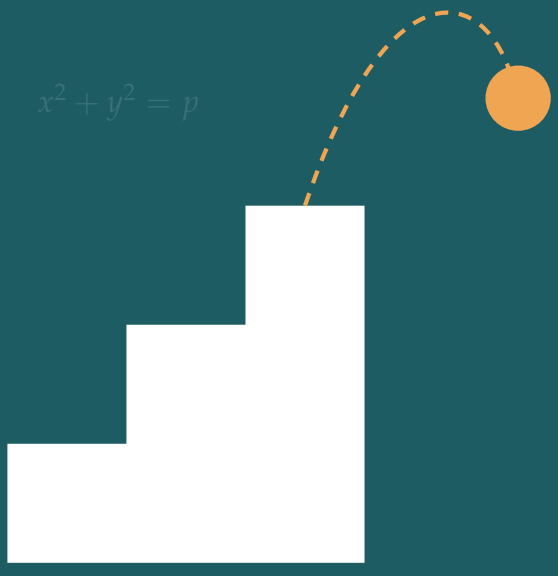
STEP 대비 · 대학 수학

Beyond STEP

STEP I, II 및 III

2017년 풀이



KEITH McNULTY

Beyond STEP

STEP 기출문제로 여는
대학 수학의 세계

STEP I, II 및 III

2017년 풀이

Keith McNulty

Beyond STEP: STEP 기출문제로 여는 대학 수학의 세계

2017년 풀이

2017년 STEP 문제지(STEP I, II 및 III)의 39개 문제 전체에 대한 풀이. 견본 문제지 이후 모든 STEP 문제의 풀이와 *Beyond STEP* 책 전체, 그리고 각 장을 `beyondstep.keithmcnulty.org`에서 무료로 읽고 내려받을 수 있다.

풀이를 읽기 전에 먼저 문제를 제대로 풀어 보자. 모든 답은 수치적으로 검증하였지만, 풀이가 이렇게 많으면 실수가 어느 정도 있을 수밖에 없다. 무언가 잘못된 것처럼 보이면 자신의 풀이를 믿고 꼼꼼히 확인해 보자.

영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.

2026년 11월 온라인 초판 발행.

이 PDF에서 지은이가 직접 만든 모든 것, 곧 본문, 풀이, 그림, 연습문제와 해답은 크리에이티브 커먼즈 CC0 1.0 Universal 라이선스에 따라 퍼블릭 도메인(public domain)으로 공개한다. 누구든 허락을 구하지 않고 어떤 목적으로든 복사하고, 고쳐 쓰고, 공유할 수 있다. 자세한 내용은 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`을 보라.

여기에서 다루는 STEP 문제의 저작권은 Cambridge University Press & Assessment에 있다. 문제는 이 책에 싣지 않았으며, 각 문제마다 공식 출처인 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스나 OCR의 기출 시험지로 가는 링크를 달았다.

오류 제보는 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty에 이슈로 남겨 주기 바란다.

차례

STEP I

Q1 치환적분 순수수학 . . . 3

Q2 부등식의 적분 순수수학 . . . 6

Q3 포물선의 접선 순수수학 . . . 10

Q4 이차식과 등비급수 순수수학 . . . 14

Q5 미분을 이용한 최적화 순수수학 . . . 19

Q6 적분과 부호 변화 순수수학 . . . 23

Q7 나폴레옹 정리 순수수학 . . . 27

Q8 점화식과 수학적 귀납법 순수수학 . . . 31

Q9 포물체 운동 역학 . . . 34

Q10 연쇄 충돌 역학 . . . 38

Q11 마찰이 있는 강체의 정역학 역학 . . . 43

Q12 기댓값과 조건부 확률과 통계 . . . 47

Q13 확률의 점화식 확률과 통계 . . . 51

STEP II

Q1 점화 공식 순수수학 . . . 55

Q2 주기수열 순수수학 . . . 59

Q3 곡선 그리기 순수수학 . . . 63

Q4 코시-슈바르츠 적분 부등식 순수수학 . . . 69

Q5 포물선의 법선과 원 순수수학 . . . 72

Q6 부등식과 수학적 귀납법 순수수학 . . . 76

Q7 로그 미분법 순수수학 . . . 80

Q8 벡터와 수심 순수수학 . . . 84

Q9 마찰과 강체 역학 . . . 87

Q10 저항에 대해 한 일 역학 92
Q11 포물체와 에너지 역학 96
Q12 푸아송 과정 확률과 통계 100
Q13 기댓값과 무한급수 확률과 통계 104

STEP III

Q1 망원급수를 이용한 한계 순수수학 108
Q2 복소평면에서의 회전 순수수학 111
Q3 다항식의 근 순수수학 115
Q4 함수의 기하평균 순수수학 119
Q5 극곡선 순수수학 123
Q6 치환적분 순수수학 127
Q7 타원의 접선 순수수학 131
Q8 부분합 공식(아벨 합) 순수수학 136
Q9 연결된 입자와 에너지 역학 140
Q10 회전하는 강체 역학 144
Q11 운동량 보존 역학 149
Q12 이산 결합 분포 확률과 통계 153
Q13 기댓값과 분산 확률과 통계 156

풀이

STEP I 2017, 문제 1

순수수학 • 치환적분

> **STEP I 2017, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/17-s1-q1

핵심 아이디어

이 피적분함수(integrand)들은 삼각함수 분수를 정리하고 나면 모두 사실상 $f'(x)/f(x)$ 꼴(마지막 경우에는 $f'(x)/f(x)^2$ 꼴)이다. $x\sin x+\cos x$의 도함수(derivative)는 두 $\sin x$ 항이 상쇄되기 때문에 유난히 깔끔하며, 나머지 치환들도 같은 상쇄를 바탕으로 만들어져 있다. 따라서 계획은 다음과 같다. 각 피적분함수를 sin과 cos(또는 sec와 tan)으로 다시 쓰고, 도함수가 분자와 일치하는 분모를 찾아낸 다음, 치환(substitution)한다.

풀이

소문항 (i)

$u=x\sin x+\cos x$로 두면, 곱의 미분법(product rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x.$$

이제 피적분함수의 분자와 분모에 $\cos x$를 곱하면

$$\frac{x}{x\tan x+1}=\frac{x\cos x}{x\sin x+\cos x}.$$

분자가 정확히 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$이므로 $x\cos x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$이고

$$\int\frac{x}{x\tan x+1}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u=\ln|u|+C=\ln|x\sin x+\cos x|+C.$$

두 번째 적분에서는 $\cos x$ 대신 $\sin x$로 같은 일을 한다. 분자와 분모에 $\sin x$를 곱하면

$$\frac{x}{x\cot x-1}=\frac{x\sin x}{x\cos x-\sin x}.$$

$v = x\cos x - \sin x$로 두자. 그러면

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \cos x - x\sin x - \cos x = -x\sin x,$$

이므로 분자는 $-\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$이고

$$\int \frac{x}{x\cot x - 1}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{v}\,\mathrm{d}v = -\ln|x\cos x - \sin x| + C.$$

음의 부호를 빠뜨리지 않도록 주의한다. 이 부호는 $\cos x$를 미분할 때 생긴 것이다.

소문항 (ii)

첫 번째 피적분함수는 이미 시도해 볼 만한 분모를 가지고 있다. $w = x\sec^2 x - \tan x$로 두자. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec^2 x = 2\sec^2 x\tan x$를 이용하면

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = \sec^2 x + 2x\sec^2 x\tan x - \sec^2 x = 2x\sec^2 x\tan x.$$

이번에도 불필요한 항들이 상쇄되고, 분자는 $\frac{1}{2}\,\mathrm{d}w/\mathrm{d}x$이다. 따라서

$$\int \frac{x\sec^2 x\,\tan x}{x\sec^2 x - \tan x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{w}\,\mathrm{d}w = \tfrac{1}{2}\ln|x\sec^2 x - \tan x| + C.$$

생각해 보기 마지막 적분에는 sec도 tan도 들어 있지 않다. 이것을 $w = x\sec^2 x - \tan x$와 어떻게 연결할 수 있을까?

분모의 괄호에서 $\cos^2 x$를 묶어 내면

$$x - \sin x\cos x = \cos^2 x\left(x\sec^2 x - \frac{\sin x}{\cos x}\right) = \cos^2 x\,(x\sec^2 x - \tan x) = w\cos^2 x.$$

그러므로 $(x - \sin x\cos x)^2 = w^2\cos^4 x$이고

$$\frac{x\sin x\cos x}{(x-\sin x\cos x)^2} = \frac{x\sin x\cos x}{w^2\cos^4 x} = \frac{x\sec^2 x\tan x}{w^2},$$

이다. $\dfrac{\sin x\cos x}{\cos^4 x} = \dfrac{\sin x}{\cos x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}$이기 때문이다. 분자는 다시 $\frac{1}{2}\,\mathrm{d}w/\mathrm{d}x$이므로, 같은 치환으로

$$\begin{aligned}\int \frac{x\sin x\cos x}{(x-\sin x\cos x)^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{w^2}\,\mathrm{d}w = -\frac{1}{2w} + C\\ &= -\frac{1}{2(x\sec^2 x - \tan x)} + C = -\frac{\cos^2 x}{2(x-\sin x\cos x)} + C,\end{aligned}$$

를 얻는다. 여기서 마지막 단계는 분자와 분모에 $\cos^2 x$를 곱한 것이다. 배각(double angle) 공식을 선호한다면 이것은 $-\dfrac{\cos^2 x}{2x - \sin 2x} + C$이다.

검산

- 각 답을 미분하여 피적분함수가 다시 나오는지 확인한다. 마지막 답의 경우, $-\cos^2 x/\big(2(x-\sin x\cos x)\big)$에 몫의 미분법(quotient rule)을 적용할 때 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x-\sin x\cos x) = 1-\cos 2x = 2\sin^2 x$를 이용하며, $\sin^2 x\cos^2 x$ 항들이 깔끔하게 정리된다.
- 수치 계산: 구간 $[0.3, 1.2]$에서 첫 번째 적분의 값은 $0.34953\ldots$이고, $\ln|x\sin x+\cos x|$도 같은 양만큼 변한다. 같은 구간에서 마지막 적분의 값은 $25.7364\ldots$로, $-\cos^2 x/\big(2(x-\sin x\cos x)\big)$와 일치한다. 네 답 모두 이런 방식으로 컴퓨터를 이용해 확인하였다.

흔한 실수

- $\tan x$나 $\cot x$를 먼저 정리하지 않고 치환하는 것: 분자는 전체에 $\cos x$나 $\sin x$를 곱한 뒤에야 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$와 일치한다.
- 소문항 (i)의 두 번째 적분에서 음의 부호를 빠뜨리거나, 소문항 (ii)에서 인수 $\frac{1}{2}$을 빠뜨리는 것.
- 습관적으로 마지막 적분에서 로그를 떠올리는 것: $1/w^2$을 적분하면 $-1/w$이다.

STEP 너머

여기서 쓰인 요령은 역설계(reverse-engineering)이다. 상쇄가 일어난 뒤 분모의 도함수가 정확히 분자가 되도록 치환을 고르는 것이다. 그 배경에는 $\int f'/f = \ln|f|$, 즉 로그 도함수(logarithmic derivative)라는 사실이 있으며, 이는 복소해석학(complex analysis)에서(함수의 영점 개수 세기) 그리고 미분방정식(differential equations)에서 적분인자(integrating factor)로 다시 등장한다. 많은 STEP 적분 문제는 신중하게 고른 함수를 미분한 다음 답을 감추는 방식으로 만들어진다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제집)에 이런 문제를 알아보는 연습이 많이 실려 있다.

풀이

STEP I 2017, 문제 2

순수수학 • 부등식의 적분

> **STEP I 2017, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/17-s1-q2

핵심 아이디어

적분(integration)은 부등식(inequality)을 보존한다. 즉 $a < b$인 구간(interval) $[a, b]$에서 $f(t) \leq g(t)$이면 $\int_a^b f \leq \int_a^b g$이다. 주의할 점은 적분 방향뿐인데, $x < 1$일 때는 구간 $[1, x]$가 거꾸로 진행하므로 부등호의 방향이 바뀐다. 마지막 소문항에서도 같은 아이디어를 다시 쓴다. 음이 아닌(non-negative) 함수를 1부터 y까지 적분하면 그 값의 부호는 $y - 1$의 부호와 같고, 바로 이 부호를 알아야 안전하게 나눌 수 있다.

풀이

소문항 (i)

$x \geq 1$인 경우. $1 \leq t \leq x$에서 $\frac{1}{t} \leq 1$이고 구간이 정방향으로 진행하므로

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq \int_1^x 1\,\mathrm{d}t, \qquad \text{즉} \qquad \ln x \leq x - 1.$$

$0 < x \leq 1$인 경우. 이번에는 $x \leq t \leq 1$에서 적분하는데, 여기서 $t \leq 1$이므로 $\frac{1}{t} \geq 1$이다. 따라서

$$\int_x^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \geq \int_x^1 1\,\mathrm{d}t, \qquad \text{즉} \qquad -\ln x \geq 1 - x.$$

양변에 -1을 곱하면 부등호의 방향이 바뀌어 다시 $\ln x \leq x - 1$을 얻는다. 그러므로 $(*)$는 모든 $x > 0$에 대하여 성립한다.

소문항 (ii)

$x \geq 1$인 경우. $t \geq 1$이면 $\frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{t}$이므로

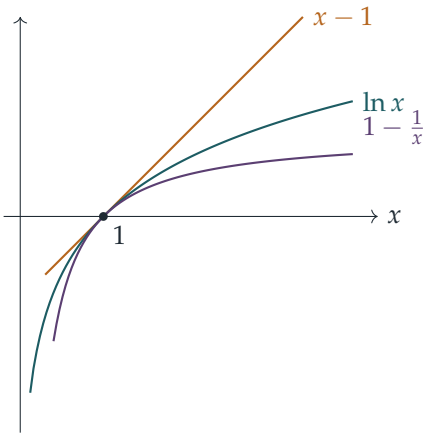
$$\int_1^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \leq \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t, \qquad \text{즉} \qquad 1 - \frac{1}{x} \leq \ln x.$$

$0 < x \leq 1$인 경우. $x \leq t \leq 1$에서는 부등호의 방향이 바뀌어 $\frac{1}{t^2} \geq \frac{1}{t}$이다($t \leq 1$의 양변에 양수 $\frac{1}{t^2}$을 곱한다). 구간 $[x, 1]$에서 적분하면

$$\frac{1}{x} - 1 \geq -\ln x,$$

이고, 양변에 -1을 곱하면 $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$를 얻는다. 그러므로 $(**)$는 모든 $x > 0$에 대하여 성립한다.

(다른 방법으로, $(**)$는 $(*)$에서 곧바로 나온다. $(*)$의 x 자리에 $1/x$를 대입하면 $-\ln x \leq \frac{1}{x} - 1$이다.)



세 곡선은 모두 $x = 1$에서 접하고, 그 점에서 각각의 기울기(gradient)는 1이다. $\ln x$는 나머지 두 곡선 사이에 끼어 있다.

소문항 (iii)

$(*)$와 $(**)$는 모두 어떤 함수가 $x > 0$에서 음이 아니라는 뜻이다.

$$f(x) = x - 1 - \ln x \geq 0, \qquad g(x) = \ln x - 1 + \frac{1}{x} \geq 0.$$

이런 함수를 적분할 때 쓰이는 간단한 사실 하나가 필요하다.

생각해 보기 모든 $x > 0$에 대하여 $h(x) \geq 0$이면, $y < 1$일 때 $\int_1^y h(x)\,\mathrm{d}x$의 부호는 무엇인가?

$y > 1$이면 정방향 구간에서의 적분이므로 그 값은 ≥ 0이다. $0 < y < 1$이면 $\int_1^y h = -\int_y^1 h \leq 0$이다. 어느 경우든

$$(y-1)\int_1^y h(x)\,\mathrm{d}x \;\geq\; 0.$$

이 사실 덕분에 $y > 1$인 경우와 $0 < y < 1$인 경우를 한꺼번에 다룰 수 있다.

$\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - x$가 필요하다($u = \ln x$로 두고 부분적분(integration by parts)한다). 따라서

$$\int_1^y \ln x\,\mathrm{d}x = y\ln y - y + 1.$$

오른쪽 부등식. f를 적분하면

$$\begin{aligned}\int_1^y f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{(y-1)^2}{2} - (y\ln y - y + 1) = \frac{(y-1)^2}{2} + (y-1) - y\ln y \\ &= \frac{(y-1)(y+1)}{2} - y\ln y.\end{aligned}$$

위의 사실에 의하여

$$(y-1)\left[\frac{(y-1)(y+1)}{2} - y\ln y\right] \geq 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{(y-1)^2(y+1)}{2} \geq y(y-1)\ln y.$$

$y > 0$이고 $y \neq 1$이므로 $y(y-1)^2$은 양수이고, 이것으로 나누어도 부등호의 방향은 그대로이다.

$$\frac{y+1}{2y} \geq \frac{\ln y}{y-1}.$$

왼쪽 부등식. g를 적분하면

$$\int_1^y g(x)\,\mathrm{d}x = (y\ln y - y + 1) - (y-1) + \ln y = (y+1)\ln y - 2(y-1).$$

위의 사실에 의하여

$$(y-1)\left[(y+1)\ln y - 2(y-1)\right] \geq 0 \quad\Longrightarrow\quad (y+1)(y-1)\ln y \geq 2(y-1)^2.$$

이제 $(y+1)(y-1)^2 > 0$으로 나누면

$$\frac{\ln y}{y-1} \geq \frac{2}{y+1}.$$

두 결과를 합치면

$$\frac{2}{y+1} \leq \frac{\ln y}{y-1} \leq \frac{y+1}{2y} \qquad \text{단, } y > 0,\ y \neq 1,$$

이므로 증명이 끝난다.

생각해 보기 왜 곧바로 나누지 않고, 나누기 전에 먼저 $y-1$을 곱하는가?

부등식을 $y-1$로 나누면 $y<1$일 때 부등호의 방향이 바뀌므로 두 경우로 나누어야 한다. 먼저 $y-1$을 곱하면 $(y-1)^2$을 포함한 식이 나오는데, 이 값은 1의 어느 쪽에 있든 양수이므로 하나의 논증으로 두 경우를 모두 처리할 수 있다.

검산

- $y=2$일 때: $\frac{2}{3}\approx 0.667 \le \ln 2 \approx 0.693 \le \frac{3}{4}=0.75$.
- $y=\frac{1}{2}$일 때: $\frac{4}{3}\approx 1.333 \le 2\ln 2 \approx 1.386 \le \frac{3}{2}$.
- $y\to 1$일 때 세 식은 모두 1로 수렴하며(가운데 식은 1에서 ln의 기울기이다), 이는 그림에서 곡선들이 접하는 것과 일치한다.
- y를 $1/y$로 바꾼 뒤 양변을 y로 나누면 정확히 같은 부등식 쌍이 다시 나온다. 따라서 $0<y<1$에 대한 결과는 $y>1$에 대한 결과와 동치이다.

흔한 실수

- $x<1$일 때 구간 $[1,x]$에서 적분하면서 부등호의 방향이 바뀐다는 것을 알아채지 못한다.
- $y-1$의 부호를 생각하지 않고 $y-1$로 나누어, 소문항 (iii)을 $y>1$인 경우에만 증명한다.

STEP 너머

가운데 양 $\dfrac{\ln y}{y-1}$은 1과 y의 **로그 평균**(*logarithmic mean*)의 역수(reciprocal)이므로, 왼쪽 부등식은 로그 평균이 산술평균(arithmetic mean) $\frac{1+y}{2}$ 이하라는 뜻이다. 사실 로그 평균은 기하평균(geometric mean) $\sqrt{y}$ 이상이기도 하며, 이로부터 $\frac{\ln y}{y-1} \le \frac{1}{\sqrt{y}}$를 얻는데, 이는 $\frac{y+1}{2y}$보다 더 정밀한 상계이다. 부등식을 적분하는 기법과 그것을 정당화하는 적분의 단조성(monotonicity)은 대학 첫 해석학(analysis) 강의의 기본 도구이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 적분을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP I 2017, 문제 3

순수수학 • 포물선의 접선

> **STEP I 2017, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/17-s1-q3

핵심 아이디어

여기서 다루는 모든 것은 매개변수(parameter) p와 q로 나타낼 수 있으므로, R, S, T의 좌표를 구한 다음 두 넓이를 직접 계산하는 것이 계획이다. 삼각형 RST는 변 ST가 y축 위에 놓여 있어서 특히 다루기 쉽다. 높이가 단순히 R에서 y축까지의 거리이기 때문이다. 한 꼭짓점이 원점에 있는 삼각형 OPQ의 경우에는 공식 $\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$를 쓰면 한 줄로 끝난다.

풀이

P에서의 접선

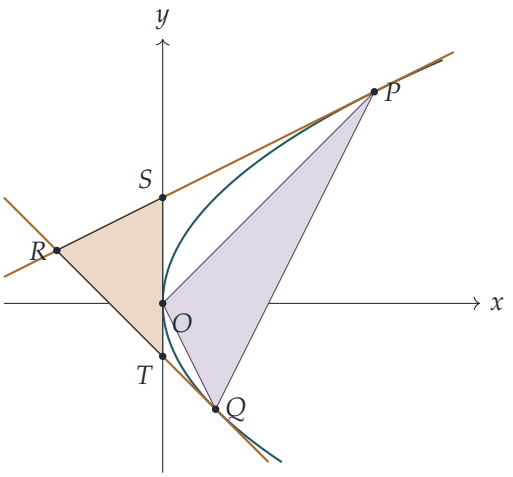
$y^2 = 4ax$를 음함수 미분(implicit differentiation)하면 $2y\,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4a$이므로 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2a}{y}$이다. $y = 2ap \neq 0$인 점 P에서($a, p > 0$이므로) 기울기는

$$\frac{2a}{2ap} = \frac{1}{p}.$$

이다. 따라서 $P(ap^2, 2ap)$를 지나는 접선(tangent)은

$$y - 2ap = \frac{1}{p}\left(x - ap^2\right) \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{1}{p}\,x - ap + 2ap = \frac{1}{p}\,x + ap,$$

이고, 이것이 구하려던 식이다. 같은 방법으로, Q는 p 대신 q를 넣은 같은 꼴이므로($q \neq 0$) Q에서의 접선은 $y = \dfrac{1}{q}\,x + aq$이다.



그림은 $a = 1$, $p = 2$, $q = -1$인 경우이다. R은 y축의 왼쪽에 있고, 높이로 보면 S와 T 사이에 있다.

점 R, S, T

각 접선에 $x = 0$을 대입하면

$$S = (0,\, ap), \qquad T = (0,\, aq).$$

이다. R에서 두 접선이 만나므로

$$\frac{x}{p} + ap = \frac{x}{q} + aq \quad \Longrightarrow \quad x\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) = a(q-p) \quad \Longrightarrow \quad x \cdot \frac{q-p}{pq} = a(q-p).$$

이다. $p > 0 > q$이므로 $q - p \neq 0$이고, 따라서 이것으로 나눌 수 있다(두 접선이 평행하지 않아 R이 존재하는 이유도 이것이다). 그러므로 $x = apq$이고, $y = \dfrac{apq}{p} + ap = a(p+q)$이다.

$$R = \big(apq,\ a(p+q)\big).$$

> **생각해 보기** R은 y축의 어느 쪽에 있는가? 그리고 그것이 넓이를 구할 때 왜 중요한가?

$p > 0$이고 $q < 0$이므로 곱 pq는 음수이고, 따라서 R의 x좌표 apq는 음수이다. 즉 R은 y축의 왼쪽에 있고, 축까지의 거리는 $a|pq| = -apq$이다. 넓이는 양수여야 하므로, apq를 그대로 "높이"라고 쓰지 말고 부호를 꼼꼼히 따져야 한다.

삼각형 RST의 넓이

ST를 밑변으로 잡는다. 밑변은 y축 위에 있고 길이는 $ap - aq = a(p-q)$이며, $p > q$이므로 양수이다. R에서 y축에 내린 수선의 길이, 즉 높이는 $-apq$이다. 따라서

$$[RST] = \tfrac{1}{2} \cdot a(p-q) \cdot (-apq) = -\tfrac{1}{2}a^2pq(p-q).$$

삼각형 OPQ의 넓이

꼭짓점이 O, (x_1, y_1), (x_2, y_2)인 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$이다. $P(ap^2, 2ap)$, $Q(aq^2, 2aq)$를 대입하면

$$x_1y_2 - x_2y_1 = ap^2 \cdot 2aq - aq^2 \cdot 2ap = 2a^2pq(p-q).$$

이다. 여기서 $a^2 > 0$, $pq < 0$, $p - q > 0$이므로 이 값은 음수이고,

$$[OPQ] = \tfrac{1}{2} \cdot \left(-2a^2pq(p-q)\right) = -a^2pq(p-q).$$

결론

두 결과를 비교하면

$$[OPQ] = -a^2pq(p-q) = 2\left(-\tfrac{1}{2}a^2pq(p-q)\right) = 2\,[RST],$$

이므로, 삼각형 OPQ의 넓이는 삼각형 RST의 넓이의 두 배이다. 이것으로 증명이 끝난다.

검산

그림의 경우인 $a = 1, p = 2, q = -1$에서는 $P(4,4), Q(1,-2), R(-2,1), S(0,2), T(0,-1)$을 얻는다. 그러면 $[RST] = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3$이고 $[OPQ] = \frac{1}{2}|4 \cdot (-2) - 1 \cdot 4| = 6$이므로 정확히 두 배이다. R이 두 접선의 방정식을 모두 만족하는지도 확인할 수 있다. $1 = \frac{-2}{2} + 2$이고 $1 = \frac{-2}{-1} - 1$이다. 이 등식은 a, p, q를 무작위로 2000번 골라 컴퓨터로 정확한 산술(exact arithmetic)을 써서 확인하기도 했다.

흔한 실수

- 삼각형 RST의 높이를 apq로 쓰는 것. R은 y축을 기준으로 곡선의 반대편에 있으므로 이 값은 음수이다.
- $\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$에서 절댓값(modulus)을 빠뜨려 OPQ의 넓이가 음수로 나오는 것.
- $q - p$가 0이 아닌 이유를 밝히지 않고 이것으로 나누는 것.

STEP 너머

매개변수 표현(parametrisation) $(at^2, 2at)$를 쓰면 포물선(parabola) 위의 모든 점이 하나의 수 t에 대응하고, $t = p$와 $t = q$에서의 두 접선은 언제나 $(apq, a(p+q))$에서 만난다. 즉 매개변수의 "곱"과 "합"으로 정해지는 점이다. 이와 같은 결과는 여기서 본 2 : 1 넓이 비와 함께, 접선과 현을 매개변수와 행렬식(determinant)으로 연구하는 이차곡선(conic)의 고전적인 사영기하학(projective geometry)의 일부이다. 삼각형 넓이의 행렬식 공식은 넓이를 부호가 있는 선형적인 양으로 보는 관점의 출발점이 되며, 이 관점은 Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수 입문)에서 전개된다. 또한 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제집)에는 매개변수 곡선을 다루는 STEP 형식의 연습 문제가 더 실려 있다.

풀이

STEP I 2017, 문제 4

순수수학 • 이차식과 등비급수

> **STEP I 2017, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/17-s1-q4

핵심 아이디어

모든 것은 열린구간(open interval) $(-1,1)$ 안에서 몇 개의 r 값이 주어진 p(또는 q) 값을 만드는지에 달려 있다. 이것은 $-1 < r < 1$로 제한된 포물선(parabola)에 관한 질문이다. 수평선은 이 포물선과 한 번 또는 두 번 만나거나 전혀 만나지 않으며, 어느 경우인지는 그래프를 그려 보면 알 수 있다. r를 알면 합이 정해지고, 합은 r의 일대일(one-to-one) 함수이므로 서로 다른 두 r 값은 언제나 서로 다른 두 합을 준다. 합들이 만족하는 방정식을 구하려면 r를 합으로 나타낸 뒤 대입하면 된다.

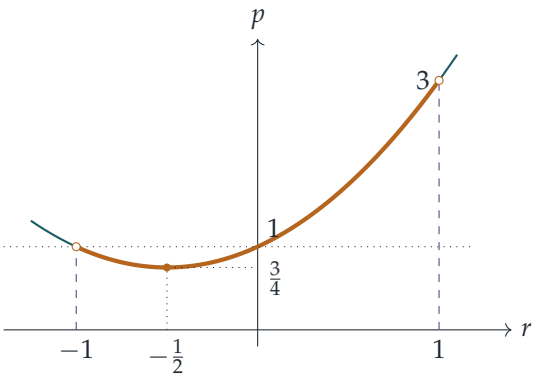
풀이

소문항 (i)

완전제곱식(completing the square)으로 고치면

$$1 + r + r^2 = \left(r + \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{3}{4},$$

이므로 그래프는 최솟점이 $\left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}\right)$인 포물선이다. 이 포물선은 $(-1,1)$, $(0,1)$, $(1,3)$을 지난다.



$-1 < r < 1$(굵은 호)에서 이 함수는 1에서부터($r = -1$이 제외되므로 이 값은 취하지 않는다) 감소하여 $r = -\frac{1}{2}$에서 최솟값 $\frac{3}{4}$에 이르고, 그 뒤 3을 향해 증가한다($r = 1$이 제외되므로 이 값도 취하지 않는다). 따라서

$$\tfrac{3}{4} \le p < 3.$$

$1 < p < 3$일 때. 이 p를 주는 r 값들은

$$r^2 + r + (1 - p) = 0.$$

의 근(root)이다. 두 근의 곱이 $1 - p < 0$이므로 양의 근 하나와 음의 근 하나가 있다. 두 근의 합이 -1이므로 음의 근은 -1에서 양의 근을 뺀 값이고, 이는 -1보다 작으므로 허용되지 않는다. 양의 근은

$$r = \frac{-1 + \sqrt{4p - 3}}{2},$$

이고, $1 < 4p - 3 < 9$이므로 $0 < r < 1$이 되어 허용된다. (그래프에서 보면, 높이 $p \in (1, 3)$인 수평선은 굵은 호의 증가하는 부분 $0 < r < 1$에서만 만난다.) 따라서 p가 r를 유일하게 결정하고, 그러므로 $S = 1/(1 - r)$도 유일하게 결정된다.

$\frac{3}{4} < p < 1$일 때. 이제 판별식(discriminant) $1 - 4(1 - p) = 4p - 3$이 양수이므로 이차방정식(quadratic)은 서로 다른 두 실근을 가진다. 두 근의 곱 $1 - p$는 양수이고 합은 -1이므로 두 근은 모두 음수이다. 각 근은 -1에서 다른 근을 뺀 값이고 다른 근이 음수이므로, 각 근은 -1보다 크다. 따라서 두 근은 모두 $(-1, 0)$에 있고 둘 다 허용된다.

> **생각해 보기** r 값이 두 개인 것은 좋다. 그런데 왜 이들이 **서로 다른** S 값을 주어야 하는가?

$S = \dfrac{1}{1 - r}$는 역으로 풀 수 있기 때문이다: $r = 1 - \dfrac{1}{S}$. 따라서 서로 다른 r 값은 서로 다른 S 값을 주므로, 가능한 S 값은 정확히 두 개이다.

이들이 만족하는 방정식을 구하기 위해 $u = 1/S$로 두고 $r = 1 - u$를 $r^2 + r + 1 - p = 0$에 대입하면

$$(1-u)^2 + (1-u) + 1 - p = 0$$
$$u^2 - 3u + (3-p) = 0.$$

$u = 1/S$를 넣고 (0이 아닌) S^2을 곱하면

$$(3-p)S^2 - 3S + 1 = 0,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. 두 S 값은 모두 허용되는 근 r에서 나온 것이므로 둘 다 이 방정식을 만족한다.

소문항 (ii)

다시 완전제곱식으로 고치면

$$q = 1 + 2r + 3r^2 = 3\left(r + \tfrac{1}{3}\right)^2 + \tfrac{2}{3}.$$

최솟값은 $r = -\frac{1}{3}$에서 $\frac{2}{3}$이고, $r = -1$에서의 값은 2, $r = 1$에서의 값은 6이다. 따라서 $-1 < r < 1$에서

- 감소하는 부분 $-1 < r \le -\frac{1}{3}$에서 q는 $\left[\frac{2}{3}, 2\right)$의 각 값을 정확히 한 번씩 취한다.
- 증가하는 부분 $-\frac{1}{3} \le r < 1$에서 q는 $\left[\frac{2}{3}, 6\right)$의 각 값을 정확히 한 번씩 취한다.

두 부분은 점 $r = -\frac{1}{3}$만 공유한다. 따라서 q의 값은

- $q = \frac{2}{3}$일 때(즉 $r = -\frac{1}{3}$) 또는 $2 \le q < 6$일 때(증가하는 부분에서만) 정확히 하나의 r에서 나온다.
- $\frac{2}{3} < q < 2$일 때 정확히 두 개의 r 값에서 나온다(각 부분에서 하나씩).
- 그 밖의 경우에는 어떤 r에서도 나오지 않는다.

예를 들어 $q = 2$일 때 방정식 $3r^2 + 2r - 1 = 0$은 $(3r-1)(r+1) = 0$으로 인수분해되고, 근 $r = -1$은 제외되므로 $r = \frac{1}{3}$만 남는다.

앞에서와 마찬가지로 T는 r를 결정한다. $1 - r > 0$이므로 $1 - r = 1/\sqrt{T}$이다. 따라서 서로 다른 r는 서로 다른 T를 준다. 그러므로

$$T\text{는 다음 경우에 유일하게 결정된다: } q = \tfrac{2}{3} \text{ 또는} 2 \le q < 6,$$

이고

$$T\text{의 가능한 값이 두 개인 경우: } \tfrac{2}{3} < q < 2.$$

이차방정식. $u = 1 - r = 1/\sqrt{T} > 0$으로 두고 $r = 1 - u$라 쓰자. 그러면

$$q = 1 + 2(1-u) + 3(1-u)^2 = 3u^2 - 8u + 6.$$

$u^2 = 1/T$이므로 이 식은 $\dfrac{3}{T} + 6 - q = \dfrac{8}{\sqrt{T}}$가 된다. 양변에 T를 곱하면

$$(6-q)T + 3 = 8\sqrt{T}.$$

이것은 이미 $\sqrt{T}$에 관한 이차방정식이다. T 자체에 관한 이차방정식을 얻으려면 양변을 제곱한다.

$$(6-q)^2T^2 + 6(6-q)T + 9 = 64T,$$

즉

$$(6-q)^2\,T^2 - 2(3q+14)\,T + 9 = 0.$$

가능한 두 T 값은 모두 이 방정식을 만족한다. 여기서는 제곱 때문에 엉뚱한 근이 끼어들 수 없다. $q < 6$이고 $T > 0$이면 좌변 $(6-q)T + 3$은 양수이므로, 다른 경우인 $(6-q)T + 3 = -8\sqrt{T}$는 $T > 0$인 해를 갖지 않는다. 또한 T에 관한 이차방정식은 두 근의 곱 $9/(6-q)^2$이 양수이고 합도 양수이므로, 두 근은 모두 양수이다. 따라서 이 방정식의 두 근은 정확히 두 T 값이다.

검산

- $p = \frac{7}{8}$로 두자. 그러면 $r^2 + r + \frac{1}{8} = 0$에서 $r = \frac{-2\pm\sqrt{2}}{4}$를 얻고, 둘 다 $(-1, 0)$에 있다. 이에 대응하는 합 $S \approx 0.873$과 $S \approx 0.540$은 $\frac{17}{8}S^2 - 3S + 1 = 0$을 만족하며, 이 방정식의 두 근의 합은 $\frac{24}{17} \approx 1.412$, 곱은 $\frac{8}{17}$이다.
- $q = 1$로 두자. 그러면 $3r^2 + 2r = 0$에서 $r = 0$ 또는 $r = -\frac{2}{3}$이므로 $T = 1$ 또는 $T = \frac{9}{25}$이다. 이차방정식은 $25T^2 - 34T + 9 = (T-1)(25T-9)$가 되어 예상과 일치한다.
- 경계 $q = \frac{2}{3}$에서 이차방정식은 $\frac{256}{9}T^2 - 32T + 9 = 0$이고, 판별식은 $1024 - 1024 = 0$이다. 이 방정식은 중근 $T = \frac{9}{16} = 1/(1+\frac{1}{3})^2$을 가지며, 이는 유일한 값 $r = -\frac{1}{3}$과 맞아떨어진다.
- 각 범위에서 p와 q의 무작위 값 수천 개를 컴퓨터로 확인하였다. 근의 개수와 두 이차방정식이 모두 일치한다.

흔한 실수

- $r = \pm 1$이 제외된다는 것을 잊는 실수. 그러면 $p = 1$을 "값이 두 개"인 경우에 잘못 넣고, $q = 2$를 "유일한" 경우에서 잘못 빼게 된다.

- T가 역시 유일하게 결정되는 고립된 값 $q = \frac{2}{3}$(꼭짓점(vertex))을 빠뜨리는 실수.
- 새로운 근이 끼어들지 않았는지 확인하지 않고 제곱하는 실수.

STEP 너머

이 문제는 사실 함수가 언제 역함수를 가지는지(invertible)에 관한 것이다. 사상 $r \mapsto p$는 정의역(domain)의 일부에서는 일대일이고 나머지에서는 이대일이며, 답은 식뿐 아니라 정의역에도 달려 있다. 급수 $\sum r^n$과 $\sum nr^{n-1}$은 멱급수(power series)와 그것을 항별로 미분한 것이다. 수렴반지름(radius of convergence) 안에서 항별 미분이 허용되는 이유는 대학 1학년 해석학(analysis)의 표준적인 결과이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 멱급수와 고른수렴(uniform convergence)을 꼼꼼하면서도 읽기 쉽게 다룬다.

풀이

STEP I 2017, 문제 5

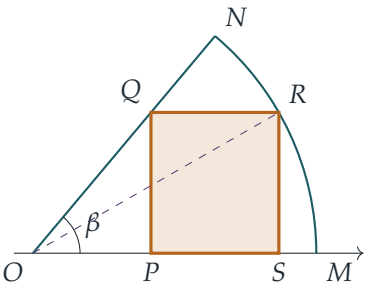
순수수학 • 미분을 이용한 최적화

> **STEP I 2017, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/17-s1-q5

핵심 아이디어

꼭짓점의 위치를 정하고 나면 모든 것이 변수 x 하나로 결정된다. Q는 직선 $y = x\tan\beta$ 위에서 P의 바로 위에 있고, R은 원 위에서 Q와 같은 높이에 있다. 피타고라스 정리(Pythagoras' theorem)로 s를 x로 나타내면, 넓이는 미분하기만 하면 되는 평범한 일변수 함수가 된다. 마지막의 각에 대한 조건은 tan의 반각 공식(half-angle formula)에서 바로 나온다.

풀이



넓이

$PQRS$는 P와 S가 x축 위에 있는 직사각형이므로 변 PQ와 SR은 수직이다. 따라서 Q의 x좌표는 x이다. 이 점은 직선 $y = x\tan\beta$인 ON 위에 있으므로 $Q = (x, x\tan\beta)$이고, $R = (s, x\tan\beta)$이다. 직사각형의 가로 길이는 $PS = s - x$이고(S가 P보다 O에서 더 멀리 있으므로 양수이다) 세로 길이는 $PQ = x\tan\beta$이므로

$$A = x(s - x)\tan\beta,$$

이고, 이것이 구하는 식이다.

s와 $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x}$ 구하기

R이 원 위에 있으므로 $OR = a$이고, 따라서 $s^2 + x^2\tan^2\beta = a^2$이다. $s > 0$이므로

$$s = \sqrt{a^2 - x^2\tan^2\beta}.$$

$s^2 = a^2 - x^2\tan^2\beta$를 음함수 미분(implicit differentiation)하면 $2s\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = -2x\tan^2\beta$이므로 $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{x\tan^2\beta}{s}$이다. 이제 $A = (xs - x^2)\tan\beta$로 쓰고 xs에 곱의 미분법(product rule)을 적용하면

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} &= \left(s + x\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} - 2x\right)\tan\beta \\ &= (s - 2x)\tan\beta - \frac{x^2}{s}\tan^3\beta,\end{aligned}$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

최대 넓이

먼저 x의 범위를 살펴보자. x가 0에서부터 커지면 Q는 ON을 따라 올라가고 R은 호를 따라 N 쪽으로 움직인다. R이 N에 닿을 때, 즉 $x = a\cos\beta$일 때 직사각형은 수직인 선분으로 줄어든다(이때 $s = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2\beta} = a\cos\beta = x$이다). 따라서 $0 < x < a\cos\beta$이고, A는 $[0, a\cos\beta]$에서 연속인 함수(continuous function)로서 양 끝에서 $A = 0$이고 그 사이에서 $A > 0$이다. 그러므로 최댓값은 구간 내부의 정류점(stationary point)에서 나타난다.

$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} = 0$으로 놓고 양변을 $\tan\beta > 0$으로 나눈 뒤 $s > 0$을 곱하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}s^2 - 2xs &= x^2\tan^2\beta \\ s^2 - 2xs + x^2 &= x^2(1 + \tan^2\beta) = x^2\sec^2\beta \\ (s - x)^2 &= x^2\sec^2\beta.\end{aligned}$$

> ? **생각해 보기** 어느 제곱근을 택해야 하며, 이것이 최댓값임을 어떻게 알 수 있을까?

$s - x$와 $x\sec\beta$는 모두 양수이므로($0 < \beta < \frac{\pi}{2}$이기 때문이다) $s - x = x\sec\beta$이다. 다른 근을 택하면 $s - x$가 음수가 된다. 따라서 $0 < x < a\cos\beta$에서 정류점은 정확히 하나뿐이며, 그 점은

$$s = x(1 + \sec\beta),$$

로 주어진다. 앞 문단의 논의에 따라 이 점에서 넓이가 최대가 되어야 한다.

이 넓이를 구하기 위해 $s^2 + x^2\tan^2\beta = a^2$에 대입한다. $\tan^2\beta = \sec^2\beta - 1$을 이용하면

$$(1+\sec\beta)^2 + \tan^2\beta = 2\sec\beta + 2\sec^2\beta = 2\sec\beta\,(1+\sec\beta),$$

이므로

$$x^2 = \frac{a^2}{2\sec\beta\,(1+\sec\beta)} = \frac{a^2\cos^2\beta}{2(1+\cos\beta)}.$$

이 점에서 $s - x = x\sec\beta$이므로

$$A = x\cdot x\sec\beta\cdot\tan\beta = x^2\,\frac{\sin\beta}{\cos^2\beta} = \frac{a^2\sin\beta}{2(1+\cos\beta)}$$
$$= \frac{a^2\cdot 2\sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\beta}{2\cdot 2\cos^2\frac{1}{2}\beta} = \frac{1}{2}a^2\tan\frac{1}{2}\beta,$$

이다. 여기서 $\sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\beta$와 $1+\cos\beta = 2\cos^2\frac{1}{2}\beta$를 이용하였다.

각 ROS

직각삼각형 ORS에서 $\tan\angle ROS = \dfrac{SR}{OS} = \dfrac{x\tan\beta}{s}$이다. 최대일 때는 앞에서와 같은 두 반각 항등식에 의해

$$\tan\angle ROS = \frac{\tan\beta}{1+\sec\beta} = \frac{\sin\beta}{\cos\beta+1} = \tan\frac{1}{2}\beta,$$

이다. $\angle ROS$와 $\frac{1}{2}\beta$는 모두 tan가 일대일(one-to-one)인 구간 $(0, \frac{\pi}{2})$에 속하므로 $\angle ROS = \frac{1}{2}\beta$이다. 즉 최적의 직사각형에서 OR은 부채꼴(sector)을 이등분한다.

검산

- $a = 1$, $\beta = \frac{\pi}{3}$로 놓자. 그러면 $x^2 = \frac{1/4}{3} = \frac{1}{12}$, $s = 3x$이고 $A = x\cdot 2x\cdot\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{6} \approx 0.2887$인데, 이는 $\frac{1}{2}\tan\frac{\pi}{6}$와 같다. 무작위로 고른 여러 a와 β에 대해 x의 촘촘한 격자 위에서 컴퓨터로 탐색한 결과, 같은 최댓값과 같은 최적의 x를 얻었다.
- $\beta \to 0$이면 부채꼴이 납작하게 사라지고, 마땅히 그래야 하듯 $\frac{1}{2}a^2\tan\frac{1}{2}\beta \to 0$이다.
- 단위: A는 a^2에 순수한 수를 곱한 것이므로 넓이가 맞다.

흔한 실수

- s가 x에 따라 변한다는 사실을 잊고, s가 상수인 것처럼 $x(s-x)\tan\beta$를 미분하는 실수.
- $s - x = -x\sec\beta$까지 함께 택하거나, 정류점이 최댓값을 준다는 것을 정당화하지 않는 실수.

STEP 너머

OR이 부채꼴의 이등분선을 따라 놓인다는 깔끔한 답에는 멋진 설명이 있다. $R = (a\cos\theta, a\sin\theta)$라 하면 간단한 계산으로 $A = \frac{1}{2}a^2\big(\cos(2\theta - \beta) - \cos\beta\big) / \sin\beta$를 얻는데, 이는 $\theta = \frac{1}{2}\beta$일 때 최대임이 분명하다. 변수를 잘 고르면 최적화(optimisation) 문제가 거의 자명해질 수 있다. 대학에서는 여러 변수의 제약 최적화(constrained optimisation)를 배우는데, 그때는 s를 소거하는 대신 라그랑주(Lagrange) 승수법(Lagrange multipliers)을 써서 $s^2 + x^2\tan^2\beta = a^2$이라는 조건 아래에서 $x(s - x)$를 최대화할 수 있다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*에는 이런 정신의 문제가 훨씬 더 많이 실려 있다.

풀이

STEP I 2017, 문제 6

순수수학 • 적분과 부호 변화

STEP I 2017, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/17-s1-q6

핵심 아이디어

부호가 한 번도 바뀌지 않으면서 항등적으로 0이 아닌 연속함수(continuous function)의 적분(integral)은 0이 아니다. 이 함수는 어떤 작은 구간에서 0으로부터 떨어져 있고, 그 구간 하나만으로도 적분값에 무언가를 보태기 때문이다. 소문항 (i)은 이 사실을 엄밀하게 만들고, 소문항 (ii)와 (iii)은 이를 교묘하게 고른 함수에 적용한다. (ii)에서는 피적분함수(integrand) $(x-\alpha)^2 g(x)$가 g와 같은 부호를 가진다. (iii)에서는 부분적분(integration by parts)을 통해 h에 관한 정보가 h'에 대한 (ii)의 조건으로 바뀐다.

풀이

소문항 (i)

귀류법(proof by contradiction)으로, f가 $[0,1]$에서 양의 값과 음의 값을 모두 갖지는 **않는다**고 가정하자. 그러면 $[0,1]$의 모든 x에 대하여 $f(x) \geq 0$이거나, 그러한 모든 x에 대하여 $f(x) \leq 0$이다. 필요하면 f를 $-f$로 바꾸어(이렇게 해도 가정 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$과 결론은 모두 바뀌지 않는다) 구간 전체에서 $f(x) \geq 0$이라고 가정해도 된다.

어떤 $c \in [0,1]$에 대하여 $f(c) \neq 0$이라고 주어졌으므로 $f(c) > 0$이다. f가 c에서 연속이므로, $|x-c| < \delta$인 $[0,1]$의 모든 x에 대하여 $f(x) > \frac{1}{2} f(c)$가 되는 $\delta > 0$이 존재한다. 이 집합은 길이 $q-p$가 양수인 구간 $[p,q] \subseteq [0,1]$을 포함한다($0 < \eta < \delta$이고 $\eta \leq \frac{1}{2}$인 η를 잡아, $c \leq \frac{1}{2}$이면 $[c,\, c+\eta]$를, $c > \frac{1}{2}$이면 $[c-\eta,\, c]$를 택하면 된다). 모든 곳에서 $f \geq 0$이므로

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \;\geq\; \int_p^q f(x)\,\mathrm{d}x \;\geq\; \tfrac{1}{2} f(c)\,(q-p) \;>\; 0,$$

이고, 이는 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$에 모순이다. 따라서 f는 $[0,1]$에서 양의 값과 음의 값을 모두 갖

는다.

생각해 보기 "$f \geq 0$이고 $f(c) > 0$이므로 적분은 양수이다"만으로는 왜 충분하지 않은가?

함수는 한 점에서 양수이더라도 적분값에는 아무 영향이 없을 수 있다. 한 점에는 폭이 없기 때문이다. c에서의 양수성을 길이가 양수인 구간으로 퍼뜨려 주는 것이 바로 연속성이고, 이것이 적분값을 양수로 만든다.

소문항 (ii)

제곱을 전개하고 세 조건 $(*)$를 이용하면

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x-\alpha)^2 g(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 x^2 g(x)\,\mathrm{d}x - 2\alpha\int_0^1 x g(x)\,\mathrm{d}x + \alpha^2\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \alpha^2 - 2\alpha\cdot\alpha + \alpha^2\cdot 1 = 0.\end{aligned}$$

이제 귀류법으로, 모든 $x \in [0,1]$에 대하여 $g(x) \neq 0$이라고 가정하자. 그러면 g는 $[0,1]$에서 두 부호를 모두 가질 수 없다(그렇다면 문제 첫머리의 가정에 의해 어딘가에서 0이 되기 때문이다). 따라서 g는 구간 전체에서 순양수이거나 구간 전체에서 순음수이다.

$f(x) = (x-\alpha)^2 g(x)$라 하면 f는 연속이다. $(x-\alpha)^2 \geq 0$이므로 f는 0이 아닌 곳에서 g와 같은 부호를 가지며, 따라서 f는 두 부호를 모두 갖지 않는다. 그런데 f는 $[0,1]$의 어딘가에서 0이 아니다. $(x-\alpha)^2$은 $x=\alpha$에서만 0이 되므로, (α일 수도 있는 점을 제외한) 모든 $x \in [0,1]$에 대하여 $f(x) \neq 0$이다. 또한 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$이다. 소문항 (i)에 의해 f는 두 부호를 모두 가져야 하므로 모순이다. 따라서 $[0,1]$의 어떤 x에 대하여 $g(x) = 0$이다.

일차함수의 예. $g(x) = a + bx$일 때 조건 $(*)$는 다음과 같다.

$$a + \tfrac{1}{2}b = 1, \qquad \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{3}b = \alpha, \qquad \tfrac{1}{3}a + \tfrac{1}{4}b = \alpha^2.$$

첫째 식에서 $a = 1 - \frac{1}{2}b$이고, 이를 둘째 식에 대입하면 $\frac{1}{2} + \frac{1}{12}b = \alpha$이므로

$$b = 12\alpha - 6, \qquad a = 4 - 6\alpha.$$

그러면 셋째 조건은

$$\tfrac{1}{3}(4-6\alpha) + \tfrac{1}{4}(12\alpha - 6) = \alpha - \tfrac{1}{6} = \alpha^2,$$

즉 $6\alpha^2 - 6\alpha + 1 = 0$이 되므로

$$\alpha = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}.$$

α가 자유롭지 않다는 점에 주목하자. 일차함수 g는 이 두 값에 대해서만 가능하다. $\alpha = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$으로 택하면 $b = 2\sqrt{3}$, $a = 1 - \sqrt{3}$이므로

$$g(x) = 1 - \sqrt{3} + 2\sqrt{3}\,x,$$

이고, 이 함수는

$$x = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{6} \approx 0.211,$$

에서 0이 되며, 소문항 (ii)가 말하는 대로 이 값은 $[0,1]$에 속한다. (다른 선택인 $\alpha = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$은 $g(x) = 1+\sqrt{3}-2\sqrt{3}\,x$를 주고, 이 함수는 $x = \frac{3+\sqrt{3}}{6} \approx 0.789$에서 0이 되는데, 이 값 역시 $[0,1]$에 속한다.)

소문항 (iii)

$g = h'$이 $\alpha = 1-\beta$로 $(*)$를 만족함을 보이자. 여기서 h'은 소문항 (ii)가 요구하는 대로 연속이다. 먼저

$$\int_0^1 h'(x)\,\mathrm{d}x = h(1) - h(0) = 1.$$

$u = x$, $\mathrm{d}v = h'(x)\,\mathrm{d}x$로 부분적분하면

$$\int_0^1 xh'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[xh(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x = 1-\beta.$$

이번에는 $u = x^2$으로 다시 부분적분하면

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2h'(x)\,\mathrm{d}x &= \Big[x^2h(x)\Big]_0^1 - 2\int_0^1 xh(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 1-\beta(2-\beta) = 1-2\beta+\beta^2 = (1-\beta)^2.\end{aligned}$$

> **?** **생각해 보기** 이상한 값 $\frac{1}{2}\beta(2-\beta)$는 어디에서 나온 것인가?

이 값은 셋째 적분이 둘째 적분의 제곱이 되도록 정확히 맞추어 고른 것이다. 두 번의 부분적분을 거치면 둘째 적분은 $1-\beta$이므로 셋째 적분은 $(1-\beta)^2$이어야 하고, $\frac{1}{2}\beta(2-\beta)$가 바로 그 값을 만들어 준다.

따라서 h'은 연속이고 $\alpha = 1-\beta$로 $(*)$를 만족한다. 소문항 (ii)에 의해 $[0,1]$의 어떤 x에 대하여 $h'(x) = 0$이다.

검산

- $g(x) = 1-\sqrt{3}+2\sqrt{3}\,x$에 대하여 직접 적분하면 $\int_0^1 g = 1$, $\int_0^1 xg = \frac{3+\sqrt{3}}{6} \approx 0.7887$, $\int_0^1 x^2 g \approx 0.6220 = (0.7887)^2$이다.
- 소문항 (iii)은 도함수(derivative)가 위의 g인 $h(x) = (1-\sqrt{3})x + \sqrt{3}\,x^2$으로 확인할 수 있다. 이때 $h(0) = 0$, $h(1) = 1$, $\beta = \frac{3-\sqrt{3}}{6} \approx 0.2113$이고 $\int_0^1 xh = \frac{1}{2}\beta(2-\beta) \approx 0.1890$이다. 도함수는 $x \approx 0.211$에서 0이 되므로, 예측한 대로 h는 $[0,1]$ 안에 극점(turning point)을 갖는다.

흔한 실수

- (i)에서 연속성을 쓰지 않고 "$f \geq 0$이므로 $\int f > 0$"이라고 논증하는 것. 음이 아닌 함수는 모든 곳에서 0이 아니더라도(단 한 점에서만 0이 아닌 경우) 적분값이 0일 수 있으므로, 연속성은 꼭 필요하다.
- (ii)에서 (i)을 g 자체에 적용하는 것. $\int g$에 대해서는 그 값이 1이라는 것 외에는 아는 것이 없다. 소문항 (i)은 $(x-\alpha)^2 g$에 적용해야 하며, 이 함수가 어딘가에서 0이 아님을 확인해야 한다.
- (iii)에서 (ii)를 적용하려면 h'이 연속이어야 한다는 것을 잊는 것. 문제에서 h가 **연속인** 도함수를 갖는다고 말한 이유가 바로 이것이다.

STEP 너머

조건 $(*)$는 g가 확률밀도함수(probability density)라면 그 평균(mean)이 α이고 분산(variance)이 $\int (x-\alpha)^2 g = 0$이라는 뜻이다. 분산이 0인 진짜 확률밀도함수는 불가능하며, 그래서 g는 어딘가에서 0 아래로 내려가야 한다. 소문항 (i)은 실해석학(real analysis)의 표준적인 보조정리(lemma)이다. 즉, 음이 아니고 적분값이 0인 연속함수는 항등적으로 0이다. 이 보조정리는 변분법(calculus of variations) 등에서 끊임없이 쓰인다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 연속성과 리만 적분(Riemann integral)을 이 보조정리와, 이 문제에서 가정해도 된다고 한 중간값 정리(intermediate value theorem)를 증명할 수 있을 만큼 꼼꼼하게 전개한다.

풀이

STEP I 2017, 문제 7

순수수학 • 나폴레옹 정리

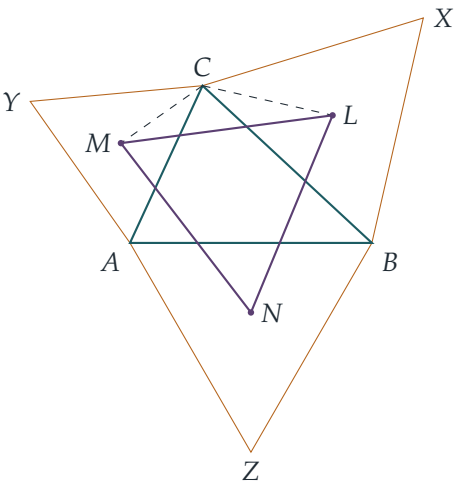
STEP I 2017, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/17-s1-q7

핵심 아이디어

모든 일은 ABC의 꼭짓점(vertex)에서 일어난다. 정삼각형(equilateral triangle)의 중심(centre)은 각 내각의 이등분선(angle bisector) 위에 있으므로, C에서 L로, 그리고 M으로 그은 선분은 각각 ABC의 한 변과 $30°$를 이룬다. 이로부터 각 LCM을 C로 나타낼 수 있다. 그다음 삼각형 LCM에 코사인 법칙(cosine rule)을 적용하면 $|LM|$을 얻는다. 그 결과는 a, b, c에 대하여 대칭(symmetric)이며, 바로 이 대칭성 때문에 LMN이 정삼각형이 된다.



풀이

소문항 (i)

한 변의 길이가 b인 정삼각형 CYA에서 중심 M은 세 중선(median) 위에 모두 있으며, 이 중선들은 동시에 높이(altitude)이자 각의 이등분선이다. C에서 그은 중선의 길이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}b$이고, 중심은 이 중선 위에서 꼭짓점으로부터 전체 길이의 3분의 2만큼 떨어진 곳에 있다. 따라서

$$|CM| = \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2}\, b = \frac{b}{\sqrt{3}}.$$

같은 방법으로, 삼각형 BXC의 한 변의 길이는 a이므로

$$|CL| = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

소문항 (ii)

CM은 60°인 각 YCA를 이등분하므로, 직선 CM은 B의 반대쪽에서 CA와 30°를 이룬다. 마찬가지로 CL은 A의 반대쪽에서 CB와 30°를 이룬다. C를 중심으로 L에서 M까지 돌아가면 30°, 삼각형의 각 C, 그리고 다시 30°를 차례로 지난다. 따라서

$$\angle LCM = C + 60^\circ.$$

? **생각해 보기** $C > 120^\circ$이어서 $C + 60^\circ$가 180°보다 크면 어떻게 될까?

그때는 삼각형 LCM의 C에서의 내각이 반대쪽 각, 즉 $360^\circ - (C + 60^\circ)$가 된다. 그러나 $\cos(360^\circ - \theta) = \cos\theta$이므로, 아래의 코사인 법칙은 모든 경우에 같은 결과를 준다.

소문항 (i)에서 구한 길이를 써서 삼각형 LCM에 코사인 법칙을 적용하면

$$\begin{aligned} |LM|^2 &= \frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{3} - \frac{2ab}{3}\cos(C + 60^\circ) \\ &= \frac{a^2 + b^2}{3} - \frac{2ab}{3}\left(\tfrac{1}{2}\cos C - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin C\right) \\ &= \frac{a^2 + b^2}{3} - \frac{ab\cos C}{3} + \frac{\sqrt{3}\,ab\sin C}{3}. \end{aligned}$$

이제 삼각형 ABC에 대한 두 가지 사실을 이용한다. 코사인 법칙에 의해 $2ab\cos C = a^2 + b^2 - c^2$이고, 넓이(area)는 $\Delta = \frac{1}{2}ab\sin C$이므로 $ab\sin C = 2\Delta$이다. 양변에 6을 곱하면

$$\begin{aligned} 6|LM|^2 &= 2(a^2 + b^2) - 2ab\cos C + 2\sqrt{3}\,ab\sin C \\ &= 2a^2 + 2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2) + 4\sqrt{3}\,\Delta \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}\,\Delta, \end{aligned}$$

이 되어 요구한 결과를 얻는다.

우변은 a, b, c의 순서를 바꾸어도 변하지 않고, Δ는 삼각형의 꼭짓점에 이름을 붙이는 방식과 무관하다. 같은 논증을 꼭짓점 A에서($|MN|$에 대하여), 그리고 꼭짓점 B에서($|NL|$에 대하여) 되풀이하면 같은 식을 얻는다. 따라서

$$|LM| = |MN| = |NL|,$$

이고 LMN은 정삼각형이다.

넓이가 같을 조건. 한 변의 길이가 s인 정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}s^2$이다. $S = a^2 + b^2 + c^2$이라 하자. 그러면

$$[LMN] = \frac{\sqrt{3}}{4}|LM|^2 = \frac{\sqrt{3}}{24}\left(S + 4\sqrt{3}\,\Delta\right) = \frac{\sqrt{3}}{24}S + \frac{\Delta}{2}.$$

그러므로

$$[LMN] = \Delta \iff \frac{\sqrt{3}}{24}S = \frac{\Delta}{2} \iff S = \frac{12\Delta}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}\,\Delta.$$

모든 단계를 거꾸로 거슬러 갈 수 있으므로, 이것이 바로 요구한 "필요충분조건(if and only if)"이다.

소문항 (iii)

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$와 $\Delta = \frac{1}{2}ab\sin C$를 이용하여 모든 것을 a, b, C로 나타낸다. 아래의 각 줄은 바로 앞 줄과 동치이다.

$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 + c^2 = 4\sqrt{3}\,\Delta \\ \iff \quad & 2a^2 + 2b^2 - 2ab\cos C = 2\sqrt{3}\,ab\sin C \\ \iff \quad & a^2 + b^2 = ab\left(\cos C + \sqrt{3}\sin C\right) \\ \iff \quad & a^2 + b^2 = 2ab\cos(C - 60^\circ), \end{aligned}$$

여기서 $\cos C + \sqrt{3}\sin C = 2\left(\cos C\cos 60^\circ + \sin C\sin 60^\circ\right) = 2\cos(C - 60^\circ)$임을 이용하였다. 양변에서 $2ab$를 빼면

$$a^2 - 2ab + b^2 = 2ab\cos(C - 60^\circ) - 2ab \iff (a-b)^2 = -2ab\big(1 - \cos(C - 60^\circ)\big).$$

따라서 두 조건은 동치이다.

? 생각해 보기 제곱인 값이 앞에 음의 부호가 붙은 값과 어떻게 같을 수 있을까?

양변이 모두 0일 때뿐이다. 좌변 $(a-b)^2$은 0 이상이다. 우변에서는 $ab > 0$이고 $1 - \cos(C - 60^\circ) \geq 0$이므로 우변은 0 이하이다. 따라서 등식은 정확히 다음 경우에 성립한다.

$$a = b \quad \text{이고} \quad \cos(C - 60^\circ) = 1.$$

$0^\circ < C < 180^\circ$이므로 $-60^\circ < C - 60^\circ < 120^\circ$이고, 이 범위에서 코사인 값이 1인 각은 0°뿐이다. 따라서 $C = 60^\circ$이다. $a = b$이고 꼭지각이 60°인 삼각형은 나머지 두 각이 서로 같고 그 합이 120°이므로, 세 각이 모두 60°가 되어 정삼각형이다. 역으로, 정삼각형은 $a = b$이고 $C = 60^\circ$이므로 이 조건을 만족한다.

이것을 소문항 (ii)와 합치면 $[LMN] = [ABC] \iff a^2 + b^2 + c^2 = 4\sqrt{3}\,\Delta \iff ABC$는 정삼각형이다.

검산

- 한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC: 이때 $\Delta = \frac{\sqrt{3}}{4}$이고 $6|LM|^2 = 3 + 3 = 6$이므로 $|LM| = 1$이며, 소문항 (iii)이 예측하는 대로 두 넓이가 같다.
- 세 변이 3–4–5인 직각삼각형: $S = 50$이고 $\Delta = 6$이므로 $|LM|^2 = (50 + 24\sqrt{3})/6 \approx 15.26$이다. 그러면 $[LMN] \approx 6.61$이고, 이는 $[ABC] = 6$보다 크다. 점 L, M, N의 좌표를 써서 컴퓨터로 확인한 결과도 같은 값을 주었으며, 둔각삼각형을 포함한 수천 개의 무작위 삼각형에서 $6|LM|^2$에 대한 공식이 성립함을 확인하였다.
- 소문항 (iii)은 또한 모든 삼각형에 대하여 $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}\,\Delta$임을 보여 주므로, 언제나 $[LMN] \geq [ABC]$이다.

흔한 실수

- $|CM|$을 3분의 2가 아니라 중선 전체 $\frac{\sqrt{3}}{2}b$나 그 3분의 1로 잡는 것.
- 양쪽의 30°를 잊고 $\angle LCM = C + 30^\circ$ 또는 C로 쓰는 것.
- 소문항 (iii)에서 "$a = b$"에서 멈추는 것. $C = 60^\circ$도 필요하며, 코사인 값이 1인 다른 각을 배제하려면 C의 범위도 따져야 한다.

STEP 너머

이것은 나폴레옹 정리(Napoleon's theorem)이다. 임의의 삼각형의 각 변 위에 바깥쪽으로 정삼각형을 세우면, 그 정삼각형들의 중심은 정삼각형을 이룬다. 소문항 (iii)에서 얻은 부등식 $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}\,\Delta$는 Weitzenböck 부등식(Weitzenböck's inequality)이다. 복소수(complex numbers)를 쓰면 나폴레옹 정리를 아주 깔끔하게 증명할 수 있다. 60°만큼 회전하는 것은 $e^{i\pi/3}$을 곱하는 것과 같기 때문이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이런 방식으로 기하학을 다루는 법을 아름답게 펼쳐 보인다.

풀이

STEP I 2017, 문제 8

순수수학 • 점화식과 수학적 귀납법

> **STEP I 2017, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/17-s1-q8

핵심 아이디어

식 $a_n^2 + 2a_nb_n - b_n^2$의 값은 점화식(recurrence)을 한 번 적용해도 변하지 않으므로, 처음 값을 영원히 유지한다. 이 식을 b_n^2으로 나누면 비 c_n에 대한 정확한 방정식이 되고, 여기에 작은 오차항 $1/b_n^2$이 붙는다. 이 방정식에서 완전제곱식을 만드는 것(completing the square)이 거의 모든 일을 해 준다. 이로부터 극한(limit), 비가 $\sqrt{2}-1$의 어느 쪽에 있는지, 그리고 $\sqrt{2}$에 대한 유리수(rational) 경계를 모두 얻는다.

풀이

귀납법

$n = 1$일 때 $a_1^2 + 2a_1b_1 - b_1^2 = 1 + 4 - 4 = 1$이므로 $(*)$가 성립한다.

어떤 $n \geq 1$에 대하여 $(*)$가 성립한다고 가정하자. $a = a_n$, $b = b_n$으로 쓰면

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 &= a^2 + 4ab + 4b^2, \\ 2a_{n+1}b_{n+1} &= 2(a+2b)(2a+5b) = 4a^2 + 18ab + 20b^2, \\ b_{n+1}^2 &= 4a^2 + 20ab + 25b^2. \end{aligned}$$

처음 두 식을 더하고 세 번째 식을 빼면

$$a_{n+1}^2 + 2a_{n+1}b_{n+1} - b_{n+1}^2 = a^2 + 2ab - b^2 = 1.$$

따라서 $(*)$는 $n+1$일 때도 성립하고, 수학적 귀납법(induction)에 의해 모든 $n \geq 1$에 대하여 성립한다.

소문항 (i)

먼저 모든 a_n과 b_n은 양수이다. $n = 1$일 때 참이고, 점화식은 a_n과 b_n으로부터 양의 계수(coefficient)로 a_{n+1}과 b_{n+1}을 만들기 때문이다. 따라서 $a_n > 0$이므로

$$b_{n+1} = 2a_n + 5b_n > 5b_n,$$

이다. $b_1 = 2 = 2 \times 5^0$에서 시작하여 각 단계마다 적어도 5를 곱하므로, 모든 $n \geq 1$에 대하여 $b_n \geq 2 \times 5^{n-1}$이다(한 줄짜리 귀납법).

이제 $(*)$를 0이 아닌 b_n^2으로 나누면

$$c_n^2 + 2c_n - 1 = \frac{1}{b_n^2}, \qquad \text{즉} \qquad (c_n+1)^2 = 2 + \frac{1}{b_n^2}. \tag{†}$$

? **생각해 보기** 어느 제곱근을 택해야 할까?

$c_n > 0$이므로 수 $c_n + 1$은 양수이고, 따라서 양의 제곱근을 택한다.

$$c_n + 1 = \sqrt{2 + \frac{1}{b_n^2}}.$$

$n \to \infty$일 때 $0 < 1/b_n^2 \leq \frac{1}{4}25^{-(n-1)} \to 0$이므로 $c_n + 1 \to \sqrt{2}$이다(제곱근 함수는 연속(continuous)이다). 그러므로 요구한 대로 $c_n \to \sqrt{2} - 1$이다.

소문항 (ii)

(†)로부터 $(c_n+1)^2 = 2 + 1/b_n^2 > 2$이다. $c_n + 1 > 0$이고 $\sqrt{2} > 0$이므로 $c_n + 1 > \sqrt{2}$, 즉 $c_n > \sqrt{2} - 1$이다.

다른 쪽 경계를 얻으려면 2를 $c_n + 1 > \sqrt{2}$의 양변으로 나눈다. 양변이 모두 양수이므로 부등호의 방향이 바뀐다.

$$\frac{2}{c_n+1} < \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

둘을 합치면

$$\frac{2}{c_n+1} < \sqrt{2} < c_n + 1.$$

? **생각해 보기** 어떤 n의 값이 $99/70$을 만들어 낼까?

$c_n + 1 = (a_n + b_n)/b_n$이 $99/70$이 되어야 하므로 $b_n = 70$인 경우를 찾는다. 점화식을 계산해 나가면

$$(a_1, b_1) = (1, 2), \quad (a_2, b_2) = (5, 12), \quad (a_3, b_3) = (29, 70).$$

따라서 $c_3 = \frac{29}{70}$이고 $c_3 + 1 = \frac{99}{70}$이며,

$$\frac{2}{c_3+1} = \frac{140}{99}.$$

이중 부등식(double inequality)에 $n = 3$을 대입하면

$$\frac{140}{99} < \sqrt{2} < \frac{99}{70}.$$

검산

- $(a_3, b_3) = (29, 70)$은 $(*)$를 만족한다: $841 + 4060 - 4900 = 1$.
- $\frac{140}{99} \approx 1.414141$이고 $\frac{99}{70} \approx 1.414286$이며, $\sqrt{2} \approx 1.414214$는 그 사이에 있다. 이 구간의 폭은 $\frac{1}{6930}$이다.
- 다음 항 $(a_4, b_4) = (169, 408)$은 $c_4 \approx 0.4142157$을 주는데, 이는 이미 $\sqrt{2} - 1$과의 차이가 2.2×10^{-6} 이내이며, 오차가 대략 $1/b_n^2$처럼 줄어든다는 사실과 맞아떨어진다.
- 제곱해 보면: $140^2 = 19600 < 2 \times 99^2 = 19602$이고 $99^2 = 9801 > 2 \times 70^2 = 9800$이다.

흔한 실수

- $n + 1$에 대한 $(*)$를 전개하면서 항을 꼼꼼히 모으지 않는 것: ab와 b^2의 계수는 아슬아슬하게 정리된다($4 + 18 - 20 = 2$, $4 + 20 - 25 = -1$).
- $a_n > 0$임을 밝히지 않고 $b_{n+1} \geq 5b_n$이라고 주장하는 것.
- 양의 제곱근을 택하는 근거를 대지 않거나, 역수(reciprocal)를 취할 때 양변이 양수라는 말 없이 부등호의 방향을 바꾸는 것.

STEP 너머

이 점화식은 행렬(matrix) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$를 곱하는 것인데, 이 행렬은 행렬식(determinant)이 1이고 이차형식(quadratic form) $x^2 + 2xy - y^2$을 보존한다. 이와 같은 불변(invariant) 형식을 찾는 것이 펠 방정식(Pell's equation) 이론의 핵심이다. 수 $c_n + 1$, 즉 $\frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \frac{99}{70}, \ldots$은 $\sqrt{2}$의 연분수(continued fraction) 수렴분수(convergent)를 하나 걸러 하나씩 뽑은 것이다. 수렴분수는 분모(denominator)의 크기에 비해 가장 좋은 유리수 근사이다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 정수론)은 연분수와 펠 방정식을 아름답게 다룬다.

풀이

STEP I 2017, 문제 9

역학 • 포물체 운동

STEP I 2017, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

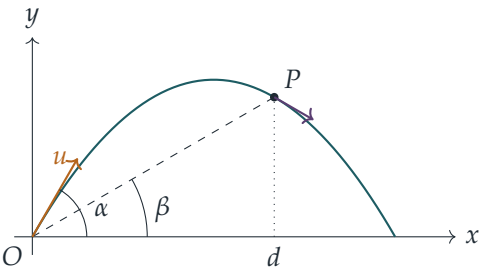
step.maths.org/questions/17-s1-q9

핵심 아이디어

궤적 방정식(trajectory equation)을 세우고 그 곡선이 P를 지나도록 한다. 그러면 u^2을 발사각(projection angle)만의 함수로 나타낼 수 있다. 이때 가장 다루기 편한 변수는 $T = \tan\alpha$이다. $\sec^2\alpha = 1 + T^2$ 덕분에 모든 식이 T에 대한 유리함수(rational function)가 되기 때문이다. 이 함수의 최솟값을 구하는 것은 평범한 미분 계산이고, 정류점(stationary point)을 주는 방정식은 알고 보면 모양을 바꾼 배각 공식(double-angle formula)이다.

풀이

입자는 공기 저항(air resistance) 없이 중력만 받으며 자유롭게 운동한다고 모형화한다. O를 원점으로 하고, x축은 P 쪽을 향하는 수평 방향, y축은 연직 위 방향으로 잡는다. $T = \tan\alpha$, $k = \tan\beta > 0$으로 둔다.



소문항 (i)

수평 방향 속도가 $u\cos\alpha$이므로 입자는 시각 $t = x/(u\cos\alpha)$에 수평 거리 x에 도달하고, 그 때의 높이는 다음과 같다.

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha} = xT - \frac{gx^2(1+T^2)}{2u^2}.$$

$P = (d,\, dk)$를 지난다는 것은 다음을 뜻한다.

$$dk = dT - \frac{gd^2(1+T^2)}{2u^2} \quad \Longrightarrow \quad u^2 = \frac{gd}{2}\cdot\frac{1+T^2}{T-k}.$$

우변은 양수여야 하므로 $T > k$, 즉 $\alpha > \beta$인 각만 가능하다. 이는 당연하다. P보다 위쪽을 겨냥해야 하기 때문이다. 따라서 다음 함수의 최솟값을 구해야 한다.

$$f(T) = \frac{1+T^2}{T-k} \qquad (T > k).$$

몫의 미분법(quotient rule)에 의해

$$f'(T) = \frac{2T(T-k) - (1+T^2)}{(T-k)^2} = \frac{T^2 - 2kT - 1}{(T-k)^2}.$$

분자는 $T = k \pm \sqrt{k^2+1}$에서 0이 된다. 이 가운데 k보다 큰 것은 $+$ 쪽 근뿐이다. $T \to k^+$일 때와 $T \to \infty$일 때 모두 $f(T) \to \infty$이고 그 사이에 정류점이 하나뿐이므로, 그 점에서 최솟값을 갖는다. 따라서 최적의 α는 다음을 만족한다.

$$T^2 - 2kT - 1 = 0. \qquad (*)$$

> **생각해 보기** 무리수 근을 대입하지 않고 최솟점에서 $f(T)$를 어떻게 간단히 할 수 있을까?

$(*)$를 이용해 식을 바꿔 쓴다. $(*)$에서 $k = \dfrac{T^2-1}{2T}$이므로

$$T - k = \frac{2T^2 - T^2 + 1}{2T} = \frac{1+T^2}{2T}, \qquad \text{따라서} \qquad f(T) = \frac{1+T^2}{(1+T^2)/(2T)} = 2T.$$

그러므로

$$u^2 = \frac{gd}{2}\cdot 2T = gd\tan\alpha,$$

이고, 이것이 보이려던 결과이다.

각에 대해서는, $(*)$를 $k = \dfrac{T^2-1}{2T}$ 꼴로 쓰면

$$\tan\beta = -\frac{1-\tan^2\alpha}{2\tan\alpha} = -\cot 2\alpha = \tan(2\alpha - 90^\circ),$$

이다. 여기서 $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$와 $-\cot\theta = \tan(\theta - 90^\circ)$를 이용했다. ($\alpha = 45^\circ$이면 $(*)$에서 $k = 0$이 되는데, $\beta > 0$이므로 이 경우는 제외된다. 따라서 $\cot 2\alpha$는 정의된다.) $0^\circ < \alpha < 90^\circ$이므로 각 $2\alpha - 90^\circ$는 $(-90^\circ, 90^\circ)$에 속하고, β도 마찬가지이며, 이 구간에서 tan은 일대일(one-to-one)이다. 따라서 $\beta = 2\alpha - 90^\circ$, 즉

$$2\alpha = \beta + 90^\circ.$$

말로 하면, 가장 좋은 발사 방향은 직선 OP와 연직 위 방향 사이의 각을 이등분한다.

소문항 (ii)

P에서도 수평 방향 속도는 여전히 $u\cos\alpha$이다. 걸린 시간은 $d/(u\cos\alpha)$이므로 연직 방향 속도는

$$v_y = u\sin\alpha - \frac{gd}{u\cos\alpha}.$$

P에서 입자가 수평보다 각 θ만큼 위쪽으로 움직인다고 하면

$$\tan\theta = \frac{v_y}{u\cos\alpha} = \tan\alpha - \frac{gd}{u^2\cos^2\alpha} = T - \frac{gd(1+T^2)}{gdT} = T - \frac{1+T^2}{T} = -\frac{1}{T} = -\cot\alpha,$$

이다. 여기서 소문항 (i)의 $u^2 = gdT$를 이용했다. 따라서 $\tan\theta = \tan(\alpha - 90^\circ)$이고, θ는 -90°와 90° 사이에 있으므로 $\theta = \alpha - 90^\circ$이다.

입자는 P를 지날 때 **아래쪽으로** 움직이며, 그 방향은 수평보다 $90^\circ - \alpha$만큼 아래이다. P에서의 운동 방향은 발사 방향과 수직이다.

검산

- $\beta = 30^\circ$로 두자. 그러면 $\alpha = 60^\circ$이고 $u^2 = \sqrt{3}\,gd$이다. 직접 계산하면 $T = \sqrt{3}$에서 $f(T)$는 $4/(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}) = 2\sqrt{3}$이고, 이는 $2T$와 일치한다. 마지막 운동 방향은 그림에서처럼 수평보다 30° 아래이다.
- $\beta \to 0$으로 보내면 $\alpha \to 45^\circ$, $u^2 \to gd$이다. 이는 평지에서 최대 도달 거리 u^2/g가 45°로 발사할 때 얻어진다는 익숙한 사실이다. 이때 입자는 수평보다 45° 아래 방향으로 떨어지며, 역시 발사 방향과 수직이다.
- d와 β를 무작위로 200번 골라 α에 대해 수치적으로 탐색한 결과, 최솟값을 주는 각은 매번 $\frac{1}{2}(\beta + 90^\circ)$였고 최솟값은 $gd\tan\alpha$였다.

흔한 실수

- 조건 $T > k$를 빠뜨리고 근 $k - \sqrt{k^2+1}$을 남겨 두는 것. 이 근은 음수이므로 아래쪽으로 발사한다는 뜻이 된다.

- 두 각이 모두 tan이 일대일인 구간에 속하는 이유를 밝히지 않고, 탄젠트 값이 같다는 것만으로 $\beta = 2\alpha - 90^\circ$라고 결론짓는 것.
- (ii)의 각을 $90^\circ - \alpha$로 답하면서 입자가 내려가고 있다는 사실을 말하지 않는 것.

STEP 너머

속력 u가 고정되어 있을 때 도달할 수 있는 점들은 어떤 포물선의 안쪽에 놓인다. 이 포물선이 궤적들의 족이 갖는 **포락선**(envelope), 곧 "안전 포물선(parabola of safety)"이다. P까지 가는 최소 속력 궤적은 P가 그 포락선 위에 놓이는 궤적이며, (ii)의 수직 관계는 이 곡선이 갖는 기하학적 성질 가운데 하나이다. 곡선족의 포락선과 제약 조건이 있는 최적화(optimisation)는 대학 1학년 과정에서 본격적으로 다룬다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 포물체 문제를 이처럼 꼼꼼하게 다루는 모습을 보기에 좋은 책이다.

풀이

STEP I 2017, 문제 10

역학 • 연쇄 충돌

> **STEP I 2017, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/17-s1-q10

핵심 아이디어

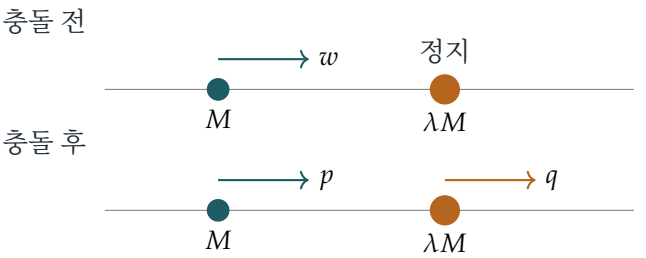
사슬 속의 모든 충돌은 같은 모양이다. 질량 M인 입자가 속력 w로 움직여 정지해 있는 질량 λM인 입자와 부딪친다. 따라서 이 충돌 하나를 비 λ로 나타내어 한 번만 풀면, 사슬 전체는 이를 되풀이하여 얻어지고 등비수열(geometric sequence)이 나온다. 그다음 각 소문항에서는 입자들이 충돌 후에 갖는 속도를 비교하여, 어떤 입자가 앞의 입자를 따라잡는지 살펴보면 된다.

풀이

모든 입자를 x축 위를 움직이는 점으로 모형화하고, 속도는 x축의 양의 방향을 기준으로 잰다.

전형적인 충돌 하나

질량 M인 입자 A가 속력 w로 움직여 정지해 있는 질량 λM인 입자 B와 부딪친다. 충돌 후 두 입자의 속도를 각각 p, q라 하자.



운동량 보존(conservation of momentum)과 뉴턴의 실험 법칙(Newton's experimental law)에 의해

$$Mw = Mp + \lambda Mq, \qquad q - p = ew.$$

첫째 식에 $p = q - ew$를 대입하면 $w = q - ew + \lambda q$이므로

$$q = \frac{1+e}{1+\lambda}\, w, \qquad p = q - ew = \frac{1-\lambda e}{1+\lambda}\, w.$$

$r = \dfrac{1+e}{1+\lambda}$, $s = \dfrac{1-\lambda e}{1+\lambda}$로 놓자. 이때

$$q - p = ew > 0,$$

이므로 이런 충돌 직후에는 언제나 두 입자가 서로 멀어진다.

소문항 (i)

첫 번째 충돌은 P(질량 m, 속력 u)가 P_1(질량 λm)과 부딪치는 것이다. $w = u$, $M = m$으로 두면

$$u_1 = \frac{1+e}{1+\lambda}\, u,$$

로 요구된 결과를 얻고, P는 속도 su를 갖게 된다.

이어서 P_1이 움직여 질량 $\lambda^2 m = \lambda \cdot (\lambda m)$인 P_2와 부딪친다. 질량비가 다시 λ이므로 이는 $w = u_1$인 같은 충돌이다. 일반적으로 P_n(질량 $\lambda^n m$)이 속력 u_n으로 P_{n+1}(질량 $\lambda^{n+1} m$)과 부딪치므로 $u_{n+1} = ru_n$이고, P_n은 속도 su_n을 갖게 된다. 따라서

$$u_n = \left(\frac{1+e}{1+\lambda}\right)^n u.$$

여기서 P_n의 첫 번째 충돌은 P_{n-1}에게 부딪히는 것이고, 두 번째 충돌은 P_{n+1}과 부딪치는 것이다. (첫 번째 충돌 직후 P_n은 P_{n-1}에게서 멀어지고 있으므로, 뒤에서 아무것도 먼저 따라잡지 않는다면 다음에 일어날 수 있는 일은 P_{n+1}에 닿는 것이다. 이것이 문제가 의도한 사건의 순서이며, 소문항 (ii)–(iv)에서 실제로 그렇게 일어나는지 확인한다.) 따라서

$$v_n = su_n = \frac{(1-\lambda e)(1+e)^n}{(1+\lambda)^{n+1}}\, u,$$

이고, 이는 x축의 양의 방향을 기준으로 한 속도이다. 속력은 이것의 절댓값이며, 이 차이는 P_n이 튕겨 되돌아가는 경우, 곧 $\lambda e > 1$일 때에만 중요하다.

소문항 (ii)

$e > \lambda$라 하자. 그러면 $\lambda < e < 1$이므로 $\lambda e < 1$이고 $s > 0$이다. 또한 $r > 1$이다.

충돌은 P와 P_1, 이어서 P_1과 P_2, 이어서 P_2와 P_3, 하는 식으로 차례로 일어난다. P_n이 P_{n+1}과 부딪친 뒤, 줄의 뒤쪽부터 입자 $P, P_1, \ldots, P_n, P_{n+1}, P_{n+2}, \ldots$의 속도는

$$su,\ su_1,\ su_2,\ \ldots,\ su_n,\ u_{n+1},\ 0,\ 0,\ \ldots$$

이다. $r > 1, s > 0$이고 $u_k = r^k u$이므로

$$0 < su < su_1 < su_2 < \cdots < su_n,$$

이고, $u_{n+1} - su_n = (r-s)u_n = eu_n > 0$이므로 $u_{n+1} > su_n$이다. 따라서 $P, P_1, \ldots, P_{n+1}$ 가운데 각 입자는 바로 뒤의 입자보다 엄격히 빠르게 움직이므로, 이들 중 어느 두 입자도 다시 만날 수 없다. 앞으로 남은 충돌은 P_{n+1}이 정지해 있는 P_{n+2}에 닿는 것뿐이며, 그러면 n 대신 $n+1$에 대하여 같은 논증이 적용된다.

따라서 각 P_n $(n \geq 1)$은 P_{n-1}에게 한 번 부딪히고, 이어서 P_{n+1}과 한 번 부딪치며, 그 밖의 충돌에는 전혀 관여하지 않는다. 즉 각 입자는 정확히 두 번 충돌한다. (이로써 (i)에서 가정한 사건의 순서도 확인된다.)

소문항 (iii)

$e = \lambda$이면 $r = 1$이고 $s = \dfrac{1-e^2}{1+e} = 1-e$이다. 따라서

$$u_n = u \quad \text{이고} \quad v_n = (1-e)u \text{ 모든} n,$$

이며, P 역시 속도 $(1-e)u$를 갖게 된다. 이 운동은 직선을 따라 진행하는 펄스(pulse)이다. 맨 앞의 입자는 언제나 속력 u로 움직이고, 다음 입자와 부딪치면 속력 u를 넘겨주고 자신은 $(1-e)u$로 느려진다. 그 뒤의 모든 입자는 다 함께 $(1-e)u$로 움직이므로 그들 사이에서는 더 이상 충돌이 일어나지 않고, 속력 u인 맨 앞의 입자는 그들에게서 점점 멀어진다. 각 P_n은 정확히 두 번 충돌한다.

N번의 충돌 후 $P, P_1, \ldots, P_{N-1}$은 $(1-e)u$로, P_N(질량 $\lambda^N m = e^N m$)은 u로 움직인다. 운동에너지(kinetic energy)는

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}m(1-e)^2u^2\left(1+e+\cdots+e^{N-1}\right) + \tfrac{1}{2}e^N mu^2 &= \tfrac{1}{2}mu^2\left[(1-e)^2\,\frac{1-e^N}{1-e} + e^N\right] \\ &= \tfrac{1}{2}mu^2\left[(1-e)(1-e^N) + e^N\right] \\ &= \tfrac{1}{2}mu^2\left[1-e+e^{N+1}\right].\end{aligned}$$

이를 처음 에너지 $\frac{1}{2}mu^2$로 나누면, N번의 충돌 후 잃은 비율은

$$1 - \left(1-e+e^{N+1}\right) = e\left(1-e^N\right) \to e \quad \text{as } N \to \infty,$$

이다. $0 < e < 1$이기 때문이다. 이것이 요구된 결과이다.

소문항 (iv)

$\lambda e = 1$이면 $s = 0$이고

$$r = \frac{1+e}{1+1/e} = \frac{e(1+e)}{e+1} = e.$$

따라서 매 충돌마다 움직이던 입자가 완전히 멈춘다. P가 멈추고, 이어서 P_1이 eu로 움직여 P_2와 부딪치고 멈추며, 이런 식으로 계속되어 $u_n = e^n u$, $v_n = 0$이다. 각 P_n은 정확히 두 번 충돌하고, 입자들은 결국 서로 맞닿은 채 정지하며, 단 하나의 입자만이 점점 더 느리게 운동을 앞으로 실어 나른다. P_n이 P_{n+1}에 닿는 데 시간 $1/(e^n u)$가 걸리므로, 충돌 사이의 시간 간격은 한없이 커진다.

? **생각해 보기** 운동량이 보존되는데, 에너지는 어떻게 사라질 수 있을까?

N번의 충돌 후에는 질량 $\lambda^N m = e^{-N} m$, 속력 $e^N u$인 P_N만 움직인다. 그 운동량은 마땅히 그래야 하듯 $e^{-N} m \cdot e^N u = mu$이지만, 운동 에너지는

$$\tfrac{1}{2}\, e^{-N} m\, (e^N u)^2 = e^N \cdot \tfrac{1}{2} m u^2.$$

이다. 운동량은 점점 더 무겁고 점점 더 느린 입자가 실어 나르며, 운동량 p가 일정할 때 운동 에너지 $p^2/(2M)$는 질량 M이 커짐에 따라 0에 가까워진다. 남은 비율 e^N은 0으로 수렴하므로, 결국 처음 운동 에너지가 **모두** 사라진다.

검산

- $e = 1, \lambda = 1$(질량이 같고 완전 탄성(perfectly elastic) 충돌)이면 $u_1 = u$이고 P는 멈춘다. 익숙한 뉴턴의 요람(Newton's cradle)에서의 속도 교환이다.
- (iii)에서 충돌 한 번($N = 1$)으로 잃는 비율은 $e(1-e)$이다. 직접 계산하면, P는 $(1-e)u$로, 질량 em인 P_1은 u로 움직이게 되므로 남은 에너지는 처음의 $(1-e)^2 + e = 1 - e + e^2$배이고, 결과가 일치한다.
- 정확한 분수로 충돌을 한 단계씩 계산하는 컴퓨터 시뮬레이션으로 u_n, v_n에 대한 공식, $e > \lambda$일 때 각 입자가 두 번씩 충돌하는 양상, 잃은 비율 $e(1-e^N)$($e = \frac{1}{2}$일 때 25번의 충돌 후 0.49999998), 그리고 $\lambda e = 1$일 때 남은 비율 e^N을 확인하였다.

흔한 실수

- 뉴턴의 법칙을 $q - p = -ew$로 쓰거나 순서를 거꾸로 쓰는 것. 멀어지는 속력은 다가오는 속력의 e배이며, 여기서는 둘 다 양수이다.
- 질량비가 **모든** 충돌에서 λ라는 사실을 잊는 것. 바로 이 사실 때문에 답이 등비수열이 된다.

- 사건의 순서를 확인하지 않고 가정하는 것. $e < \lambda$이고 $\lambda e < 1$이면, 뒤에 남겨진 입자가 앞의 입자를, 그 입자가 다음 입자에 닿기 전에 따라잡을 수 있어서 단순한 양상이 깨진다.

STEP 너머

소문항 (iv)는 운동량과 에너지가 매우 다르게 행동함을 보여 준다. 운동량은 정확히 보존되지만, 점점 더 무거운 입자가 운동을 실어 나르기 때문에 에너지는 완전히 빠져나간다. 충돌하는 입자의 사슬은 밀도가 변하는 매질 속을 펄스가 지나가는 방식을 보여 주는 간단한 모형이며, 이산 격자(discrete lattice)에서의 파동 전파(wave propagation)로 이어진다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 충돌과 질량 중심 좌표계(centre-of-mass frame)를 이와 같은 세심함으로 다룬다.

풀이

STEP I 2017, 문제 11

역학 • 마찰이 있는 강체의 정역학

> **STEP I 2017, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/17-s1-q11

핵심 아이디어

모든 일은 상자의 한 수직 단면(cross-section) 안에서 일어나며, 이 단면은 α만큼 기울어진 정사각형이다. 따라서 자연스러운 좌표축은 수평과 수직이 아니라 상자 바닥을 따르는 방향과 상자 옆면을 따라 올라가는 방향이다. 그러면 두 수직항력(normal reaction)이 좌표축 방향을 향하므로 무게만 분해하면 된다. 두 방향으로 힘을 분해(resolving)하면 수직항력 사이의 관계식 하나를 얻고, 중점에 대한 모멘트(moment) 방정식(이 방정식에서는 무게가 사라진다)이 두 번째 관계식을 준다. 이 둘을 tan의 덧셈정리(compound-angle formula)로 비교하면 답이 나온다.

풀이

모형과 힘

막대를 균일한 강체(rigid body) 막대로 보고, 막대를 포함하는 연직 평면에서 생각한다. 이 평면에서 상자의 바닥은 최대 경사선을 따라 수평과 α의 각을 이루며, O를 지나는 옆면은 바닥에 수직이다. O에서 다음과 같이 좌표축을 잡는다.

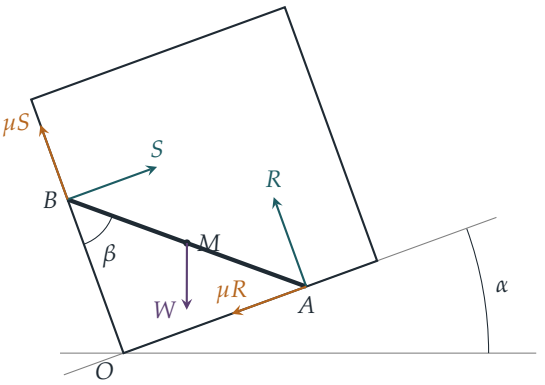
- x축은 상자 바닥을 따라 경사면 위쪽(A 쪽)을 향한다.
- y축은 상자 옆면을 따라 경사면에 수직인 방향(B 쪽)을 향한다.

옆면은 바닥에 수직이므로 삼각형 OAB는 O에서 직각이고, B에서의 각은 β이다. 따라서

$$OA = 2L\sin\beta, \qquad OB = 2L\cos\beta.$$

$\mu = \tan\gamma$로 놓는다. 막대에 작용하는 힘은 다음과 같다.

- A에서: $+y$ 방향의 수직항력 R, 그리고 O 쪽($-x$ 방향)을 향하는 마찰력(friction) μR. A는 O에서 멀어지는 쪽으로 막 미끄러지려 하고 마찰은 한계 상태이기 때문이다.
- B에서: $+x$ 방향의 수직항력 S, 그리고 O에서 멀어지는 쪽($+y$ 방향)을 향하는 마찰력 μS. B는 O 쪽으로 막 미끄러지려 하기 때문이다.
- 중점 M에서 연직 아래로 작용하는 무게 W. y축은 연직 위 방향과 각 α를 이루므로, 무게의 x 방향 성분은 $-W\sin\alpha$, y 방향 성분은 $-W\cos\alpha$이다.



힘의 분해

상자 바닥 방향(x)과 옆면 위쪽 방향(y)으로 분해하면

$$S - \mu R - W\sin\alpha = 0, \tag{1}$$

$$R + \mu S - W\cos\alpha = 0. \tag{2}$$

$R + \mu S = W\cos\alpha \neq 0$이므로 (1)을 (2)로 나누면

$$\frac{S - \mu R}{R + \mu S} = \tan\alpha. \tag{3}$$

중점에 대한 모멘트

무게는 M에 작용하므로 M에 대한 모멘트가 없다. M을 기준으로 할 때 점 A의 위치는 $(L\sin\beta,\ -L\cos\beta)$이고 B의 위치는 $(-L\sin\beta,\ L\cos\beta)$이다. 그림에서 시계 반대 방향 모멘트를 잡으면(상대 위치 (p,q)에 작용하는 힘 (F_x, F_y)의 모멘트는 $pF_y - qF_x$이다)

$$\text{점}A: \quad L\sin\beta\cdot R - (-L\cos\beta)(-\mu R) = LR(\sin\beta - \mu\cos\beta),$$

$$\text{점}B: \quad -L\sin\beta\cdot\mu S - L\cos\beta\cdot S = -LS(\cos\beta + \mu\sin\beta).$$

이 둘의 합은 0이어야 하므로

$$R(\sin\beta - \mu\cos\beta) = S(\cos\beta + \mu\sin\beta).$$

이제 $\mu = \tan\gamma$를 대입하고 양변에 $\cos\gamma$(양수이다)를 곱하면

$$R(\sin\beta\cos\gamma - \cos\beta\sin\gamma) = S(\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma),$$
$$\text{즉,}\quad R\sin(\beta-\gamma) = S\cos(\beta-\gamma).$$

? 생각해 보기 R과 $\cos(\beta-\gamma)$로 나누어도 될까?

두 수직항력은 모두 미는 힘이므로 $R > 0, S > 0$이다. 그러면 $\sin(\beta-\gamma)$와 $\cos(\beta-\gamma)$가 동시에 0일 수는 없고, $R, S > 0$에 대하여 $S\cos(\beta-\gamma) = R\sin(\beta-\gamma)$이므로 둘의 부호가 같다. 따라서 어느 것도 0이 아니며 $\tan(\beta-\gamma) > 0$이다. β와 γ가 모두 $(0, \frac{1}{2}\pi)$에 속하므로 $\beta-\gamma$는 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$에 속하고, 결국

$$\frac{S}{R} = \tan(\beta-\gamma), \qquad 0 < \beta-\gamma < \tfrac{1}{2}\pi. \tag{4}$$

종합하기

(3)의 좌변의 분자와 분모를 R로 나누고, $k = S/R = \tan(\beta-\gamma)$, $\mu = \tan\gamma$로 쓰면

$$\tan\alpha = \frac{k-\mu}{1+k\mu} = \frac{\tan(\beta-\gamma)-\tan\gamma}{1+\tan(\beta-\gamma)\tan\gamma} = \tan\big((\beta-\gamma)-\gamma\big) = \tan(\beta-2\gamma),$$

이다. 여기서 덧셈정리를 이용하였다(분모 $1+k\mu$가 양수이므로 정의되지 않는 부분은 없다). (4)와 $0 < \gamma < \frac{1}{2}\pi$에 의해

$$\beta - 2\gamma = (\beta-\gamma) - \gamma \in \left(-\tfrac{1}{2}\pi,\ \tfrac{1}{2}\pi\right),$$

이고, $\alpha \in (0, \frac{1}{2}\pi)$이기도 하다. 탄젠트 함수는 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$에서 일대일(one-to-one)이므로 $\tan\alpha = \tan(\beta-2\gamma)$로부터

$$\beta = \alpha + 2\gamma,$$

가 반드시 성립하며, 이것이 증명하려던 결과이다. 이는 문제에 주어진 조건 $\alpha < \beta$와도 들어맞으며, 또한 이러한 배치는 $\alpha + 2\gamma < \frac{1}{2}\pi$일 때에만 가능하다는 것도 알려 준다.

검산

- **매끄러운 상자**: $\gamma = 0$이면 결과는 $\beta = \alpha$가 된다. 이를 직접 확인해 보자. 마찰이 없으면 두 수직항력은 P에서 만나는데, P는 AB를 대각선으로 하고 변이 상자의 면을 따르는 직사각형의 네 번째 꼭짓점이다. 평형 상태에 있는 세 힘은 한 점에서 만나야(concurrent) 하므로, M을 지나는 무게의 작용선은 P를 지나야 한다. 즉 MP는 연직이다. 대각선 MP는 OB를 O에서 멀어지는 쪽으로 β만큼 돌린 방향과 평행하고, OB 자체는 연직선에서 O 쪽으로 α만큼 기울어져 있다. 따라서 MP는 연직선과 $\beta-\alpha$의 각을 이루며, 정확히 $\beta = \alpha$일 때 연직이 된다.

- **수치 예**: $\alpha = 20°$, $\gamma = 15°$로 잡으면 $\beta = 50°$이다. 이때 (1)과 (2)로부터 $R \approx 0.791W$, $S \approx 0.554W$(둘 다 양수)이고, $S/R \approx 0.700 \approx \tan 35°$이며, M에 대한 모멘트의 합은 0이 된다.

흔한 실수

- 수평과 수직 방향으로 분해하는 것. 이렇게 해도 풀리기는 하지만, 네 개의 접촉력을 모두 분해해야 하므로 계산이 훨씬 복잡해진다.
- 마찰력의 방향을 잘못 잡는 것. 마찰력은 일어나려는 운동을 방해한다. A에서는 O 쪽을, B에서는 O에서 멀어지는 쪽(옆면 위쪽)을 향한다.
- 두 각이 tan가 일대일인 구간에 속하는 이유를 밝히지 않고 $\tan\alpha = \tan(\beta - 2\gamma)$로부터 결론을 내리는 것.

STEP 너머

$\mu = \tan\gamma$로 두고 마찰력을 μR로 쓰는 것은 **마찰각**(angle of friction)의 개념이다. 극한 평형(limiting equilibrium) 상태에서 전체 접촉력은 법선을 축으로 하고 반각이 γ인 "마찰 원뿔(friction cone)"의 경계 위에 놓인다. 거친 면에 기대어 놓인 강체에 관한 문제는 이러한 원뿔과 한 점에서 만나는 세 힘에 관한 기하 문제가 되며, 쐐기, 사다리, 쌓아 올린 물체의 안정성 같은 문제에도 같은 그림이 깔려 있다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 강체 정역학과 토크를 기본 원리부터 꼼꼼하게 전개한다.

풀이

STEP I 2017, 문제 12

확률과 통계 • 기댓값과 조건부

> **STEP I 2017, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/17-s1-q12

핵심 아이디어

주최자가 거두는 수입은 언제나 Nc로 같다. 유일한 불확실성은 상금을 지급해야 하는지 여부뿐이다. 따라서 기대 이익(expected profit)은 수입에서 J와 **누군가가** 당첨 번호를 골랐을 확률의 곱을 뺀 값이고, 결국 모든 것은 **아무도** 당첨 번호를 고르지 않는 여사건(complementary event)으로 귀결된다. 이 확률은 거듭제곱 $(1-p)^N$ 꼴이며, 근사식(approximation) $(*)$는 바로 이런 식을 다루기 위해 마련된 것이다.

풀이

소문항 (i)

당첨 번호를 W라 하고, 어떤 참가자도 W를 고르지 않는 사건을 E라 하자. W가 무엇이 되든, 각 참가자는 서로 독립적으로(independently) 확률 $1-\frac{1}{N}$로 그 번호를 피하므로

$$\mathrm{P}(E) = \left(1-\frac{1}{N}\right)^N.$$

주최자는 어떤 경우에든 Nc를 받는다. E가 일어나면 당첨자가 없으므로 이익은 Nc이다. 그렇지 않으면 상금이 당첨자들 사이에 나뉘지만, 당첨자가 몇 명이든 지급되는 총액은 J이므로 이익은 $Nc-J$이다. 따라서

$$\text{기대 이익} = Nc - J\,\mathrm{P}(E^c) = Nc - J\left[1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^N\right].$$

$a=1$로 두고 $(*)$를 쓰면 $(1-\frac{1}{N})^N \approx \mathrm{e}^{-1}$이므로, 기대 이익은 근사적으로 $Nc-J(1-$

e^{-1})이다. $J = 2Nc$이면 이는

$$Nc - 2Nc\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right) = Nc\left(\frac{2}{\mathrm{e}} - 1\right).$$

가 된다. $\mathrm{e} > 2$이므로 $2/\mathrm{e} < 1$이고, 따라서 이 값은 음수이다. 즉 주최자는 손실을 볼 것으로 예상된다.

소문항 (ii)

인기 있는 번호는 γN개, 인기 없는 번호는 $(1-\gamma)N$개이다. 각 참가자는 정확히 하나의 번호를 고르므로, N개의 번호 전체에 대한 확률의 합은 1이다.

$$\gamma N \cdot \frac{a}{N} + (1-\gamma)N \cdot \frac{b}{N} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \gamma a + (1-\gamma)b = 1.$$

주최자는 여전히 W를 균등하게(uniformly) 고르므로, W는 확률 γ로 인기 있는 번호이고 확률 $1-\gamma$로 인기 없는 번호이다.

> **생각해 보기** 참가자들은 더 이상 균등하게 고르지 않는다. 이것이 $\mathrm{P}(E)$를 구하는 방법을 바꾸는가?

바뀌는 것은 W를 피할 확률뿐이며, 이 확률은 이제 W가 어떤 종류의 번호인지에 따라 달라진다. 그러므로 이에 대해 조건을 건다(conditioning). W가 인기 있는 번호이면 각 참가자는 독립적으로 확률 $1 - \frac{a}{N}$로 그 번호를 피하고, 인기 없는 번호이면 확률 $1 - \frac{b}{N}$로 피한다. 전확률 법칙(law of total probability)과 $(*)$에 의해

$$\mathrm{P}(E) = \gamma\left(1 - \frac{a}{N}\right)^N + (1-\gamma)\left(1 - \frac{b}{N}\right)^N \approx \gamma\,\mathrm{e}^{-a} + (1-\gamma)\,\mathrm{e}^{-b}.$$

소문항 (i)에서와 같이 기대 이익은 $Nc - J\big(1 - \mathrm{P}(E)\big)$이므로

$$\text{기대 이익} \approx \gamma J\,\mathrm{e}^{-a} + (1-\gamma)J\,\mathrm{e}^{-b} + (Nc - J),$$

이고, 이는

$$A = \gamma J, \qquad B = (1-\gamma)J, \qquad C = Nc - J.$$

로 둔 요구된 꼴이다.

$\gamma = \frac{1}{8}$, $a = 9b$인 경우. 관계식으로부터 $\frac{1}{8}\cdot 9b + \frac{7}{8}b = 1$, 즉 $2b = 1$이므로

$$b = \tfrac{1}{2}, \qquad a = \tfrac{9}{2}.$$

$J = 2Nc$이면 $A = \frac{1}{4}Nc$, $B = \frac{7}{4}Nc$, $C = -Nc$이므로 기대 이익은 근사적으로

$$Nc\left(\tfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-9/2} + \tfrac{7}{4}\mathrm{e}^{-1/2} - 1\right).$$

이다. 괄호 안의 첫째 항은 양수이므로 $\frac{7}{4}e^{-1/2} > 1$, 즉 $\sqrt{e} < \frac{7}{4}$임을 보이면 충분하다. $e < 3$이므로

$$\sqrt{e} < \sqrt{3} < \frac{7}{4},$$

이고, 마지막 단계는 양변이 모두 양수이며 $3 < \frac{49}{16}$(즉 $48 < 49$)이기 때문에 성립한다. 따라서 괄호 안은 양수이고, 주최자는 이익을 볼 것으로 예상된다. 상금은 소문항 (i)과 같지만, 당첨 번호가 인기 없는 번호인 경우가 많기 때문에 상금이 주인을 찾지 못하는 일이 더 잦다.

검산

- $J = 2Nc$일 때 소문항 (i)의 기대 이익은 약 $(2/e - 1)Nc \approx -0.264\,Nc$이고, 마지막 부분의 기대 이익은 $\left(\frac{1}{4}e^{-4.5} + \frac{7}{4}e^{-0.5} - 1\right)Nc \approx 0.064\,Nc$이다. 주장한 대로 작은 이익이다.
- $N = 800$일 때 정확한 거듭제곱 $(1 - a/N)^N$을 쓰면 $0.0640\,Nc$가 나오므로, 여기서 근사식 $(*)$는 매우 정확하다.
- $\gamma = 1$(모든 번호가 "인기 있는" 번호)이면 관계식에 의해 $a = 1$이 되고, 소문항 (ii)의 식은 소문항 (i)의 $Je^{-1} + Nc - J$로 바뀐다.
- $N = 4$일 때(참가자들이 고를 수 있는 4^4가지 경우 전부) 컴퓨터로 정확히 열거한 결과는 근사하지 않은 두 식과 모두 일치한다.

흔한 실수

- 상금이 어떻게 나뉘는지를 걱정하는 것. 당첨자가 한 명 이상이면 당첨자 수와 관계없이 주최자가 지급하는 총액은 J이다.
- 당첨 번호가 인기 있는 번호일 확률이 a나 b에 따라 달라진다고 가정하는 것. 주최자는 균등하게 고르므로, 그 확률은 γ이다.
- 각 종류의 번호가 몇 개인지 세는 것을 잊고 관계식을 $a + b = 1$이나 $\gamma a + b = 1$로 쓰는 것.

STEP 너머

당첨 번호를 고르는 참가자의 수는 모수가 N과 p인 이항분포(binomial distribution)를 따르며, $(*)$는 N이 크고 Np가 고정되어 있을 때 이 분포가 근사적으로 푸아송 분포(Poisson distribution)임을 이해하는 첫걸음이다. $(1 - p)^N \to e^{-Np}$는 바로 푸아송 분포에서 0이 나올 확률이다. 이월(roll-over)이 있는 실제 복권도 정확히 이런 방식으로 분석되며, 인기 없는 번호를 고르는 사람들은 실제로 더 높은 기대 수익을 얻는다. Grimmett and Welsh,

Probability: An Introduction(확률론 입문)은 푸아송 극한과 여기서 사용한 것과 같은 조건부 논증을 전개한다.

풀이

STEP I 2017, 문제 13

확률과 통계 • 확률의 점화식

> **STEP I 2017, 13번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/17-s1-q13

핵심 아이디어

각 빵 조각을 보고 그것이 어떻게 쓰이는지 묻는다. 빵 조각은 토스트가 되거나, 샌드위치의 첫 번째 조각이 되거나, 샌드위치의 두 번째 조각이 될 수 있다. 이 중 정확히 하나가 일어나며, 바로 앞 조각이 어떤 경우가 가능한지를 결정한다. 조각 $r-1$이 간식 하나를 끝내면 조각 r은 새 간식을 시작하고, 그렇지 않으면 조각 r은 샌드위치의 나머지 절반이어야 한다. 이로부터 1계 점화식(first-order recurrence)을 얻으며, 이것은 고정점(fixed point)을 빼는 통상적인 방법으로 푼다.

풀이

설정하기

빵 조각에 사용되는 순서대로 $1, 2, \ldots, n$의 번호를 붙인다. 각 조각 r에 대해 다음 중 정확히 하나가 일어난다.

- T_r: 조각 r이 토스트로 쓰인다.
- A_r: 조각 r이 샌드위치를 이루는 두 조각 중 첫 번째이다.
- S_r: 조각 r이 샌드위치를 이루는 두 조각 중 두 번째이다.

따라서 $t_r = \mathrm{P}(T_r)$, $s_r = \mathrm{P}(S_r)$이고 $\mathrm{P}(A_r) = 1 - s_r - t_r$이다. T_r 또는 S_r이 일어날 때 조각 r이 **간식을 끝낸다**고 하자. 이 확률은 $s_r + t_r$이다.

첫 번째 조각은 첫 간식을 시작하므로 샌드위치의 두 번째 조각이 될 수 없다.

$$s_1 = 0.$$

(또한 $n \geq 2$이면 $t_1 = p$이고, $n = 1$이면 $t_1 = 1$이다.)

두 방정식

t_r에 대한 방정식. 조각 r이 새 간식을 시작하는 것은 정확히 조각 $r-1$이 간식을 끝낼 때이며, 그 확률은 $s_{r-1} + t_{r-1}$이다. 조각 r이 간식을 시작한다는 조건 아래에서 조각 $r, r+1, \ldots, n$이 남아 있고, $r \leq n-1$이면 이는 적어도 두 조각이므로, 앞에서 무슨 일이 있었든 나는 확률 p로 토스트를 고른다. 조각 $r-1$이 간식을 끝내지 않으면 조각 r은 샌드위치를 완성하므로 토스트가 아니다. 따라서

$$t_r = (s_{r-1} + t_{r-1})\, p \qquad (2 \leq r \leq n-1).$$

$r = n$일 때는 이 식이 성립하지 않는데, 마지막 조각에서 시작하는 간식은 반드시 토스트이기 때문이다.

s_r에 대한 방정식. 조각 r이 샌드위치의 두 번째 조각인 것은 정확히 조각 $r-1$이 샌드위치의 첫 번째 조각일 때, 즉 조각 $r-1$이 간식을 끝내지 **않을** 때이다. 따라서

$$s_r = 1 - (s_{r-1} + t_{r-1}) \qquad (2 \leq r \leq n).$$

여기서는 남은 조각의 개수에 대한 조건이 필요 없으므로, 이 식은 $r = n$까지 그대로 성립한다.

s_r에 대한 점화식

두 번째 방정식에서 r을 $r+1$로 바꾸어 적용하면 $s_r + t_r = 1 - s_{r+1}$을 얻으므로, 첫 번째 방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$t_r = p\,(1 - s_r) \qquad (2 \leq r \leq n-1).$$

$t_1 = p$이고 $s_1 = 0$이므로, 이 식은 $n \geq 2$일 때 $r = 1$에서도 성립한다. $1 \leq r-1 \leq n-1$일 때 성립하는 $t_{r-1} = p(1 - s_{r-1})$을 s_r에 대한 방정식에 대입하면

$$\begin{aligned} s_r &= 1 - s_{r-1} - p(1 - s_{r-1}) \\ &= (1-p)(1 - s_{r-1}) \\ &= q\,(1 - s_{r-1}), \end{aligned}$$

이 $2 \leq r \leq n$에 대해, 특히 요구된 대로 $2 \leq r \leq n-1$에 대해 성립한다.

점화식 풀기

? **생각해 보기** $s_r = q - qs_{r-1}$은 어떻게 풀까? 어떤 상수 수열이 이 식을 만족할까?

상수해 $s_r = c$가 되려면 $c = q - qc$이어야 하므로 $c = \dfrac{q}{1+q}$이다. 점화식에서 $c = q - qc$를 빼면

$$s_r - \frac{q}{1+q} = -q\left(s_{r-1} - \frac{q}{1+q}\right),$$

이므로 $s_r - \frac{q}{1+q}$는 한 단계마다 $-q$배가 된다. $s_1 - \frac{q}{1+q} = -\frac{q}{1+q}$에서 출발하면

$$s_r - \frac{q}{1+q} = (-q)^{r-1}\left(-\frac{q}{1+q}\right) = \frac{(-q)^r}{1+q},$$

이고, 따라서

$$s_r = \frac{q + (-q)^r}{1+q} \qquad (1 \le r \le n-1).$$

(점화식이 $r = n$까지 성립하므로, 실제로는 같은 공식이 $r = n$에서도 성립한다.)

t_r에 대해서는 $t_r = p(1 - s_r)$과

$$1 - s_r = \frac{1 + q - q - (-q)^r}{1+q} = \frac{1 - (-q)^r}{1+q},$$

을 이용하면

$$t_r = \frac{p\left(1 - (-q)^r\right)}{1+q} \qquad (1 \le r \le n-1).$$

마지막 조각

앞에서 언급했듯이 s_r에 대한 방정식과 점화식 $s_r = q(1 - s_{r-1})$은 $r = n$에서도 성립하므로, 공식이 그대로 이어진다.

$$s_n = \frac{q + (-q)^n}{1+q}.$$

마지막 조각 뒤에는 아무것도 없으므로 마지막 조각은 샌드위치의 첫 번째 조각이 될 수 없다. 따라서 마지막 조각은 토스트이거나 샌드위치의 두 번째 조각이며, $t_n = 1 - s_n$이다.

$$t_n = \frac{1 - (-q)^n}{1+q}.$$

$r < n$일 때의 t_r과 비교하면 인수 p가 사라졌다. 마지막 조각에서 간식이 시작되면 토스트가 확실하기 때문이다. (이 식들은 $n = 1$일 때도 성립하며, $s_1 = 0$과 $t_1 = 1$을 준다.)

검산

- $n = 3$, $p = q = \frac{1}{2}$로 두자. 가능한 순서는 토스트–토스트–토스트(확률 $\frac{1}{4}$), 토스트 다음 샌드위치(확률 $\frac{1}{4}$), 샌드위치 다음 토스트(확률 $\frac{1}{2}$)이다. 따라서 $s_3 = \frac{1}{4}$이고 $t_3 = \frac{3}{4}$이다. 공식은 $s_3 = \dfrac{\frac{1}{2} - \frac{1}{8}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{4}$, $t_3 = \dfrac{1 + \frac{1}{8}}{\frac{3}{2}} = \frac{3}{4}$를 준다.
- $q = 0$(항상 토스트)이면 모든 r에 대해 $s_r = 0$, $t_r = 1$을 얻으며, 마땅히 그래야 한다.
- r이 커지면 $s_r \to \frac{q}{1+q}$이다. 이는 타당하다. 장기적으로 간식 중 q의 비율이 샌드위치이고 각 샌드위치에는 "두 번째 조각"이 하나씩 있으며, 간식 하나는 평균 $1 + q$개의 조각을 쓰므로, 조각 중 $\frac{q}{1+q}$의 비율이 두 번째 조각이다.
- $n \leq 12$와 여러 p 값에 대해 모든 간식 순서를 정확히 열거하여 컴퓨터로 모든 공식을 확인하였다.

흔한 실수

- $t_n = p(s_{n-1} + t_{n-1})$을 사용하는 것: 마지막 조각에서 간식이 시작되면 그것은 확률 p가 아니라 확률 1로 토스트이다.
- 사건 "조각 $r - 1$이 토스트이다"와 "조각 r이 토스트이다"가 독립(independent)이라고 생각하는 것. 그렇지 않다. 중요한 것은 조각 r이 간식을 시작하는지이며, 이는 이전의 이력에 의존한다.
- 점화식을 풀 때 부호를 놓치는 것: 공비는 $-q$이므로 답은 $\frac{q}{1+q}$를 중심으로 번갈아 진동한다.

STEP 너머

조각 r이 새 간식을 시작하는지 여부는 단순한 **재생 과정**(renewal process)을 이룬다. 간식의 길이는 서로 독립이고 각각 1 또는 2이며, 극한 $\frac{q}{1+q}$는 재생 정리(renewal theorem)의 한 예이다(장기적인 재생 비율은 평균 간격의 역수이다). 동등하게, 각 조각의 유형은 마르코프 연쇄(Markov chain)를 이루며, $(-q)^r$은 이 연쇄가 시작 상태를 얼마나 빨리 잊는지를 보여 준다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 마르코프 연쇄와 이런 종류의 점화식을 모두 다룬다.

풀이

STEP II 2017, 문제 1

순수수학 • 점화 공식

> **STEP II 2017, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/17-s2-q1

핵심 아이디어

피적분함수에서 다루기 까다로운 부분은 $\arctan x$이지만, 그 도함수(derivative)는 유리함수이므로 $u = \arctan x$로 두고 부분적분(integration by parts)을 하면 이것이 $\frac{1}{1+x^2}$로 바뀐다. 그다음 (ii)의 요령은 두 적분을 짝지어 분자가 $x^{n+1}(1+x^2)$로 합쳐지게 하여 골치 아픈 분모가 약분되도록 하는 것이다. 그러면 n을 2씩 옮기는 점화식(reduction formula)을 얻는다. 이것을 두 번 쓰면 n이 4씩 옮겨지는데, 이것이 바로 (iii)의 귀납법(induction)에 필요한 것이다.

풀이

소문항 (i)

$u = \arctan x$, $\mathrm{d}v = x^n\,\mathrm{d}x$로 두고 부분적분한다. 그러면 $v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$이다($n \geq 0$이므로 문제없다).

$$\begin{aligned} I_n &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\arctan x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

여기서 $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$이고 경계항이 $x = 0$에서 0이 된다는 사실을 이용하였다. 양변에 $n+1$을 곱하면 구하는 결과를 얻는다.

$$(n+1)I_n = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

$n = 0$일 때 남은 적분은 $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$이므로

$$I_0 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

소문항 (ii)

(i)에서 n 대신 $n+2$를 넣은 식을 (i)의 원래 식에 더한다.

$$\begin{aligned}(n+3)I_{n+2} + (n+1)I_n &= \frac{\pi}{2} - \int_0^1 \frac{x^{n+3} + x^{n+1}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2} - \int_0^1 x^{n+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n+2},\end{aligned}$$

이는 $x^{n+3} + x^{n+1} = x^{n+1}(1+x^2)$이기 때문이다.

? **생각해 보기** 이 공식은 I_4를 I_2와, I_2를 I_0와 연결한다. 어떤 n 값들이 필요한가?

$n = 0$과 $n = 2$가 필요하다.

$$\begin{aligned}n = 0: &\quad 3I_2 + I_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}, \\ n = 2: &\quad 5I_4 + 3I_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

두 번째 식에서 첫 번째 식을 빼면 I_2가 소거된다.

$$5I_4 = I_0 + \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln 2, \qquad \text{따라서} \qquad I_4 = \frac{\pi + 1 - 2\ln 2}{20}.$$

소문항 (iii)

간단히 $S_n = \sum_{r=1}^{2n} \frac{(-1)^r}{r}$로 쓴다.

A **구하기.** $n = 1$일 때 $S_1 = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$이므로, 주장은 $5I_4 = A + \frac{1}{4}$가 된다. (ii)에서 $5I_4 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$이므로

$$A = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 \;(= I_0),$$

로 잡아야 하고, 이 값이면 주장은 $n = 1$에서 성립한다.

귀납 단계. 어떤 $k \geq 1$에 대하여 $(4k+1)I_{4k} = A - \frac{1}{2}S_k$라고 가정하자. 우리는 I_{4k+4}에 도달하고 싶은데, 이는 (ii)의 공식을 두 번 적용한 거리에 있다. $n = 4k+2$와 $n = 4k$를 넣으면

$$\begin{aligned}(4k+5)I_{4k+4} + (4k+3)I_{4k+2} &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4k+4}, \\ (4k+3)I_{4k+2} + (4k+1)I_{4k} &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4k+2}.\end{aligned}$$

생각해 보기 필요 없는 I_{4k+2}를 어떻게 없앨 수 있는가?

이 항은 두 식에 같은 계수로 나타나므로, 첫 번째 식에서 두 번째 식을 빼면 사라진다.

$$(4k+5)I_{4k+4} = (4k+1)I_{4k} + \frac{1}{4k+2} - \frac{1}{4k+4}.$$

한편 S_{k+1}은 S_k보다 항이 두 개 더 많은데, 바로 $r = 2k+1$(홀수이므로 음수)과 $r = 2k+2$(짝수이므로 양수)인 항이다.

$$-\frac{1}{2}S_{k+1} = -\frac{1}{2}S_k - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}\right) = -\frac{1}{2}S_k + \frac{1}{4k+2} - \frac{1}{4k+4}.$$

귀납 가정을 이용하면

$$(4k+5)I_{4k+4} = A - \frac{1}{2}S_k + \frac{1}{4k+2} - \frac{1}{4k+4} = A - \frac{1}{2}S_{k+1},$$

이고, 이것은 $n = k+1$일 때의 주장이다. 주장이 $n = 1$에서 성립하므로, 수학적 귀납법에 의해 $A = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$일 때 모든 $n \geq 1$에 대하여 성립한다.

검산

- 수치적으로 $I_0 \approx 0.438825$, $I_4 \approx 0.137765$이다. 원래 적분에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면 소수점 아래 열째 자리까지 일치한다.
- A가 I_0와 같으므로 (iii)의 공식은 $n = 0$일 때도 성립한다(이때 합은 빈 합이다). 좋은 신호이다.
- $n \to \infty$일 때 (i)의 적분은 0으로 수렴(converge)한다(피적분함수가 x^{n+1} 이하이므로). 따라서 $(4n+1)I_{4n} \to \frac{\pi}{4}$이다. 한편 $S_n \to -\ln 2$이므로 우변은 $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{\pi}{4}$로 수렴한다. 극한에서 양변이 일치한다.

흔한 실수

- $v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$로 써 놓고 두 번째 적분도 $n+1$로 나누는 것을 잊는 실수.
- 교대합의 새로운 두 항의 부호를 잘못 처리하는 실수: $r = 2k+1$은 홀수이므로 $(-1)^r = -1$이다.
- 기저 단계에서 A를 먼저 정하지 않고 귀납 단계를 증명하는 실수.

STEP 너머

마지막 검산에서는 교대 조화급수(alternating harmonic series) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots=\ln 2$를 사용하였는데, 사실 이 문제는 그것을 증명하고 있다. (iii)의 항등식과 $(4n+1)I_{4n}\to\frac{\pi}{4}$라는 사실을 합치면 부분합이 $\ln 2$로 수렴할 수밖에 없다. $\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$처럼 0으로 줄어드는 적분을 다루는 것은 급수의 오차를 제어하는 표준적인 방법이며, 대학 첫 해석학(analysis) 강의에서 만나게 될 것이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 이러한 극한을 어떻게 엄밀하게 다루는지 친절하게 보여 주는 책이다.

풀이

STEP II 2017, 문제 2

순수수학 • 주기수열

> **STEP II 2017, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/17-s2-q2

핵심 아이디어

사상(map)을 자기 자신과 합성(compose)하고 정리한다. 점화식(recurrence)을 두 번 적용하면 정확히 같은 "일차식 나누기 일차식" 꼴의 사상이 다시 나오므로, 네 단계는 두 단계를 두 번 적용한 것일 뿐이다. $x_{n+k} = x_n$인지 물을 때마다 분모를 없애면 x_n에 대한 이차식이 나오고, 그 이차식은 인수분해(factorise)된다. 그 인수 가운데 하나는 언제나 $x^2 + (b-a)x + 1$이며, 이 식의 근은 바로 점화식의 **고정점**(*fixed point*), 즉 상수 수열을 만드는 값이다. 이것을 알아차리는 것이 두 소문항을 모두 해결하는 열쇠이다.

풀이

$f(x) = \dfrac{ax-1}{x+b}$라 두면 $x_{n+1} = f(x_n)$이다. 그러면

$$x_{n+2} = \frac{a\dfrac{ax_n - 1}{x_n + b} - 1}{\dfrac{ax_n - 1}{x_n + b} + b}.$$

분자와 분모에 $x_n + b$(가정에 의해 0이 아니다)를 곱하면

$$x_{n+2} = \frac{a(ax_n - 1) - (x_n + b)}{(ax_n - 1) + b(x_n + b)} = \boxed{\frac{(a^2-1)x_n - (a+b)}{(a+b)x_n + b^2 - 1}}$$

을 얻는다.

여기서 한 가지 사실을 더 적어 두는 것이 좋다. 값 x가 고정점($f(x) = x$)일 필요충분조건은 $ax - 1 = x^2 + bx$, 즉

$$q(x) \equiv x^2 + (b-a)x + 1 = 0. \qquad (*)$$

이다. x_0이 q의 근이면 $x_1 = x_0$이고, 이후로도 계속 마찬가지이다. 즉 수열은 상수이고 주기(period)는 1이다.

소문항 (i)

수열의 주기가 2라고 하자. 그러면 특히 $x_2 = x_0$이다. x_{n+2}에 대한 식에 $x = x_0$을 넣고 분모를 없애면

$$\begin{aligned} 0 &= (a^2-1)x - (a+b) - x\big[(a+b)x + b^2 - 1\big] \\ &= -(a+b)x^2 + (a^2-b^2)x - (a+b) \\ &= -(a+b)\big[x^2 + (b-a)x + 1\big], \end{aligned}$$

이다. 여기서 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$를 이용하였다. 따라서 $(a+b)\,q(x_0) = 0$이다.

> **?** **생각해 보기** 왜 "$q(x_0) = 0$은 x_0의 한 값에 불과하다"라고 말하고 끝낼 수 없을까?

x_0은 하나의 수이고, 그것이 q의 근이 되는 것을 막는 것은 아무것도 없기 때문이다. 이 경우를 배제하는 것은 $(*)$의 의미이다. $q(x_0) = 0$이면 x_0은 고정점이므로 $x_1 = x_0$이고, 모든 n에 대해 $x_{n+1} = x_n$이다. 이는 주기 1이며, 주기 2의 정의가 이를 금한다($m = 1$을 택하면 된다). 따라서 $q(x_0) \neq 0$이고, 그러므로

$$a + b = 0$$

은 주기 2이기 위한 필요조건이다.

(역으로 $b = -a$이면 두 단계 식은 $x_{n+2} = \dfrac{(a^2-1)x_n}{a^2-1} = x_n$으로 줄어든다. 여기서 $a^2 = 1$인 경우는 일어날 수 없는데, 그렇다면 $a = 1$, $b = -1$일 때 $x_1 = 1$이고 $a = -1$, $b = 1$일 때 $x_1 = -1$이 되어 어느 쪽이든 $x_1 + b = 0$이 되며, 이는 배제된 경우이기 때문이다.)

소문항 (ii)

$A = a^2 - 1$, $B = b^2 - 1$, $c = a + b$라 두면 $g(x) = \dfrac{Ax - c}{cx + B}$에 대해 $x_{n+2} = g(x_n)$이다. g를 두 번 적용하고 다시 분자와 분모에 $cx + B$를 곱하면

$$x_{n+4} = \frac{A(Ax_n - c) - c(cx_n + B)}{c(Ax_n - c) + B(cx_n + B)} = \frac{(A^2 - c^2)x_n - c(A+B)}{c(A+B)x_n + B^2 - c^2}.$$

이다. 이제 $x_{n+4} = x_n$이 성립할 필요충분조건은

$$\begin{aligned} 0 &= (A^2 - c^2)x_n - c(A+B) - x_n\big[c(A+B)x_n + B^2 - c^2\big] \\ &= -c(A+B)x_n^2 + (A^2 - B^2)x_n - c(A+B) \\ &= -(A+B)\big[c\,x_n^2 + (B-A)x_n + c\big]. \end{aligned}$$

이다. $B - A = b^2 - a^2 = (b-a)(a+b) = (b-a)c$이므로 대괄호 안의 식은 $c\,q(x_n)$이고, 따라서

$$x_{n+4} = x_n \iff (a^2 + b^2 - 2)\,(a+b)\,q(x_n) = 0.$$

필요성(*necessity*). 주기가 4라고 하자. 수열은 상수가 아니므로 x_0은 고정점이 아니고 $q(x_0) \neq 0$이다. $a + b = 0$이면 소문항 (i)의 역에 의해 $x_2 = x_0$이고, 실제로 모든 n에 대해 $x_{n+2} = x_n$이 되어 주기 4에 모순이다. 따라서 $a + b \neq 0$이고, $n = 0$일 때의 인수분해로부터 반드시

$$a^2 + b^2 = 2.$$

이다.

충분성(*sufficiency*). $a^2 + b^2 = 2$라고 하자. 그러면 $A + B = 0$이므로 모든 n에 대해 $x_{n+4} = x_n$이다. 이보다 작은 m은 성립하지 않음을 확인해야 한다.

- $a + b \neq 0$이다. 그렇지 않으면 $a^2 = b^2 = 1$이고, 소문항 (i)에서와 같이 $x_1 + b = 0$이 되는데, 이는 배제된 경우이다.
- 실수 고정점이 없다. q의 판별식(discriminant)은 $(b-a)^2 - 4 = (a^2 + b^2) - 2ab - 4 = -2(1 + ab)$이고, $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2) = 1$이며, $ab = -1$인 것은 $(a, b) = \pm(1, -1)$일 때뿐인데 이는 방금 배제하였다. 따라서 $ab > -1$이고 판별식은 음수이므로 모든 실수 x_n에 대해 $q(x_n) \neq 0$이다. 그러므로 $m = 1$은 성립하지 않는다.
- $m = 2$: 소문항 (i)에 의해 $x_2 = x_0$이려면 $(a+b)q(x_0) = 0$이어야 하는데, 이는 거짓이다. 그러므로 $m = 2$는 성립하지 않는다.
- $m = 3$: 모든 n에 대해 $x_{n+3} = x_n$이면, 모든 n에 대해 $x_{n+1} = x_{(n+1)+3} = x_{n+4} = x_n$이 되어 주기가 1이 되는데, 이는 방금 배제하였다.

그러므로 실수 a, b, x_0에 대하여(문제에서 허용하듯 분모는 0이 아니라 할 때), 수열의 주기가 4일 필요충분조건은

$$\boxed{a^2 + b^2 = 2.}$$

이다. 시작값 x_0은 이 조건에 아무런 역할도 하지 않는다.

검산

$a = \sqrt{2}, b = 0, x_0 = 1$로 두자. 수열은

$$1, \quad \sqrt{2} - 1, \quad -1, \quad \sqrt{2} + 1, \quad 1, \ldots$$

과 같이 진행하며, 주기는 정확히 4이다. 예를 들어 $f(-1) = (-\sqrt{2} - 1)/(-1) = \sqrt{2} + 1$이다. 컴퓨터로 무작위 유리수 a, b, x_0 수천 개에 대해 두 단계 식과 네 단계 식이 정확히 맞음

을 확인하였다. 또한 원 $a^2 + b^2 = 2$ 위의 무작위 점 약 이천 개에 대해 주기가 4임을 확인하였고, 이 원 밖의 무작위 (a, b)에 대해서는 네 단계 후에 처음 값으로 돌아오지 않음을 확인하였다.

흔한 실수

- $(a + b)q(x_0) = 0$으로부터 왜 $q(x_0) \neq 0$인지 설명하지 않고 $a + b = 0$이라고 결론짓는 것. 고정점이라는 해석이 그 이유이다.
- 주기가 실제로는 1이나 2가 아닌지 확인하지 않고 $a^2 + b^2 = 2$를 주기 4의 답으로 제시하는 것.
- 소문항 (ii)의 대괄호에서 인수 $a + b$를 빠뜨려, 주기 2인 경우 $a + b = 0$이 잘못하여 주기 4를 주는 것처럼 보이게 되는 것.

STEP 너머

사상 $x \mapsto \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$를 **뫼비우스 변환**(*Möbius transformation*)이라 한다. 이러한 사상 두 개를 합성하는 것은 그에 대응하는 2×2 행렬(matrix), 여기서는 $\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$를 곱하는 것에 해당한다. 이 사상의 주기가 k일 필요충분조건은 행렬의 k제곱이 항등행렬(identity matrix)의 상수배가 되는 것이며, 이는 비 $(\text{대각합})^2/\det = (a + b)^2/(ab + 1)$에 의해 결정된다. 주기 4는 이 값이 2인 경우에 해당하며, 이는 모습을 바꾼 "$\pi/4$만큼의 회전"이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*에는 뫼비우스 변환에 관한 아름다운 장이 있고, Strang의 *Introduction to Linear Algebra*는 그 바탕에 있는 고윳값(eigenvalue)에 관한 아이디어를 다룬다.

풀이

STEP II 2017, 문제 3

순수수학 • 곡선 그리기

> **STEP II 2017, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/17-s2-q3

핵심 아이디어

방정식 $\sin y = k$의 해는 결코 하나뿐이 아니다. y_0이 해이면 $\pi - y_0$도 해이고, 이들과 2π의 정수배만큼 차이 나는 값도 모두 해이다. 따라서 이 문제의 그래프는 모두 하나의 기본 곡선을 몇 개 복사하여 사인 함수의 대칭성(symmetry)에 따라 배치한 것이다. 소문항 (i)은 이 패턴을 직선으로 보여 준다. (ii)에서는 미적분으로 기본 조각 $y = \arcsin(\frac{1}{2}\sin x)$의 모양을 정확히 정하고, 나머지는 대칭성이 해결한다. 소문항 (iii)은 $\cos y$를 사인으로 바꾸어 쓰면 (ii)와 같은 문제가 된다.

풀이

소문항 (i)

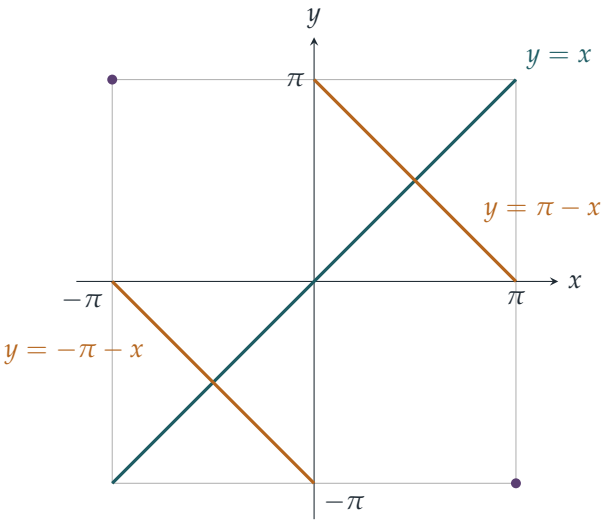
$\sin y = \sin x$인 것은 정확히 다음과 같을 때이다.

$$y = x + 2k\pi \qquad \text{또는} \qquad y = \pi - x + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

이제 이 직선들 가운데 어느 것이 정사각형 $-\pi \le x, y \le \pi$와 만나는지 살펴본다.

- $y = x$는 $(-\pi, -\pi)$에서 (π, π)까지 대각선 전체를 지난다.
- $y = x \pm 2\pi$이려면 $y - x = \pm 2\pi$이어야 한다. 정사각형 안에서는 $|y - x| \le 2\pi$이고 등호는 꼭짓점에서만 성립하므로, 이 직선들은 두 고립점(isolated point) $(-\pi, \pi)$와 $(\pi, -\pi)$만을 준다.
- $x + y = \pi$는 $(0, \pi)$에서 $(\pi, 0)$까지의 선분이고, $x + y = -\pi (k = -1$인 경우$)$는 $(-\pi, 0)$에서 $(0, -\pi)$까지의 선분이다.
- $|x + y| \le 2\pi$이므로 $x + y = 3\pi$ 또는 -3π는 불가능하다.

따라서 구하는 집합은 대각선 $y = x, x + y = \pm\pi$의 두 선분, 그리고 두 꼭짓점 $(-\pi, \pi)$와 $(\pi, -\pi)$이다.



고립된 꼭짓점들은 놓치기 쉽다. $\sin(\pm\pi) = 0$이므로 이들은 진짜 해이다.

소문항 (ii)

$\sin y = \frac{1}{2}\sin x$를 음함수 미분(implicit differentiation)하면 $y' \cos y = \frac{1}{2}\cos x$를 얻는다. $0 \le y \le \frac{1}{2}\pi$에서는 $\cos y \ge 0$이므로

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - \tfrac{1}{4}\sin^2 x} = \tfrac{1}{2}\sqrt{4 - \sin^2 x},$$

이고, 이 값은 결코 0이 아니다. 따라서

$$y' = \frac{\cos x}{\sqrt{4 - \sin^2 x}}.$$

$s = \sin x$라 하자. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{4 - s^2} = \dfrac{-s\cos x}{\sqrt{4 - s^2}}$를 이용하여 몫의 미분법(quotient rule)을 적용하면

$$y'' = \frac{-\sin x\sqrt{4 - s^2} - \cos x \cdot \dfrac{-s\cos x}{\sqrt{4 - s^2}}}{4 - s^2} = \frac{-s(4 - s^2) + s\cos^2 x}{(4 - s^2)^{3/2}}$$
$$= \frac{s\left(-4 + s^2 + 1 - s^2\right)}{(4 - s^2)^{3/2}} = -\frac{3\sin x}{(4 - \sin^2 x)^{3/2}},$$

이다. 여기서 $\cos^2 x = 1 - s^2$를 이용하였다. 이것이 구하는 결과이다.

기본 조각. 이 4분의 1 정사각형 안에서 곡선은 $y = f(x)$이고, 여기서 $f(x) = \arcsin(\frac{1}{2}\sin x)$이다. $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{1}{6}\pi$이므로 곡선은 $(0,0)$에서 시작하여 $(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{6}\pi)$에서 끝나며, 위쪽 변 $y = \frac{1}{2}\pi$ 근처에는 가지 않는다. 기울기는 원점에서 $\frac{1}{2}$이고 $x = \frac{1}{2}\pi$에서 0으로 줄어든다. 또 $0 < x \leq \frac{1}{2}\pi$에서 $y'' < 0$이고 $x = 0$에서 $y'' = 0$이므로, 곡선은 위로 볼록(concave)하고 증가하며 원점에서 변곡점(point of inflection)을 갖는다.

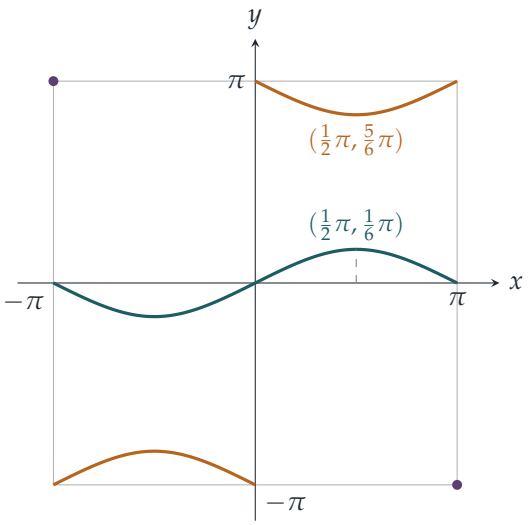
생각해 보기 미적분을 더 하지 않고 이 작은 호로부터 정사각형 전체의 그래프를 어떻게 얻을 수 있을까?

대칭성을 이용한다. $\sin(\pi - x) = \sin x$이고 f는 기함수(odd function)이므로, $[-\pi, \pi]$에서 $y = f(x)$의 그래프는 직선 $x = \frac{1}{2}\pi$에 대하여 대칭이고 원점에 대하여 회전대칭이다. 이 그래프는 $(-\pi, 0)$, $(0,0)$, $(\pi, 0)$을 지나는 완만한 물결 모양이며, 최댓점은 $(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{6}\pi)$, 최솟점은 $(-\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{6}\pi)$이다. 기울기는 원점에서 $\frac{1}{2}$이고 $x = \pm\pi$에서 $-\frac{1}{2}$이다.

(i)에서처럼 전체 해집합은 $y = f(x) + 2k\pi$ 또는 $y = \pi - f(x) + 2k\pi$로 주어진다. 정사각형 안에 남는 것은 다음과 같다.

- 모든 $-\pi \leq x \leq \pi$에 대한 물결 $y = f(x)$;
- $y = \pi - f(x)$. 이것은 $f(x) \geq 0$인 곳, 곧 $0 \leq x \leq \pi$에서만 정사각형 안에 있다. 이는 $(0, \pi)$에서 (π, π)까지 아래로 처진 아치이고, 가장 낮은 점은 $(\frac{1}{2}\pi, \frac{5}{6}\pi)$이다;
- $y = -\pi - f(x)$. 이것은 $f(x) \leq 0$인 곳, 곧 $-\pi \leq x \leq 0$에서만 정사각형 안에 있다. 이는 $(-\pi, -\pi)$에서 $(0, -\pi)$까지 위로 솟은 아치이고, 가장 높은 점은 $(-\frac{1}{2}\pi, -\frac{5}{6}\pi)$이다;
- 고립된 꼭짓점 $(-\pi, \pi)$와 $(\pi, -\pi)$. 이들은 각각 $x = -\pi$에서의 $y = \pi - f(x)$와 $x = \pi$에서의 $y = -\pi - f(x)$로부터 나온다.

k의 다른 값들은 $|y| > \pi$를 준다. 아치들은 직선 $y = \pm\pi$와 기울기 $\pm\frac{1}{2}$로 만나며, 물결을 반 바퀴 회전시킨 뒤 위나 아래로 옮긴 것이다. (i)과 비교해 보자. 대각선은 납작해져 물결이 되었고, 두 선분은 휘어져 아치가 되었다.



소문항 (iii)

생각해 보기 $\cos y$를 이미 그려 본 것으로 어떻게 바꿀 수 있을까?

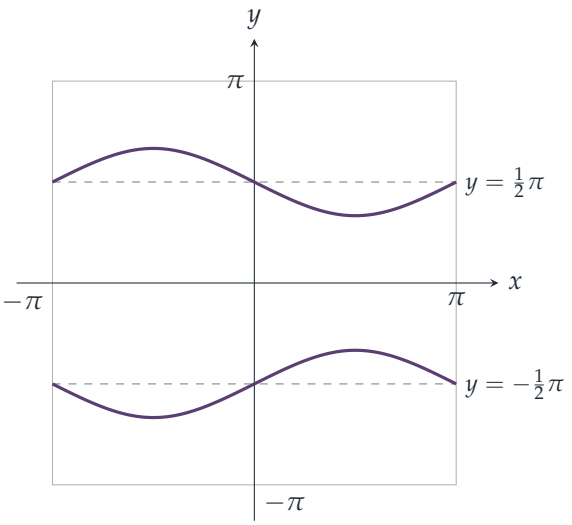
$\cos y = \sin(\frac{1}{2}\pi - y)$로 쓴다. 그러면 $\cos y = \frac{1}{2}\sin x$는 $u = \frac{1}{2}\pi - y$가 $\sin u = \frac{1}{2}\sin x$를 만족한다는 뜻이므로, $u = f(x) + 2k\pi$ 또는 $u = \pi - f(x) + 2k\pi$이다. 곧

$$y = \tfrac{1}{2}\pi - f(x) - 2k\pi \qquad \text{또는} \qquad y = f(x) - \tfrac{1}{2}\pi - 2k\pi.$$

$|f(x)| \le \frac{1}{6}\pi$이므로 $[-\pi, \pi]$ 안의 값을 주는 것은 $k = 0$뿐이며, 이때는 모든 x에 대하여 그렇다. 따라서 구하는 집합은 정확히 두 개의 완전한 물결로 이루어진다.

- $y = f(x) - \frac{1}{2}\pi$: (ii)의 물결을 $\frac{1}{2}\pi$만큼 아래로 옮긴 것으로, $-\frac{2}{3}\pi$와 $-\frac{1}{3}\pi$ 사이에서 진동한다;
- $y = \frac{1}{2}\pi - f(x)$: 앞의 물결을 x축에 대하여 대칭이동한 것이다($\cos y$는 y에 대하여 우함수이므로 당연히 그래야 한다). 최솟점은 $(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{3}\pi)$, 최댓점은 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{2}{3}\pi)$이다.

이번에는 고립점이 없다.



검산

- 표본점: $(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{6}\pi)$에서 $\sin\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}\pi$이고, $(\frac{1}{2}\pi, \frac{5}{6}\pi)$도 성립한다. (iii)에서 $(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{3}\pi)$는 $\cos\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}$를 준다.
- $x = 0$에서 공식은 $y' = \frac{1}{2}$를 주며, 이는 작은 각 근사(small-angle approximation) $y \approx \frac{1}{2}x$와 일치한다. $x = \frac{1}{2}\pi$에서는 $y' = 0$을 주는데, 최댓점에서는 당연히 그래야 한다.
- 컴퓨터로 $(0, \frac{1}{2}\pi)$의 임의의 점들에서 유한 차분(finite differences)을 이용하여 y'과 y''의 공식을 확인하였다. 또 많은 임의의 x에 대하여 모든 해 $y \in [-\pi, \pi]$를 찾았고, 그 결과는 위의 가지들과 일치하였다. 곧 (ii)에서는 $x \neq 0, \pm\pi$일 때 두 개, (iii)에서는 항상 두 개였다.

흔한 실수

- (i)과 (ii)에서 꼭짓점 $(-\pi, \pi)$와 $(\pi, -\pi)$를 빠뜨리는 것.
- (ii)의 아치를 $[-\pi, \pi]$ 전체에 걸쳐 그리는 것. $y = \pi - f(x)$는 $f(x) < 0$이 되자마자 정사각형을 벗어난다.
- $\cos y = -\frac{1}{2}\sqrt{4 - \sin^2 x}$로 잡는 것. 부호는 $0 \leq y \leq \frac{1}{2}\pi$에 의해 정해진다.

STEP 너머

$\{(x,y) : F(x,y) = 0\}$과 같은 집합을 **등위 집합**(*level set*)이라 한다. 음함수 정리(implicit function theorem)에 따르면, 이 집합은 $\partial F/\partial y \neq 0$인 곳에서는 국소적으로 매끄러운 그래프이다. 여기서 이 조건은 정확히 $\cos y = 0$인 곳에서 깨지는데, $|\sin y| \leq \frac{1}{2}$일 때는 그런 일이 결코 일어나지 않으므로 (ii)의 곡선들은 x에 대한 매끄러운 그래프이다. (i)에서 교차점들은 $\sin y - \sin x$의 두 편도함수(partial derivative)가 모두 0이 되는 곳이며, 바로 그곳에서 등위 집합은 곡선이 되지 못한다. Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)는 일변수 해석학의 기초를 다져 주고, Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)는 생동감 있는 길잡이가 된다.

풀이

STEP II 2017, 문제 4

순수수학 • 코시-슈바르츠 적분 부등식

> **STEP II 2017, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/17-s2-q4

핵심 아이디어

슈바르츠 부등식(Schwarz inequality)은 곱의 적분 $\int fg$를 제곱의 적분 $\int f^2$와 $\int g^2$로 위에서 누른다. 따라서 핵심 기술은 우리가 누르고 싶은 단 하나의 적분을 빼면 모든 적분을 계산할 수 있도록 f와 g를 고르는 것이다. 구하려는 적분이 $\int fg$이면 **상계**(upper bound)를 얻는다. 그것이 $\int f^2$나 $\int g^2$이면 양변을 나누어 **하계**(lower bound)를 얻는다.

풀이

이 풀이 전체에서 $(*)$를 $\left(\int fg\right)^2 \le \int f^2 \cdot \int g^2$ 의 꼴로 쓴다.

소문항 (i)

목표 식에 e^t가 들어 있으므로 $f(x) = 1, g(x) = \mathrm{e}^x, a = 0, b = t$로 잡는다. 그러면

$$\int_0^t \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^t - 1, \qquad \int_0^t 1 \,\mathrm{d}x = t, \qquad \int_0^t \mathrm{e}^{2x} \,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{2t} - 1\right),$$

이므로 $(*)$는 다음을 말해 준다.

$$(\mathrm{e}^t - 1)^2 \le \frac{t}{2}\left(\mathrm{e}^{2t} - 1\right) = \frac{t}{2}(\mathrm{e}^t - 1)(\mathrm{e}^t + 1).$$

$t > 0$이므로 $\mathrm{e}^t - 1 > 0$이고, 또 $\mathrm{e}^t + 1 > 0$이다. 양수인 $(\mathrm{e}^t - 1)(\mathrm{e}^t + 1)$로 나누어도 부등호의 방향은 바뀌지 않으므로

$$\frac{\mathrm{e}^t - 1}{\mathrm{e}^t + 1} \le \frac{t}{2},$$

를 얻고, 이것이 증명하려던 식이다.

소문항 (ii)

$\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x$가 $\int g^2$로 나타나기를 바라므로, $[0,1]$에서 $g(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x^2}$, $f(x)=x$로 잡는다. 곱 $x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x^2}$는 바로 우리가 적분할 수 있는 꼴이다(바깥에 있는 x의 거듭제곱이 상수배를 제외하면 지수의 도함수(derivative)이다).

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x^2}\,\mathrm{d}x=\left[-2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x^2}\right]_0^1=2\bigl(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}\bigr),\qquad \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}.$$

따라서 $(*)$에서

$$4\bigl(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}\bigr)^2\le\frac{1}{3}\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x,$$

를 얻고, 양변에 3을 곱하면

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x\ge 12\bigl(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}\bigr)^2.$$

소문항 (iii)

$J=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x$라 하자. 여기서 모든 적분은 구간 $[0,\frac{1}{2}\pi]$ 위에서 하며, 이 구간에서 $\sin x\ge 0$이고 $\cos x\ge 0$이므로 모든 거듭제곱근은 실수이다.

상계. 여기서는 J가 $\int fg$가 되어야 한다. $f(x)=1$, $g(x)=\sqrt{\sin x}$로 잡으면 $g^2=\sin x$는 적분하기 쉽다.

$$J^2\le\int_0^{\frac{1}{2}\pi}1\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\cdot 1.$$

$J>0$이므로 양의 제곱근을 취하면 $J\le\sqrt{\pi/2}$이다.

하계. 이번에는 J가 제곱의 적분 가운데 하나여야 하므로 $f(x)=(\sin x)^{1/4}$로 잡아 $f^2=\sqrt{\sin x}$가 되게 한다.

> **?** **생각해 보기** 어떤 g를 잡아야 $\int fg$와 $\int g^2$를 모두 계산할 수 있을까?

g^2를 적분하기 쉬워야 하고, $(\sin x)^{1/4}g(x)$도 적분하기 쉬워야 한다. $g(x)=\cos x$로 고르면 두 조건을 모두 만족한다. $(\sin x)^{1/4}\cos x$는 $\sin x$의 거듭제곱에 그 도함수를 곱한 꼴이기 때문이다. 답의 모양도 단서가 된다. 분모에 π가 있다는 것은 $\int g^2=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$를 암시한다. 실제로

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\sin x)^{1/4}\cos x\,\mathrm{d}x=\left[\tfrac{4}{5}(\sin x)^{5/4}\right]_0^{\frac{1}{2}\pi}=\frac{4}{5}$$

이고

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^2 x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\tfrac{1}{2}(1+\cos 2x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}.$$

이다. 따라서 $(*)$에서

$$\frac{16}{25}\le J\cdot\frac{\pi}{4},\qquad \text{즉,}\qquad J\ge\frac{64}{25\pi}.$$

두 결과를 합치면

$$\frac{64}{25\pi} \le \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x \le \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

덧붙임. 다른 선택도 통하며, 그중에는 더 좋은 결과를 주는 것도 있다. $f = (\sin x)^{1/4}$, $g = (\sin x)^{3/4}$로 잡으면 $1 \le J \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin x)^{3/2}\,\mathrm{d}x$를 얻고, $f = \sin x$, $g = \sqrt{\sin x}$로 $(*)$를 한 번 더 쓰면 $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin x)^{3/2}\,\mathrm{d}x \le \sqrt{\pi/4}$임을 알 수 있다. 이 둘을 합치면 더 정밀한 하계 $J \ge 2/\sqrt{\pi} \approx 1.128$을 얻는다.

검산

- (i): $t \to 0$일 때 좌변은 $\tanh(t/2) \approx t/2$이므로, 작은 t에 대해 이 부등식은 거의 등식에 가깝다. t가 크면 좌변은 1로 수렴(converge)하지만 $t/2$는 한없이 커진다.
- (ii): $\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x \approx 0.8556$이고, $12(1-\mathrm{e}^{-1/4})^2 \approx 0.5871$이다.
- (iii): 수치적으로 $J \approx 1.1981$이며, 이는 $64/(25\pi) \approx 0.8149$와 $\sqrt{\pi/2} \approx 1.2533$ 사이에 있다. 상계가 꽤 가까운 까닭은 $\sqrt{\sin x}$가 구간의 대부분에서 거의 평평하게(1 근처에) 유지되고, $f = 1$로 잡은 슈바르츠 부등식은 g가 상수일 때 정확히 등식이 되기 때문이다.

흔한 실수

- 부등식의 방향을 거꾸로 잡는 실수. 모르는 적분을 $\int fg$로 두면 슈바르츠 부등식은 그것을 위에서만 누를 수 있다. 따라서 하계를 얻으려면 모르는 적분을 $\int f^2$나 $\int g^2$로 두어야 한다.
- (i)에서 $\mathrm{e}^t - 1$이 양수라는 것을 밝히지 않고 그것으로 나누는 실수.
- (iii)의 상계에서 $J > 0$을 이용해 양의 제곱근을 취한다는 것을 빠뜨리는 실수.

STEP 너머

슈바르츠(코시–슈바르츠, Cauchy–Schwarz) 부등식은 내적(inner product) $\langle f, g\rangle = \int fg$가 $|\langle f, g\rangle| \le \|f\|\,\|g\|$를 만족하며, 등호는 f와 g가 비례할 때 그리고 그때에만 성립한다는 것이다. 이 부등식은 $\mathbb{R}^n$의 벡터에서 함수들의 공간에 이르기까지 모든 내적 공간(inner product space)에서 성립하며, "두 함수 사이의 각"이라는 개념이 의미를 갖게 해 주는 것이 바로 이 부등식이다. 이 생각은 푸리에 급수(Fourier series)와 최소제곱 근사(least-squares approximation)의 바탕이 된다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 내적과 직교성을 전개하며, Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해)는 이러한 부등식이 적분을 제어하는 데 어떻게 쓰이는지 보여 준다.

풀이

STEP II 2017, 문제 5

순수수학 • 포물선의 법선과 원

STEP II 2017, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/17-s2-q5

핵심 아이디어

모든 것은 포물선(parabola) $x = at^2$, $y = 2at$에 대한 한 가지 사실에 달려 있다. 매개변수(parameter)가 t_1과 t_2인 두 점을 잇는 현(chord)의 기울기(gradient)는 $\dfrac{2}{t_1 + t_2}$이다. 이 사실을 이용하면 "법선이 곡선과 다시 만난다"는 조건과 "반원에 대한 원주각은 직각이다"라는 사실이 모두 매개변수 사이의 간단한 방정식이 되고, 기하 문제는 짧은 대수 계산으로 바뀐다.

풀이

유용한 사실: 현의 기울기

서로 다른 매개변수 $t_1 \neq t_2$에 대하여, $(at_1^2, 2at_1)$과 $(at_2^2, 2at_2)$를 잇는 현의 기울기는

$$\frac{2a(t_1 - t_2)}{a(t_1^2 - t_2^2)} = \frac{2}{t_1 + t_2},$$

이다. 여기서 $t_1 - t_2 \neq 0$으로 약분하였다. ($t_1 + t_2 = 0$이면 현은 수직이다.) $t_2 \to t_1$로 보내면 t에서의 접선(tangent)의 기울기는 $\frac{1}{t}$이다. 직접 계산해도 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2a}{2at} = \dfrac{1}{t}$이다.

소문항 (i)

P에서 접선의 기울기는 $\frac{1}{p}$이므로 법선(normal)의 기울기는 $-p$이다(여기서 $p \neq 0$을 사용한다). $n \neq p$인 점 N이 이 법선 위에 있을 필요충분조건은 현 PN의 기울기가 $-p$인 것이다.

$$\frac{2}{p+n} = -p \iff p + n = -\frac{2}{p} \iff n = -\left(p + \frac{2}{p}\right).$$

(P에서의 법선은 유한한 기울기 $-p$를 가지므로 현 PN은 수직일 수 없다.) $n-p=-2\left(p+\frac{1}{p}\right)$이고 실수 p에 대하여 $p+\frac{1}{p}\neq 0$이므로 $n\neq p$이다. 따라서 이것은 실제로 두 번째 점이다. 이로써 요구된 결과를 얻는다.

소문항 (ii)

$p+n=-\frac{2}{p}$와 $p-n=2p+\frac{2}{p}=\dfrac{2(p^2+1)}{p}$를 이용하면

$$\begin{aligned}|PN|^2&=a^2(p^2-n^2)^2+4a^2(p-n)^2\\&=a^2(p-n)^2\left[(p+n)^2+4\right]\\&=a^2\cdot\frac{4(p^2+1)^2}{p^2}\cdot\left(\frac{4}{p^2}+4\right)=a^2\cdot\frac{4(p^2+1)^2}{p^2}\cdot\frac{4(p^2+1)}{p^2}\\&=16a^2\,\frac{(p^2+1)^3}{p^4},\end{aligned}$$

이므로 요구된 결과가 성립한다.

최솟값을 구하기 위해 $u=p^2>0$, $f(u)=\dfrac{(u+1)^3}{u^2}$으로 놓는다. 몫의 미분법(quotient rule)에 의하여

$$f'(u)=\frac{3(u+1)^2u^2-2u(u+1)^3}{u^4}=\frac{(u+1)^2(3u-2u-2)}{u^3}=\frac{(u+1)^2(u-2)}{u^3}.$$

$u>0$일 때 인수 $\frac{(u+1)^2}{u^3}$은 양수이므로 $0<u<2$에서 $f'(u)<0$이고 $u>2$에서 $f'(u)>0$이다. 따라서 f는 감소하다가 증가하며, $u>0$에서의 최솟값은 $u=2$, 즉 $p^2=2$일 때이다. $|PN|^2=16a^2f(p^2)$이므로 이때 $|PN|$이 최소가 된다. (최솟값은 $|PN|^2=16a^2\cdot\frac{27}{4}=108a^2$이므로 $|PN|=6\sqrt{3}\,a$이다.)

소문항 (iii)

PN이 지름(diameter)이고 Q가 P, N이 아닌 원 위의 점이므로, 각 PQN은 직각이다(반원에 대한 원주각). 따라서 $QP\perp QN$이다.

> **생각해 보기** QP나 QN이 수직이어서 기울기를 곱할 수 없는 경우가 있을까?

QP가 수직이라면 QN은 수평이므로 Q와 N의 y좌표가 같아 $q=n$이 되는데, $Q\neq N$이므로 이는 불가능하다. 마찬가지로 QN이 수직이면 QP가 수평이 되어 $q=p$가 된다. 따라서 두 기울기는 모두 유한하고 0이 아니며, 그 곱은 -1이다.

$$\frac{2}{q+p}\cdot\frac{2}{q+n}=-1\iff(q+p)(q+n)=-4.$$

이를 전개하고 소문항 (i)에서 얻은 $p+n=-\frac{2}{p}$와 $pn=-p^2-2$를 이용하면

$$q^2+(p+n)q+pn=q^2-\frac{2q}{p}-p^2-2=-4,$$

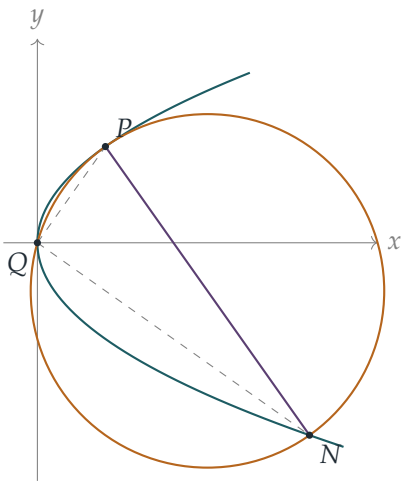
이고, 이를 정리하면

$$2=p^2-q^2+\frac{2q}{p},$$

가 되어 요구된 결과를 얻는다.

따름 결과. $q=0$을 대입하면 관계식은 $2=p^2$이 된다. 역으로 $p^2=2$이면 관계식에서 $q^2-\frac{2q}{p}=0$, 즉 $q=0$ 또는 $q=\frac{2}{p}$이다. 그런데 $\frac{2}{p}=\frac{p^2}{p}=p$이고 이는 점 P 자신이므로, Q는 $q=0$이어야 한다. 따라서 Q가 원점에 있을 필요충분조건은 $p^2=2$이고, 소문항 (ii)에 의하여 이는 정확히 $|PN|$이 최소일 때이다.

일반적으로 이 관계식은 두 근의 합이 $\frac{2}{p}$인 이차방정식 $q^2-\frac{2}{p}q+(2-p^2)=0$이다. 한 근은 항상 $q=p$이므로 다른 근은 $q=\dfrac{2-p^2}{p}$이고, 이는 정확히 $p^2=2$일 때 0이다.



그림은 최소가 되는 경우인 $a=1$, $p=\sqrt{2}$를 나타낸다. 법선 PN(자주색), PN을 지름으로 하는 원(호박색), 그리고 $Q=O$에서의 직각이 보인다.

검산

- $a=1, p=1$이면 $n=-3$이므로 $P=(1,2), N=(9,-6)$이다. 이때 $|PN|^2=64+64=128$이고, 공식도 $16\cdot 8/1=128$을 준다.
- $p=\sqrt{2}, a=1$이면 $P=(2,2\sqrt{2}), N=(8,-4\sqrt{2})$이고 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{ON}=16-16=0$이므로, 원점은 실제로 PN을 지름으로 하는 원 위에 있다. 이때 $|PN|=6\sqrt{3}\approx 10.392$이다.

- 여러 p 값에 대하여 원과 포물선이 만나는 점을 수치적으로 구해 보면, (P 외에) 정확히 매개변수 n과 $\frac{2-p^2}{p}$를 얻는다.

흔한 실수

- $q = p$도 마지막 관계식을 만족한다는 것을 잊어서, $p^2 = 2$일 때 Q의 위치가 두 가지라고 잘못 결론 내리는 것.
- 법선의 기울기를 $-\frac{1}{p}$로 쓰는 것. 접선의 기울기가 $\frac{1}{p}$이므로 법선의 기울기는 $-p$이다.

STEP 너머

원과 포물선은 보통 네 점에서 만나며, 원의 방정식에 $x = at^2$, $y = 2at$를 대입하면 t^3 항이 없는 t에 대한 사차방정식(quartic)을 얻으므로 네 매개변수의 합은 0이다. 여기서 $n + q = -\frac{2}{p} - p + \frac{2}{p} = -p$이므로 네 번째 매개변수는 다시 p이다. 즉 원은 P에서 포물선에 접한다. 그 점에서 원의 반지름이 법선 위에 놓여 있으므로 당연히 그래야 한다. 이처럼 중복도(multiplicity)를 고려하여 교점을 세는 것은 대수기하학(algebraic geometry)의 출발점이다(베주 정리(Bézout's theorem)). 이런 유형의 문제를 더 보려면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*를 참고하라.

풀이

STEP II 2017, 문제 6

순수수학 • 부등식과 수학적 귀납법

STEP II 2017, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/17-s2-q6

핵심 아이디어

두 소문항 모두 합 S_n을 대략 $\int_0^n x^{-1/2}\,\mathrm{d}x$에 해당하는 $2\sqrt{n}$과 비교한다. (i)의 귀납법(induction)에서 n에서 $n+1$로 넘어가는 단계는 결국 $1/\sqrt{n+1}$과 $2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$을 비교하는 문제가 되고, 그 차를 유리화(rationalising)하면 해결된다. (ii)에서 가장 작은 C는 (C를 뺀) 우변과 S_n 사이의 차이의 최댓값(maximum)이다. 따라서 이 차이가 n에서 $n+1$로 갈 때 어떻게 변하는지 살펴보는데, 주어진 부등식(inequality)이 바로 그 차이가 항상 줄어든다는 사실을 알려 준다.

풀이

소문항 (i)

$P(n)$을 명제 $S_n \le 2\sqrt{n}-1$이라 하자.

기저 단계(*base case*). $S_1 = 1$이고 $2\sqrt{1}-1 = 1$이므로 $P(1)$이 (등호로) 성립한다.

귀납 단계(*inductive step*). 어떤 $k \ge 1$에 대하여 $P(k)$가 성립한다고 가정하자. 그러면

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \le 2\sqrt{k} - 1 + \frac{1}{\sqrt{k+1}},$$

이므로 다음을 보이면 충분하다.

$$2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \le 2\sqrt{k+1}, \qquad \text{즉,} \qquad \frac{1}{\sqrt{k+1}} \le 2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right).$$

유리화하면

$$2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) = \frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \ge \frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{k+1}},$$

이다. $\sqrt{k} \le \sqrt{k+1}$이므로 분모가 $2\sqrt{k+1}$보다 크지 않기 때문이다. 따라서 $S_{k+1} \le 2\sqrt{k+1} - 1$이고, 이것이 $P(k+1)$이다.

$P(1)$이 참이고 모든 $k \ge 1$에 대하여 $P(k) \Rightarrow P(k+1)$이므로, 모든 양의 정수 n에 대하여 $S_n \le 2\sqrt{n} - 1$이다.

소문항 (ii): 부등식

$k \ge 0$이면 $(4k+1)\sqrt{k+1} > (4k+3)\sqrt{k}$의 양변은 모두 음이 아니고 좌변은 양수이므로, 이 부등식은 양변을 제곱한 부등식과 동치이다. 이제

$$\begin{aligned}(4k+1)^2(k+1) - (4k+3)^2 k &= (16k^2+8k+1)(k+1) - (16k^2+24k+9)k \\ &= (16k^3+24k^2+9k+1) - (16k^3+24k^2+9k) \\ &= 1 > 0.\end{aligned}$$

따라서 $(4k+1)^2(k+1) > (4k+3)^2 k$이고, 양의 제곱근을 취하면 모든 $k \ge 0$에 대하여 $(4k+1)\sqrt{k+1} > (4k+3)\sqrt{k}$를 얻는다. 이것이 보이려던 것이다.

소문항 (ii): 가장 작은 C

다음과 같이 정의하자.

$$T_n = 2\sqrt{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}} - S_n.$$

부등식 $S_n \ge 2\sqrt{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}} - C$는 $C \ge T_n$과 같다. 따라서 이 부등식이 모든 n에 대하여 성립할 필요충분조건은 C가 모든 T_n 이상인 것이고, 그러한 C 중 가장 작은 값은 (존재한다면) T_n의 최댓값이다.

> **?** **생각해 보기** S_n의 공식을 모르는 채로 가장 큰 T_n을 어떻게 찾을까?

S_n이 사라지는 변화량 $T_{n+1} - T_n$을 살펴본다. $S_{n+1} - S_n = 1/\sqrt{n+1}$이므로

$$\begin{aligned}T_{n+1} - T_n &= 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + \frac{1}{2\sqrt{n+1}} - \frac{1}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ &= 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} - \frac{1}{2\sqrt{n+1}} - \frac{1}{2\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

양변에 양수 $2\sqrt{n}\sqrt{n+1}$을 곱하면

$$\begin{aligned}2\sqrt{n}\sqrt{n+1}\left(T_{n+1} - T_n\right) &= 4(n+1)\sqrt{n} - 4n\sqrt{n+1} - \sqrt{n} - \sqrt{n+1} \\ &= (4n+3)\sqrt{n} - (4n+1)\sqrt{n+1}.\end{aligned}$$

방금 증명한 부등식($k = n$인 경우)에 의하여 이 값은 음수이다. 따라서 모든 $n \ge 1$에 대하여 $T_{n+1} < T_n$이다. 즉 수열(sequence) T_n은 순감소(strictly decreasing)하고, 그 최댓값은

첫째 항

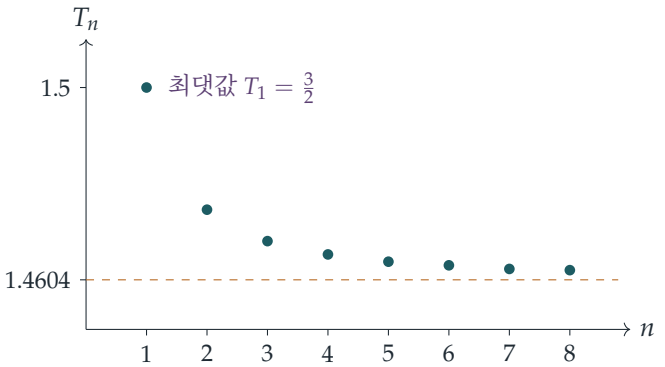
$$T_1 = 2 + \tfrac{1}{2} - 1 = \tfrac{3}{2}.$$

이다. 그러므로 모든 $n \geq 1$에 대하여 $S_n \geq 2\sqrt{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}} - \frac{3}{2}$이다. 이보다 작은 C로는 안 된다. $n = 1$일 때 부등식은 $1 \geq \frac{5}{2} - C$가 되어 $C \geq \frac{3}{2}$가 필요하기 때문이다. 가장 작은 수는

$$C = \tfrac{3}{2}.$$

이다.

T_n의 처음 몇 값을 보면 얼마나 빨리 안정되는지 알 수 있다.



(세로축은 늘여 그린 것으로, 대략 1.45부터 1.51까지이다.)

검산

- $n = 4$일 때: $S_4 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \approx 2.7845$이고, 이는 두 결과가 요구하는 대로 $2\sqrt{4} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = 2.75$와 $2\sqrt{4} - 1 = 3$ 사이에 있다.
- 처음 200 000개의 값을 컴퓨터로 확인한 결과 두 경계가 모두 성립하고 T_n이 감소함이 확인되었다. T_n은 1.5에서 약 1.46035를 향해 줄어들며 다시는 1.5로 돌아오지 않는다.
- 항등식 $(4k+1)^2(k+1) - (4k+3)^2k = 1$은 $k = 1$에서 쉽게 확인할 수 있다: $25 \cdot 2 - 49 = 1$.

흔한 실수

- 최댓값 대신 T_n의 극한(limit)(약 1.46)을 답으로 쓰는 것. $\frac{3}{2}$보다 작은 C는 $n = 1$에서 성립하지 않는다.
- 양변이 음이 아님을 먼저 확인하지 않고 부등식을 제곱하는 것.

- 등호가 성립하는 경우를 제시하여 $C = \frac{3}{2}$가 실제로 가장 작은 값임을 보이는 것을 빠뜨리는 것.

STEP 너머

수열 T_n은 감소하며 어떤 극한으로 수렴하는데, 그 극한은 $-\zeta(\frac{1}{2}) \approx 1.46035$이다. 여기서 ζ는 리만(Riemann) 제타 함수(Riemann zeta function)로, 정의하는 급수가 수렴하는 영역 바깥으로 확장한 것이다. 합을 적분과 비교한 뒤 $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ 같은 항으로 보정하는 것은 오일러-매클로린 공식(Euler–Maclaurin formula)의 출발점이다. 바탕에 깔린 사실, 즉 유계인 단조수열은 수렴한다는 사실은 대학 1학년 해석학(analysis)의 단조 수렴 정리(monotone convergence theorem)이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)가 이를 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP II 2017, 문제 7

순수수학 • 로그 미분법

STEP II 2017, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/17-s2-q7

핵심 아이디어

여기에 나오는 모든 거듭제곱은 로그(logarithm)를 통해 $a^b = \mathrm{e}^{b \ln a}$로 정의되므로, x의 두 거듭제곱을 비교하는 것은 그 로그를 비교하는 것이다. 또한 exp가 증가함수(increasing function)이므로 두 비교는 동치이다. 주의할 점은 단 하나, $\ln x$의 부호이다. $0 < x < 1$이면 $\ln x$는 음수이고, 음수로 나누면 부등호의 방향이 바뀐다. 로그를 취하면 도함수(derivative)를 구하는 일도 기계적인 계산이 된다.

풀이

풀이 전체에서 $\ln \mathrm{f}(x) = x \ln x$이고 $\ln \mathrm{g}(x) = \mathrm{f}(x) \ln x$이다.

소문항 (i)

$0 < x < 1$이라 하면 $\ln x < 0$이고 $x - 1 < 0$이다. 그러면

$$\ln \mathrm{f}(x) - \ln x = x \ln x - \ln x = (x-1) \ln x > 0,$$

이다. 이는 두 음수의 곱이기 때문이다. exp가 증가함수이므로 $\mathrm{f}(x) > x$이다.

또 $x \ln x < 0$이므로 $\mathrm{f}(x) = \mathrm{e}^{x \ln x} < 1$이다. 이제 다시 로그를 비교하면

$$\ln \mathrm{g}(x) - \ln x = \big(\mathrm{f}(x) - 1\big) \ln x > 0, \qquad \text{이유: } \mathrm{f}(x) < 1,\ \ln x < 0,$$
$$\ln \mathrm{f}(x) - \ln \mathrm{g}(x) = \big(x - \mathrm{f}(x)\big) \ln x > 0, \qquad \text{이유: } \mathrm{f}(x) > x,\ \ln x < 0.$$

따라서 $\ln x < \ln \mathrm{g}(x) < \ln \mathrm{f}(x)$이고, 이로부터 $0 < x < 1$일 때 $x < \mathrm{g}(x) < \mathrm{f}(x)$가 되어 원하는 결과를 얻는다.

$x > 1$일 때도 같은 차를 쓰면 되지만, 이번에는 $\ln x > 0$, $x - 1 > 0$, $x \ln x > 0$이므로 $f(x) > 1$이다. 그러면 $(x-1)\ln x > 0$에서 $f(x) > x$를 얻고, $(x - f(x))\ln x < 0$에서 $g(x) > f(x)$를 얻는다. 따라서

$$x < f(x) < g(x) \qquad \text{단, } x > 1,$$

이고, $x = 1$에서는 세 값이 모두 1이다.

소문항 (ii)

$\ln f(x) = x \ln x$를 미분하면 $f'(x)/f(x) = \ln x + 1$이므로

$$f'(x) = x^x(\ln x + 1).$$

$x^x > 0$이므로 $f'(x) = 0$인 것은 $\ln x = -1$, 즉 $x = e^{-1}$일 때뿐이다. (그 점에서 f'의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 이 점은 최솟값(minimum)을 주며, 그 값은 $e^{-1/e} \approx 0.692$이다.)

소문항 (iii)

$x \to 0$일 때 $x \ln x \to 0$이고 exp는 연속(continuous)이므로

$$f(x) = e^{x \ln x} \to e^0 = 1.$$

다음으로 $\ln g(x) = f(x) \ln x$에서 $f(x) \to 1$이고 $\ln x \to -\infty$이므로 $\ln g(x) \to -\infty$이고

$$\lim_{x \to 0} g(x) = 0.$$

소문항 (iv)

$x > 0$에서 $h(x) = x^{-1} + \ln x$라 하자. 그러면

$$h'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2},$$

이고, 이는 $0 < x < 1$에서 음수, $x > 1$에서 양수이다. 따라서 h는 감소하다가 증가하며, 최솟값은 $h(1) = 1$이다. 그러므로 모든 $x > 0$에 대하여 $x^{-1} + \ln x \geq 1$이다.

이제 소문항 (ii)를 이용하여 $\ln g(x) = f(x) \ln x$를 곱의 미분법(product rule)으로 미분하면

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = f'(x) \ln x + \frac{f(x)}{x} = x^x \left[(\ln x + 1) \ln x + \frac{1}{x} \right] = x^x \left[(\ln x)^2 + \ln x + \frac{1}{x} \right].$$

? **생각해 보기** 방금 증명한 부등식이 이 괄호를 다루는 데 어떻게 도움이 될까?

괄호 안에는 정확히 $\frac{1}{x} + \ln x$가 들어 있고, 이 값은 1 이상이다. 따라서

$$(\ln x)^2 + \ln x + \frac{1}{x} \;\geq\; (\ln x)^2 + 1 \;>\; 0.$$

$g(x) > 0$이고 $x^x > 0$이므로

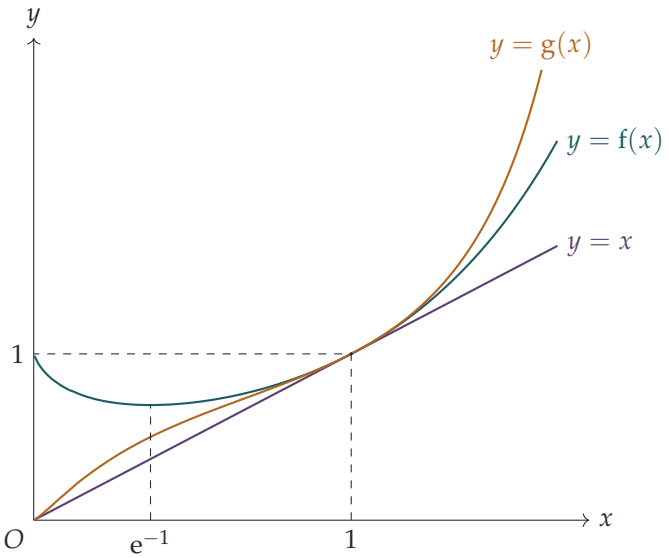
$$g'(x) = g(x)\, x^x \left[(\ln x)^2 + \ln x + \frac{1}{x}\right] > 0 \qquad \text{모든} x > 0,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

그래프 그리기

지금까지의 사실을 모으면 다음과 같다.

- $y = f(x)$는 $x \to 0$일 때 1에서 출발하여 $x = e^{-1}$에서 최솟값 $e^{-1/e}$까지 내려간 뒤, $(1,1)$을 지나 올라가며 매우 빠르게 커진다. $f'(x) = x^x(\ln x + 1) \to -\infty$이므로 0 근처에서는 매우 가파르다.
- $y = g(x)$는 원점에서 출발하여 전 구간에서 증가하며(소문항 (iv)), $(1,1)$을 지난다.
- $0 < x < 1$에서는 순서가 $x < g < f$이고, $x > 1$에서는 $x < f < g$이다. 따라서 g와 f는 $(1,1)$에서 교차하고, 세 곡선이 모두 그 점에서 만난다.
- $x = 1$에서 $f'(1) = 1$이고 $g'(1) = 1 \cdot 1 \cdot (0 + 0 + 1) = 1$이므로, 두 곡선 모두 $(1,1)$에서 $y = x$에 접한다.
- 원점 근처에서 $g(x)/x = e^{(f(x)-1)\ln x} \to 1$이다($f(x) - 1 \approx x \ln x$이므로 지수는 $x(\ln x)^2 \to 0$처럼 행동한다). 따라서 $y = g(x)$는 $y = x$를 따라, 그 바로 위쪽으로 원점을 떠난다.



검산

- $x = \frac{1}{2}$에서 $f = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$이고 $g = (\frac{1}{2})^{0.707} \approx 0.613$이므로 $0.5 < 0.613 < 0.707$이다. $x = 2$에서 $f = 4$이고 $g = 2^4 = 16$이므로 $2 < 4 < 16$이다.
- $f(0.3) \approx 0.697$, $f(e^{-1}) \approx 0.6922$, $f(0.4) \approx 0.693$이므로 e^{-1}에서 최솟값을 갖는다는 사실과 맞는다.
- g'의 식에서 $g'(\frac{1}{2}) \approx 0.774$를 얻는데, 이는 그 점에서 g의 차분몫(difference quotient)과 일치한다. 컴퓨터로 확인한 결과 $(0,3)$에서 $g' > 0$임도 확인되었다.

흔한 실수

- $(0,1)$에서 $\ln x < 0$임을 잊고, 그것으로 나눌 때 부등호 방향을 바꾸지 않는 실수. 바로 이 때문에 $x = 1$에서 순서가 뒤바뀐다.
- x^x를 $x \cdot x^{x-1}$로 미분하거나(지수를 상수로 취급), $x^x \ln x$로 미분하는(밑을 상수로 취급) 실수. 두 부분이 모두 필요하다.
- g의 극한(limit)을 $1^{-\infty}$로 쓰고 짐작하는 실수. 대신 $\ln g = f \ln x$를 가지고 계산해야 한다.

STEP 너머

거듭제곱 탑 $x^{x^{x^{\cdots}}}$ 도 이 패턴을 이어 간다. $0 < x < 1$일 때 홀수 높이의 탑 x, g, ...와 짝수 높이의 탑 f, ...는 서로 엇갈리며 배열되고, 무한 탑은 정확히 $e^{-e} \le x \le e^{1/e}$일 때 수렴(converge)한다. 이는 단조수열(monotone sequence)과 고정점(fixed point)을 다루는 좋은 연습 문제이다. $x \ln x \to 0$과 같은 극한, 그리고 exp와 ln을 통한 a^b의 엄밀한 정의는 대학 첫 해석학(analysis) 강의에서 제대로 다룬다. Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 참고하라.

풀이

STEP II 2017, 문제 8

순수수학 • 벡터와 수심

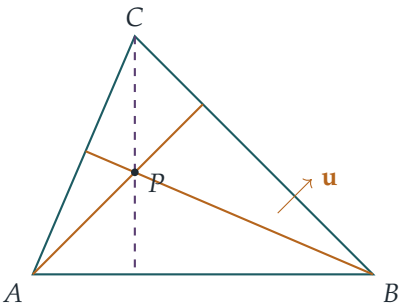
STEP II 2017, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/17-s2-q8

핵심 아이디어

이 문제는 삼각형의 세 수선(altitude)이 한 점, 즉 **수심**(*orthocentre*)에서 만난다는 사실을 벡터로 증명하는 것이다. 두 직선 $\mathbf{a}+\lambda\mathbf{u}$와 $\mathbf{b}+\mu\mathbf{v}$가 만나는 점을 구하는 요령은, 방정식의 양변에 $\mathbf{v}$에 수직인 벡터를 스칼라곱(scalar product)하는 것이다. 그러면 μ가 단번에 사라진다. 여기서는 그런 벡터가 이미 주어져 있다. $\mathbf{v}$가 CA에 수직이므로 $\mathbf{c}-\mathbf{a}$가 바로 그 역할을 한다.



풀이

첫 번째 수선

A를 지나고 BC에 수직인 직선은 $\mathbf{a}$를 지나며 방향이 $\mathbf{u}$이다(평면에서 생각하고 있으므로 BC에 수직인 벡터는 모두 $\mathbf{u}$의 실수배이다). 이 직선의 방정식은

$$\mathbf{r}=\mathbf{a}+\lambda\mathbf{u}.$$

이다. 마찬가지로 B를 지나고 CA에 수직인 직선은 $\mathbf{r}=\mathbf{b}+\mu\mathbf{v}$이다.

P 구하기

이 두 직선은 평행하지 않다. 만약 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$가 평행하다면, 같은 평면에서 각각 이들에 수직인 BC와 CA도 평행해야 하는데, 삼각형에서는 이것이 불가능하다. 따라서 두 직선은 정확히 한 점 P에서 만나고, 그 점에서

$$\mathbf{a} + \lambda\mathbf{u} = \mathbf{b} + \mu\mathbf{v}.$$

이다. 양변에 $\mathbf{c} - \mathbf{a}$를 스칼라곱한다. $\mathbf{v}$가 CA에 수직이므로 $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = 0$이고, μ가 사라진다.

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a}) + \lambda\, \mathbf{u} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a}), \qquad \text{따라서} \qquad \lambda\, \mathbf{u} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a}).$$

> ? **생각해 보기** $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a})$로 나누어도 되는가?

그렇다. 만약 $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = 0$이라면 $\mathbf{u}$는 BC뿐 아니라 CA에도 수직이 된다. 평면에서는 이로부터 CA와 BC가 평행해야 하는데, 실제로는 그렇지 않다. 그러므로

$$\mathbf{p} = \mathbf{a} + \frac{(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a})}{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a})}\, \mathbf{u}.$$

이다.

CP는 AB에 수직이다

$(\mathbf{p} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = 0$임을 보이면 된다. 위에서 구한 계수를 λ라 하자. 그러면

$$(\mathbf{p} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (\mathbf{a} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) + \lambda\, \mathbf{u} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

이다. 여기서 유용한 관찰은, $\mathbf{u}$가 BC에 수직이므로 $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = 0$이라는 것이다. 따라서

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) + \mathbf{u} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a}).$$

이다. 그러므로 $\lambda\, \mathbf{u} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \lambda\, \mathbf{u} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a})$이고,

$$(\mathbf{p} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = -(\mathbf{c} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) + (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = 0.$$

이다.

> ? **생각해 보기** 스칼라곱이 0이라는 것만으로 정말 직선 CP가 얻어지는가?

$P \neq C$일 때만 그렇다. 바로 이 부분에서 "직각삼각형이 아니다"라는 조건이 쓰인다. 만약 $P = C$라면 C는 A를 지나고 BC에 수직인 직선 위에 있으므로 $AC \perp BC$가 되어 C에서의 각이 직각이 되는데, 이는 조건에서 제외되었다. 따라서 $\mathbf{p} - \mathbf{c} \neq \mathbf{0}$이고, $\mathbf{b} - \mathbf{a} \neq \mathbf{0}$이므로 스칼라곱이 0이라는 것은 정확히 CP가 AB에 수직이라는 뜻이다. 그러므로 삼각형의 세 수선은 모두 P를 지난다.

검산

$A = (0,0)$, $B = (5,0)$, $C = (1.5, 3.5)$로 두고, $\mathbf{c} - \mathbf{b} = (-3.5, 3.5)$에 수직인 $\mathbf{u} = (1,1)$을 택하자. 그러면 $(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = 7.5$이고 $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = 5$이므로 $\lambda = 1.5$, $P = (1.5, 1.5)$이다. 이 점은 C의 바로 아래에 있으므로 CP는 수직선이 되어 AB에 수직이고, $(\mathbf{p} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = (-3.5)(1.5) + (1.5)(3.5) = 0$이므로 P는 B에서 내린 수선 위에도 있다. 일반적인 결과도 컴퓨터로 여러 개의 무작위 삼각형에 대해 확인하였다. 또한 $\mathbf{u}$를 $k\mathbf{u}$로 바꾸어도 $\mathbf{p}$에 대한 식이 변하지 않는다는 점에 주목하자. 당연히 그래야 한다.

흔한 실수

- $\mathbf{c} - \mathbf{a}$ 대신 $\mathbf{v}$나 $\mathbf{u}$와 스칼라곱하는 것. 이렇게 하면 방정식에 두 매개변수(parameter)가 모두 남는다.
- $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a})$가 0이 아닌 이유를 밝히지 않고 그것으로 나누는 것.
- 마지막 소거가 성립하게 해 주는 단계인 $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a})$를 놓치는 것.

STEP 너머

임의의 삼각형의 수심 H, 무게중심(centroid) G, 외심(circumcentre) O는 한 직선, 즉 오일러(Euler) 직선(Euler line) 위에 있으며 $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$이다. O를 원점으로 잡으면 이것은 $\mathbf{h} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$라는 깔끔한 명제가 되는데, 같은 스칼라곱 아이디어로 증명할 수 있다. 이런 종류의 스칼라곱은 선형대수학(linear algebra) 첫 강좌에서 공부하는 내적 공간(inner-product space)의 출발점이다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 이 개념이 전개되는 과정을 살펴보기에 좋은 책이다.

풀이

STEP II 2017, 문제 9

역학 • 마찰과 강체

> **STEP II 2017, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/17-s2-q9

핵심 아이디어

각 원기둥은 널빤지와 바닥, 단 두 곳에서만 힘을 받는 강체(rigid body)이므로, 먼저 그 중심에 대한 모멘트(moment)를 잡는 것이 자연스럽다. 두 수직항력(normal reaction)은 중심을 지나므로 두 마찰력(frictional force)만 남고, 이 두 힘은 크기가 같아야 한다. 그 다음에는 원기둥과 널빤지 각각에 대해 힘을 분해(resolving)하고, 접촉점에서의 마찰 법칙 $G \le \frac{1}{2}R$와 $F \le \frac{1}{2}N$을 적용하면 된다. 기하학적 관계는 마지막에 가서야 θ를 a, r와 연결해 준다.

풀이

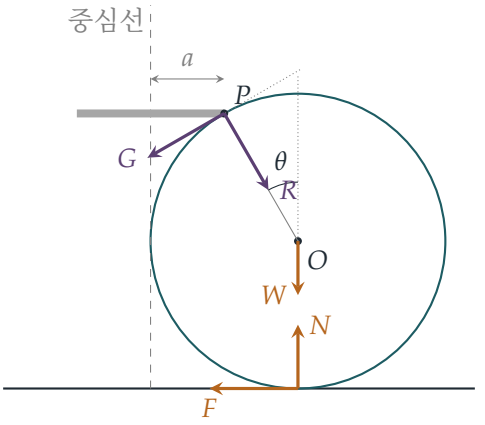
모형과 설정. 단면을 반지름 r인 두 원판과 하나의 수평 막대로 보고, 모든 접촉면은 거칠다고 하자. 두 원기둥 사이의 간격은 무시할 수 있으므로, 두 중심은 수직 대칭축(line of symmetry)의 양쪽으로 수평 거리 r만큼 떨어져 있다. 널빤지의 폭은 $2a < 2r$이므로, 널빤지는 두 긴 모서리가 원기둥의 안쪽 윗부분에 걸친 채로 놓인다. 대칭성에 의해 오른쪽 원기둥만 생각하면 충분하다.

널빤지가 이 원기둥에 닿는 점을 P라 하자. P에서의 접선(tangent)은 수평인 널빤지와 각 θ를 이루므로, P로 향하는 반지름은 수직선과 각 θ를 이룬다. 원기둥에 작용하는 힘은 다음과 같다.

- 중심 O에 작용하는 무게 W;
- 바닥에서 위쪽으로 작용하는 수직항력 N과 마찰력 F(널빤지가 원기둥을 바깥쪽으로 밀기 때문에 중심선 쪽을 향한다);
- P에서 PO 방향으로 작용하는 수직항력 R, 그리고 접선 방향으로 아래쪽 안쪽을 향하는

마찰력 G.

뉴턴 제3법칙(Newton's third law)에 의해 널빤지는 OP 방향(위쪽, 중심선에서 멀어지는 쪽)으로 R을, 접선 방향으로 위쪽 바깥쪽을 향하는 G를 받는다.



P를 지나는 점선이 접선이다. 수평 방향으로 P는 중심 O보다 $r\sin\theta$만큼 안쪽에 있고, O는 중심선에서 거리 r만큼 떨어져 있다.

소문항 (i)

원기둥에 대한 O에 관한 모멘트. W, N, R은 모두 O를 지난다. 두 마찰력은 모두 원에 접하는 방향이므로 각각의 모멘트는 (힘)$\times r$이고, 서로 반대 방향으로 돌린다. 즉 F는 바닥에서 안쪽을 향하고, G는 P에서 아래쪽 안쪽을 향한다. 따라서

$$Fr = Gr \quad \Longrightarrow \quad G = F.$$

원기둥에 대한 수평 방향 분해(바깥쪽을 양의 방향으로 한다): R의 수평 성분은 바깥쪽으로 $R\sin\theta$, G의 성분은 안쪽으로 $G\cos\theta$이고, 바닥 마찰력 F는 안쪽으로 작용하므로

$$R\sin\theta - G\cos\theta - F = 0.$$

$G = F$를 대입하면 이 식은

$$R\sin\theta = F(1+\cos\theta),$$

이 되어 요구된 식을 얻는다.

따름 결과. 널빤지에서 미끄러짐이 없으므로 그곳의 마찰력은 $G \le \frac{1}{2}R$, 즉 $F \le \frac{1}{2}R$를 만족한다. 그러면

$$R\sin\theta = F(1+\cos\theta) \le \tfrac{1}{2}R(1+\cos\theta),$$

이고, $\frac{1}{2}R > 0$(널빤지가 원기둥을 누르고 있다)으로 나누면 $2\sin\theta \le 1+\cos\theta$를 얻는다.

소문항 (ii)

널빤지에 대한 수직 방향 분해. 각 모서리는 위쪽 성분이 $R\cos\theta$인 R과, 접선 방향 위쪽으로 작용하며 위쪽 성분이 $F\sin\theta$인 $G = F$를 받는다. 따라서

$$2(R\cos\theta + F\sin\theta) = kW.$$

소문항 (i)에서 $R = \dfrac{F(1+\cos\theta)}{\sin\theta}$이므로

$$R\cos\theta + F\sin\theta = \frac{F\left[(1+\cos\theta)\cos\theta + \sin^2\theta\right]}{\sin\theta} = \frac{F(1+\cos\theta)}{\sin\theta},$$

이다. $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$이기 때문이다. 그러므로

$$\tfrac{1}{2}kW = \frac{(1+\cos\theta)}{\sin\theta}F.$$

(널빤지에 작용하는 수평 방향의 힘들은 대칭성에 의해 상쇄되고, 모멘트도 마찬가지이다.)

원기둥에 대한 수직 방향 분해. 널빤지로부터의 반작용은 $R\cos\theta + G\sin\theta = \frac{1}{2}kW$만큼 아래로 누르므로

$$N = W + \tfrac{1}{2}kW = \left(\frac{2}{k} + 1\right)\tfrac{1}{2}kW = \left(1 + \frac{2}{k}\right)\left(\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\right)F.$$

이것이 요구된 식이다. (이는 바닥이 전체 무게 $2W + kW$의 절반을 떠받친다는 당연한 사실일 뿐이다.)

바닥에서 미끄러지지 않을 조건. 조건은

$$F \le \tfrac{1}{2}N.$$

이다. N에 대한 식으로부터

$$\frac{N}{F} = \left(1 + \frac{2}{k}\right)\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}.$$

예각 θ에 대해 $\sin\theta > 0$이므로 소문항 (i)에서 $\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta} \ge 2$이고, $k > 0$이므로 $1 + \frac{2}{k} > 1$이다. 따라서 $N/F > 2$, 즉 $F < \frac{1}{2}N$이다. 그러므로 널빤지가 미끄러지지 않기만 하면 바닥 조건은 자동으로 성립하며, θ에 추가적인 제한을 주지 않는다.

> ? **생각해 보기** 두 접촉점이 같은 마찰력 F를 받는데, 왜 바닥 접촉 조건은 저절로 성립할까?

바닥이 더 세게 누르기 때문이다. R와 N의 식을 비교하면 $N = \left(1 + \frac{2}{k}\right)R > R$인데, 바닥은 원기둥 자신의 무게까지 떠받치기 때문이다. 두 접촉점의 마찰력이 같고 바닥의 수직항력이 더 크므로, 항상 널빤지 쪽 접촉점이 먼저 미끄러진다.

소문항 (iii)

소문항 (i)의 부등식을 정리하여 제곱한다. 양변이 모두 양수이므로 제곱해도 부등호의 방향은 유지된다.

$$4\sin^2\theta \le (1+\cos\theta)^2 \iff 4(1-\cos\theta)(1+\cos\theta) \le (1+\cos\theta)^2.$$

$1+\cos\theta > 0$으로 나누면 $4-4\cos\theta \le 1+\cos\theta$, 즉 $\cos\theta \ge \frac{3}{5}$이다. θ가 예각이므로

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} \le \sqrt{1-\tfrac{9}{25}} = \tfrac{4}{5}.$$

(같은 내용으로, $t = \tan\frac{1}{2}\theta$라 하면 부등식은 $2t \le 1$이 되고, $\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$의 최댓값은 $t = \frac{1}{2}$일 때의 $\frac{4}{5}$이다.)

기하학적 관계. 널빤지의 모서리 P는 중심선에서 수평 거리 a만큼 떨어져 있다. 중심 O는 중심선에서 거리 r만큼 떨어져 있고, P는 O보다 $r\sin\theta$만큼 중심선에 더 가깝다. 따라서

$$a = r - r\sin\theta = r(1-\sin\theta) \ge r\left(1-\tfrac{4}{5}\right) = \tfrac{1}{5}r,$$

이고, 이로부터 $r \le 5a$를 얻는다.

검산

- 극단적인 경우인 $\sin\theta = \frac{4}{5}$, $\cos\theta = \frac{3}{5}$에서 $W = 1$, $k = 1$로 두자. 널빤지에 대한 식에서 $F = \frac{1}{4}$이고, 이어서 $R = \frac{1}{2}$, $N = \frac{3}{2}$이다. 따라서 $G/R = \frac{1}{2}$로 정확히 일치하고(널빤지가 막 미끄러지려는 상태), 반면 $F/N = \frac{1}{6}$으로 $\frac{1}{2}$보다 넉넉히 작아서 소문항 (ii)의 예측과 맞는다.
- 네 개의 평형(equilibrium) 방정식(모멘트, 그리고 두 물체 각각에 대한 분해)은 W, k, θ를 무작위로 10^5번 골라 컴퓨터로 확인하였다. $G \le \frac{1}{2}R$가 $\sin\theta \le \frac{4}{5}$일 때 그리고 그때에만 성립한다는 것과, 그때 $F < \frac{1}{2}N$이 항상 성립한다는 것도 함께 확인하였다.
- 극한에서의 타당성: 폭이 넓은 널빤지($a \to r$)는 원기둥의 꼭대기 근처에 놓이므로 $\theta \to 0$이 되어 마찰이 거의 필요 없다. 폭이 좁은 널빤지는 두 원기둥 사이에 깊이 끼어들고, 결국 그 사이로 미끄러져 내려간다.

흔한 실수

- 모멘트 방정식을 빠뜨려서 $G = F$임을 알아차리지 못하는 것. 이 식이 없으면 미지수가 너무 많다.
- 널빤지에서의 마찰력 방향을 잘못 잡는 것: 두 원기둥은 서로 멀어지는 방향으로 구르려 하므로, 원기둥에 작용하는 마찰력은 아래쪽 안쪽을 향한다.

- $a = r(1 - \sin\theta)$ 대신 $a = r\sin\theta$로 쓰는 것: a는 원기둥의 중심이 아니라 중심선에서부터 잰 거리이다.

STEP 너머

이것은 작은 정역학적으로 결정된(statically determinate) 계이다. 세 물체에 대해 모든 힘을 정하기에 충분한 방정식이 있고, 마찰에서 오는 부등식이 가능한 배치의 범위를 정해 준다. 대학 1학년 과정에서는 같은 아이디어가 강체 평형의 조건(알짜힘이 0이고 전체 모멘트가 0)으로 다시 등장하고, 나중에는 쐐기 작용과 끼임 현상(wedging and jamming)의 연구에서도 나타난다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 강체 정역학과 마찰을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP II 2017, 문제 10

역학 • 저항에 대해 한 일

STEP II 2017, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/17-s2-q10

핵심 아이디어

뉴턴(Newton)의 제2법칙(Newton's second law)으로 각 지점에서의 구동력(driving force)을 구할 수 있고, 엔진이 한 일(work)은 그 힘을 거리에 대해 적분(integral)한 값이다. 가속도(acceleration)가 일정할 때는 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = a$를 이용하여 x에 대한 적분을 v에 대한 적분으로 바꿀 수 있다. 유일하게 미묘한 점은 엔진은 밀 수만 있고 당길 수는 없다는 것이다. 필요한 힘이 음수가 되면 그 역할은 브레이크가 맡고 엔진은 아무 기여도 하지 않으므로, 구동력이 양수인 구간에서만 적분한다.

풀이

자동차를 x축을 따라 움직이는 입자로 모형화하고, 엔진의 구동력을 F라 하자. 자동차가 앞으로 움직이는 동안 저항(resistance) $Av^2 + R$는 뒤쪽으로 작용한다.

전반부. 뉴턴의 제2법칙에 의해 $F - (Av^2 + R) = ma$이므로

$$F = ma + R + Av^2,$$

이고, 이 값은 전 구간에서 양수이다. 힘 F가 그 작용점(point of application)을 $\mathrm{d}x$만큼 움직일 때 한 일은 $F\,\mathrm{d}x$이므로, 전반부에서 엔진이 한 일은

$$\int_0^d (ma + R + Av^2)\,\mathrm{d}x,$$

이고, 이것이 구하려던 식이다. 변수 변환(change of variable)을 위해, 가속도가 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = a$이므로 $\mathrm{d}x = \frac{v}{a}\,\mathrm{d}v$이다. $v^2 = 2ax$ (정지 상태에서 출발한 등가속도 운동)이므로 v는 $x = 0$에

서 0부터 $x = d$에서 $\sqrt{2ad} = w$까지 변한다. 따라서 한 일은

$$\int_0^w \frac{(ma + R + Av^2)\, v}{a}\, \mathrm{d}v,$$

이고, 이것이 구하려던 식이다. 이를 계산하고 $w^2 = 2ad$를 이용하면 다음을 얻는다.

$$W_1 = \frac{1}{a}\left[\frac{(ma+R)v^2}{2} + \frac{Av^4}{4}\right]_0^w = \frac{(ma+R)w^2}{2a} + \frac{Aw^4}{4a} = (ma+R)d + Aad^2.$$

후반부. 이제 가속도는 $-a$이므로 $F - (Av^2 + R) = -ma$이고, 따라서

$$F = Av^2 + R - ma.$$

자동차는 w에서 0으로 감속하며, $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -a$이므로 $\mathrm{d}x = -\frac{v}{a}\,\mathrm{d}v$이다. $F > 0$이고 속력이 v_1에서 v_2로 줄어드는 (단, $v_1 > v_2$) 임의의 구간에서 엔진이 한 일은 다음과 같다.

$$\int_{v_1}^{v_2} F\left(-\frac{v}{a}\right)\mathrm{d}v = \int_{v_2}^{v_1} \frac{(Av^2 + R - ma)\, v}{a}\,\mathrm{d}v. \qquad (*)$$

소문항 (i)

$R > ma$이면 모든 v에 대하여 $F = Av^2 + (R - ma) > 0$이므로, 엔진은 후반부 내내 일을 한다. $v_1 = w$, $v_2 = 0$으로 놓고 $(*)$를 적용하면

$$W_2 = \frac{1}{a}\left[\frac{(R-ma)v^2}{2} + \frac{Av^4}{4}\right]_0^w = (R-ma)d + Aad^2.$$

두 값을 더하면 $ma\,d$ 항이 상쇄되어 전체 일은

$$W_1 + W_2 = 2Aad^2 + 2Rd,$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

소문항 (ii)

이제 $R < ma$이므로, $F = Av^2 - (ma - R)$는 정확히 다음일 때 0이 된다.

$$v = u, \qquad \text{단, } u^2 = \frac{ma - R}{A} > 0.$$

이 속력은 $u < w$일 때, 즉 $\frac{ma-R}{A} < 2ad$일 때 후반부 동안 실제로 도달되며, 이는 정확히 조건 $R > ma - 2Aad$와 같다. 따라서 자동차가 w에서 0으로 감속하는 동안 F는 $v > u$인 동안 양수이고, 속력 u에서 0이 되며, $v < u$에서는 음수(제동)가 된다. 이로써 첫 번째 주장이 증명된다.

생각해 보기 왜 (i)의 답을 그대로 다시 쓸 수 없을까?

(i)의 적분은 후반부 전체에 걸쳐 $F\,\mathrm{d}x$를 더한 것이다. 여기서는 $v < u$일 때 F가 음수이므로, 그 구간은 전체에서 빼는 역할을 하게 된다. 그러나 엔진이 그 구간에서 음의 일을 하는 것은 아니다. 엔진은 아무것도 하지 않고, 브레이크가 일을 넘겨받는다. 따라서 적분을 $v = u$에서 멈춘다. $v_1 = w$, $v_2 = u$로 놓고 $(*)$를 적용하면

$$\begin{aligned} W_2 &= \frac{1}{a}\left[\frac{(R-ma)v^2}{2} + \frac{Av^4}{4}\right]_u^w \\ &= (R-ma)d + Aad^2 - \frac{1}{a}\left(\frac{(R-ma)u^2}{2} + \frac{Au^4}{4}\right). \end{aligned}$$

$Au^2 = ma - R$를 대입하면 괄호 안은

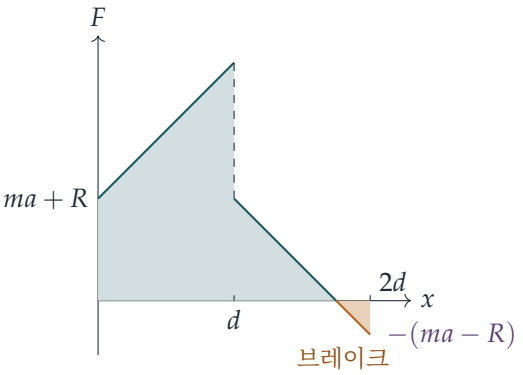
$$-\frac{(ma-R)^2}{2A} + \frac{(ma-R)^2}{4A} = -\frac{(ma-R)^2}{4A},$$

이므로 $W_2 = (R-ma)d + Aad^2 + \frac{(ma-R)^2}{4Aa}$이다. 전반부는 변하지 않으므로(그 구간에서는 항상 $F > 0$), 전체 일은

$$W_1 + W_2 = 2Aad^2 + 2Rd + \frac{(ma-R)^2}{4Aa},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

그림으로 보기. 전반부에서는 $v^2 = 2ax$이고 후반부에서는 $v^2 = 2a(2d-x)$이므로, F는 각 구간에서 x의 **일차**함수(linear function)이고, 엔진이 한 일은 그래프의 양수 부분 아래의 넓이이다. (ii)의 경우 그래프는 끝 부근에서 축 아래로 내려간다. 빠진 삼각형의 높이는 $ma - R$이고, F가 단위 거리당 $2Aa$의 비율로 감소하므로 밑변은 $\frac{ma-R}{2Aa}$이다. 그 넓이 $\frac{(ma-R)^2}{4Aa}$이 바로 추가된 항이다.



검산

- 경계 $R = ma$에서는 추가 항이 사라지므로 (i)과 (ii)의 답이 일치한다. 이때 F는 맨 끝에서야 O에 도달하므로 당연히 그래야 한다.
- 다른 경계 $R = ma - 2Aad$에서는 $u = w$이고, 엔진은 후반부에 아무 일도 하지 않으므로 전체 일은 $W_1 = (ma + R)d + Aad^2$이어야 한다. (ii)의 답에 $ma - R = 2Aad$를 대입하면 $2Aad^2 + 2Rd + Aad^2 = 2Rd + 3Aad^2$이고, $(ma + R)d + Aad^2 = 2Rd + 2Aad^2 + Aad^2$ 역시 같으므로 두 값은 일치한다.
- 수치로 확인하면, $m = a = 1$, $A = \frac{1}{2}$, $d = 2$, $R = \frac{1}{2}$ (위 그림의 경우)일 때 (ii)의 공식은 $4 + 2 + \frac{1}{8} = 6.125$를 주고, 전체 주행에 걸쳐 F의 양수 부분을 직접 수치적분해도 같은 값이 나온다.
- 단위: Aad^2, Rd, $(ma - R)^2/(Aa)$는 모두 힘에 거리를 곱한 것이므로 모두 에너지이다.

흔한 실수

- 후반부에서 $\mathrm{d}x = -\frac{v}{a}\,\mathrm{d}v$이어서 적분의 위끝과 아래끝이 뒤바뀐다는 점을 잊는 것. 여기서 부호를 틀리면 후반부의 일이 음수가 된다.
- (ii)에서 F의 음수 부분까지 적분하는 것. 그러면 (i)의 답이 그대로 다시 나올 뿐이다.
- 자동차가 멈추기 전에 속력 u에 실제로 도달하는지 확인하지 않는 것. R의 하한이 바로 이를 보장한다.

STEP 너머

힘이 한 일은 선적분(line integral) $\int \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$이며, 여기서 사용한 변수 변환은 일-에너지 정리(work–energy theorem)의 일차원 버전이다. Av^2 같은 저항은 보존력(conservative force)이 아니므로, 한 일은 출발점과 도착점뿐 아니라 어떻게 주행하는지에 따라 달라진다. 엔진의 "한쪽 방향으로만 작용하는" 성질은 주어진 거리를 가장 연료 효율적으로 주행하는 방법을 찾는 문제처럼, 최적 제어(optimal control) 문제에 나타나는 제약 조건을 미리 맛보게 해 준다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 일, 에너지, 그리고 속도에 의존하는 힘을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP II 2017, 문제 11

역학 • 포물체와 에너지

STEP II 2017, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

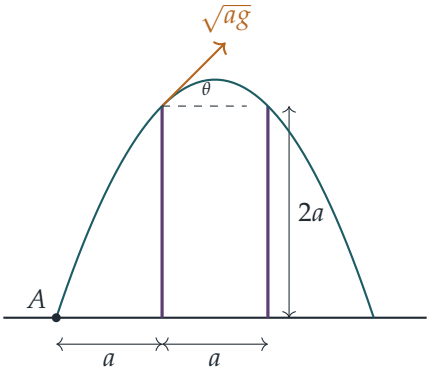
step.maths.org/questions/17-s2-q11

핵심 아이디어

입자가 첫 번째 벽의 꼭대기와 같은 높이에 이르면, 그 뒤의 비행은 새로운 포물체(projectile) 문제가 된다. 입자는 높이 $2a$에서 알려진 속력으로 출발하고, 수평 거리 a만큼 더 나아간 뒤에도 여전히 높이 $2a$ 이상에 있어야 한다. 에너지(energy)를 이용하면 투사각(angle of projection)을 몰라도 그 속력을 구할 수 있다. 궤적(trajectory)을 $\tan\theta$로 나타내면 "두 번째 벽을 넘을 수 있는가?"라는 질문이 "$\tan\theta$에 대한 이차식(quadratic)이 실근(real root)을 갖는가?"라는 질문으로 바뀌고, 이것으로 두 소문항을 한꺼번에 다룰 수 있다.

풀이

각 입자를 공기 저항(air resistance) 없이 중력만 받으며 자유롭게 움직이는 질점(point mass)으로 모형화한다. x축은 수평 방향(벽 쪽)으로, y축은 연직 위쪽으로 잡는다.



소문항 (i)

첫 번째 벽 위에서의 속력. 일을 하는 힘은 중력뿐이므로 운동에너지(kinetic energy)와 위치에너지(potential energy)의 합은 일정하다. 지면에서 높이 $2a$까지 올라가고 벽 꼭대기에서의 속력을 v라 하면

$$\tfrac{1}{2}m(5ag) = \tfrac{1}{2}mv^2 + mg(2a) \quad \Longrightarrow \quad v^2 = 5ag - 4ag = ag,$$

이므로 입자는 속력 $\sqrt{ag}$로 첫 번째 벽 위를 지난다.

각. 입자가 첫 번째 벽 위를 지날 때 속도가 수평 위쪽으로 이루는 각을 θ라 하자. 입자는 나중에(두 번째 벽 위에서) 다시 높이 $2a$에 있으므로 이때 아직 올라가는 중이어야 하고, 따라서 $\theta > 0$이다. 첫 번째 벽의 꼭대기를 기준으로 재면, 수평 거리 X만큼 나아간 뒤 벽 꼭대기 높이 위로의 높이는

$$Y = X\tan\theta - \frac{gX^2}{2v^2\cos^2\theta} = X\tan\theta - \frac{X^2}{2a}\left(1+\tan^2\theta\right),$$

이다. 여기서 $v^2 = ag$와 $\sec^2\theta = 1+\tan^2\theta$를 이용하였다. 두 번째 벽을 아슬아슬하게 넘는다는 것은 $X = a$에서 $Y = 0$이라는 뜻이다.

$$a\tan\theta - \tfrac{a}{2}(1+\tan^2\theta) = 0 \iff \tan^2\theta - 2\tan\theta + 1 = 0 \iff (\tan\theta - 1)^2 = 0.$$

따라서 $\tan\theta = 1$이고, 요구한 대로 $\theta = 45^\circ$이다. (같은 내용을 다르게 보면, 높이 $2a$에서 다시 $2a$로 돌아오는 수평면 위의 사정거리는 $v^2\sin 2\theta/g = a\sin 2\theta$이고, 이것은 $\sin 2\theta = 1$일 때만 a와 같다.)

***A*까지의 거리.** 속도의 수평 성분은 변하지 않으며, 첫 번째 벽 위에서 그 값은 $\sqrt{ag}\cos 45^\circ = \sqrt{ag/2}$이다. 그곳에서 연직 성분도 위쪽으로 $\sqrt{ag/2}$이다. A에서의 연직 성분 u는 $u^2 = \frac{1}{2}ag + 2g(2a) = \frac{9}{2}ag$를 만족하므로 $u = 3\sqrt{ag/2}$이다. (검산하면 $\frac{1}{2}ag + \frac{9}{2}ag = 5ag$로 발사 속력과 맞는다.) A에서 첫 번째 벽까지 걸리는 시간은

$$t = \frac{u - \sqrt{ag/2}}{g} = \frac{2\sqrt{ag/2}}{g},$$

이고, 그동안 나아간 수평 거리는

$$\sqrt{\tfrac{ag}{2}}\cdot\frac{2\sqrt{ag/2}}{g} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}ag}{g} = a.$$

이다. 따라서 A는 첫 번째 벽의 밑동에서 거리 a만큼 떨어져 있다.

소문항 (ii)

이제 입자는 높이 $2a+h$에서 첫 번째 벽 위를 지난다. 에너지에 의해 그곳에서의 속력 w는

$$w^2 = 5ag - 2g(2a+h) = g(a-2h).$$

를 만족한다. 입자는 벽 쪽으로 움직이므로 수평 속도가 0이 아니고 $w^2 > 0$이다. 따라서 $h < \frac{1}{2}a$이다.

그곳에서 입자의 운동 방향이 수평과 이루는 각을 ϕ라 하고 $T = \tan\phi$로 놓자. 첫 번째 벽 위에서의 입자 위치를 기준으로 재면, 수평 거리 X만큼 나아간 뒤 그 점 위로의 높이는

$$Y = XT - \frac{gX^2}{2w^2}(1+T^2) = XT - kX^2(1+T^2)/a^2, \qquad \text{여기서} k = \frac{ga^2}{2w^2} = \frac{a^2}{2(a-2h)}.$$

이다. 두 번째 벽에서는 $X = a$이므로 $Y = aT - k(1+T^2)$이다. 그 벽을 넘으려면 입자의 높이가 $2a$ 이상, 즉 $Y \geq -h$이어야 한다.

$$aT - k(1+T^2) + h \geq 0 \iff kT^2 - aT + (k-h) \leq 0.$$

생각해 보기 우리는 ϕ를 모른다. 어떤 방향도 불가능하다는 것을 어떻게 보일 수 있을까?

$k > 0$이므로 이차식 $kT^2 - aT + (k-h)$의 그래프는 아래로 볼록하다. 이 이차식이 어떤 실수 T에서 ≤ 0인 값을 가지려면 판별식(discriminant)이 음이 아니어야 한다. 그 판별식은

$$\Delta = a^2 - 4k(k-h) = a^2 - \frac{a^4}{(a-2h)^2} + \frac{2a^2h}{a-2h}.$$

이다. 양수 $(a-2h)^2/a^2$를 곱하면

$$\frac{(a-2h)^2}{a^2}\Delta = (a-2h)^2 - a^2 + 2h(a-2h) = -2ah.$$

이다. $a > 0$이고 $h > 0$이므로 이 값은 음수이고, 따라서 $\Delta < 0$이다. 그러면 모든 실수 T에 대해 $kT^2 - aT + (k-h) > 0$이므로, 첫 번째 벽 위에서 입자가 어떤 방향으로 움직이든 두 번째 벽에 이르렀을 때 높이 $2a$보다 아래에 있다. 입자는 두 번째 벽을 넘지 못한다.

$h = 0$이면 $\Delta = 0$이 되고 이중근(double root) $T = a/(2k) = 1$을 얻는다는 점에 주목하자. 이것이 바로 소문항 (i)의 45°이다.

검산

- 소문항 (i)에서 A에서의 성분은 $\sqrt{ag/2}$와 $3\sqrt{ag/2}$이고, 그 제곱의 합은 $5ag$이다. $a = 1.7\,\mathrm{m}$, $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$로 놓고 A에서부터 시간에 따라 운동을 단계별로 계산해 나가면 두 벽에서 모두 높이 $2.000a$를 얻는다.
- 궤적은 최고점에 대해 대칭이며, 소문항 (i)에서 최고점은 두 벽의 한가운데, 즉 A로부터 수평 거리 $1.5a$인 곳에 있다. 따라서 입자는 A에서 $3a$ 떨어진 곳, 곧 두 번째 벽 너머 거리 a인 곳에 떨어진다. 그림이 대칭이다.
- 소문항 (ii)에 대해, 속력 $\sqrt{5ag}$로 수천 개의 무작위 발사각과 발사 지점을 컴퓨터로 확인해 보았지만, 첫 번째 벽 위를 지나면서 두 번째 벽도 넘는 경우는 하나도 없었다.

흔한 실수

- 소문항 (i)의 θ가 A에서의 투사각이 아니라 첫 번째 벽 위에서의 각이어야 한다는 것을 잊는 실수(투사각은 $\tan\alpha = 3$을 만족한다).
- 소문항 (ii)에서 특정한 각 하나(예를 들어 $45°$)만 확인하는 실수. 주장은 가능한 모든 방향에 대한 것이며, 그래서 판별식이 필요하다.

STEP 너머

소문항 (ii)는 첫 번째 벽 위의 한 점에서 이 에너지를 가진 입자가 두 번째 벽의 꼭대기에 겨우 닿을 수 있을 뿐임을 말해 준다. 즉 그 벽 꼭대기는 도달 가능한 영역의 경계 위에 있다. 주어진 점에서 주어진 속력으로 도달할 수 있는 모든 점은 **포락선**(envelope) 또는 **안전 포물선**(safety parabola)이라 불리는 포물선의 안쪽에 있고, 그 포물선 위의 점에는 정확히 하나의 궤적만이 도달하는데, 이것이 여기서 본 이중근이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 대학 1학년 수준에서 포물체와 에너지 방법을 다룬다.

풀이

STEP II 2017, 문제 12

확률과 통계 • 푸아송 과정

STEP II 2017, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/17-s2-q12

핵심 아이디어

서로 독립(independent)인 두 물고기 포아송 흐름(Poisson stream)은 합쳐져 하나의 포아송 흐름이 되고, 그 비율은 두 비율의 합이다. (i)의 합성곱(convolution)이 보여 주는 것이 바로 이것이다. 시간에 관한 문항에서는 첫 물고기가 **언제** 잡히는지에 관한 명제를 물고기가 **몇 마리** 잡혔는지에 관한 명제로 바꾼다. "아담의 첫 물고기는 시각 t 이후에 잡힌다"는 정확히 "아담은 $[0,t]$에서 물고기를 한 마리도 잡지 못한다"는 뜻이며, 그 확률(probability)은 포아송 공식에서 곧바로 얻어진다.

풀이

이 풀이 전체에서 X와 Y는 길이가 T인 구간에서 아담과 이브가 잡은 물고기의 수이다. 따라서 $X \sim \mathrm{Po}(\lambda T)$이고 $Y \sim \mathrm{Po}(\mu T)$이며, 둘은 서로 독립이다.

소문항 (i)

정수 $r \geq 0$에 대하여, 사건 $X+Y=r$는 $j=0,1,\ldots,r$에 대한 서로소인 사건 $\{X=j,\ Y=r-j\}$들로 나뉜다. 독립성을 이용하면

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X+Y=r) &= \sum_{j=0}^{r} \mathrm{P}(X=j)\,\mathrm{P}(Y=r-j) = \sum_{j=0}^{r} \frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^j}{j!}\cdot\frac{e^{-\mu T}(\mu T)^{r-j}}{(r-j)!} \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)T}}{r!}\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}(\lambda T)^j(\mu T)^{r-j} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)T}\big((\lambda+\mu)T\big)^r}{r!},\end{aligned}$$

이다. 여기서 $r!$을 곱하고 나눈 다음 이항정리(binomial theorem)를 이용하였다. 이것은 $\mathrm{Po}\big((\lambda+\mu)T\big)$의 확률이므로, 시간 T 동안 잡은 물고기의 총수는 모수가 $(\lambda+\mu)T$인 포아

송 분포를 따른다.

소문항 (ii)

$0 \le r \le k$에 대하여

$$\mathrm{P}(X = r \mid X + Y = k) = \frac{\mathrm{P}(X = r,\ Y = k - r)}{\mathrm{P}(X + Y = k)} = \frac{\dfrac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^r}{r!} \cdot \dfrac{e^{-\mu T}(\mu T)^{k-r}}{(k-r)!}}{\dfrac{e^{-(\lambda+\mu)T}\big((\lambda+\mu)T\big)^k}{k!}},$$

이다. 분모에는 소문항 (i)을 이용하였다. 지수함수들이 약분되고, T의 거듭제곱도 약분되어(분자에 $r + (k-r) = k$개, 분모에 k개가 있다)

$$\mathrm{P}(X = r \mid X + Y = k) = \binom{k}{r} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^r \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{k-r}.$$

이 남는다. 따라서 총수가 k로 주어졌을 때 아담이 잡은 물고기의 수는 $\mathrm{B}\big(k,\ \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\big)$를 따른다. 사실상 k마리의 물고기 각각이 독립적으로 확률 $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$로 아담의 것이 되는 셈이다. T가 사라졌다는 점에 주목하자.

소문항 (iii)

처음부터 잰 시각으로, 아담과 이브가 첫 물고기를 잡는 시각을 각각 A와 E라 하자. 아담의 첫 물고기가 시각 t 이후에 잡히는 것은 정확히 그가 $[0, t]$에서 아무것도 잡지 못할 때이므로

$$\mathrm{P}(A > t) = \mathrm{P}\big(\mathrm{Po}(\lambda t) = 0\big) = e^{-\lambda t}, \qquad \text{이고, 마찬가지로} \qquad \mathrm{P}(E > t) = e^{-\mu t}.$$

이다. 따라서 A의 확률밀도함수(probability density function)는 $t \ge 0$에서 $\lambda e^{-\lambda t}$이고($1 - e^{-\lambda t}$를 미분한다), 두 사람의 어획이 독립이므로 A와 E도 독립이다.

? 생각해 보기 A의 밀도와 E에 관한 확률을 어떻게 결합할까?

A의 값에 대하여 조건을 걸자. 아담의 첫 물고기가 시각 t에 잡힌다면, 그가 먼저 잡는 것은 정확히 $E > t$일 때이고, 독립성에 의해 그 확률은 $e^{-\mu t}$이다. 모든 t에 대하여 합하면

$$\mathrm{P}(A < E) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\, e^{-\mu t}\, \mathrm{d}t = \lambda \left[\frac{-e^{-(\lambda+\mu)t}}{\lambda+\mu}\right]_0^\infty = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}.$$

이다. (E가 연속분포를 따르므로 동시에 잡을 확률은 0이다.) 따라서 첫 물고기가 아담의 것일 확률은 $\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}$이며, 이는 (ii)의 이항분포 모수와 같다.

소문항 (iv)

구하려는 것은 $\mathrm{E}(M)$이다. 여기서 $M = \max(A, E)$는 두 사람 모두 물고기를 한 마리씩 잡게 되는 시각이다. 둘 중 누구든 첫 물고기를 잡는 시각을 $m = \min(A, E)$라 쓰자. 임의의

두 수에 대하여 max + min은 두 수의 합이므로

$$M = A + E - m \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{E}(M) = \mathrm{E}(A) + \mathrm{E}(E) - \mathrm{E}(m).$$

이다.

$\mathrm{E}(A)$와 $\mathrm{E}(E)$. 처음부터 본 아담의 어획은 어느 한 마리를 잡은 순간부터 본 것과 같은 종류의 과정이므로, 첫 물고기까지 기다리는 시간의 기댓값(expectation)은 주어진 간격의 기댓값과 같다. 즉 $\mathrm{E}(A) = \lambda^{-1}$이고, 마찬가지로 $\mathrm{E}(E) = \mu^{-1}$이다. (직접 계산하면, 부분적분(integration by parts)으로 $\mathrm{E}(A) = \int_0^\infty t\lambda e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \lambda^{-1}$이다.)

? **생각해 보기** "둘 중 누구든 잡는 첫 물고기"는 어떤 종류의 과정일까?

소문항 (i)에 의해, 길이가 t인 임의의 구간에서 두 사람이 합쳐 잡은 물고기의 수는 $\mathrm{Po}\big((\lambda+\mu)t\big)$를 따른다. 따라서 합친 어획은 아담의 것과 정확히 같은 종류의 과정이되 비율이 λ 대신 $\lambda+\mu$이며, 첫 물고기까지 기다리는 시간의 기댓값은 $\mathrm{E}(m) = (\lambda+\mu)^{-1}$이다. (직접 계산하면 $\mathrm{P}(m > t) = \mathrm{P}(A > t)\,\mathrm{P}(E > t) = e^{-(\lambda+\mu)t}$이다.) 그러므로

$$\mathrm{E}(M) = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda+\mu} = \frac{\lambda^2+\lambda\mu+\mu^2}{\lambda\mu(\lambda+\mu)}.$$

이다.

검산

- $\lambda = \mu$이면 소문항 (iii)은 대칭성(symmetry)이 요구하는 대로 $\frac{1}{2}$을 주고, 소문항 (iv)는 $\frac{3}{2\lambda}$를 준다. 같은 "새 출발" 논리에 따라 첫 물고기까지 $\frac{1}{2\lambda}$을 기다리고, 다른 사람을 위해 $\frac{1}{\lambda}$을 더 기다리는 것이다.
- $\mu \to \infty$이면(이브가 물고기를 즉시 잡으면) 소문항 (iv)의 값은 아담 혼자 필요한 시간인 $\frac{1}{\lambda}$로 수렴(tend to)한다.
- $\frac{1}{\mu} > \frac{1}{\lambda+\mu}$이므로 (iv)의 답은 당연히 $\max(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\mu})$ 이상이다.
- $\lambda = 1.3$, $\mu = 0.7$일 때 공식은 0.65와 1.6978을 주며, 2×10^5번의 낚시를 컴퓨터로 시뮬레이션한 결과는 0.651과 1.700이었다.

흔한 실수

- (iv)에서 $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$을 더하거나 $\max\big(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\mu}\big)$를 취하는 것. 최댓값의 기댓값은 이 둘 중 어느 것도 아니다.
- (ii)에서 $\mathrm{P}(X+Y=k)$로 나누는 것을 잊는 것. 결합확률을 조건부확률(conditional probability)로 바꾸어 주는 것이 바로 이 나눗셈이다.

STEP 너머

여기서 만난 것은 **포아송 과정**(Poisson process)이다. 사건 사이의 대기 시간은 지수분포(exponential distribution)를 따르고 무기억성(memoryless)을 가지며, 독립인 포아송 과정들은 중첩(superpose)되어 또 하나의 포아송 과정이 되고, 각 사건은 그 비율에 비례하는 확률로 독립적으로 표시된다(그 역연산인 "솎아내기(thinning)"도 성립한다). 이 사실들은 대기행렬 이론(queueing theory)과 연속시간 마르코프 연쇄(continuous-time Markov chain)의 토대이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 이 문제에서 자연스럽게 이어지는 방식으로 포아송 과정과 지수분포를 다룬다.

풀이

STEP II 2017, 문제 13

확률과 통계 • 기댓값과 무한급수

STEP II 2017, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/17-s2-q13

핵심 아이디어

모든 경우에 문이 k번째 시도에서 열린다는 것은 처음 $k-1$번의 시도가 실패하고 k번째 시도가 성공한다는 것과 정확히 같으므로, 그 확률은 "실패" 인수들의 곱에 "성공" 인수 하나를 곱한 것이다. 경우마다 달라지는 것은 매번 뽑을 때 주머니 속에 열쇠가 몇 개 있느냐뿐이다. 확률을 적고 나면 기댓값(expectation)은 합으로 주어진다. (i)에서는 미분한 기하급수(geometric series), (ii)에서는 등차급수(arithmetic series), 그리고 (iii)에서는 조화급수(harmonic series)의 일부를 남기는 망원합(telescoping sum)이다.

풀이

이 풀이 전체에서 X를 문이 열리는 시도의 번호라 하고, $q = 1 - \frac{1}{n}$이라 하자.

소문항 (i)

열쇠를 다시 넣으므로 매번 n개의 열쇠가 모두 든 주머니에서 이전과 독립적으로 뽑는다. 따라서 각 시도는 확률 $\frac{1}{n}$으로 성공하고,

$$\mathrm{P}(X = k) = q^{k-1} \cdot \frac{1}{n}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

이다. $0 < q < 1$이므로 이항전개(binomial expansion)에 의해

$$(1-q)^{-2} = 1 + 2q + 3q^2 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1}.$$

따라서

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, q^{k-1} \frac{1}{n} = \frac{1}{n}(1-q)^{-2} = \frac{1}{n} \cdot n^2 = n.$$

시도 횟수의 기댓값은 n이다.

소문항 (ii)

이번에는 실패할 때마다 주머니에서 틀린 열쇠가 하나씩 빠지므로, j번째 시도에서는 열쇠가 $n-j+1$개 있다. 문이 k번째 시도에서 열리려면 $k-1$번 실패한 다음 성공해야 한다.

$$\mathrm{P}(X=k)=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdots\frac{n-k+1}{n-k+2}\cdot\frac{1}{n-k+1}=\frac{1}{n},$$

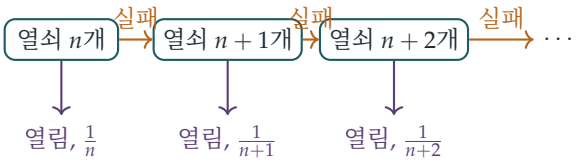
곱이 연쇄적으로 약분되기 때문이다. (이는 직접 보아도 분명하다. 열쇠를 다시 넣지 않고 하나씩 뽑으면 맞는 열쇠는 n개의 자리 가운데 균등하게(uniformly) 무작위인 자리에 놓인다.) 따라서 X는 $\{1,2,\ldots,n\}$ 위의 균등분포를 따르고

$$\mathrm{E}(X)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2}.$$

소문항 (iii)

확률. 주머니는 n개의 열쇠로 시작하여 실패할 때마다 틀린 열쇠가 하나씩 늘어나며, 맞는 열쇠는 언제나 정확히 하나 들어 있다. 따라서 j번째 시도에서는 열쇠가 $n+j-1$개 있고,

$$\mathrm{P}(\text{시도}j\text{가 실패}\mid\text{이전 시도가 모두 실패})=\frac{n+j-2}{n+j-1}.$$



$k-1$번의 실패와 그 뒤의 성공에 대한 조건부확률(conditional probability)을 곱하면

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=k)&=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n+1}\cdots\frac{n+k-3}{n+k-2}\cdot\frac{1}{n+k-1}\\&=\frac{n-1}{n+k-2}\cdot\frac{1}{n+k-1}=\frac{n-1}{(n+k-1)(n+k-2)},\end{aligned}$$

이다. 각 분자가 바로 앞의 분모와 약분되어 첫 번째 분자 $n-1$과 마지막 실패 인수의 분모 $n+k-2$만 남기 때문이다. $k=1$일 때는 실패 인수가 없으며, 공식은 마땅히 그래야 하듯 $\frac{n-1}{n(n-1)}=\frac{1}{n}$을 준다. 이것이 구하려던 결과이다.

문은 반드시 열린다. 평균을 계산하기 전에 X가 확률 1로 유한함을 확인해 둘 만하다. $\dfrac{n-1}{(n+k-1)(n+k-2)}=(n-1)\left(\dfrac{1}{n+k-2}-\dfrac{1}{n+k-1}\right)$이므로 합이 연쇄적으로 소거

된다.

$$\sum_{k=1}^{N} \mathrm{P}(X=k) = (n-1)\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+N-1}\right) \to 1 \quad \text{단, } N \to \infty.$$

기댓값. $\sum k\,\mathrm{P}(X=k)$가 필요하므로 $\dfrac{k}{(n+k-1)(n+k-2)}$를 부분분수(partial fractions)로 나눈다.

$$k = A(n+k-2) + B(n+k-1)$$

로 놓고 $k = 1-n$을 대입하면 $1-n = -A$, 즉 $A = n-1$이고, $k = 2-n$을 대입하면 $B = 2-n$이다. 따라서

$$k\,\mathrm{P}(X=k) = (n-1)\left(\frac{n-1}{n+k-1} - \frac{n-2}{n+k-2}\right).$$

생각해 보기 계수 $n-1$과 $n-2$가 다르기 때문에 이 합은 깔끔하게 소거되지 않는다. 그렇다면 무엇이 남는가?

S_N을 처음 N개 항의 합이라 하자. 첫 번째 분수에서 분모는 $m = n, \ldots, n+N-1$에 걸쳐 있고, 두 번째 분수에서는 $m = n-1, \ldots, n+N-2$에 걸쳐 있다. 공통 범위 $m = n, \ldots, n+N-2$에서는 각 $\frac{1}{m}$이 계수 $(n-1)-(n-2) = 1$로 나타나고, 양 끝이 남는다.

$$S_N = (n-1)\left(\sum_{m=n}^{n+N-2} \frac{1}{m} + \frac{n-1}{n+N-1} - \frac{n-2}{n-1}\right).$$

마지막 두 항은 유계이다(가운데 항은 양수이고 마지막 항은 고정된 수이다). 반면

$$\sum_{m=n}^{n+N-2} \frac{1}{m} = \sum_{m=1}^{n+N-2} \frac{1}{m} - \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m} \to \infty$$

이다. $N \to \infty$일 때 조화급수는 발산(diverge)하고 우리는 고정된 유한한 양만 빼기 때문이다. $n-1 > 0$이므로 $S_N \to \infty$이다. 모든 항 $k\,\mathrm{P}(X=k)$가 양수이므로 $\mathrm{E}(X)$를 정의하는 급수는 무한대로 발산한다. 즉 문이 결국 열린다는 것은 확실하지만, 시도 횟수의 기댓값은 무한대이다.

검산

- $n = 2$일 때 세 답은 $2, \frac{3}{2}, \infty$이다. 두 번째 경우는 같은 열쇠를 다시 시도하는 일이 없으므로 마땅히 가장 효율적이고, 첫 번째 경우는 그 중간이다.
- (iii)에서 $n = 3$이면 공식은 $k = 1, 2, 3$에 대하여 $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}$을 준다. 직접 계산하면 $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{6}$, $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{10}$이다. 2×10^5번의 게임을 컴퓨터로 모의실험한 결과 상대도수는 0.334, 0.168, 0.099였다.

- 역시 $n = 3$일 때 $N = 10^4$인 부분합 S_N은 약 15.6이며, $2\ln N$처럼 계속 커진다. 극한은 존재하지 않는다.

흔한 실수

- (iii)에서 k번째 시도의 주머니 크기를 $n+k-1$이 아니라 $n+k$로 잡는 것. k번째로 뽑기 전에 추가된 열쇠는 $k-1$개뿐이다.
- 평균이 무한대이므로 문이 영영 열리지 않을 수도 있다고 결론짓는 것. 확률의 합은 1이다. $1/k^2$처럼 감소하는 꼬리가 너무 두꺼워서 $\sum k\,\mathrm{P}(X=k)$가 수렴하지 않을 뿐이다.
- 두 계수가 같은 것처럼 부분분수를 소거하여 유한한 답을 얻는 것.

STEP 너머

세 번째 경우는 $\mathrm{P}(X=k)$가 $1/k^2$처럼 행동하기 때문에 확률 1로 유한하지만 평균은 무한대인 확률변수(random variable)를 준다. 이와 같은 꼬리가 두꺼운 분포(heavy-tailed distribution)와 유명한 상트페테르부르크 역설(St Petersburg paradox)은 대학 1학년 확률론 강의에서 왜 $\sum k\,\mathrm{P}(X=k)$가 수렴할 때에만 $\mathrm{E}(X)$가 존재한다고 고집하는지를 보여준다. 실패할 때마다 틀린 열쇠가 하나씩 늘어나는 주머니는 "부자는 더 부유해진다" 과정의 표준 모형인 폴리아(Pólya)의 항아리(urn)와 가까운 친척이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 이산 확률변수의 기댓값과 이러한 미묘한 점들을 다룬다.

풀이

STEP III 2017, 문제 1

순수수학 • 망원급수를 이용한 한계

STEP III 2017, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/17-s3-q1

핵심 아이디어

(i)의 항등식은 이항계수(binomial coefficient)의 역수 각각을 상수와 연속한 두 항의 차(difference)의 곱으로 나타내므로, 합이 망원급수(telescoping series)처럼 소거된다. (ii)에서 $1/n^3$은 합을 구하기 까다롭지만 이항계수의 역수는 그렇지 않다. $\binom{n+1}{3}$과 $\binom{n+2}{5}$는 n에 대한 다항식으로 각각 n^3과 n^5의 상수배처럼 행동하므로, (i)을 이용해 정확히 합을 구할 수 있는 식들 사이에 $1/n^3$을 가둔다.

풀이

소문항 (i)

$\binom{m}{k} = \dfrac{m!}{k!\,(m-k)!}$로 쓰자. 그러면

$$\begin{aligned}\frac{1}{\binom{n+r-1}{r}} - \frac{1}{\binom{n+r}{r}} &= \frac{r!\,(n-1)!}{(n+r-1)!} - \frac{r!\,n!}{(n+r)!} \\ &= \frac{r!\,(n-1)!}{(n+r)!}\big[(n+r)-n\big] = \frac{r\cdot r!\,(n-1)!}{(n+r)!},\end{aligned}$$

이다. 여기서 $(n+r)! = (n+r)\,(n+r-1)!$과 $n! = n\,(n-1)!$을 이용하여 공통인수 $r!\,(n-1)!/(n+r)!$을 묶어 냈다. 양변에 $\frac{r+1}{r}$을 곱하면

$$\frac{r+1}{r}\left(\frac{1}{\binom{n+r-1}{r}} - \frac{1}{\binom{n+r}{r}}\right) = \frac{(r+1)!\,(n-1)!}{(n+r)!} = \frac{1}{\binom{n+r}{r+1}},$$

을 얻는다. $(n+r)-(r+1) = n-1$이기 때문이다. 이것이 구하는 항등식이다.

합. $a_n = 1/\binom{n+r-1}{r}$로 놓으면 항등식은 $1/\binom{n+r}{r+1} = \frac{r+1}{r}(a_n - a_{n+1})$이 된다. $n=1$부터 N까

지 더하면 첫 항과 마지막 항을 제외한 모든 항이 소거된다.

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\binom{n+r}{r+1}} = \frac{r+1}{r}(a_1 - a_{N+1}) = \frac{r+1}{r}\left(1 - \frac{1}{\binom{N+r}{r}}\right),$$

$a_1 = 1/\binom{r}{r} = 1$이기 때문이다. $N \to \infty$일 때 ($r \geq 1$이면) $\binom{N+r}{r} \geq N + r \to \infty$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{n+r}{r+1}} = \frac{r+1}{r}.$$

따름 결과. $r = 2$이면 $n = 1$부터의 합은 $\frac{3}{2}$이다. $n = 1$인 항은 $1/\binom{3}{3} = 1$이므로

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\binom{n+2}{3}} = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

소문항 (ii)

첫째 부등식. $n \geq 3$일 때

$$\frac{1}{\binom{n+1}{3}} = \frac{3!}{(n+1)n(n-1)} = \frac{3!}{n^3 - n} > \frac{3!}{n^3},$$

이다. $0 < n^3 - n < n^3$이기 때문이다(왼쪽 부등식은 $n \geq 2$이기 때문에 성립한다).

둘째 부등식. $\binom{n+1}{3} = \frac{1}{6}n(n^2-1)$이고 $\binom{n+2}{5} = \frac{1}{120}(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2) = \frac{1}{120}n(n^2-1)(n^2-4)$이다. 따라서

$$\frac{20}{\binom{n+1}{3}} - \frac{1}{\binom{n+2}{5}} = \frac{120}{n(n^2-1)} - \frac{120}{n(n^2-1)(n^2-4)} = \frac{120\,(n^2-5)}{n(n^2-1)(n^2-4)}.$$

$n \geq 3$이면 인수 n, n^2-1, n^2-4가 모두 양수이므로, 이 값이 $120/n^3 = 5!/n^3$보다 작을 필요충분조건은

$$n^2(n^2-5) < (n^2-1)(n^2-4), \quad \text{즉,} \quad n^4 - 5n^2 < n^4 - 5n^2 + 4,$$

이고, 이는 참이다.

? **생각해 보기** (i)의 어떤 합이 필요하며, 그 합은 어디서부터 시작하는가?

필요한 것은 $\sum_{n\geq 3} 1/\binom{n+1}{3}$과 $\sum_{n\geq 3} 1/\binom{n+2}{5}$이다. 첫째 합에서 $m = n-1$로 놓으면 $\sum_{m\geq 2} 1/\binom{m+2}{3} = \frac{1}{2}$가 되고, 이는 바로 (i)의 따름 결과이다. 둘째 합에서 $m = n-2$로 놓으면 $\sum_{m\geq 1} 1/\binom{m+4}{5}$가 되고, 이는 $r = 4$인 경우의 (i)이므로 값은 $\frac{5}{4}$이다.

여기에 나오는 급수는 모두 수렴(converge)한다(각 항이 양수이고, 부등식 자체가 보여 주듯 수렴하는 급수로 위로 유계이기 때문이다). 수렴하는 급수들 사이의 엄격한 부등식을 항

별로 더하면 엄격한 부등식을 얻는다. 양수인 차들의 합은 첫째 항 이상이고, 첫째 항이 양수이기 때문이다. $T = \sum_{n\geq 3} 1/n^3$으로 쓰자.

상계. 첫째 부등식을 $n \geq 3$에 대해 더하면

$$6T < \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\binom{n+1}{3}} = \frac{1}{2}, \qquad \text{이므로} \qquad T < \frac{1}{12}.$$

하계. 둘째 부등식을 $n \geq 3$에 대해 더하면

$$120\,T > 20 \cdot \frac{1}{2} - \frac{5}{4} = \frac{35}{4}, \qquad \text{이므로} \qquad T > \frac{35}{480} = \frac{7}{96}.$$

마지막으로 $\sum_{n\geq 1} 1/n^3 = 1 + \frac{1}{8} + T$이고 $1 + \frac{1}{8} = \frac{108}{96}$이다. 따라서

$$\frac{108+7}{96} = \frac{115}{96} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \frac{108}{96} + \frac{8}{96} = \frac{116}{96},$$

이고, 이것이 증명하려던 것이다.

검산

- $n = r = 1$로 항등식을 확인하자. $1/\binom{2}{2} = 1$이고 $2\,(1/\binom{1}{1} - 1/\binom{2}{1}) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$이다.
- $r = 1$이면 합은 $\sum 1/\binom{n+1}{2} = \sum \frac{2}{n(n+1)} = 2$로, 익숙한 망원급수의 합이며 $\frac{r+1}{r} = 2$와 일치한다.
- 수치적으로 $\sum 1/n^3 \approx 1.20206$이고, $\frac{115}{96} \approx 1.19792$, $\frac{116}{96} \approx 1.20833$이므로 범위가 성립하며 값을 약 0.01 이내로 좁혀 준다.

흔한 실수

- 첨자를 옮긴 뒤 시작 첨자를 잘못 잡는 것: $\sum_{n\geq 3} 1/\binom{n+1}{3}$은 $\binom{4}{3}$에서 시작하며, 이는 (i)의 따름 결과에서 $n = 1$인 항이 아니라 $n = 2$인 항이다.
- 부등식이 다루지 않는 $n = 1, 2$인 항 $1 + \frac{1}{8}$을 빠뜨리는 것.

STEP 너머

수 $\sum 1/n^3$은 아페리 상수(Apéry's constant)라 불리는 $\zeta(3)$이다. $\sum 1/n^2 = \pi^2/6$과 달리 이 수는 알려진 닫힌 꼴이 없으며, 아페리(Apéry)가 1978년에 이 수가 무리수임을 증명할 때 사용한 것도 여기서 다룬 것과 비슷한, 빠르게 수렴하는 급수였다. 급수를 망원급수와 비교하는 것, 그리고 부등식을 항별로 더하는 것은 대학 첫 해석학(analysis) 강의의 표준 도구이다. 수렴과 비교판정법(comparison test)을 꼼꼼히 다룬 책으로는 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 보라.

풀이

STEP III 2017, 문제 2

순수수학 • 복소평면에서의 회전

STEP III 2017, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/17-s3-q2

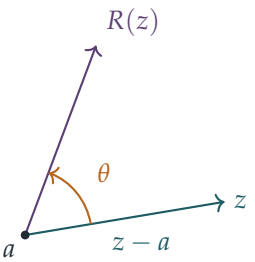
핵심 아이디어

점 a에 대한 회전(rotation)은 원점을 a로 옮겨서 생각하면 가장 쉽게 기술할 수 있다. 즉 a를 빼고, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$를 곱한 다음, 다시 a를 더한다. 따라서 모든 회전은 $z \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}z + k$ 꼴이고, 역으로 이러한 사상은 ($\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \neq 1$이기만 하면) 그 고정점(fixed point)을 중심으로 하는 각 α만큼의 회전이다. 그러므로 SR가 무엇인지 알아내려면 두 식을 합성(composition)하고 고정점을 찾으면 된다. 반각(half-angle) 인수분해 $1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = -2\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}\sin\frac{1}{2}\alpha$를 이용하면 답을 요구하는 꼴로 바꿀 수 있다.

풀이

소문항 (i)

중심 a에서 P로 가는 벡터는 $z - a$이다. a를 중심으로 시계 반대 방향으로 θ만큼 회전하면 이 벡터가 θ만큼 회전하는데, 복소수에서 이는 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$를 곱하는 것이다. $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}| = 1$이므로 길이는 변하지 않는다.



따라서 P의 상 w는 $w - a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - a)$를 만족한다. 즉

$$w = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z + a\big(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\big),$$

이고, 이것이 보이려던 식이다. 같은 방법으로 $S(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}z + b\big(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\big)$이다.

소문항 (ii)

R를 먼저 적용하고 그다음 S를 적용하면

$$\begin{aligned} SR(z) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\Big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z + a\big(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\big)\Big) + b\big(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\big) \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)}z + a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\big(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\big) + b\big(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\big). \end{aligned}$$

소문항 (i)에 의하여 c를 중심으로 하는 각 $\theta + \phi$만큼의 회전은 $z \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)}z + c\big(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)}\big)$이다. z의 계수(coefficient)는 이미 일치하므로, SR가 이 회전이 될 필요충분조건은 다음과 같다.

$$c\big(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)}\big) = a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\big(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\big) + b\big(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\big). \qquad (*)$$

? **생각해 보기** 괄호 $1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$를 어떻게 반각의 사인으로 바꿀 수 있을까?

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}$를 인수로 묶어 내어 괄호를 대칭적인 꼴로 만든다.

$$1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha/2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}\big) = -2\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}\sin\tfrac{1}{2}\alpha.$$

이 식을 $\alpha = \theta + \phi, \theta, \phi$에 각각 적용하면 식 $(*)$는 다음과 같이 된다.

$$-2\mathrm{i}\,c\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)/2}\sin\tfrac{1}{2}(\theta+\phi) = -2\mathrm{i}\,a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}\sin\tfrac{1}{2}\theta - 2\mathrm{i}\,b\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/2}\sin\tfrac{1}{2}\phi.$$

양변을 $-2\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)/2}$(결코 0이 아니다)로 나누면 다음을 얻는다.

$$c\sin\tfrac{1}{2}(\theta+\phi) = a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/2}\sin\tfrac{1}{2}\theta + b\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}\sin\tfrac{1}{2}\phi.$$

$\theta + \phi \neq 2n\pi$이면 $\sin\frac{1}{2}(\theta+\phi) \neq 0$이므로 이 식은 c를 유일하게 결정하고, 그 c에 대하여 사상 SR는 c를 중심으로 하는 각 $\theta + \phi$만큼의 회전이다. 이것이 보이려던 결과이다. (이 조건은 중요하다. $\sin\frac{1}{2}(\theta+\phi) = 0$이면 일반적으로 회전의 중심이 될 고정점이 존재하지 않는다.)

$\theta + \phi = 2\pi$인 경우. 이때 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)} = 1$이고 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$이므로

$$\begin{aligned} SR(z) &= z + a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\big(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\big) + b\big(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\big) \\ &= z + a\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} - 1\big) + b\big(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\big) \\ &= z + (b - a)\big(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\big). \end{aligned}$$

따라서 SR는 $(b-a)\left(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)$만큼의 **평행이동**(translation)이고, 이동 거리는 $2|b-a|\,|\sin\frac{1}{2}\theta|$이다. $a=b$일 때(같은 점을 중심으로 θ만큼 회전한 다음 $2\pi-\theta$만큼 회전하는 경우)나 θ가 2π의 배수일 때 이것은 항등변환(identity)이다. 그 밖의 경우에는 고정점이 없는 진짜 평행이동이다.

소문항 (iii)

SR의 식에서 (a,θ)와 (b,ϕ)의 역할을 바꾸면

$$RS(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)}z+b\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\left(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\right)+a\left(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right).$$

두 사상 모두 z에 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)}$를 곱하므로, $RS=SR$일 필요충분조건은 상수항이 일치하는 것이다. 두 사상의 차는

$$\begin{aligned}SR(z)-RS(z)&=a\left(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}-1\right)+b\left(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\right)\left(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\\&=(b-a)\left(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\left(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\right).\end{aligned}$$

곱이 0이 되는 것은 어떤 인수가 0일 때뿐이므로, $RS=SR$일 필요충분조건은 다음 중 하나가 성립하는 것이다.

- $a=b$(두 회전의 중심이 같다), 또는
- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=1$, 즉 θ가 2π의 배수여서 R가 항등변환인 경우, 또는
- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}=1$, 즉 ϕ가 2π의 배수여서 S가 항등변환인 경우.

말로 하면, 진짜 회전 두 개는 중심이 같을 때에만 교환 가능하다(commute).

검산

- $a=b$이면 (ii)의 식은 $c\sin\frac{1}{2}(\theta+\phi)=a\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/2}\sin\frac{1}{2}\theta+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}\sin\frac{1}{2}\phi\right)$가 되고, 괄호를 전개하면 $\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\phi+\cos\frac{1}{2}\theta\sin\frac{1}{2}\phi=\sin\frac{1}{2}(\theta+\phi)$(허수부는 상쇄된다)이므로 $c=a$이다. 당연히 그래야 한다.
- $\phi=0$(S가 항등변환)이면 $c\sin\frac{1}{2}\theta=a\sin\frac{1}{2}\theta$이므로 $c=a$이다.
- $a=0$, $b=1$, $\theta=\phi=\frac{1}{2}\pi$로 놓자. 그러면 $R(z)=\mathrm{i}z$, $S(z)=\mathrm{i}z+1-\mathrm{i}$이므로 $SR(z)=-z+1-\mathrm{i}$이고, 이는 $\frac{1}{2}(1-\mathrm{i})$를 중심으로 하는 반 바퀴 회전이다. 공식에 따르면 $c\cdot1=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}(1-\mathrm{i})$이다. 일치한다.
- 세 결과 모두 무작위로 고른 수천 개의 중심, 각, 점에 대하여 컴퓨터로도 확인하였다. 이때 공식을 쓰지 않고 (절댓값과 편각을 이용해) 기하적으로 회전시켰으며, 오차는 10^{-12} 미만이었다.

흔한 실수

- 합성 순서를 거꾸로 하는 것: SR는 R를 먼저 적용한다는 뜻이므로 $R(z)$를 S에 대입한다.
- $1 - e^{i(\theta+\phi)}$로 나누면서, 이것이 0이 아닌 까닭이 바로 $\theta + \phi \neq 2n\pi$이기 때문임을 밝히지 않는 것.
- (iii)에서 한 회전이 항등변환인 자명한 경우를 빠뜨리는 것.

STEP 너머

$|\alpha| = 1$인 사상 $z \mapsto \alpha z + \beta$는 정확히 평면의 방향을 보존하는 등거리변환(orientation-preserving isometry)이며, 이들은 군(group)을 이룬다. 즉 회전과 평행이동을 합친 이 모임은 합성에 대하여 닫혀 있다. 소문항 (iii)은 이 군이 가환(commutative)이 아니라는 사실의 작은 예이며, 교환자(commutator) $RSR^{-1}S^{-1}$는 평행이동임이 밝혀진다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 복소수 곱셈에 대한 이러한 기하적 관점을 아름답게 전개하고, Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 군론을 다룬다.

풀이

STEP III 2017, 문제 3

순수수학 • 다항식의 근

> **STEP III 2017, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/17-s3-q3

이 문제는 *Beyond STEP*의 6.4 절 **사차방정식 풀기**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch06/quartic.html

핵심 아이디어

모든 다항식의 계수는 그 근들의 대칭함수(symmetric function)이므로, 삼차식(cubic)의 계수 A는 세 근의 합에 마이너스를 붙인 것이고, 그 합은 α, β, γ, δ에 대한 익숙한 대칭함수이다. 주어진 구체적인 사차식(quartic)에 대해서는 삼차식이 정수근을 가지므로 완전히 인수분해된다. 그러면 $\alpha\beta+\gamma\delta$의 값을 알게 되어 사차식을 두 이차식의 곱, 즉 α, β를 근으로 갖는 이차식과 γ, δ를 근으로 갖는 이차식으로 나눌 수 있고, 나머지 계수들이 이 두 인수를 결정한다.

풀이

A 구하기

풀이 전체에서 사차식에 대한 근과 계수의 관계(Vieta's relations)를 사용한다.

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=-p, \qquad \alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta=q,$$
$$\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta=-r, \qquad \alpha\beta\gamma\delta=s.$$

삼차식은 최고차항의 계수가 1(monic)이고 근이 $y_1=\alpha\beta+\gamma\delta$, $y_2=\alpha\gamma+\beta\delta$, $y_3=\alpha\delta+\beta\gamma$이므로

$$y^3+Ay^2+\cdots=(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3),$$

이고, y^2의 계수를 비교하면 $A = -(y_1 + y_2 + y_3)$이다. 그런데 $y_1 + y_2 + y_3$에는 서로 다른 두 근의 곱 여섯 개가 각각 정확히 한 번씩 들어 있으므로 그 값은 q이다. 따라서

$$A = -q.$$

소문항 (i)

$p = 0, q = 3, r = -6, s = 10$일 때 삼차식의 계수는

$$A = -3, \qquad pr - 4s = -40, \qquad 4qs - p^2 s - r^2 = 120 - 0 - 36 = 84,$$

이므로 삼차방정식은

$$y^3 - 3y^2 - 40y + 84 = 0.$$

정수근은 모두 84의 약수이다. 작은 약수부터 대입해 보면 $y = 2$일 때 $8 - 12 - 80 + 84 = 0$이므로 $y - 2$가 인수이다.

$$y^3 - 3y^2 - 40y + 84 = (y - 2)(y^2 - y - 42) = (y - 2)(y - 7)(y + 6).$$

근은 $2, 7, -6$이고, 그중 가장 큰 것은 7이므로

$$\alpha\beta + \gamma\delta = 7.$$

소문항 (ii)

전개하면

$$(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta,$$

이고, 이는 두 근의 곱 여섯 개 전체의 합에서 $\alpha\beta$와 $\gamma\delta$를 뺀 것이다. 따라서

$$(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = q - (\alpha\beta + \gamma\delta) = 3 - 7 = -4.$$

다음으로, $\alpha\beta$와 $\gamma\delta$는 합이 7이고 곱이 $\alpha\beta\gamma\delta = s = 10$이다. 그러므로 이 둘은 방정식

$$t^2 - 7t + 10 = (t - 5)(t - 2) = 0,$$

의 두 근이고, $\alpha\beta > \gamma\delta$이므로 $\alpha\beta = 5, \gamma\delta = 2$를 얻는다.

소문항 (iii)

$u = \alpha + \beta$라 하자. $p = 0$이므로 네 근의 합은 0이고, 따라서 $\gamma + \delta = -u$이다. 소문항 (ii)에 의해 $-u^2 = -4$이므로 $u = \pm 2$이다.

? **생각해 보기** u의 부호는 어느 쪽이 맞으며, 어떻게 알 수 있을까?

아직 r을 사용하지 않았다. 세 근의 곱 네 개를 둘씩 묶으면

$$\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta = \alpha\beta(\gamma+\delta) + \gamma\delta(\alpha+\beta) = 5(-u) + 2u = -3u.$$

이 값은 $-r = 6$과 같으므로 $u = -2$이다. (반대 부호라면 $r = +6$이 되어 다른 사차식이 된다.) 따라서

$$\alpha + \beta = -2, \quad \alpha\beta = 5, \qquad \gamma + \delta = 2, \quad \gamma\delta = 2.$$

그러므로 α, β는 $x^2 + 2x + 5 = 0$의 근으로 $x = -1 \pm 2\mathrm{i}$이고, γ, δ는 $x^2 - 2x + 2 = 0$의 근으로 $x = 1 \pm \mathrm{i}$이다. 따라서 사차방정식

$$x^4 + 3x^2 - 6x + 10 = (x^2 + 2x + 5)(x^2 - 2x + 2) = 0$$

의 근은

$$x = -1 + 2\mathrm{i}, \quad -1 - 2\mathrm{i}, \quad 1 + \mathrm{i}, \quad 1 - \mathrm{i}.$$

검산

- $(x^2 + 2x + 5)(x^2 - 2x + 2)$를 전개하면 x^3항이 소거되어 $x^4 + 3x^2 - 6x + 10$이 되는데, 이는 정확히 주어진 사차식이다.
- 이 근들에 대해 $\alpha\gamma + \beta\delta$와 $\alpha\delta + \beta\gamma$는 (순서와 상관없이) 삼차식의 나머지 두 근인 2와 -6이어야 한다. 이들의 합은 $q - 7 = -4 = 2 + (-6)$으로, 마땅히 그래야 하는 값이다.
- 공식 $A = -q$는 복소수 근을 무작위로 고른 사차식 천 개에 대해 컴퓨터로도 확인하였다.

흔한 실수

- $A = q$로 놓는 실수: y^2의 계수는 근의 합에 **마이너스**를 붙인 것이다.
- $u = \pm 2$에서 멈추고 두 경우를 모두 답으로 내는 실수: $r = -6$과 모순되지 않는 부호는 하나뿐이다.
- 실근을 기대하는 실수: 이 사차식은 모든 실수 x에 대해 양수이므로 네 근은 모두 허근이다.

STEP 너머

여기서 나온 삼차식은 사차식의 **분해 삼차식**(resolvent cubic)이며, 페라리(Ferrari)의 방법의 핵심이다. 즉 어떤 사차방정식이든 푸는 문제는 삼차방정식을 푼 다음 이차방정식들을

푸는 문제로 귀결된다. 이 방법이 왜 통하는지는 갈루아 이론(Galois theory)이 설명해 주는데, 이 이론은 근들의 치환(permutation)이 $\alpha\beta + \gamma\delta$ 같은 식에 어떻게 작용하는지를 연구한다(세 식 각각은 24개의 치환 가운데 여덟 개로 이루어진 부분군에 의해 고정된다). 이러한 아이디어를 공부하기 시작하기에는 Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)가 좋은 출발점이다.

풀이

STEP III 2017, 문제 4

순수수학 • 함수의 기하평균

> **STEP III 2017, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/17-s3-q4

핵심 아이디어

기하평균(geometric mean)은 보통의 평균에 지수함수를 취한 것일 뿐이다. 즉 $\ln F(y)$는 구간 $[0, y]$에서 $\ln f$의 평균값이다. 따라서 F의 모든 성질은 로그의 성질(밑변환(change of base), $\ln(fg) = \ln f + \ln g$)과 적분의 선형성(linearity)을 결합하여 얻어진다. (iv)의 역(converse)에서는 주어진 조건이 적분을 포함한 방정식이 되고, 이를 미분하면 간단한 미분방정식(differential equation)으로 바뀐다.

풀이

풀이 전체에서

$$\ln F(y) = \frac{1}{y}\int_0^y \ln f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (y > 0),$$

으로 쓴다. 이는 정의의 양변에 로그를 취한 것이다.

소문항 (i)

$a > 0$이고 $a \neq 1$이므로 $\log_a$가 정의되고 $\ln a \neq 0$이며, 밑변환 공식에 의해 $\log_a f(x) = \dfrac{\ln f(x)}{\ln a}$이다. 또한 임의의 실수 t에 대하여 $a^t = \mathrm{e}^{t\ln a}$이다. 따라서

$$\begin{aligned} a^{\frac{1}{y}\int_0^y \log_a f(x)\,\mathrm{d}x} &= \exp\left(\ln a \cdot \frac{1}{y}\int_0^y \frac{\ln f(x)}{\ln a}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{y}\int_0^y \ln f(x)\,\mathrm{d}x\right) = F(y), \end{aligned}$$

이다. 여기서 상수 $\frac{1}{\ln a}$를 적분 밖으로 꺼내어 $\ln a$와 약분하였다. 이것이 구하는 결과이다. (조건 $a \neq 1$은 바로 $\ln a$로 나눌 수 있게 해 주는 조건이다.)

소문항 (ii)

$f(x) > 0$이고 $g(x) > 0$이므로 $h(x) > 0$이다. 따라서 H가 정의되고, $\ln h(x) = \ln f(x) + \ln g(x)$이다. 적분의 선형성에 의해

$$\ln H(y) = \frac{1}{y}\int_0^y \big(\ln f(x) + \ln g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \ln F(y) + \ln G(y) = \ln\big(F(y)G(y)\big).$$

ln은 일대일(one-to-one)이므로 $H(y) = F(y)G(y)$이다.

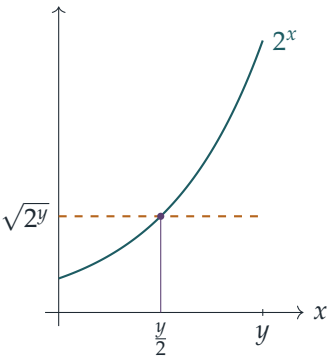
소문항 (iii)

이 경우 $f(x) = b^x > 0$이고 $\ln f(x) = x\ln b$이므로

$$\ln F(y) = \frac{1}{y}\int_0^y x\ln b\,\mathrm{d}x = \frac{1}{y}\cdot\frac{y^2}{2}\ln b = \frac{y}{2}\ln b.$$

따라서 $F(y) = \mathrm{e}^{\frac{y}{2}\ln b} = b^{y/2} = \sqrt{b^y}$이고, 이것이 구하는 결과이다.

아래 그림은 $b = 2$일 때 이 결과가 무엇을 뜻하는지 보여 준다. 구간 $[0, y]$에서 2^x의 기하평균은 중점 $\frac{y}{2}$에서의 2^x의 값이다. $\ln 2^x$가 일차함수이고, 일차함수의 평균은 중점에서의 함숫값이기 때문이다.



소문항 (iv)

문제에서 암묵적으로 가정하듯이, f가 연속(continuous)이라고 가정한다. 그러면 적분이 존재하고 미적분학의 기본정리(fundamental theorem of calculus)를 사용할 수 있다. $\phi(x) = \ln f(x)$로 놓자. $f(x) > 0$이므로 ϕ는 정의되고, 연속이다. 가정 $F(y) = \sqrt{f(y)}$에 로그를 취하면 다음을 얻는다.

$$\frac{1}{y}\int_0^y \phi(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\phi(y) \quad \text{즉,} \quad \int_0^y \phi(x)\,\mathrm{d}x = \frac{y}{2}\,\phi(y) \qquad \text{모든} y > 0. \qquad (*)$$

? 생각해 보기 적분을 어떻게 없앨 수 있을까? 그리고 그렇게 해도 될까?

y에 대하여 미분한다. 미적분학의 기본정리에 의해 $(*)$의 좌변은 미분가능하고, 그 도함수는 $\phi(y)$이다. 따라서 우변도 미분가능하고, 그러므로 $y>0$에서 $\phi(y)=\frac{2}{y}\times$(좌변)도 미분가능하다. 우변에 곱의 미분법(product rule)을 써서 $(*)$를 미분하면

$$\phi(y)=\tfrac{1}{2}\phi(y)+\tfrac{y}{2}\phi'(y) \quad\Longrightarrow\quad y\phi'(y)-\phi(y)=0.$$

$y>0$이므로 y^2으로 나눌 수 있고, 몫의 미분법(quotient rule)으로 얻은 도함수 꼴임을 알아볼 수 있다.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\phi(y)}{y}\right)=\frac{y\phi'(y)-\phi(y)}{y^2}=0.$$

따라서 구간 $y>0$에서 $\phi(y)/y$는 상수이고, 이를 k라 하자(평균값 정리(mean value theorem)에 의해, 어떤 구간에서 도함수가 0인 함수는 그 구간에서 상수이다). 그러므로 $\ln f(x)=kx$이고

$$f(x)=\mathrm{e}^{kx}=b^x, \qquad \text{여기서} b=\mathrm{e}^k>0.$$

이 식은 모든 $x>0$에서 성립한다. 한 점 $x=0$에서의 값은 어떤 적분에도 영향을 주지 않으며, 어차피 연속성에 의해 $f(0)=1=b^0$이다. (iii)과 함께 생각하면, 기하평균이 $\sqrt{f(y)}$인 함수는 정확히 b^x 꼴의 함수들임을 알 수 있다.

검산

- (iii)에서 $b=4$, $y=2$로 놓으면 $\ln F(2)=\frac{1}{2}\int_0^2 x\ln 4\,\mathrm{d}x=\ln 4$이므로 $F(2)=4=\sqrt{4^2}$이다. 수치 적분 결과도 이와 일치한다.
- (iv)에서 b^x 꼴이 아닌 함수, 예를 들어 $f(x)=3\cdot 2^x$를 시험해 보자. (ii)와 (iii)에 의해 $F(y)=3\cdot 2^{y/2}$인 반면 $\sqrt{f(y)}=\sqrt{3}\cdot 2^{y/2}$이므로, 당연히 조건이 성립하지 않는다. 위의 논증을 적용하면 $\phi(y)/y=\ln 2+\frac{\ln 3}{y}$가 되어 상수가 아니다.
- (i)과 (ii)는 임의의 양의 함수, y의 값, 그리고 1보다 작거나 큰 밑 a에 대하여 컴퓨터로 확인하였다.

흔한 실수

- (iv)에서 $(*)$를 미분할 때 $\frac{y}{2}\phi(y)$에 곱의 미분법을 적용하지 않아 ϕ' 항을 통째로 놓치는 것.
- (iii)만으로 $f(x)=b^x$라고 결론 내리는 것. (iii)은 b^x가 그 성질을 가진다는 것을 보일 뿐, 다른 함수는 그 성질을 가지지 않는다는 것을 보이지는 않는다. (iv)는 그 역이며 별도의 논증이 필요하다.

▶ (i)에서 $a \neq 1$이 어디에 필요한지 언급하지 않는 것. 이 조건이 있어야 $\log_a$가 의미를 가지고 $\ln a \neq 0$이 된다.

STEP 너머

연속 기하평균은 $(x_1 x_2 \cdots x_n)^{1/n}$의 적분 버전이다. 오목함수(concave function) ln에 대한 옌센 부등식(Jensen's inequality)을 쓰면, 이 값이 보통의 평균 $\frac{1}{y}\int_0^y f(x)\,\mathrm{d}x$를 결코 넘지 않음을 보일 수 있는데, 이것이 연속 산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)이다. (iv)는 함수방정식(functional equation)을 미분방정식으로 바꾸어 푸는 작은 예이며, 이때 미분가능성(differentiability)에 주의해야 한다. 해석학(analysis) 강의에서는 미적분학의 기본정리가 언제 이를 허용하는지 정확히 배운다. 엄밀한 배경 지식은 Abbott, *Understanding Analysis*를 참고하라.

풀이

STEP III 2017, 문제 5

순수수학 • 극곡선

> **STEP III 2017, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/17-s3-q5

핵심 아이디어

곡선을 θ를 매개변수(parameter)로 하여 매개변수 방정식으로 나타낸다: $x = f(\theta)\cos\theta$, $y = f(\theta)\sin\theta$. 그러면 기울기(gradient)는 연쇄법칙(chain rule)으로 구할 수 있고, "직각으로 만난다"는 조건은 "기울기의 곱이 -1이다"가 된다. 마지막 부분에서는 곡선족 $r = a(1+\sin\theta)$가 C 위의 모든 점을 지나므로, 직각 조건이 C 전체에서 성립한다. 이로써 조건은 f에 대한 일계 미분방정식(first-order differential equation)이 된다.

풀이

기울기

곡선 위에서 $x = f(\theta)\cos\theta$이고 $y = f(\theta)\sin\theta$이다. 곱의 미분법(product rule)으로 θ에 대하여 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta.$$

연쇄법칙을 쓰고, 분자와 분모를 $\cos\theta$로 나누면($\cos\theta \neq 0$이라 가정한다)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta} = \frac{f'(\theta)\tan\theta + f(\theta)}{f'(\theta) - f(\theta)\tan\theta}.$$

직각으로 만나는 곡선

두 곡선이 만나는 점에서 두 곡선은 같은 θ를 가진다. $t = \tan\theta$로 두고, 그 점에서의 값을 f, f', g, g'로 쓴다. 어느 접선(tangent)도 수직이 아니라면, 두 곡선이 수직일 필요충분조건

은 기울기의 곱이 -1인 것이다:

$$(f't + f)(g't + g) = -(f' - ft)(g' - gt).$$

양변을 전개하면 $f'gt$항과 $fg't$항이 소거되어 다음이 남는다.

$$f'g't^2 + fg + f'g' + fgt^2 = 0 \iff (1 + t^2)(f'g' + fg) = 0.$$

$1 + t^2 = \sec^2\theta > 0$이므로 $f'(\theta)g'(\theta) + f(\theta)g(\theta) = 0$을 얻고, 이것이 보이려던 것이다.

> **생각해 보기** 한 접선이 수직이거나 $\cos\theta = 0$이어서 기울기나 $\tan\theta$가 존재하지 않으면 어떻게 하는가?

기울기 대신 방향벡터(direction vector)를 쓴다. $r = f(\theta)$의 접선의 방향은 $(f'\cos\theta - f\sin\theta,\ f'\sin\theta + f\cos\theta)$이고, g에 대해서도 마찬가지이다. 두 벡터의 스칼라곱(scalar product)은

$$(f'\cos\theta - f\sin\theta)(g'\cos\theta - g\sin\theta) + (f'\sin\theta + f\cos\theta)(g'\sin\theta + g\cos\theta) = f'g' + fg,$$

이다. 교차항이 소거되고 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$이기 때문이다. 따라서 수직 조건은 모든 경우에 같은 조건이다.

$f(\theta)$ 구하기

$r = a(1 + \sin\theta)$에 대하여 $g'(\theta) = a\cos\theta$이다.

> **생각해 보기** 이 조건은 두 곡선이 만나는 점에서만 성립한다. 왜 C의 모든 점에서 이를 쓸 수 있는가?

C 위의 임의의 점을 잡고, 그 각을 θ라 하자. 단, $f(\theta) > 0$이고 $\sin\theta \neq -1$이다. $a = f(\theta)/(1 + \sin\theta) > 0$으로 택하면 곡선족 가운데 같은 θ에서 그 점을 지나는 곡선을 얻는다. 가정에 의해 이 곡선은 C와 직각으로 만나므로

$$f'(\theta)\, a\cos\theta + f(\theta)\, a(1 + \sin\theta) = 0.$$

$a > 0$으로 나누면, 그러한 모든 θ가 다음을 만족한다.

$$f'(\theta)\cos\theta + f(\theta)(1 + \sin\theta) = 0.$$

양변에 $1 - \sin\theta$를 곱하고 $1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$를 이용하면

$$\cos\theta\left[f'(\theta)(1 - \sin\theta) + f(\theta)\cos\theta\right] = 0.$$

$\cos\theta \neq 0$인 곳에서는 괄호 안이 0이다. 몫의 미분법(quotient rule)에 의해 괄호 안의 식은 $f(\theta)/(1 - \sin\theta)$의 도함수에 $(1 - \sin\theta)^2$을 곱한 것이다:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{f(\theta)}{1 - \sin\theta}\right) = \frac{f'(\theta)(1 - \sin\theta) + f(\theta)\cos\theta}{(1 - \sin\theta)^2} = 0.$$

따라서 구간 $-\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi$에서 어떤 상수 k에 대하여 $f(\theta) = k(1-\sin\theta)$이다. (같은 방법으로, $f'/f = -(1+\sin\theta)/\cos\theta = -\cos\theta/(1-\sin\theta)$에서 변수분리(separation of variables)를 해도 된다.) 곡선이 $r = 4$, $\theta = -\frac{1}{2}\pi$를 지나므로, 연속성(continuity)에 의해 $k(1+1) = 4$이고, $k = 2$이다. $\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$에서도 같은 논증이 적용되고, $\theta = \frac{3}{2}\pi$는 $-\frac{1}{2}\pi$와 같은 방향이므로 역시 $k = 2$이다. 그러므로

$$\boxed{f(\theta) = 2(1-\sin\theta)}$$

이것은 또 하나의 심장형 곡선(cardioid)으로, $r = 2(1+\sin\theta)$를 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

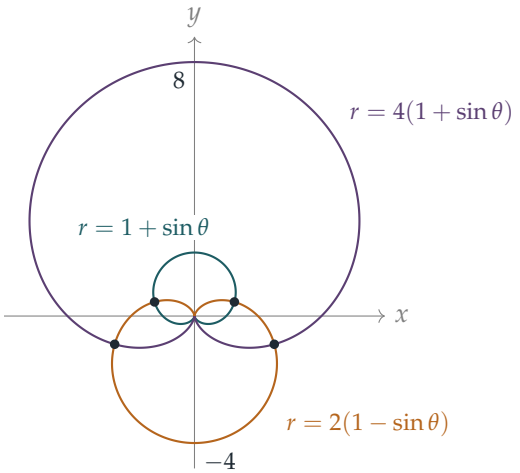
개형 그리기

곡선 $r = a(1+\sin\theta)$는 첨점(cusp)이 원점에 있고 y축에 대하여 대칭인 심장형 곡선이다. 위로는 $(0, 2a)$까지 올라가고 x축과 $(\pm a, 0)$에서 만난다. 곡선 $r = 2(1-\sin\theta)$는 같은 모양으로 아래쪽으로 열린 심장형 곡선이다: 첨점은 원점에 있고, x축과 $(\pm 2, 0)$에서 만나며, 아래로는 $(0, -4)$까지 내려간다.

교점은 $a(1+\sin\theta) = 2(1-\sin\theta)$를 풀어 구하며, 이로부터 $\sin\theta = \frac{2-a}{2+a}$를 얻는다:

- $a = 1$: $\sin\theta = \frac{1}{3}$, $r = \frac{4}{3}$이고, 교점은 $\left(\pm\frac{8\sqrt{2}}{9}, \frac{4}{9}\right)$이다;
- $a = 4$: $\sin\theta = -\frac{1}{3}$, $r = \frac{8}{3}$이고, 교점은 $\left(\pm\frac{16\sqrt{2}}{9}, -\frac{8}{9}\right)$이다.

세 곡선은 모두 원점도 지난다.



검산

- $\theta = 0$에서 곡선 $r = 2(1 - \sin\theta)$는 $(2, 0)$에 있고, $r = 2(1 + \sin\theta)$도 같은 점을 지난다. 그 점에서 $f = 2$, $f' = -2$, $g = 2$, $g' = 2$이므로 $f'g' + fg = -4 + 4 = 0$이 되어 예상대로이다.
- $\theta = -\frac{1}{2}\pi$에서 $f = 2(1 + 1) = 4$이므로 조건을 만족한다.
- $\left(\frac{8\sqrt{2}}{9}, \frac{4}{9}\right) \approx (1.257, 0.444)$에서의 접선들이 수직임을 컴퓨터로 확인하였고, 임의로 고른 여러 a 값에 대해서도 접선들이 수직임을 확인하였다.

흔한 실수

- 직각 조건을 교점 하나에서만 사용하는 것. "모든 양수 a에 대하여"라는 조건의 핵심은, 그 덕분에 조건이 C의 모든 점에서 성립한다는 데 있다.
- $f(\theta)/(1 - \sin\theta)$가 $\theta = \frac{1}{2}\pi$에서 정의되지 않는다는 것을 잊고, 상수를 어디에서 정하는지 소홀히 하는 것.
- $r = 2(1 - \sin\theta)$를 위쪽으로 열린 모양으로 그리는 것: $\theta = -\frac{1}{2}\pi$에서 $r = 4$이므로 이 곡선은 주로 x축 아래에 놓인다.

STEP 너머

한 곡선족과 모든 곳에서 직각으로 만나는 곡선족을 **직교 궤적**(*orthogonal trajectories*)의 쌍이라 한다. 여기서 심장형 곡선 $r = a(1 + \sin\theta)$와 $r = b(1 - \sin\theta)$가 그러한 쌍을 이룬다. 이 개념은 대학 1학년 미분방정식에 나오고, 물리학에서도 다시 등장하는데, 거기서는 전기력선이 등전위선(equipotentials)과 직각으로 만난다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 직교 궤적을 구하는 방법을 다룬다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 등각 사상(conformal map)이 어떻게 그러한 곡선족을 만들어 내는지 보여 준다.

풀이

STEP III 2017, 문제 6

순수수학 • 치환적분

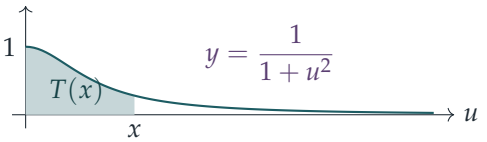
> **STEP III 2017, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/17-s3-q6

이 문제는 *Beyond STEP*의 4.2 절 **적분으로 삼각함수 세우기**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch04/trig-from-integral.html

핵심 아이디어

역탄젠트(inverse tangent)를 오직 그 적분만으로 세워 나가므로, 모든 성질은 치환(substitution)에서 나와야 한다. 치환 $u \mapsto 1/u$는 구간 $(0, x)$와 $(1/x, \infty)$를 서로 맞바꾸고, 뫼비우스(Möbius) 치환 $v = \frac{u+a}{1-au}$는 미분소까지 포함한 피적분함수(integrand) $\frac{du}{1+u^2}$를 그대로 두므로 적분 구간의 끝값만 옮겨 놓는다. 마지막 소문항에서 옮겨진 끝값이 이미 알고 있는 값으로 되돌아오도록 수를 고르면, 풀 수 있는 방정식이 생긴다.

풀이



$T(x)$는 색칠한 부분의 넓이이고, T_∞는 $u \geq 0$에서 곡선 아래의 전체 넓이이다.

소문항 (i)

$T(x)$의 적분에 $u = 1/t$를 치환하면 $\mathrm{d}u = -t^{-2}\,\mathrm{d}t$이고, u가 0부터 x까지 움직일 때 t는 ∞부터 $1/x$까지 줄어든다. 그러면

$$\begin{aligned} T(x) &= \int_{\infty}^{1/x} \frac{1}{1+t^{-2}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \int_{1/x}^{\infty} \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} - \int_0^{1/x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = T_\infty - T(x^{-1}). \end{aligned}$$

(0에서 시작하는 적분은 T_∞가 유한하므로 제대로 정의된 적분(proper integral)이고, 따라서 구간을 나누는 것은 정당하다.) 이것이 구하려던 결과이다.

소문항 (ii)

도함수. 몫의 미분법(quotient rule)에 의해 $u \neq a^{-1}$일 때

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{(1-au)+a(u+a)}{(1-au)^2} = \frac{1+a^2}{(1-au)^2}.$$

한편

$$1+v^2 = \frac{(1-au)^2+(u+a)^2}{(1-au)^2} = \frac{1+a^2u^2+u^2+a^2}{(1-au)^2} = \frac{(1+a^2)(1+u^2)}{(1-au)^2}.$$

$1+u^2$로 나누면 $\dfrac{1+v^2}{1+u^2} = \dfrac{1+a^2}{(1-au)^2} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}$이므로 원하는 결과를 얻는다.

덧셈정리. $a > 0$이고 $0 < x < \frac{1}{a}$라 하자. $0 \le u \le x$에서 $1-au \ge 1-ax > 0$이므로 v는 구간 전체에서 정의되고 연속이며, $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} > 0$이므로 v는 $v(0) = a$에서 $v(x) = \frac{x+a}{1-ax}$까지 증가한다.

> **?** **생각해 보기** $x < \frac{1}{a}$라는 조건이 왜 중요한가?

x가 $\frac{1}{a}$에 이르면 v가 적분 구간 안에서 발산하게 되어 치환이 의미를 잃는다. $x < \frac{1}{a}$이면 이 치환은 $[0, x]$에서 매끄럽고 증가하는 변수 변환이다.

도함수에 대한 결과는 바로 $\dfrac{1}{1+u^2} = \dfrac{1}{1+v^2}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}$를 뜻하므로

$$\begin{aligned} T(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} &= \int_a^{\frac{x+a}{1-ax}} \frac{\mathrm{d}v}{1+v^2} \\ &= \int_0^{\frac{x+a}{1-ax}} \frac{\mathrm{d}v}{1+v^2} - \int_0^a \frac{\mathrm{d}v}{1+v^2} = T\left(\frac{x+a}{1-ax}\right) - T(a). \end{aligned}$$

여기서 T에 들어가는 두 값은 모두 양수이므로 모든 것이 잘 정의된다.

첫째 따름 결과. $X = \frac{x+a}{1-ax}$라 하자. 소문항 (i)을 x에, 이어서 a에 적용하면

$$T(x^{-1}) = T_\infty - T(x) = T_\infty - T(X) + T(a) = T_\infty - T(X) + T_\infty - T(a^{-1}),$$

즉 $T(x^{-1}) = 2T_\infty - T\left(\frac{x+a}{1-ax}\right) - T(a^{-1})$이다.

둘째 따름 결과. $b > 0$이고 $y > \frac{1}{b}$일 때 $x = \frac{1}{y}$, $a = \frac{1}{b}$로 놓는다. 그러면 $x > 0$, $a > 0$이고, $y > \frac{1}{b}$는 $x < b = \frac{1}{a}$와 같으므로 앞의 결과를 적용할 수 있다. 분자와 분모에 by를 곱하면

$$\frac{x+a}{1-ax} = \frac{\frac{1}{y} + \frac{1}{b}}{1 - \frac{1}{by}} = \frac{b+y}{by-1},$$

이고 $x^{-1} = y$, $a^{-1} = b$이므로

$$T(y) = 2T_\infty - T\left(\frac{y+b}{by-1}\right) - T(b).$$

소문항 (iii)

$T(\sqrt{3})$. 마지막 결과에서 $y = b = \sqrt{3}$으로 놓는다. $\sqrt{3} > \frac{1}{\sqrt{3}}$이므로 조건 $y > \frac{1}{b}$가 성립한다. 이때

$$\frac{y+b}{by-1} = \frac{2\sqrt{3}}{3-1} = \sqrt{3},$$

이므로 $T(\sqrt{3}) = 2T_\infty - T(\sqrt{3}) - T(\sqrt{3})$, 즉 $3T(\sqrt{3}) = 2T_\infty$이고

$$T(\sqrt{3}) = \tfrac{2}{3}T_\infty.$$

먼저 $T(1)$. 소문항 (i)에 $x = 1$을 넣으면 $T(1) = T_\infty - T(1)$이므로 $T(1) = \frac{1}{2}T_\infty$이다.

> **생각해 보기** $x = a$일 때 $\frac{x+a}{1-ax}$가 1이 되게 하는 a의 값은 무엇인가?

$\frac{2a}{1-a^2} = 1$, 즉 $a^2 + 2a - 1 = 0$이어야 하고, 그 양의 근은 $a = \sqrt{2} - 1$이다.

$T(\sqrt{2}-1)$. 그러므로 덧셈정리에서 $x = a = \sqrt{2} - 1 > 0$으로 놓는다. 조건 $x < \frac{1}{a}$는 $\sqrt{2} - 1 < \sqrt{2} + 1$이므로 성립한다. $a^2 = 3 - 2\sqrt{2}$이므로

$$\frac{x+a}{1-ax} = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{1-(3-2\sqrt{2})} = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{2(\sqrt{2}-1)} = 1,$$

이고, 따라서 $T(\sqrt{2}-1) = T(1) - T(\sqrt{2}-1)$이므로

$$T(\sqrt{2}-1) = \tfrac{1}{2}T(1) = \tfrac{1}{4}T_\infty.$$

검산

물론 T는 사실 arctan이고 $T_\infty = \frac{\pi}{2}$이다. 풀이에서는 이를 쓸 수 없었지만 검산에는 얼마든지 쓸 수 있다: $\frac{\pi}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{2}$이고 $\frac{\pi}{8} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{2}$이다. 적분을 수치적으로 계산하면(심프슨 공식(Simpson's rule)) $T_\infty \approx 1.570796$, $T(\sqrt{3}) \approx 1.047198$, $T(\sqrt{2}-1) \approx 0.392699$로, $\frac{2}{3}T_\infty$와 $\frac{1}{4}T_\infty$에 일치한다. 소문항 (ii)의 덧셈정리(addition formula)는 $x = \tan A$, $a = \tan B$로 놓으면 익숙한 $\tan(A+B)$ 공식이 모습을 바꾼 것이다.

흔한 실수

- $u = 1/t$로 치환한 뒤 적분 구간의 위아래를 뒤집는 것을 잊는 것: $\mathrm{d}u = -t^{-2}\,\mathrm{d}t$에서 나오는 음의 부호가 바로 $\int_{\infty}^{1/x}$를 $\int_{1/x}^{\infty}$로 바꿔 준다.
- 소문항 (iii)에서 $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$이나 arctan에 관한 사실을 슬쩍 쓰는 것: 문제에서 이를 금지하고 있으며, 핵심은 모든 것을 소문항 (i)과 (ii)에서 얻어 내는 것이다.
- 실제로 사용한 수에 대해 조건 $x < \frac{1}{a}$와 $y > \frac{1}{b}$를 확인하지 않는 것.

STEP 너머

함수를 적분으로 정의하고 그 정의에서 모든 성질을 이끌어 내는 것은 해석학(analysis) 강의에서 ln, exp, arctan, 심지어 π까지 엄밀하게 세우는 방법이다. 여기서는 π를 그냥 $2T_{\infty}$로 정의할 수도 있다. 치환 $v = \frac{u+a}{1-au}$는 뫼비우스 변환(Möbius transformation)이며, 이것이 $\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$를 보존한다는 사실은 원의 회전을 반영한다. 해석학 쪽으로는 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를, 뫼비우스 변환의 기하학에 대해서는 Needham, *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)를 참고하라.

풀이

STEP III 2017, 문제 7

순수수학 • 타원의 접선

> **STEP III 2017, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/17-s3-q7

핵심 아이디어

매개변수(parameter) t를 쓰면 "T에서의 접선(tangent)이 (X, Y)를 지난다"는 조건이 t에 대한 이차방정식(quadratic equation)이 된다. 각 근(root)은 하나의 접점(point of contact)에 대응하므로, 한 점에서 그을 수 있는 접선의 개수를 세는 일은 실근의 개수를 세는 일과 같고, 이것은 판별식(discriminant)의 문제이다. 소문항 (ii)에서 두 접점의 매개변수 p와 q는 바로 그 이차방정식의 두 근이므로, 그 합과 곱은 계수로부터 곧바로 얻어진다.

풀이

점이 타원 위에 있음

T의 좌표를 대입하면

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{(1-t^2)^2 + 4t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1 + 2t^2 + t^4}{(1+t^2)^2} = 1,$$

이므로 모든 실수 t에 대하여 T는 타원(ellipse) 위에 있다.

소문항 (i)

t에 대하여 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{-4at}{(1+t^2)^2}, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{2b(1-t^2)}{(1+t^2)^2}.$$

이 둘을 나누는 대신($t = 0$일 때 곤란하다), 타원 위의 점 (x_0, y_0)에서의 표준적인 접선, 즉 $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$을 이용한다. 이 접선의 법선 방향(normal direction) $\left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}\right)$은 위의 속도 벡터와 수직이다. 왜냐하면 $\frac{1-t^2}{a} \cdot (-4at) + \frac{2t}{b} \cdot 2b(1-t^2) = 0$이기 때문이다. 따라서 T에

서의 접선 L은

$$\frac{x(1-t^2)}{a(1+t^2)} + \frac{2ty}{b(1+t^2)} = 1 \iff bx(1-t^2) + 2aty = ab(1+t^2).$$

$(x, y) = (X, Y)$를 대입하고 t의 거듭제곱별로 정리하면

$$bX - bXt^2 + 2aYt - ab - abt^2 = 0 \iff (a+X)bt^2 - 2aYt + b(a-X) = 0,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

두 접선. 거꾸로 읽으면, 매개변수가 t인 점에서의 접선이 (X, Y)를 지날 필요충분조건은 t가 이 방정식을 만족하는 것이다. $X \neq -a$이고 $b \neq 0$이므로 t^2의 계수는 0이 아니고, 따라서 이 식은 진짜 이차방정식이며 판별식은

$$4a^2Y^2 - 4b^2(a+X)(a-X) = 4\big(a^2Y^2 - (a^2-X^2)b^2\big).$$

$a^2Y^2 > (a^2-X^2)b^2$이면 이 값은 양수이므로 서로 다른 두 실근 $t_1 \neq t_2$가 존재한다. 서로 다른 t의 값은 타원 위의 서로 다른 점을 준다(사상 $t \mapsto T$는 일대일(one-to-one)이다. $t = \tan\frac{\theta}{2}$로 두면 이것은 $-\pi < \theta < \pi$에 대한 익숙한 $(a\cos\theta, b\sin\theta)$이다). 또한 타원의 접선은 타원과 접점에서만 만나므로, 서로 다른 접점은 서로 다른 접선을 준다. 따라서 (X, Y)를 지나는 서로 다른 두 접선이 존재한다.

? 생각해 보기 매개변수 t로 나타낼 수 없는 접선을 놓쳤을 가능성은 없을까?

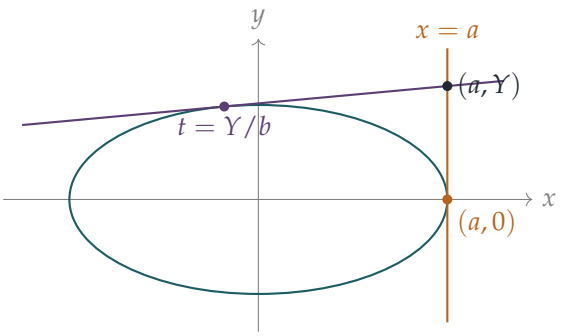
타원 위의 점 가운데 $(*)$의 꼴이 아닌 것은 $(-a, 0)$뿐이며($t \to \infty$일 때의 극한), 이 점에서의 접선은 $x = -a$이다. 이 직선이 (X, Y)를 지나는 것은 $X = -a$일 때뿐인데, 이 경우는 제외되어 있다. 따라서 이 이차방정식은 (X, Y)를 지나는 모든 접선을 빠짐없이 나타낸다.

해석. 조건을 $a^2b^2 > 0$으로 나누면

$$\frac{Y^2}{b^2} > 1 - \frac{X^2}{a^2} \iff \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} > 1,$$

이고, 이는 (X, Y)가 타원의 **바깥**에 있다는 뜻이다. 따라서 원의 경우와 마찬가지로, 타원 바깥의 임의의 점에서 타원에 두 접선을 그을 수 있다.

$X^2 = a^2$인 경우. 이때 조건은 $a^2Y^2 > 0$, 즉 $Y \neq 0$이 된다. 점은 수직선 $x = \pm a$ 중 하나 위에 있지만 꼭짓점(vertex) $(\pm a, 0)$은 아니다. 한 접선은 바로 수직선 $x = \pm a$ 자체로, 타원과 $(\pm a, 0)$에서 접한다. 다른 접선은 타원의 다른 곳에서 접한다. $X = a$이면 이차방정식은 $2abt^2 - 2aYt = 0$이 되고, 근은 $t = 0$(수직 접선)과 $t = Y/b \neq 0$이다. $X = -a$이면 $-2aYt + 2ab = 0$이 되어 $t = b/Y$를 얻고, 두 번째 접선은 빠져 있던 점 $(-a, 0)$에서의 접선인 $x = -a$이다. 그림은 $X = a$, $Y > 0$인 경우를 나타낸다.



따라서 $X^2 = a^2$일 때에도 결과는 여전히 성립한다. 즉 $Y \neq 0$일 때마다, 다시 말해 점이 타원 바깥에 있을 때마다 (X, Y)를 지나는 서로 다른 두 접선이 존재한다.

소문항 (ii)

P에서의 접선이 (X, Y)를 지나므로, 소문항 (i)에 의해 p는

$$(a + X)bt^2 - 2aYt + b(a - X) = 0,$$

의 근이고, q도 마찬가지이다. $X \neq -a$이므로 이것은 이차방정식이며, ($P \neq Q$이므로) $p \neq q$이다. 따라서 p와 q는 이 방정식의 두 근이다. 그러므로

$$pq = \frac{b(a - X)}{b(a + X)} = \frac{a - X}{a + X} \quad \Longrightarrow \quad (a + X)pq = a - X,$$

이 되어 원하는 결과를 얻고, 또한

$$p + q = \frac{2aY}{b(a + X)}.$$

마지막 부분

접선 $bx(1 - t^2) + 2aty = ab(1 + t^2)$에 $x = 0$을 대입하면 $2aty = ab(1 + t^2)$이다. 두 접선은 실제로 y축과 만나므로 $p, q \neq 0$이고($t = 0$에서의 접선은 $x = a$이다),

$$y_1 = \frac{b(1 + p^2)}{2p}, \qquad y_2 = \frac{b(1 + q^2)}{2q}.$$

$\frac{1+p^2}{p} = p + \frac{1}{p}$로 쓰면

$$y_1 + y_2 = \frac{b}{2}\left(p + q + \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = \frac{b}{2}(p + q)\left(1 + \frac{1}{pq}\right) = \frac{b(p + q)(1 + pq)}{2pq}.$$

위의 결과로부터 $1 + pq = \frac{2a}{a + X}$이므로, $pq = \frac{a - X}{a + X} \neq 0$을 이용하면

$$y_1 + y_2 = \frac{b}{2} \cdot \frac{2aY}{b(a + X)} \cdot \frac{2a}{a + X} \cdot \frac{a + X}{a - X} = \frac{2a^2Y}{(a + X)(a - X)} = \frac{2a^2Y}{a^2 - X^2}.$$

이 값을 $2b$와 같다고 놓고 $(a^2 - X^2)/(2a^2b)$($X^2 \neq a^2$이므로 0이 아니다)를 곱하면

$$\frac{Y}{b} = \frac{a^2 - X^2}{a^2} = 1 - \frac{X^2}{a^2} \iff \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y}{b} = 1,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. 따라서 교점은 $(\pm a, 0)$과 $(0, b)$를 지나는 포물선(parabola) 위에 있다.

검산

- $a = 2, b = 1, (X, Y) = (4, 1)$($4 + 1 > 1$이므로 바깥)이면 이차방정식은 $6t^2 - 4t - 2 = 0$이고, 근은 $t = 1$과 $t = -\frac{1}{3}$이다. 즉 $(0, 1)$과 $(1.6, -0.6)$에서의 접선이다. 두 접선 $y = 1$과 $2x - 3y = 5$는 실제로 $(4, 1)$을 지난다. 여기서 $pq = -\frac{1}{3} = \frac{2-4}{2+4}$이고 $p + q = \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$으로, 공식이 예측한 대로이다.
- 중심 $(0, 0)$에서 판별식은 $-4a^2b^2 < 0$이다. 타원 안쪽의 점이므로 예상대로 접선이 없다.
- 무작위로 고른 여러 타원과 점 P, Q의 쌍에 대해 접선의 교점을 직접 구하여 컴퓨터로 확인하였다. pq, $p + q$, $y_1 + y_2$에 대한 공식이 모두 일치하였고, $y_1 + y_2 = 2b$일 때 교점은 $X^2/a^2 + Y/b = 1$을 만족하였다.

흔한 실수

- 기울기(gradient)를 $\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}$로 구하면서, 접선이 수직이 되는 $t = 0$에서는 이 방법이 통하지 않는다는 것을 잊는 실수.
- $X = -a$일 때에도 $(a + X)bt^2 - 2aYt + b(a - X) = 0$을 이차방정식으로 취급하는 실수. 바로 이 때문에 $X^2 = a^2$인 경우를 따로 다루어야 한다.
- 두 근이 왜 **서로 다른** 두 직선을 주는지 설명하지 않고 "판별식이 양수이다"에서 멈추는 실수.

STEP 너머

원뿔곡선(conic)의 유리매개화(rational parametrisation) $\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$는 대수기하학(algebraic geometry)의 출발점이다. 유리점(rational point)을 하나 가진 원뿔곡선이 무한히 많은 유리점을 가지는 이유가 바로 이것이며, 피타고라스 세 쌍(Pythagorean triples)의 분류도 이에 바탕을 둔다. 바깥의 한 점에서 그은 두 접선은 **극선**(polar)이라는 개념과 사영기하학(projective geometry)으로 이어지는데, 사영기하학에서는 $t = \infty$에서

빠져 있던 곤란한 점이 평범한 점이 된다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)에 이런 유형의 문제가 더 실려 있다.

풀이

STEP III 2017, 문제 8

순수수학 • 부분합 공식(아벨 합)

STEP III 2017, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/17-s3-q8

핵심 아이디어

처음의 항등식(identity)은 부분적분(integration by parts)의 이산 버전, 곧 "부분합산(summation by parts)"이다. 이 항등식은 b의 차분이 들어 있는 합을 a의 차분이 들어 있는 합으로 바꾸어 준다. 이를 삼각함수의 합에 쓰려면 $b_{m+1} - b_m$이 원하는 항을 만들어 내도록 b_m을 고른다. 이때 합을 곱으로 바꾸는 공식(sum-to-product formula)이 사인이나 코사인의 차를 하나의 곱으로 바꾸어 준다. 그다음 a_m을 1 또는 m으로 잡으면 반대쪽은 쉬워진다.

풀이

항등식

$a_{n+1}b_{n+1} - a_1b_1$은 연쇄적으로 상쇄되는(telescoping) 합으로 쓸 수 있다.

$$a_{n+1}b_{n+1} - a_1b_1 = \sum_{m=1}^{n} \left(a_{m+1}b_{m+1} - a_mb_m\right).$$

각 괄호 안에서 a_mb_{m+1}을 더하고 빼면

$$a_{m+1}b_{m+1} - a_mb_m = a_m(b_{m+1} - b_m) + b_{m+1}(a_{m+1} - a_m).$$

이를 $m = 1, \ldots, n$에 대하여 더하고 정리하면 바로 구하는 항등식을 얻는다.

삼각함수 부분 전체에서 $\operatorname{cosec} \frac{1}{2}x$가 정의되도록 $\sin \frac{1}{2}x \neq 0$ (즉 x가 2π의 배수가 아님)이라고 가정한다.

소문항 (i)

$b_m = \sin mx$로 두고 $A = (m+1)x$, $B = mx$에 합을 곱으로 바꾸는 공식을 적용하면

$$b_{m+1} - b_m = \sin(m+1)x - \sin mx = 2\cos\left(m+\tfrac{1}{2}\right)x \, \sin\tfrac{1}{2}x.$$

이제 모든 m에 대하여 $a_m = 1$로 두면 $a_{m+1} - a_m = 0$이므로 항등식의 마지막 합은 사라진다. 그러면 항등식은 다음과 같이 된다.

$$2\sin\tfrac{1}{2}x \sum_{m=1}^{n} \cos\left(m+\tfrac{1}{2}\right)x = b_{n+1} - b_1 = \sin(n+1)x - \sin x.$$

$2\sin\frac{1}{2}x \neq 0$으로 나누면

$$\sum_{m=1}^{n} \cos\left(m+\tfrac{1}{2}\right)x = \tfrac{1}{2}\left(\sin(n+1)x - \sin x\right)\operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}x,$$

이 되어 구하는 결과를 얻는다.

소문항 (ii)

인수 m이 있으므로 $a_m = m$으로 두어 $a_{m+1} - a_m = 1$이 되게 하는 것이 자연스럽다. 그러면 $b_{m+1} - b_m$이 $\sin mx$의 상수배가 되어야 한다.

> **생각해 보기** b_m을 어떻게 골라야 $b_{m+1} - b_m$이 $\sin mx$의 상수배가 될까?

소문항 (i)에서는 $(m+1)x$와 mx에서의 두 사인의 차가 **중점** $(m+\frac{1}{2})x$에서의 코사인을 주었다. $\sin mx$를 얻으려면 두 각의 중점이 mx인 코사인의 차가 필요하므로 $b_m = \cos\left(m-\frac{1}{2}\right)x$로 잡는다. $\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$ (문제의 첫 번째 참고 사항에서도 얻을 수 있다)를 이용하면

$$b_{m+1} - b_m = \cos\left(m+\tfrac{1}{2}\right)x - \cos\left(m-\tfrac{1}{2}\right)x = -2\sin mx \, \sin\tfrac{1}{2}x.$$

$S = \sum_{m=1}^{n} m\sin mx$라 하자. $a_m = m$일 때 항등식은 다음을 준다.

$$-2\sin\tfrac{1}{2}x \; S = (n+1)\cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x - \cos\tfrac{1}{2}x - \sum_{m=1}^{n} \cos\left(m+\tfrac{1}{2}\right)x.$$

마지막 합은 정확히 소문항 (i)의 합이다. 이를 대입하고 양변에 $-2\sin\frac{1}{2}x$를 곱하면

$$4\sin^2\tfrac{1}{2}x \; S = 2\sin\tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}x - 2(n+1)\cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x \, \sin\tfrac{1}{2}x + \sin(n+1)x - \sin x.$$

이제 두 곱을 간단히 한다.

- $2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x = \sin x$이고, 이는 $-\sin x$와 상쇄된다.

- $A = (n+\frac{1}{2})x$, $B = \frac{1}{2}x$로 두고 $2\cos A \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$를 쓰면

$$2\cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x \, \sin\tfrac{1}{2}x = \sin(n+1)x - \sin nx.$$

따라서

$$\begin{aligned} 4\sin^2\tfrac{1}{2}x \, S &= -(n+1)\left(\sin(n+1)x - \sin nx\right) + \sin(n+1)x \\ &= -n\sin(n+1)x + (n+1)\sin nx. \end{aligned}$$

$4\sin^2\frac{1}{2}x$로 나누면

$$\sum_{m=1}^{n} m\sin mx = \left(-\tfrac{n}{4}\sin(n+1)x + \tfrac{n+1}{4}\sin nx\right)\operatorname{cosec}^2\tfrac{1}{2}x,$$

이므로

$$p = -\frac{n}{4}, \qquad q = \frac{n+1}{4}.$$

검산

- $n = 1$일 때, $1-\cos x = 2\sin^2\frac{1}{2}x$를 이용하면 공식은 $\frac{1}{4}(2\sin x - \sin 2x)\operatorname{cosec}^2\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\sin x\,(1-\cos x)\operatorname{cosec}^2\frac{1}{2}x = \sin x$를 준다. 이는 하나뿐인 항 $1\cdot\sin x$와 같다.
- 수치로 확인하면, $n=3$, $x=1$일 때 $\sin 1 + 2\sin 2 + 3\sin 3 \approx 3.08343$이고 $\left(-\frac{3}{4}\sin 4 + \sin 3\right)\operatorname{cosec}^2\frac{1}{2} \approx 3.08343$으로 같다.
- 소문항 (ii)는 $\sum_{m=1}^{n}\cos mx$를 x에 대하여 미분해서도 구할 수 있으며, 그 결과는 $-S$이다. 이는 독립적인 검산으로 유용하다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)에서 $b_m = \cos mx$로 고르는 것: 이때 차분은 $\sin mx$가 아니라 $\sin(m+\frac{1}{2})x$의 상수배가 되어 방법이 막힌다.
- $\cos A - \cos B$의 부호 실수: 이는 음의 부호가 붙은 $-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$이다.
- $\sin\frac{1}{2}x \neq 0$으로 나누기 전에 이 조건을 밝히는 것을 잊는 것.

STEP 너머

부분합산(아벨 합(Abel summation))은 부분적분의 이산판 쌍둥이이며, 대학 1학년 해석학(analysis)에서 쉴 새 없이 쓰이는 도구이다. $\cos(m+\frac{1}{2})x$의 부분합(partial

sums)이 유계임을 보여 주는 소문항 (i)과 같은 부등식과 결합하면 디리클레(Dirichlet) 판정법(Dirichlet's test)을 증명할 수 있다. 예를 들어 $\sum \frac{\sin mx}{m}$은 모든 x에 대하여 수렴(converges)한다. 소문항 (ii)와 같은 합은 푸리에 급수(Fourier series)에도 나타나는데, 그곳에서는 이러한 닫힌 형태가 수렴을 연구하는 출발점이 된다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)는 아벨 합과 디리클레 판정법을 명료하게 다룬다.

풀이

STEP III 2017, 문제 9

역학 • 연결된 입자와 에너지

STEP III 2017, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

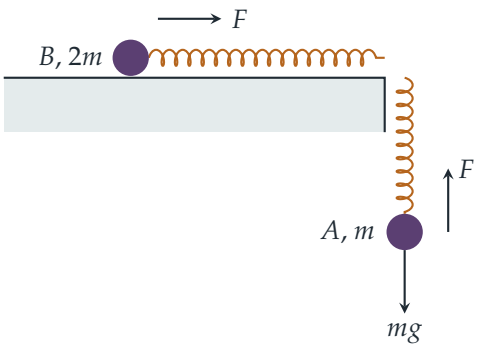
step.maths.org/questions/17-s3-q9

핵심 아이디어

용수철의 장력(tension)은 알 수 없고 시간에 따라 변하지만, 두 입자에 같은 크기로 작용한다. 따라서 두 운동 방정식(equation of motion)을 알맞은 비율로 더하면 장력이 소거되고, 곧바로 적분할 수 있는 식이 남는다. 두 번째 부분에서는 이렇게 적분한 관계식으로 시각 T에서 두 입자의 위치와 두 속력 사이의 관계를 알 수 있다. 여기에 에너지 보존(conservation of energy)으로 두 번째 식을 얻고, 두 식을 함께 쓰면 B의 속력이 정해진다.

풀이

A와 B를 입자로, 용수철을 가벼운 것으로 모형화한다. 탁자는 매끄럽고, 용수철은 탁자 모서리 위를 매끄럽게 지나간다. 놓아 준 뒤 A는 연직으로 떨어지고 B는 탁자 위를 따라 모서리 쪽으로 미끄러진다. 시각 t에서 용수철의 장력을 F라 하자. $x < a$인 동안 B는 아직 탁자 위에 있다.



관계식 $y + 2x = \frac{1}{2}gt^2$

A에 대해서는 아래쪽을 y의 양의 방향으로, B에 대해서는 모서리 쪽을 x의 양의 방향으로 잡는다. 뉴턴 제2법칙(Newton's second law)에 의해

$$\text{입자}A\text{에 대해 (연직 방향)}: \quad m\ddot{y} = mg - F,$$
$$\text{입자}B\text{에 대해 (수평 방향)}: \quad 2m\ddot{x} = F.$$

(B에서는 무게와 수직항력(normal reaction)이 상쇄되고, 마찰(friction)은 없다.) 두 식을 더하면 F가 없어진다.

$$m\ddot{y} + 2m\ddot{x} = mg \quad \Longrightarrow \quad \ddot{y} + 2\ddot{x} = g.$$

두 입자는 $x = y = 0$인 정지 상태에서 출발한다. 한 번 적분하면 $\dot{y} + 2\dot{x} = gt$를 얻으며, $t = 0$에서 두 속도가 모두 영이므로 적분상수는 없다. 한 번 더 적분하면

$$y + 2x = \frac{1}{2}gt^2,$$

이고, 이번에도 적분상수가 없으므로 이것이 구하려던 결과이다.

> **생각해 보기** F는 계속 변하는 늘어난 길이(extension) $y - x$에 따라 달라지므로 우리는 F를 모른다. 그런데도 어떻게 무언가를 말할 수 있을까?

F는 전혀 필요하지 않다. 두 식에 알맞은 인수를 곱하면(여기서는 그냥 더하기만 하면) 장력이 서로 반대 부호로 나타난다. 결합 $y + 2x$는 운동량(momentum)과 비슷한 양 $my + 2mx$의 $1/m$배이고, 이 양을 변화시키는 외력은 A의 무게뿐이다.

시각 T에서 B의 속력

시각 $T = \sqrt{6a/g}$에서 입자 B는 모서리에 도달하므로 $x = a$이다. $\frac{1}{2}gT^2 = \frac{1}{2}g \cdot \frac{6a}{g} = 3a$이므로 첫 번째 부분에서

$$y + 2a = 3a \quad \Longrightarrow \quad y = a.$$

따라서 시각 T에서 용수철의 늘어난 길이는 $y - x = a - a = 0$이다. 용수철은 다시 자연 길이(natural length)가 되고, 탄성 에너지(elastic energy)를 전혀 저장하지 않는다.

시각 T에서 B와 A의 속력을 각각 u와 v라 하자. 한 번 적분한 관계식 $\dot{y} + 2\dot{x} = gt$에서 $t = T$일 때

$$v + 2u = gT = \sqrt{6ag}. \tag{1}$$

에너지. 탁자는 매끄럽고 용수철은 가벼우므로 역학적 에너지가 보존된다. 처음에는 두 입자가 모두 정지해 있고 용수철은 늘어나 있지 않다. 시각 T에서 A는 거리 a만큼 떨어졌고 용수철은 다시 늘어나 있지 않으므로, 잃은 위치 에너지 mga는 모두 운동 에너지가 되었다.

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}(2m)u^2 = mga \quad \Longrightarrow \quad v^2 + 2u^2 = 2ga. \tag{2}$$

생각해 보기 식이 두 개이고 그중 하나가 이차식이다. 그렇다면 가능한 속력이 두 개라고 예상해야 하지 않을까?

(1)에서 얻은 $v = \sqrt{6ag} - 2u$를 (2)에 대입하면

$$\begin{aligned} 6ag - 4\sqrt{6ag}\,u + 4u^2 + 2u^2 &= 2ga \\ 6u^2 - 4\sqrt{6ag}\,u + 4ag &= 0 \\ 3u^2 - 2\sqrt{6ag}\,u + 2ag &= 0. \end{aligned}$$

판별식(discriminant)은 $4 \cdot 6ag - 4 \cdot 3 \cdot 2ag = 0$이므로, 이 이차식은 완전제곱식(perfect square)이고 근은 하나뿐이다.

$$\left(\sqrt{3}\,u - \sqrt{2ag}\right)^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = \sqrt{\frac{2ag}{3}}.$$

따라서 B가 모서리에 도달할 때의 속력은 요구한 대로 $\sqrt{2ag/3}$이다. (1)에서 $v = \sqrt{6ag} - 2\sqrt{2ag/3} = \sqrt{2ag/3}$도 성립한다. 그 순간 두 입자는 같은 속력으로 움직이며, 이는 용수철이 자연 길이에 있다는 사실과 잘 맞는다.

검산

- 중근(repeated root)에는 의미가 있다. 전체 "운동량" $v + 2u$가 고정되어 있을 때, 운동에너지 $\frac{1}{2}mv^2 + mu^2$는 $v = u$일 때 가장 작고, 여기서는 그 최솟값이 정확히 mga이다. 따라서 에너지 식과 (1)이 동시에 성립하려면 $u = v$일 수밖에 없고, 그러면 (1)에서 곧바로 $3u = \sqrt{6ag}$를 얻는다.
- 운동을 완전히 풀면(문제에서는 그렇게 하지 말라고 한다) $\omega T = 2\pi$를 얻는다. 여기서 $\omega^2 = 3\lambda/(2am)$이다. 즉 늘어난 길이는 정확히 한 번의 완전한 진동을 거쳐 다시 영으로 돌아온다. $a = 1.3\,\mathrm{m}$, $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$로 놓고 단계별 수치 적분을 하면 $x(T) = y(T) = a$이고 두 속력이 모두 $2.9143\,\mathrm{m\,s^{-1}} = \sqrt{2ag/3}$로 같다.
- 차원(dimensions): $\sqrt{ag}$는 속력이고, $\sqrt{a/g}$는 시간이다.

흔한 실수

- 일반적으로 용수철에 탄성 에너지가 있다는 사실을 잊는 것. 이 논증은 시각 T에서 $x = y = a$여서 늘어난 길이가 영이 되기 때문에만 성립한다. 이 점을 명시적으로 보여야 한다.
- 에너지 식만 쓰고 그것을 u에 대해 풀려고 하는 것. 이 식에는 미지수가 두 개 있으므로 관계식 (1)도 필요하다.

STEP 너머

양 $my + 2mx$는 운동량처럼 행동한다. 내력(여기서는 용수철의 장력)은 그 안에서 상쇄되고, 오직 외력만이 이 양을 변화시킨다. 이것이 입자계 역학의 출발점이다. 일반적으로는 운동을 질량중심(centre of mass) 부분과 상대 운동 부분으로 나누는데, 여기서는 상대 좌표 $y - x$가 단진동(simple harmonic motion)을 한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 아이디어를 꼼꼼하게 전개한다.

풀이

STEP III 2017, 문제 10

역학 • 회전하는 강체

STEP III 2017, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/17-s3-q10

핵심 아이디어

입자가 미끄러지지 않는 동안 막대와 입자는 하나의 강체(rigid body)로서 경첩(hinge)을 축으로 함께 회전하므로, 에너지 보존(conservation of energy)으로부터 곧바로 $\dot{\theta}$를 얻고, 이를 미분하면 $\ddot{\theta}$를 얻는다. 이때 입자는 P를 중심으로 하는 원 위를 움직이므로, 그 가속도는 익숙한 지름 방향(radial) 성분과 횡방향(transverse) 성분을 가진다. 입자 하나에 대한 뉴턴(Newton)의 운동 제2법칙(Newton's second law)을 막대 방향과 막대에 수직인 방향으로 분해하면 마찰력(friction)과 수직항력(normal reaction)을 얻고, 마찰력이 수직항력의 μ배에 이를 때 미끄러짐(slipping)이 시작된다.

풀이

에너지 방정식

입자는 질점으로, 경첩은 매끄러운 것으로 모형화한다. 균일한 막대의 끝점 P에 대한 관성모멘트(moment of inertia)는 $\frac{1}{3}m(3a)^2 = 3ma^2$이고, P로부터 거리 ℓ에 있는 입자는 $m\ell^2$만큼 기여한다. 미끄러짐이 없는 동안 이 계는 각속도(angular speed) $\dot{\theta}$로 P를 축으로 회전하는 강체이며, 그 운동 에너지(kinetic energy)는

$$\tfrac{1}{2}\left(3ma^2 + m\ell^2\right)\dot{\theta}^2.$$

이다. 막대가 θ만큼 회전했을 때, (P로부터 거리 $\frac{3}{2}a$에 있는) 막대의 중심은 $\frac{3}{2}a\sin\theta$만큼 내려오고 입자는 $\ell\sin\theta$만큼 내려온다. 경첩의 반작용력은 일을 하지 않으며(작용점이 고정되어 있으므로), 마찰력과 수직항력은 계의 내력이므로 미끄러짐이 없을 때 알짜 일을 하지 않는다. 정지 상태에서 출발하므로 에너지 보존에 의해

$$\tfrac{1}{2}m\left(3a^2 + \ell^2\right)\dot{\theta}^2 = mg\left(\tfrac{3}{2}a + \ell\right)\sin\theta,$$

이고, 양변에 $2/m$를 곱하면

$$(3a^2 + \ell^2)\dot{\theta}^2 = g(3a + 2\ell)\sin\theta,$$

가 되어 원하는 결과를 얻는다.

각가속도

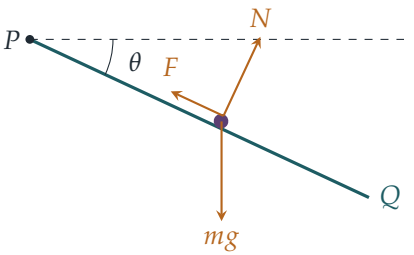
t에 대하여 미분하면

$$2(3a^2 + \ell^2)\dot{\theta}\,\ddot{\theta} = g(3a + 2\ell)\cos\theta\,\dot{\theta}.$$

이다. $t > 0$이면 $\dot{\theta} \neq 0$이므로 양변을 $2\dot{\theta}$로 나눌 수 있다($t = 0$에서의 결과는 연속성(continuity)에 의해, 또는 P에 대한 모멘트를 직접 취하여 얻는다).

$$\ddot{\theta} = \frac{g(3a + 2\ell)\cos\theta}{2(3a^2 + \ell^2)}.$$

입자에 작용하는 힘



막대는 수평선 아래로 각 θ를 이루며 놓여 있다. 막대는 입자를 막대에 수직인 수직항력 N(입자가 막대 위에 놓여 있으므로 막대에서 멀어지는 방향)과 막대 방향의 마찰력 F로 미는데, F는 P를 향해 작용한다고 하자. 입자는 P를 중심으로 하는 반지름 ℓ인 원 위를 움직이므로, 그 가속도는 θ가 증가하는 방향(아래쪽, 막대 윗면에서 멀어지는 방향)으로 막대에 수직인 성분 $\ell\ddot{\theta}$와, 막대를 따라 P를 향하는 성분 $\ell\dot{\theta}^2$을 가진다.

막대에 수직이고 θ가 증가하는 방향으로, 무게의 성분은 $mg\cos\theta$이고 N은 반대 방향으로 작용한다.

$$mg\cos\theta - N = m\ell\ddot{\theta}.$$

막대를 따라 P를 향하는 방향으로, 무게의 성분은 $-mg\sin\theta$이다(무게는 입자를 P에서 멀어지게 당긴다).

$$F - mg\sin\theta = m\ell\dot{\theta}^2.$$

수직항력

위에서 구한 $\ddot{\theta}$를 이용하면

$$N = mg\cos\theta - m\ell\ddot{\theta} = mg\cos\theta\left(1 - \frac{\ell(3a+2\ell)}{2(3a^2+\ell^2)}\right)$$
$$= mg\cos\theta\,\frac{6a^2+2\ell^2-3a\ell-2\ell^2}{2(3a^2+\ell^2)} = \frac{3mga(2a-\ell)\cos\theta}{2(3a^2+\ell^2)}.$$

이다. $\ell < 2a$이므로 인수 $2a-\ell$은 양수이고, θ가 예각이면 $\cos\theta > 0$이다. 따라서 $N > 0$이다. 특히 θ가 예각인 동안 수직항력은 0이 아니고, 입자는 막대와 접촉한 상태를 유지한다.

미끄러지기 시작하는 순간

두 번째 방정식과 에너지 방정식으로부터

$$F = mg\sin\theta + m\ell\dot{\theta}^2 = mg\sin\theta\left(1 + \frac{\ell(3a+2\ell)}{3a^2+\ell^2}\right)$$
$$= mg\sin\theta\,\frac{3a^2+3a\ell+3\ell^2}{3a^2+\ell^2} = \frac{3mg(a^2+a\ell+\ell^2)\sin\theta}{3a^2+\ell^2}.$$

이다. 이 값은 $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$에서 양수이므로, 가정한 대로 마찰력은 실제로 P를 향해 작용한다. 마찰력이 없다면 입자는 막대를 따라 바깥쪽으로 미끄러질 것이다.

생각해 보기 미끄러짐의 조건이 부등식이 아니라 $F = \mu N$인 이유는 무엇인가?

입자가 막대에 붙어 있는 동안 마찰력은 μN 이하의 어떤 힘이든 제공할 수 있으므로, $F \le \mu N$이어야 한다. $\theta = 0$에서는 $F = 0 < \mu N$이다. θ가 증가함에 따라 F는 ($\sin\theta$처럼) 커지고 N은 ($\cos\theta$처럼) 작아지므로, $\tan\theta$의 양수배인 F/N은 꾸준히 증가한다. 입자는 처음으로 $F = \mu N$이 되는 각에서 미끄러지기 직전 상태가 된다.

$$\frac{3mg(a^2+a\ell+\ell^2)\sin\theta}{3a^2+\ell^2} = \mu\,\frac{3mga(2a-\ell)\cos\theta}{2(3a^2+\ell^2)}.$$

$3mg/(3a^2+\ell^2)$를 약분하고 $\cos\theta \neq 0$으로 나누면

$$\tan\theta = \frac{\mu a(2a-\ell)}{2(\ell^2+a\ell+a^2)},$$

가 되어 원하는 결과를 얻는다.

$\ell > 2a$인 경우

N에 대한 식은 입자가 막대와 함께 움직인다고 가정하여 유도한 것이다. $\ell > 2a$이면 이 식은 $\theta = 0$에서 $N < 0$을 주는데, 이는 불가능하다. 막대는 입자를 밀 수만 있고 당길 수는 없기 때문이다. 따라서 입자는 놓는 순간조차 막대와 함께 움직일 수 없다.

실제로 어떤 일이 일어나는지 보기 위해 막대만 따로 생각하자. 놓는 순간 P에 대한 모멘트를 취하면

$$3ma^2\ddot{\theta} = mg \cdot \tfrac{3}{2}a \quad \Longrightarrow \quad \ddot{\theta} = \frac{g}{2a},$$

이므로, 입자 바로 아래에 있는 막대 위의 점은 아래 방향 가속도 $\ell\ddot{\theta} = \frac{\ell}{2a}g$로 움직이기 시작하며, 이는 $\ell > 2a$일 때 g보다 크다. 막대는 입자가 자유 낙하할 수 있는 것보다 더 빨리 떨어져 나간다. 따라서 놓는 순간 입자는 막대에서 떨어지고(둘 사이의 반작용력은 0이다) 중력만 받으며 자유 낙하하기 시작하고, 막대는 홀로 아래로 회전한다.

검산

- 계 전체에 대해 P에 대한 모멘트를 취하면 $(3ma^2 + m\ell^2)\ddot{\theta} = mg\cos\theta\,(\frac{3}{2}a + \ell)$이 되어, 에너지 방정식을 미분하여 얻은 것과 같은 $\ddot{\theta}$를 얻는다.
- 경계 경우 $\ell = 2a$는 두 그림 모두와 들어맞는다. 놓는 순간 $N = 0$이고, 거리 $2a$에 있는 막대 위의 점은 정확히 g의 가속도로 움직이기 시작한다.
- $a = \ell = 1$, $\mu = 1$이면 미끄러지는 각은 $\tan\theta = \frac{1}{6}$을 만족하고, 그 각에서 위의 식들은 $F/N = 6\tan\theta = 1 = \mu$를 준다. N과 F에 대한 식은 컴퓨터로도 확인하였는데, 운동을 수치적으로 단계별로 계산하고 입자의 위치로부터 가속도를 직접 구하는 방식으로 하였다.

흔한 실수

- 경첩에 대한 관성 모멘트 대신 중심에 대한 관성 모멘트 $\frac{1}{12}m(3a)^2$을 사용하는 실수. 길이 L인 막대의 끝점에 대한 관성 모멘트는 $\frac{1}{3}mL^2$이다.
- 마찰력 방정식에서 구심(centripetal) 항 $m\ell\dot{\theta}^2$을 빠뜨리는 실수. 바로 이 항 때문에 분자가 a^2이 아니라 $a^2 + a\ell + \ell^2$이 된다.
- 수직 방향 방정식에서 $\ell\ddot{\theta}$의 부호를 잘못 잡는 실수. 막대는 입자에서 멀어지는 방향으로 가속하므로, N은 $mg\cos\theta$보다 큰 것이 아니라 작다.

STEP 너머

마지막 부분은 고전적인 놀라운 결과이다. 경첩에 연결되어 넘어지는 막대 위의 한 점은 g보다 빠르게 가속할 수 있으며, 그래서 넘어지는 자의 끝 가까이에 놓은 동전(또는 무너지는 굴뚝)은 뒤처지게 된다. N과 F 같은 구속력(constraint forces)을 구하는 체계적인 방법은 운동 방정식을 극좌표(polar coordinates)로 쓰는 것이며, 나중에 배우는 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)은 이러한 힘을 전혀 쓰지 않고 운동을 구하는 방법을 보여 준

다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 강체의 회전과 이러한 극좌표 가속도를 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP III 2017, 문제 11

역학 • 운동량 보존

> **STEP III 2017, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/17-s3-q11

이 문제는 *Beyond STEP*의 10.3 절 **로켓과 대포**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch10/rockets.html

핵심 아이디어

계에 작용하는 수평 방향의 외력이 없으므로, 매번 발사할 때마다 수평 방향 운동량(momentum)이 보존된다. 지면에 대한 속력이 $v - V$라는 이상해 보이는 조건은 사실 간단한 내용을 말하고 있다. 발사체는 언제나 **트럭에 대해** 속력 v로 떠난다는 것이다. 운동 에너지(kinetic energy)는 매번 처음부터 모두 다시 계산하지 말고, $(*)$를 이용해 한 번의 발사에서 생기는 에너지 변화를 간단히 한 다음 모두 더한다.

풀이

트럭, 포, 발사체를 한 직선 위에서 움직이는 입자로 모형화하고, 앞쪽 방향(트럭이 움직이는 방향)을 양의 방향으로 잡는다. 트럭의 속력이 V일 때 발사된 발사체의 속도는 $-(v - V) = V - v$, 즉 트럭에 대한 상대 속도가 $-v$이다. 발사는 계 내부의 작용이고 궤도는 매끄러우므로, 각 발사에서 전체 수평 운동량이 보존된다.

소문항 (i)

발사 전에는 모든 것이 정지해 있으므로 운동량은 0이다. $V = 0$이므로 각 발사체는 속도 $-v$로 떠나고, 트럭(질량 M)은 속력 u로 앞으로 움직인다.

$$Mu - nmv = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = \frac{nmv}{M}.$$

계는 처음에 운동 에너지가 없었으므로, 얻은 에너지는

$$K = \tfrac{1}{2}Mu^2 + \tfrac{1}{2}nmv^2 = \tfrac{1}{2}\,\frac{n^2m^2v^2}{M} + \tfrac{1}{2}nmv^2 = \tfrac{1}{2}nmv^2\left(1 + \frac{nm}{M}\right),$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

소문항 (ii)

r번째 발사를 생각하자. 발사 직전에 트럭에는 아직 발사되지 않은 발사체 $n-r+1$개가 실려 있으므로, 움직이는 질량은 $M+(n-r+1)m$이고 속력은 u_{r-1}이다. 발사 직후에는 질량 $M+(n-r)m$이 속력 u_r로 움직이고, 질량 m인 발사체 하나의 속도는 $u_{r-1}-v$이다. 앞서 발사된 발사체들은 영향을 받지 않으므로 고려하지 않아도 된다.



운동량 보존에 의해

$$\big(M+(n-r+1)m\big)u_{r-1} = \big(M+(n-r)m\big)u_r + m(u_{r-1}-v).$$

좌변을 $\big(M+(n-r)m\big)u_{r-1} + mu_{r-1}$로 쓰면 mu_{r-1} 항이 소거되어

$$\big(M+(n-r)m\big)(u_r-u_{r-1}) = mv, \qquad \text{따라서} \qquad u_r - u_{r-1} = \frac{mv}{M+(n-r)m},$$

이 남고, 이것이 $(*)$이다.

$r=1,\dots,n$에 대해 $(*)$를 모두 더하면 좌변은 망원급수(telescoping sum)처럼 소거되고 $u_0=0$이므로

$$u_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{mv}{M+(n-r)m}.$$

각 분모는 $M+(n-r)m \geq M$을 만족하므로 각 항은 많아야 $\frac{mv}{M}$이다. $r=1$일 때는 $n>1$이어서 $(n-1)m>0$이므로 부등식이 엄격하게 성립한다. 따라서

$$u_n < n\cdot\frac{mv}{M} = u.$$

? 생각해 보기 한 발씩 발사하는 것이 왜 더 불리할까?

초기의 발사에서 포는 트럭뿐 아니라 아직 실려 있는 모든 발사체까지 밀어야 하므로, 각 발사가 주는 속력 증가가 더 작다. 동시 발사에서 한 발이 차지하는 몫과 같은 것은 $r=n$인 항(아무것도 실려 있지 않은 마지막 발사)뿐이다.

소문항 (iii)

r번째 발사에서 속도가 바뀌는 것은 (남은 짐을 실은) 트럭과 방금 발사된 발사체뿐이다. 따라서

$$\begin{aligned} K_r - K_{r-1} &= \tfrac{1}{2}\big(M+(n-r)m\big)u_r^2 + \tfrac{1}{2}m(u_{r-1}-v)^2 - \tfrac{1}{2}\big(M+(n-r+1)m\big)u_{r-1}^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\big(M+(n-r)m\big)(u_r^2-u_{r-1}^2) + \tfrac{1}{2}m\big[(v-u_{r-1})^2-u_{r-1}^2\big] \\ &= \tfrac{1}{2}\big(M+(n-r)m\big)(u_r-u_{r-1})(u_r+u_{r-1}) + \tfrac{1}{2}m(v^2-2vu_{r-1}). \end{aligned}$$

$(*)$에 의해 $\big(M+(n-r)m\big)(u_r-u_{r-1}) = mv$이므로 첫째 항은 $\frac{1}{2}mv(u_r+u_{r-1})$이다. 그러므로

$$\begin{aligned} K_r - K_{r-1} &= \tfrac{1}{2}mvu_r + \tfrac{1}{2}mvu_{r-1} + \tfrac{1}{2}mv^2 - mvu_{r-1} \\ &= \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}mv(u_r-u_{r-1}), \end{aligned}$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

이 식을 $r=1,\dots,n$에 대해 더하고 $K_0=0$, $u_0=0$을 이용하면 양변이 모두 연쇄적으로 소거되어

$$K_n = \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}mv(u_n-u_0) = \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}mvu_n.$$

마지막으로 소문항 (i)과 비교하자. $u = nmv/M$이므로

$$K = \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}\,\frac{n^2m^2v^2}{M} = \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}nmv\,u.$$

소문항 (ii)에서 $u_n < u$이고, $u>0$이며 $n>1$이므로 $u<nu$이다. $mv>0$이므로

$$K_n = \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}mvu_n < \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}mvu < \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}nmvu = K.$$

따라서 $K_n < K$이다. 즉, 한 발씩 발사하면 방출되는 운동 에너지가 더 적다.

검산

- $n=3, M=10, m=1, v=1$로 두자. 그러면 $u=0.3$이고, $(*)$에서 $u_3 = \frac{1}{12}+\frac{1}{11}+\frac{1}{10} = \frac{181}{660} \approx 0.274$를 얻는데, 예상대로 더 작다. 에너지는 $K=1.95$, $K_3 = \frac{2161}{1320} \approx 1.637$이다.
- n, M, m, v를 무작위로 수천 번 골라 각 발사 직후 모든 물체의 운동량과 운동 에너지를 직접 계산해 보면, $(*)$ 및 K_n의 공식과 정확히 일치한다. 이는 컴퓨터로 확인하였다.
- 극한의 경우: $m \ll M$이면 $(*)$의 모든 항이 mv/M에 가까우므로 $u_n \approx u$이고, 두 에너지 모두 $\frac{1}{2}nmv^2$에 가깝다. 트럭이 매우 무거우면 발사 방식은 거의 상관이 없다.

흔한 실수

- 발사되지 않은 발사체가 트럭과 함께 움직인다는 것을 잊고, r번째 발사 전의 질량으로 $M + (n - r + 1)m$ 대신 M을 쓰는 실수.
- 발사체의 속도를 $u_{r-1} - v$ 대신 $-v$로 두는 실수. 문제에서 정한 것은 지면에 대한 속력 $v - V$이지 v가 아니다.
- $K_r - K_{r-1}$에 이전 발사체들의 운동 에너지를 포함하는 실수. 이들은 영향을 받지 않으므로 소거된다.

STEP 너머

이 문제는 로켓 운동의 이산적인 형태이다. n번의 발사를 연속적인 배기 가스의 흐름으로 바꾸면 u_n에 대한 합이 적분이 되어 치올콥스키 로켓 방정식(Tsiolkovsky rocket equation) $\Delta u = v \ln(m_0/m_1)$을 얻는다. 로켓은 한 발씩 발사하는 트럭과 같은 처지에 있다. 연료를 한 순간에 모두 태울 수 없으므로, 소문항 (ii)에서 밝혀진 대가를 치르는 것이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 질량이 변하는 계와 로켓을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP III 2017, 문제 12

확률과 통계 • 이산 결합 분포

STEP III 2017, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/17-s3-q12

핵심 아이디어

모든 것은 두 가지 기본 합 공식 $\sum_{r=1}^{n} r = \frac{1}{2}n(n+1)$과 $\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$에서 나온다. 먼저 확률의 합이 1이 되도록 하여 k를 정한다. 그다음 y에 대해 합하여 주변분포(marginal distribution)를 구한다. 공분산(covariance)을 구하려면 $\mathrm{E}(X)$와 $\mathrm{E}(XY)$가 필요하다. $x+y$가 x와 y에 대해 대칭(symmetric)이라는 사실 덕분에 계산량이 절반으로 준다.

풀이

소문항 (i)

n^2개의 모든 순서쌍 (x,y)에 대한 확률의 합은 1이어야 한다. 대칭성에 의해 $\sum_{x,y} x = \sum_{x,y} y$이다. 각 x는 y의 n개의 값마다 한 번씩 나타나므로, 이 두 합은 각각 $n\sum_{x=1}^{n} x = \frac{1}{2}n^2(n+1)$과 같다. 따라서

$$1 = k\sum_{x=1}^{n}\sum_{y=1}^{n}(x+y) = k\cdot 2\cdot \tfrac{1}{2}n^2(n+1) = k\,n^2(n+1), \qquad \text{따라서} \qquad k = \frac{1}{n^2(n+1)}.$$

X의 주변분포를 구하기 위해 x를 고정하고 y에 대해 합한다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=x) &= k\sum_{y=1}^{n}(x+y) = k\Big(nx + \tfrac{1}{2}n(n+1)\Big) = \frac{kn\,(2x+n+1)}{2}\\ &= \frac{n+1+2x}{2n(n+1)},\end{aligned}$$

이것이 구하려던 결과이다. $x+y$는 x와 y에 대해 대칭이므로 Y도 같은 분포를 가진다. 즉 $\mathrm{P}(Y=y) = \dfrac{n+1+2y}{2n(n+1)}$이다.

생각해 보기 X와 Y가 독립이 아님을 보이려면 모든 순서쌍 (x,y)를 확인해야 할까?

그렇지 않다. 독립(independence)이려면 **모든** 순서쌍에 대해 $\mathrm{P}(X=x,Y=y)=\mathrm{P}(X=x)\,\mathrm{P}(Y=y)$가 성립해야 하므로, 이것이 성립하지 않는 순서쌍 하나만 찾으면 충분하다. $x=y=1$로 두면

$$\mathrm{P}(X=1,Y=1)=2k=\frac{2}{n^2(n+1)},\qquad \mathrm{P}(X=1)\,\mathrm{P}(Y=1)=\frac{(n+3)^2}{4n^2(n+1)^2}.$$

두 값이 같을 필요충분조건은 $8(n+1)=(n+3)^2$, 즉 $n^2-2n+1=0$, 곧 $(n-1)^2=0$이다. 따라서 두 값은 $n=1$일 때만 같다. $n\geq 2$이므로 두 확률은 다르고, X와 Y는 **독립이 아니다**.

소문항 (ii)

$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$를 이용한다. 또 두 확률변수의 분포가 같으므로 $\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(X)$임에 주목한다.

평균. 소문항 (i)에서 구한 주변분포를 이용하면

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=\frac{1}{2n(n+1)}\sum_{x=1}^{n}\bigl((n+1)x+2x^2\bigr)=\frac{1}{2n(n+1)}\Bigl(\tfrac{1}{2}n(n+1)^2+\tfrac{1}{3}n(n+1)(2n+1)\Bigr)\\&=\frac{1}{2}\Bigl(\frac{n+1}{2}+\frac{2n+1}{3}\Bigr)=\frac{7n+5}{12}.\end{aligned}$$

곱의 평균. 여기서 $xy(x+y)=x^2y+xy^2$이고, 대칭성에 의해 두 부분의 이중합은 같다. 또한 x^2y의 이중합은 두 단일합의 곱으로 인수분해된다.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(XY)&=k\sum_{x=1}^{n}\sum_{y=1}^{n}xy(x+y)=2k\Bigl(\sum_{x=1}^{n}x^2\Bigr)\Bigl(\sum_{y=1}^{n}y\Bigr)=2k\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\\&=\frac{n^2(n+1)^2(2n+1)}{6\,n^2(n+1)}=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}.\end{aligned}$$

공분산. 이들을 공통분모 144로 통분하여 합치면

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y)&=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{(7n+5)^2}{144}=\frac{24(2n^2+3n+1)-(49n^2+70n+25)}{144}\\&=\frac{-n^2+2n-1}{144}=-\frac{(n-1)^2}{144}.\end{aligned}$$

$n\geq 2$이므로 $(n-1)^2>0$이고, 따라서 $\mathrm{Cov}(X,Y)=-\dfrac{(n-1)^2}{144}<0$이다. 요구한 대로 공분산은 음수이다.

공분산이 음수인 것은 납득할 만하다. 결합확률은 $x+y$에만 의존하며, 합이 클수록 확률이 커진다. X가 이미 크다면 합을 크게 하기 위해 Y까지 클 필요는 없으므로, Y가 클 이유가 조금 줄어든다.

검산

- $n=2$로 두자. 그러면 $k=\frac{1}{12}$이고, 네 확률은 $\frac{2}{12}, \frac{3}{12}, \frac{3}{12}, \frac{4}{12}$로 합이 1이다. 주변확률은 $\mathrm{P}(X=1)=\frac{5}{12}$, $\mathrm{P}(X=2)=\frac{7}{12}$로 공식과 일치한다. 따라서 $\mathrm{E}(X)=\frac{19}{12}$이고 $\mathrm{E}(XY)=\frac{2+6+6+16}{12}=\frac{5}{2}$이다. 이로부터 $\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{5}{2}-\frac{361}{144}=-\frac{1}{144}$를 얻으며, 이는 $-(n-1)^2/144$와 일치한다.
- 주변확률의 합은 1이다. $\sum_x (n+1+2x)=n(n+1)+n(n+1)=2n(n+1)$이기 때문이다.
- 독립성 판정을 실패하게 만드는 $(n-1)^2$은 공분산을 영으로 만드는 것과 같은 값이다. 두 경우 모두 $n=1$은 확실하게 $X=Y=1$이 되는 퇴화된 경우이다.
- $n=2,\ldots,29$에 대해 정확한 분포를 컴퓨터로 확인하여 k, 주변분포, $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{E}(XY)$와 공분산 공식이 맞음을 확인했다.

흔한 실수

- $\sum_{x,y}$ x에 y에 대한 합에서 오는 인수 n이 있다는 것을 잊는 실수. 그러면 $k=1/(n(n+1))$이라는 틀린 값을 얻는다.
- 구체적인 순서쌍 하나를 제시하지 않고 비독립성을 "일반적으로" 보이려 하는 실수. 반례(counterexample) 하나면 충분하며, 그것이 가장 명확한 논증이다.
- 종속임을 보이려면 공분산이 영이 아니어야 한다고 생각하는 실수. 여기서는 공분산이 실제로 종속임을 보여 주지만, 공분산이 영이라고 해서 독립임이 증명되는 것은 **아니다**.

STEP 너머

$f(x,y)=g(x+y)$ 꼴의 결합분포(joint distribution)는 합을 통해 서로 연결된 확률변수의 간단한 모형이다. 이때 공분산의 부호는 g의 모양에 따라 달라진다. 여기서 g는 일차함수이고, 공분산은 작은 음수이다. 대학에서는 결합분포, 주변분포, 조건부 분포(conditional distribution), 상관(correlation)을 함께 공부하며, 연속형의 경우에는 이중합 대신 이중적분(double integral)을 사용한다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 STEP과 가까운 방식으로 이 내용을 다룬다.

풀이

STEP III 2017, 문제 13

확률과 통계 • 기댓값과 분산

STEP III 2017, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/17-s3-q13

핵심 아이디어

$X - x$를 $(X - \mu) + (\mu - x)$로 쓴다. 첫째 조각은 평균이 0이므로, 제곱하여 기댓값(expectation)을 취하면 교차항이 사라진다. 그러면 분산(variance)에 상수를 더한 것만 남는데, 이는 "$\mathrm{E}(X^2) = \mathrm{Var}(X) + \mu^2$"와 같은 항등식이다. 균등분포(uniform distribution)의 경우, Y는 X의 함수이지만 일대일(one-to-one)이 아니므로, Y의 확률밀도함수(density)를 구하는 가장 안전한 길은 누적분포함수(cumulative distribution function)를 거치는 것이다.

풀이

함수 V

임의의 고정된 수 x에 대하여

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(x) = \mathrm{E}\big((X-x)^2\big) &= \mathrm{E}\big(((X-\mu)+(\mu-x))^2\big)\\ &= \mathrm{E}\big((X-\mu)^2\big) + 2(\mu-x)\,\mathrm{E}(X-\mu) + (\mu-x)^2\\ &= \sigma^2 + (x-\mu)^2\end{aligned}$$

이다. 여기서 기댓값의 선형성(linearity of expectation)(여기서 $\mu - x$는 상수이다)과 $\mathrm{E}(X - \mu) = 0$을 이용하였다.

Y의 평균

$\mathrm{V}(x) = \sigma^2 + (x - \mu)^2$는 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 $x = X$를 대입할 수 있다.

$$Y = \mathrm{V}(X) = \sigma^2 + (X - \mu)^2.$$

생각해 보기 V는 기댓값으로 정의되었으니 $\mathrm{V}(X)$는 그냥 하나의 수가 아닌가?

그렇지 않다. V는 실변수의 평범한 함수(x에 대한 이차식(quadratic))이다. 기댓값은 x를 고정한 채로 취한 것이다. 이 이차식에 확률변수(random variable) X를 넣으면 새로운 확률변수가 된다. 따라서

$$\mathrm{E}(Y) = \sigma^2 + \mathrm{E}\big((X-\mu)^2\big) = \sigma^2 + \sigma^2 = 2\sigma^2,$$

이고, 이것이 $(*)$이다.

균등분포의 경우

X가 $[0,1]$에서 균등분포를 따르면 $\mu = \frac{1}{2}$이고 $\sigma^2 = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$이다. 따라서

$$\mathrm{V}(x) = \tfrac{1}{12} + \big(x - \tfrac{1}{2}\big)^2 = x^2 - x + \tfrac{1}{3}.$$

Y의 분포. 이제 $Y = \frac{1}{12} + (X-\frac{1}{2})^2$이다. X가 $[0,1]$ 전체를 움직이면 $|X-\frac{1}{2}|$는 $[0,\frac{1}{2}]$ 전체를 움직이므로, Y는 $[\frac{1}{12}, \frac{1}{12}+\frac{1}{4}] = [\frac{1}{12}, \frac{1}{3}]$의 값을 가진다.

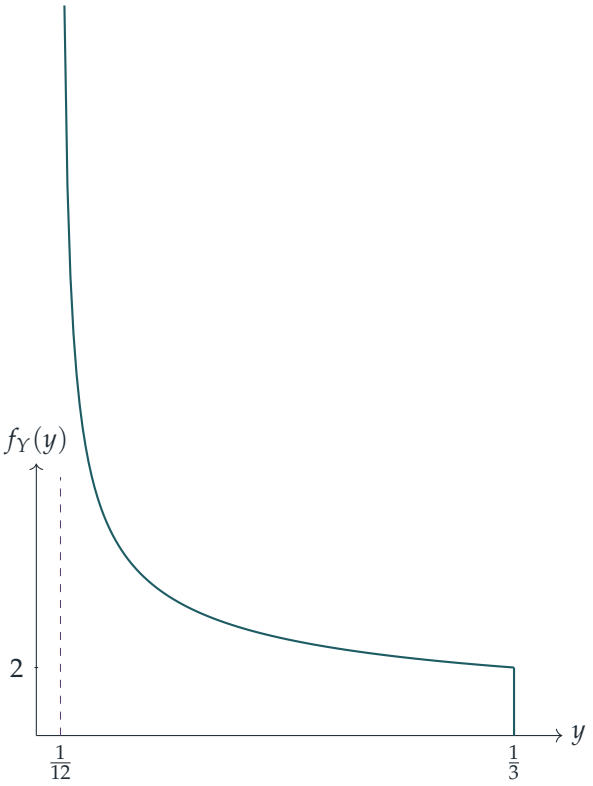
사상 $X \mapsto Y$는 이대일(두 점 $\frac{1}{2} \pm h$가 같은 Y를 준다)이므로 분포함수(distribution function)를 가지고 다룬다. $\frac{1}{12} \le y \le \frac{1}{3}$일 때

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y \le y) &= \mathrm{P}\big((X-\tfrac{1}{2})^2 \le y - \tfrac{1}{12}\big) = \mathrm{P}\big(\tfrac{1}{2} - s \le X \le \tfrac{1}{2} + s\big), \quad \text{여기서} s = \sqrt{y - \tfrac{1}{12}},\\ &= 2s = 2\sqrt{y - \tfrac{1}{12}},\end{aligned}$$

이다. $0 \le s \le \frac{1}{2}$이므로 이 구간은 $[0,1]$ 안에 놓이고 길이가 $2s$이기 때문이다. ($y = \frac{1}{3}$에서 이 값은 $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$로, 마땅히 그래야 하는 값이 나온다.) 미분하면

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{y - \frac{1}{12}}} \quad \text{단, } \tfrac{1}{12} < y \le \tfrac{1}{3}, \qquad f_Y(y) = 0 \text{ 그 외의 경우.}$$

이 확률밀도함수는 $y = \frac{1}{12}$ 근처에서 유계가 아니지만 여전히 적분가능(integrable)하다. $(X-\frac{1}{2})^2$이 $X = \frac{1}{2}$ 근처에서 평평하므로, Y는 최솟값 가까이에 있을 가능성이 가장 크다.



$(*)$ **확인하기.** 확률밀도함수를 이용하고 $t = y - \frac{1}{12}$로 치환하면(t는 0부터 $\frac{1}{4}$까지 움직인다)

$$\mathrm{E}(Y) = \int_{1/12}^{1/3} \frac{y}{\sqrt{y - \frac{1}{12}}}\,\mathrm{d}y = \int_0^{1/4} \left(t^{1/2} + \tfrac{1}{12}t^{-1/2}\right)\mathrm{d}t = \left[\tfrac{2}{3}t^{3/2} + \tfrac{1}{6}t^{1/2}\right]_0^{1/4}$$
$$= \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{12} = \tfrac{1}{6}.$$

$2\sigma^2 = 2\cdot\frac{1}{12} = \frac{1}{6}$이므로 이 결과는 $(*)$와 일치한다.

검산

- 확률밀도함수를 적분하면 1이다: $\int_0^{1/4} t^{-1/2}\,\mathrm{d}t = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$.
- $\mathrm{V}(x)$는 $x = \mu$에서 가장 작고 최솟값은 σ^2이다. 즉 평균은 제곱 거리의 기댓값을 최소로 만드는 점이다. 균등분포의 경우 $\mathrm{V}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{12}$로, Y의 치역의 맨 아래 값이다.
- 균등분포 값 400 000개로 컴퓨터 시뮬레이션을 하였더니 Y의 표본평균이 약 0.1667로 $\frac{1}{6}$과 일치하였다.

흔한 실수

- $\mathrm{V}(X)$를 상수 σ^2로 취급하여 $\mathrm{E}(Y) = \sigma^2$를 얻는 것.
- 일대일 변수변환(change of variable) 공식 $f_Y = f_X\,|\mathrm{d}x/\mathrm{d}y|$를 한쪽 가지에만 적용하여 올바른 확률밀도함수의 절반을 얻는 것. $X = \frac{1}{2} + s$와 $X = \frac{1}{2} - s$가 모두 기여한다.

STEP 너머

$\mathrm{V}(x) = \sigma^2 + (x-\mu)^2$는 가장 단순한 편향–분산 분해(bias–variance decomposition)이다. 어떤 양을 x로 추정한다면, 평균제곱오차(mean squared error)는 데이터의 퍼짐에 편향(bias)의 제곱을 더한 것으로 나뉜다. $\mathrm{E}(Y) = 2\sigma^2$라는 결과는 X의 서로 독립(independent)인 두 복사본 사이의 제곱 거리의 기댓값이 $2\sigma^2$라는 뜻이다. 통계학자들은 이 사실을 거듭 사용하는데, 예를 들어 표본분산(sample variance)이 왜 $n-1$로 나누는지 설명할 때 쓴다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)는 이 두 아이디어를 모두 다루며, 확률변수의 단조(monotonic)가 아닌 함수의 확률밀도함수를 구하는 방법도 다룬다.

Beyond STEP

STEP은 대부분의 학생이 학창 시절에 치르는 수학 시험 가운데 가장 어려운 시험이다. 또한 가장 훌륭한 시험 가운데 하나이기도 하다. 문제는 짧고 낯설며 깊이가 있고, 그중 가장 뛰어난 문제들은 대학 수학의 작은 조각이 모습을 감추고 있는 것이다.

이 책은 1987년 첫 시험에 앞서 나온 예시 시험지(specimen papers)부터 2025년 시험지까지 가운데 가장 흥미로운 STEP 문제들을 골라, 각 문제를 하나의 문으로 삼는다. 모든 문제는 뛰어난 학생이 풀어 가면서 던질 법한 질문들과 함께 꼼꼼하게 풀이하고, 그런 다음 책은 그 문을 지나 한 걸음 더 나아간다. 그 아이디어가 어디에서 왔는지, 대학에서는 무엇으로 발전하는지, 그리고 다음에는 무엇을 읽으면 좋은지를 살펴본다.

이 책은 STEP을 준비하면서 기출 문제 연습 이상의 것을 원하는 재능 있는 예비 수학자를 위해 쓰였다. 수학과 학부생처럼 생각하기 시작하고, 앞으로 무엇이 자신을 기다리고 있는지 알아보고 싶은 학생들을 위한 책이다.

- 순수수학(pure mathematics), 역학(mechanics), 확률(probability)과 통계(statistics)를 아우르는 13개의 장
- 이 36개의 STEP 기출 문제와 각 문제의 안내식 풀이
- 모든 문제 뒤에 숨은 대학 수학
- 답이 실린 후속 연습 문제와 더 읽을거리

2017년 풀이. 책 전체와 모든 장,
모든 풀이를 다음 주소에서 무료로 읽고, 내려받고, 공유할 수 있다.

beyondstep.keithmcnulty.org

본문은 퍼블릭 도메인(CC0 1.0)으로 공개한다. STEP 문제 © Cambridge University Press & Assessment.

