frac{30}{13}$임을 보이면 충분하다.

나머지 두 사실도 바꿔 써 보자. $\mathrm{e}^3 > 20$이므로 $3 > \ln 20 = \ln 2 + \ln 10$, 즉

$$\ln 2 < 3 - \ln 10.$$

이다. 또한 $\log_{10} 2 = \dfrac{\ln 2}{\ln 10} > \dfrac{3}{10}$이고 $\ln 10 > 0$이므로

$$\ln 10 < \frac{10}{3} \ln 2.$$

이다. 앞의 식은 $\ln 2$의 상한이고, 뒤의 식에서 $\ln 2$의 계수가 양수이므로 앞의 식을 대입할 수 있다.

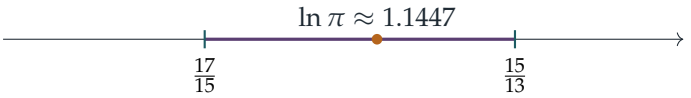
$$\ln 10 < \frac{10}{3} (3 - \ln 10) = 10 - \frac{10}{3} \ln 10.$$

$\ln 10$이 있는 항을 모으면 $\frac{13}{3}\ln 10 < 10$이므로 $\ln 10 < \frac{30}{13}$이다. 그러므로

$$\ln \pi < \tfrac{1}{2}\ln 10 < \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{30}{13} = \frac{15}{13},$$

이므로 증명이 끝난다.

소문항 (ii)와 (iii)을 함께 보면 $\ln \pi$가 좁은 구간 안에 갇힌다.



검산

수치로 계산하면 $\ln \pi \approx 1.1447$이고, 이는 실제로 $\frac{17}{15} \approx 1.1333$과 $\frac{15}{13} \approx 1.1538$ 사이에 있다. 소문항 (i)에서 $\log_\pi 10 \approx 2.0115$로 2보다 아주 조금 크며, 이는 $\pi^2 \approx 9.87$이 10에 매우 가깝다는 점과 들어맞는다. 범위 $\ln 10 < \frac{30}{13} \approx 2.3077$도 $\ln 10 \approx 2.3026$과 비교해 보면 타당하다. 주어진 사실들도 확인해 볼 만하다. $\log_2(\pi/\mathrm{e}) \approx 0.209$, $\mathrm{e}^2 \approx 7.39$, $\mathrm{e}^3 \approx 20.09$, $\log_{10} 2 \approx 0.3010$이다.

흔한 실수

- $\dfrac{1}{\log_2 \pi}$를 $\log_2 \frac{1}{\pi}$로 쓰는 실수. 역수를 취하면 밑과 진수가 서로 바뀌는 것이지, 진수가 역수가 되는 것이 아니다.
- 소문항 (iii)에서 상한이 필요한 자리에 $\ln 2$의 하한을 쓰는 실수. 부등식을 이어 붙이는 것은 각 범위가 같은 방향을 가리킬 때만 가능하다.
- 부등식의 양변에 곱하거나 로그를 취하기 전에 $\ln 2$, $\ln 10$, $\log_\pi$가 적절한 성질(양수이거나 증가함수)을 가진다는 점을 언급하지 않는 실수.

STEP 너머

몇 개의 대략적인 사실로부터 수치적 범위를 증명하는 일은 해석학자들이 상수를 어림하는 방식을 조금 맛보게 해 준다. 해석학(analysis)의 많은 부분은 알지 못하는 양을 다룰 수 있는 두 어림값 사이에 가두는 일로 이루어져 있다. $\ln 2$나 π에 대한 더 정밀한 범위는 급수와 적분 부등식에서 얻어지는데, 예를 들어 $\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$를 직사각형으로 어림하는 방법이 있다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)는 이러한 사고방식을 친절하게 소개하는 입문서이다.

풀이

STEP I 2018, 문제 3

순수수학 • 각과 쌍곡선

STEP I 2018, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/18-s1-q3

핵심 아이디어

두 각은 모두 탄젠트(tangent)를 통해 P의 좌표와 연결된다. RP의 기울기가 $\tan\alpha$를 주고, SP의 기울기가 $\tan\beta$를 준다. 그러면 조건 $\beta = 2\alpha$는 tan에 대한 배각 공식(double-angle identity)이 되고, 분모를 없애면 곡선의 방정식을 얻는다. 소문항 (ii)는 같은 계산을 거꾸로 따라간다. 문제는 $\tan\beta = \tan 2\alpha$만으로는 β가 π의 정수배 차이까지만 결정된다는 점이다. 따라서 2α가 어느 사분면(quadrant)에 있는지 추적해야 한다.

풀이

각 설정하기

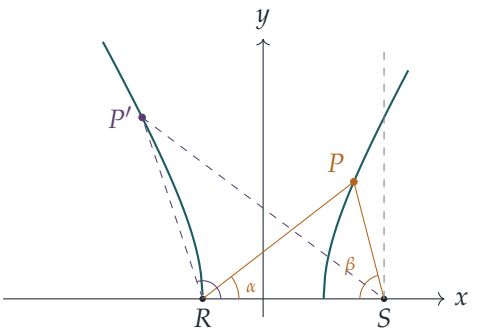
$y > 0$이므로 R에서의 각 α는 양의 x 방향(RS 방향)에서 RP까지 잰 각이다. 따라서 $0 < \alpha < \pi$이고

$$\tan\alpha = \frac{y}{x+a} \qquad (x \neq -a).$$

이 식은 P가 R의 오른쪽에 있을 때(α는 예각, 탄젠트는 양수)와 왼쪽에 있을 때(α는 둔각, 탄젠트는 음수) 모두 성립한다. S에서의 각 β는 음의 x 방향(SR 방향)에서 SP까지 잰 각이다. $x < 2a$이므로 점 P는 S의 왼쪽에 있고, 따라서 β는 예각이며

$$\tan\beta = \frac{y}{2a-x} > 0, \qquad 0 < \beta < \tfrac{\pi}{2}.$$

$x \neq -a$일 때 $t = \tan\alpha$라 하자.



$y > 0, x < 2a$인 곡선 $y^2 = 3(x^2 - a^2)$($a = 1$인 경우를 그림)은 두 조각으로 이루어진다. 하나는 $a < x < 2a$인 오른쪽 가지의 호이고, 다른 하나는 $x < -a$인 왼쪽 가지의 위쪽 전체이다. 왼쪽 가지 위의 점 P'에서는 α가 둔각이 된다.

소문항 (i)

$\beta = 2\alpha$라고 하자. $\beta < \frac{\pi}{2}$이므로 $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$이고, 따라서 $x > -a, 0 < t < 1$이다. 그러므로 $1 - t^2 \neq 0$이어서 배각 공식을 쓸 수 있다.

$$\frac{y}{2a - x} = \tan 2\alpha = \frac{2t}{1 - t^2} = \frac{2y/(x + a)}{1 - y^2/(x + a)^2} = \frac{2y(x + a)}{(x + a)^2 - y^2}.$$

y를 약분하고($y > 0$이므로 가능하다) 양변을 교차하여 곱하면

$$\begin{aligned}&(x + a)^2 - y^2 = 2(x + a)(2a - x)\\ \iff\quad &y^2 = (x + a)\big[(x + a) - 2(2a - x)\big] = (x + a)(3x - 3a) = 3(x^2 - a^2).\end{aligned}$$

따라서 요구한 대로 P는 $y^2 = 3(x^2 - a^2)$ 위에 있다.

소문항 (ii)

이제 P가 곡선 위에 있고 $y > 0, x < 2a$라고 하자. 그러면 $x^2 - a^2 = \frac{1}{3}y^2 > 0$이므로 $|x| > a$, 즉 $a < x < 2a$ 또는 $x < -a$이다. 특히 $x \neq -a$이므로 $t = \tan\alpha$가 정의되고, $t \neq 0$이다.

소문항 (i)의 과정은 거꾸로 따라갈 수 있다. 곡선의 방정식은 $(x + a)^2 - y^2 = 2(x + a)(2a - x)$와 동치이다. 양변을 $(x + a)^2$으로 나누고 $2a - x = y/\tan\beta$를 이용하면

$$1 - t^2 = \frac{2(2a - x)}{x + a} = \frac{2y}{(x + a)\tan\beta} = \frac{2t}{\tan\beta}, \qquad \text{따라서} \qquad (1 - t^2)\tan\beta = 2t.$$

만약 $t^2 = 1$이면 이 식에서 $t = 0$이 되어 모순이다. 따라서 $t^2 \neq 1$이고

$$\tan\beta = \frac{2t}{1 - t^2} = \tan 2\alpha.$$

? **생각해 보기** $\tan\beta = \tan 2\alpha$이면 $\beta = 2\alpha$일까?

꼭 그렇지는 않다. 이 식은 β와 2α가 π의 정수배만큼 차이 난다는 뜻이다. 각의 크기에 대해 아는 사실을 이용하여, 곡선의 두 조각으로 나누어 살펴보자.

경우 $a < x < 2a$. 이때 $x + a > 0$이므로 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$이고 $0 < 2\alpha < \pi$이다. $\tan 2\alpha = \tan\beta > 0$이므로 2α는 β와 같은 구간 $(0, \frac{\pi}{2})$에 있다. tan은 $(0, \frac{\pi}{2})$에서 일대일(one-to-one)이므로

$$\beta = 2\alpha.$$

경우 $x < -a$. 이때 $x + a < 0$이므로 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$이고 $\pi < 2\alpha < 2\pi$이다. $\tan 2\alpha > 0$이므로 $2\alpha \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$이고, 따라서 $2\alpha - \pi \in (0, \frac{\pi}{2})$이며 $\tan(2\alpha - \pi) = \tan 2\alpha = \tan\beta$이다. 앞에서와 같이 tan은 $(0, \frac{\pi}{2})$에서 일대일이므로

$$\beta = 2\alpha - \pi.$$

따라서 가능한 관계는 $\beta = 2\alpha$(P가 오른쪽 가지 위에 있을 때)와 $\beta = 2\alpha - \pi$(P가 왼쪽 가지 위에 있을 때)이다. 각 조각의 모든 점이 조건을 만족하므로 두 관계 모두 실제로 나타난다.

검산

- $a = 1$, $P = (-2, 3)$으로 잡자. $3(4 - 1) = 9$이므로 이 점은 곡선 위에 있다. 그러면 $\tan\alpha = 3/(-1) = -3$이므로 $\alpha \approx 108.43°$이고, $\tan\beta = \frac{3}{4}$이므로 $\beta \approx 36.87°$이다. 실제로 $2\alpha - 180° \approx 36.87°$이다.
- 오른쪽 가지에서 $x \to 2a$이면 $y \to 3a$이므로 $\tan\alpha \to 1$, $\tan\beta \to \infty$이다. 즉 $\alpha \to \frac{\pi}{4}$이고 $\beta \to \frac{\pi}{2} = 2\alpha$이다.
- 왼쪽 가지에서 멀리 가면 P는 점근선(asymptote) $y = -\sqrt{3}\,x$에 가까워지므로 $\alpha \to \frac{2\pi}{3}$이고 $\beta \to \frac{\pi}{3} = 2\alpha - \pi$이다.

임의의 a에 대해 각 가지 위의 많은 무작위 점에서 두 관계를 컴퓨터로 확인한 결과도 일치하였다.

흔한 실수

- $\tan\alpha = y/|x + a|$로 쓰거나 α가 예각이라고 가정하는 것. 왼쪽 가지에서는 α가 둔각이고 $\tan\alpha < 0$이다.
- 각의 범위를 확인하지 않고 $\tan\beta = \tan 2\alpha$에서 $\beta = 2\alpha$라고 결론짓는 것. 이렇게 하면 두 번째 관계를 놓친다.

- $x < 2a$와 $y > 0$이 곡선을 두 조각으로 잘라 낸다는 점, 그리고 $x = -a$를 배제하려면 $|x| > a$가 필요하다는 점을 잊는 것.

STEP 너머

이 곡선은 이심률(eccentricity)이 2이고 초점(focus)이 S, 준선(directrix)이 $x = \frac{a}{2}$인 쌍곡선(hyperbola)이다. 소문항 (i)의 성질은 쌍곡선을 이용하여 각을 삼등분(trisection)하는 고전적인 방법(파푸스(Pappus)도 알고 있었다)을 제공하며, 이는 자와 컴퍼스만으로는 삼등분이 불가능하다는 한계를 피해 간다. 그 불가능성의 증명 자체는 체론(field theory) 첫 강좌의 백미이다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)가 이를 다루며, Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 각과 원뿔곡선(conics)의 기하에 관한 훌륭한 길잡이이다.

풀이

STEP I 2018, 문제 4

순수수학 • 적분으로 정의된 함수의 그래프 그리기

STEP I 2018, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/18-s1-q4

핵심 아이디어

f의 모든 부분은 $\ln x$로 이루어져 있고, 거추장스러운 인수 $\frac{1}{x}$는 정확히 $\ln x$의 도함수이다. 따라서 치환(substitution) $u = \ln x$를 하면 적분이 u에 대한 간단한 유리함수(rational function)의 적분으로 바뀐다. u로 나타내면 x를 x^{-1}로 바꾸는 것은 u의 부호를 바꾸는 것일 뿐이므로, 대칭성(symmetry)은 결국 답이 u에 대한 우함수(even function)라는 사실로 귀결된다.

풀이

이 풀이 전체에서 $u = \ln x$로 둔다. $x \neq 1$이므로 $u \neq 0$이고, $u > 0$인 것은 정확히 $x > 1$일 때이다.

f와 f′의 영점

다음과 같이 두자.

$$g(u) = \frac{(1-u^2)^2}{u} = \frac{1}{u} - 2u + u^3, \qquad \text{이고} \qquad \mathrm{f}(x) = \frac{g(\ln x)}{x}.$$

$(\ln x)^2 = 1$이면 인수 $(1-u^2)^2$이 0이므로 $\mathrm{f}(x) = 0$이다. 몫의 미분법(quotient rule)과 연쇄 법칙(chain rule)에 의해

$$\mathrm{f}'(x) = \frac{g'(u) \cdot \frac{1}{x} \cdot x - g(u)}{x^2} = \frac{g'(u) - g(u)}{x^2}.$$

이미 $g(\pm 1) = 0$임을 알고 있다. 또한 $(1-u^2)^2 = (1-u)^2(1+u)^2$은 $u = \pm 1$에서 **중복** 인수(repeated factor)를 가지므로, 그 도함수 $-4u(1-u^2)$도 그곳에서 0이 되고, 따라서

$$g'(u) = \frac{-4u(1-u^2)\cdot u - (1-u^2)^2}{u^2} = 0 \quad \text{단, } u = \pm 1.$$

그러므로 $(\ln x)^2 = 1$일 때, 즉 $x = e$와 $x = e^{-1}$에서 $\mathrm{f}'(x) = 0$도 성립한다.

소문항 (i)

$u = \ln t$로 치환하면 $\mathrm{d}u = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$이다. 그러면

$$\int \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{(1-u^2)^2}{u}\,\mathrm{d}u = \int \left(\frac{1}{u} - 2u + u^3\right)\mathrm{d}u = \ln|u| - u^2 + \tfrac{1}{4}u^4 + C.$$

$G(u) = \ln|u| - u^2 + \frac{1}{4}u^4$로 정의하자. F의 두 부분 모두 적분 구간이 $t = 1$을 넘어가지 않으므로, 각 부분에서 u의 부호는 일정하고 이 원시함수(antiderivative)는 그곳에서 유효하다.

$x > 1$일 때 아래끝 $t = e$는 $u = 1$에 대응하고 $G(1) = 0 - 1 + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$이다. $0 < x < 1$일 때 아래끝 $t = e^{-1}$은 $u = -1$에 대응하고 역시 $G(-1) = -\frac{3}{4}$이다. 따라서 두 경우 모두 같은 식을 얻는다.

$$\boxed{\mathrm{F}(x) = \ln|\ln x| - (\ln x)^2 + \tfrac{1}{4}(\ln x)^4 + \tfrac{3}{4} \qquad (x > 0,\ x \neq 1).}$$

이제 $\ln(x^{-1}) = -\ln x$이다. 위 식에서 $\ln x$는 모두 $|\cdot|$ 안에 있거나 짝수 거듭제곱으로 나타나므로

$$\mathrm{F}(x^{-1}) = \ln|-\ln x| - (-\ln x)^2 + \tfrac{1}{4}(-\ln x)^4 + \tfrac{3}{4} = \mathrm{F}(x),$$

이고, 이것이 보이고자 한 것이다. (상수 $\frac{3}{4}$가 양쪽에서 같은 것은 오직 두 아래끝 e와 e^{-1} 자체가 서로 역수 관계이기 때문이다.)

소문항 (ii)

? **생각해 보기** F는 어디에서 증가하며, $x = 1$ 근처에서는 어떤 일이 일어나는가?

기울기(gradient). $\mathrm{F}'(x) = \mathrm{f}(x)$이다. 인수 $(1-u^2)^2$은 결코 음이 아니고 $x > 0$이므로, $\mathrm{f}(x)$의 부호는 $u = \ln x$의 부호와 같다. 따라서 F는 $(0,1)$에서 감소하고 $(1,\infty)$에서 증가한다. 정상점(stationary point)은 $x = e^{-1}$과 $x = e$뿐이며, 정의에 의해 그곳에서 $\mathrm{F} = 0$이다.

이 점들은 극점(turning point)이 아니다. $x = e$ 근처에서는 양쪽 모두 기울기가 양이고, $x = e^{-1}$ 근처에서는 양쪽 모두 기울기가 음이다. 그곳에서 $\mathrm{f}' = \mathrm{F}''$도 0이므로, 이 점들은 **정상 변곡점**(*stationary point of inflection*)이다. 따라서 다음이 성립한다.

$\mathrm{F}(x) > 0$, 구간: $0 < x < e^{-1}$ 또는$x > e$, $\qquad$ $\mathrm{F}(x) < 0$, 구간: $e^{-1} < x < 1$ 또는$1 < x < e$.

양 끝에서의 행동.

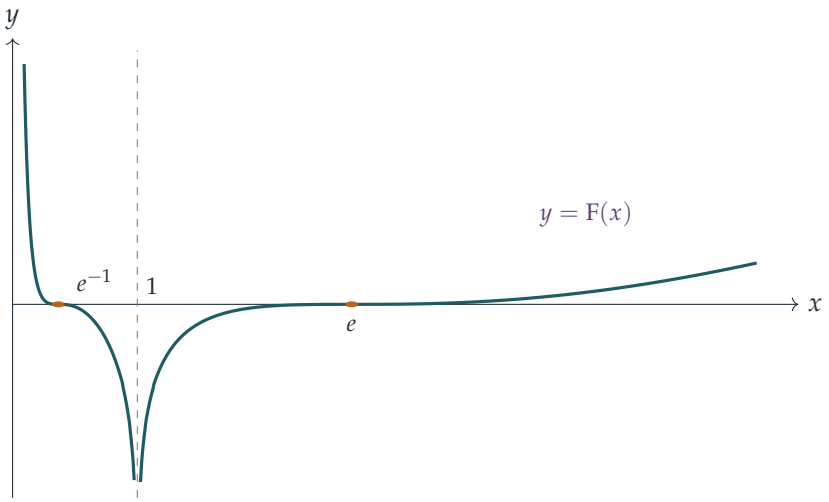
- $x \to 1$이면 $u \to 0$이고 $\ln|u| \to -\infty$인 반면, 나머지 항들은 $\frac{3}{4}$로 수렴한다. 따라서 양쪽에서 $F(x) \to -\infty$이고, $x = 1$은 수직 점근선(vertical asymptote)이다.
- $x \to \infty$이면 $u \to \infty$이고 $\frac{1}{4}u^4$ 항이 지배하므로 $F(x) \to \infty$이다. 다만 매우 천천히 증가한다. 기울기 $f(x) \approx u^3/x \to 0$이기 때문이다.
- $x \to 0^+$이면 $u \to -\infty$이므로, 대칭성에 의해 역시 $F(x) \to \infty$이다. 이번에는 가파르게 증가한다. 기울기 $f(x) \approx u^3/x \to -\infty$이기 때문이다. 곡선은 y축과 만나지 않는다.

오목과 볼록(더 정밀한 개형을 위해). $F'' = f' = (g' - g)/x^2$을 이용하여 정리하면

$$F''(x) = -\frac{(u^2-1)(u^3-3u^2-u-1)}{u^2x^2}.$$

삼차식 $u^3 - 3u^2 - u - 1$은 $u \approx 3.38$에서 단 하나의 실근을 갖는다($u = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}$에서의 극댓값이 음이기 때문이다). 이보다 작은 모든 u에 대해 이 삼차식은 음이다. 따라서 곡선은 $(0, e^{-1})$에서 아래로 볼록(concave up)이고, $(e^{-1}, 1)$과 $(1, e)$에서 위로 볼록(concave down)이다. e부터 $x \approx 29.5$에 있는 또 하나의 변곡점까지는 아래로 볼록이고, 그 이후로는 위로 볼록이다. 이 마지막 변곡점은 훨씬 오른쪽에 있으므로 개형에 나타낼 필요는 없다.

대칭성 $F(x^{-1}) = F(x)$는 x에서의 높이가 $1/x$에서의 높이와 같다는 뜻이다. 예를 들어 $F(2) = F(\frac{1}{2}) \approx -0.04$이고 $F(5) = F(\frac{1}{5}) \approx 0.31$이다. 따라서 $(1, \infty)$에서의 곡선은 $(0, 1)$에서의 곡선을 점근선 쪽으로 가로 방향으로 눌러 놓은 모양이다.



곡선은 y축 근처의 $+\infty$에서 가파르게 내려온다. $(e^{-1}, 0)$의 정상 변곡점에서 평평해지며 x축에 닿은 뒤, 점근선 $x = 1$에서 $-\infty$로 곤두박질친다. 오른쪽에서는 $-\infty$에서 다시 올라와 $(e, 0)$의 두 번째 정상 변곡점에서 평평해지고, 그다음 $+\infty$로 천천히 올라간다.

검산

- 상자 안의 식을 미분하면 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\ln|u| - u^2 + \frac{1}{4}u^4\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{u} - 2u + u^3\right) = \mathrm{f}(x)$이고, 이 식은 $x = e$와 $x = e^{-1}$에서 0이 된다.
- 수치적으로 $\int_e^5 \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t \approx 0.3130$이고 $\int_{1/e}^{1/5} \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t \approx 0.3130$이므로, 식과 대칭성 모두와 일치한다.
- 부호도 맞는다. $(1, e)$에서 함수는 0까지 증가하므로 그곳에서는 음이어야 하고, 실제로 $\mathrm{F}(2) \approx -0.039$이다.

흔한 실수

- $\ln x < 0$인 $0 < x < 1$에서 $\ln(\ln x)$라고 쓰는 것. $\frac{1}{u}$의 원시함수는 $\ln|u|$이며, 바로 이 절댓값(modulus)이 대칭성이 성립하게 해 준다.
- $x = e^{\pm 1}$에 극점을 그리는 것. f가 제곱 인수를 가지므로 그곳에서 부호가 바뀌지 않고, 따라서 이 점들은 정상 변곡점이다.
- $x = 1$의 수직 점근선을 빠뜨리거나, 두 갈래를 점근선을 가로질러 이어 버리는 것.

STEP 너머

F는 적분으로 정의되어 있고, 미적분학의 기본정리(fundamental theorem of calculus)는 f가 연속인 각 구간에서 $\mathrm{F}' = \mathrm{f}$임을 말해 준다. 두 부분에 서로 다른 기준점이 필요한 것도 이 때문이다. f는 $x = 1$에서 발산하므로, 하나의 적분으로 그 점을 가로지를 수 없다. 대칭 $x \mapsto x^{-1}$은 $u = \ln x$를 통해 $u \mapsto -u$가 되는데, 이는 곱셈적 대칭을 덧셈적 대칭으로 바꾸는 작은 예이며, 이 아이디어는 해석학 전반에 걸쳐 나타난다. 미적분학의 기본정리와 이상적분(improper integral)에 대한 꼼꼼한 설명은 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 이해하기)를 보라.

풀이

STEP I 2018, 문제 5

순수수학 • 다항식과 인수정리

> **STEP I 2018, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/18-s1-q5

핵심 아이디어

"이 점들에서 값 1을 가진다"는 말은 사실 근(root)에 관한 진술이다. $P(k) = 1$이면 k는 $P(x) - 1$의 근이므로, $x - k$는 그 인수(factor)이다. 공통된 값을 빼고 인수분해(factorise)하면 이 문제의 모든 소문항이 쉬워진다. 소문항 (iii)에서는 인수분해 덕분에 S에 관한 질문이 작은 수를 네 개의 **서로 다른** 정수의 곱으로 나타내는 문제로 바뀌며, 모든 일을 해내는 것은 바로 서로 다르다는 조건이다.

풀이

소문항 (i)

나머지 정리(remainder theorem)에 의해 $P(x)$를 $x - k$로 나눈 나머지는 $P(k)$이다. 따라서 $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = 1$, 즉 $1, 2, 3, 4$가 $P(x) - 1$의 근이어야 한다. $P(x) - 1$은 차수(degree)가 4 이하이고 이 서로 다른 네 근을 가지므로 $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$의 상수배이다. 따라서 그러한 다항식 가운데 가장 일반적인 것은

$$P(x) = 1 + k(x-1)(x-2)(x-3)(x-4), \qquad k \neq 0,$$

이고, 여기서 차수가 정확히 4가 되려면 $k \neq 0$이어야 한다.

소문항 (ii)

소문항 (i)과 똑같이, $1, 2, \ldots, N$은 차수가 N인 $P(x) - 1$의 서로 다른 N개의 근이다($N \geq 1$이므로 1을 빼도 차수는 변하지 않는다). 따라서 어떤 상수 k에 대해

$$P(x) - 1 = k(x-1)(x-2)\cdots(x-N)$$

이고, P의 차수가 $N \geq 1$이므로 $k \neq 0$이다. 그러면

$$P(N+1) - 1 = k \cdot N(N-1) \cdots 1 = k\,N! \neq 0,$$

이다. k와 $N!$이 모두 0이 아니기 때문이다. 따라서 $P(N+1) \neq 1$이다.

$P(N+1) = 2$이면 $k\,N! = 1$이므로 $k = \frac{1}{N!}$이다. 양의 정수 r에 대해

$$\begin{aligned} P(N+r) &= 1 + \frac{(N+r-1)(N+r-2)\cdots r}{N!} \\ &= 1 + \frac{(N+r-1)!}{(r-1)!\,N!} = 1 + \binom{N+r-1}{N}. \end{aligned}$$

(이 곱은 $N+r-1$부터 r까지 내려가는 N개의 인수로 이루어진다.)

이제 모든 N에 대해 $1 + \binom{N+r-1}{N} = N + r$이 되기를 원한다. 작은 r부터 시도해 보자. $r = 1$이면 $P(N+1) = 2$이고, 이것은 $N = 1$일 때만 $N + 1$과 같다. $r = 2$이면

$$P(N+2) = 1 + \binom{N+1}{N} = 1 + (N+1) = N + 2,$$

이므로 $r = 2$는 N에 관계없이 성립한다.

소문항 (iii)

서로 다른 네 정수 a, b, c, d는 차수가 4이고 최고차항 계수(leading coefficient)가 1인 $S(x) - 2001$의 근이다. 따라서

$$S(x) = 2001 + (x-a)(x-b)(x-c)(x-d).$$

(a) 어떤 정수 e에 대해 $S(e) = 2018$이라고 가정하자. 그러면

$$(e-a)(e-b)(e-c)(e-d) = 17.$$

네 인수는 정수이고, a, b, c, d가 서로 다르므로 이들도 서로 다르다. 곱이 0이 아니므로 어느 인수도 0이 될 수 없다.

> **생각해 보기** 서로 다른 네 정수의 곱이 어떻게 소수(prime)가 될 수 없는 것일까?

0이 아닌 서로 다른 정수 가운데 절댓값(absolute value)이 1인 것은 많아야 두 개(즉 1과 -1)이다. 따라서 네 인수 중 적어도 두 개는 절댓값이 2 이상이고, 그 두 수의 곱은 절댓값이 4 이상이다. 그런데 그 곱은 17의 약수(divisor)이므로 ± 17이어야 한다. 17은 소수이므로 절댓값이 각각 2 이상인 두 정수의 곱으로 나타낼 수 없다. 이 모순으로부터 $S(e) = 2018$을 만족하는 정수 e는 존재하지 않는다.

(b) 이제 $S(0) = 2001 + (-a)(-b)(-c)(-d) = 2001 + abcd$이므로, $S(0) = 2017$이 되는 것은 정확히

$$abcd = 16.$$

일 때이다. 역으로, $abcd = 16$인 서로 다른 네 정수는 모두 조건에 맞는 S를 준다(위의 식은 정수 계수의 일계수 다항식(monic polynomial)이다). 따라서 곱이 16인 서로 다른 네 정수의 집합 $\{a, b, c, d\}$의 개수를 세면 된다. 각 집합은 오름차순으로 나열하는 방법이 정확히 한 가지이다.

a, b, c, d는 각각 16의 약수이므로 그 절댓값은 $1, 2, 4, 8, 16$ 중 하나이고, 네 절댓값의 곱은 16이다. 정수들이 서로 다르므로 각 절댓값은 ($\pm m$의 꼴로) 최대 두 번까지만 나타날 수 있다. 절댓값을 거듭제곱 2^p 꼴로 쓰면 네 지수의 합은 4이고 어떤 지수도 두 번보다 많이 쓰이지 않으므로, 가능한 경우는

$$\{1, 1, 2, 8\}, \qquad \{1, 1, 4, 4\}, \qquad \{1, 2, 2, 4\}.$$

이다. (16을 쓰면 나머지 셋이 1, 1, 1이 되어야 하는데 이는 허용되지 않으며, $\{2, 2, 2, 2\}$는 2를 네 번 쓴다.) 이제 곱이 $+16$이 되도록 부호를 정한다.

- $\{1, 1, 2, 8\}$: 짝은 $1, -1$이고 -1을 기여하므로, $2, 8$ 중 정확히 하나가 음수이다. 이로부터 $\{-2, -1, 1, 8\}$과 $\{-8, -1, 1, 2\}$를 얻는다.
- $\{1, 1, 4, 4\}$: 두 짝 모두 $\pm$ 꼴이고, $(1)(-1)(4)(-4) = 16$이다. 이로부터 $\{-4, -1, 1, 4\}$를 얻는다.
- $\{1, 2, 2, 4\}$: 짝 $2, -2$가 -4를 기여하므로, $1, 4$ 중 정확히 하나가 음수이다. 이로부터 $\{-4, -2, 1, 2\}$와 $\{-2, -1, 2, 4\}$를 얻는다.

따라서 $a < b < c < d$를 고르는 방법은 **5**가지이다.

검산

- 소문항 (ii)에서 $N = 1$이면 $P(x) = x$이므로 $P(N + r) = 1 + r$은 $1 + \binom{r}{1}$과 일치하고, $P(3) = 3$이다. $N = 2$이면 $P(x) = 1 + \frac{1}{2}(x - 1)(x - 2)$에서 $P(4) = 4$이며, 이는 $r = 2$에 대한 주장과 같다.
- (iii)(b)에서는 다섯 집합 각각을 곱해 본다. 예를 들어 $(-2)(-1)(2)(4) = 16$이다. $[-16, 16]$에 속하는 서로 다른 정수로 이루어진 모든 네 수의 조를 컴퓨터로 탐색하면 정확히 이 다섯 개가 나온다.
- (iii)(a)에서는 $2018 - 2001 = 17$이 소수라는 점에 주목하자. 2001을 다른 값으로 바꾸어 차가 $4 = (-2)(-1)(1)(2)$와 같은 수가 되면 그러한 e가 존재할 수 있으므로, 소수라는 성질이 정말로 중요하다.

흔한 실수

- 소문항 (i)에서 $k \neq 0$을 빠뜨리거나, $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+1$만 쓰는 것. 이것은 가장 일반적인 다항식이 아니다.
- 소문항 (iii)(b)에서 양의 약수만 세거나, 1과 -1을 둘 다 쓸 수 있다는 것을 잊는 것.
- $S(0) = 2001 - abcd$라고 쓰는 것. 음의 부호가 네 개이므로 곱은 $+abcd$이다.

STEP 너머

차수가 N인 다항식이 $N+1$개의 점에서의 값으로 결정된다는 생각은 라그랑주(Lagrange) 보간법(interpolation)과 유한 차분(finite differences)의 바탕이 된다. 소문항 (ii)는 사실 다항식 $1 + \binom{x-1}{N}$이 모습을 바꾼 것이다. 소문항 (iii)은 정수론(number theory)의 표준적인 도구를 보여 주는 작은 예이다. P의 계수가 정수이면 $m-n$은 $P(m)-P(n)$을 나누며, 이 때문에 다항식이 정수에서 가질 수 있는 값은 크게 제한된다. 이런 종류의 나누어떨어짐 논증에 대해 더 읽어 보려면 Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)이 좋은 출발점이다.

풀이

STEP I 2018, 문제 6

순수수학 • 중점 공식과 사다리꼴 공식

STEP I 2018, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/18-s1-q6

핵심 아이디어

두 근삿값은 모두 같은 간격으로 놓인 각들의 사인의 합이며, 주어진 곱을 합으로 바꾸는 항등식(product-to-sum identity)을 쓰면 이런 합에 적절히 고른 $2\sin\theta$를 곱했을 때 망원합(telescoping sum)이 된다. 중점 규칙(midpoint rule)은 $\frac{\pi}{2n}$의 홀수 배에서, 사다리꼴 공식(trapezium rule)은 짝수 배에서 함숫값을 취하므로, $\theta = \frac{\pi}{2n}$으로 두면 각 소문항이 망원합이 된다. A_n과 B_n을 닫힌 형태(closed form)로 구하고 나면, 소문항 (iii)은 반각 공식(half-angle formula)만으로 해결된다.

풀이

예비 항등식

항등식에서 $P = \theta$, $Q = (2k-1)\theta$로 두면

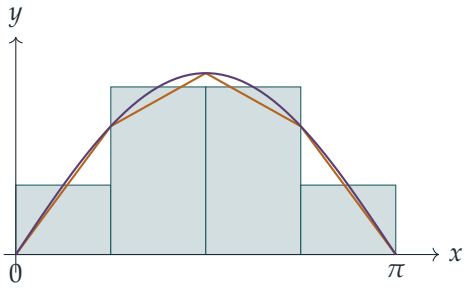
$$2\sin\theta\,\sin(2k-1)\theta = \cos(2k-2)\theta - \cos 2k\theta.$$

$k = 1$부터 $k = n$까지 더하면, 한 항에서 빼진 각 $\cos 2k\theta$가 다음 항에서 다시 더해지므로 합이 망원합으로 줄어든다.

$$\begin{aligned} 2\sin\theta\sum_{k=1}^{n}\sin(2k-1)\theta &= (\cos 0 - \cos 2\theta) + (\cos 2\theta - \cos 4\theta) + \cdots \\ &\quad + \big(\cos(2n-2)\theta - \cos 2n\theta\big) \\ &= 1 - \cos 2n\theta, \end{aligned}$$

따라서 원하는 결과를 얻는다.

이후로는 띠의 폭을 $h = \frac{\pi}{n}$으로, $\theta = \frac{\pi}{2n} = \frac{h}{2}$로 쓴다.



$n = 4$일 때: $\sin x$는 $[0, \pi]$에서 위로 볼록(concave)하므로, 중점 직사각형(음영)은 넓이를 과대평가하고 사다리꼴의 현(굵은 선)은 넓이를 과소평가한다.

소문항 (i)

k번째 띠는 $(k-1)h$부터 kh까지이므로, 그 중점은 $x = (k - \frac{1}{2})h = (2k-1)\theta$에 있고 높이는 $\sin(2k-1)\theta$이다. 따라서

$$A_n = h \sum_{k=1}^{n} \sin(2k-1)\theta.$$

$2\sin\theta$를 곱하고 $2n\theta = \pi$와 함께 항등식을 쓰면

$$2\sin\theta\, A_n = h\,(1 - \cos\pi) = 2h.$$

양변을 2로 나누면 $A_n \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{\pi}{n}$이 되어 원하는 결과를 얻는다.

소문항 (ii)

세로좌표(ordinate)는 $k = 0, 1, \ldots, n$에 대하여 $x = kh = 2k\theta$에서 취하며, 양 끝의 세로좌표는 $\sin 0 = \sin\pi = 0$이다. 따라서 사다리꼴 공식은 다음을 준다.

$$B_n = \frac{h}{2}\left(\sin 0 + 2\sum_{k=1}^{n-1} \sin 2k\theta + \sin\pi\right) = h \sum_{k=1}^{n-1} \sin 2k\theta.$$

이번에는 θ의 짝수 배이므로, 항등식을 한 번 더 쓰되 이번에는 $P = \theta$, $Q = 2k\theta$로 둔다.

$$2\sin\theta\, \sin 2k\theta = \cos(2k-1)\theta - \cos(2k+1)\theta.$$

$k = 1$부터 $n-1$까지 더하면 다시 망원합이 된다.

$$2\sin\theta \sum_{k=1}^{n-1} \sin 2k\theta = \cos\theta - \cos(2n-1)\theta.$$

? **생각해 보기** $\cos(2n-1)\theta$를 어떻게 간단히 할까?

$2n\theta = \pi$이므로 $(2n-1)\theta = \pi - \theta$이고, $\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$이다. 따라서 우변은 $2\cos\theta$이고

$$2\sin\theta\, B_n = 2h\cos\theta, \qquad \text{즉,} \qquad B_n \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{\pi}{n}\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

($n = 1$일 때는 합이 비어 있어 $B_1 = 0$이지만, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$이므로 이 공식은 여전히 성립한다.)

소문항 (iii)

$0 < \theta \le \frac{\pi}{2}$이므로 $\sin\theta \neq 0$이고, 따라서 소문항 (i)과 (ii)에서

$$A_n = \frac{h}{\sin\theta}, \qquad B_n = \frac{h\cos\theta}{\sin\theta}.$$

n을 $2n$으로 바꾸면 h와 θ가 모두 절반이 된다.

$$A_{2n} = \frac{h/2}{\sin(\theta/2)}, \qquad B_{2n} = \frac{(h/2)\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}.$$

첫 번째 결과는 $1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$와 $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$를 써서 얻는다.

$$\tfrac{1}{2}(A_n + B_n) = \frac{h}{2}\cdot\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{h}{2}\cdot\frac{2\cos^2(\theta/2)}{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)} = \frac{(h/2)\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} = B_{2n}.$$

두 번째 결과는 $\sin\theta$에 대한 같은 배각 공식(double-angle formula)을 쓰면(그리고 $\cos\frac{\theta}{2} \neq 0$이므로)

$$A_n B_{2n} = \frac{h}{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}\cdot\frac{(h/2)\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} = \frac{h^2}{4\sin^2(\theta/2)} = \left(\frac{h/2}{\sin(\theta/2)}\right)^2 = A_{2n}^2.$$

이로써 두 결과가 모두 증명되었다.

검산

- $n = 1$: 폭이 π이고 높이가 $\sin\frac{\pi}{2} = 1$인 중점 직사각형 하나에서 $A_1 = \pi$를 얻으며, 이는 $\pi/\sin\frac{\pi}{2}$와 일치한다. 또한 앞에서 말했듯이 $B_1 = 0$이다.
- $n = 2$: $A_2 = \frac{\pi}{2}(\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{4}) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \approx 2.2214$이고 $B_2 = \frac{\pi}{2} \approx 1.5708$이다. 그러면 $\frac{1}{2}(A_1 + B_1) = \frac{\pi}{2} = B_2$이고 $A_1 B_2 = \frac{\pi^2}{2} = A_2^2$이다.
- $n = 10$: 직접 더하면 $A_{10} \approx 2.00825$, $B_{10} \approx 1.98352$로, 참값인 넓이 2의 양쪽에 놓인다. $n \to \infty$일 때 $\frac{\pi}{n}/\sin\frac{\pi}{2n} \to 2$이고 $\cos\frac{\pi}{2n} \to 1$이므로, 둘 다 마땅히 2로 수렴한다. 네 결과 모두 200 이하의 모든 n에 대하여 컴퓨터로도 확인하였다.

흔한 실수

- 중점을 $(k-\frac{1}{2})h$가 아니라 kh에 두는 것. 이렇게 하면 중점 규칙이 사다리꼴 공식의 마디점에서의 합으로 바뀌어 버린다.
- 사다리꼴 공식에서 양 끝 세로좌표에 절반의 가중치가 붙는다는 것을 잊는 것. 이 문제에서는 양 끝 값이 0이므로, B_n은 단순히 내부 세로좌표들의 합에 h를 곱한 것이 된다.
- $(2n-1)\theta = \pi - \theta$를 쓰지 않고 $\cos(2n-1)\theta$를 간단히 하지 않은 채 두는 것.

STEP 너머

소문항 (iii)은 B_{2n}이 A_n과 B_n의 산술평균(arithmetic mean)이고, A_{2n}이 A_n과 B_{2n}의 기하평균(geometric mean)임을 말해 준다. 역수를 취하면 이것은 원의 바깥과 안쪽에 그린 다각형 사이에 π를 끼워 넣는 아르키메데스(Archimedes)의 방법에 나오는 "조화평균(harmonic mean) 다음에 기하평균" 패턴이 되며, 이 반복 과정은 Borchardt 알고리즘(Borchardt's algorithm)으로 알려져 있다. 더 일반적으로, 중점 규칙과 사다리꼴 공식의 오차를 비교하면(중점 규칙의 오차는 사다리꼴 공식 오차의 약 절반이며 부호가 반대이다) 심프슨 공식(Simpson's rule)과 리처드슨 외삽법(Richardson extrapolation)에 이르게 되는데, 이는 수치해석(numerical analysis)의 핵심 아이디어이다. 이러한 규칙들의 오차 분석에 대해서는 Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석 입문)에서 리만 적분(Riemann integral)을 다루는 부분을 참고하라.

풀이

STEP I 2018, 문제 7

순수수학 • 삼차방정식의 해법

STEP I 2018, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/18-s1-q7

핵심 아이디어

이 치환은 분모를 없앤 뒤 z^2 항과 z 항이 소거되어 z^3 항과 상수항만 남도록 고른 뫼비우스 변환(Möbius transformation)이다. $az^3+b=0$ 꼴의 삼차방정식(cubic equation)은 풀기 쉬우므로, 결국 할 일은 일반적인 축약된 삼차방정식 $x^3-3cx+d=0$을 이 특별한 꼴로 바꾸는 것이다. 그러려면 두 수를 그 합과 곱으로부터 구해야 하는데, 이는 이차방정식을 푸는 일이고, 이 이차방정식이 서로 다른 두 실근(real root)을 가질 조건에서 $d^2>4c^3$이 나온다.

풀이

소문항 (i)

$x=\dfrac{pz+q}{z+1}$를 대입하고 방정식 양변에 $(z+1)^3$을 곱한다.

$$(pz+q)^3-3pq(pz+q)(z+1)^2+pq(p+q)(z+1)^3=0.$$

$(pz+q)(z+1)^2=pz^3+(2p+q)z^2+(p+2q)z+q$가 필요하다. 이제 z의 거듭제곱별로 항을 모은다.

$$\begin{aligned}
z^3:&\quad p^3-3p^2q+p^2q+pq^2=p(p^2-2pq+q^2)=p(p-q)^2,\\
z^2:&\quad 3p^2q-3pq(2p+q)+3pq(p+q)=3p^2q-6p^2q-3pq^2+3p^2q+3pq^2=0,\\
z^1:&\quad 3pq^2-3pq(p+2q)+3pq(p+q)=3pq^2-3p^2q-6pq^2+3p^2q+3pq^2=0,\\
z^0:&\quad q^3-3pq^2+p^2q+pq^2=q(q^2-2pq+p^2)=q(p-q)^2.
\end{aligned}$$

따라서 방정식은 $az^3+b=0$으로 정리되고, 이때

$$a=p(p-q)^2,\qquad b=q(p-q)^2.$$

$p \neq q$이므로 $(p-q)^2$으로 나눌 수 있고, 더 간단한 꼴 $pz^3 + q = 0$을 얻는다.

이 치환은 $x \neq p$인 모든 경우에 $z = \dfrac{x-q}{p-x}$로 역변환할 수 있고, $x = p$가 삼차방정식의 근이 되는 것은 $p(p-q)^2 = 0$일 때뿐이다. 또한 $z = -1$은 결코 $pz^3 + q = 0$의 해가 되지 않는데, 그러려면 $p = q$여야 하기 때문이다. 따라서 삼차방정식의 근은 $pz^3 + q = 0$의 근과 정확히 일대일로 대응한다($p = 0$이면 삼차방정식은 그냥 $x^3 = 0$이다).

소문항 (ii)

$x^3 - 3cx + d$와 $x^3 - 3pqx + pq(p+q)$를 비교하면

$$pq = c, \qquad pq(p+q) = d, \qquad \text{즉} \qquad pq = c, \quad p+q = \frac{d}{c},$$

이어야 하며, $c \neq 0$이므로 c로 나누어도 된다. 합이 $\frac{d}{c}$이고 곱이 c인 두 수는

$$t^2 - \frac{d}{c}t + c = 0.$$

의 두 근이다. 이 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가질 필요충분조건은 판별식(discriminant)이 양수인 것이다.

$$\frac{d^2}{c^2} - 4c > 0 \iff d^2 > 4c^3,$$

여기서 $c^2 > 0$을 곱하였다. 따라서 $d^2 > 4c^3$이면 p와 q를 이 이차방정식의 두 근으로 잡아 주어진 방정식을 원하는 꼴로 쓸 수 있고, 이때 p, q는 서로 다른 실수이다.

소문항 (iii)

여기서는 $c = -2, d = -2$이므로 $d^2 = 4 > -32 = 4c^3$이고, 소문항 (ii)를 적용할 수 있다. $p+q = \frac{d}{c} = 1, pq = c = -2$이어야 하므로 p, q는 $t^2 - t - 2 = (t-2)(t+1) = 0$의 두 근이다. $p = 2, q = -1$로 잡자. 소문항 (i)에 의해 방정식은

$$2z^3 - 1 = 0, \qquad z^3 = \tfrac{1}{2},$$

이 되고, 이 방정식의 유일한 실근은 $z = 2^{-1/3}$이다. $u = 2^{1/3}$으로 놓으면 $z = \frac{1}{u}$이다. 그러면

$$x = \frac{2z-1}{z+1} = \frac{2-u}{1+u}.$$

> **생각해 보기** 분모에 세제곱근이 들어 있는데, 이 식을 더 깔끔하게 정리할 수 있을까?

할 수 있다. $1 + u^3 = (1+u)(1-u+u^2)$을 이용해 유리화(rationalise)하는데, $u^3 = 2$이므로 이 값은 3이다.

$$x = \frac{(2-u)(1-u+u^2)}{3} = \frac{2-3u+3u^2-u^3}{3} = \frac{3u^2-3u}{3} = u^2 - u.$$

따라서 실근은

$$x = 2^{2/3} - 2^{1/3} = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}.$$

이것이 유일한 실근이다. $x^3 + 6x - 2$의 도함수(derivative)는 $3x^2 + 6 > 0$이므로 이 함수는 순증가한다. 나머지 두 z 값은 복소수이고, 두 복소근을 준다. (대신 $p = -1, q = 2$로 잡으면 $z^3 = 2$가 되고 같은 근을 얻는다.)

소문항 (iv)

$x = p$를 대입하면 $p^3 - 3p^3 + 2p^3 = 0$이므로 $x - p$는 인수이고,

$$x^3 - 3p^2x + 2p^3 = (x - p)(x^2 + px - 2p^2) = (x - p)^2(x + 2p).$$

따라서 근은 $x = p$(중근(repeated root))와 $x = -2p$이다.

이것은 소문항 (i)의 꼴에서 $q = p$인 경우로, 바로 소문항 (ii)에서 제외했던 경우임에 주목하자. 이제 $c, d \neq 0$이고 $d^2 = 4c^3$이라 하자. 그러면 $c^3 = \frac{1}{4}d^2 > 0$이므로 $c > 0$이다. $p^2 = c$이고 $2p^3 = d$인 p를 찾는다. 두 번째 식을 첫 번째 식으로 나누어 보면

$$p = \frac{d}{2c},$$

를 짐작할 수 있고, 실제로 성립한다. $p^2 = \dfrac{d^2}{4c^2} = \dfrac{4c^3}{4c^2} = c$이고, 따라서 $2p^3 = 2p \cdot p^2 = 2 \cdot \dfrac{d}{2c} \cdot c = d$이다. 그러므로 $x^3 - 3cx + d = x^3 - 3p^2x + 2p^3$이고, 그 근은

$$x = \frac{d}{2c} \text{ (중근)} \qquad \text{과} \qquad x = -\frac{d}{c}.$$

검산

- 소문항 (iii): $\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} \approx 0.32748$이고, 이 값에서 $x^3 + 6x - 2$는 소수점 아래 열다섯째 자리까지 0이다. 카르다노(Cardano)의 공식도 같은 근 $\sqrt[3]{1+3} + \sqrt[3]{1-3}$을 준다.
- 소문항 (iv): $c = 1, d = 2$이면 삼차방정식은 $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$이고, 이는 중근 $\frac{d}{2c} = 1$, 단근 $-\frac{d}{c} = -2$와 일치한다.
- 소문항 (i): $p = 1, q = 0$이면 삼차방정식은 $x^3 = 0$이고 치환은 $x = \frac{z}{z+1}$이 되므로 $x^3(z + 1)^3 = z^3$이며, 이는 $a = 1, b = 0$과 일치한다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)에서 c가 음수일 수 있음을 잊는 것. 부등식에 c^2을 곱하는 것은 안전하지만, c를 곱하는 것은 그렇지 않다.

- 소문항 (iii)에서 $\frac{1}{2}$의 세제곱근 세 개를 모두 실근으로 답하는 것. 실수인 것은 $z = 2^{-1/3}$뿐이다.
- 소문항 (iv)에서 $p = \sqrt{c}$로 잡는 것. 이는 $d < 0$일 때 부호가 틀린다. $p = \frac{d}{2c}$로 잡으면 부호가 자동으로 맞는다.

STEP 너머

이것은 삼차방정식에 대한 카르다노의 공식에 이르는 깔끔한 길이다. 이차방정식 $t^2 - \frac{d}{c}t + c = 0$은 "분해식(resolvent)" 역할을 하고, $d^2 - 4c^3$의 부호는 (상수배를 제외하면) 삼차방정식의 판별식으로, 삼차방정식이 실근을 하나 가지는지 세 개 가지는지를 결정한다. 삼차방정식과 사차방정식(quartic)은 거듭제곱근(radicals)으로 풀 수 있는데 일반적인 오차방정식(quintic)은 왜 그럴 수 없는지를 다루는 것이 갈루아 이론(Galois theory)이다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 이에 대해 읽기 시작하기에 좋은 책이다.

풀이

STEP I 2018, 문제 8

순수수학 • 연립 미분방정식

STEP I 2018, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/18-s1-q8

핵심 아이디어

두 도함수(derivative) 규칙은 서로 상쇄되도록 만들어져 있다. s'이 나타날 때마다 c^2이 따라 들어오고, c'이 나타날 때마다 $-\mathrm{s}^2$이 따라 들어온다. 따라서 문제 전체에 걸쳐 자연스러운 방법은 곱과 몫을 미분하고 항들이 어떻게 합쳐지는지 지켜본 다음, (i)의 항등식(identity)을 이용해 모든 것을 하나의 함수로 바꾸는 것이다. 적분에서는 각 피적분함수(integrand)를 "무언가 곱하기 s^2" 또는 "무언가 곱하기 c^2"으로 읽어야 한다. 이것들이 바로 우리가 알고 있는 도함수이기 때문이다. 마지막 두 소문항의 u에 대한 적분은 사실 모습만 바꾼 같은 적분이다.

풀이

모호함이 없을 때에는 $\mathrm{s}(x)$와 $\mathrm{c}(x)$를 줄여서 s와 c로 쓴다.

소문항 (i)

연쇄법칙(chain rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{s}^3+\mathrm{c}^3\right)=3\mathrm{s}^2\,\mathrm{s}'+3\mathrm{c}^2\,\mathrm{c}'=3\mathrm{s}^2\mathrm{c}^2-3\mathrm{c}^2\mathrm{s}^2=0$$

이므로 $\mathrm{s}^3+\mathrm{c}^3$은 상수이다. $x=0$에서 그 값은 $0^3+1^3=1$이므로

$$\mathrm{s}(x)^3+\mathrm{c}(x)^3=1 \quad \text{모든} x$$

가 성립하고, 이것이 보이려던 것이다. 이 항등식은 문제의 나머지 부분을 움직이는 엔진이다. 이 식 덕분에 s^3을 $1-\mathrm{c}^3$으로, 또 그 반대로 바꿔 쓸 수 있다.

소문항 (ii)

곱의 미분법(product rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{sc}) = \mathrm{s}'\mathrm{c} + \mathrm{sc}' = \mathrm{c}^2 \cdot \mathrm{c} + \mathrm{s} \cdot (-\mathrm{s}^2) = \mathrm{c}^3 - \mathrm{s}^3.$$

(i)에 의해 $\mathrm{s}^3 = 1 - \mathrm{c}^3$이므로 이 값은 $\mathrm{c}^3 - (1 - \mathrm{c}^3) = 2\mathrm{c}^3 - 1$과 같고, 이것이 원하던 결과이다.

몫에 대해서는 ($\mathrm{c}(x) \neq 0$인 곳에서) 몫의 미분법(quotient rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{c}}\right) = \frac{\mathrm{s}'\mathrm{c} - \mathrm{sc}'}{\mathrm{c}^2} = \frac{\mathrm{c}^3 + \mathrm{s}^3}{\mathrm{c}^2} = \frac{1}{\mathrm{c}(x)^2}$$

이며, 여기서도 (i)을 이용했다. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$와 멋지게 닮아 있다는 점에 주목하자.

소문항 (iii)

$\mathrm{c}' = -\mathrm{s}^2$이므로 첫 번째 적분은 곧바로 얻어진다.

$$\int \mathrm{s}(x)^2 \,\mathrm{d}x = -\mathrm{c}(x) + C.$$

> ? **생각해 보기** 이미 알고 있는 도함수 $\mathrm{c}' = -\mathrm{s}^2$이 드러나도록 s^5을 어떻게 쓸 수 있을까?

인수 s^2을 떼어 내고 남은 부분에 (i)을 적용한다. $\mathrm{s}^5 = \mathrm{s}^3 \cdot \mathrm{s}^2 = (1 - \mathrm{c}^3)\,\mathrm{s}^2 = -(1 - \mathrm{c}^3)\,\mathrm{c}'$. 이것은 $g(\mathrm{c})\,\mathrm{c}'$ 꼴이므로 연쇄법칙을 거꾸로 적용하여 적분할 수 있다.

$$\int \mathrm{s}(x)^5 \,\mathrm{d}x = -\int (1 - \mathrm{c}^3)\,\mathrm{c}' \,\mathrm{d}x = -\mathrm{c}(x) + \tfrac{1}{4}\mathrm{c}(x)^4 + C.$$

(다시 미분해 보면 $-\mathrm{c}' + \mathrm{c}^3\mathrm{c}' = -\mathrm{c}'(1 - \mathrm{c}^3) = \mathrm{s}^2 \cdot \mathrm{s}^3$이 되어 예상대로이다.)

소문항 (iv)

$u = \mathrm{s}(x)$로 놓으면 $x = \mathrm{s}^{-1}(u)$이고 $\mathrm{d}u = \mathrm{s}'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{c}(x)^2\,\mathrm{d}x$이다. (i)에서 $\mathrm{c}^3 = 1 - u^3$이므로 $\mathrm{c} = (1 - u^3)^{1/3}$이고(실수 세제곱근(cube root)을 택하며, 이는 c의 부호와 관계없이 성립한다), 따라서

$$(1 - u^3)^{2/3} = \mathrm{c}(x)^2.$$

그러므로

$$\int \frac{1}{(1 - u^3)^{2/3}}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{\mathrm{c}^2}\,\mathrm{c}^2\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x = x + C = \mathrm{s}^{-1}(u) + C$$

이고, 이것이 보여야 할 것이었다.

소문항 (v)

같은 치환(substitution)을 사용한다. 이때 $(1-u^3)^{1/3} = \mathrm{c}$이고 $\mathrm{d}u = \mathrm{c}^2\,\mathrm{d}x$이다.

첫 번째 적분에서는 $(1-u^3)^{4/3} = \mathrm{c}^4$이므로, (ii)의 몫에 대한 결과에 의해

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{(1-u^3)^{4/3}} = \int \frac{\mathrm{c}^2}{\mathrm{c}^4}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{c}^2} = \frac{\mathrm{s}(x)}{\mathrm{c}(x)} + C = \frac{u}{(1-u^3)^{1/3}} + C.$$

두 번째 적분은

$$\int (1-u^3)^{1/3}\,\mathrm{d}u = \int \mathrm{c}\cdot\mathrm{c}^2\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{c}^3\,\mathrm{d}x.$$

(ii)의 곱에 대한 결과에 따르면 $\mathrm{c}^3 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{sc})\right)$이므로

$$\int \mathrm{c}^3\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\big(x + \mathrm{s}(x)\mathrm{c}(x)\big) + C.$$

$x = \mathrm{s}^{-1}(u)$, $\mathrm{sc} = u(1-u^3)^{1/3}$을 이용해 u로 되돌리면

$$\int (1-u^3)^{1/3}\,\mathrm{d}u = \tfrac{1}{2}\Big(\mathrm{s}^{-1}(u) + u(1-u^3)^{1/3}\Big) + C.$$

검산

- (v)의 답은 u에 대해 미분하여 확인할 수 있다. 예를 들어

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\,\frac{u}{(1-u^3)^{1/3}} = \frac{1}{(1-u^3)^{1/3}} + \frac{u^3}{(1-u^3)^{4/3}} = \frac{1}{(1-u^3)^{4/3}}.$$

- 미분방정식(differential equation)을 $x = 1.2$까지 수치적으로 풀면 $\mathrm{s}(1.2) \approx 0.9411$, $\mathrm{c}(1.2) \approx 0.5500$을 얻고, 실제로 $0.9411^3 + 0.5500^3 \approx 1$이다. $U = \mathrm{s}(1.2)$로 두고 수치적분(numerical integration)을 하면 (iv)의 예측대로 $\int_0^U (1-u^3)^{-2/3}\,\mathrm{d}u \approx 1.2000$이고, $\int_0^U (1-u^3)^{1/3}\,\mathrm{d}u \approx 0.8588 = \frac{1}{2}(1.2 + 0.9411\times 0.5500)$이 되어 (v)와 일치한다.
- 수치적으로 $\int_0^{1.2} \mathrm{s}^2\,\mathrm{d}x \approx 0.4500 = 1 - \mathrm{c}(1.2)$이며, (iii)과 일치한다.

흔한 실수

- $\int \mathrm{s}^2\,\mathrm{d}x = +\mathrm{c} + C$로 쓰는 실수. $\mathrm{c}' = -\mathrm{s}^2$의 음의 부호는 빠뜨리기 쉽다.
- (iv)와 (v)에서 $\mathrm{d}u$를 $\mathrm{c}^2\,\mathrm{d}x$로 바꾸는 것을 잊거나, 최종 답을 u가 아니라 x로 나타낸 채 두는 실수.
- (v)에서 (ii)가 이미 c^3을 도함수와 상수의 합으로 나타내고 있다는 점을 알아채지 못하고 직접 적분하려 하는 실수.

STEP 너머

s, c 쌍은 원 $x^2 + y^2 = 1$ 대신 곡선 $x^3 + y^3 = 1$에 대한 sin과 cos처럼 행동한다. 이러한 "일반화된 삼각함수(generalised trigonometric functions)"는 타원함수(elliptic functions)의 가까운 친척이다. 타원함수는 $\sin^{-1} u = \int (1 - u^2)^{-1/2} \, \mathrm{d}u$인 것과 마찬가지로, (iv)에 나온 것과 같은 적분의 역함수를 취하여 얻어진다. 함수를 초기조건(initial conditions)이 주어진 미분방정식으로 정의하고 그 성질을 모두 미분방정식에서 이끌어 내는 것은 대학 1학년에서 배우는 표준적인 기법이며, 함수가 "유일하게 정의된다"는 가정은 상미분방정식(ODE)의 존재성과 유일성 정리(existence and uniqueness theorem)에 해당한다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 이론과 함께 연립계(coupled systems)의 많은 예를 다룬다.

풀이

STEP I 2018, 문제 9

역학 • 경사면 위의 운동

STEP I 2018, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

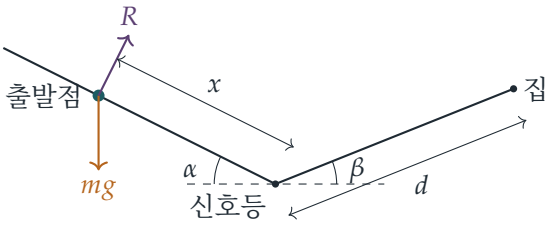
step.maths.org/questions/18-s1-q9

핵심 아이디어

저항이 없으므로 고카트(go-kart)는 각 직선 구간에서 일정한 가속도(acceleration)를 가진다. 첫 번째 비탈을 내려갈 때는 $g\sin\alpha$이고, 두 번째 비탈을 올라갈 때는 크기 $g\sin\beta$의 감속도(deceleration)이다. 따라서 각 구간은 등가속도 문제이고, 두 구간은 신호등에서의 속력으로 이어 붙여진다. 집에 도착할 수 있는지는 에너지(energy)(또는 $v^2 = u^2 + 2as$)로 판정하고, 시간은 각 구간에서 $s = ut + \frac{1}{2}at^2$로 구하며, 나머지는 k에 대한 꼼꼼한 대수 계산이다.

풀이

고카트와 탑승자를 각 직선 최대경사선(line of greatest slope)을 따라 움직이는 질점(particle)으로 모형화하고, 마찰이나 공기 저항은 없다고 한다. 작용하는 힘은 무게 mg와 수직항력(normal reaction) R뿐이며, 수직항력은 일을 하지 않는다.



집에 도착하기

첫 번째 비탈 방향으로 힘을 분해하면, 비탈 아래 방향의 무게 성분은 $mg\sin\alpha$이므로 가속도는 $g\sin\alpha$이다. 정지 상태에서 출발하여 거리 x만큼 이동하므로, 신호등에서의 속력 V는 다음을 만족한다.

$$V^2 = 2gx\sin\alpha.$$

속력이 갑자기 변하지 않으므로 두 번째 구간은 속력 V로 오르기 시작하고, 이제 무게는 비탈 방향으로 크기 $g\sin\beta$의 감속도를 준다. 신호등을 지나 거리 s인 지점에서 속력 v는 $v^2 = V^2 - 2gs\sin\beta$를 만족한다. 집에 도착하려면 $s = d$까지 줄곧 v^2이 음이 아니어야 한다. 즉

$$2gx\sin\alpha - 2gd\sin\beta \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad x\sin\alpha \geq d\sin\beta,$$

이고, 이것이 보이려던 것이다. (같은 말로, 에너지 보존(conservation of energy)에 의해 출발 높이보다 높이 올라갈 수 없는데, 출발점은 신호등보다 $x\sin\alpha$만큼 높고 집은 신호등보다 $d\sin\beta$만큼 높다.)

전체 시간

계산을 깔끔하게 하기 위해 $c = \left(\frac{1}{2}g\sin\alpha\right)^{1/2}$로 놓으면 $g\sin\alpha = 2c^2$이고, $\sin\beta = \sin\alpha/k$이므로 $g\sin\beta = 2c^2/k$이다.

첫 번째 구간. $x = \frac{1}{2}(g\sin\alpha)t_1^2 = c^2t_1^2$에서 신호등까지 걸리는 시간은 $t_1 = \sqrt{x}/c$이고, 그곳에서의 속력은 $V = (g\sin\alpha)t_1 = 2c\sqrt{x}$이다.

두 번째 구간. 신호등에서부터 s를 재면 $s = Vt - \frac{1}{2}(g\sin\beta)t^2$이므로, $s = d$에 도달하는 시간 t_2는 다음을 만족한다.

$$\frac{c^2}{k}\,t_2^2 - 2c\sqrt{x}\,t_2 + d = 0.$$

> **생각해 보기** 이 이차방정식(quadratic equation)은 근이 두 개이다. 어느 것이 도착하는 시각인가?

더 큰 근은 끝없이 긴 비탈 위의 질점이 멈춘 뒤 다시 내려오면서 $s = d$를 또 지나는 시각이다. 처음으로 $s = d$에 도달할 때 도착하므로, 작은 근을 택한다.

$$t_2 = \frac{2c\sqrt{x} - \sqrt{4c^2x - 4c^2d/k}}{2c^2/k} = \frac{k}{c}\left(\sqrt{x} - \sqrt{x - \tfrac{d}{k}}\right) = \frac{1}{c}\left(k\sqrt{x} - \sqrt{k^2x - kd}\right),$$

여기서 $k > 0$이므로 $k\sqrt{x - d/k} = \sqrt{k^2x - kd}$를 이용하였다. 제곱근이 실수가 되는 것은 바로 $x \geq d/k$이기 때문이며, 이는 앞부분의 조건 $x\sin\alpha \geq d\sin\beta$와 같다.

더하면 $T = t_1 + t_2$로부터

$$\left(\frac{g\sin\alpha}{2}\right)^{1/2} T = cT = (1+k)\sqrt{x} - \sqrt{k^2x - kd},$$

를 얻고, 이것이 구하려던 결과이다.

T의 최소화

c는 양의 상수이므로 $x \geq d/k$에서 $f(x) = (1+k)\sqrt{x} - \sqrt{k^2x - kd}$를 최소화하면 된다. 미분(differentiation)하면

$$f'(x) = \frac{1+k}{2\sqrt{x}} - \frac{k^2}{2\sqrt{k^2x - kd}}.$$

$f'(x) = 0$으로 놓으면 $(1+k)\sqrt{k^2x - kd} = k^2\sqrt{x}$이다. 양변이 모두 양수이므로 제곱해도 잃는 것이 없다.

$$\begin{aligned}(1+k)^2(k^2x - kd) &= k^4x \\ x\left[(1+k)^2k^2 - k^4\right] &= (1+k)^2kd \\ xk^2(1+2k) &= (1+k)^2kd,\end{aligned}$$

여기서 $(1+k)^2 - k^2 = 1 + 2k$를 이용하였다. $k^2(1+2k) > 0$으로 나누면

$$x = \frac{(1+k)^2}{k(1+2k)}\,d.$$

이것은 허용되는 출발점이다. $(1+k)^2 = 1 + 2k + k^2 > 1 + 2k$이므로 이 x는 d/k보다 엄밀히 크고, 따라서 집에 도착한다.

최적의 x가 존재하는 것은 자연스럽다. 너무 가까이서 출발하면 언덕의 마지막 구간을 기어가듯 오르게 되고, 너무 멀리서 출발하면 첫 번째 비탈에서 오랜 시간을 보내게 된다.

검산

- 최적점에서 $\sqrt{k^2x - kd} = k^2\sqrt{x}/(1+k)$이므로 $cT = \sqrt{x}\,\dfrac{1+2k}{1+k} = \sqrt{\dfrac{(1+2k)d}{k}}$이며, 기분 좋을 만큼 간단한 최소 시간이다.
- $\alpha = \beta$, 즉 $k = 1$로 두자. 그러면 최적점은 $x = \frac{4}{3}d$이고, 공식은 $cT = 2\sqrt{4d/3} - \sqrt{d/3} = \sqrt{3d}$를 주어 앞의 검산과 일치한다.
- 경계값 $x = d/k$에서는 문 앞까지 간신히 기어가게 되고 $f'(x) \to -\infty$이므로, 출발점을 조금 뒤로 옮기면 분명히 시간이 줄어든다.
- 여러 무작위 각도와 거리에 대해 작은 시간 간격으로 운동을 수치적으로 진행시켜 보았더니 T의 공식이 유효숫자 다섯 자리까지 재현되었고, 컴퓨터로 x를 탐색하니 위에서 구한 값에서 최솟값이 나타났다.

흔한 실수

- t_2에 대한 이차방정식에서 큰 근을 택하는 것. 그것은 다시 내려오면서 집을 지나치는 시각이다.
- 신호등에서의 속력은 주어지지 않았으므로 첫 번째 구간에서 넘겨받아야 한다는 것을 잊는 것.
- 조건 $x \geq d/k$를 빠뜨리는 것. 이 조건이 바로 $\sqrt{k^2x - kd}$를 실수로 만든다.

STEP 너머

최소 시간에 대한 깔끔한 답은 더 넓은 주제를 암시한다. 이동 시간을 최소화하도록 경로나 출발점을 고르는 문제는 **변분법**(calculus of variations)의 주제이며, 그 가장 유명한 문제인 최단강하선(brachistochrone) 문제는 중력 아래에서 가장 빨리 내려가는 곡선을 묻는다. 대학 1학년 역학에서는 보존력(conservative force)에 대해 에너지만으로 질점이 갈 수 있는 곳을 알 수 있지만, 시간을 구하려면 운동방정식(equation of motion)을 적분해야 한다는 생각도 만나게 된다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 두 생각을 모두 꼼꼼하게 전개한다.

풀이

STEP I 2018, 문제 10

역학 • 연결된 입자

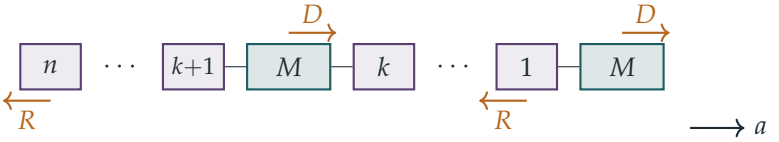
> **STEP I 2018, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/18-s1-q10

핵심 아이디어

모든 차량의 가속도(acceleration)는 같으므로, 열차 전체로부터 가속도를 한 번 구한 다음 열차에서 가장 다루기 편한 부분에 뉴턴(Newton)의 제2법칙(Newton's second law)을 적용한다. 열차를 어떤 연결기(coupling)에서 끊으면 그 연결기의 장력(tension)이 외력(external force)으로 드러난다. 뒤의 소문항들을 쉽게 만드는 요령은 맨 앞 연결기의 장력 T를 두 가지 방법, 즉 맨 앞 기관차로부터 한 번, 그 뒤의 모든 것으로부터 한 번 구하는 것이다. 이렇게 하면 T가 하나의 양 $R + ma$와 연결되는데, 이 양은 다른 모든 연결기의 장력도 지배한다.

풀이

모형. 각 기관차와 객차를 수평 선로를 따라 움직이는 입자(particle)로, 연결기를 장력 또는 압축(compression)을 받을 수 있는 가벼운 막대로 본다. 기관차에는 저항(resistance)이 작용하지 않고, 각 차량에 작용하는 연직 방향의 힘은 평형을 이루므로 수평 방향의 힘만 고려하면 된다. 가속도 a는 운동 방향을 양으로 잡는다. 객차에 앞에서부터 $1, 2, \ldots, n$의 번호를 붙여, 객차 $1, \ldots, k$는 두 기관차 사이에, 객차 $k+1, \ldots, n$은 두 번째 기관차 뒤에 있도록 한다(단, $1 \le k \le n-1$).



(각 객차에는 뒤쪽으로 저항 R가 작용한다. 그림에는 두 개만 그렸다.)

가속도. 열차 전체의 질량은 $nm+2M$이고 연결기의 힘은 내력이므로

$$(nm+2M)a = 2D - nR, \qquad a = \frac{2D-nR}{nm+2M} > 0,$$

이다. $2D > nR$이므로 이 값은 양수이다. 특히 $R+ma>0$이며, 이 사실을 거듭 사용한다.

소문항 (i)

맨 앞 기관차는 앞쪽으로 D, 뒤쪽으로 연결기의 장력 T를 받으므로

$$D - T = Ma.$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned} T = D - \frac{M(2D-nR)}{nm+2M} &= \frac{D(nm+2M) - 2MD + nMR}{nm+2M} \\ &= \frac{n(mD+MR)}{nm+2M}, \end{aligned}$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

T의 더 깔끔한 꼴. 이번에는 맨 앞 기관차 뒤의 모든 것, 즉 기관차 하나와 객차 n량을 보자. 전체 질량은 $M+nm$이다. 이 부분은 T와 두 번째 기관차의 D에 의해 앞으로 당겨지고, nR의 저항을 받는다.

$$T + D - nR = (M+nm)a.$$

이 식에서 $D-T=Ma$를 빼면 D가 소거된다.

$$2T - nR = nma, \qquad \text{따라서} \qquad T = \tfrac{1}{2}n\,(R+ma).$$

소문항 (ii)

맨 앞 연결기를 제외한 모든 연결기는 두 종류 가운데 하나이다.

두 번째 기관차 앞의 연결기. $1 \le j \le k$에 대하여 객차 j 바로 뒤의 연결기의 장력을 T_j라 하자(따라서 T_k는 객차 k와 두 번째 기관차 사이 연결기의 장력이다). 맨 앞 기관차와 객차 $1,\dots,j$의 질량은 $M+jm$이고, T_j에 의해 뒤로 당겨진다.

$$D - jR - T_j = (M+jm)a \quad \Longrightarrow \quad T_j = (D-Ma) - j(R+ma) = T - j(R+ma).$$

$R+ma>0$이고 $j \ge 1$이므로, k의 값에 관계없이 이러한 모든 연결기에 대하여 $T_j < T$이다.

두 번째 기관차 뒤의 연결기. $k+1 \le j \le n$에 대하여 객차 j 바로 앞의 연결기의 장력을 S_j라 하자. 그 뒤에 있는 차량들을 보는 것이 가장 쉽다. 객차 $j, \dots, n$은 모두 $n-j+1$량이며, 앞으로는 S_j에 의해서만 당겨진다.

$$S_j - (n-j+1)R = (n-j+1)ma \quad \Longrightarrow \quad S_j = (n-j+1)(R+ma).$$

? **생각해 보기** 뒤쪽 연결기 가운데 어느 것의 장력이 가장 크며, 그것은 T와 비교하여 어떠한가?

장력 S_j는 j가 커질수록 작아지므로, 가장 큰 것은 두 번째 기관차 바로 뒤의 연결기의 장력 $S_{k+1} = (n-k)(R+ma)$이다. 이를 $T = \frac{1}{2}n(R+ma)$와 비교하고 $R+ma > 0$으로 나누면

$$S_{k+1} < T \iff n-k < \tfrac{1}{2}n \iff k > \tfrac{1}{2}n.$$

이다. 따라서 $k > \frac{1}{2}n$이면 뒤쪽의 모든 연결기의 장력은 $S_{k+1} < T$ 이하이고, 앞쪽의 모든 연결기에 대하여 $T_j < T$이다. 그러므로 T는 다른 어느 연결기의 장력보다도 크며, 이것이 구하려던 결과이다. (이 조건은 필요조건이기도 하다. $k \le \frac{1}{2}n$이면 $S_{k+1} \ge T$이다.)

소문항 (iii)

객차 k와 두 번째 기관차 사이의 연결기를 보자. 소문항 (ii)와 $T = \frac{1}{2}n(R+ma)$로부터

$$T_k = T - k(R+ma) = \left(\tfrac{1}{2}n - k\right)(R+ma).$$

이다. $k > \frac{1}{2}n$이면 첫째 인수는 음수이고 둘째 인수는 양수이므로 $T_k < 0$이다. 즉 이 연결기는 압축을 받는다. 물리적으로 보면, 맨 앞 기관차가 앞에서 끄는 동안 두 번째 기관차는 자기 앞의 객차 k량, 즉 열차의 절반이 넘는 부분을 밀고 있는 것이다.

검산

- $n=5, k=3, M=10, m=2, D=20, R=1$이라 하자. 그러면 $a = \frac{35}{30} = \frac{7}{6}$이고, 공식에서 $T = \frac{5(40+10)}{30} = \frac{25}{3}$를 얻으며, 이는 $D - Ma = 20 - \frac{35}{3}$와 일치한다. 열차를 따라 뒤로 가면서 장력은 $\frac{25}{3}, 5, \frac{5}{3}, -\frac{5}{3}$(객차 3과 기관차 사이), 그다음 $\frac{20}{3}, \frac{10}{3}$이다. 따라서 T가 가장 크고, 예측한 대로 정확히 하나의 연결기가 압축을 받는다.
- $M=0$이면 기관차는 단지 힘일 뿐이고 $T=D$인데, 질량이 없는 맨 앞 기관차라면 마땅히 그래야 한다.
- 각 장력은 힘에 차원이 없는 비를 곱한 것이므로 단위가 올바르다.

흔한 실수

- 기관차에도 저항을 주는 것. 문제에서는 객차에만 저항이 작용한다.

- 두 번째 기관차를 포함하는 열차 구간이라면 어디든 그 기관차의 구동력(driving force)이 작용한다는 것을 잊는 것.
- 모든 연결기가 반드시 장력을 받는다고 가정하는 것. 연결기는 막대이므로 음의 장력은 물리적으로 전혀 문제없는 미는 힘이다.

STEP 너머

계를 여러 부분으로 나누어 각각에 대해 따로 자유물체도(free-body diagram)를 그리고, 내력이 크기가 같고 방향이 반대인 쌍으로 나타나게 하는 것은 연결된 물체의 역학의 기초이다. 대학 1학년 과정에서 이는 트러스(truss)와 골조(framework)의 해석으로 이어진다. 여기서는 여러 부재의 내력을 한꺼번에 구하며, 어떤 부재는 장력을 받는 인장재(tie)가 아니라 압축을 받는 압축재(strut)로 밝혀지기도 한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 자유물체도와 뉴턴의 제3법칙(Newton's third law)을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP I 2018, 문제 11

역학 • 경사면 위의 마찰

STEP I 2018, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/18-s1-q11

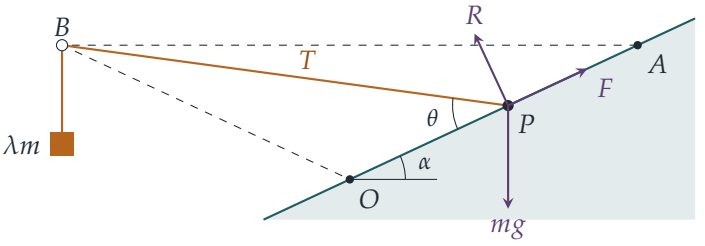
핵심 아이디어

먼저 기하부터 살펴본다. $OA = OB = d$이므로 삼각형 OAB는 이등변삼각형(isosceles triangle)이고, AB가 수평이므로 두 밑각은 모두 α이다. 줄은 P에서 O 쪽을 지나 B를 향해 뻗어 있으므로, P를 일부는 경사면 **아래쪽으로**, 일부는 평면에서 **떨어지는** 쪽으로 당긴다. 따라서 마찰력(friction)이 입자를 위로 붙잡아야 하고, 수직항력(normal reaction)은 장력(tension) 때문에 줄어든다. 평형(equilibrium)의 각 조건은 θ에 대한 부등식(inequality)이고, 이 부등식은 (i)에서 구한 범위의 모든 θ에 대해 성립해야 하므로 가장 불리한 위치를 찾는다.

풀이

P와 매달린 물체를 입자(particle)로, 줄을 가볍고 늘어나지 않는(light and inextensible) 것으로, 도르래(pulley)를 매끄러운 것으로 모형화한다. 따라서 장력은 줄 전체에서 같다. 매달린 입자는 평형 상태이므로

$$T = \lambda mg.$$



소문항 (i)

O를 원점에 두고 x축을 수평으로 잡는다. 그러면 $A = (d\cos\alpha,\ d\sin\alpha)$이다. 점 B는 A와 높이가 같고 O로부터 거리가 d이므로 $B = (\pm d\cos\alpha,\ d\sin\alpha)$이다. 양의 부호를 택하면 A 자신이 되므로

$$B = (-d\cos\alpha,\ d\sin\alpha).$$

이 점은 평면을 나타내는 직선보다 위에 있고, O를 기준으로 A의 반대편에 있다. 삼각형 OAB에서 $OA = OB = d$이고, AB는 수평이며 AO가 수평선과 각 α를 이루므로 $\angle OAB = \alpha$이다. 따라서 $\angle OBA = \alpha$이기도 하고, $\angle AOB = 180^\circ - 2\alpha$이며, $\alpha < 45^\circ$이므로 이 각은 둔각이다.

P가 OA 위에 있다고 하자. 줄은 PB를 따라 놓이고, 줄이 L과 이루는 예각은 $\theta = \angle BPO$이다. 곧 보이겠지만 이 각은 최대 $2\alpha < 90^\circ$이므로 예각이다. 이 각은 삼각형 PAB의 외각(exterior angle)이므로

$$\theta = \angle BPO = \angle PAB + \angle PBA = \alpha + \angle PBA.$$

P가 O에서 A로 움직이면 반직선 BP는 BO에서 BA 쪽으로 돌아가므로, $\angle PBA$는 $\angle OBA = \alpha$에서 0까지 감소한다. 따라서

$$\alpha \le \theta \le 2\alpha,$$

이고, P가 O에 있을 때 $\theta = 2\alpha$이며 P가 A에 가까워질수록 $\theta \to \alpha$이다.

이것이 힘에 대해 무엇을 뜻하는지 짚어 두자. 경사면 아래 방향 PO에서 재면, 줄은 예각 θ를 이루며 평면에서 멀어지는 쪽을 향한다. 따라서 장력은 경사면 아래쪽으로 성분 $T\cos\theta$를, 평면에 수직인 방향으로 성분 $T\sin\theta$를 가지며, 후자는 P를 평면에서 떼어 놓는 쪽으로 당긴다.

소문항 (ii)

평면에 수직인 방향으로 힘을 분해(resolving)하면

$$R = mg\cos\alpha - T\sin\theta = mg(\cos\alpha - \lambda\sin\theta).$$

> **생각해 보기** μ를 모르는데, 이 소문항에서 마찰력은 어디에 있는가?

마찰력은 필요 없다. μ가 무엇이든 P는 평면과 접촉한 채로 있어야 하므로 $R \ge 0$이어야 한다. (사실은 $R > 0$이다. $R = 0$이면 마찰력이 없어서, 경사면을 따라 작용하는 $mg\sin\alpha + T\cos\theta > 0$과 균형을 이룰 것이 아무것도 없다.) 따라서 모든 점에서 평형이려면 다음이 필요하다.

$$\lambda\sin\theta \le \cos\alpha \quad \text{나타나는 모든} \theta \text{에 대하여.}$$

sin은 $[\alpha, 2\alpha] \subset [0°, 90°)$에서 증가하므로, $\sin\theta$의 최댓값은 $\theta = 2\alpha$에서(또는 P가 O에 가까워질 때 그 값에 임의로 가깝게) 나타난다. 그러므로 $\lambda \sin 2\alpha \leq \cos\alpha$, 즉 $2\lambda \sin\alpha \cos\alpha \leq \cos\alpha$이다. $\cos\alpha > 0$으로 나누면

$$2\lambda \sin\alpha \leq 1,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

소문항 (iii)

중력과 장력이 모두 P를 경사면 아래로 당기므로, 마찰력 F는 경사면 위쪽으로 작용한다. 경사면을 따라 분해하면

$$F = mg\sin\alpha + T\cos\theta = mg(\sin\alpha + \lambda\cos\theta).$$

이 위치에서 평형이 가능할 필요충분조건은 $F \leq \mu R$이다($F > 0$이므로 이 조건은 $R > 0$도 보장한다). $\mu = \tan\beta$로 두면 조건은 다음과 같다.

$$\sin\alpha + \lambda\cos\theta \leq \frac{\sin\beta}{\cos\beta}(\cos\alpha - \lambda\sin\theta).$$

$\cos\beta > 0$을 곱하고 λ가 있는 항을 모으면

$$\lambda(\cos\theta\cos\beta + \sin\theta\sin\beta) \leq \sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha,$$
$$\lambda\cos(\beta - \theta) \leq \sin(\beta - \alpha).$$

여기서 $0 < \beta < 90°$이고 $0 < \theta \leq 2\alpha < 90°$이므로 $-90° < \beta - \theta < 90°$이고 $\cos(\beta - \theta) > 0$이다. 따라서 각이 θ인 위치에서 평형이 가능한 것은 정확히 다음이 성립할 때이다.

$$\lambda \leq \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\cos(\beta - \theta)}.$$

이것이 모든 위치에서 성립하려면 $\cos(\beta - \theta)$가 가장 큰 곳, 즉 범위 $\alpha \leq \theta \leq 2\alpha$ 안에서 θ가 β에 가장 가까운 곳에서 성립해야 한다.

경우 $\beta \geq 2\alpha$. 범위 안의 모든 θ는 β 이하이므로 $0 \leq \beta - 2\alpha \leq \beta - \theta \leq \beta - \alpha < 90°$이다. 코사인은 $[0°, 90°)$에서 감소하므로, $\cos(\beta - \theta)$는 $\theta = 2\alpha$, 즉 O에 있거나 그 바로 옆인 위치에서 가장 크다. 따라서 필요조건(necessary condition)은

$$\lambda \leq \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\cos(\beta - 2\alpha)}.$$

다른 모든 위치에서는 λ에 대한 제한이 더 약하므로, 이 조건은 충분조건(sufficient condition)이기도 하다.

경우 $\alpha \leq \beta \leq 2\alpha$. 이제 $\theta = \beta$가 범위 안에 있다. 소문항 (i)에 의해, L 위에서 O와 A 사이에 있는 P의 어떤 위치가 정확히 이 각을 준다($\beta = \alpha$이면 $P \to A$일 때의 극한으로 얻는다). 그

위치에서 $\cos(\beta-\theta)=1$로 가능한 가장 큰 값이 되고, 조건은 다음과 같이 된다.

$$\lambda \le \sin(\beta-\alpha).$$

그 위치에서 줄은 전체 접촉력(total contact force)에 수직인데, 마찰력이 한계에 이르렀을 때 이 접촉력은 법선과 각 β를 이룬다. $\beta=\alpha$이면 $\lambda=0$일 수밖에 없다. 이때 입자는 자기 무게만으로 겨우 한계 평형(limiting equilibrium) 상태에 있으므로, 줄에 조금이라도 장력이 있으면 미끄러진다.

검산

- 두 답은 $\beta=2\alpha$일 때 일치한다. 이때 $\cos(\beta-2\alpha)=1$이고, 둘 다 $\lambda \le \sin\alpha$를 준다.
- $\lambda=0$이면 조건은 $\sin(\beta-\alpha)\ge 0$, 즉 $\mu \ge \tan\alpha$가 되는데, 이는 거친 경사면 위에 물체가 정지해 있을 익숙한 조건이다.
- $\alpha=20^\circ$, $\beta=50^\circ$이면 한계값은 $\sin 30^\circ / \cos 10^\circ \approx 0.508$이다. 컴퓨터 검산에서는 P를 OA 위의 여러 점에 두고 힘을 직접 분해하여, 모든 곳에서 평형을 주는 가장 큰 λ가 수천 개의 무작위 α와 β에 대해 두 공식과 일치함을 확인하였다. 또한 $\alpha \le \theta \le 2\alpha$임도 확인하였다.

흔한 실수

- B를 O에 대해 A와 같은 쪽에 두는 것. $OB=OA$이고 $B\neq A$이므로 B는 O의 반대편에 있고, 따라서 장력은 P를 경사면 위가 아니라 **아래로** 당긴다.
- 장력이 수직항력을 줄이고, 그 결과 쓸 수 있는 마찰력도 줄어든다는 사실을 잊는 것.
- (iii)의 두 번째 경우에서 양 끝 위치만 확인하는 것. 가장 불리한 위치는 $\theta=\beta$인 곳이며, 이는 범위의 내부에 있다.

STEP 너머

조합 $\lambda\cos(\beta-\theta) \le \sin(\beta-\alpha)$는 **마찰각**(angle of friction)을 대수적으로 나타낸 것이다. 전체 접촉력은 법선으로부터 각 β 이내에 있어야 하며, 이 영역을 마찰 원뿔(cone of friction)이라고 한다. 이 원뿔의 관점에서 생각하면 많은 마찰 문제가 기하학 한 줄로 정리된다. "모든 위치에서" 평형을 요구하는 것은 작은 최적화(optimisation) 문제이며, 공학자들도 최악의 경우에 대비해 설계할 때 같은 방식으로 추론한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 마찰과 자유물체도(free-body diagram)를 꼼꼼하게 다루며, 도전적인 문제도 많이 담고 있다.

풀이

STEP I 2018, 문제 12

확률과 통계 • 복원추출

> **STEP I 2018, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/18-s1-q12

핵심 아이디어

앞면이 나온 횟수를 각 던지기마다 하나씩, 두 지시변수(indicator variable)의 합으로 나타낸다. 합의 기댓값(expectation)은 던지기들이 독립(independent)이든 아니든 기댓값의 합이므로, 평균은 쉽게 구해진다. 분산(variance)은 단 하나의 수, 곧 두 던지기 모두 앞면이 나올 확률에 달려 있으며, 바로 이 지점에서 복원추출(drawing with replacement)과 비복원추출(drawing without replacement)이 갈린다.

풀이

풀이 전체에서 $p = \frac{1}{3}(p_1 + p_2 + p_3)$이고

$$q = p_1p_2 + p_2p_3 + p_3p_1.$$

라 하자. 각 동전이 선택될 가능성은 똑같고, 일단 동전이 선택되면 그 던지기들은 서로 독립이라고 가정한다.

소문항 (i)

동전 k가 선택되는 사건을 C_k라 하면 $\mathrm{P}(C_k) = \frac{1}{3}$이다. 전확률 법칙(law of total probability)에 의해

$$\mathrm{P}(\text{앞면}) = \sum_{k=1}^{3} \mathrm{P}(C_k)\,\mathrm{P}(\text{앞면} \mid C_k) = \tfrac{1}{3}(p_1 + p_2 + p_3) = p.$$

소문항 (ii)

첫 번째와 두 번째 던지기에서 앞면이 나오는 것의 지시변수를 각각 X_1, X_2라 하면 $N_1 = X_1 + X_2$이다. 첫 번째 동전을 되돌려 놓으므로 두 번째 던지기는 첫 번째와 완전히 같은 상황에서 일어나고, 소문항 (i)에 의해 $\mathrm{P}(X_1 = 1) = \mathrm{P}(X_2 = 1) = p$이다. 따라서

$$\mathrm{E}(N_1) = \mathrm{E}(X_1) + \mathrm{E}(X_2) = 2p.$$

분산을 구하려면 $\mathrm{P}(X_1 = 1,\, X_2 = 1)$이 필요하다. 두 번의 선택은 독립이고, 동전의 순서쌍 (j,k) 9개는 각각 확률 $\frac{1}{9}$을 가지며, 순서쌍이 주어졌을 때 두 번 모두 앞면이 나올 확률은 $p_j p_k$이다. 그러므로

$$\mathrm{P}(X_1 = 1,\, X_2 = 1) = \frac{1}{9}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} p_j p_k = \left(\frac{p_1 + p_2 + p_3}{3}\right)^2 = p^2 = \mathrm{P}(X_1 = 1)\,\mathrm{P}(X_2 = 1).$$

다른 결과들에 대해서도 같은 방식으로 곱으로 분해되므로 X_1과 X_2는 독립이고 $N_1 \sim \mathrm{B}(2,p)$이다. 직접 계산하면, $X_i^2 = X_i$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(N_1^2) &= \mathrm{E}(X_1) + \mathrm{E}(X_2) + 2\,\mathrm{E}(X_1X_2) = 2p + 2p^2,\\ \mathrm{Var}(N_1) &= 2p + 2p^2 - (2p)^2 = 2p(1-p),\end{aligned}$$

이 되어 요구한 결과를 얻는다.

소문항 (iii)

이제 두 동전을 비복원으로 하나씩 차례로 고르고, 첫 번째와 두 번째로 고른 동전에서 앞면이 나오는 것의 지시변수를 Y_1, Y_2라 하면 $N_2 = Y_1 + Y_2$이다. 각 동전이 첫 번째로 뽑힐 가능성은 똑같고, 대칭성(symmetry)에 의해 두 번째로 뽑힐 가능성도 똑같으므로, 소문항 (i)과 마찬가지로 $\mathrm{P}(Y_1 = 1) = \mathrm{P}(Y_2 = 1) = p$이고

$$\mathrm{E}(N_2) = 2p.$$

생각해 보기 소문항 (ii)에서 했던 P(둘 다 앞면)의 계산을 다시 쓸 수 있을까?

그렇지 않다. 이제는 같은 동전을 두 번 뽑을 수 없기 때문이다. $j \neq k$인 순서쌍 (j,k) 6개가 같은 확률로 나오고, 순서 없는 쌍 $\{j,k\}$ 각각은 두 번씩 나타나므로

$$\mathrm{P}(Y_1 = 1,\, Y_2 = 1) = \frac{1}{6}\sum_{j\neq k} p_j p_k = \frac{2q}{6} = \frac{q}{3}.$$

이 값은 일반적으로 p^2이 아니므로 Y_1과 Y_2는 독립이 아니다. 다시 $Y_i^2 = Y_i$를 이용하면

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(N_2^2) &= \mathrm{E}(Y_1) + \mathrm{E}(Y_2) + 2\,\mathrm{E}(Y_1Y_2) = 2p + \tfrac{2}{3}q,\\ \mathrm{Var}(N_2) &= 2p + \tfrac{2}{3}(p_1p_2 + p_2p_3 + p_3p_1) - 4p^2.\end{aligned}$$

소문항 (iv)

두 식을 빼면

$$\mathrm{Var}(N_1) - \mathrm{Var}(N_2) = (2p - 2p^2) - (2p + \tfrac{2}{3}q - 4p^2) = 2p^2 - \tfrac{2}{3}q.$$

그런데 $9p^2 = (p_1 + p_2 + p_3)^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + 2q$이므로

$$\begin{aligned} 2p^2 - \tfrac{2}{3}q &= \tfrac{2}{9}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + 2q) - \tfrac{6}{9}q = \tfrac{2}{9}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - p_1p_2 - p_2p_3 - p_3p_1) \\ &= \tfrac{1}{9}\Big[(p_1 - p_2)^2 + (p_2 - p_3)^2 + (p_3 - p_1)^2\Big], \end{aligned}$$

이다. 마지막 단계는 세 제곱을 전개하면 $2(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - 2q$가 되기 때문이다.

실수의 제곱의 합은 음이 아니므로 $\mathrm{Var}(N_2) \le \mathrm{Var}(N_1)$이다. 등호는 세 제곱이 모두 0일 때, 곧 $p_1 = p_2 = p_3$일 때에만 성립한다. 이로써 증명이 끝난다.

부산물로 소문항 (iii)의 답을 깔끔한 꼴로 얻는다.

$$\mathrm{Var}(N_2) = 2p(1-p) - \tfrac{1}{9}\Big[(p_1 - p_2)^2 + (p_2 - p_3)^2 + (p_3 - p_1)^2\Big].$$

검산

- $p_1 = p_2 = p_3 = p$이면 모든 동전이 똑같으므로 동전을 어떻게 고르든 상관이 없다. 두 횟수 모두 $\mathrm{B}(2, p)$이고 분산이 일치하므로, 등호가 성립하는 경우와 맞아떨어진다.
- $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = \frac{1}{3}$, $p_3 = \frac{1}{6}$으로 두면 $p = \frac{1}{3}$, $q = \frac{11}{36}$이다. 그러면 $\mathrm{Var}(N_1) = \frac{4}{9}$이고 $\mathrm{Var}(N_2) = \frac{2}{3} + \frac{11}{54} - \frac{4}{9} = \frac{23}{54}$이므로 $\frac{1}{54}$만큼 작으며, 이는 $\frac{1}{9}\left(\frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{9}\right) = \frac{1}{54}$와 일치한다. 모든 결과를 손으로 나열해 보아도 같은 값을 얻는다.
- 극단적인 경우 $p_1 = p_2 = 1$, $p_3 = 0$: 소문항 (iii)에서 동전 1과 2가 함께 선택되는 경우를 제외하면, 선택된 두 동전 중 정확히 하나가 반드시 앞면이 나오는 동전이다. 따라서 N_2는 확률 $\frac{1}{3}$로 2이고 그 밖에는 1이므로 분산은 $\frac{2}{9}$이다. 공식으로 계산하면 $2p + \frac{2}{3}q - 4p^2 = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}$이다.

흔한 실수

- 소문항 (iii)의 두 던지기를 독립으로 취급하여 다시 $2p(1-p)$를 얻는 것. 소문항 (iv)의 요점은 바로 그것들이 독립이 아니라는 데 있다.
- $\mathrm{Var}(N_1)$을 각 동전의 분산 $2p_k(1-p_k)$의 평균으로 쓰는 것. 이는 동전을 무작위로 고르는 데서 생기는 추가적인 변동을 무시하며, 소문항 (ii)에서는 던질 때마다 다른 동전이 쓰일 수도 있다.

STEP 너머

소문항 (ii)와 (iii)의 차이는 복원 표본추출(sampling)과 비복원 표본추출의 차이이다. 비복원추출을 하면 뽑힌 것들 사이에 음의 상관관계(negative correlation)가 생기고, 이 때문에 분산이 줄어든다. 같은 효과가 표본조사에서 "유한 모집단 수정(finite population correction)"을 낳으며, 초기하분포(hypergeometric distribution)가 평균이 같은 이항분포(binomial distribution)보다 분산이 작은 이유이기도 하다. 소문항 (iv)의 대수 계산은 항등식(identity) $\sum p_k^2 - \sum_{j<k} p_j p_k = \frac{1}{2}\sum_{j<k}(p_j - p_k)^2$이며, 분산이 결코 음이 아니라는 사실과 가까운 사촌 관계에 있다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)는 지시변수, 공분산(covariance), 초기하분포를 바로 이러한 관점에서 다룬다.

풀이

STEP I 2018, 문제 13

확률과 통계 • 이항분포와 베이즈 정리

STEP I 2018, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/18-s1-q13

핵심 아이디어

모든 것은 한 가지 셈에 달려 있다. 응시자가 k개의 문제를 풀어서 그중 j개를 맞히면 점수는 $2j-(k-j)=3j-k$이다. 따라서 합격하려면 적어도 $(k+5)/3$개를 맞혀야 하고, 각 k에 대해 이 조건이 정확히 어떤 이항(binomial) 항들을 더해야 하는지 알려 준다. 소문항 (iii)에서는 각 문제가 세 가지 결과(정답, 오답, 풀지 않음)를 갖는다고 보는 것이 깔끔한 방법이며, 이렇게 하면 문제가 하나의 다항(multinomial) 셈으로 바뀐다.

풀이

이 풀이 전체에서 무작위로 고른 답이 정답일 확률을 $p=\frac{1}{n}$이라 하고, $q=1-p$라 하자. $n\geq 2$이므로 $0<p\leq\frac{1}{2}$이다.

소문항 (i)

A가 정확히 k개의 문제를 풀 때 합격할 확률을 P_k라 하자. A의 선택은 서로 독립(independent)이므로, 맞힌 문제의 개수 J는 이항분포(binomial distribution) $\mathrm{B}(k,p)$를 따른다. 점수는 $3J-k$이므로, A가 합격하는 것은 정확히

$$3J-k\geq 5 \iff J\geq \frac{k+5}{3}.$$

일 때이다. k의 값을 차례로 살펴보자.

- $k=0,1,2$: 각각 $J\geq\frac{5}{3},2,\frac{7}{3}$, 즉 $J\geq 2$, $J\geq 2$, $J\geq 3$이어야 하는데, $J\leq k$이므로 이는 불가능하다(최고 점수가 $2k\leq 4$이다). 따라서 $P_0=P_1=P_2=0$이다.
- $k=3$: $J\geq\frac{8}{3}$이어야 하므로 $J=3$이고, $P_3=p^3$이다.

- $k = 4$: $J \geq 3$이어야 하므로

$$P_4 = \binom{4}{3} p^3 q + p^4 = 4p^3(1-p) + p^4 = p^3(4-3p).$$

- $k = 5$: $J \geq \frac{10}{3}$이어야 하므로 $J = 4$ 또는 5이고,

$$P_5 = \binom{5}{4} p^4 q + p^5 = 5p^4(1-p) + p^5 = p^4(5-4p).$$

이제 P_4를 두 경쟁 상대와 비교하자. $p < 1$이므로 $4 - 3p > 1$이고, 따라서 $P_4 > p^3 = P_3$이다. 또한 $0 < p < 1$이므로

$$P_4 - P_5 = p^3\big[(4-3p) - p(5-4p)\big] = p^3\big(4p^2 - 8p + 4\big) = 4p^3(1-p)^2 > 0,$$

이다. $P_4 > 0$이므로 $P_0 = P_1 = P_2 = 0$보다도 크다. 따라서 P_4가 엄밀하게 가장 크고, 요구한 대로 A는 $k = 4$를 선택해야 한다.

> **생각해 보기** 다섯 문제를 모두 풀면 점수를 얻을 기회가 당연히 더 많아지지 않을까?

여기서는 그렇지 않다. 다섯 문제를 풀면 네 개를 맞혀야 하는데, 다섯 번째 문제는 틀릴 때마다 1점을 잃게 하고, 맞힐 때보다 틀릴 때가 훨씬 많기 때문이다. 네 문제를 풀면 세 개만 맞혀도 충분하다. 인수분해(factorisation) $4p^3(1-p)^2$를 보면 이 이점이 n이 클 때뿐만 아니라 모든 $n \geq 2$에 대해 성립함을 알 수 있다.

소문항 (ii)

B가 푸는 문제의 개수를 K라 하면 $k = 0, \ldots, 5$에 대해 $\mathrm{P}(K = k) = \frac{1}{6}$이다. B가 합격하는 사건을 S라 하자. $K = k$가 주어지면 B는 A와 정확히 같은 처지이므로 $\mathrm{P}(S \mid K = k) = P_k$이다. 베이즈 정리(Bayes' theorem)에 의해

$$\mathrm{P}(K = 4 \mid S) = \frac{\frac{1}{6}P_4}{\frac{1}{6}(P_0 + P_1 + \cdots + P_5)} = \frac{p^3(4-3p)}{p^3 + p^3(4-3p) + p^4(5-4p)}.$$

이다. p^3(0이 아니다)으로 약분하면 분모는 $1 + 4 - 3p + 5p - 4p^2 = 5 + 2p - 4p^2$가 되므로

$$\mathrm{P}(K = 4 \mid S) = \frac{4-3p}{5+2p-4p^2}.$$

이다. $p = \frac{1}{n}$을 대입하고 분자와 분모에 n^2을 곱하면

$$\mathrm{P}(K = 4 \mid S) = \frac{4n^2 - 3n}{5n^2 + 2n - 4} = \frac{n(4n-3)}{5n^2 + 2n - 4}.$$

이다.

소문항 (iii)

각 문제에 대해 C의 동전 던지기와 답의 선택은 서로 독립이고, 다른 문제에서 일어나는 일과도 독립이다. 따라서 각 문제는 독립적으로 다음 세 가지 결과 중 하나를 갖는다.

$$\begin{aligned} \text{정답 } (+2): &\quad \frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}, \\ \text{오답 } (-1): &\quad \frac{n}{n+1}\cdot\frac{n-1}{n}=\frac{n-1}{n+1}, \\ \text{풀지 않음 } (0): &\quad \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

C가 c개를 맞히고 w개를 틀렸다고 하자. 단, $c+w\le 5$이다. C가 합격하는 것은 $2c-w\ge 5$일 때이다. 이로부터 반드시 $c\ge 3$이고, 이때

- $c=3$: $w\le 1$이어야 한다.
- $c=4$: $c+w\le 5$이므로 $w\le 1$은 자동으로 성립한다.
- $c=5$: $w=0$이다.

정답 c개, 오답 w개, 풀지 않은 문제 $5-c-w$개를 배정하는 방법의 수는 다항계수(multinomial coefficient) $\frac{5!}{c!\,w!\,(5-c-w)!}$이다. 정답인 문제와 풀지 않은 문제의 확률이 똑같이 $\frac{1}{n+1}$이므로, 각 배열의 확률은 $\frac{(n-1)^w}{(n+1)^5}$이다. 다섯 가지 경우를 모두 더하면 다음과 같다.

(c,w)	배열의 수	확률 $\times(n+1)^5$
$(3,0)$	10	10
$(3,1)$	20	$20(n-1)$
$(4,0)$	5	5
$(4,1)$	5	$5(n-1)$
$(5,0)$	1	1

합계는 $16+25(n-1)=25n-9$이므로

$$\mathrm{P}(\text{C가 합격})=\frac{25n-9}{(n+1)^5}.$$

이다.

검산

- $n=2$일 때: $P_3=\frac{1}{8}$, $P_4=\frac{5}{16}$, $P_5=\frac{3}{16}$이므로 $k=4$가 가장 좋다. (ii)의 공식은 $\frac{2\cdot 5}{20}=\frac{1}{2}$를 주며, 이는 직접 계산한 $\frac{5/16}{10/16}$과 일치한다.

- (iii)에서 $n = 3$일 때 답은 $\frac{66}{1024} \approx 0.0645$이고, 200 000번의 시험을 컴퓨터로 시뮬레이션(simulation)한 결과는 0.0644였다. 세 공식 모두 $n = 2, \ldots, 29$에 대해 컴퓨터로 정확히 전수 계산한 결과와도 일치한다.
- $n \to \infty$일 때 (ii)의 답은 $\frac{4}{5}$로 수렴(converge)한다. 찍어서 맞히기가 거의 불가능할 때, 합격은 거의 언제나 네 문제를 푼 경우(세 개를 맞혀야 함)에서 나오며, 다섯 문제를 푼 경우(네 개를 맞혀야 함)나 세 문제를 푼 경우(세 개를 모두 맞혀야 하며, 그 확률 p^3은 $4p^3$보다 훨씬 작음)에서 나오는 일은 드물다.

흔한 실수

- 다섯 문제를 풀었을 때 세 개를 맞히면 $6 - 2 = 4$점이 되어 불합격이라는 사실을 잊는 것. 네 개를 맞혀야 한다.
- (ii)에서 분모에 P_3을 빠뜨리는 것. 세 문제를 풀어서 세 개를 모두 맞히는 것도 합격하는 방법이다.
- (iii)을 "확률 $\binom{5}{k}h^k(1-h)^{5-k}$로 k개의 문제를 푼다"로 보고 소문항 (i)을 이용하는 방법도 통하지만, 항 하나를 빠뜨리기 쉽다. 세 가지 결과로 세는 방법이 더 깔끔하다.

STEP 너머

소문항 (iii)은 **솎아내기**(thinning)의 한 예이다. 각 문제가 어떤 확률로 남겨지고 결과들은 여전히 독립이므로, 정답, 오답, 건너뛴 답의 개수는 다항분포(multinomial distribution)를 따른다. 소문항 (ii)는 베이즈 갱신(Bayesian updating)으로, 현대 통계학의 상당 부분을 이루는 아이디어이다. 두 내용 모두 Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문), 그리고 Grimmett과 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률: 입문)에서 다룬다.

풀이

STEP II 2018, 문제 1

순수수학 • 다항식의 근

STEP II 2018, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/18-s2-q1

핵심 아이디어

계수(coefficient)를 앞에서 읽으나 뒤에서 읽으나 같으므로, x^2으로 나누면 사차식(quartic)이 $t = x + \frac{1}{x}$에 대한 이차식(quadratic)으로 바뀐다. t의 각 값은 사차식의 근(root) 한 쌍 k, $\frac{1}{k}$를 주고, 실수 x로부터는 $|t| \geq 2$만 나올 수 있으며, $t = \pm 2$인 것은 정확히 $x = \pm 1$일 때이다. 따라서 서로 다른 근의 개수를 세는 문제는 t의 어떤 값들이 나타나는지, 그리고 그중 하나가 ± 2인지를 묻는 문제로 귀결된다.

풀이

근은 역수 쌍으로 나타난다

$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1$이라 하자. $P(0) = 1 \neq 0$이므로 모든 근 k는 0이 아니고,

$$k^4 P\left(\tfrac{1}{k}\right) = 1 + ak + bk^2 + ak^3 + k^4 = P(k) = 0.$$

$k^4 \neq 0$이므로 $P(\frac{1}{k}) = 0$이고, 따라서 k^{-1}도 근이다.

치환 $t = x + \frac{1}{x}$

$P(x) = 0$을 x^2으로 나누고($x \neq 0$이므로 가능하다) $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$를 이용하면

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b = 0 \iff t^2 + at + (b - 2) = 0.$$

이 이차방정식의 두 근을 t_1, t_2라 하면 $t_1 + t_2 = -a$, $t_1 t_2 = b - 2$이다. 전개해 보면

$$P(x) = (x^2 - t_1 x + 1)(x^2 - t_2 x + 1),$$

임을 알 수 있다. 우변이 $x^4-(t_1+t_2)x^3+(2+t_1t_2)x^2-(t_1+t_2)x+1$이기 때문이다. 따라서 P의 근은 x^2-t_1x+1의 근과 x^2-t_2x+1의 근을 모은 것이다.

이제 모든 근이 실수라는 가정을 이용한다. 각 인수 x^2-t_ix+1은 두 실근 k와 $\frac{1}{k}$를 가지며(두 근의 곱이 1이다), $t_i=k+\frac{1}{k}$는 실수이다. 0이 아닌 실수 k에 대해 $k+\frac{1}{k}$의 부호는 k의 부호와 같고,

$$\left|k+\tfrac{1}{k}\right|-2=\frac{(|k|-1)^2}{|k|}\geq 0,$$

이며 등호는 $k=\pm1$일 때만 성립한다. 따라서 다음이 성립한다.

- $|t_i|>2$이면 인수 x^2-t_ix+1은 서로 다른 두 실근을 가지며, 그 어느 것도 ±1이 아니다.
- $t_i=2$이면 인수는 $(x-1)^2$이고, $t_i=-2$이면 $(x+1)^2$이다.

또한 x가 $t=x+\frac{1}{x}$를 결정하므로, 서로 다른 t의 값이 같은 근 x를 공유할 수는 없다.

소문항 (i)

서로 다른 근이 k 하나뿐이면 $\frac{1}{k}=k$이므로 $k=\pm1$이고 $P(x)=(x\mp1)^4$이다. 전개하면

$$(x-1)^4=x^4-4x^3+6x^2-4x+1,\qquad (x+1)^4=x^4+4x^3+6x^2+4x+1,$$

이고, 둘 다 주어진 꼴이다. 따라서 구하는 값은 $a=-4$, $b=6$과 $a=4$, $b=6$이다.

소문항 (ii)

t_1, t_2(각각 $|t_i|\geq 2$인 실수)의 가능한 경우를 모두 살펴보자.

- $t_1\neq t_2$이고 둘 다 $|t_i|>2$인 경우: 서로 다른 근이 네 개이다.
- $t_1=t_2$인 경우: 사차식이 완전제곱식 $(x^2-t_1x+1)^2$이므로, $|t_1|>2$이면 서로 다른 근이 두 개이고 $t_1=\pm2$이면 한 개이다.
- $\{t_1,t_2\}=\{2,-2\}$인 경우: $P(x)=(x-1)^2(x+1)^2$이므로 서로 다른 근이 두 개이다.
- t_i 중 하나는 ±2이고 다른 하나의 절댓값이 2보다 큰 경우: 근은 ±1(중근)과 다른 두 근이므로 서로 다른 근이 세 개이다.

생각해 보기 왜 t의 값 중 하나가 반드시 ±2여야 할까?

네 근 중 서로 다른 근이 세 개라는 것은 어떤 근이 중복된다는 뜻이고, 위의 목록을 보면 서로 다른 근이 세 개가 되는 것은 마지막 경우뿐이다. 더 직접적으로 말하면, 근은 역수(reciprocal) 쌍으로 나뉘므로 서로 다른 근의 개수가 홀수이면 어떤 근은 자기 자신의 역수, 즉 ±1이어야 한다.

따라서 $t = 2$ 또는 $t = -2$가 $t^2 + at + b - 2 = 0$의 근이다.

$$t = 2: \quad 4 + 2a + b - 2 = 0 \iff b = -2a - 2,$$
$$t = -2: \quad 4 - 2a + b - 2 = 0 \iff b = 2a - 2.$$

그러므로 $b = 2a - 2$ 또는 $b = -2a - 2$이고, 이것이 보이려던 것이다.

소문항 (iii)

$b = 2a - 2$이면 t에 대한 이차식은

$$t^2 + at + 2a - 4 = (t + 2)(t + a - 2),$$

이므로 $t_1 = -2$, $t_2 = 2 - a$이다. 첫 번째 값은 $(x + 1)^2$을 주고, 두 번째 값은 $x^2 - (2 - a)x + 1 = 0$을 주므로

$$x = -1 \text{ (중근)}, \qquad x = \frac{2 - a \pm \sqrt{a^2 - 4a}}{2}.$$

모든 근이 실수라고 주어졌으므로 이 근들은 실수이다. 이는 $a^2 - 4a = a(a - 4) \geq 0$, 즉 $a \leq 0$ 또는 $a \geq 4$와 같다.

마지막 소문항

(ii)에 의해 서로 다른 근이 세 개이려면 $b = 2a - 2$ 또는 $b = -2a - 2$여야 한다. 역으로 $b = 2a - 2$라 하자(모든 근은 실수). (iii)에서 t의 값은 -2와 $2 - a$이고, 위의 경우 목록에 따르면 $2 - a = \pm 2$가 아닌 한 서로 다른 근은 정확히 세 개이다.

- $a = 0, b = -2$: $t = \pm 2$이고 $P(x) = (x^2 - 1)^2$이므로 서로 다른 근은 두 개뿐이다.
- $a = 4, b = 6$: $t = -2$가 두 번 나오고 $P(x) = (x + 1)^4$이므로 근은 하나이다.

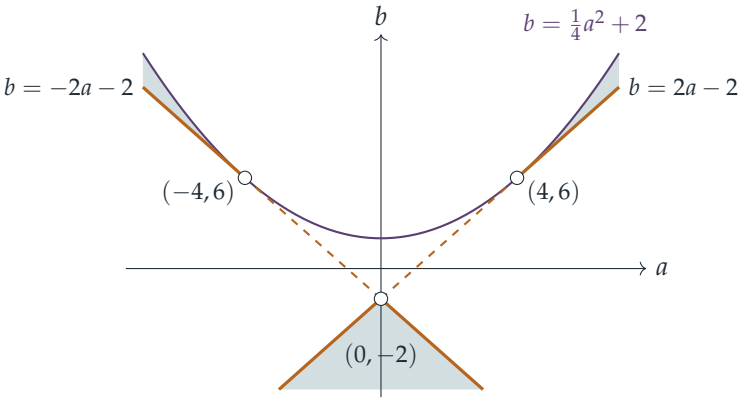
x를 $-x$로 바꾸면 P는 a가 $-a$로 바뀐 같은 꼴이 되고, 이는 두 직선을 서로 바꾼다. 따라서 $b = -2a - 2$일 때 t의 값은 2와 $-a - 2$이고, 예외는 $a = 0, b = -2$와 $a = -4, b = 6$이다.

그러므로 모든 근이 실수인 실수 a, b에 대해 $(*)$가 정확히 세 개의 서로 다른 근을 가질 필요충분조건은

$$b = 2a - 2 \text{ 또는 } b = -2a - 2, \qquad \text{단, } (a, b) \neq (0, -2),\ (4, 6),\ (-4, 6).$$

$(4, -10)$과 $(-4, -10)$은 허용된다는 점에 주의하자. 예를 들어 $a = 4, b = -10$이면 $t = 2$와 $t = -6$이므로 서로 다른 근이 세 개이다.

그림은 (a, b)-평면을 나타낸다. 색칠된 영역은 모든 근이 실수인 곳으로, 두 직선 모두의 아래쪽(t의 한 값은 -2 이하, 다른 값은 2 이상)이거나, $|a| \geq 4$에서 직선과 포물선 $b = \frac{1}{4}a^2 + 2$ 사이(t의 두 값이 같은 쪽)이다. 포물선은 $t_1 = t_2$인 곳이며, $(\pm 4, 6)$에서 직선들과 접한다. 답은 색칠된 영역의 경계에 있는 두 직선의 실선 부분에서 세 개의 빈 원을 뺀 것이다.



(직선의 점선 부분, 즉 $0 < |a| < 4$인 부분은 모든 근이 실수인 영역 밖에 있다. (iii)에서 $a \le 0$ 또는 $a \ge 4$가 필요했던 것도 이 때문이다.)

검산

- $a = -4$, $b = -10$($b = 2a - 2$ 위의 허용되는 점)을 택하자. 그러면 (iii)에서 $x = -1, -1, 3 \pm 2\sqrt{2}$이고, 실제로 $(x+1)^2(x^2 - 6x + 1) = x^4 - 4x^3 - 10x^2 - 4x + 1$이다. 근 $3 \pm 2\sqrt{2} \approx 5.828,\ 0.172$는 예상대로 서로 역수이다.
- 제외된 점 $a = 0$, $b = -2$에서 사차식은 $x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2$이고, 서로 다른 근은 두 개뿐이다.
- $|a| \le 10$, $|b| \le 15$인 범위에서 간격 $\frac{1}{4}$의 격자 위의 모든 (a, b)에 대해 컴퓨터로 근을 수치적으로 구했다. 모든 근이 실수인 1579개의 격자점 중에서 정확히 위의 조건이 예측한 88개의 점에서 서로 다른 근이 세 개였다.

흔한 실수

- 예외점을 잊는 것: $(0, -2)$와 $(4, 6)$이 그 위에 있으므로, $b = 2a - 2$만으로는 필요조건일 뿐 충분조건이 아니다.
- 중근(repeated root)이 반드시 ± 1이어야 한다고 가정하는 것: 이중으로 겹친 쌍 $k, k, \frac{1}{k}, \frac{1}{k}$도 가능하지만, 이 경우 서로 다른 근은 세 개가 아니라 두 개이다.

STEP 너머

계수를 어느 방향으로 읽어도 같은 다항식을 **회문 다항식**(palindromic polynomial, 또는 상반 다항식(reciprocal polynomial))이라 하며, $t = x + \frac{1}{x}$라는 기법은 짝수 차수인 이러

한 다항식의 차수를 절반으로 줄여 준다. 같은 치환에 $x = e^{i\theta}$를 대입하면 $t = 2\cos\theta$가 되는데, 이것이 $2\cos(2\pi/n)$의 최소다항식(minimal polynomial)을 구하는 방법이자 가우스(Gauss)가 정17각형을 다룬 방법이다. 위의 (a, b)-평면의 곡선처럼 다항식의 근이 서로 겹치는 곳을 기술한다는 아이디어는 **판별식**(discriminant)으로 이어진다. 다항식과 그 근에 대해 더 읽고 싶다면 Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)가 좋은 출발점이다.

풀이

STEP II 2018, 문제 2

순수수학 • 오목함수

STEP II 2018, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/18-s2-q2

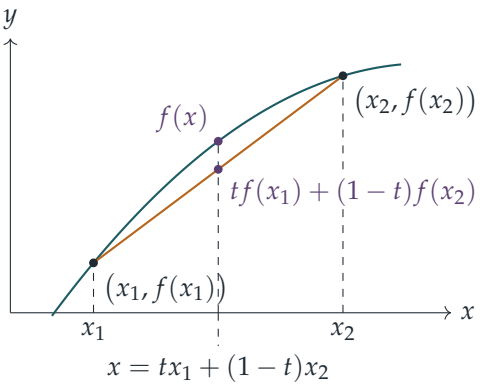
핵심 아이디어

t가 0에서 1까지 변할 때 점 $tx_1 + (1-t)x_2$는 x_2에서 x_1까지 움직이고, $tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$는 그 점 위에 있는 현(chord)의 높이이다. 따라서 오목성(concavity)은 모든 현이 곡선 위에 있거나 곡선보다 아래에 있다는 뜻이다. 이 두 점에 대한 부등식(inequality)을 얻고 나면, 이를 두 번 사용하여 세 점에 대한 형태를 얻는다. 그리고 $A + B + C = \pi$인 적절한 오목함수에 이를 적용하면 삼각형에 관한 두 부등식이 모두 따라 나온다.

풀이

그림

$x = tx_1 + (1-t)x_2$라 하자. 그러면 점 $\big(x,\ tf(x_1) + (1-t)f(x_2)\big)$는 $\big(x_2, f(x_2)\big)$에서 $\big(x_1, f(x_1)\big)$까지의 현을 $(1-t) : t$의 비로 나누므로, x의 바로 위(또는 아래)에서 현 위에 놓인다. 정의는 x에서 곡선의 높이가 현의 높이 이상이라는 것이다.



$f'' < 0$이면 오목인 이유

$x_1 = x_2$이거나 $t = 0$ 또는 $t = 1$이면 부등식은 등식이 되므로, $0 < t < 1$이라 하고, 일반성을 잃지 않고(without loss of generality) $x_1 < x_2$라 하자(x_1, x_2를 바꾸면 t와 $1-t$가 바뀔 뿐이다). 그러면 $x = tx_1 + (1-t)x_2$는 $x_1 < x < x_2$를 만족하고,

$$x - x_1 = (1-t)(x_2 - x_1), \qquad x_2 - x = t(x_2 - x_1).$$

평균값 정리(mean value theorem)에 의해 다음을 만족하는 $c_1 \in (x_1, x)$와 $c_2 \in (x, x_2)$가 존재한다.

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(c_1), \qquad \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(c_2).$$

(a, b)에서 $f'' < 0$이므로 f'은 그곳에서 순감소하고, $c_1 < c_2$이므로 $f'(c_1) > f'(c_2)$이다. 위의 길이를 대입하고 양수인 인수 $x_2 - x_1$을 약분하면

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{1-t} > \frac{f(x_2) - f(x)}{t}.$$

양변에 $t(1-t) > 0$을 곱하면 $tf(x) - tf(x_1) > (1-t)f(x_2) - (1-t)f(x)$, 즉

$$f(x) > tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

따라서 f는 (a, b)에서 오목이다. 말로 하면, 곡선의 기울기(gradient)가 계속 감소하므로 x_1에서 x까지의 기울기가 x에서 x_2까지의 기울기보다 크고, 곡선은 현 위로 볼록하게 솟아 있다.

소문항 (i)

생각해 보기 어떤 두 점을 어떤 가중치로 평균하면 $\frac{1}{3}(u+v+w)$가 되는가?

v와 w를 한데 묶자. 즉 $x_1 = u$, $x_2 = \frac{1}{2}(v+w)$, $t = \frac{1}{3}$으로 잡는다. 그러면 x_2는 v와 w 사이에 있으므로 (a, b)에 속하고,

$$tx_1 + (1-t)x_2 = \tfrac{1}{3}u + \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{2}(v+w) = \tfrac{1}{3}(u+v+w).$$

정의에 의해

$$f\Big(\frac{u+v+w}{3}\Big) \geq \tfrac{1}{3}f(u) + \tfrac{2}{3}f\Big(\frac{v+w}{2}\Big).$$

이제 $x_1 = v$, $x_2 = w$, $t = \frac{1}{2}$로 정의를 다시 사용하면 $f\big(\frac{1}{2}(v+w)\big) \geq \frac{1}{2}f(v) + \frac{1}{2}f(w)$이다. 이 항의 계수 $\frac{2}{3}$이 양수이므로, 대입해도 부등호의 방향은 그대로 유지된다.

$$f\Big(\frac{u+v+w}{3}\Big) \geq \tfrac{1}{3}f(u) + \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{2}\big(f(v) + f(w)\big) = \frac{f(u) + f(v) + f(w)}{3},$$

이것이 구하는 결과이다.

소문항 (ii)

$0 < x < \pi$에서 $f(x) = \sin x$를 생각하자. 여기서 $f''(x) = -\sin x < 0$이므로 sin은 $(0, \pi)$에서 오목이다. 삼각형의 세 각은 $0 < A, B, C < \pi$와 $A + B + C = \pi$를 만족하므로, $u = A, v = B, w = C$로 소문항 (i)을 적용하면

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \leq \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

따라서 $\sin A + \sin B + \sin C \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$이다.

소문항 (iii)

$0 < x < \pi$에서 $\sin x > 0$이므로 $g(x) = \ln(\sin x)$는 그곳에서 정의되고,

$$g'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x, \qquad g''(x) = -\operatorname{cosec}^2 x < 0.$$

따라서 g는 $(0, \pi)$에서 오목이고, 소문항 (i)에 의해

$$\frac{\ln\sin A + \ln\sin B + \ln\sin C}{3} \leq \ln\sin\frac{\pi}{3} = \ln\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

양변에 3을 곱하고 로그를 합치면 $\ln(\sin A \sin B \sin C) \leq \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$이다. exp는 증가함수이므로

$$\sin A \times \sin B \times \sin C \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

검산

두 상계 모두 정삼각형(equilateral triangle)에서 등호가 성립한다. $3\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2.598$이고 $\sin^3\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{8} \approx 0.6495$이다. 직각이등변삼각형에서는 합이 $1 + \sqrt{2} \approx 2.414$, 곱이 $\frac{1}{2}$로, 둘 다 상계보다 작다. 무작위 삼각형 200 000개에 대해 컴퓨터로 확인한 결과, 합이 2.598076을 넘거나 곱이 0.649519를 넘는 경우는 없었다. 매우 납작한 삼각형($A, B \to 0$, $C \to \pi$)에서는 마땅히 그래야 하듯이 둘 다 0에 가까워진다.

흔한 실수

- 소문항 (i)에서 $x_1 = u, x_2 = v$와 함께 $t = \frac{1}{3}$을 쓰면 $\frac{1}{3}u + \frac{2}{3}v$가 되어 세 수의 평균이 아니다. 두 번째 점은 v와 w의 중점이어야 한다.
- 소문항 (iii)에서 소문항 (ii)의 부등식을 곱에 바로 적용할 수는 없다. 곱을 합으로 바꾸어 주는 것은 로그이다. 또한 $\ln\sin x$가 정의되는지, 즉 $\sin x > 0$인지도 확인해야 한다.

- $f'' < 0$이 "곡선이 아래로 휜다는 뜻"이라고 말하는 것만으로는 현에 관한 부등식의 증명이 되지 않는다. 평균값 정리를 이용한 논증이 이를 엄밀하게 만든다.

STEP 너머

소문항 (i)은 옌센 부등식(Jensen's inequality)의 세 점인 경우이다. 오목함수 f와 합이 1인 가중치(weights) $t_i \geq 0$에 대하여 $f\left(\sum t_i x_i\right) \geq \sum t_i f(x_i)$가 성립하며, 이는 여기서와 똑같은 방식으로 수학적 귀납법(induction)으로 증명된다. $f = \ln$으로 두면 산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)을 얻고, 확률론에서는 오목함수 f에 대해 $f(\mathrm{E}[X]) \geq \mathrm{E}[f(X)]$라는 내용이 된다. 볼록함수(convex function)와 오목함수, 그리고 두 번째 문단의 바탕이 되는 평균값 정리는 Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)에서 자세히 다룬다.

풀이

STEP II 2018, 문제 3

순수수학 • 회전 대칭과 적분

> **STEP II 2018, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q3

핵심 아이디어

점 (a, b)를 중심으로 하는 반회전(half-turn)은 (x, y)를 $(2a - x,\, 2b - y)$로 보낸다. 따라서 이런 대칭을 갖는 곡선은 각 x 값을 그 반사인 $2a - x$와 짝짓고, 두 점의 높이의 합이 $2b$가 되게 한다. 탄젠트 함수에서는 $\tan(\frac{1}{2}\pi - x) = 1/\tan x$이므로 $x \leftrightarrow \frac{1}{2}\pi - x$가 자연스러운 짝짓기이다. 이 항등식(identity) 하나로 곡선의 대칭성을 얻고, 그러면 중심에 대해 대칭인 구간에서의 적분을 실제로 적분하지 않고도 구할 수 있다.

풀이

소문항 (i)

$f(x) = (1 + \tan x)^{-1}$로 두고 연쇄법칙(chain rule)을 쓰면

$$f'(x) = -\frac{\sec^2 x}{(1+\tan x)^2} = -\frac{1}{\cos^2 x\,(1+\tan x)^2} = -\frac{1}{(\cos x + \sin x)^2}$$
$$= -\frac{1}{\cos^2 x + 2\sin x \cos x + \sin^2 x} = -\frac{1}{1+\sin 2x},$$

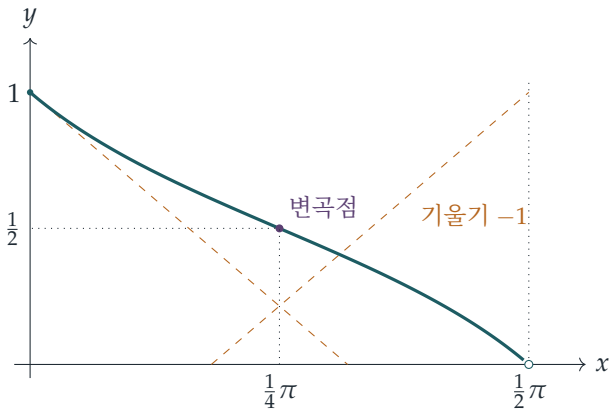
이므로 원하는 결과를 얻는다. ($1 + \tan x$에 $\cos x$를 곱하는 것이 모든 것을 깔끔하게 정리해 주는 단계이다.)

값의 범위(range)를 구하자. $0 \le x < \frac{1}{2}\pi$이면 $0 \le 2x < \pi$이므로 $\sin 2x$는 $[0, 1]$의 모든 값을 갖는다. $x = 0$에서 값 0을, $x = \frac{1}{4}\pi$에서 값 1을 갖는다. 따라서 $1 \le 1 + \sin 2x \le 2$이고, 역수를 취한 뒤(모든 값이 양수이므로 부등호의 방향이 바뀐다) 부호를 바꾸면

$$-1 \le f'(x) \le -\tfrac{1}{2}.$$

양 끝값이 모두 실제로 나타난다. 즉 $f'(0) = -1$이고 $f'(\frac{1}{4}\pi) = -\frac{1}{2}$이다.

그래프의 개형을 그려 보자. $f(0) = 1$, $f(\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}$이고, $x \to \frac{1}{2}\pi$일 때 $\tan x \to \infty$이므로 $f(x) \to 0$이다. 곡선은 항상 감소하며 기울기는 -1과 $-\frac{1}{2}$ 사이에 있다. $x = 0$에서 가장 가파르고(기울기 -1), $x = \frac{1}{4}\pi$에서 가장 완만하며, $x \to \frac{1}{2}\pi$일 때 다시 가파라져 기울기 -1에 가까워진다. 따라서 f'은 $\frac{1}{4}\pi$에서 최댓값을 가지며, 이 점은 변곡점(point of inflection)이다. 곡선은 $[0, \frac{1}{4}\pi)$에서 아래로 볼록(concave up)이고 $(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi)$에서 위로 볼록(concave down)이다. (실제로 $f''(x) = 2\cos 2x/(1 + \sin 2x)^2$이고, 이는 $\frac{1}{4}\pi$에서 부호가 바뀐다.)



점선들은 기울기가 -1이다. 하나는 $(0, 1)$에서의 접선이고, 다른 하나는 $x \to \frac{1}{2}\pi$일 때 곡선이 다가가는 방향이다. 곡선은 $(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2})$를 중심으로 하는 반회전에 대해 대칭인 것처럼 보이며, 문제의 나머지 부분이 바로 이것을 다룬다.

소문항 (ii)

(a, b)를 중심으로 π만큼 회전하면 (x, y)는 $(2a - x, 2b - y)$로 옮겨진다. (a, b)가 한 점과 그 상의 중점이기 때문이다. 곡선이 (a, b)에 대해 2차 회전대칭(rotational symmetry of order 2)을 갖는다는 것은 정확히 이 회전이 곡선을 자기 자신 위로 옮긴다는 뜻이다. (이것이 가능하려면 정의역이 $x = a$에 대해 대칭이어야 한다. 즉 x가 정의역에 있을 때마다 $2a - x$도 정의역에 있어야 한다.)

($\Rightarrow$) 곡선이 이 대칭을 갖는다고 하자. 정의역의 임의의 x에 대해 $(x, g(x))$는 곡선 위에 있으므로, 그 상인 $(2a - x, 2b - g(x))$도 곡선 위에 있다. 곡선은 함수의 그래프이므로 x좌표가 $2a - x$인 곡선 위의 점은 $(2a - x, g(2a - x))$뿐이다. 따라서 $g(2a - x) = 2b - g(x)$, 즉

$$g(x) + g(2a - x) = 2b.$$

($\Leftarrow$) 정의역의 모든 x에 대해 $g(x) + g(2a - x) = 2b$라고 하자. 임의의 점 $(x, g(x))$의 상은

$$(2a - x, 2b - g(x)) = (2a - x, g(2a - x)),$$

이고, 이는 곡선 위에 있다. 따라서 이 회전은 곡선을 자기 자신 안으로 옮기며, 두 번 하면

항등변환이 되므로 곡선을 자기 자신 위로 옮긴다. 항등식에 $x = a$를 대입하면 $g(a) = b$를 얻는데, 이는 (a, b)가 곡선 위에 있다는 것과 일치한다.

적분의 경우, 원점에 대한 대칭은 $a = b = 0$을 뜻하므로 $g(-x) = -g(x)$이다. 즉 g는 기함수(odd function)이다. 왼쪽 절반에서 $x = -u$로 치환(substitution)하면

$$\int_{-1}^{0} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} g(-u)\,\mathrm{d}u = -\int_{0}^{1} g(u)\,\mathrm{d}u,$$

이므로 두 절반이 서로 상쇄되어

$$\int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

소문항 (iii)

$0 < x < \frac{1}{2}\pi$에서 $h(x) = \dfrac{1}{1+\tan^k x}$라 하자. (i)의 그래프를 길잡이로 삼아 $a = \frac{1}{4}\pi$, $b = \frac{1}{2}$를 시도해 본다. 정의역 $(0, \frac{1}{2}\pi)$는 $\frac{1}{4}\pi$에 대해 대칭이고, $2a - x = \frac{1}{2}\pi - x$이다.

> **?** **생각해 보기** $h(\frac{1}{2}\pi - x)$를 어떻게 간단히 할 수 있을까?

$\tan x > 0$인 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$에서 성립하는 $\tan(\frac{1}{2}\pi - x) = \cot x = 1/\tan x$를 이용한다. 그러면 분자와 분모에 $\tan^k x$를 곱하여

$$h(\tfrac{1}{2}\pi - x) = \frac{1}{1+\tan^{-k} x} = \frac{\tan^k x}{\tan^k x + 1},$$

이므로

$$h(x) + h(\tfrac{1}{2}\pi - x) = \frac{1+\tan^k x}{1+\tan^k x} = 1 = 2 \cdot \tfrac{1}{2}.$$

$\tan\frac{1}{4}\pi = 1$이므로 $h(\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}$이고, 따라서 점 $(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2})$는 곡선 위에 있다. (ii)에 의해, 양의 상수 k가 무엇이든 곡선은 $(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2})$에 대해 2차 회전대칭을 갖는다.

적분을 구하기 위해 $I = \displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} h(x)\,\mathrm{d}x$라 하자. 구간 $[\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi]$는 $\frac{1}{4}\pi$에 대해 대칭이므로, 치환 $x = \frac{1}{2}\pi - u$는 이 구간을 자기 자신으로 옮긴다(양 끝이 서로 바뀌며, 이것이 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$에서 생기는 음의 부호를 흡수한다).

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} h(\tfrac{1}{2}\pi - u)\,\mathrm{d}u = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \big(1 - h(u)\big)\,\mathrm{d}u \\ &= \left(\tfrac{1}{3}\pi - \tfrac{1}{6}\pi\right) - I. \end{aligned}$$

따라서 $2I = \frac{1}{6}\pi$이고,

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{1+\tan^k x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{12}.$$

기하학적으로 보면, 반회전은 직사각형 $[\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi] \times [0, 1]$ 안에서 곡선 아래의 영역과 곡선 위의 영역을 서로 맞바꾸므로, 넓이는 직사각형의 절반인 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}\pi$이다. 이것은 (ii)의 논증에서 g를 $h - \frac{1}{2}$로 바꾼 것이다.

검산

- $k = 1$, $x = \frac{1}{6}\pi$일 때 $h = 1/(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{3}) \approx 0.634$이고, $x = \frac{1}{3}\pi$일 때 $h = 1/(1 + \sqrt{3}) = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1) \approx 0.366$이다. 대칭성이 말하는 대로 두 값의 합은 1이다.
- 답은 k에 의존하지 않는다. $k \to \infty$일 때 h는 $x < \frac{1}{4}\pi$에서 1에 가깝고 $x > \frac{1}{4}\pi$에서 0에 가까우므로, 적분은 $[\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{4}\pi]$의 길이인 $\frac{1}{12}\pi$로 수렴(converge)하며, 결과와 일치한다.
- $k = 0.3, 1, 2, 3.7, 10$에 대해 수치적분(numerical integration)을 하면 매번 0.2617994가 나와 $\pi/12 \approx 0.2617994$와 일치한다.

흔한 실수

- (i)에서 범위를 $-1 < f'(x) \leq -\frac{1}{2}$로 쓰는 것. 값 -1은 정의역에 속하는 $x = 0$에서 실제로 나타난다.
- (ii)에서 한 방향만 증명(proof)하는 것. "필요충분조건(if and only if)"이므로 대칭성 $\Rightarrow$ 항등식과 항등식 $\Rightarrow$ 대칭성을 모두 보여야 한다.
- (iii)에서 $1/(1 + \tan^k x)$를 직접 적분하려는 것. 일반적인 k에 대해서는 구할 수 있는 초등 원시함수(elementary antiderivative)가 없으며, 대칭성이 이 문제의 핵심이다.

STEP 너머

(iii)의 기법, 즉 치환 $x \mapsto a + b - x$를 한 뒤 적분을 자기 자신과 더하는 방법은 흔히 "킹의 규칙(King's rule)"이라고 불린다. 이는 정의역의 대칭성을 이용해 적분을 간단히 하는 방법의 특수한 경우이며, 이 아이디어는 군론(group theory)과 물리학에서 핵심이 된다. 그곳에서는 문제의 대칭성이 어떤 적분이 0이 되는지((ii)에서처럼), 또는 간단한 값을 갖는지를 예측해 준다. 같은 논리로 모든 $k > 0$에 대해 $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\tan^k x} = \frac{1}{4}\pi$를 계산할 수 있다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)에는 이런 종류의 대칭성 논증으로 풀리는 적분이 훨씬 더 많이 실려 있다.

풀이

STEP II 2018, 문제 4

순수수학 • 삼각방정식

> **STEP II 2018, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q4

핵심 아이디어

주어진 항등식(identity)은 코사인의 합을 곱으로 바꾸어 주며, 0과 같다고 놓은 방정식을 풀 때 필요한 것이 바로 곱이다. (i)에서는 바깥쪽 두 항과 안쪽 두 항을 짝지으면 곧바로 공통인수(common factor)가 생긴다. (ii)와 (iii)에서는 모든 것을 두 각의 합의 절반과 차의 절반으로 나타내는 것이 유용하며, 그러면 (ii)는 인수분해(factorise)되고 (iii)은 두 제곱의 합이 0이 되는 꼴이 된다.

풀이

소문항 (i)

첫째 항과 마지막 항을 짝짓고, 가운데 두 항을 짝짓는다. 항등식에 의해

$$\cos x + \cos 4x = 2\cos\tfrac{5x}{2}\cos\tfrac{3x}{2},$$
$$3(\cos 2x + \cos 3x) = 6\cos\tfrac{5x}{2}\cos\tfrac{x}{2}.$$

(코사인은 우함수(even function)이므로 $\cos(-\frac{3x}{2}) = \cos\frac{3x}{2}$로 쓸 수 있다.) 따라서 좌변은

$$2\cos\tfrac{5x}{2}\left(\cos\tfrac{3x}{2} + 3\cos\tfrac{x}{2}\right).$$

이다. $c = \cos\frac{x}{2}$로 두면 삼배각 공식(triple-angle formula) $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$에 의해 $\cos\frac{3x}{2} = 4c^3 - 3c$이므로, 괄호 안은 그냥 $4c^3$이다. 그러므로 방정식은

$$8\cos\tfrac{5x}{2}\cos^3\tfrac{x}{2} = 0.$$

이 된다.

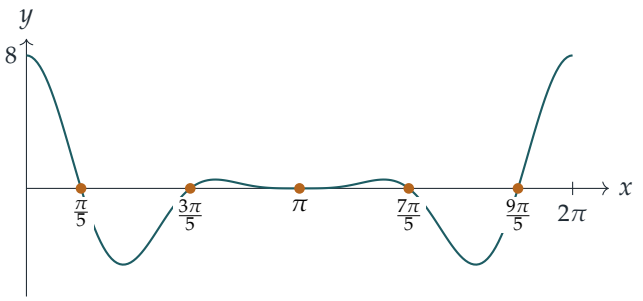
첫째 인수. $\cos\frac{5x}{2} = 0$이라는 것은 어떤 정수 k에 대하여 $\frac{5x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, 즉 $x = \frac{(2k+1)\pi}{5}$라는 뜻이다. $0 \le x \le 2\pi$이려면 $0 \le 2k+1 \le 10$이어야 하므로 $k = 0, 1, 2, 3, 4$이다.

둘째 인수. $0 \le \frac{x}{2} \le \pi$에서 $\cos\frac{x}{2} = 0$이면 $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}$, 즉 $x = \pi$뿐이며, 이것은 이미 앞의 목록에 들어 있다.

그러므로 해는

$$x = \frac{\pi}{5},\ \frac{3\pi}{5},\ \pi,\ \frac{7\pi}{5},\ \frac{9\pi}{5}.$$

이다. 좌변의 그래프에서 이 해들을 볼 수 있다. $x = \pi$에서는 $\cos\frac{5x}{2}$와 $\cos^3\frac{x}{2}$가 모두 0이 되므로, 곡선은 그곳에서 축을 가로지르지 않고 접하기만 한다.



소문항 (ii)

처음 두 항에 항등식을 쓰고 $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$을 이용하면

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) - \cos 2x = 2\cos x \cos y - 2\cos^2 x + 1.$$

이다. 이것을 1과 같다고 놓으면

$$2\cos x\,(\cos y - \cos x) = 0,$$

이므로 $\cos x = 0$ 또는 $\cos y = \cos x$이다.

- $0 \le x \le \pi$에서 $\cos x = 0$이면 $x = \frac{\pi}{2}$이다(이때 y는 어떤 값이어도 된다).
- $\cos y = \cos x$이면 $x = y$이다. 코사인은 $[0, \pi]$에서 순감소(strictly decreasing)하므로 그 구간에서 각 값을 단 한 번만 갖기 때문이다.

따라서 요구한 대로 $x = y$ 또는 $x = \frac{\pi}{2}$이다.

소문항 (iii)

$s = \frac{1}{2}(x+y)$, $d = \frac{1}{2}(x-y)$로 둔다. 항등식에 의해 $\cos x + \cos y = 2\cos s \cos d$이고, $\cos(x+y) = \cos 2s = 2\cos^2 s - 1$이다. 방정식은

$$2\cos s\cos d - 2\cos^2 s + 1 = \tfrac{3}{2} \iff 4\cos^2 s - 4\cos s\cos d + 1 = 0.$$

이 된다.

생각해 보기 방정식은 하나인데 미지수는 둘이다. 어떻게 이것으로 x와 y를 모두 결정할 수 있을까?

$\cos s$에 대하여 완전제곱식(complete the square)을 만든다. $1 = \cos^2 d + \sin^2 d$이므로

$$4\cos^2 s - 4\cos s \cos d + \cos^2 d + \sin^2 d = (2\cos s - \cos d)^2 + \sin^2 d = 0.$$

이다. 두 실수의 제곱의 합이 0이 되는 것은 둘 다 0일 때뿐이므로, 다음 두 방정식을 얻는다.

$$\sin d = 0 \qquad \text{그리고} \qquad 2\cos s = \cos d.$$

$x, y \in [0, \pi]$이므로 $-\frac{\pi}{2} \le d \le \frac{\pi}{2}$이고, 이 범위에서 sin의 영점은 $d = 0$뿐이다. 따라서 $x = y$이고, 그러면 $s = x$, $\cos d = 1$이므로 $\cos x = \frac{1}{2}$이다. $0 \le x \le \pi$이므로 이것은 $x = \frac{\pi}{3}$을 뜻한다.

따라서 유일한 해는

$$x = y = \frac{\pi}{3}.$$

이다. 실제로 $\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$이다.

같은 계산으로 더 많은 것을 알 수 있다. 모든 x, y에 대하여

$$\tfrac{3}{2} - \big(\cos x + \cos y - \cos(x+y)\big) = \tfrac{1}{2}\big[(2\cos s - \cos d)^2 + \sin^2 d\big] \ge 0,$$

이므로 $\frac{3}{2}$는 좌변이 가질 수 있는 최댓값이고, 이 방정식은 정확히 그 최댓값이 어디에서 나타나는지를 묻는 것이다.

검산

- (i)에서 $x = \frac{\pi}{5}$일 때: $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$이므로 $\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} = 0$이고 $\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5} = 0$이다. $x = 0$일 때 좌변은 $1+3+3+1 = 8$로, $8\cos 0\cos^3 0$과 일치한다.
- $[0, 2\pi]$ 위의 촘촘한 격자에서 컴퓨터로 탐색하면 위의 다섯 영점이 정확히 나오고, $[0, \pi]^2$ 위의 격자에서 탐색하면 $\cos x + \cos y - \cos(x+y)$의 최댓값은 1.5이며 $x = y \approx 1.0472 = \frac{\pi}{3}$에서만 이 값을 갖는다.
- (ii)에서 $x = \frac{\pi}{2}$이면 모든 y에 대하여 $\cos(\frac{\pi}{2} + y) + \cos(\frac{\pi}{2} - y) - \cos\pi = -\sin y + \sin y + 1 = 1$이다.

흔한 실수

- $x = \pi$를 두 번 적거나 빠뜨리는 것: (i)에서 이 값은 두 인수 모두에서 나오지만 해로서는 하나이다.

- (ii)에서 $\cos x$로 나누어 $x = \frac{\pi}{2}$를 잃어버리는 것.
- (iii)에서 $\cos s$에 대한 이차식에서 멈추고, 판별식(discriminant)(또는 제곱의 합)을 이용해 $\cos^2 d = 1$을 이끌어 내지 않는 것.

STEP 너머

(i)의 계수 $1, 3, 3, 1$은 우연이 아니다. 좌변은 $e^{ix}(1+e^{ix})^3$의 실수부(real part)이고, $1+e^{ix} = 2\cos\frac{x}{2}\, e^{ix/2}$이므로 이것은 한 줄 만에 $8\cos^3\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}$가 된다. (iii)은 삼각형의 세 각에 대한 고전적인 부등식 $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$가 모습을 바꾼 것이며($A = x$, $B = y$, $C = \pi - x - y$로 둔다), 등호는 정삼각형(equilateral triangle)일 때만 성립한다. 이처럼 두 변수 함수의 최댓값을 구하는 것은 다변수 미적분학(multivariable calculus)에서 대학 1학년 때 배우는 표준적인 주제이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 복소 지수함수를 쓰면 이와 같은 삼각함수 항등식이 거의 저절로 얻어진다는 것을 보여 준다.

풀이

STEP II 2018, 문제 5

순수수학 • 급수의 적분

> **STEP II 2018, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q5

핵심 아이디어

각 소문항에서는 함수를 거듭제곱급수(power series)로 바꾼 뒤 한 항씩 적분한다. (i)에서는 등비급수(geometric series)를 적분하기만 하면 된다. (ii)에서는 지수함수를 전개하고 나면 모든 항이 $\int_0^\infty x^m \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ 꼴의 적분이 되는데, 이것은 계승(factorial)이고, 계승들이 약분되어 정확히 (i)의 급수가 남는다. (iii)에서는 분모의 $\ln x$가 실마리이다. $x = \mathrm{e}^{-t}$로 치환(substitution)하면 이것이 $-t$가 되고, 적분은 (ii)의 적분 두 개로 바뀐다.

풀이

소문항 (i)

$|x| < 1$일 때 이항전개(binomial expansion)(공비가 $-x$인 등비급수)는 다음과 같다.

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

양변을 0부터 x까지 적분한다. 좌변은 $\ln 1 = 0$이므로 $\int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{1+u} = \ln(1+x)$이다. 우변은 항별로 적분하면

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \qquad (\text{첨자를 바꿈: } n+1 \text{ 대신} n) \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n},\end{aligned}$$

이고, 이것이 $|x| < 1$에 대해 구하려던 결과이다.

소문항 (ii)

모든 x에 대하여

$$\mathrm{e}^{-ax} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ax)^n}{n!} = 1 - ax + \frac{a^2x^2}{2!} - \frac{a^3x^3}{3!} + \cdots .$$

$n = 0$인 항은 1이므로

$$\frac{1 - \mathrm{e}^{-ax}}{x} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a)^n x^{n-1}}{n!}.$$

여기서 x로 나누는 것은 문제가 없다. 남은 모든 항이 인수 x를 가지므로 피적분함수는 $x = 0$에서 아무 문제 없이 잘 정의된다(a로 수렴한다). e^{-x}를 곱하고 항별로 적분하면(수렴(convergence)은 신경 쓰지 않아도 된다고 문제에 주어져 있다)

$$\int_0^{\infty} \frac{(1 - \mathrm{e}^{-ax})\,\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!} I_{n-1}, \qquad \text{여기서} I_m = \int_0^{\infty} x^m \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

? **생각해 보기** I_m은 무엇인가?

$u = x^m$, $\mathrm{d}v = \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$로 두고 부분적분(integration by parts)을 한다. $m \geq 1$이면

$$I_m = \Big[-x^m \mathrm{e}^{-x} \Big]_0^{\infty} + m \int_0^{\infty} x^{m-1} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = m I_{m-1},$$

이다. $x \to \infty$일 때 $x^m \mathrm{e}^{-x} \to 0$이고(지수함수가 이긴다) $x = 0$에서는 값이 0이기 때문이다. $I_0 = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$이므로 $I_m = m!$이다.

따라서 $I_{n-1} = (n-1)!$이고 $\dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$이다. 그러므로

$$\int_0^{\infty} \frac{(1 - \mathrm{e}^{-ax})\,\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n} = \ln(1 + a),$$

이다. 여기서 소문항 (i)에 $x = a$를 대입했는데, $|a| < 1$이므로 이것은 허용된다. 이것이 구하려던 결과이다.

소문항 (iii)

$x = \mathrm{e}^{-t}$로 치환하면 $\ln x = -t$이고 $\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$이다. x가 0부터 1까지 움직일 때 t는 ∞부터 0까지 내려간다. 또한 $x^p = \mathrm{e}^{-pt}$, $x^q = \mathrm{e}^{-qt}$이다. 따라서

$$\int_0^1 \frac{x^p - x^q}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \int_{\infty}^0 \frac{\mathrm{e}^{-pt} - \mathrm{e}^{-qt}}{-t} \left(-\mathrm{e}^{-t}\right) \mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \frac{\left(\mathrm{e}^{-qt} - \mathrm{e}^{-pt}\right)\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t,$$

이다. 여기서 두 음의 부호는 서로 상쇄되었고, 적분 구간의 위끝과 아래끝을 바꾸면서 p와 q의 자리가 바뀌었다. 이제 $\mathrm{e}^{-qt} - \mathrm{e}^{-pt} = \left(1 - \mathrm{e}^{-pt}\right) - \left(1 - \mathrm{e}^{-qt}\right)$로 쓰고 적분을 나눈다.

각 부분은 각각 $a = p$, $a = q$인 (ii)의 꼴이고, 둘 다 $|a| < 1$을 만족한다. 따라서

$$\int_0^1 \frac{x^p - x^q}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \ln(1+p) - \ln(1+q) = \ln\left(\frac{1+p}{1+q}\right).$$

두 적분이 각각 따로 수렴하므로 이렇게 나누는 것은 정당하다. (ii)에 의해 각 적분은 유한한 값을 가진다.

검산

- $p = q$이면 피적분함수는 0이고, 실제로 $\ln\frac{1+p}{1+p} = 0$이다.
- p와 q를 바꾸면 피적분함수와 답의 부호가 모두 바뀐다.
- 부호 확인: $0 < x < 1$이면 $\ln x < 0$이다. $p < q$이면 $x^p > x^q$이므로 피적분함수는 음수이고, $\ln\frac{1+p}{1+q}$도 음수이다.
- $p = \frac{1}{2}, q = 0$이면 답은 $\ln\frac{3}{2} \approx 0.405465$이다. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}-1}{\ln x}\,\mathrm{d}x$를 수치적분하면 같은 값이 나오고, $(-1, 1)$에서 p와 q를 무작위로 골라도 소수점 아래 여섯째 자리까지 공식과 일치한다.

흔한 실수

- e^{-ax}의 $n = 0$인 항이 1과 상쇄된다는 것을 잊고, 0에서 발산하는 e^{-x}/x를 적분하려고 하는 것.
- (iii)의 치환에서 부호를 하나 잃어버리는 것. 추적해야 할 음의 부호가 세 개($\ln x$에서, $\mathrm{d}x$에서, 그리고 적분 구간을 뒤집는 데서) 있으며, 하나라도 틀리면 $\ln\frac{1+q}{1+p}$가 나온다.
- $(n-1)!$ 대신 $I_{n-1} = n!$로 쓰는 것. 그러면 계승들이 약분되어 $\frac{1}{n}$이 되지 않는다.

STEP 너머

적분 $I_m = \int_0^\infty x^m \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = m!$은 감마함수(gamma function) $\Gamma(m+1)$이며, 이 함수는 계승을 정수가 아닌 수로 확장한다. (iii)의 적분은 "적분 기호 아래에서의 미분(differentiating under the integral sign)"의 고전적인 예이다. p에 대해 미분하면 다루기 어려운 $\ln x$가 사라지고 $\int_0^1 x^p\,\mathrm{d}x = \frac{1}{p+1}$이 남는다. 실제로 이 결과는 $p, q > -1$이기만 하면 성립한다. 신경 쓰지 않아도 된다고 했던 급수와 적분의 순서 바꾸기는 해석학(analysis) 강의에서 균등수렴(uniform convergence)이나 지배수렴(dominated convergence)으로 정당화된다. 이러한 단계의 바탕에 있는 해석학에 대해서는 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 참고하라.

풀이

STEP II 2018, 문제 6

순수수학 • 계승과 소수

> **STEP II 2018, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q6

핵심 아이디어

두 소문항 모두 한 가지 사실에 달려 있다. 소수(prime) p가 $k!$를 나누는 것은 정확히 $p \leq k$일 때이다. (i)에서는 $n \geq 5$이기만 하면 계승(factorial)이 5의 배수이고, 따라서 $n! + 5$도 그렇다. (ii)에서 좌변은 $2n-1$ 이하의 수들로만 만들어지므로, $2n-1$보다 큰 소수는 좌변을 나눌 수 없다. $m!$가 그런 소수를 포함할 만큼 크다면 등식은 성립하지 않는다. 두 정리는 m을 크게 만들고 그 소수를 제공하기 위해 주어져 있다.

풀이

소문항 (i)

$n \geq 5$이면 5는 $n!$의 인수(factor) 중 하나이므로 $5 \mid n!$이고, 따라서 $5 \mid n! + 5$이다. 그런데 $n! + 5 > 5$이므로 $n! + 5$는 1보다 크고 자기 자신보다 작은 인수 5를 가지며, 따라서 소수가 아니다. 그러므로 $n \leq 4$인 경우만 확인하면 된다:

$$1! + 5 = 6, \qquad 2! + 5 = 7, \qquad 3! + 5 = 11, \qquad 4! + 5 = 29.$$

6은 소수가 아니고, 나머지 셋은 소수이다. 따라서 해는 다음과 같다.

$$(n, p) = (2, 7),\ (3, 11),\ (4, 29).$$

소문항 (ii)

$P_n = 1! \times 3! \times \cdots \times (2n-1)!$라 하자. 이 계승들 각각에 들어 있는 모든 인수는 1 이상 $2n-1$ 이하의 정수이다. 따라서 소수 q가 P_n을 나누면, q가 소수이므로 그 정수들 중 하나

를 나누고, 따라서 $q \le 2n-1$이다. 이로부터 핵심 사실을 얻는다:

$$\text{다음 수는 어떤 소수} q > 2n-1\text{로도 나누어떨어지지 않는다: } P_n. \qquad (*)$$

한편 $q \le m$인 모든 소수는 $m!$를 나눈다. 따라서 $P_n = m!$이면, m은 $2n-1$보다 큰 모든 소수보다 작다.

n이 큰 경우. $n \ge 7$이고 $P_n = m!$이라고 가정하자. 정리 1에 의해 $m! = P_n > (4n)!$이므로 $m > 4n$이다(계승은 증가한다). 정리 2에 의해 소수 q로서 $2n < q < 4n$인 것이 존재한다. 그러면 $q < 4n < m$이므로 $q \mid m! = P_n$이다. 그런데 $q > 2n > 2n-1$이므로 이는 $(*)$에 모순이다. 따라서 $n \ge 7$인 해는 없다.

? 생각해 보기 왜 모든 n에 대하여 그냥 정리를 인용할 수는 없을까?

정리 1은 $n \ge 7$인 경우에 대해서만 주장되어 있으며, 실제로 $n = 6$일 때는 거짓이다. 따라서 $n = 1, \dots, 6$은 직접 확인해야 한다. 계산을 짧게 하기 위해 다시 $(*)$를 이용한다.

n이 작은 경우.

- $n = 1$: $P_1 = 1 = 1!$이므로 $m = 1$이다.
- $n = 2$: $P_2 = 1 \times 6 = 6 = 3!$이므로 $m = 3$이다.
- $n = 3$: $P_3 = 6 \times 120 = 720 = 6!$이므로 $m = 6$이다.
- $n = 4$: $P_4 = 720 \times 5040$이다. $720 = 6!$이고 $5040 = 7 \times 8 \times 9 \times 10$이므로 $P_4 = 6! \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 = 10!$을 얻고, 따라서 $m = 10$이다.
- $n = 5$: $P_5 = P_4 \times 9! = 10! \times 9! > 10!$이므로 $m \ge 11$이다. 그러면 소수 11이 $m!$를 나누지만, $11 > 9 = 2n-1$이므로 $(*)$에 모순이다. 해가 없다.
- $n = 6$: $P_6 = 10! \times 9! \times 11! > 12!$이므로($10! \times 9! > 12$이기 때문이다) $m \ge 13$이다. 그러면 소수 13이 $m!$를 나누지만, $13 > 11 = 2n-1$이므로 $(*)$에 모순이다. 해가 없다.

해가 존재하는 각 경우에 m은 유일하다. 양의 정수의 계승은 2!부터 순증가(strictly increasing)하기 때문이다(그리고 $1! = 1 < 2!$이다). 따라서 해는 다음과 같다.

$$(n, m) = (1, 1),\ (2, 3),\ (3, 6),\ (4, 10).$$

검산

항등식 $1!3!5!7! = 10!$은 쉽게 확인할 수 있다. 양변 모두 3 628 800이다. $n \le 59$, $m < 400$ 범위에서 컴퓨터로 탐색한 결과 정확히 위의 네 쌍만 나왔으며, $n! + 5$가 소수인 것은

$n = 2, 3, 4$일 때뿐임도 확인했다($n \leq 30$ 범위에서 탐색). 또한 정리 1이 $n = 6$에서 성립하지 않음도 확인되는데, 바로 이 때문에 $n = 5$와 $n = 6$을 직접 확인하는 과정이 정말로 필요하다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)에서 $n = 1$을 빠뜨리는 것: 이때 곱은 인수 1! 하나뿐이므로 $(1, 1)$은 해이다.
- $n = 5$나 $n = 6$에 정리 1을 사용하는 것. 정리 1은 $n \geq 7$에 대해서만 서술되어 있으므로, 이 경우들은 따로 논증해야 한다.
- "$q \mid m!$"라고 말하면서 $q \leq m$인지 확인하지 않는 것. 바로 이 때문에 정리 1로부터 $m > 4n$을 얻어야 한다.

STEP 너머

정리 2는 베르트랑 공준(Bertrand's postulate)이다. 즉 모든 $n \geq 1$에 대하여 소수 p로서 $n < p \leq 2n$인 것이 존재한다. 체비쇼프(Chebyshev)가 1852년에 이를 증명했고, 이후 에르되시(Erdős)가 중심 이항계수(central binomial coefficient) $\binom{2n}{n}$을 이용한 아름다운 초등적 증명을 내놓았다. $n! + 1 = m^2$ 같은 방정식(브로카르 문제(Brocard's problem))은 아직 풀리지 않은 문제이다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 소수와 계승의 산술로 나아가는 좋은 다음 단계이다.

풀이

STEP II 2018, 문제 7

순수수학 • 기하에서의 벡터

STEP II 2018, 7번 문제

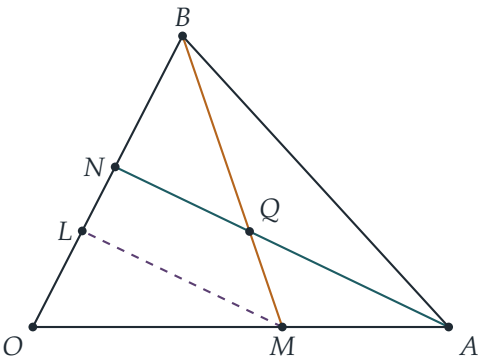
더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/18-s2-q7

핵심 아이디어

M은 OA 위에, N은 OB 위에 있으므로 $\mathbf{m}$은 $\mathbf{a}$의 실수배로, $\mathbf{n}$은 $\mathbf{b}$의 실수배로 쓸 수 있다. 그러면 점 Q에는 BM을 따라가는 길과 AN을 따라가는 길, 두 가지로 도달할 수 있고, 각 경로마다 $\mathbf{q}$가 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$의 일차결합(linear combination)으로 표현된다. $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$는 평행하지 않으므로 계수를 비교(comparing coefficients)할 수 있고, 이것으로 모든 것이 나온다.

풀이



$\mathbf{m}$ 구하기

$\mathbf{m} = m\,\mathbf{a}$, $\mathbf{n} = n\,\mathbf{b}$라 하자. M과 N은 변 위에 있으므로 $0 < m < 1$이고 $0 < n < 1$이다.

BM을 따라서. Q는 M과 B 사이에 있고 $MQ : QB = \mu : 1$이므로, Q는 M에서 B까지 가는

길의 $\frac{\mu}{1+\mu}$만큼 간 지점이다.

$$\mathbf{q} = \mathbf{m} + \frac{\mu}{1+\mu}(\mathbf{b} - \mathbf{m}) = \frac{1}{1+\mu}\,\mathbf{m} + \frac{\mu}{1+\mu}\,\mathbf{b} = \frac{m}{1+\mu}\,\mathbf{a} + \frac{\mu}{1+\mu}\,\mathbf{b}.$$

AN을 따라서. 마찬가지로 $NQ : QA = \nu : 1$이므로

$$\mathbf{q} = \mathbf{n} + \frac{\nu}{1+\nu}(\mathbf{a} - \mathbf{n}) = \frac{\nu}{1+\nu}\,\mathbf{a} + \frac{1}{1+\nu}\,\mathbf{n} = \frac{\nu}{1+\nu}\,\mathbf{a} + \frac{n}{1+\nu}\,\mathbf{b}.$$

생각해 보기 **a**의 계수끼리, 그리고 따로 **b**의 계수끼리 같다고 놓아도 되는 이유는 무엇인가?

O, A, B는 실제로 삼각형을 이루는 세 꼭짓점이므로 **a**와 **b**는 영벡터가 아니고 서로 평행하지도 않다. 만약 $\beta \neq 0$인 상태에서 $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \mathbf{0}$이면 **b**가 **a**의 실수배가 되어 버린다. 따라서 $\beta = 0$이고, 그러면 $\alpha = 0$이다. 그러므로 평면 위의 각 벡터를 **a**와 **b**의 일차결합으로 나타내는 방법은 오직 하나뿐이다.

q에 대한 두 식을 빼서 계수를 비교하면

$$\frac{m}{1+\mu} = \frac{\nu}{1+\nu}, \qquad \frac{\mu}{1+\mu} = \frac{n}{1+\nu}.$$

첫째 식에서 $m = \dfrac{(1+\mu)\nu}{1+\nu}$, 즉

$$\mathbf{m} = \frac{(1+\mu)\nu}{1+\nu}\,\mathbf{a},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. 둘째 식에서는 역할을 바꾼 같은 논법으로

$$\mathbf{n} = \frac{\mu(1+\nu)}{1+\mu}\,\mathbf{b}.$$

를 얻는다.

λ 구하기

이제 $\mathbf{l} = \lambda\mathbf{b}$이므로

$$\overrightarrow{ML} = \lambda\mathbf{b} - m\,\mathbf{a}, \qquad \overrightarrow{AN} = n\,\mathbf{b} - \mathbf{a}.$$

두 벡터가 평행할 필요충분조건은 어떤 스칼라 k에 대하여 $\overrightarrow{ML} = k\,\overrightarrow{AN}$인 것이다. (앞에서와 같은 이유로 허용되는) **a**의 계수 비교로 $k = m$을 얻고, 이어서 **b**의 계수에서 $\lambda = kn = mn$을 얻는다. (기하학적으로 보면, $ML \parallel AN$이므로 삼각형 OML과 OAN은 닮음(similar)이고, 따라서 $OL/ON = OM/OA$이다.) 그러므로

$$\lambda = mn = \frac{(1+\mu)\nu}{1+\nu} \cdot \frac{\mu(1+\nu)}{1+\mu} = \mu\nu.$$

조건 $\mu\nu < 1$

$$m < 1 \iff (1+\mu)\nu < 1+\nu \iff \mu\nu < 1,$$
$$n < 1 \iff \mu(1+\nu) < 1+\mu \iff \mu\nu < 1,$$

여기서 분모를 없애는 데 $1+\nu > 0$과 $1+\mu > 0$을 이용하였다. 따라서 μ와 ν가 양수일 때, 조건 $\mu\nu < 1$은 M이 O와 A 사이에 엄밀하게 놓이고 N이 O와 B 사이에 엄밀하게 놓이기 위해 꼭 필요한 조건이다. 같은 말로, (Q가 이 비율로 나누는) 직선 AN과 BM이 삼각형 내부에서 만난다는 뜻이다. 또한 이 조건은 $\lambda < 1$이라는 것도 말해 준다. 즉 M을 지나고 AN에 평행한 직선은 O와 B 사이에서 OB와 만나는데, M이 변 OA 위에 있으므로 당연히 그래야 한다. $\mu\nu = 1$이면 $M = A$, $N = B$가 되어 도형이 퇴화하고, $\mu\nu > 1$이면 M과 N은 변의 연장선 위에서 A와 B 너머에 놓인다.

검산

- **중선**(*median*). M과 N이 중점이면 Q는 무게중심(centroid)이고, 무게중심은 각 중선을 꼭짓점에서부터 2 : 1로 나눈다. 따라서 $\mu = \nu = \frac{1}{2}$이고, 공식은 마땅히 그래야 하듯 $m = \frac{(3/2)(1/2)}{3/2} = \frac{1}{2}$을 준다. 이때 $\lambda = \frac{1}{4}$이다. 삼각형 OAN에서 중점연결정리(midpoint theorem)에 의해 L은 ON의 중점이므로, OB를 따라 4분의 1만큼 간 지점이다.
- **대칭성**. $A \leftrightarrow B$를 바꾸면 $M \leftrightarrow N$과 $\mu \leftrightarrow \nu$가 바뀌고, m과 n에 대한 공식도 올바르게 서로 바뀐다. 답 $\lambda = \mu\nu$ 역시 대칭이다.
- 약 10^5개의 무작위 삼각형에 대해 변 위에 M과 N을 무작위로 잡고 μ와 ν를 측정하는 컴퓨터 검사를 하여, m, n, $\lambda = \mu\nu$가 10^{-12} 이내로 맞음을 확인하였다. 예를 들어 (그림에서처럼) $m = 0.6$, $n = 0.55$이면 $\lambda = 0.33$이다.

흔한 실수

- 내분 비율의 방향을 거꾸로 잡는 것: Q는 M에서 B까지 가는 길의 $\frac{\mu}{1+\mu}$만큼 간 지점이지, B에서 M까지가 아니다.
- 이유를 밝히지 않고 계수를 같다고 놓는 것. 이는 **a**와 **b**가 평행하지 않다는 사실에 의존한다.
- 삼각형이 예각삼각형이라는 조건이 어떤 역할을 할 것이라 기대하는 것. 그렇지 않다. 이 논증은 모든 삼각형에서 성립한다.

STEP 너머

계수 비교가 가능한 것은 **a**와 **b**가 **일차독립**(*linearly independent*)이어서 평면의 기저(basis)를 이루기 때문이다. 이것이 대학 첫 선형대수학(linear algebra) 강의의 중심 아이디어이다. 깔끔한 답 $\lambda = \mu\nu$는 체바(Ceva)의 정리, 메넬라오스(Menelaus)의 정리와 같은 계열의 비율에 관한 결과이며, 이런 정리들은 무게중심 좌표(barycentric coordinates)에서 가장 깔끔하게 다룰 수 있다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 기저와 좌표를 꼼꼼하게 전개한다.

풀이

STEP II 2018, 문제 8

순수수학 • 베르누이 미분방정식

STEP II 2018, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/18-s2-q8

핵심 아이디어

두 방정식은 모두 베르누이 방정식(Bernoulli equation)이다. 우변에 있는 y의 거듭제곱 때문에 선형(linear)이 깨지지만, y의 적절한 거듭제곱을 새 변수로 잡으면 방정식이 선형이 된다. $y = v^2$ (또는 $y = v^3$)로 놓으면 공통인수 v (또는 v^2)가 약분되고, 남는 것은 상수 계수(constant coefficients)를 갖는 일계 선형 방정식(first-order linear equation)이다. 이것은 적분인자(integrating factor)나 변수분리(separating variables)로 풀 수 있다. 그래프를 그릴 때 두 곡선을 비교하는 가장 깔끔한 방법은 둘 다 하나의 지수함수 $u = e^{-t/6}$로 나타내는 것이다.

풀이

문제에서는 $y_1(x)$, $y_2(x)$라고 쓰지만 독립변수(independent variable)는 처음부터 끝까지 t이므로 $y_1(t)$, $y_2(t)$로 쓴다.

소문항 (i)

$v = \sqrt{y} \geq 0$으로 하여 $y = v^2$으로 놓는다. 그러면 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$이고 $y^{1/2} = v$이므로 방정식은 다음과 같이 된다.

$$2v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \alpha v - \beta v^2.$$

한 가지 해는 $v \equiv 0$, 즉 상수해 $y \equiv 0$이다. $v \neq 0$인 곳에서는 v로 나눌 수 있다.

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\beta}{2}v = \frac{\alpha}{2}.$$

이것은 적분인자가 $e^{\beta t/2}$인 선형 방정식이다.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(ve^{\beta t/2}\right) = \frac{\alpha}{2}e^{\beta t/2} \quad \Longrightarrow \quad ve^{\beta t/2} = \frac{\alpha}{\beta}e^{\beta t/2} + C.$$

따라서 일반해(general solution)는 상수 C에 대하여

$$\sqrt{y} = \frac{\alpha}{\beta} + Ce^{-\beta t/2}, \qquad \text{즉} \qquad y = \left(\frac{\alpha}{\beta} + Ce^{-\beta t/2}\right)^2,$$

이고 (단, $v = \sqrt{y} \geq 0$이므로 괄호 안이 음이 아닌 범위에서), 여기에 상수해 $y \equiv 0$이 더해진다. $C = 0$으로 잡으면 또 다른 상수해 $y \equiv \alpha^2/\beta^2$을 얻는다.

$y_1(0) = 0$이려면 $v(0) = 0$이어야 하므로 $C = -\alpha/\beta$이고,

$$\boxed{y_1(t) = \frac{\alpha^2}{\beta^2}\left(1 - e^{-\beta t/2}\right)^2}$$

이다. 이것은 상수가 아니고, 괄호 안의 $1 - e^{-\beta t/2}$는 $t \geq 0$에서 음이 아니므로 진짜 해이다. (v로 나눈 것은 $v > 0$인 $t > 0$에서 타당했다.)

소문항 (ii)

이번에는 지수가 $\frac{2}{3}$이므로 $y^{2/3}$과 y가 공통인수를 갖게 하고 싶다. $y = v^3$, 즉 $v = y^{1/3} \geq 0$으로 놓는다. 그러면 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3v^2\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$이고 $y^{2/3} = v^2$이므로

$$3v^2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \alpha v^2 - \beta v^3.$$

을 얻는다.

? **생각해 보기** 치환 $v = y^{1/3}$을 어떻게 짐작할 수 있을까?

소문항 (i)에서는 $v = y^{1-\frac{1}{2}}$로 놓아 양변이 공통인수 v를 갖게 했다. 베르누이 방정식 $\dot{y} = \alpha y^n - \beta y$에서는 치환 $v = y^{1-n}$이 언제나 통하며, 여기서는 $1 - n = \frac{1}{3}$이다.

$v \equiv 0$ (상수해 $y \equiv 0$)을 제외하면 v^2으로 나눌 수 있다.

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\beta}{3}v = \frac{\alpha}{3}.$$

적분인자 $e^{\beta t/3}$을 써서 앞에서와 똑같이 하면, 상수 D에 대하여 (괄호 안이 음이 아닌 범위에서)

$$y^{1/3} = \frac{\alpha}{\beta} + De^{-\beta t/3}, \qquad \text{즉} \qquad y = \left(\frac{\alpha}{\beta} + De^{-\beta t/3}\right)^3,$$

이다. 조건 $y_2(0) = 0$에 의해 $D = -\alpha/\beta$이어야 하므로

$$\boxed{y_2(t) = \frac{\alpha^3}{\beta^3}\left(1 - e^{-\beta t/3}\right)^3}$$

이다.

소문항 (iii)

$\alpha = \beta$이면

$$y_1(t) = \left(1 - e^{-t/2}\right)^2, \qquad y_2(t) = \left(1 - e^{-t/3}\right)^3.$$

각 곡선의 모양. $1 - e^{-t/2}$와 $1 - e^{-t/3}$은 0에서 시작해 1을 향해 증가하므로, 두 곡선 모두 0에서 출발하여 증가한다. $t \to \infty$일 때 둘 다 1로 수렴(converge)하는데, 이는 (i)에서는 상수해 $y = \alpha^2/\beta^2 = 1$, (ii)에서는 상수해 $y = \alpha^3/\beta^3 = 1$이다. 미분하면

$$y_1' = e^{-t/2}\left(1 - e^{-t/2}\right), \qquad y_2' = e^{-t/3}\left(1 - e^{-t/3}\right)^2,$$

이므로 두 곡선 모두 원점에서 기울기가 0이다. $w = e^{-t/2}$일 때 기울기 $y_1' = w(1-w)$는 $w = \frac{1}{2}$에서 최대이므로, y_1은 $t = 2\ln 2$, $y_1 = \frac{1}{4}$에서 변곡점(point of inflection)을 갖는다. 마찬가지로 $w = e^{-t/3}$일 때 $y_2' = w(1-w)^2$은 $w = \frac{1}{3}$에서 최대이므로, $t = 3\ln 3$, $y_2 = \frac{8}{27}$에서 변곡점을 갖는다. 각 곡선은 원점에서 점근선(asymptote) $y = 1$을 향해 올라가는 S자 모양이다.

상대적 위치. $u = e^{-t/6}$으로 놓으면 $t > 0$에서 $0 < u < 1$이고 $e^{-t/2} = u^3$, $e^{-t/3} = u^2$이다. 그러면

$$y_1 = (1-u^3)^2 = (1-u)^2(1+u+u^2)^2, \qquad y_2 = (1-u^2)^3 = (1-u)^3(1+u)^3,$$

이므로

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{(1+u+u^2)^2}{(1-u)(1+u)^3}.$$

이다. 전개하면 $(1+u+u^2)^2 = 1 + 2u + 3u^2 + 2u^3 + u^4$이고 $(1-u)(1+u)^3 = (1-u^2)(1+u)^2 = 1 + 2u - 2u^3 - u^4$이다. 분자에서 분모를 빼면

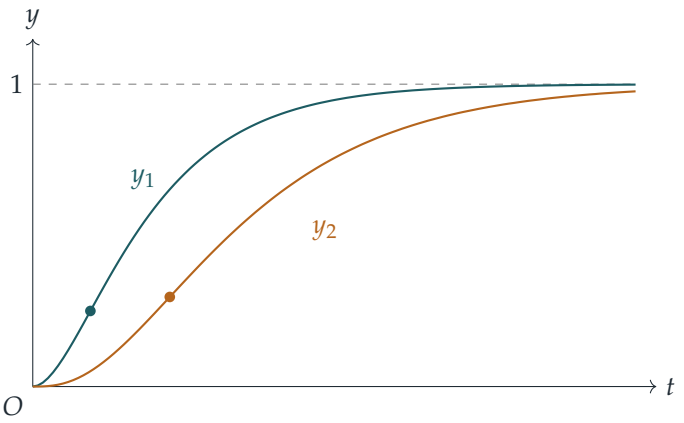
$$3u^2 + 4u^3 + 2u^4 > 0 \qquad (0 < u < 1),$$

이고 분모는 양수이므로 $y_1/y_2 > 1$이다. 따라서

$$y_1(t) > y_2(t) \quad \text{모든} t > 0 :$$

에 대하여 성립한다. 즉 두 곡선은 원점에서만 만나고, 그 밖의 모든 곳에서 y_1이 y_2보다 위에 있다.

이것은 양 끝에서의 거동과도 일치한다. $t = 0$ 근처에서 $y_1 \approx \frac{t^2}{4}$인 반면 $y_2 \approx \frac{t^3}{27}$로 훨씬 작다. t가 클 때 $1 - y_1 \approx 2e^{-t/2}$이고 $1 - y_2 \approx 3e^{-t/3}$인데, $e^{-t/3}$이 더 천천히 감소하므로 y_2가 점근선에서 더 아래에 있다.



점은 변곡점을 나타내며, y_1 위의 $(2\ln 2, \frac{1}{4})$와 y_2 위의 $(3\ln 3, \frac{8}{27})$이다.

검산

- 다시 대입해 보기: $\alpha = \beta = 1$일 때 y_1에 대하여, $w = e^{-t/2}$로 두면 $y_1^{1/2} - y_1 = (1-w) - (1-w)^2 = w(1-w)$이고, 이것은 정확히 y_1'이다.
- t가 클 때: $y_1 \to \alpha^2/\beta^2$인데, 이는 $\alpha y^{1/2} = \beta y$가 되는 0이 아닌 점이다. 마찬가지로 $y_2 \to \alpha^3/\beta^3$이며, 이는 $\alpha y^{2/3} = \beta y$가 되는 점이다.
- $\alpha = \beta = 1$일 때의 수치: $t = 2$에서 $y_1 \approx 0.400$, $y_2 \approx 0.115$이고, $t = 10$에서 $y_1 \approx 0.987$, $y_2 \approx 0.897$이다. 두 공식은 컴퓨터로 미분방정식(differential equation)을 단계별로 수치 적분하여서도 확인했다.

흔한 실수

- $y \equiv 0$도 해라는 점을 언급하지 않고 v (또는 v^2)로 나누는 것. 문제에서 원점을 지나는 **상수가 아닌** 해를 구하라고 한 이유가 바로 이것이다.
- 지수를 틀리는 것: 치환 $y = v^3$은 $e^{-\beta t/2}$가 아니라 $e^{-\beta t/3}$을 준다.
- 기울기만으로 곡선의 위아래를 판단하는 것. 두 곡선의 높이가 같은 $y \in (0,1)$인 곳에서는 $y^{2/3} > y^{1/2}$이므로 그곳에서 y_2가 더 빨리 증가하겠지만, 이것만으로는 어느 곡선이 더 위에 있는지 알 수 없으므로 직접 비교해야 한다.

STEP 너머

이 방정식들은 베르누이 방정식으로, 대학 1학년 과정에서 $v = y^{1-n}$으로 푸는 표준적인 유형이다. 또한 이들은 해의 비유일성(non-uniqueness)을 보여 준다. $y^{1/2}$과 $y^{2/3}$은 $y = 0$에서 기울기가 무한대이므로 우변이 그곳에서 립시츠(Lipschitz) 조건을 만족하지 않으며, $y \equiv 0$과 y_1이 모두 원점을 지난다. 실제로 임의의 시각 t_0까지 0에 머물다가 그 뒤로 $y_1(t - t_0)$을 따라가면 해들의 한 족 전체를 얻는다. 피카르-린델뢰프 정리(Picard–Lindelöf theorem)는 이런 일이 일어날 수 없는 경우가 정확히 언제인지 설명해 준다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 베르누이 방정식과 해의 존재성 및 유일성(existence and uniqueness)을 모두 다룬다.

풀이

STEP II 2018, 문제 9

역학 • 중력 아래에서의 충돌

STEP II 2018, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/18-s2-q9

핵심 아이디어

두 구슬(bead)은 언제나 아래쪽으로 같은 가속도(acceleration) g를 가지므로, 서로에 대해 **상대적으로**(relative) 보면 일정한 속도로 움직인다. A가 튀어 오른 뒤에는 두 구슬 사이의 간격이 일정한 빠르기로 줄어들므로, 충돌까지 걸리는 시간이 곧바로 나온다. 마지막 부분은 순전히 에너지와 운동량의 문제이다. A가 지면에 닿을 때의 속력을 알면 충돌 직후 A가 얼마나 빠르게 움직였는지 알 수 있고, 나머지는 뉴턴(Newton)의 실험 법칙(Newton's experimental law)이 해결해 준다.

풀이

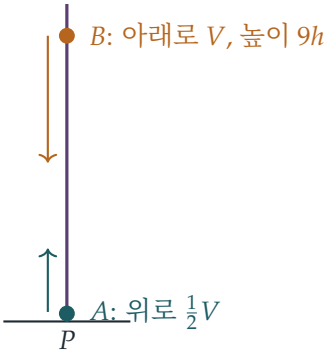
두 구슬을 매끄러운 연직 철사 위에 있는 질량 m의 같은 입자로 모형화하고 공기 저항은 없다고 하자. 그러면 충돌과 충돌 사이에 각 구슬은 중력만 받으며 자유롭게 움직인다. 위쪽을 양의 방향으로 하고 높이는 P에서부터 잰다.

첫 번째 튀어 오름까지

A는 정지 상태에서 $8h$만큼 떨어지므로, 에너지 보존(conservation of energy)에 의해

$$V^2 = 2g(8h) = 16gh, \qquad V = 4\sqrt{gh}.$$

같은 시간 동안 B 역시 정지 상태에서 $8h$만큼 떨어졌으므로(운동이 똑같다), 이 순간 B는 높이 $17h - 8h = 9h$에 있으며 속력 V로 아래로 움직이고 있다. A는 지면에서 위쪽으로 속력 $\frac{1}{2}V$로 튀어 오른다.



충돌

A가 지면을 떠나는 순간부터 두 구슬은 모두 가속도 $-g$로 움직이므로, B의 A에 대한 상대 속도는 처음 값

$$(-V) - \tfrac{1}{2}V = -\tfrac{3}{2}V$$

에 그대로 머문다.

생각해 보기 두 구슬이 언제 만나는지 구할 때 왜 중력을 무시해도 될까?

중력은 두 속도를 똑같이 $-gt$만큼 바꾸므로, 그 차에서는 상쇄된다. 따라서 $9h$의 간격은 일정한 속력 $\frac{3}{2}V$로 줄어들고, 충돌은 튀어 오른 뒤

$$\tau = \frac{9h}{\frac{3}{2}V} = \frac{6h}{V} = \frac{6h}{4\sqrt{gh}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{h}{g}}$$

만큼의 시간이 지나서 일어난다. (그때 A가 아직 공중에 있어야 하는데, 실제로 그렇다는 것을 곧 확인한다.) 그때 A의 높이는

$$H = \tfrac{1}{2}V\tau - \tfrac{1}{2}g\tau^2 = 2\sqrt{gh}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{\frac{h}{g}} - \frac{1}{2}g\cdot\frac{9h}{4g} = 3h - \frac{9}{8}h = \frac{15}{8}h$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. 충돌 직전에는

$$\text{속도: } A = \tfrac{1}{2}V - g\tau = 2\sqrt{gh} - \tfrac{3}{2}\sqrt{gh} = \tfrac{1}{2}\sqrt{gh},$$
$$\text{속도: } B = -V - g\tau = -4\sqrt{gh} - \tfrac{3}{2}\sqrt{gh} = -\tfrac{11}{2}\sqrt{gh}.$$

따라서 A는 아직 올라가는 중이며,

$$u_A = \tfrac{1}{2}\sqrt{gh}\ (\text{위쪽}), \qquad u_B = \tfrac{11}{2}\sqrt{gh}\ (\text{아래쪽}).$$

검산 삼아 계산해 보면, B의 높이도 $9h - V\tau - \frac{1}{2}g\tau^2 = 9h - 6h - \frac{9}{8}h = \frac{15}{8}h$이다.

반발 계수

구슬 사이의 반발 계수(coefficient of restitution)를 e라 하고, 충돌 직후 두 구슬의 속도(위쪽이 양)를 각각 v_A, v_B라 하자. 잠시 $\sqrt{gh}$를 단위로 하여 계산하면, $u_A = \frac{1}{2}$는 위쪽, $u_B = \frac{11}{2}$는 아래쪽이다.

운동량(momentum) (질량이 같고, 순간적인 충돌 동안 중력이 주는 충격량(impulse)은 무시할 수 있다):

$$v_A + v_B = \tfrac{1}{2} - \tfrac{11}{2} = -5.$$

뉴턴의 실험 법칙: 두 구슬은 속력 $\frac{1}{2} + \frac{11}{2} = 6$으로 가까워지고, 충돌 후 위에 있는 B는 그 e배의 속력으로 A에서 멀어진다:

$$v_B - v_A = 6e.$$

두 식을 빼면 $v_A = -\frac{1}{2}(5 + 6e)$이므로, A는 속력 $w = \frac{1}{2}(5 + 6e)\sqrt{gh}$로 **아래쪽으로** 움직인다.

이제 A는 높이 $\frac{15}{8}h$에서 처음 속력 w로 떨어져 속력 V로 지면에 닿는다. (이 구슬은 B보다 아래에 있으면서 더 빠르게 아래로 움직이므로, 즉 $v_B = -5 - v_A = \frac{1}{2}(6e - 5) > v_A$이므로, 그 전에 두 구슬이 다시 만나지는 않는다.) 에너지에 의해

$$V^2 = w^2 + 2g \cdot \tfrac{15}{8}h \quad \Longrightarrow \quad w^2 = 16gh - \tfrac{15}{4}gh = \tfrac{49}{4}gh,$$

이므로 $w = \frac{7}{2}\sqrt{gh}$이다. 그러면 $\frac{1}{2}(5 + 6e) = \frac{7}{2}$이고, 따라서

$$e = \frac{1}{3}.$$

충돌 후 A는 $\frac{7}{2}\sqrt{gh}$로, B는 $\frac{3}{2}\sqrt{gh}$로 아래로 움직인다.

검산

- 운동 에너지(kinetic energy): 충돌 전 전체 운동 에너지는 $\frac{1}{2}m\,gh\,(\frac{1}{4} + \frac{121}{4}) = \frac{61}{4}mgh$이고, 충돌 후에는 $\frac{1}{2}m\,gh\,(\frac{49}{4} + \frac{9}{4}) = \frac{29}{4}mgh$이다. $e < 1$이므로 당연히 에너지가 손실된다.
- $e = 1$이면 (질량이 같으므로) 두 구슬은 속도를 그대로 맞바꾸게 되어, A는 $\frac{11}{2}\sqrt{gh}$로 떠나 V보다 빠르게 지면에 닿을 것이다. $e = 0$이면 두 구슬이 함께 $\frac{5}{2}\sqrt{gh}$로 움직여 A는 더 느리게 지면에 닿을 것이다. $\frac{1}{3}$이라는 값은 그 사이에 적절히 놓여 있다.
- 컴퓨터로 전체 운동을 단계별로 시뮬레이션해 보면($g = h = 1$로 두고) 높이 1.875에서 속력 0.5와 5.5로 충돌이 일어나고, $e = \frac{1}{3}$일 때 두 번째로 지면에 닿는 속력은 $4 = V$가 된다.

흔한 실수

- A가 떨어지는 동안 B도 떨어지고 있었다는 사실을 잊는 것: 튀어 오르는 순간 B는 $17h$가 아니라 $9h$에 있으며, 이미 속력 V로 움직이고 있다.
- 뉴턴의 법칙에서 부호를 틀리는 것: 속도를 한 가지 양의 방향을 기준으로 쓰고, 멀어지는 속력이 양수로 나오는지 확인하자.

STEP 너머

떨어지는 구슬 하나의 좌표계에서 생각하는 요령은 갈릴레이 상대성(Galilean relativity)을 처음 맛보는 것이다. 균일한 중력장에서 자유 낙하하는 좌표계에서는 중력이 전혀 보이지 않으며, 이것이 아인슈타인(Einstein)의 등가 원리(equivalence principle)의 출발점이다. 대학 1학년 역학의 충돌 문제는 흔히 질량 중심 좌표계(centre-of-mass frame)에서 푸는데, 이 좌표계에서는 반발 계수가 e인 충돌이 두 속도의 방향을 뒤집고 크기를 e배로 바꿀 뿐이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이 두 가지 아이디어를 모두 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP II 2018, 문제 10

역학 • 늘어나는 줄 위의 운동학

STEP II 2018, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

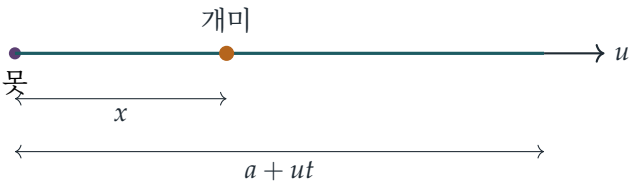
step.maths.org/questions/18-s2-q10

이 문제는 *Beyond STEP*의 11.12 절 **고무줄 위의 개미**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch11/rubber-rope.html

핵심 아이디어

줄이 균일(uniform)하므로 줄은 모든 곳에서 같은 비율로 늘어나고, 따라서 줄 위의 각 점은 줄 전체에서 차지하는 **비율**상의 위치를 그대로 유지한다. 그러므로 한 점의 속력은 그 점과 못 사이의 거리에 비례한다. 그러면 개미에 대한 방정식은 선형(linear)이 되고, x 자체보다는 개미가 줄을 따라 간 비율 $x/(a+ut)$를 추적하는 것이 자연스럽다.

풀이



줄 위의 한 점의 속력

시각 t에서 자유로운 끝은 못으로부터 $a+ut$만큼 떨어져 있으므로 이것이 줄의 길이이다. 줄은 균일하므로 전체 길이에 걸쳐 같은 비율 $(a+ut)/a$로 늘어난다. 따라서 $t=0$일 때 못으로부터 거리 x_0에 있던 줄 위의 점은 언제나 줄 전체의 같은 비율 x_0/a인 위치에 있다.

$$x = \frac{x_0}{a}(a+ut).$$

x_0을 고정하고 미분하면 그 점의 속력은 $\frac{x_0 u}{a}$이고, 이를 현재 위치 x로 나타내면 다음과 같다.

$$\text{점의 속력, 위치} x = \frac{ux}{a+ut}.$$

확인해 보면, 이 값은 못에서 0이고 자유로운 끝에서 u이다.

개미의 방정식

못에 대한 개미의 속력은 v에 개미 아래에 있는 줄의 속력을 더한 것이므로

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v + \frac{ux}{a+ut}.$$

몫의 미분법(quotient rule)을 쓰고 이 방정식을 대입하면

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{x}{a+ut}\right) &= \frac{1}{a+ut}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \frac{ux}{(a+ut)^2} \\ &= \frac{1}{a+ut}\left(v + \frac{ux}{a+ut}\right) - \frac{ux}{(a+ut)^2} = \frac{v}{a+ut},\end{aligned}$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다.

끝에 도달하는 시간

$t=0$에서 $x=0$임을 이용하여 0부터 t까지 적분한다.

$$\frac{x}{a+ut} = \int_0^t \frac{v}{a+us}\,\mathrm{d}s = \frac{v}{u}\ln\left(\frac{a+ut}{a}\right) = \frac{1}{k}\ln\left(1+\frac{ut}{a}\right).$$

좌변은 개미가 지나온 줄의 비율이고, 개미는 이 값이 1이 될 때 끝에 도달한다. 우변은 0에서 시작하여 한없이 꾸준히 증가하므로 이런 일은 정확히 한 번, 다음을 만족하는 시각 T에 일어난다.

$$\ln\left(1+\frac{uT}{a}\right) = k \iff 1+\frac{uT}{a} = \mathrm{e}^k \iff uT = a(\mathrm{e}^k - 1),$$

이것이 주어진 결과이다.

돌아오는 여정

이제 개미는 못을 향해 걸으므로 줄에 대한 개미 자신의 속력은 $-v$이고,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -v + \frac{ux}{a+ut}.$$

생각해 보기 몫의 미분법 계산을 다시 해야 할까?

그렇지 않다. 위의 계산은 v의 부호만 빼고 그대로이므로

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{x}{a+ut}\right) = -\frac{v}{a+ut}.$$

돌아오는 여정은 $t = T$에서 개미가 줄의 끝, 즉 $x/(a+ut) = 1$인 곳에 있을 때 시작한다. T부터 t까지 적분하면

$$\frac{x}{a+ut} = 1 - \frac{1}{k}\ln\left(\frac{a+ut}{a+uT}\right).$$

개미는 이 비율이 0이 될 때 못에 도달하며, 이는 처음으로 다음을 만족하는 시각 t_1에 일어난다.

$$\ln\left(\frac{a+ut_1}{a+uT}\right) = k \iff a+ut_1 = (a+uT)\,\mathrm{e}^k.$$

따라서 돌아오는 데 걸리는 시간은

$$t_1 - T = \frac{(a+uT)(\mathrm{e}^k-1)}{u}.$$

가는 여정에서 $\mathrm{e}^k - 1 = uT/a$이고 $a+uT = a\mathrm{e}^k$이므로

$$t_1 - T = \frac{a\mathrm{e}^k}{u}\cdot\frac{uT}{a} = T\mathrm{e}^k.$$

돌아오는 여정은 $T\mathrm{e}^k$만큼 걸리며, 이는 가는 여정보다 e^k배 길다.

검산

- $u \to 0$이면 줄이 늘어나지 않는다. 이때 $k \to 0$이고 $T = a(\mathrm{e}^k-1)/u \to a/v$이며, 돌아오는 시간 $T\mathrm{e}^k \to a/v$도 마땅히 그래야 하듯 같은 값으로 간다.
- 돌아오는 시간이 더 긴 것은 이치에 맞다. 돌아오는 길에는 개미 아래의 줄이 개미를 못에서 멀어지는 쪽으로 실어 나르기 때문이다.
- 임의의 a, u, v 값(예를 들어 $a = 1, u = v$이면 $k = 1$이고 $T = \mathrm{e} - 1 \approx 1.718$)에 대해 두 미분방정식(differential equation)을 수치적으로 한 단계씩 풀어 나가면, 개미는 시각 T에 끝에 도달하고 그 뒤 $T\mathrm{e} \approx 4.67$만큼 더 지나 못으로 돌아오며, 이는 공식과 일치한다.

흔한 실수

- 줄 위의 모든 점이 속력 u로 움직인다고 생각하는 것. 그렇게 움직이는 것은 자유로운 끝뿐이다.
- 돌아오는 여정이 $t = 0$이 아니라 $t = T$에서 시작한다는 것을 잊어서, 적분상수(constant of integration)가 달라진다는 점을 놓치는 것.
- 답을 T와 k만으로 나타내라고 했는데 $(a+uT)(\mathrm{e}^k-1)/u$로 남겨 두는 것.

STEP 너머

$\int \mathrm{d}t/(a+ut)$가 발산(diverge)하므로, 줄이 아무리 빨리 늘어나도 개미는 언제나 끝에 도달한다. 개미가 지나온 거리를 줄 전체에 대한 비율로 나타내면 시간의 로그(logarithm)처럼 증가하며, 만약 늘어나는 속도가 더 빠르다면(예를 들어 지수적으로 늘어난다면) 적분이 수렴(converge)하여 개미는 끝내 도착하지 못할 수도 있다. 그 자체가 팽창하는 공간을 일정한 속력으로 지나간다는 같은 아이디어가 우주론(cosmology)에도 나타나는데, 여기서 이 아이디어는 먼 은하에서 온 빛이 언젠가 우리에게 도달할 수 있는지를 결정한다. 여기서 알맞은 양을 찾아내어 푼 선형 방정식은 적분인자법(integrating-factor method)의 한 예이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(미분방정식 입문서)를 참고하라.

풀이

STEP II 2018, 문제 11

역학 • 마찰과 모멘트

> **STEP II 2018, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/18-s2-q11

핵심 아이디어

세 개의 미지 접촉력은 세 방정식으로 결정된다. 수평 방향의 뉴턴의 제2법칙(Newton's second law), 수직 방향 가속도가 없다는 조건, 그리고 질량중심(centre of mass)에 대한 모멘트(moment)가 평형을 이룬다는 주어진 조건이다. 두 수직항력(normal reaction)을 모두 가속도 a로 나타내고 나면, 두 가지 실패는 각각 a에 대한 임계값이 된다. 앞바퀴는 그 수직항력이 0으로 떨어질 때 들리고, 뒷바퀴는 필요한 마찰력(friction)이 그 수직항력의 μ배를 넘을 때 미끄러진다. 두 임계값 중 더 낮은 쪽이 먼저 일어난다.

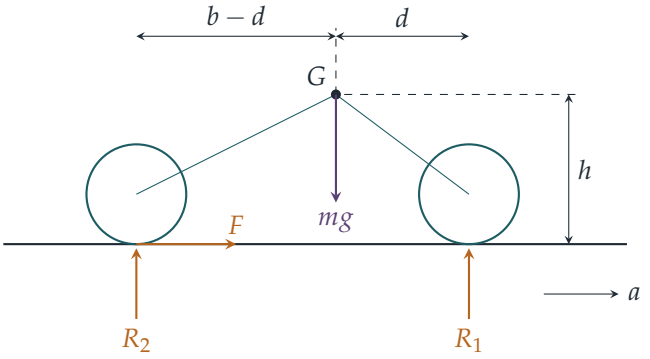
풀이

모형과 힘

오토바이를 오른쪽으로 가속도 $a \geq 0$로 직선 운동하는 강체(rigid body)로 본다. 도로가 수평이므로 질량중심 G는 수직 방향 가속도가 없고, 오토바이는 회전하지 않는다. 작용하는 힘은 다음과 같다.

- G에서 아래로 작용하는 무게 mg;
- 앞바퀴에서의 수직항력 R_1 (앞바퀴는 매끄러우므로 그곳에는 마찰력이 없다);
- 뒷바퀴에서의 수직항력 R_2와 마찰력 F. 엔진이 뒷바퀴를 구동하므로 F는 앞쪽으로 작용하며, 유일한 수평 방향의 힘이다.

앞바퀴 접촉점은 G보다 수평 거리 d만큼 앞에 있고, 뒷바퀴 접촉점은 $b - d$만큼 뒤에 있다. 두 접촉점 모두 G보다 거리 h만큼 아래에 있다.



a로 나타낸 수직항력

수평 방향과 수직 방향으로

$$F = ma, \qquad R_1 + R_2 = mg.$$

이제 G에 대한 모멘트를 구하되, 반시계 방향(앞바퀴를 들어 올리는 방향)을 양으로 잡는다. 무게는 G에 대한 모멘트가 없다. G보다 거리 d만큼 앞에서 위로 작용하는 R_1은 반시계 방향 모멘트 $R_1 d$를 가진다. G보다 거리 $b-d$만큼 뒤에서 위로 작용하는 R_2는 시계 방향 모멘트 $R_2(b-d)$를 가진다. 그리고 F는 G보다 거리 h만큼 아래에 있는 직선을 따라 앞쪽으로 작용하므로 반시계 방향 모멘트 Fh를 가진다. 합을 0으로 놓으면

$$R_1 d + Fh = R_2(b-d).$$

$F = ma$와 $R_1 = mg - R_2$를 대입하면

$$mgd - R_2 d + mah = R_2(b-d) \quad \Longrightarrow \quad R_2 = \frac{m(gd+ah)}{b},$$

이고, 따라서

$$R_1 = mg - R_2 = \frac{m\big((b-d)g - ah\big)}{b}.$$

a가 커지면 하중이 앞바퀴에서 뒷바퀴로 이동한다. 즉 R_1은 감소하고 R_2는 증가한다.

각 실패는 언제 일어나는가?

앞바퀴. 앞바퀴는 $R_1 \geq 0$인 동안, 즉

$$a \leq \frac{(b-d)g}{h} =: a_{\text{들림}}.$$

인 동안 도로에 붙어 있다.

뒷바퀴. 뒷바퀴는 $F \leq \mu R_2$인 동안, 즉

$$ma \leq \frac{\mu m(gd+ah)}{b} \iff a(b-\mu h) \leq \mu dg.$$

인 동안 미끄러지지 않는다.

생각해 보기 왜 부등호 방향을 바꾸지 않고 $b - \mu h$로 나눌 수 있는가?

바로 이것이 주어진 조건 $\mu < b/h$의 역할이다. 이 조건은 $b - \mu h > 0$임을 말해 준다. 따라서 뒷바퀴는

$$a \le \frac{\mu d g}{b - \mu h} =: a_{\text{미끄럼}}.$$

인 동안 접지력을 유지한다. (이 조건이 없다면 사용 가능한 마찰력이 필요한 마찰력과 적어도 같은 속도로 커지므로, 뒷바퀴는 결코 미끄러지지 않을 것이다.)

두 임계값은 모두 양수이며, a가 0에서부터 커질 때 뒷바퀴가 먼저 미끄러지는 것은 정확히 $a_{\text{미끄럼}} < a_{\text{들림}}$일 때이다. $b - \mu h > 0$이고 $h > 0$이므로 분모를 곱해 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\frac{\mu d g}{b - \mu h} < \frac{(b-d)g}{h} &\iff \mu d h < (b-d)(b - \mu h) \\
&\iff \mu d h + \mu h(b-d) < b(b-d) \\
&\iff \mu h b < b(b-d) \\
&\iff \mu < \frac{b-d}{h},
\end{aligned}$$

마지막 단계에서는 $bh > 0$으로 나누었다. 따라서 $(*)$가 성립하면 앞바퀴가 접촉을 잃기 전에 뒷바퀴가 미끄러지며, 이것이 보이려던 것이다. (사실 이 식의 연쇄는 두 명제가 동치임을 보여 준다.)

$(*)$가 성립할 때의 최대 가속도

$(*)$가 성립하면 $a_{\text{미끄럼}} < a_{\text{들림}}$이다. $a_{\text{미끄럼}}$ 이하의 모든 가속도는 두 조건을 모두 만족하므로, 앞바퀴는 땅에 붙어 있고 뒷바퀴는 접지력을 유지한다. 그보다 큰 가속도는 $F > \mu R_2$를 필요로 한다. 따라서 미끄러지지 않는 최대 가속도는

$$a_{\max} = \frac{\mu d g}{b - \mu h},$$

이며, 이것이 보이려던 것이다.

$(*)$가 성립하지 않을 때

이제 $\mu \ge \dfrac{b-d}{h}$이므로, 같은 동치 연쇄($<$ 대신 $\ge$를 사용)에 의해 $a_{\text{들림}} \le a_{\text{미끄럼}}$이다. 따라서 $a_{\text{들림}}$ 이하의 모든 가속도는 $R_1 \ge 0$을 유지하고 $a \le a_{\text{미끄럼}}$도 만족하므로, 뒷바퀴는 미끄러지지 않는다. $a_{\text{들림}}$을 넘어서면 $R_1 < 0$이 필요한데, 앞바퀴가 도로에 닿아 있는 동안에는 이것이 불가능하다. 따라서 앞바퀴가 접촉을 유지하는 최대 가속도는

$$a_{\max} = \frac{(b-d)g}{h}.$$

이 가속도에서 $R_1 = 0$이다. 즉 오토바이는 모든 무게가 뒷바퀴에 실린 채 막 윌리(wheelie, 앞바퀴를 드는 동작)를 하려는 순간에 있다.

검산

- $a = 0$일 때: $R_2 = mgd/b$이고 $R_1 = mg(b-d)/b$로, 지레 규칙(lever rule)에 따른 통상적인 정적 하중 분배이다. G에 더 가까운 바퀴가 더 많은 무게를 받는다.
- 경계의 경우 $\mu = (b-d)/h$에서는 $b - \mu h = d$이므로 $a_{\text{미끄럼}} = \mu g = (b-d)g/h = a_{\text{들림}}$이다. 두 답이 일치하며, 마땅히 그래야 한다.
- 수치 예: $b = 1.5\,\text{m}$, $d = 0.75\,\text{m}$, $h = 0.6\,\text{m}$, $\mu = 0.8$, $g = 9.8\,\text{m s}^{-2}$. 이때 $(b-d)/h = 1.25 > \mu$이고, $a_{\text{미끄럼}} = 5.88/1.02 \approx 5.76\,\text{m s}^{-2}$로 $a_{\text{들림}} = 12.25\,\text{m s}^{-2}$보다 훨씬 작다. 무작위로 만든 많은 오토바이에 대해 a를 조금씩 키워 가며 어느 조건이 먼저 깨지는지 기록하는 컴퓨터 검산을 해 보았더니, 두 공식과 일치했다.

흔한 실수

- 마찰력 모멘트의 부호를 잘못 잡는 것. G 아래에서 앞쪽으로 작용하는 마찰력은 앞부분을 들어 올리려 하며, 그래서 가속하면 앞바퀴의 하중이 줄어든다.
- $b - \mu h$가 왜 양수인지 말하지 않고 그것으로 나누는 것. 그것이 조건 $\mu < b/h$의 유일한 역할이다.
- 접촉점에 대한 모멘트를 구하고 그 합을 0으로 놓는 것. 오토바이는 가속하고 있으므로, 모멘트는 G에 대해서는 평형을 이루지만 다른 점에 대해서는 그렇지 않다.

STEP 너머

모멘트에 관한 주어진 조건은 질량중심에 대한 각운동량(angular momentum)의 변화율이 그 점에 대한 전체 토크(torque)와 같다는 강체 법칙의 특수한 경우이다. 여기서는 오토바이가 회전하지 않으므로 각운동량이 0이다. 다른 점에 대해서는 가속하는 물체에 ma로부터 비롯되는 "가상" 토크가 추가로 생기며, 이것이 마지막 흔한 실수를 설명해 준다. 같은 하중 이동 분석이 차량 동역학에서 제동 한계와 구동력 한계의 바탕을 이룬다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 강체 동역학을 꼼꼼하게 전개한다.

풀이

STEP II 2018, 문제 12

확률과 통계 • 최적 정지와 기댓값

STEP II 2018, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/18-s2-q12

핵심 아이디어

목표를 앞면(Heads) h번으로 정해 두면, 게임이 끝나기 전에 목표에 도달할 때에만 정확히 £h를 받고 그렇지 않으면 아무것도 받지 못한다. 따라서 상금의 기댓값(expected winnings)은 h에 앞면 h번에 도달할 확률(probability)을 곱한 것이고, 이 문제는 결국 그 확률을 구하는 문제이다. 자연수 h에 대하여 최댓값을 찾을 때는 미분하지 말고, 비 E_{h+1}/E_h를 살펴 이웃한 항끼리 비교한다.

풀이

이 풀이 전체에서 $q = 1 - p = \frac{1}{N+1}$을 뒷면(Tails)이 나올 확률로, E_h를 목표가 h일 때($h \geq 1$) 상금의 기댓값으로 둔다. 앞면 h번에 도달하면 £h를, 그렇지 않으면 £0을 받으므로

$$E_h = h \times \mathrm{P}(\text{게임이 끝나기 전에 앞면}h\text{번에 도달함}).$$

소문항 (i)

버전 1에서는 뒷면이 한 번만 나와도 게임이 끝나므로, 앞면 h번에 도달하는 것은 처음 h번의 던지기가 모두 앞면일 때와 정확히 같다. 각 던지기는 독립(independent)이므로 이 확률은 p^h이고,

$$E_h = hp^h.$$

가장 좋은 h를 찾기 위해 이웃한 값끼리 비교한다. $E_h > 0$이므로

$$\frac{E_{h+1}}{E_h} = \frac{(h+1)p^{h+1}}{hp^h} = \frac{(h+1)N}{h(N+1)},$$

이고

$$\frac{E_{h+1}}{E_h} \geq 1 \iff (h+1)N \geq h(N+1) \iff N \geq h,$$

이며, 등호는 $h = N$일 때에만 성립한다. 따라서

$$E_1 < E_2 < \cdots < E_N = E_{N+1} > E_{N+2} > \cdots .$$

이 수열(sequence)은 $h = N$까지 순증가하고, 그다음 값은 이와 같으며, 그 뒤로는 순감소한다. 그러므로 E_h의 최댓값은 E_N이고, $h = N$을 고르면 상금의 기댓값이 최대가 되어 요구한 결과를 얻는다. ($h = N+1$을 골라도 똑같이 좋다.) 최댓값은 $N\left(\frac{N}{N+1}\right)^N$이다.

소문항 (ii)

이제 게임은 뒷면이 연속으로 두 번 나올 때에만 끝난다. h번째 앞면까지(그것을 포함하여)의 던지기를 각각 앞면으로 끝나는 h개의 블록(block)으로 생각하자. 앞면 h번에 무사히 도달했다면 각 블록은

$$\text{H} \quad \text{또는} \quad \text{TH},$$

이다. 뒷면이 연속으로 두 번 나왔다면 게임이 이미 끝났을 것이기 때문이다. (맨 처음에 나오는 뒷면은 괜찮다. 그 앞에는 아무것도 없다.) 거꾸로, 이런 블록 h개로 이루어진 어떤 배열에도 뒷면이 연속으로 두 번 나오지 않는다. 그 안의 각 뒷면은 앞면 바로 뒤나 맨 처음에 있고, 앞면 바로 앞에 있기 때문이다. 따라서 앞면 h번에 도달하는 것은 던지기 결과가 이 두 종류의 블록 h개로 나누어질 때와 정확히 같다.

? 생각해 보기 왜 블록들의 확률을 그냥 곱해도 될까?

앞면이 나올 때마다 게임은 처음과 정확히 같은 상태가 된다. 직전에 나온 뒷면이 없고, 앞으로의 던지기는 지난 결과와 독립이다. 따라서 각 블록은 다른 블록들과 독립적으로 다음 확률로 무사하다.

$$\mathrm{P}(\text{H}) + \mathrm{P}(\text{TH}) = p + qp = p(1+q) = \frac{N}{N+1} \cdot \frac{N+2}{N+1} = \frac{N(N+2)}{(N+1)^2}.$$

(이 두 사건은 첫 번째 던지기에서 서로 다르므로 배반(disjoint)이다.) 그러므로 앞면 h번에 도달할 확률은 $\left(\frac{N(N+2)}{(N+1)^2}\right)^h$이고,

$$E_h = \frac{hN^h(N+2)^h}{(N+1)^{2h}},$$

이므로 요구한 결과를 얻는다.

$N = 2$인 경우. 이때

$$E_h = h\left(\frac{2 \cdot 4}{9}\right)^h = h\left(\frac{8}{9}\right)^h.$$

소문항 (i)에서와 같이

$$\frac{E_{h+1}}{E_h} = \frac{8(h+1)}{9h} \geq 1 \iff 8h+8 \geq 9h \iff h \leq 8,$$

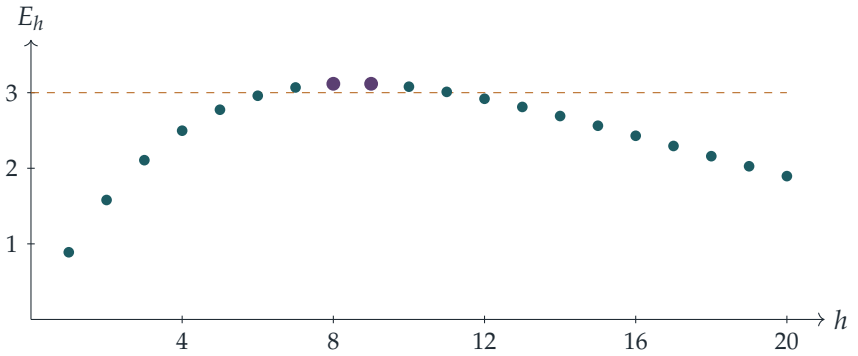
이고, 등호는 $h = 8$일 때에만 성립한다. 따라서 E_h는 $h = 8$까지 순증가하고, 그다음 $E_9 = E_8$이며, 그 뒤로는 순감소한다. 최댓값은

$$E_8 = 8\left(\frac{8}{9}\right)^8 = \frac{2^3 \cdot 2^{24}}{3^{16}} = \frac{2^{27}}{3^{16}}.$$

이 값을 어림하기 위해 밑이 3인 로그(logarithm)를 취하고 $\log_3 2 \approx 0.63$을 이용하면

$$\log_3 E_8 = 27\log_3 2 - 16 \approx 27(0.63) - 16 = 17.01 - 16 = 1.01.$$

따라서 $E_8 \approx 3^{1.01}$이고, 이는 $3^1 = 3$에 매우 가깝다. 상금의 기댓값의 최댓값은 약 £3이다.



$N = 2$일 때 버전 2에서의 값 $E_h = h(8/9)^h$. $h = 8, 9$에서의 공동 최댓값은 3을 나타내는 점선보다 조금 위에 있다.

검산

- 모두 앞면으로 시작하는 경우는 두 버전에서 모두 무사하므로, 버전 2는 버전 1보다 유리할 수밖에 없다. 실제로 $\frac{N(N+2)}{(N+1)^2} = 1 - \frac{1}{(N+1)^2} > \frac{N}{N+1}$이다.
- $N = 1$이면 버전 1에서 $E_1 = E_2 = \frac{1}{2}$이다. 앞면 한 번은 확률 $\frac{1}{2}$, 앞면 두 번은 확률 $\frac{1}{4}$이기 때문이다.
- 정확히 계산하면 $E_8 = 2^{27}/3^{16} = 134\,217\,728/43\,046\,721 \approx 3.118$이므로 £3이라는 어림값은 좋은 근삿값이다. $N = 2, h = 8$로 2×10^5번의 게임을 컴퓨터로 시뮬레이션했더니 평균 상금이 약 £3.11이었다.

흔한 실수

- 버전 2에서 맨 처음에 뒷면이 한 번 나오는 것이 허용된다는 것을 잊거나, h번째 앞면 뒤에 뒷면이 올 수 있다고 잘못 생각하는 것. h번째 앞면이 나오는 즉시 멈춘다.
- hp^h를 미분하여 그 결과를 0으로 놓는 것. 그러면 $h = -1/\ln p$를 얻는데, 이는 대개 정수가 아니며, 이것을 가장 좋은 정수로 바꾸는 데에는 주의가 필요하다. 비를 비교하는 방법(ratio test)이 더 깔끔하고 정확하다.
- 같은 값이 나오는 경우를 놓치는 것. $h = N$과 $h = N + 1$은 같은 상금의 기댓값을 주므로, "보여라"는 $h = N$에서 최댓값이 달성된다는 것만을 요구한다.

STEP 너머

이것은 간단한 **최적 정지**(*optimal stopping*) 문제이다. 여기서는 목표를 미리 정해 두지만, 그렇게 해도 손해가 없다는 것을 확인할 수 있다. 직전에 나온 뒷면 없이 앞면을 H번 얻은 상태에서, 한 번 더 던져서 얻는 이득은 H가 충분히 작을 때 정확히 양수가 된다. 이처럼 "지금 멈추기"와 "한 단계 더 가기"를 비교하여 언제 멈출지 정하는 문제는 마팅게일(martingale)과 동적 계획법(dynamic programming)으로 이어진다. 소문항 (ii)의 블록 논증은 마르코프 연쇄(Markov chain)에 대한 재생(renewal) 아이디어를 처음 맛보는 것이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문서)이 다음 단계로 좋다.

풀이

STEP II 2018, 문제 13

확률과 통계 • 점화식

STEP II 2018, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

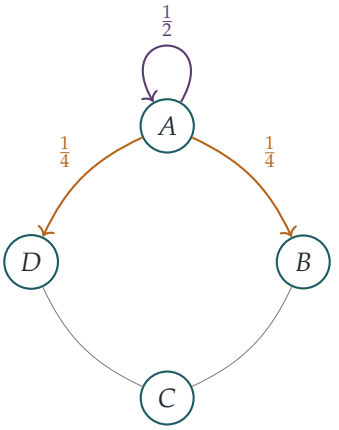
step.maths.org/questions/18-s2-q13

핵심 아이디어

소포가 어디에 있든 다음 호루라기 소리에 소포는 정해진 규칙에 따라 움직인다. 따라서 A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}, D_{n+1} 각각은 A_n, B_n, C_n, D_n의 고정된 일차결합이다. 서로 얽힌 점화식(recurrence) 네 개는 만만치 않아 보이지만, 알맞은 **결합**(마주 보는 두 아이의 확률의 합과 차)을 잡으면 각각이 한 줄짜리 점화식을 만족하고, 이런 점화식은 곧바로 풀 수 있다.

풀이

원 위에 앉은 아이들에게 이름을 붙이자. 호루라기가 울릴 때마다 소포를 든 아이는 확률(probability) $\frac{1}{2}$로 소포를 그대로 가지고 있고, 양옆의 이웃에게 각각 확률 $\frac{1}{4}$로 소포를 넘긴다. 문제의 설정에 따라 시계 방향으로 넘길 확률과 반시계 방향으로 넘길 확률이 같다는 점에 주의한다.



그림은 A에서 일어나는 이동을 나타낸다. 모든 아이에게서 같은 규칙이 적용된다.

소문항 (i)

A에서 시작하면, 호루라기가 한 번 울린 뒤

$$A_1 = \tfrac{1}{2}, \qquad B_1 = \tfrac{1}{4}, \qquad C_1 = 0, \qquad D_1 = \tfrac{1}{4},$$

이다. C는 A에서 두 칸 떨어져 있으므로 한 번의 이동으로는 도달할 수 없기 때문이다.

두 번째 호루라기 뒤에 소포가 어떤 아이에게 있으려면, 소포가 이미 그 아이에게 있었고 그대로 머물렀거나(확률 $\frac{1}{2}$), 이웃에게 있다가 올바른 방향으로 넘어왔어야 한다(각 이웃에서 확률 $\frac{1}{4}$). 따라서

$$\begin{aligned} A_2 &= \tfrac{1}{2}A_1 + \tfrac{1}{4}B_1 + \tfrac{1}{4}D_1 = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16} = \tfrac{3}{8}, \\ B_2 &= \tfrac{1}{2}B_1 + \tfrac{1}{4}A_1 + \tfrac{1}{4}C_1 = \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + 0 = \tfrac{1}{4}, \\ C_2 &= \tfrac{1}{2}C_1 + \tfrac{1}{4}B_1 + \tfrac{1}{4}D_1 = 0 + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16} = \tfrac{1}{8}, \\ D_2 &= \tfrac{1}{2}D_1 + \tfrac{1}{4}C_1 + \tfrac{1}{4}A_1 = \tfrac{1}{8} + 0 + \tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{4}. \end{aligned}$$

검산하면 $\frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = 1$이다.

소문항 (ii)

$n = 2$일 때 쓴 논증은 전확률 법칙(law of total probability)에 의해 모든 $n \geq 0$에 대해 성립한다(n번째 호루라기 뒤에 누가 소포를 들고 있는지를 조건으로 삼는다).

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= \tfrac{1}{2}A_n + \tfrac{1}{4}(B_n + D_n), & B_{n+1} &= \tfrac{1}{2}B_n + \tfrac{1}{4}(A_n + C_n), \\ C_{n+1} &= \tfrac{1}{2}C_n + \tfrac{1}{4}(B_n + D_n), & D_{n+1} &= \tfrac{1}{2}D_n + \tfrac{1}{4}(A_n + C_n), \end{aligned}$$

이고, 초기 조건은 $A_0 = 1$, $B_0 = C_0 = D_0 = 0$이다.

B_n과 D_n 구하기. B_{n+1}과 D_{n+1}에 대한 식을 더하면

$$B_{n+1} + D_{n+1} = \tfrac{1}{2}(B_n + D_n) + \tfrac{1}{2}(A_n + C_n) = \tfrac{1}{2}(A_n + B_n + C_n + D_n) = \tfrac{1}{2},$$

이다. 언제나 누군가는 소포를 들고 있으므로 네 확률의 합은 1이기 때문이다.

? **생각해 보기** 이제 합 $B + D$는 알지만, 이것을 B와 D에 어떻게 나누어야 할까?

더하는 대신 빼 보자. $A_n + C_n$ 항이 소거되어

$$B_{n+1} - D_{n+1} = \tfrac{1}{2}(B_n - D_n).$$

을 얻는다. $B_0 - D_0 = 0$이므로 모든 n에 대해 $B_n - D_n = 0$이다. (이것은 이 놀이의 좌우 대칭성(symmetry)이다. 시계 방향과 반시계 방향으로 넘길 확률이 같고, B와 D는 A의 양쪽에 대칭으로 앉아 있다.) 이를 $B_n + D_n = \frac{1}{2}$와 함께 쓰면

$$B_n = D_n = \tfrac{1}{4} \qquad \text{모든} n \geq 1,$$

에 대해 성립하고, 물론 $B_0 = D_0 = 0$이다. 이 결과는 소문항 (i)과 일치한다.

A_n과 C_n 구하기. 이제 $n \geq 1$에 대해 $A_n + C_n = 1 - (B_n + D_n) = \frac{1}{2}$임을 안다. A_{n+1}과 C_{n+1}에 대한 식을 빼면 $B_n + D_n$ 항이 소거되어

$$A_{n+1} - C_{n+1} = \tfrac{1}{2}(A_n - C_n),$$

이고, 이 식은 모든 $n \geq 0$에 대해 성립한다. $A_0 - C_0 = 1$이므로 모든 $n \geq 0$에 대해 $A_n - C_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$이다. 이를 $A_n + C_n = \frac{1}{2}$와 연립하여 풀면

$$\boxed{A_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{2^{n+1}}, \qquad C_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2^{n+1}} \qquad (n \geq 1).}$$

이 공식은 $n = 0$에서는 성립하지 않는다($A_0 = \frac{3}{4}$가 되어 버린다). 관계식 $A_n + C_n = \frac{1}{2}$는 첫 번째 호루라기 뒤부터 성립하기 때문이다.

검산

- $n = 1$: $A_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, $C_1 = 0$이다. $n = 2$: $A_2 = \frac{3}{8}$, $C_2 = \frac{1}{8}$이다. 둘 다 소문항 (i)과 일치한다.
- $n = 3$: 공식에 따르면 $(A_3, B_3, C_3, D_3) = (\frac{5}{16}, \frac{1}{4}, \frac{3}{16}, \frac{1}{4})$이고, 합은 1이며 점화식을 직접 한 단계씩 계산한 결과와 일치한다. 또한 놀이 200 000회를 컴퓨터로 모의실험한 결과 $A_3 \approx 0.313$, $C_3 \approx 0.188$을 얻었다.
- $n \to \infty$일 때 모든 확률은 $\frac{1}{4}$로 수렴(converge)한다. 호루라기가 여러 번 울리고 나면 대칭성에서 예상되듯 소포는 어느 아이에게나 같은 확률로 있게 된다.

흔한 실수

- B_{n+1}을 B로 들어오는 확률이 아니라 B에서 나가는 확률로 나타내는 것. "바로 직전에 소포가 어디에 있었을 수 있는가?"를 물어보라.
- 모든 $n \geq 0$에 대해 $A_n = \frac{1}{4} + 2^{-(n+1)}$이라고 쓰는 것. 이 식은 $n = 0$에서 틀리다.
- 아무 근거도 없이 "대칭성에 의해" $B_n = D_n$이라고 가정하는 것. 차에 대한 점화식이 이를 엄밀하게 만들어 준다.

STEP 너머

이것은 **마르코프 연쇄**(Markov chain)이다. 즉 네 상태로 이루어진 순환 위에서 전이 행렬(transition matrix) P를 갖는 무작위 행보(random walk)이며, $(A_n, B_n, C_n, D_n) = (1,0,0,0)P^n$이다. 결합 $B_n - D_n$, $A_n - C_n$, $A_n + C_n - B_n - D_n$은 P의 고유벡터(eigenvector)에서 나오고(각각의 고윳값(eigenvalue)은 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 0이다), 균등 분포(uniform distribution)로 2^{-n}의 속도로 수렴하는 현상은 두 번째로 큰 고윳값이 결정한다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 마르코프 연쇄와 그 장기적 거동을 친절하게 다룬다.

풀이

STEP III 2018, 문제 1

순수수학 • 이차방정식의 근과 부등식

STEP III 2018, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/18-s3-q1

핵심 아이디어

비에트 공식(Vieta's formulas)을 쓰면 u와 v에 대한 두 대칭식(symmetric expression)이 모두 계수(coefficient) α와 β의 간단한 함수로 바뀐다. 한 식의 값을 고정하면 α를 소거할 수 있고, 다른 식은 β만의 함수가 된다. 이 함수가 바로 소문항 (i)에서 그린 두 함수 중 하나이다. 그다음 u와 v가 실수라는 조건(판별식(discriminant) ≥ 0)이 곡선의 어느 구간을 써도 되는지 알려 주고, 나머지는 그래프가 해결해 준다.

풀이

소문항 (i)

곡선 $y = \mathrm{f}(\beta)$**.** 미분하면

$$\mathrm{f}'(\beta) = 1 + \frac{1}{\beta^2} + \frac{2}{\beta^3} = \frac{\beta^3 + \beta + 2}{\beta^3} = \frac{(\beta+1)(\beta^2 - \beta + 2)}{\beta^3},$$

이다. 여기서 삼차식(cubic)의 근 $\beta = -1$을 찾아 인수분해하였다. 이차 인수의 판별식은 $1 - 8 < 0$이므로 이 인수는 항상 양수이다. 따라서 정상점(stationary point)은 $\beta = -1$ 하나뿐이고, 이때

$$\mathrm{f}(-1) = -1 + 1 - 1 = -1.$$

이다. 부호를 살펴보자. $-1 < \beta < 0$이면 분자는 양수이고 $\beta^3 < 0$이므로 $\mathrm{f}' < 0$이다. $\beta < -1$이면 둘 다 음수이므로 $\mathrm{f}' > 0$이다. 그러므로 $(-1, -1)$은 **극대점**(*maximum*)이고, 모든 $\beta < 0$에 대하여 $\mathrm{f}(\beta) \leq -1$이다. $\beta > 0$에서는 모든 항이 양수이므로 f는 그 구간에서 증가한다.

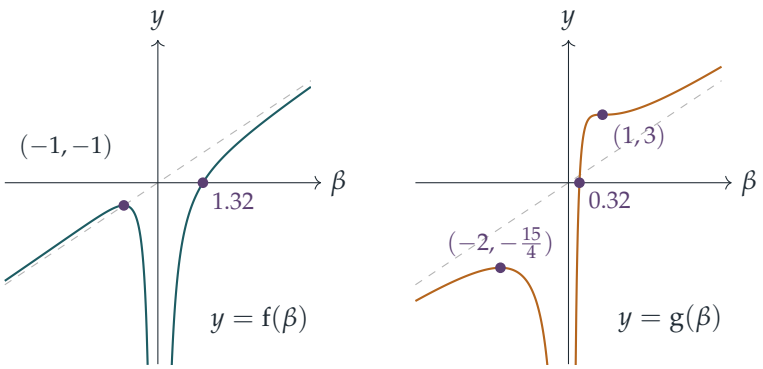
양 끝에서의 거동: $\beta \to 0$일 때 어느 쪽에서 다가가든 $-1/\beta^2$ 항이 지배하므로 $\mathrm{f} \to -\infty$이

다. $\beta \to \pm\infty$일 때 $f(\beta) - \beta \to 0$이므로 $y = \beta$는 사선 점근선(oblique asymptote)이다. 곡선은 $\beta^3 - \beta - 1 = 0$인 곳, 즉 $\beta \approx 1.32$에서 축과 한 번 만난다.

곡선 $y = g(\beta)$. 마찬가지로

$$g'(\beta) = 1 - \frac{3}{\beta^2} + \frac{2}{\beta^3} = \frac{\beta^3 - 3\beta + 2}{\beta^3} = \frac{(\beta-1)^2(\beta+2)}{\beta^3}.$$

이다. 정상점은 $\beta = -2$에서 $g(-2) = -2 - \frac{3}{2} - \frac{1}{4} = -\frac{15}{4}$이고, $\beta = 1$에서 $g(1) = 3$이다. $-2 < \beta < 0$이면 $g' < 0$이고, $\beta < -2$이면 $g' > 0$이므로 $(-2, -\frac{15}{4})$는 극대점이며 모든 $\beta < 0$에 대하여 $g(\beta) \le -\frac{15}{4}$이다. $\beta > 0$이면 $g' \ge 0$이고 등호는 $\beta = 1$에서만 성립한다. 이 점에서 도함수(derivative)의 부호가 바뀌지 않으므로 $(1, 3)$은 정상 변곡점(stationary point of inflection)이고, g는 $\beta > 0$에서 증가한다. 이번에도 $\beta \to 0$일 때 $g \to -\infty$이고, $y = \beta$가 점근선이며, 영점은 $\beta \approx 0.32$($\beta^3 + 3\beta - 1 = 0$의 근) 하나이다.



점선은 점근선 $y = \beta$이다.

소문항 (ii)

비에트 공식에 의하여 $u + v = -\alpha$, $uv = \beta$이다($\beta \ne 0$이므로 $uv \ne 0$이다). 따라서

$$u + v + \frac{1}{uv} = -\alpha + \frac{1}{\beta}, \qquad \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + uv = \frac{u+v}{uv} + uv = \beta - \frac{\alpha}{\beta}.$$

소문항 (iii)

조건 $-\alpha + \frac{1}{\beta} = -1$에서 $\alpha = 1 + \frac{1}{\beta}$이다. 이를 두 번째 식에 대입하면

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + uv = \beta - \frac{1}{\beta}\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) = \beta - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta^2} = f(\beta).$$

이다. 그러므로 **허용되는** 모든 β에 대하여 $f(\beta) \le -1$임을 보이면 된다.

생각해 보기 곡선 $y = \mathrm{f}(\beta)$는 $+\infty$로 올라가므로, 이 부등식이 모든 β에 대해 성립할 수는 없다. 무엇이 β가 커지는 것을 막는가?

바로 u와 v가 실수라는 조건이다. 두 근이 실수일 필요충분조건은 $\alpha^2 \geq 4\beta$, 즉

$$\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^2 \geq 4\beta \iff (\beta+1)^2 \geq 4\beta^3 \iff 4\beta^3-\beta^2-2\beta-1 \leq 0,$$

이다. 여기서 양변에 $\beta^2 > 0$을 곱하였다. 이제 $\beta = 1$은 이 삼차식의 근이고,

$$4\beta^3-\beta^2-2\beta-1 = (\beta-1)(4\beta^2+3\beta+1).$$

이다. 이차 인수의 판별식은 $9-16<0$이므로 이 인수는 항상 양수이다. 따라서 두 근이 실수일 필요충분조건은 $\beta \leq 1 (\beta \neq 0)$이다.

- $\beta < 0$이면: 소문항 (i)에 의하여 $\mathrm{f}(\beta) \leq \mathrm{f}(-1) = -1$이다.
- $0 < \beta \leq 1$이면: f는 $\beta > 0$에서 증가하므로 $\mathrm{f}(\beta) \leq \mathrm{f}(1) = 1-1-1 = -1$이다.

어느 경우든 $\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+uv \leq -1$이므로 원하는 결과가 증명되었다. 등호는 $\beta = -1 (\alpha = 0$, 근은 $\pm 1)$일 때와 $\beta = 1 (\alpha = 2$, 중근(double root) $-1)$일 때 성립한다.

소문항 (iv)

이번에는 $-\alpha+\frac{1}{\beta} = 3$이므로 $\alpha = \frac{1}{\beta}-3$이고

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+uv = \beta-\frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{\beta}-3\right) = \beta+\frac{3}{\beta}-\frac{1}{\beta^2} = \mathrm{g}(\beta).$$

이다. 두 근이 실수일 조건은 $\alpha^2 \geq 4\beta$이다.

$$\left(\frac{1}{\beta}-3\right)^2 \geq 4\beta \iff (1-3\beta)^2 \geq 4\beta^3 \iff 4\beta^3-9\beta^2+6\beta-1 \leq 0.$$

이번에도 $\beta = 1$이 근인데, 이번에는 중근이다.

$$4\beta^3-9\beta^2+6\beta-1 = (\beta-1)(4\beta^2-5\beta+1) = (\beta-1)^2(4\beta-1).$$

$(\beta-1)^2 \geq 0$이므로 이 삼차식이 ≤ 0일 필요충분조건은 $\beta \leq \frac{1}{4}$ 또는 $\beta = 1$이다. 따라서 허용되는 값은 $\beta < 0, 0 < \beta \leq \frac{1}{4}$, 그리고 고립된 값 $\beta = 1$이다.

생각해 보기 최댓값은 그냥 구간의 오른쪽 끝에서의 값 $\mathrm{g}(\frac{1}{4})$일까?

그렇지 않다. 고립점(isolated point)을 놓치지 말아야 한다. 세 부분을 각각 살펴보면 다음과 같다.

- $\beta < 0$: 소문항 (i)에 의하여 $g(\beta) \leq -\frac{15}{4}$이다.
- $0 < \beta \leq \frac{1}{4}$: g는 증가하므로 $g(\beta) \leq g(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4} + 12 - 16 = -\frac{15}{4}$이다.
- $\beta = 1$: $g(1) = 3$이다.

그러므로 $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + uv$의 최댓값은 $\boxed{3}$이고, 이는 $\beta = 1, \alpha = -2$, 즉 $u = v = 1$일 때 얻어진다. (실제로 두 식 모두 $1 + 1 + 1 = 3$이다.) 이 중근이 없었다면 $-\frac{15}{4}$보다 큰 값은 불가능했을 것이다.

검산

- 두 식에 $u = v = 1$을 대입하면 각각 3이 되어 소문항 (iv)와 일치한다. $u = v = -1$을 대입하면 각각 -1이 되는데, 이는 소문항 (iii)의 등호 경우이다.
- 소문항 (iv)에서 $\beta = \frac{1}{4}$를 넣어 보자. $\alpha = 1$이고 $x^2 + x + \frac{1}{4} = (x + \frac{1}{2})^2$이므로 $u = v = -\frac{1}{2}$이다. 그러면 $u + v + \frac{1}{uv} = -1 + 4 = 3$이고 $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + uv = -4 + \frac{1}{4} = -\frac{15}{4}$로, 앞의 주장과 일치한다.
- 실근을 주는 무작위 β 수천 개를 컴퓨터로 조사한 결과, 소문항 (iii)에서는 -1보다 큰 값이 없었고, 소문항 (iv)에서는 $\beta = 1$을 제외하면 -3.75보다 큰 값이 없었다.

흔한 실수

- 판별식 조건을 잊어버리고, 소문항 (iii)에서 상계가 없다고 결론짓는 실수.
- $(\beta - 1)^2(4\beta - 1) \leq 0$의 해를 $\beta \leq \frac{1}{4}$로만 구하고 $\beta = 1$을 놓쳐서, 답을 3 대신 $-\frac{15}{4}$로 쓰는 실수.
- 부등식 $\alpha^2 \geq 4\beta$에 β^2이 아니라 (음수일 수도 있는) β를 곱하는 실수.

STEP 너머

이 문제는 작은 제약 최적화(constrained optimisation) 문제이다. 실근을 주는 계수들의 집합 위에서 함수를 최대화하는데, 이 집합에는 구간뿐 아니라 고립점도 포함될 수 있다. 집합 위에서 함수의 최댓값이 반드시 정상점이나 구간의 끝점에서 나타나는 것은 아니다. 그래서 해석학과 최적화에서는 허용 집합(feasible set)을 정확하게 기술하는 일이 매우 중요하다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 일반적인 집합 위에서 연속함수(continuous function)의 극값을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP III 2018, 문제 2

순수수학 • 에르미트 다항식

STEP III 2018, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/18-s3-q2

핵심 아이디어

정의를 뒤집어 보자. 정의는 z의 n계 도함수(derivative)가 $(-1)^n y_n z$라는 뜻이다. 이것을 한 번 더 미분하고 $n+1$에 대한 같은 명제와 비교하면 소문항 (i)이 한 줄로 나온다. 그다음에는 소문항 (i)이 점화식(recurrence)을 미분할 수 있게 해 주는 도구가 되고, 이것이 (ii)의 귀납법(induction)을 이끈다. 마지막 부등식(inequality)은 (ii)의 항등식(identity)에서 두 번째의 아주 짧은 귀납법으로 따라 나온다.

풀이

처음부터 끝까지 $z = \mathrm{e}^{-x^2}$이므로 $z' = -2xz$이고, 모든 x에 대하여 $z > 0$이다. 정의를 정리하면

$$\frac{\mathrm{d}^n z}{\mathrm{d}x^n} = (-1)^n y_n z \qquad (n \geq 0),$$

이고, $y_0 = 1$이므로 이 식은 $n = 0$일 때도 성립한다.

소문항 (i)

곱의 미분법(product rule)과 $z' = -2xz$를 이용하여 위의 식을 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1} z}{\mathrm{d}x^{n+1}} = (-1)^n \left(y_n' z + y_n z'\right) = (-1)^n \left(y_n' - 2x y_n\right) z.$$

그런데 n 대신 $n+1$을 넣은 같은 식에 따르면 좌변은 $(-1)^{n+1} y_{n+1} z$이다. 두 식을 같게 놓고 결코 0이 되지 않는 $(-1)^n z$로 나누면

$$y_n' - 2x y_n = -y_{n+1}, \qquad \text{즉} \qquad \frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x} = 2x y_n - y_{n+1},$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다. 여기서는 $n \geq 1$이라는 조건이 전혀 필요하지 않았으므로 이 결과는 $n = 0$일 때도 성립한다. 이 사실은 아래에서 사용한다.

나중을 위해 적어 두면, $z' = -2xz$이고 $z'' = (4x^2 - 2)z$이므로 $y_1 = 2x$, $y_2 = 4x^2 - 2$이다.

소문항 (ii)

기저 단계(base case). $n = 1$일 때 $y_2 = 2xy_1 - 2y_0$이 필요한데, 실제로 $2x \cdot 2x - 2 = 4x^2 - 2 = y_2$이다.

귀납 단계(inductive step). 어떤 $k \geq 1$에 대하여

$$y_{k+1} = 2xy_k - 2ky_{k-1}. \qquad (*)$$

이 성립한다고 가정하자. 한 단계 더 나아간 같은 관계식을 얻고 싶으므로 $(*)$를 미분한다.

$$y'_{k+1} = 2y_k + 2xy'_k - 2ky'_{k-1}.$$

> **생각해 보기** 도함수들을 어떻게 없앨 수 있을까? 그리고 $k = 1$일 때 y_{k-1}에 소문항 (i)을 써도 될까?

모든 도함수를 소문항 (i)을 이용하여 바꾼다. $k = 1$일 때 y'_{k-1}에 대해서는 이것이 $n = 0$인 경우인데, 앞에서 이 경우도 성립함을 확인했다. 그러면

$$2xy_{k+1} - y_{k+2} = 2y_k + 2x\big(2xy_k - y_{k+1}\big) - 2k\big(2xy_{k-1} - y_k\big),$$

이므로

$$y_{k+2} = 4xy_{k+1} - 4x^2y_k - 2(k+1)y_k + 4kx\,y_{k-1}.$$

이다. y_{k-1}이 들어 있는 항은 가정 $(*)$를 한 번 더 써서 없앤다. $2ky_{k-1} = 2xy_k - y_{k+1}$이므로 $4kx\,y_{k-1} = 4x^2y_k - 2xy_{k+1}$이다. 이를 대입하면

$$\begin{aligned} y_{k+2} &= 4xy_{k+1} - 4x^2y_k - 2(k+1)y_k + 4x^2y_k - 2xy_{k+1} \\ &= 2xy_{k+1} - 2(k+1)y_k, \end{aligned}$$

이고, 이것은 k 대신 $k+1$을 넣은 관계식이다. 따라서 귀납법에 의하여 모든 $n \geq 1$에 대하여 $y_{n+1} = 2xy_n - 2ny_{n-1}$이다.

결론 유도. 점화식을 n에서 한 번, $n+1$에서 한 번, 모두 두 번 사용하여 두 곱 모두에 $2xy_ny_{n+1}$ 항이 나타나게 한다.

$$\begin{aligned} y_{n+1}^2 &= y_{n+1}\big(2xy_n - 2ny_{n-1}\big) = 2xy_ny_{n+1} - 2ny_{n-1}y_{n+1}, \\ y_ny_{n+2} &= y_n\big(2xy_{n+1} - 2(n+1)y_n\big) = 2xy_ny_{n+1} - 2(n+1)y_n^2. \end{aligned}$$

두 식을 빼면 x가 들어 있는 항이 소거된다.

$$y_{n+1}^2 - y_n y_{n+2} = 2(n+1)y_n^2 - 2ny_{n-1}y_{n+1} = 2n\left(y_n^2 - y_{n-1}y_{n+1}\right) + 2y_n^2,$$

이것이 요구된 항등식이다.

소문항 (iii)

$D_n = y_n^2 - y_{n-1}y_{n+1}$이라 하자. (ii)의 항등식은

$$D_{n+1} = 2nD_n + 2y_n^2 \qquad (n \geq 1).$$

이 된다. 모든 $n \geq 1$에 대하여 $D_n > 0$임을 귀납법으로 증명한다. $n = 1$일 때 모든 x에 대하여

$$D_1 = y_1^2 - y_0 y_2 = 4x^2 - (4x^2 - 2) = 2 > 0$$

이다. 어떤 $n \geq 1$에 대하여 $D_n > 0$이면 $n \geq 1$이므로 $2nD_n > 0$이고, $2y_n^2 \geq 0$이므로 $D_{n+1} > 0$이다. 따라서 모든 $n \geq 1$과 모든 실수 x에 대하여 $y_n^2 - y_{n-1}y_{n+1} > 0$이 되어 요구된 결과를 얻는다.

엄격한 부등식을 얻으려면 D_n이 엄격하게 양수여야 했다는 점에 주의하자. y_n^2만으로는 y_n의 영점에서 0이 될 수 있다.

검산

- 점화식으로부터 $y_3 = 2x(4x^2 - 2) - 4 \cdot 2x = 8x^3 - 12x$이다. $z'' = (4x^2 - 2)z$를 직접 미분하면 $z''' = (-8x^3 + 12x)z$이고, 이는 $-y_3 z$와 일치한다.
- $n = 1$일 때의 소문항 (i): $y_1' = 2$이고, $2x \cdot 2x - (4x^2 - 2) = 2$이다. ✓
- $n = 2$일 때의 소문항 (iii): $D_2 = (4x^2 - 2)^2 - 2x(8x^3 - 12x) = 8x^2 + 4$로 양수이며, 항등식이 예측하는 대로 $2D_1 + 2y_1^2 = 4 + 8x^2$와 같다.
- 점화식들과 부등식을 $n = 14$까지, 많은 유리수 x값(각 y_n의 영점 근처 포함)에서 컴퓨터로 확인한 결과 정확히 일치했다.

흔한 실수

- 귀납 단계에서 y_{k-1}에 대해 소문항 (i)을 사용하는데, $k = 1$일 때 이것이 y_0을 뜻한다는 점을 잊는 것. 소문항 (i)은 $n \geq 1$에 대해서만 요구되었으므로 $n = 0$인 경우를 따로 확인해야 한다.
- 소문항 (iii)에서 $D_{n+1} \geq 0$만 결론짓는 것. 엄격한 부등식은 y_n^2이 아니라 $D_n > 0$에서 나온다.

STEP 너머

함수 y_n은 에르미트(Hermite) 다항식(Hermite polynomials) $H_n(x)$이고, 관계식 $\mathrm{d}^n z/\mathrm{d}x^n = (-1)^n H_n z$는 이 다항식들의 로드리그 공식(Rodrigues formula)이다. 이 다항식들은 실수 전체에서 가중치(weight) e^{-x^2}에 대하여 직교(orthogonal)하며, 양자 조화 진동자(quantum harmonic oscillator)의 에너지 상태를 준다. (iii)의 부등식은 투란형 부등식(Turán-type inequality)으로, 여러 고전적인 직교 다항식에 대해 성립하는 결과들의 한 갈래이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에서는 급수해(series solutions)를 통해 에르미트 방정식을 다룬다.

풀이

STEP III 2018, 문제 3

순수수학 • 오일러 미분방정식

STEP III 2018, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/18-s3-q3

핵심 아이디어

좌변은 오일러(Euler) 방정식, 곧 등차원 방정식(equidimensional equation)이다. 각 도함수에 그 계수와 맞는 x의 거듭제곱이 곱해져 있다. 중첩된 꼴 $(*)$를 전개하여 계수를 비교하면 a, b, c가 결정된다. 방정식을 이 꼴로 쓰고 나면 도함수를 하나씩 벗겨 내는 두 번의 간단한 적분으로 풀 수 있다. 경우가 나뉘는 것은 정확히 그 적분 가운데 하나가 x^{-1}의 적분이 되어 로그가 나올 때이다.

풀이

모든 x의 거듭제곱이 정의되도록 처음부터 끝까지 $x > 0$에서 생각한다.

a, b, c 구하기

곱의 미분법(product rule)에 의하여

$$(x^c y)' = x^c y' + c x^{c-1} y, \qquad \text{따라서} \qquad x^b (x^c y)' = x^{b+c} y' + c x^{b+c-1} y.$$

한 번 더 미분하면

$$\left(x^b (x^c y)'\right)' = x^{b+c} y'' + (b+c) x^{b+c-1} y' + c x^{b+c-1} y' + c(b+c-1) x^{b+c-2} y.$$

여기에 x^a를 곱하고 $a + b + c = 2$로 택하면

$$x^a \left(x^b (x^c y)'\right)' = x^2 y'' + (b + 2c)\, x y' + c(b + c - 1)\, y.$$

이것이 주어진 좌변과 일치하려면

$$b + 2c = 1 - 2p, \qquad c(b + c - 1) = p^2 - q^2.$$

이어야 한다. 첫 번째 식에서 $b+c-1=-2p-c$이므로 두 번째 식은 $-c^2-2pc=p^2-q^2$, 곧 $(c+p)^2=q^2$이 된다. $c+p=q$로 택하면

$$c=q-p, \qquad b=1-2p-2c=1-2q, \qquad a=2-b-c=1+p+q.$$

따라서 방정식은

$$x^{1+p+q}\left(x^{1-2q}\left(x^{q-p}y\right)'\right)'=\mathrm{f}(x),$$

로 쓸 수 있으며, 이것이 보이려던 것이다. (다른 근 $c+p=-q$를 택하면 q 대신 $-q$를 넣은 같은 결과가 나오는데, 방정식에는 q^2만 나타나므로 달라지는 것이 없다.)

소문항 (i)

$\mathrm{f}=0$이면 $x^{1+p+q}\neq 0$으로 나눌 수 있다.

$$\left(x^{1-2q}\left(x^{q-p}y\right)'\right)'=0 \quad\Longrightarrow\quad x^{1-2q}\left(x^{q-p}y\right)'=A \quad\Longrightarrow\quad \left(x^{q-p}y\right)'=Ax^{2q-1},$$

여기서 A는 상수이다. 다음 적분은 지수 $2q-1$이 -1인지 아닌지에 따라 달라진다.

> **생각해 보기** 왜 여기서는 p의 값에 따라 경우가 나뉘지 않는가?

적분하는 지수는 $2q-1$이고, 여기에는 p가 들어 있지 않다. p는 마지막에 나누어 주는 인수 x^{q-p}를 통해서만 들어온다. 따라서 경우는 q에만 의존한다.

$q\neq 0$인 경우. 적분하면 $x^{q-p}y=\dfrac{A}{2q}x^{2q}+B$이고, x^{p-q}를 곱하면 (상수 $\frac{A}{2q}$를 다시 A로 쓰면)

$$y=Ax^{p+q}+Bx^{p-q}.$$

$q=0$인 경우. 이제 $\left(x^{-p}y\right)'=Ax^{-1}$이므로 $x^{-p}y=A\ln x+B$이고

$$y=x^p\left(A\ln x+B\right).$$

두 경우 모두 2계 방정식(second-order equation)에서 예상하듯이 임의상수가 두 개 있다.

소문항 (ii)

이것은 $\mathrm{f}(x)=x^n$이고 $q=0$인 경우이므로 $a=1+p$, $b=1$, $c=-p$이며, 방정식은

$$x^{1+p}\left(x\left(x^{-p}y\right)'\right)'=x^n \quad\Longleftrightarrow\quad \left(x\left(x^{-p}y\right)'\right)'=x^{n-p-1}.$$

이 된다. 첫 번째 적분에는 x^{n-p-1}이 나오는데, 이것은 정확히 $n=p$일 때 x^{-1}이다.

$n\neq p$인 경우. 한 번 적분하면

$$x\left(x^{-p}y\right)'=\frac{x^{n-p}}{n-p}+A \quad\Longrightarrow\quad \left(x^{-p}y\right)'=\frac{x^{n-p-1}}{n-p}+\frac{A}{x}.$$

여기서도 $n-p \neq 0$이므로 적분하면

$$x^{-p}y = \frac{x^{n-p}}{(n-p)^2} + A\ln x + B, \qquad \text{따라서} \qquad y = \frac{x^n}{(n-p)^2} + x^p\,(A\ln x + B).$$

$n = p$인 경우. 이번에는 첫 번째 적분에서 로그가 나온다.

$$x\left(x^{-p}y\right)' = \ln x + A \quad \Longrightarrow \quad \left(x^{-p}y\right)' = \frac{\ln x}{x} + \frac{A}{x}.$$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{2}(\ln x)^2 = \frac{\ln x}{x}$이므로

$$x^{-p}y = \tfrac{1}{2}(\ln x)^2 + A\ln x + B, \qquad \text{따라서} \qquad y = x^p\left(\tfrac{1}{2}(\ln x)^2 + A\ln x + B\right).$$

두 경우 모두 A와 B가 들어 있는 부분은 소문항 (i)에서 $q = 0$일 때의 여함수(complementary function)이며, 마땅히 그래야 한다.

검산

- $p = q = 0$으로 두면 방정식은 $x^2y'' + xy' = 0$, 곧 $(xy')' = 0$이므로 $y = A\ln x + B$이고, 소문항 (i)과 일치한다.
- 제차 방정식(homogeneous equation)에 $y = x^m$을 대입하면 $m(m-1) + (1-2p)m + p^2 - q^2 = (m-p)^2 - q^2$이므로 $m = p \pm q$이고, $q = 0$일 때 중근이 되어 앞에서 구한 결과와 같다.
- 소문항 (ii)에서 $n = p = 1$이면 $y = \frac{1}{2}x(\ln x)^2$에 대하여 $y' = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + \ln x$, $y'' = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}$이므로 $x^2y'' - xy' + y = x\ln x + x - \frac{1}{2}x(\ln x)^2 - x\ln x + \frac{1}{2}x(\ln x)^2 = x$가 되어 요구한 대로이다.
- 또한 모든 해를 p, q, n, x의 여러 무작위 값에서 컴퓨터로 방정식에 다시 대입해 보았으며, 잔차는 반올림 오차 범위(약 10^{-6})에서 0이었다.

흔한 실수

- (i)에서 $q = 0$인 경우나 (ii)에서 $n = p$인 경우를 빠뜨리는 것. 이때는 거듭제곱의 적분 공식 대신 $\int x^{-1}\,\mathrm{d}x = \ln x$를 써야 한다.
- 첫 단계에서 적분상수를 빠뜨리는 것. 바로 이 상수가 두 번째 독립인 해를 만들어 낸다.
- 이유를 밝히지 않고 $a + b + c = 2$로 두는 것. 이 조건은 y''에 x^2이 곱해지도록 하기 위해 필요하다.

STEP 너머

2계 연산자를 1계 연산자들의 합성으로 쓰는 것을 연산자의 **인수분해**(factorising)라고 하며, 이는 계수 내림법(reduction of order)과 양자역학의 사다리 연산자(ladder operator) 뒤에 있는 아이디어이다. 치환 $x = \mathrm{e}^t$는 모든 오일러 방정식을 상수계수 방정식으로 바꾸며, 이것으로 중근 $m = p$와 $\ln x$ (곧 t) 인수가 나타나는 이유가 설명된다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)은 오일러 방정식과 계수 내림법을 다룬다.

풀이

STEP III 2018, 문제 4

순수수학 • 쌍곡선의 접선

> **STEP III 2018, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/18-s3-q4

핵심 아이디어

접선(tangent)은 $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선이 $xx_1/a^2 - yy_1/b^2 = 1$이라는 표준적인 결과를 쓰면 가장 빨리 구할 수 있다. 그다음부터는 모두 두 직선이 만나는 문제이므로, 일차방정식 쌍을 풀고 삼각함수 식을 정리하기만 하면 된다. 소문항 (ii)에서 수직 조건은 b를 포함하는 $\sin\theta$와 $\sin\phi$ 사이의 관계식 하나이며, 바로 이 관계식 덕분에 식에서 b를 없앴다가 다시 $a^2 - b^2$의 꼴로 되살릴 수 있다. 합을 곱으로 바꾸는 공식(sum-to-product formulae)을 쓰면 마지막 계산이 짧아진다.

풀이

P에서의 접선

$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$을 음함수 미분(implicit differentiation)하면 $\dfrac{2x}{a^2} - \dfrac{2y}{b^2}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$이므로, (x_1, y_1)에서의 기울기(gradient)는 $\dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}$이고 접선은

$$y - y_1 = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1) \iff \frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1,$$

이다. 여기서 (x_1, y_1)이 곡선 위에 있다는 사실을 이용했다. ($y_1 = 0$이고 접선이 수직선인 꼭짓점(vertex)의 경우도 포함한다.) $x_1 = a\sec\theta$, $y_1 = b\tan\theta$를 대입하면

$$\frac{x\sec\theta}{a} - \frac{y\tan\theta}{b} = 1.$$

양변에 $ab\cos\theta$를 곱하면 ($\sec\theta$가 존재하므로 이 값은 0이 아니다)

$$bx - ay\sin\theta = ab\cos\theta,$$

를 얻으며, 이것이 구하는 식이다.

소문항 (i)

주어진 두 직선은 점근선(asymptote) $y = \pm\frac{b}{a}x$이다.

S에서는 $ay = bx$이다. $ay = bx$를 접선의 방정식에 대입하면 $bx(1-\sin\theta) = ab\cos\theta$이므로

$$S = \left(\frac{a\cos\theta}{1-\sin\theta},\ \frac{b\cos\theta}{1-\sin\theta}\right).$$

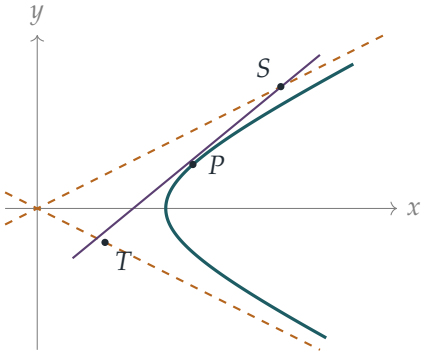
T에서는 $ay = -bx$이고, 이로부터 $bx(1+\sin\theta) = ab\cos\theta$를 얻으므로

$$T = \left(\frac{a\cos\theta}{1+\sin\theta},\ -\frac{b\cos\theta}{1+\sin\theta}\right).$$

$\cos\theta \neq 0$이면 $\sin\theta \neq \pm1$이므로 두 분모는 모두 0이 아니다. 두 좌표를 더하고 $(1-\sin\theta)(1+\sin\theta) = \cos^2\theta$를 이용하면

$$x_S + x_T = a\cos\theta \cdot \frac{(1+\sin\theta)+(1-\sin\theta)}{\cos^2\theta} = \frac{2a}{\cos\theta} = 2a\sec\theta,$$
$$y_S + y_T = b\cos\theta \cdot \frac{(1+\sin\theta)-(1-\sin\theta)}{\cos^2\theta} = \frac{2b\sin\theta}{\cos\theta} = 2b\tan\theta.$$

따라서 ST의 중점(mid-point)은 $(a\sec\theta,\ b\tan\theta)$이다. 즉 **$ST$의 중점은 바로 P이다**. 임의의 점에서의 접선은 두 점근선에 의해 접점에서 이등분된다.



소문항 (ii)

수직 조건. 접선을 $ay\sin\theta = bx - ab\cos\theta$로 쓰면, $\sin\theta \neq 0$일 때 P에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{b}{a\sin\theta}$이다. ($\sin\theta = 0$이면 접선이 수직선이므로 Q에서의 접선은 수평선이어야 한다. 그러나 $b/(a\sin\phi) \neq 0$이므로 수평인 접선은 없다. 따라서 $\sin\theta \neq 0$이고, 마찬가지로 $\sin\phi \neq 0$이다.) 두 접선이 수직(perpendicular)이려면 기울기의 곱이 -1이어야 한다.

$$\frac{b^2}{a^2\sin\theta\sin\phi} = -1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sin\theta\sin\phi = -\frac{b^2}{a^2}. \tag{$*$}$$

특히 $\sin\theta$와 $\sin\phi$는 부호가 반대이므로 $\sin\phi - \sin\theta \neq 0$이다. $(*)$가 성립하려면 $b^2/a^2 < 1$이어야 하는데, 바로 여기서 $a > b$가 쓰인다.

교점. 점 (x, y)는 다음을 만족한다.

$$bx - ay\sin\theta = ab\cos\theta, \qquad bx - ay\sin\phi = ab\cos\phi.$$

첫째 식에서 둘째 식을 빼면 $ay(\sin\phi - \sin\theta) = ab(\cos\theta - \cos\phi)$이다. 첫째 식에 $\sin\phi$를, 둘째 식에 $\sin\theta$를 곱하여 빼면 $bx(\sin\phi - \sin\theta) = ab(\sin\phi\cos\theta - \cos\phi\sin\theta) = ab\sin(\phi - \theta)$이다. 따라서

$$x = \frac{a\sin(\phi-\theta)}{\sin\phi - \sin\theta}, \qquad y = \frac{b(\cos\theta - \cos\phi)}{\sin\phi - \sin\theta}.$$

생각해 보기 이 식에는 아직 b가 남아 있다. x^2과 y^2을 a, θ, ϕ만으로 나타내려면 어떻게 해야 할까? 또 분수를 간단히 할 수 있을까?

조건 $(*)$는 $b^2 = -a^2\sin\theta\sin\phi$를 뜻하므로, 제곱하면 b를 없앨 수 있다. 식을 간단히 하기 위해 $\alpha = \frac{1}{2}(\phi + \theta)$, $\beta = \frac{1}{2}(\phi - \theta)$로 놓는다. 합을 곱으로 바꾸는 공식에 의해

$$\sin\phi - \sin\theta = 2\cos\alpha\sin\beta, \qquad \cos\theta - \cos\phi = 2\sin\alpha\sin\beta, \qquad \sin(\phi-\theta) = 2\sin\beta\cos\beta,$$

이고, $\sin\phi - \sin\theta \neq 0$이므로 $\cos\alpha\sin\beta \neq 0$이다. $2\sin\beta$를 약분하면

$$x = \frac{a\cos\beta}{\cos\alpha}, \qquad y = b\tan\alpha,$$

이고, 따라서

$$x^2 = \frac{a^2\cos^2\left(\frac{1}{2}(\phi-\theta)\right)}{\cos^2\left(\frac{1}{2}(\phi+\theta)\right)},$$
$$y^2 = -a^2\sin\theta\sin\phi\,\tan^2\left(\frac{1}{2}(\phi+\theta)\right).$$

반각(half-angle)을 쓰지 않고 같은 내용을 나타내면

$$x^2 = \frac{a^2\sin^2(\phi-\theta)}{(\sin\phi-\sin\theta)^2}, \qquad y^2 = -\frac{a^2\sin\theta\sin\phi\,(\cos\theta-\cos\phi)^2}{(\sin\phi-\sin\theta)^2}.$$

원. $\sin\theta\sin\phi$도 α와 β로 나타내야 한다. $\theta = \alpha - \beta$, $\phi = \alpha + \beta$이므로

$$\begin{aligned}\sin\theta\sin\phi &= \sin^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha\sin^2\beta \\ &= (1-\cos^2\alpha)\cos^2\beta - \cos^2\alpha(1-\cos^2\beta) = \cos^2\beta - \cos^2\alpha.\end{aligned}$$

$k = \sin\theta\sin\phi = \cos^2\beta - \cos^2\alpha$로 놓자. 그러면 $\tan^2\alpha = (1-\cos^2\alpha)/\cos^2\alpha$이므로

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= \frac{a^2}{\cos^2\alpha}\left[\cos^2\beta - k(1-\cos^2\alpha)\right] \\ &= \frac{a^2}{\cos^2\alpha}\left[(\cos^2\beta - k) + k\cos^2\alpha\right] \\ &= \frac{a^2}{\cos^2\alpha}\left[\cos^2\alpha + k\cos^2\alpha\right] \qquad \text{왜냐하면 } \cos^2\beta - k = \cos^2\alpha \\ &= a^2(1+k) = a^2 + a^2\sin\theta\sin\phi = a^2 - b^2, \end{aligned}$$

이며, 마지막 단계에서 $(*)$를 이용했다. 따라서 서로 수직인 두 접선의 교점은 항상 원 $x^2+y^2 = a^2-b^2$ 위에 있으며, 이것이 증명하려던 것이다.

검산

- $a=2, b=1, \theta=\frac{\pi}{6}, \phi=-\frac{\pi}{6}$로 잡자. 그러면 $\sin\theta\sin\phi = -\frac{1}{4} = -b^2/a^2$이므로 두 접선은 수직이다(기울기는 1과 -1). 이때 $\alpha=0, \beta=-\frac{\pi}{6}$이므로 $x = 2\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$, $y=0$이고 $x^2+y^2 = 3 = a^2-b^2$이다. 직접 확인해 보아도 두 접선 $x-y=\sqrt{3}$과 $x+y=\sqrt{3}$은 실제로 $(\sqrt{3},0)$에서 만난다.
- 소문항 (i)에서 $\theta\to 0$이면 접선은 수직선 $x=a$가 되고, 이 직선은 점근선과 $(a,\pm b)$에서 만나며 그 중점은 $(a,0)=P$이다.
- 소문항 (i)의 중점과 $x^2+y^2=a^2-b^2$을 포함한 위의 모든 공식은, $a>b>0$과 수직인 쌍 θ,ϕ를 무작위로 수천 번 골라 두 접선의 방정식을 직접 푸는 방식으로 컴퓨터를 통해 확인했다.

흔한 실수

- x^2과 y^2의 식에 b를 남겨 두는 것: 문제는 a, θ, ϕ만으로 나타내라고 했으므로 $(*)$를 이용하여 b^2을 소거해야 한다.
- 식을 잘못 정리하여 접선의 기울기를 $-b/(a\sin\theta)$로 잡는 것: 제1사분면(first quadrant)의 점에서 기울기가 양수인지 확인해 보라.
- $\sin\phi - \sin\theta$가 왜 0이 아닌지 밝히지 않고 이것으로 나누는 것.

STEP 너머

소문항 (ii)의 원은 쌍곡선(hyperbola)의 **준원**(*director circle*), 즉 그 점에서 그은 두 접선이 서로 수직이 되는 점들의 자취(locus)이다. 타원(ellipse)의 준원은 $x^2+y^2=a^2+b^2$이고,

$a < b$인 쌍곡선에는 실제 준원이 아예 존재하지 않는다. 문제에서 $a > b$를 굳이 요구하는 이유가 여기에 있다. 소문항 (i)의 이등분 성질은 원뿔곡선(conic)의 사영기하학(projective geometry)과 아핀기하학(affine geometry)을 처음으로 엿보게 해 준다. 이 분야에서는 접선, 점근선, 극과 극선(poles and polars)을 하나의 관점에서 통일적으로 다룬다. 바로 이런 성격의 문제를 더 풀어 보고 싶다면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*를 참고하라.

풀이

STEP III 2018, 문제 5

순수수학 • 산술-기하 평균 부등식

STEP III 2018, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/18-s3-q5

핵심 아이디어

이것은 산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)을 수학적 귀납법(induction)으로 증명하는 것이지만, 한 가지 변형이 있다. $A_n \geq G_n$을 직접 보이는 대신, 새로운 수를 하나 추가할 때 가중된 차이 $n(A_n - G_n)$이 결코 감소하지 않음을 보인다. 이 차이는 $n = 1$일 때 0에서 시작하므로 계속 음이 아닌 값을 유지한다. 양 λ_k는 G_{k+1}이 G_k의 간단한 배수가 되도록 선택된 것이며, 이로써 전체 비교가 한 변수에 대한 다항식 부등식(polynomial inequality)으로 바뀐다.

풀이

소문항 (i)

두 가지 사실이 k단계와 $k+1$단계를 연결한다. 합에 대해서는

$$(k+1)A_{k+1} = a_1 + \cdots + a_k + a_{k+1} = kA_k + a_{k+1}.$$

곱에 대해서는 $G_k^k = a_1 a_2 \cdots a_k$이고, λ_k의 정의에서 $a_{k+1} = G_k \lambda_k^{k+1}$이다. 따라서

$$G_{k+1}^{k+1} = G_k^k \, a_{k+1} = G_k^k \cdot G_k \lambda_k^{k+1} = (G_k \lambda_k)^{k+1}, \qquad \text{따라서} \qquad G_{k+1} = G_k \lambda_k,$$

이다. 여기서 $G_k > 0$이고 $\lambda_k > 0$이므로 양의 $(k+1)$제곱근을 취하였다. 바로 이것이 λ_k를 그렇게 정의한 이유이다.

이제 양변을 비교한다.

$$\begin{aligned}(k+1)(A_{k+1}-G_{k+1})-k(A_k-G_k) &= kA_k + a_{k+1} - (k+1)G_{k+1} - kA_k + kG_k \\ &= G_k\lambda_k^{k+1} - (k+1)G_k\lambda_k + kG_k \\ &= G_k\left(\lambda_k^{k+1} - (k+1)\lambda_k + k\right).\end{aligned}$$

$G_k > 0$이므로 좌변이 ≥ 0일 필요충분조건은 괄호 안의 식이 ≥ 0인 것이다. 이것이 요구된 동치 관계이다.

소문항 (ii)

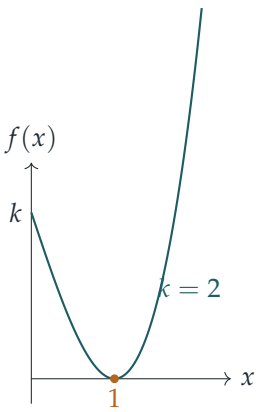
미분하면

$$f'(x) = (k+1)x^k - (k+1) = (k+1)(x^k - 1).$$

$0 < x < 1$이면 $x^k < 1$이므로 $f'(x) < 0$이고, $x > 1$이면 $x^k > 1$이므로 $f'(x) > 0$이다. 따라서 f는 $(0,1]$에서 순감소(strictly decreasing)하고 $[1,\infty)$에서 순증가(strictly increasing)하며, $x > 0$에서의 최솟값은

$$f(1) = 1 - (k+1) + k = 0$$

이다. 그러므로 모든 $x > 0$에 대하여 $f(x) \geq 0$이다. 또한 $x \neq 1$이면 1의 양쪽에서의 순단조성에 의해 $f(x) > f(1) = 0$이다. 따라서 $f(x) = 0$인 것은 $x = 1$일 때뿐이고, $f(1) = 0$이 그 역을 준다.



($k = 2$일 때 $f(x) = x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$이다. $x = 1$에서의 중근(double root)은 그래프가 축에 접하기만 하는 지점이다.)

소문항 (iii)

각 양의 정수 n에 대하여 $d_n = n(A_n - G_n)$이라 하자.

(a) $x = \lambda_k > 0$으로 두고 소문항 (ii)를 적용하면 $\lambda_k^{k+1} - (k+1)\lambda_k + k \geq 0$이므로, 소문항 (i)에 의해

$$d_{k+1} \geq d_k \qquad \text{모든} k \geq 1.$$

이다. 또한 $A_1 = a_1 = G_1$이므로 $d_1 = 0$이다. 따라서

$$0 = d_1 \leq d_2 \leq d_3 \leq \cdots \leq d_n,$$

이므로 $d_n \geq 0$이고, $n > 0$으로 나누면 모든 n에 대하여 $A_n \geq G_n$을 얻는다.

(b)

생각해 보기 $A_n = G_n$이라면, 이것은 사슬의 마지막 단계뿐만 아니라 그 이전 단계들에 대해서도 무엇을 말해 주는가?

$A_n = G_n$이면 $d_n = 0$이고, 사슬은 $0 = d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n = 0$이 된다. 0에서 시작하여 0에서 끝나는 감소하지 않는 사슬은 상수여야 하므로, 각 $k = 1, \ldots, n-1$에 대하여 $d_{k+1} = d_k$이다. 소문항 (i)의 항등식에 의해 이는 $G_k f(\lambda_k) = 0$을 뜻하고, $G_k > 0$이므로 $f(\lambda_k) = 0$이다. 소문항 (ii)에 의해 각 $k = 1, \ldots, n-1$에 대하여 $\lambda_k = 1$이며, 이는 $a_{k+1} = G_k$라는 뜻이다.

이제 k에 대한 귀납법으로 논증한다. $k = 1$일 때 $a_2 = G_1 = a_1$이다. $a_1 = \cdots = a_k = a$이면 $G_k = (a^k)^{1/k} = a$이므로 $a_{k+1} = G_k = a$이다. 따라서 요구된 대로 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$이다.

검산

$a_1, a_2, a_3 = 1, 4, 16$으로 두자. 그러면 $A_2 = 2.5$, $G_2 = 2$, $A_3 = 7$, $G_3 = 4$이므로 $d_1, d_2, d_3 = 0, 1, 9$이다. 약속한 대로 증가한다. 여기서 $\lambda_2 = (16/2)^{1/3} = 2$이고 $G_2 f(\lambda_2) = 2(8 - 6 + 2) = 8 = d_3 - d_2$이므로, 소문항 (i)의 항등식이 확인된다. 수천 개의 무작위 양수 수열에 대하여 이 항등식과 $d_{k+1} \geq d_k$를 컴퓨터로 확인한 결과 예외는 발견되지 않았다.

흔한 실수

- 소문항 (i)에서 한쪽 방향만 증명하는 것. 차이를 $G_k f(\lambda_k)$로 쓰면 $G_k > 0$이므로 양방향이 한꺼번에 얻어진다.
- (iii)(b)에서 $\lambda_{n-1} = 1$이라는 결론만 내리는 것. 사슬의 모든 단계가 등호여야 하며, 이는 사슬이 $d_1 = 0$에서 시작한다는 사실에서 나온다.
- $x > 0$인 경우만 다루는 소문항 (ii)를 적용하기 전에 왜 $\lambda_k > 0$인지 밝히는 것을 잊는 것.

STEP 너머

부등식 $x^{k+1} - (k+1)x + k \geq 0$은 베르누이 부등식(Bernoulli's inequality)의 특수한 경우이고, 산술-기하 평균 부등식 자체는 오목함수(concave function) $\ln x$에 대한 젠센 부등식(Jensen's inequality)의 특수한 경우이다. 이러한 볼록성(convexity) 부등식은 대학 1학년 해석학(analysis)의 기본 도구이다. 코시(Cauchy)의 "전진–후진" 귀납법을 포함하여 산술-기하 평균 부등식의 다른 여러 증명을 살펴보는 것은 좋은 연습이 된다. Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)가 해석학의 배경 지식을 다룬다.

풀이

STEP III 2018, 문제 6

순수수학 • 복소수와 기하

STEP III 2018, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/18-s3-q6

핵심 아이디어

복소수가 실수일 필요충분조건은 그 수가 자신의 켤레복소수(conjugate)와 같은 것이므로, 세 점이 한 직선 위에 있다는 조건(공선, collinear)은 z들과 z^*들 사이의 방정식으로 바뀐다. 단위원(unit circle) 위에서는 $a^* = 1/a$이므로 원 위의 점들의 켤레를 없앨 수 있고, 그러면 현(chord) 위의 임의의 점 q에 대한 **일차** 방정식이 남는다. 이후의 결과는 모두 이러한 현의 방정식 두 개를 쓰고 이들을 더하거나 빼서 얻는다.

풀이

소문항 (i)

A, Q, C가 한 직선 위에 있고 $A \neq C$이므로, 점 Q는 A에 A에서 C로 가는 벡터의 실수배를 더한 것이다. 즉 어떤 실수 t에 대하여 $q - a = t(c - a)$이다. $c \neq a$이므로 나눌 수 있고, 따라서

$$\frac{q-a}{c-a} = t \quad \text{는 실수이다.}$$

실수는 자신의 켤레와 같으므로

$$\frac{q-a}{c-a} = \frac{q^*-a^*}{c^*-a^*},$$

이다. 여기서 $c \neq a$이므로 $c^* - a^* \neq 0$이다. 양변에 분모를 곱하면 $(c-a)(q^*-a^*) = (c^*-a^*)(q-a)$를 얻으며, 이것이 보이려던 식이다.

이제 $aa^* = cc^* = 1$이라 하면 $a^* = 1/a, c^* = 1/c$이다. 그러면

$$c^* - a^* = \frac{1}{c} - \frac{1}{a} = \frac{a-c}{ac} = -\frac{c-a}{ac},$$

이고, 앞의 방정식은

$$(c-a)\left(q^* - \frac{1}{a}\right) = -\frac{c-a}{ac}(q-a).$$

이 된다. $c-a \neq 0$으로 나누고 $-ac$를 곱하면

$$-ac\,q^* + c = q - a, \qquad \text{즉,} \qquad q + ac\,q^* = a + c.$$

이것이 현 AC의 방정식이다. A와 C를 지나는 직선 위의 모든 점 q가 이 식을 만족한다.

소문항 (ii)

A, B, C, D가 시계 반대 방향 순서로 놓여 있으므로, AC와 BD는 원에 내접하는 볼록 사각형(convex quadrilateral)의 대각선(diagonal)이고, 따라서 원의 내부에 있는 한 점 Q에서 만난다. 특히 Q는 네 점 모두와 다르므로, 직선 AC와 BD에 소문항 (i)을 적용할 수 있다.

$$q + ac\,q^* = a + c,$$
$$q + bd\,q^* = b + d.$$

첫째 식에서 둘째 식을 빼면 q가 사라진다.

$$(ac - bd)\,q^* = (a+c) - (b+d). \tag{1}$$

생각해 보기 q^*에 대한 식은 얻었다. 여기에 더할 q에 대한 식은 어떻게 얻을까?

(1)의 켤레를 취하고 다시 $a^* = 1/a$ 등을 이용한다. 좌변은

$$\left(\frac{1}{ac} - \frac{1}{bd}\right)q = \frac{bd - ac}{abcd}\,q,$$

가 되고, 우변은

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} - \frac{1}{b} - \frac{1}{d} = \frac{a+c}{ac} - \frac{b+d}{bd} = \frac{bd(a+c) - ac(b+d)}{abcd}.$$

가 된다. $-abcd$를 곱하면

$$(ac - bd)\,q = ac(b+d) - bd(a+c). \tag{2}$$

(1)과 (2)를 더하면

$$(ac - bd)(q + q^*) = a + c - b - d + abc + acd - abd - bcd.$$

우변의 항들을 묶으면

$$(a-b) + (acd - bcd) + (c-d) + (abc - abd) = (a-b)(1+cd) + (c-d)(1+ab),$$

이고, 이로써 원하는 결과를 얻는다.

소문항 (iii)

직선 AB와 CD는 내접 사각형의 마주 보는 두 변이므로, 이들이 만나는 점 P는 원의 외부에 있다. 따라서 P는 A, B와 다르고, C, D와도 다르다. 한 직선 위에 있는 점 A, P, B에 소문항 (i)을 적용하면 $p + ab\,p^* = a + b$이다. p가 실수이므로 $p^* = p$이고, 따라서

$$p(1 + ab) = a + b.$$

같은 방법으로 C, P, D로부터

$$p(1 + cd) = c + d.$$

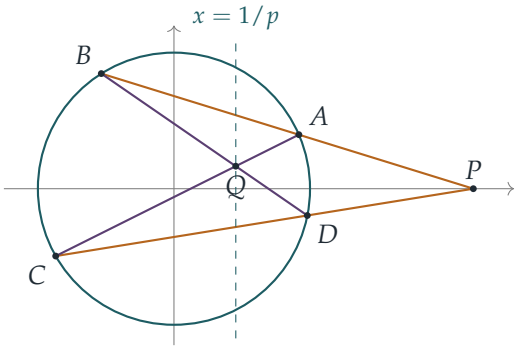
이제 소문항 (ii)의 최종 결과에 p를 곱하고 이 두 식을 대입하면

$$\begin{aligned} p\,(ac - bd)(q + q^*) &= (a - b)\,p(1 + cd) + (c - d)\,p(1 + ab) \\ &= (a - b)(c + d) + (c - d)(a + b) \\ &= (ac + ad - bc - bd) + (ac + bc - ad - bd) \\ &= 2(ac - bd). \end{aligned}$$

$ac - bd \neq 0$이므로 이것으로 나눌 수 있고, 보이려던 대로 $p(q + q^*) = 2$를 얻는다.

사실 여기서 $ac - bd$는 결코 0이 될 수 없다. 만약 $ac = bd$이면 (1)에 의해 $a + c = b + d$도 성립하므로, $z^2 - (a + c)z + ac$와 $z^2 - (b + d)z + bd$는 같은 이차식이다. 그러면 $\{a, c\} = \{b, d\}$가 되어 네 점이 서로 다르다는 데 모순이다.

$q + q^* = 2\,\mathrm{Re}\,q$이므로, 이 결과는 $\mathrm{Re}\,q = 1/p$임을 말해 준다. P를 지나는 두 직선을 어떻게 고르든, 대각선의 교점 Q는 고정된 수직선 $x = 1/p$ 위에 놓인다.



검산

- 대칭인 경우: A, B를 각 $20°$, $70°$에, C, D를 $-70°$, $-20°$에 잡는다. 실수축에 대한 대칭에 의해 P와 Q는 모두 실수이고, 결과는 $pq = 1$이라고 말한다. $a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$, $b = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$라 하면, 공

식 $p = (a+b)/(1+ab)$로부터 $p = \cos\frac{\alpha-\beta}{2}/\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \cos 25^\circ / \cos 45^\circ \approx 1.2817$이다. AC가 실수축과 만나는 점으로 q를 직접 구하면 $q \approx 0.7802$이고, $pq \approx 1.0000$이다.

- 그림에서는 $p = 2.2$를 사용한다. 예측대로 대각선은 $x \approx 0.4545 = 1/2.2$에서 만난다. 또한 세 항등식 모두 무작위로 만든 수천 개의 배치에서 컴퓨터로 확인하였다.

흔한 실수

- $ac - bd$의 켤레가 다시 $ac - bd$가 아니라 $1/(ac) - 1/(bd)$라는 것을 잊는 실수. 인수 $abcd$를 주의 깊게 없애야 한다.
- $c - a$나 $ac - bd$가 왜 0이 아닌지 밝히지 않고 이것으로 나누는 실수.

STEP 너머

여기서 Q는 원에 대한 P의 **극선**(polar) 위에 놓인다. 단위원 밖에서 중심으로부터 거리 p에 있는 점 P의 극선은 OP에 수직이고 O로부터 거리 $1/p$에 있는 직선이다. 이는 사영기하학(projective geometry)의 브로카르(Brocard) 정리의 일부이며, 그 배후에 있는 사상 $P \mapsto 1/p^*$는 원에 대한 **반전**(inversion)으로, 복소해석학(complex analysis)과 기하학의 핵심 도구이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 반전과 아르강 도표(Argand diagram)의 기하학을 아름답게 전개한다.

풀이

STEP III 2018, 문제 7

순수수학 • 드무아브르 정리와 급수

> **STEP III 2018, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/18-s3-q7

이 문제는 *Beyond STEP*의 2.4 절 $\pi^2/6$에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch02/basel.html

핵심 아이디어

식 $\cot\theta + \mathrm{i}$는 사실 $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)/\sin\theta$를 변장한 것이므로, 드무아브르 정리(De Moivre's theorem)를 쓰면 그 거듭제곱이 배각으로 바뀐다. 같은 거듭제곱을 이항정리(binomial theorem)로 전개하면 $\cot^2\theta$에 대한 다항식(polynomial)을 얻고, 그 근(root)은 $\sin(2n+1)\theta$가 0이 되는 곳에서 바로 읽어 낼 수 있다. 그러면 비에트 공식(Vieta's formula)이 근의 합을 공짜로 알려 주고, $1/\theta^2$을 $\cot^2\theta$와 $1+\cot^2\theta$ 사이에 끼워 넣으면 바젤 합(Basel sum)이 같은 극한(limit)으로 수렴하는 두 경계 사이에 갇힌다.

풀이

소문항 (i)

$\sin\theta \neq 0$이므로

$$\cot\theta \pm \mathrm{i} = \frac{\cos\theta \pm \mathrm{i}\sin\theta}{\sin\theta}.$$

드무아브르 정리에 의해 $(\cos\theta \pm \mathrm{i}\sin\theta)^{2n+1} = \cos(2n+1)\theta \pm \mathrm{i}\sin(2n+1)\theta$이므로

$$\frac{(\cot\theta+\mathrm{i})^{2n+1} - (\cot\theta-\mathrm{i})^{2n+1}}{2\mathrm{i}} = \frac{2\mathrm{i}\sin(2n+1)\theta}{2\mathrm{i}\,\sin^{2n+1}\theta} = \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin^{2n+1}\theta},$$

이고, 이것이 구하는 항등식(identity)이다.

이번에는 좌변을 이항정리로 전개한다. $c = \cot\theta$, $N = 2n+1$로 두면

$$(c+\mathrm{i})^N - (c-\mathrm{i})^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} c^{N-k}\,\mathrm{i}^k\bigl(1-(-1)^k\bigr).$$

괄호 안의 값은 k가 짝수이면 0, 홀수이면 2이다. $j = 0, 1, \ldots, n$에 대하여 $k = 2j+1$로 두면 $\mathrm{i}^k = \mathrm{i}(-1)^j$이고 $c^{N-k} = c^{2(n-j)}$이다. 2i로 나누고 $x = \cot^2\theta$로 쓰면

$$\frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin^{2n+1}\theta} = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{2n+1}{2j+1}x^{n-j} = \binom{2n+1}{1}x^n - \binom{2n+1}{3}x^{n-1} + \cdots + (-1)^n.$$

이 다항식을 $P(x)$라 하자. $P(x)$는 n차 다항식이고, 최고차항 계수(leading coefficient)는 $2n+1 \neq 0$이다.

$m = 1, \ldots, n$에 대하여 $\theta_m = \dfrac{m\pi}{2n+1}$로 둔다. 그러면 $0 < \theta_m < \frac{1}{2}\pi$이므로 $\sin\theta_m \neq 0$이고, $\sin(2n+1)\theta_m = \sin m\pi = 0$이다. 따라서

$$P\bigl(\cot^2\theta_m\bigr) = 0, \qquad m = 1, 2, \ldots, n.$$

생각해 보기 이것들이 해의 일부가 아니라 모든 해라는 것을 어떻게 알 수 있을까?

$(0, \frac{1}{2}\pi)$에서 $\cot\theta$는 양수이고 순감소하므로 $\cot^2\theta$도 순감소한다. 각 $\theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_n$은 모두 이 구간에 있으므로 n개의 수 $\cot^2\theta_m$은 서로 다르다. n차 다항식의 근은 많아야 n개이므로, 이것들이 정확히 $P(x) = 0$의 모든 해이다.

소문항 (ii)

$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots$의 근의 합은 $-a_{n-1}/a_n$이다. 여기서 $a_n = \binom{2n+1}{1}$, $a_{n-1} = -\binom{2n+1}{3}$이므로

$$\sum_{m=1}^{n}\cot^2\left(\frac{m\pi}{2n+1}\right) = \frac{\binom{2n+1}{3}}{\binom{2n+1}{1}} = \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6\,(2n+1)} = \frac{n(2n-1)}{3},$$

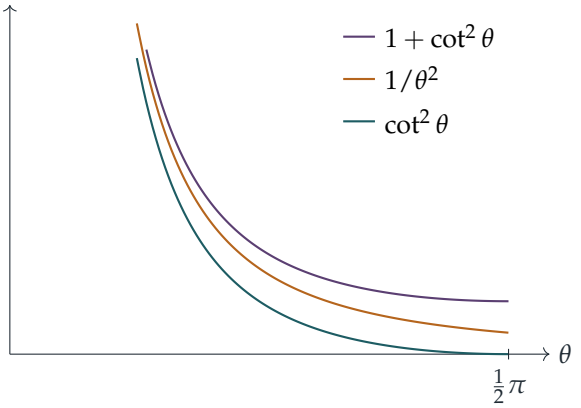
이고, 이것이 증명하려던 식이다.

소문항 (iii)

$0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$에서 $0 < \sin\theta < \theta < \tan\theta$가 주어져 있다. 세 값이 모두 양수이므로 제곱해도 대소 관계가 유지되고, 역수를 취하면 대소 관계가 뒤집힌다.

$$\frac{1}{\tan^2\theta} < \frac{1}{\theta^2} < \frac{1}{\sin^2\theta}, \qquad \text{즉} \qquad \cot^2\theta < \frac{1}{\theta^2} < 1 + \cot^2\theta,$$

여기서 $\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$를 이용하였다.



$\theta = \theta_m = \dfrac{m\pi}{2n+1}$로 두면 $\dfrac{1}{\theta_m^2} = \dfrac{(2n+1)^2}{\pi^2} \cdot \dfrac{1}{m^2}$이고, $m = 1, \ldots, n$에 대한 부등식을 모두 더한다. $S_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^2}$로 쓰고 소문항 (ii)를 이용하면

$$\frac{n(2n-1)}{3} < \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} S_n < n + \frac{n(2n-1)}{3} = \frac{2n(n+1)}{3}.$$

양변에 $\pi^2/(2n+1)^2 > 0$을 곱하면

$$\frac{\pi^2}{3} \cdot \frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2} < S_n < \frac{\pi^2}{3} \cdot \frac{2n(n+1)}{(2n+1)^2}.$$

분자와 분모를 n^2으로 나누어 보면, $n \to \infty$일 때 두 분수는 모두 $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$로 수렴하므로 두 경계는 모두 $\frac{\pi^2}{6}$으로 수렴한다. 조임 정리(squeeze theorem, sandwich theorem)에 의해 $S_n \to \frac{\pi^2}{6}$이고, 이는

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

임을 뜻한다.

검산

- $n = 1$이면 다항식은 $3x - 1$이고 그 근은 $\frac{1}{3} = \cot^2 \frac{\pi}{3}$이며, (ii)의 공식도 $1 \times 1/3 = \frac{1}{3}$을 준다. $n = 2$이면 $\cot^2 \frac{\pi}{5} + \cot^2 \frac{2\pi}{5}$는 2여야 하는데, 수치로 계산하면 $1.894 + 0.106 = 2.000$이다.
- $n = 50$일 때 (iii)의 경계는 $1.5964 < S_{50} = 1.6251 < 1.6448$이고, $\pi^2/6 \approx 1.6449$이다. 두 경계의 차가 $\pi^2 n/(2n+1)^2 \approx \pi^2/(4n)$이므로, 당연히 두 경계는 서로 가까워진다.

흔한 실수

- 각 $\cot^2\theta_m$이 근임을 보이고 나서, 이것들이 서로 다르다는 논증을 빠뜨리는 것. 바로 이 사실 덕분에 이것들이 **모든** 해가 된다.
- 비에트 공식에서 부호를 틀리는 것. x^{n-1}의 계수는 $-\binom{2n+1}{3}$이므로 근의 합은 $+\binom{2n+1}{3}/\binom{2n+1}{1}$이다.
- 모든 값이 양수라는 점을 언급하지 않고 부등식을 뒤집는 것. 제곱하고 역수를 취할 수 있는 근거가 바로 이 점이다.

STEP 너머

오일러(Euler)는 1734년에 $\sin x/x$를 "무한 다항식"처럼 다루어 계수를 비교함으로써 처음으로 $\sum 1/m^2 = \pi^2/6$을 찾아냈다. 이는 여기서 쓴 비에트의 아이디어와 같지만, 조임 정리가 제공하는 엄밀함은 없었다. 대학에서는 이 합을 푸리에 급수(Fourier series)의 파스발 항등식(Parseval's identity)을 통해, 그리고 리만 제타 함수(Riemann zeta function)의 첫 번째 값인 $\zeta(2)$로서 다시 만나게 된다. $\zeta(2k)$의 값은 모두 π^{2k}의 유리수배이지만, $\zeta(3)$에 대해서는 알려진 것이 거의 없다. 극한과 조임 정리의 바탕에 있는 해석학(analysis)을 공부하려면 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해하기)를 읽어 보라.

풀이

STEP III 2018, 문제 8

순수수학 • 소수 부분의 적분

STEP III 2018, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/18-s3-q8

핵심 아이디어

피적분함수(integrand)에서 다루기 까다로운 부분은 x^{-1}이므로 $y = 1/x$로 치환(substitution)한다. 그러면 $[0,1]$이 $[1,\infty)$로 옮겨지는데, 이 구간은 자연스럽게 길이가 1인 구간들로 나뉜다. f의 주기(period)가 1이면 각 단위 구간을 $[0,1]$로 다시 옮길 수 있고, 남는 유리식 인수들은 연쇄적으로 소거되는 합(telescoping sum)을 이룬다. 그러면 소문항 (ii)는 $\{x\}$와 $\{2x\}$가 모두 주기 1을 가진다는 점만 알아차리면 된다.

풀이

소문항 (i)

$x = 1/y$로 놓으면 $\mathrm{d}x = -\frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y$이고, x가 0에서 1까지 변할 때 y는 ∞에서 1까지 줄어든다. 또 $1 + x = \frac{y+1}{y}$이므로

$$I = \int_{\infty}^{1} \frac{\mathrm{f}(y)}{(y+1)/y}\left(-\frac{1}{y^2}\right)\mathrm{d}y = \int_{1}^{\infty} \frac{\mathrm{f}(y)}{y(1+y)}\,\mathrm{d}y.$$

$[1,\infty)$를 $n = 1, 2, 3, \ldots$에 대한 구간 $[n, n+1]$들로 나누면

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n}^{n+1} \frac{\mathrm{f}(y)}{y(1+y)}\,\mathrm{d}y,$$

이 되어 요구한 결과를 얻는다.

이제 모든 x에 대하여 $\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(x+1)$이라고 하자. 그러면 모든 정수 n에 대하여 $\mathrm{f}(x+n) = \mathrm{f}(x)$이다. n번째 적분에서 $y = x + n$으로 놓으면 x는 $[0,1]$ 위를 움직이고

$$\int_{n}^{n+1} \frac{\mathrm{f}(y)}{y(1+y)}\,\mathrm{d}y = \int_{0}^{1} \frac{\mathrm{f}(x)}{(x+n)(x+n+1)}\,\mathrm{d}x.$$

? 생각해 보기 이런 적분을 무한히 많이 더하려면 어떻게 해야 할까?

모든 적분이 같은 $f(x)$와 같은 적분 구간을 가지므로, (문제에서 지시한 대로 수렴(convergence) 문제는 무시하고) 합과 적분의 순서를 바꾸어 유리식 인수들을 먼저 더할 수 있다. 부분분수(partial fractions)로 분해하면

$$\frac{1}{(x+n)(x+n+1)} = \frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1},$$

이므로 합이 연쇄적으로 소거된다. 즉 고정된 $x \in [0,1]$에 대하여

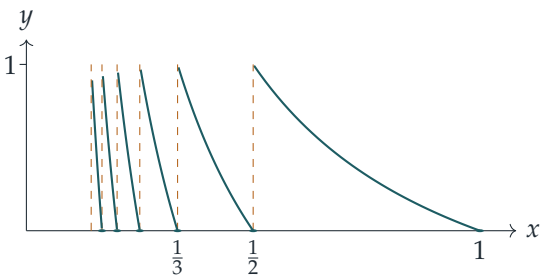
$$\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1} \right) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+N+1} \longrightarrow \frac{1}{1+x} \quad \text{단, } N \to \infty.$$

따라서

$$I = \int_0^1 f(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} \, dx = \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x} \, dx,$$

이고, 이것이 원하던 결과이다.

소문항 (ii)



위의 $\{x^{-1}\}$의 그래프를 보면 직접 계산하는 방법이 왜 가망이 없는지 알 수 있다. 각 구간 $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$에서 이 함수는 $\frac{1}{x} - n$과 같고, 이런 조각이 0 쪽으로 무한히 많이 몰려 있다. 소문항 (i)을 이용하면 이 모든 어려움을 피할 수 있다.

첫 번째 적분. $f(x) = \{x\}$로 놓는다. x에 1을 더하면 $\lfloor x \rfloor$에도 1이 더해지므로 $\{x+1\} = \{x\}$이고, f는 주기 1을 가진다. $[0,1)$에서 $\{x\} = x$이다(한 점 $x = 1$에서의 값은 적분에 영향을 주지 않는다). 따라서 소문항 (i)에 의하여

$$\int_0^1 \frac{\{x^{-1}\}}{1+x} \, dx = \int_0^1 \frac{x}{1+x} \, dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx = 1 - \ln 2.$$

두 번째 적분. $f(x) = \{2x\}$로 놓으면 필요한 대로 $f(x^{-1}) = \{2x^{-1}\}$이다.

생각해 보기 함수 $\{2x\}$의 주기는 $\frac{1}{2}$이다. 그래도 소문항 (i)을 쓸 수 있을까?

쓸 수 있다. $\{2(x+1)\} = \{2x+2\} = \{2x\}$이므로, 주기가 $\frac{1}{2}$인 함수는 주기 1도 가진다. 따라서 소문항 (i)을 적용할 수 있다. $[0, \frac{1}{2})$에서는 $2x \in [0,1)$이므로 $\{2x\} = 2x$이고, $[\frac{1}{2}, 1)$에서는 $2x \in [1,2)$이므로 $\{2x\} = 2x - 1$이다. 그러므로

$$\int_0^1 \frac{\{2x^{-1}\}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{1/2} \frac{2x}{1+x}\,\mathrm{d}x + \int_{1/2}^1 \frac{2x-1}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

$\frac{2x}{1+x} = 2 - \frac{2}{1+x}$, $\frac{2x-1}{1+x} = 2 - \frac{3}{1+x}$로 쓰면

$$\int_0^{1/2} \frac{2x}{1+x}\,\mathrm{d}x = 1 - 2\ln\tfrac{3}{2},$$
$$\int_{1/2}^1 \frac{2x-1}{1+x}\,\mathrm{d}x = 1 - 3\ln\frac{2}{3/2} = 1 - 3\ln\tfrac{4}{3}.$$

두 식을 더하고 로그를 정리하면

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\{2x^{-1}\}}{1+x}\,\mathrm{d}x &= 2 - 2\ln 3 + 2\ln 2 - 6\ln 2 + 3\ln 3 \\ &= 2 + \ln 3 - 4\ln 2 = 2 + \ln\tfrac{3}{16}.\end{aligned}$$

검산

- $0 \le \{\cdot\} < 1$이므로 두 답은 모두 0과 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \ln 2 \approx 0.693$ 사이에 있어야 한다. 구한 값은 $1 - \ln 2 \approx 0.3069$와 $2 + \ln\frac{3}{16} \approx 0.3260$으로 타당하다. 소수 부분(fractional part)의 평균은 대략 $\frac{1}{2}$이므로 답은 0.693의 절반 정도가 되어야 한다.
- 컴퓨터로 조각 $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$(두 번째 적분에서는 그 절반 조각)들 위의 적분을 수천 개 이상 더하면 0.306853과 0.326024를 얻으며, 두 답과 일치한다.

흔한 실수

- $y = 1/x$로 치환한 뒤 적분 구간의 위끝과 아래끝을 거꾸로 잡거나 음의 부호를 빠뜨리는 실수. $\mathrm{d}x$에서 나오는 음의 부호와 뒤바뀐 적분 구간이 서로 상쇄된다.
- $[0,1]$ 전체에서 $\{2x\} = 2x$라고 가정하는 실수. 이 함수는 $x = \frac{1}{2}$에서 1만큼 떨어진다.
- 소문항 (i)을 쓰려면 주기가 정확히 1이어야 한다고 생각하는 실수. (양의 정수 k에 대하여) 주기가 $\frac{1}{k}$인 함수는 주기 1도 가진다.

STEP 너머

여기서는 아무 언급 없이 무한급수와 적분의 순서를 바꾸었는데, 대학에서는 바로 이런 단계에 정당화가 필요하다. 단조 수렴 정리(monotone convergence theorem)와 지배 수렴 정리(dominated convergence theorem) 같은 정리들이 언제 그렇게 해도 안전한지를 알려 준다(여기서는 $f \geq 0$이면 모든 항이 음이 아니므로 쉬운 경우에 해당한다). 같은 치환 아이디어로 소수 부분에 관한 유명한 적분들을 얻을 수 있는데, 예를 들어 $\int_0^1 \{1/x\}\,\mathrm{d}x = 1 - \gamma$이다. 여기서 γ는 오일러(Euler) 상수(Euler's constant)이다. 극한, 급수, 적분을 엄밀하게 다루는 방법은 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학의 이해)를 참고하라.

풀이

STEP III 2018, 문제 9

역학 • 충돌과 점화식

> **STEP III 2018, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/18-s3-q9

핵심 아이디어

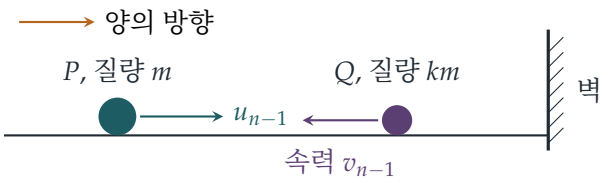
P와 Q 사이의 각 충돌에서는 충돌 전후의 속도를 잇는 일차방정식이 두 개 나온다. 하나는 운동량 보존(conservation of momentum)에서, 다른 하나는 뉴턴의 반발 법칙(Newton's law of restitution)에서 얻는다. 벽은 Q의 속도 방향을 뒤집을 뿐이므로, 한 충돌 직전의 상태는 바로 앞 충돌 직후의 상태로 정해진다. 이로부터 u_n과 v_n에 대한 일계 점화식(first-order recurrence) 한 쌍을 얻고, v를 소거하면 u_n에 대한 이계 점화식(second-order recurrence) 하나만 남는다. 그러면 소문항 (ii)는 선형 점화식의 해를 처음 두 항에 맞추는 익숙한 작업이 된다.

풀이

P와 Q를 매끄러운 바닥 위에서 한 직선을 따라 움직이는 입자로 모형화한다. 따라서 충돌과 충돌 사이에는 수평 방향의 힘이 작용하지 않고, 각 입자는 일정한 속도를 유지한다. 풀이 전체에서 벽을 향하는 방향을 양의 방향으로 잡는다.

충돌과 충돌 사이에 일어나는 일. n번째 충돌 뒤 Q의 속도는 v_n이다(다음에는 벽과 충돌하므로 벽을 향하는 방향이다). 벽과의 충돌은 완전 탄성 충돌(perfectly elastic collision)이므로 Q는 속도 $-v_n$으로 되돌아오고, P의 속도는 여전히 u_n이다. 따라서 $n+1$번째 충돌 직전의 속도는 u_n(P의 속도)과 $-v_n$(Q의 속도)이다.

v_0를 올바르게 해석하면 첫 번째 충돌에도 이 설명이 그대로 성립한다. 첫 충돌 전에 Q는 속력 v_0로 벽에서 멀어지므로 그 속도는 $-v_0$이고, 이는 위의 형태에서 $n=0$인 경우와 정확히 같다.



소문항 (i)

n번째 충돌($n \geq 1$)에 운동량 보존을 적용하면 (양변을 m으로 나누어) 다음을 얻는다.

$$u_{n-1} - kv_{n-1} = u_n + kv_n. \tag{1}$$

접근 속력(speed of approach)은 $u_{n-1} - (-v_{n-1}) = u_{n-1} + v_{n-1}$이다. 충돌 후에는 벽에 더 가까이 있는 Q가 P보다 빠르게 벽 쪽으로 움직이므로, 분리 속력(speed of separation)은 $v_n - u_n$이다. 뉴턴의 반발 법칙에 의해

$$v_n - u_n = e\,(u_{n-1} + v_{n-1}). \tag{2}$$

(2)에서 얻은 v_n을 (1)에 대입하면

$$u_{n-1} - kv_{n-1} = (1+k)u_n + ke\,(u_{n-1} + v_{n-1}),$$

이므로

$$k(1+e)\,v_{n-1} = (1-ke)\,u_{n-1} - (1+k)\,u_n \qquad (n \geq 1). \tag{3}$$

이 식은 각 v를 연속한 두 u로 나타내며, 이것이 바로 v를 소거하는 데 필요한 것이다.

? **생각해 보기** 식 (3)은 v_{n-1}을 없애 주지만, (2)에는 v_n도 들어 있다. 이것은 어떻게 처리할까?

식 (3)은 모든 $n \geq 1$에 대해 성립하므로, $n+1$을 n 자리에 넣어 써도 된다.

$$k(1+e)\,v_n = (1-ke)\,u_n - (1+k)\,u_{n+1}.$$

이제 (2)에 $k(1+e)$를 곱하고, $k(1+e)v_n$과 $k(1+e)v_{n-1}$을 모두 이 두 식으로 바꾸면

$$(1-ke)u_n - (1+k)u_{n+1} - k(1+e)u_n = ke(1+e)\,u_{n-1} + e\big[(1-ke)u_{n-1} - (1+k)u_n\big].$$

항을 정리한다. 우변에서 u_{n-1}의 계수는 $ke + ke^2 + e - ke^2 = e(1+k)$이다. u_n 항을 좌변으로 옮기면 그 계수는

$$1 - ke - k - ke + e + ke = 1 - k + e - ke = (1+e)(1-k).$$

따라서

$$(1+k)u_{n+1} - (1-k)(1+e)u_n + e(1+k)u_{n-1} = 0 \qquad (n \geq 1),$$

이고, n을 $n-1$로 바꾸면 $(*)$를 $n \geq 2$에 대해 얻는다. 이것이 보여야 할 식이다.

소문항 (ii)

$e=\frac{1}{2}, k=\frac{1}{34}$일 때 $(*)$에 68을 곱하면

$$70u_n - 99u_{n-1} + 35u_{n-2} = 0,$$

이고, 그 특성방정식(auxiliary equation) $70t^2 - 99t + 35 = (10t-7)(7t-5) = 0$의 근은 $\frac{7}{10}$과 $\frac{5}{7}$이므로 주어진 꼴과 일치한다.

A와 B를 정하려면 조건이 두 개 필요하므로 처음 두 항이 있어야 한다. u_0는 이미 알고 있다. u_1을 구하기 위해 (3)에 $n=1$을 대입하면

$$(1+k)u_1 = (1-ke)u_0 - k(1+e)v_0,$$
$$\text{따라서} \quad \tfrac{35}{34}u_1 = \tfrac{67}{68}u_0 - \tfrac{3}{68}v_0, \quad \text{즉} \quad u_1 = \frac{67u_0 - 3v_0}{70}.$$

주어진 꼴에 $n=0$과 $n=1$을 대입하면

$$A + B = u_0, \qquad \tfrac{7}{10}A + \tfrac{5}{7}B = \frac{67u_0 - 3v_0}{70}.$$

두 번째 식에 70을 곱하면 $49A + 50B = 67u_0 - 3v_0$이다. 여기서 첫 번째 식의 49배를 빼면

$$B = 18u_0 - 3v_0, \qquad A = u_0 - B = 3v_0 - 17u_0.$$

충분히 큰 n에서 u_n의 부호. $\frac{5}{7} > \frac{7}{10}$이므로($50 > 49$이기 때문이다) B 항이 지배적이다. 정확히 쓰면

$$u_n = \left(\tfrac{5}{7}\right)^n \left[B + A\left(\tfrac{49}{50}\right)^n \right],$$

이고 $\left(\frac{49}{50}\right)^n \to 0$이므로 대괄호 안의 값은 B로 수렴(converge)한다. $0 < 6u_0 < v_0$이면 $B = 3(6u_0 - v_0) < 0$이므로, 충분히 큰 모든 n에 대해 대괄호 안의 값은 음수이다. $\left(\frac{5}{7}\right)^n > 0$이므로 큰 n에서 u_n은 음수이고, 이것이 보여야 할 내용이다. (구체적으로, $|A|(\frac{49}{50})^n < |B|$가 되는 순간부터 대괄호 안의 값은 음수이다.)

물리적으로 보면, P는 결국 벽에서 멀어지는 쪽으로 튕겨 나간다. Q는 P에 대한 초기 상대 속력이 충분히 커서, Q가 훨씬 가벼운데도 계속 그것을 뒤로 밀어내기 때문이다.

검산

- $e=1, k=1$(질량이 같고 완전 탄성)로 놓으면 $(*)$는 $2u_n + 2u_{n-2} = 0$이 되므로 $u_n = -u_{n-2}$이다. 실제로 질량이 같은 두 물체가 탄성 충돌하면 속도를 서로 맞바꾸므로 $u_1 = -v_0$, $u_2 = -v_1$이다. 그런데 Q는 P의 이전 속도 u_0를 벽까지 가져갔다가 되돌아오므로 $u_2 = -u_0$이다.

- $n = 0$일 때 공식은 $A + B = u_0$를 주고, $n = 1$일 때는

$$\tfrac{7}{10}(3v_0 - 17u_0) + \tfrac{5}{7}(18u_0 - 3v_0) = \tfrac{1}{70}(67u_0 - 3v_0),$$

  를 주므로 올바르다.

- $u_0 = 1$, $v_0 = 7$이면 $A = 4$, $B = -3$이다. 충돌을 하나씩 따라가며 계산하면 공식이 정확히 맞음을 확인할 수 있고, u_n은 $n = 15$에서 처음으로 음수가 되며 이때 $u_{15} \approx -0.00029$이다.

흔한 실수

- 충돌 직전 Q의 속도는 $-v_{n-1}$이지 v_{n-1}이 아니라는 점을 잊는 것. 벽이 속도의 방향을 뒤집는다.
- 반발 법칙 식에서 분리 속력의 부호를 틀리는 것. 충돌 후 Q는 양의 방향으로 P보다 앞에 있으므로 분리 속력은 $v_n - u_n$이다.
- $u_1 = \frac{7}{10}A + \frac{5}{7}B$를 쓰면서 정작 u_1을 충돌 방정식에서 구하지 않는 것. $(*)$만으로는 그 값을 얻을 수 없다.

STEP 너머

식 (1)과 (2)의 쌍은 상태 (u_{n-1}, v_{n-1})을 (u_n, v_n)으로 보내는 선형사상(linear map)이므로, 전체 운동은 2×2 행렬(matrix)을 거듭 곱하는 것이다. 근 $\frac{7}{10}$과 $\frac{5}{7}$은 이 행렬의 고윳값(eigenvalue)이고, 장기적인 거동은 가장 큰 고윳값이 좌우한다. 이것이 선형 동역학계(linear dynamical systems)와 차분방정식(difference equations) 이론의 출발점이다. 충돌 역학에 대해 더 알고 싶다면 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를, 행렬의 관점에 대해서는 Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수 입문)를 참고하라.

풀이

STEP III 2018, 문제 10

역학 • 복합 진자

> **STEP III 2018, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/18-s3-q10

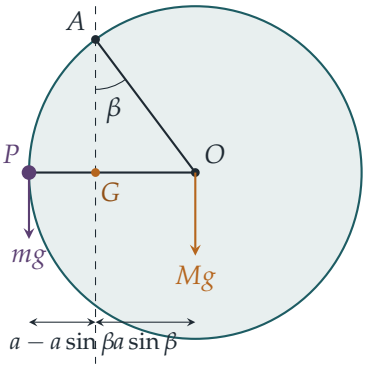
핵심 아이디어

원판과 입자는 함께 하나의 강체(rigid body)를 이루어 고정축 L을 중심으로 회전하므로, 모든 것이 하나의 각으로 결정된다. 평형(equilibrium) 상태에서는 전체의 질량중심(centre of mass)이 A의 바로 아래에 있어야 하며, 이것은 A에 대한 모멘트(moment)의 균형이다. 운동에 대해서는, 축이 매끄러워 그곳의 반력이 일을 하지 않으므로 에너지가 보존된다. 에너지를 θ와 $\dot{\theta}$의 함수로 쓰고 나면, 이를 미분하여 운동방정식(equation of motion)을 얻고, $\sin\theta$를 θ로 바꾸면 미소 진동(small oscillations)이 바로 따라 나온다.

풀이

원판은 균일한 강체 박판(lamina)으로, 입자는 원판의 가장자리에 고정된 질점(point mass)으로, 축 L은 매끄러운 것으로 모형화한다.

평형. A에 대한 모멘트를 갖는 힘은 두 무게뿐이다. 하나는 O에 작용하는 Mg이고, 다른 하나는 P에 작용하는 mg이다. A에서의 반력은 A를 지난다. AO가 연직 아래 방향과 각 β를 이루므로, O는 A의 한쪽, 예를 들어 오른쪽으로 수평 거리 $a\sin\beta$만큼 떨어져 있다. 그러면 무게 Mg는 원판을 A에 대하여 시계 방향으로 돌리고, 이를 상쇄할 수 있는 것은 mg뿐이므로 P는 A를 지나는 연직선의 **왼쪽**에 있어야 한다. OP는 수평이고 길이가 a이므로, P가 A의 왼쪽으로 떨어진 수평 거리는 $a - a\sin\beta$이다. (여기서 $a\sin\beta < a$이므로 P는 실제로 연직선의 왼쪽에 있다.)



A에 대한 모멘트를 취하면

$$Mg\,a\sin\beta = mg\,(a - a\sin\beta) \quad\Longrightarrow\quad \sin\beta = \frac{m}{M+m}.$$

O와 P는 모두 A보다 연직 거리 $a\cos\beta$만큼 아래에 있다. 따라서 AP를 빗변으로 하는 삼각형에서 수평 변은 $a(1-\sin\beta)$이고 연직 변은 $a\cos\beta$이다.

$$\begin{aligned} AP^2 &= a^2(1-\sin\beta)^2 + a^2\cos^2\beta = a^2\big(2-2\sin\beta\big) \\ &= 2a^2\Big(1-\frac{m}{M+m}\Big) = \frac{2Ma^2}{M+m}, \end{aligned}$$

그러므로 요구한 대로 $AP/a = \sqrt{2M/(M+m)}$이다.

전체의 질량중심 G가 어디에 있는지 짚어 둘 만하다. 이 점은 O와 P의 가중평균이므로 선분 OP 위에 있고, 따라서 A보다 깊이 $a\cos\beta$만큼 아래에 있다. 평형 상태에서 이 점은 A의 바로 아래에 있으므로

$$AG = a\cos\beta.$$

에너지 보존. 원판과 입자는 하나의 강체로 움직인다. 평형 상태에서 OP는 수평이고, OP는 물체와 함께 회전하므로, OP가 수평과 각 θ를 이룰 때 물체 전체는 평형 위치에서 θ만큼 회전한 것이다. 따라서 각속도(angular speed)의 크기는 $|\dot\theta|$이다.

? 생각해 보기 입자는 얼마나 빠르게 움직이고 있는가?

물체의 모든 점은 축을 중심으로 하는 원 위를 움직인다. 입자는 A로부터 일정한 거리 AP를 유지하므로, 그 속력은 $AP\,|\dot\theta|$이고 운동 에너지(kinetic energy)는

$$\tfrac{1}{2}m\,AP^2\,\dot\theta^2 = \tfrac{1}{2}m\cdot 2a^2(1-\sin\beta)\,\dot\theta^2 = (1-\sin\beta)\,ma^2\dot\theta^2,$$

이다. 여기서 위에서 구한 $AP^2 = 2a^2(1-\sin\beta)$를 이용하였다. 원판의 운동 에너지는 $\frac{1}{2}I\dot\theta^2$이다.

위치 에너지(potential energy)를 구할 때는 전체 질량 $M+m$이 G에 모여 있다고 보면 된다. 직선 AG는 평형 상태에서 연직이고, 이것 역시 θ만큼 회전하였으므로, 이제 G는 A보다 깊이 $a\cos\beta\cos\theta$만큼 아래에 있다. 평형 위치를 기준으로 위치 에너지를 재면

$$\text{위치 에너지} = (M+m)g\big(a\cos\beta - a\cos\beta\cos\theta\big) = (M+m)ga\cos\beta\,(1-\cos\theta).$$

축은 매끄럽고 A에서의 반력은 움직이지 않는 점에 작용하므로 일을 하지 않는다. 그 밖의 힘은 중력뿐이며, 중력은 보존력(conservative force)이다. 따라서 운동 에너지와 위치 에너지의 합은 일정하다.

$$\tfrac{1}{2}I\dot\theta^2 + (1-\sin\beta)\,ma^2\dot\theta^2 + (m+M)ga\cos\beta\,(1-\cos\theta) = \text{상수},$$

이것이 요구한 결과이다.

미소 진동. t에 대하여 미분하면

$$\dot\theta\Big[\big(I+2(1-\sin\beta)ma^2\big)\ddot\theta + (M+m)ga\cos\beta\,\sin\theta\Big] = 0.$$

$\dot\theta \neq 0$일 때마다 괄호 안은 0이어야 하고, 연속성에 의해 모든 순간에 0이다. θ가 작을 때 $\sin\theta \approx \theta$이므로

$$\ddot\theta = -\omega^2\theta, \qquad \omega^2 = \frac{(M+m)ga\cos\beta}{I+2(1-\sin\beta)ma^2},$$

이것은 주기(period)가 $2\pi/\omega$인 단진동(simple harmonic motion)이다.

이제 $m=\frac{3}{2}M$으로 놓자. 그러면 $\sin\beta = \dfrac{3/2}{5/2} = \frac{3}{5}$이고, β가 예각이므로 $\cos\beta = \frac{4}{5}$이다. 분자는

$$\tfrac{5}{2}M\cdot ga\cdot\tfrac{4}{5} = 2Mga,$$

이고, $I=\frac{3}{2}Ma^2$이므로 분모는

$$\tfrac{3}{2}Ma^2 + 2\cdot\tfrac{2}{5}\cdot\tfrac{3}{2}Ma^2 = \tfrac{3}{2}Ma^2 + \tfrac{6}{5}Ma^2 = \tfrac{27}{10}Ma^2.$$

따라서 $\omega^2 = \dfrac{20g}{27a}$이고, 주기는

$$\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{27a}{20g}} = 2\pi\cdot\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3a}{5g}} = 3\pi\sqrt{\frac{3a}{5g}},$$

이다. 여기서 $\sqrt{27/20} = \sqrt{9\cdot 3/(4\cdot 5)} = \frac{3}{2}\sqrt{3/5}$를 이용하였다. 이것이 요구한 주기이다.

검산

- $m=0$이면 $\sin\beta=0$이고 $AP/a=\sqrt{2}$이다. 원판은 O가 A 아래에 오도록 매달리고, O와 같은 높이에 있는 가장자리의 점은 실제로 A로부터 $\sqrt{2}\,a$만큼 떨어져 있다. 주기는

$2\pi\sqrt{(3a/2)/g}$가 되는데, 이것은 가장자리를 회전축으로 하는 원판에 대해 잘 알려진 결과이다.

- 운동 에너지 항들을 더하면 $\frac{1}{2}(I + m\,AP^2)\dot{\theta}^2$이 되는데, 이는 당연히 그래야 하듯이 L에 대한 물체 전체의 관성 모멘트(moment of inertia)를 담고 있다.
- $m = \frac{3}{2}M$, $a = 0.5\,\text{m}$로 강체를 단계별 컴퓨터 시뮬레이션으로 계산하였더니 미소 진동의 주기가 $1.64815\,\text{s}$로 나왔다. 공식으로는 $3\pi\sqrt{1.5/49.05} \approx 1.64815\,\text{s}$이다. 시뮬레이션은 또한 크게 흔들릴 때에도 에너지 식이 일정하게 유지됨을 보여 주었다.

흔한 실수

- P를 연직선에 대하여 O와 같은 쪽에 놓는 것. 그러면 두 무게가 물체를 같은 방향으로 돌리므로 평형이 있을 수 없다.
- 입자와 축 사이의 거리로 AP 대신 a를 쓰는 것. 입자는 O가 아니라 A를 중심으로 하는 원 위를 움직인다.
- O와 P의 위치 에너지를 따로 구하다가 삼각함수 계산에서 길을 잃는 것. A로부터 거리 $a\cos\beta$에 있는 전체의 질량중심 G를 이용하는 편이 훨씬 깔끔하다.

STEP 너머

이것은 **복합 진자**(*compound pendulum*)이다. 고정축을 중심으로 흔들리는 강체는 모두 길이가 $I_{\text{total}}/\big((M+m)h\big)$인 단진자처럼 진동한다. 여기서 h는 축에서 질량중심까지의 거리이다. 우리가 쓴 에너지 방법은 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)의 한 변수 경우로, 라그랑주 역학에서는 하나의 일반화 좌표(generalised coordinate)로 쓴 운동 에너지와 위치 에너지로부터 운동방정식을 얻는다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 강체의 회전과 물리 진자(physical pendulum)를 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP III 2018, 문제 11

역학 • 느슨한 줄과 포물체 운동

STEP III 2018, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

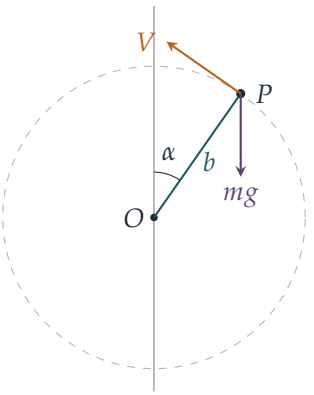
step.maths.org/questions/18-s3-q11

핵심 아이디어

실은 장력(tension)이 0으로 떨어지는 순간에 느슨해지므로, 그 순간의 지름 방향 운동 방정식(equation of motion)으로부터 V를 구할 수 있다. 그 뒤로 입자는 평범한 포물체(projectile)이며, 입자와 O 사이의 거리가 다시 b가 될 때 실이 다시 팽팽해진다. O를 중심으로 하는 좌표에서 계산하면 이 조건이 아름답게 간단해지는데, 포물체가 원 위에서 접선(tangent) 방향으로 움직이며 출발하기 때문이다. 마지막 부분은 결국 실이 갑자기 당겨지는(jerk) 순간의 속도가 실을 따라 정확히 향하는지의 문제이다.

풀이

입자를 가볍고 늘어나지 않는 실에 매달린 질량 m인 질점으로 모형화하고, 공기 저항은 없다고 한다. O를 원점으로 잡고, x축은 수평 방향, y축은 연직 위 방향으로 잡는다. 입자가 시계 반대 방향으로 돌아서 위쪽 연직선의 오른쪽에 있는 점 P에서 실이 느슨해진다고 하자.



P에서 실은 위쪽 연직선과 각 α를 이루므로 $P = (b\sin\alpha,\ b\cos\alpha)$이다. 이곳에서의 속도는 실에 수직이고 꼭대기를 넘어가는 위쪽 방향을 향한다.

$$\mathbf{v}_P = V(-\cos\alpha,\ \sin\alpha).$$

실이 느슨해질 때의 속력

실을 따라 O를 향하는 방향으로 힘을 분해한다. 장력 R는 O를 향해 작용하고, P가 O보다 위에 있으므로 무게의 성분 $mg\cos\alpha$도 O를 향한다. 입자는 반지름 b인 원 위를 움직이므로

$$R + mg\cos\alpha = \frac{mV^2}{b}.$$

$R = 0$일 때 실이 느슨해지므로

$$V^2 = gb\cos\alpha, \qquad V = \sqrt{gb\cos\alpha}.$$

실이 다시 팽팽해질 때

실이 느슨해지면 입자는 포물체가 된다. 시간 t가 지난 뒤 입자의 위치는

$$x = b\sin\alpha - Vt\cos\alpha, \qquad y = b\cos\alpha + Vt\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

$x^2 + y^2 = b^2$일 때 실이 다시 팽팽해진다. 전개하면

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= b^2\sin^2\alpha - 2bVt\sin\alpha\cos\alpha + V^2t^2\cos^2\alpha \\ &\quad + b^2\cos^2\alpha + V^2t^2\sin^2\alpha + \tfrac{1}{4}g^2t^4 + 2bVt\sin\alpha\cos\alpha - bgt^2\cos\alpha - gVt^3\sin\alpha \\ &= b^2 + \left(V^2 - gb\cos\alpha\right)t^2 - gVt^3\sin\alpha + \tfrac{1}{4}g^2t^4. \end{aligned}$$

t에 관한 항들은 입자가 접선 방향으로 움직이며 출발하기 때문에 소거되고, t^2에 관한 항들은 $V^2 = gb\cos\alpha$이기 때문에 소거된다. 따라서

$$x^2 + y^2 - b^2 = gt^3\left(\tfrac{1}{4}gt - V\sin\alpha\right).$$

$0 < t < 4V\sin\alpha/g$에서는 이 값이 음수이므로 입자는 원의 엄밀한 내부에 있고 실은 느슨한 상태를 유지한다. 이 값은 다음을 만족하는 시각 T에 다시 0이 되고 (그 뒤로는 양수가 된다),

$$gT = 4V\sin\alpha,$$

이것이 구하려던 결과이다.

직전의 운동 방향

시각 T에서 속도 성분은

$$\dot{x} = -V\cos\alpha, \qquad \dot{y} = V\sin\alpha - gT = V\sin\alpha - 4V\sin\alpha = -3V\sin\alpha.$$

따라서 입자는 왼쪽 아래로 움직이고 있으며, 그 경로가 수평과 이루는 각 β는 다음을 만족한다.

$$\tan\beta = \frac{|\dot{y}|}{|\dot{x}|} = \frac{3V\sin\alpha}{V\cos\alpha} = 3\tan\alpha,$$

이것이 구하려던 결과이다.

정지하는 경우

? **생각해 보기** 입자가 그 자리에서 딱 멈추려면 속도에 대해 무엇이 성립해야 할까?

갑작스러운 당김은 운동량(momentum) 가운데 실 방향 성분만을 없앤다. 실에 수직인 성분은 그대로 남으므로, 입자가 정지할 필요충분조건은 그 수직 성분이 이미 0인 것이다. 즉 Q를 시각 T에서의 입자의 위치라 할 때, 직전의 속도가 실 $\overrightarrow{OQ}$에 평행한 것이 필요충분조건이다. ($\dot{x} = -V\cos\alpha \neq 0$이므로 속도는 0이 아니다.)

$V^2 = gb\cos\alpha$와 $T = 4V\sin\alpha/g$를 이용하면

$$x(T) = b\sin\alpha - \frac{4V^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = b\sin\alpha\,(1-4\cos^2\alpha),$$
$$y(T) = b\cos\alpha + \frac{4V^2\sin^2\alpha}{g} - \frac{8V^2\sin^2\alpha}{g} = b\cos\alpha\,(1-4\sin^2\alpha).$$

벡터 (x,y)와 $(\dot{x},\dot{y})$가 평행할 필요충분조건은 $x\dot{y} - y\dot{x} = 0$이다. $-bV$로 나누면

$$3\sin^2\alpha\,(1-4\cos^2\alpha) - \cos^2\alpha\,(1-4\sin^2\alpha) = 0.$$

$S = \sin^2\alpha$라 하면 $\cos^2\alpha = 1-S$이고 $1-4\cos^2\alpha = 4S-3$이므로

$$\begin{aligned} 3S(4S-3) - (1-S)(1-4S) &= 0 \\ 12S^2 - 9S - (1-5S+4S^2) &= 0 \\ 8S^2 - 4S - 1 &= 0, \end{aligned}$$

따라서 $S = \frac{1}{16}\left(4 \pm \sqrt{16+32}\right) = \frac{1}{4}\left(1 \pm \sqrt{3}\right)$이다. $S = \sin^2\alpha > 0$이므로 음의 근은 불가능하고, 남은 근은 $(0,1)$에 속하므로 실제로 존재하는 예각에 대응한다. 위의 모든 단계는 역으로도 성립하므로, 실이 팽팽해지는 순간 입자가 순간적으로 정지할 필요충분조건은

$$\sin^2\alpha = \frac{1+\sqrt{3}}{4}.$$

검산

- 식 $V^2 = gb\cos\alpha$에 따르면 $\alpha \to \frac{1}{2}\pi$일 때 $V \to 0$이다. 실이 O와 같은 높이에서 느슨해지려면 입자가 그곳에서 멈춰 있어야 하므로 이는 옳다.

- $\sin^2\alpha = \frac{1}{4}(1+\sqrt{3})$이면 $\alpha \approx 55.7°$이고 $\cos^2\alpha = \frac{1}{4}(3-\sqrt{3})$이므로 $Q = \big(b\sin\alpha\,(\sqrt{3}-2),\ -\sqrt{3}\,b\cos\alpha\big)$이며, 이 점은 O의 왼쪽 아래에 있다. OQ의 기울기는 $\sqrt{3}\cot\alpha/(2-\sqrt{3})$이고 경로의 기울기는 $3\tan\alpha$이다. 다음 식에 의해 두 값은 일치한다.

$$3(2-\sqrt{3})\tan^2\alpha = \frac{3(2-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}{3-\sqrt{3}} = \frac{3(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)} = \sqrt{3}.$$

  운동을 컴퓨터로 시뮬레이션해 보아도 세 결과가 모두 확인되었다.

흔한 실수

- 에너지만으로 V를 구하려는 것. 에너지는 V를 처음 속력과 연결해 줄 뿐이고, V를 b, g, α로 결정하는 것은 장력이 0이라는 조건이다.
- P에서의 속도 방향을 잘못 잡는 것. 속도는 OP에 수직이므로 연직선이 아니라 수평과 각 α를 이룬다.
- T가 실이 팽팽해지는 **첫** 시각임을 정당화하지 않는 것. 인수분해 $gt^3(\frac{1}{4}gt - V\sin\alpha)$가 그 사실을 보여 준다.

STEP 너머

실은 당길 수는 있지만 밀 수는 없으므로, 실이 느슨해지는 문제는 사실 구속 조건이 켜졌다 꺼졌다 하는 구속계(constrained system)이다. 이처럼 한쪽 방향으로만 작용하는 구속 조건이라는 같은 생각은 접촉 역학(contact mechanics)과 부등식 구속 조건을 갖는 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)에서도 나타난다. 갑작스러운 당김은 충격적 구속력(impulsive constraint force)이며, 대학 1학년 과정에서 충돌 및 반발 계수(coefficient of restitution)와 함께 다룬다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 원운동과 충격량을 모두 꼼꼼하게 전개한다.

풀이

STEP III 2018, 문제 12

확률과 통계 • 순서통계량

STEP III 2018, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/18-s3-q12

핵심 아이디어

사건 "k번째로 작은 수가 y 이하이다"는 "n개의 수 중 적어도 k개가 y 이하이다"와 같은 사건이고, y 이하인 값의 개수는 이항분포(binomial distribution)를 따른다. 이로부터 분포함수(distribution function)를 곧바로 얻는다. 이를 미분하면 두 개의 합이 나오는데, (ii)의 두 이항계수 항등식이 바로 이 합들을 연쇄적으로 소거(telescope)되게 만든다. 확률밀도함수를 알고 나면, 그것을 적분한 값이 1이라는 사실로부터 어떤 적분값을 공짜로 얻을 수 있고, 같은 적분(n과 k를 옮긴 것)으로 평균도 구할 수 있다.

풀이

n개의 수를 $X_1, \ldots, X_n$이라 하자. 이들은 서로 독립이고, 각각 $[0,1]$에서 균등분포(uniform distribution)를 따른다.

소문항 (i)

$0 \le y \le 1$인 y를 고정하고, $X_i \le y$인 X_i의 개수를 N이라 하자. 각 X_i는 다른 것들과 독립적으로 확률 y로 $X_i \le y$를 만족하므로, $N \sim \mathrm{B}(n, y)$이다.

이제 $Y_k \le y$일 필요충분조건은 수들 중 적어도 k개가 y 이하인 것이다. $Y_k \le y$이면 Y_k와 그보다 작은 $k-1$개의 수가 모두 y 이하이므로 $N \ge k$이다. 역으로 $N \ge k$이면 가장 작은 k개의 수가 모두 y 이하이고, 특히 $Y_k \le y$이다. 따라서

$$\mathrm{P}(Y_k \le y) = \mathrm{P}(N \ge k) = \sum_{m=k}^{n} \binom{n}{m} y^m (1-y)^{n-m},$$

이고, 이것이 $(*)$이다.

소문항 (ii)

계승을 풀어 쓰면, $1 \le m \le n$일 때

$$m\binom{n}{m} = \frac{n!}{(m-1)!\,(n-m)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(m-1)!\,\big((n-1)-(m-1)\big)!} = n\binom{n-1}{m-1},$$

이고, 마찬가지로 $0 \le m \le n-1$일 때

$$(n-m)\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m-1)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{m!\,\big((n-1)-m\big)!} = n\binom{n-1}{m}.$$

이다. ($m = n$일 때 좌변은 0이고, $\binom{n-1}{n}$을 0으로 읽으면 우변도 0이다.)

확률밀도함수. Y_k의 확률밀도함수(probability density function) $f(y)$는 $(*)$의 도함수이다. 각 항을 곱의 미분법으로 미분하면

$$f(y) = \sum_{m=k}^{n} \binom{n}{m}\Big[m\,y^{m-1}(1-y)^{n-m} - (n-m)\,y^{m}(1-y)^{n-m-1}\Big].$$

이다. 두 번째 부분에서 $m = n$인 항은 인수 $n-m$ 때문에 사라지므로, 그 합은 실제로는 $m = n-1$까지이다. 두 항등식을 쓰면

$$f(y) = n\sum_{m=k}^{n}\binom{n-1}{m-1}y^{m-1}(1-y)^{n-m} \;-\; n\sum_{m=k}^{n-1}\binom{n-1}{m}y^{m}(1-y)^{n-1-m}.$$

이다.

> **생각해 보기** 이 두 합은 거의 똑같아 보인다. 어떻게 하면 둘을 나란히 맞출 수 있을까?

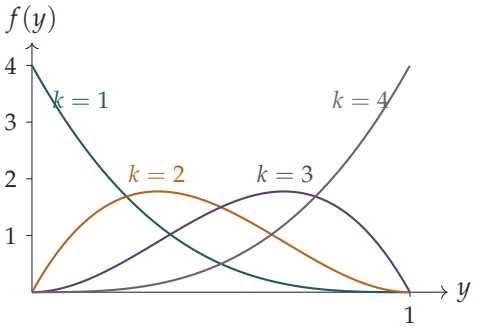
두 번째 합에서 $j = m+1$로 놓자. 그러면 합은

$$n\sum_{j=k+1}^{n}\binom{n-1}{j-1}y^{j-1}(1-y)^{n-j},$$

이 되는데, 이는 k가 아니라 $k+1$에서 시작한다는 점만 빼면 첫 번째 합과 항별로 똑같다. 첫 번째 합의 $m = k$인 항을 제외한 모든 것이 소거되어

$$f(y) = n\binom{n-1}{k-1}y^{k-1}(1-y)^{n-k},$$

를 얻으며, 이것이 구하는 결과이다. ($k = n$이면 두 번째 합은 비어 있고 첫 번째 합에는 $m = n$인 항만 있으므로, 결과는 여전히 성립한다.)



$n=4$일 때의 확률밀도함수들: 네 수 중 k번째로 작은 수는 $k/5$ 근처에 몰려 있다.

적분. 확률밀도함수를 그 범위(여기서는 $[0,1]$)에서 적분하면 1이다. 그러므로

$$n\binom{n-1}{k-1}\int_0^1 y^{k-1}(1-y)^{n-k}\,\mathrm{d}y = 1,$$

이고, 따라서

$$\int_0^1 y^{k-1}(1-y)^{n-k}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{n\binom{n-1}{k-1}} = \frac{(k-1)!\,(n-k)!}{n!}.$$

이다. 이는 $1 \le k \le n$인 모든 정수에 대해 성립한다.

소문항 (iii)

정의에 의해

$$\mathrm{E}(Y_k) = \int_0^1 y\,f(y)\,\mathrm{d}y = n\binom{n-1}{k-1}\int_0^1 y^{k}(1-y)^{n-k}\,\mathrm{d}y.$$

이다.

> **생각해 보기** 이 적분은 방금 구한 적분과 꼭 같지는 않다. n과 k를 어떤 값으로 바꾸면 그 꼴이 될까?

피적분함수는 $K=k+1$, $N=n+1$로 둘 때 $y^{K-1}(1-y)^{N-K}$이고, $1 \le K \le N$이므로 (ii)의 공식을 적용할 수 있다:

$$\int_0^1 y^{k}(1-y)^{n-k}\,\mathrm{d}y = \frac{k!\,(n-k)!}{(n+1)!}.$$

$n\binom{n-1}{k-1} = \dfrac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}$이므로

$$\mathrm{E}(Y_k) = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\cdot\frac{k!\,(n-k)!}{(n+1)!} = \frac{k}{n+1}.$$

이다.

검산

- $n = 1, k = 1$이면 균등분포를 따르는 수 하나뿐이고, 마땅히 그래야 하듯 $\mathrm{E}(Y_1) = \frac{1}{2}$이다.
- 대칭성: 모든 X_i를 $1 - X_i$로 바꾸면 k번째로 작은 수가 k번째로 큰 수가 되므로 $\mathrm{E}(Y_k) + \mathrm{E}(Y_{n+1-k}) = 1$이다. 실제로 $\frac{k}{n+1} + \frac{n+1-k}{n+1} = 1$이다.
- n개의 수는 $[0,1]$을 $n+1$개의 간격으로 나누는데, 답에 따르면 각 간격의 평균 길이는 $\frac{1}{n+1}$이다. 이는 대칭성으로 보아 매우 그럴듯하다.
- $n = 5, k = 2$일 때: $y = 0.3$에서 $(*)$의 값은 0.47178이고, 200 000개의 표본으로 컴퓨터 시뮬레이션을 한 결과 0.4726을 얻었으며, Y_2의 표본평균은 $\frac{1}{3}$에 대해 0.33333이었다.

흔한 실수

- **적어도** k개가 아니라 y 아래에 **정확히** k개의 값이 있을 확률인 $\mathrm{P}(Y_k \le y) = \binom{n}{k} y^k (1-y)^{n-k}$로 쓰는 것.
- 두 번째 합의 $m = n$인 항이 0이라는 것을 잊어서, 연쇄 소거가 한 항 차이로 실패하는 것처럼 보이게 되는 것.
- (iii)에서 적분을 다시 쓸 때 k만 옮기고 n은 옮기지 않는 것.

STEP 너머

Y_k들을 표본의 **순서통계량**(*order statistics*)이라 하며, Y_k는 모수가 k와 $n-k+1$인 베타분포(Beta distribution)를 따른다. (ii)의 적분은 베타함수 $B(a,b) = \int_0^1 y^{a-1}(1-y)^{b-1}\,\mathrm{d}y = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$이며, 이 함수는 감마함수(Gamma function)와 함께 다시 만나게 될 것이다. 순서통계량은 표본중앙값과 비모수 통계학(non-parametric statistics)의 바탕이 된다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)는 순서통계량과 베타분포를 아름답게 다루며, 여기서의 논증과 매우 비슷한 베타 적분의 "이야기" 증명도 담고 있다.

풀이

STEP III 2018, 문제 13

확률과 통계 • 푸아송 분포

> **STEP III 2018, 13번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/18-s3-q13

핵심 아이디어

확률생성함수(probability generating function)에 $t = -1$을 대입하면 각 확률에 부호 $(-1)^r$이 붙으므로, $G(1)$과 $G(-1)$의 평균을 내면 홀수 항은 상쇄되고 짝수 항만 남는다. 1의 네제곱근(fourth roots of unity) $1, -1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}$로 같은 방식의 걸러내기를 하면 4의 배수인 항만 골라낼 수 있다. 새 생성함수를 각각 닫힌 형태(closed form)로 나타내고 나면 평균은 그저 $t = 1$에서의 도함수 값이며, 문제는 초등함수 사이의 비교가 된다.

풀이

$p_r = \mathrm{P}(X = r)$이라 두면 $G(t) = \sum_{r \geq 0} p_r t^r$이다.

짝수 값. $t = 1$과 $t = -1$에서의 급수를 더하면

$$G(1) + G(-1) = \sum_{r \geq 0} p_r \left(1 + (-1)^r\right) = 2 \sum_{r \text{ 짝수}} p_r,$$

이다. $1 + (-1)^r$은 짝수 r에 대해 2이고 홀수 r에 대해 0이기 때문이다. 양변을 2로 나누면 구하는 결과를 얻는다. ($\sum p_r = 1$이므로 두 급수는 모두 절대수렴(absolutely convergent)한다.)

푸아송(Poisson) 생성함수. $p_r = \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^r / r!$일 때

$$G(t) = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{r \geq 0} \frac{(\lambda t)^r}{r!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda t} = \mathrm{e}^{-\lambda(1-t)},$$

이다. 여기서 모든 t에 대해 수렴하는 지수함수의 급수를 이용하였다.

소문항 (i)

Y의 확률을 모두 더하면 1이어야 하므로, k는 $\mathrm{P}(X \text{ 짝수})$의 역수이다. 첫 번째 결과에 의해

$$\mathrm{P}(X \text{ 짝수}) = \tfrac{1}{2}\left(1+\mathrm{e}^{-2\lambda}\right) = \mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\lambda}+\mathrm{e}^{-\lambda}\right) = \mathrm{e}^{-\lambda}\cosh\lambda, \qquad \text{따라서} \qquad k = \frac{\mathrm{e}^{\lambda}}{\cosh\lambda}.$$

Y의 생성함수는 G의 짝수 항만 남긴 것이다.

$$\begin{aligned} G_Y(t) = k\sum_{r\ \text{짝수}} p_r t^r &= k\cdot\tfrac{1}{2}\left(G(t)+G(-t)\right) \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\lambda}}{\cosh\lambda}\cdot\mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\lambda t}+\mathrm{e}^{-\lambda t}\right) = \frac{\cosh\lambda t}{\cosh\lambda}, \end{aligned}$$

여기서 $\frac{1}{2}\left(G(t)+G(-t)\right)$는 G의 짝수 부분(even part)이며, 첫 번째 결과에서 1 대신 t를 넣은 것과 정확히 같다. 이것이 구하는 꼴이다.

평균은 $G_Y'(1)$이다.

$$\mathrm{E}(Y) = \frac{\lambda\sinh\lambda}{\cosh\lambda} = \lambda\tanh\lambda.$$

$\lambda > 0$이면 $\mathrm{e}^{-\lambda} > 0$이므로 $\sinh\lambda = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\lambda}-\mathrm{e}^{-\lambda}) < \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\lambda}+\mathrm{e}^{-\lambda}) = \cosh\lambda$이고, 따라서 $0 < \tanh\lambda < 1$이다. 그러므로 구하는 대로 $\mathrm{E}(Y) < \lambda$이다.

소문항 (ii)

이제 r이 4의 배수인 항만 남겨야 한다.

> ? **생각해 보기** 2가 아니라 4의 배수로 걸러내고 싶을 때, $t=-1$의 역할을 하는 것은 무엇인가?

1의 네제곱근 네 개를 모두 사용한다. 정수 r에 대해

$$1+(-1)^r+\mathrm{i}^r+(-\mathrm{i})^r = \begin{cases} 4 & \text{만약} 4 \mid r, \\ 0 & \text{그 외.} \end{cases}$$

$4 \mid r$이면 모든 항이 1이다. r이 홀수이면 $(-1)^r = -1$이고 $(-\mathrm{i})^r = -\mathrm{i}^r$이므로 항들이 둘씩 짝지어 상쇄된다. $r \equiv 2 \pmod 4$이면 항들은 $1+1-1-1=0$이다. 따라서

$$\sum_{4\mid r}\frac{x^r}{r!} = \tfrac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\cosh x+\cos x\right).$$

(이는 직접 확인할 수도 있다. $\cosh x = \sum_{r\ \text{짝수}} x^r/r!$이고, $\cos x$는 같은 항들에 부호 $+,-,+,\ldots$가 차례로 붙은 것이므로, 둘을 더하면 $4 \mid r$인 항은 두 배가 되고 나머지는 상쇄된다.)

$x = \lambda t$로 두고 $\mathrm{e}^{-\lambda}$를 곱한 다음, $G_Z(1) = 1$이 되도록 c를 정하면

$$G_Z(t) = \frac{\cosh\lambda t+\cos\lambda t}{\cosh\lambda+\cos\lambda}.$$

을 얻는다. $\cosh\lambda > 1 \geq -\cos\lambda$이므로 $\lambda > 0$일 때 분모는 양수이다. 미분하고 $t = 1$을 대입하면

$$\mathrm{E}(Z) = G_Z'(1) = \frac{\lambda(\sinh\lambda - \sin\lambda)}{\cosh\lambda + \cos\lambda}.$$

이다. $\lambda > 0$이고 분모가 양수이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Z) < \lambda &\iff \sinh\lambda - \sin\lambda < \cosh\lambda + \cos\lambda \\ &\iff \sin\lambda + \cos\lambda > \sinh\lambda - \cosh\lambda = -\mathrm{e}^{-\lambda} \\ &\iff \sin\lambda + \cos\lambda + \mathrm{e}^{-\lambda} > 0.\end{aligned}$$

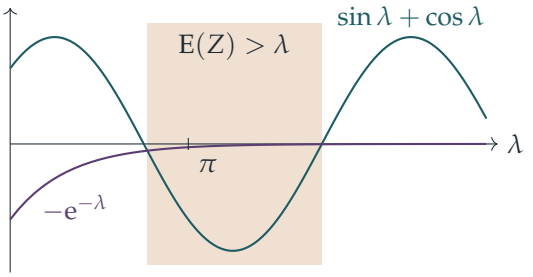
이 조건은 $\lambda = \pi$에서 성립하지 않는다. 이때 $\mathrm{e}^{-\pi} < 1$이므로 $\sin\pi + \cos\pi + \mathrm{e}^{-\pi} = -1 + \mathrm{e}^{-\pi} < 0$이다. 실제로 다음이 성립한다.

$$\mathrm{E}(Z)\big|_{\lambda=\pi} = \frac{\pi\sinh\pi}{\cosh\pi - 1} > \pi,$$

$\sinh\pi > \cosh\pi - 1$(동치로 $1 > \mathrm{e}^{-\pi}$)이기 때문이다.

따라서 답은 **아니오**이다. 즉 $\mathrm{E}(Z) < \lambda$는 모든 양수 λ에 대해 성립하지는 않는다.

더 자세히 살펴보기 위해 $\sin\lambda + \cos\lambda = \sqrt{2}\sin(\lambda + \frac{\pi}{4})$로 쓰자. 이 곡선이 $-\mathrm{e}^{-\lambda}$ 아래로 내려갈 때마다 조건이 성립하지 않는다. 그러한 첫 구간은 대략 $\lambda \approx 2.42$에서 $\lambda \approx 5.49$까지이고, 이후의 구간들은 $\mathrm{e}^{-\lambda} \to 0$이므로 점점 $\left(\frac{3\pi}{4} + 2n\pi,\ \frac{7\pi}{4} + 2n\pi\right)$에 가까워진다.



검산

- $\lambda \to 0$일 때 $\mathrm{E}(Y) = \lambda\tanh\lambda \approx \lambda^2$이다. 이는 타당하다. Y는 거의 항상 0이고, $\mathrm{P}(Y = 2) \approx \lambda^2/2$이기 때문이다.
- $\lambda \to \infty$일 때 $\tanh\lambda \to 1$이므로 $\mathrm{E}(Y)$는 λ보다 아주 조금 작다. λ가 크면 푸아송 분포가 넓게 퍼져 있으므로, 홀수 값을 버려도 평균은 거의 움직이지 않는다.
- 컴퓨터로 푸아송 급수를 직접 합하여 모든 생성함수와 두 평균을 확인하였다. 예를 들어 $\lambda = \pi$에서 $\mathrm{E}(Y) \approx 3.1299 < \pi$이고 $\mathrm{E}(Z) \approx 3.4254 > \pi$이다. 또한 $\sin\lambda + \cos\lambda + \mathrm{e}^{-\lambda}$의 부호가 바뀌는 지점이 $\lambda \approx 2.419$와 5.495임을 확인하였다.

흔한 실수

- 정규화 상수(normalising constant)를 빠뜨리는 것. $\cosh \lambda t$만으로는 생성함수가 아니다. $t = 1$에서의 값이 1이 아니기 때문이다.
- (i)과의 유추로 (ii)의 답도 반드시 "예"일 것이라고 가정하는 것. 4의 배수만 남기면 λ보다 아래쪽의 확률 질량(probability mass)이 위쪽보다 더 많이 제거될 수 있다. 예를 들어 $\lambda = \pi$일 때, 허용되는 가장 가까운 값 4는 π보다 크고 0보다 훨씬 무겁다.
- $\cosh \lambda + \cos \lambda$가 양수인지 확인하지 않고 부등식의 양변을 이것으로 나누는 것.

STEP 너머

한 잉여류(residue class)에 속하는 항만 골라내기 위해 생성함수를 1의 거듭제곱근(roots of unity)에 대해 평균하는 기법을 *1의 거듭제곱근 필터*(roots-of-unity filter) 또는 급수의 **다분할**(multisection)이라 한다. 이는 조합론의 기본 도구이며, 이산 푸리에 변환(discrete Fourier transform)의 가장 간단한 경우이다. 여기에서처럼 분포를 어떤 사건에 대해 조건부로 놓고 평균을 다시 계산하는 일은 확률론 전반에서 등장한다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 생성함수를 깊이 있게 다룬다.

Beyond STEP

STEP은 대부분의 학생이 학창 시절에 치르는 수학 시험 가운데 가장 어려운 시험이다. 또한 가장 훌륭한 시험 가운데 하나이기도 하다. 문제는 짧고 낯설며 깊이가 있고, 그중 가장 뛰어난 문제들은 대학 수학의 작은 조각이 모습을 감추고 있는 것이다.

이 책은 1987년 첫 시험에 앞서 나온 예시 시험지(specimen papers)부터 2025년 시험지까지 가운데 가장 흥미로운 STEP 문제들을 골라, 각 문제를 하나의 문으로 삼는다. 모든 문제는 뛰어난 학생이 풀어 가면서 던질 법한 질문들과 함께 꼼꼼하게 풀이하고, 그런 다음 책은 그 문을 지나 한 걸음 더 나아간다. 그 아이디어가 어디에서 왔는지, 대학에서는 무엇으로 발전하는지, 그리고 다음에는 무엇을 읽으면 좋은지를 살펴본다.

이 책은 STEP을 준비하면서 기출 문제 연습 이상의 것을 원하는 재능 있는 예비 수학자를 위해 쓰였다. 수학과 학부생처럼 생각하기 시작하고, 앞으로 무엇이 자신을 기다리고 있는지 알아보고 싶은 학생들을 위한 책이다.

- 순수수학(pure mathematics), 역학(mechanics), 확률(probability)과 통계(statistics)를 아우르는 13개의 장
- 이 36개의 STEP 기출 문제와 각 문제의 안내식 풀이
- 모든 문제 뒤에 숨은 대학 수학
- 답이 실린 후속 연습 문제와 더 읽을거리

2018년 풀이. 책 전체와 모든 장,
모든 풀이를 다음 주소에서 무료로 읽고, 내려받고, 공유할 수 있다.

beyondstep.keithmcnulty.org

본문은 퍼블릭 도메인(CC0 1.0)으로 공개한다. STEP 문제 © Cambridge University Press & Assessment.

