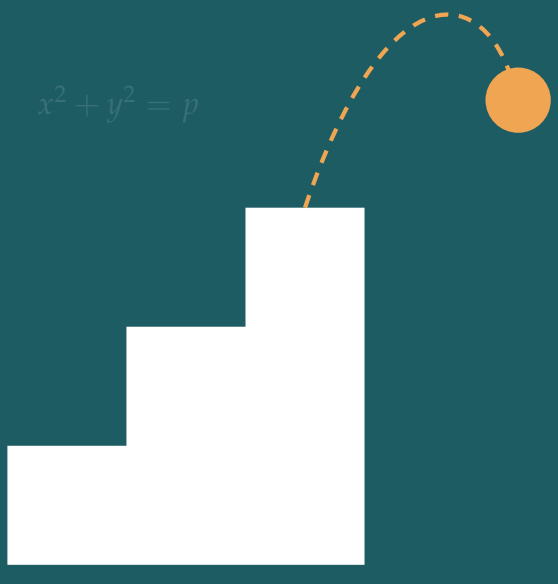
STEP 대비 · 대학 수학

Beyond STEP

STEP I, II 및 III

2016년 풀이



KEITH McNULTY

Beyond STEP

STEP 기출문제로 여는
대학 수학의 세계

STEP I, II 및 III

2016년 풀이

Keith McNulty

Beyond STEP: STEP 기출문제로 여는 대학 수학의 세계

2016년 풀이

2016년 STEP 문제지(STEP I, II 및 III)의 37개 문제 전체에 대한 풀이. 견본 문제지 이후 모든 STEP 문제의 풀이와 *Beyond STEP* 책 전체, 그리고 각 장을 `beyondstep.keithmcnulty.org`에서 무료로 읽고 내려받을 수 있다.

풀이를 읽기 전에 먼저 문제를 제대로 풀어 보자. 모든 답은 수치적으로 검증하였지만, 풀이가 이렇게 많으면 실수가 어느 정도 있을 수밖에 없다. 무언가 잘못된 것처럼 보이면 자신의 풀이를 믿고 꼼꼼히 확인해 보자.

영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.

2026년 11월 온라인 초판 발행.

이 PDF에서 지은이가 직접 만든 모든 것, 곧 본문, 풀이, 그림, 연습문제와 해답은 크리에이티브 커먼즈 CC0 1.0 Universal 라이선스에 따라 퍼블릭 도메인(public domain)으로 공개한다. 누구든 허락을 구하지 않고 어떤 목적으로든 복사하고, 고쳐 쓰고, 공유할 수 있다. 자세한 내용은 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`을 보라.

여기에서 다루는 STEP 문제의 저작권은 Cambridge University Press & Assessment에 있다. 문제는 이 책에 싣지 않았으며, 각 문제마다 공식 출처인 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스나 OCR의 기출 시험지로 가는 링크를 달았다.

오류 제보는 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty에 이슈로 남겨 주기 바란다.

차례

STEP I

Q1 다항식의 항등식과 인수분해 순수수학 . . . 3

Q4 곡선의 곡률 순수수학 . . . 7

Q5 서로 접하는 원 순수수학 . . . 11

Q6 벡터 기하 순수수학 . . . 15

Q7 4를 법으로 하는 인수분해 순수수학 . . . 19

Q8 생성함수 순수수학 . . . 23

Q9 최대 정지 마찰과 평형 역학 . . . 27

Q10 충돌과 반발계수 역학 . . . 31

Q11 포물체의 최대 도달 거리 역학 . . . 35

Q12 이항계수의 대칭성 확률과 통계 . . . 39

Q13 지수분포의 순서통계량 확률과 통계 . . . 43

STEP II

Q1 매개변수 곡선과 접선 순수수학 . . . 46

Q2 인수정리 순수수학 . . . 50

Q3 다항식의 근 순수수학 . . . 54

Q4 유리함수의 치역 순수수학 . . . 58

Q5 이항계수 항등식 순수수학 . . . 62

Q6 체비쇼프 다항식 방정식 순수수학 . . . 66

Q7 대칭성을 이용한 정적분 순수수학 . . . 70

Q8 적분을 이용한 합의 근사 순수수학 . . . 74

Q9 운동량과 에너지 손실 역학 . . . 78

Q10 마찰과 평형 역학 . . . 81

Q11 포물체의 충돌 역학 . . . 85

Q12 포함배제와 교란순열 확률과 통계 89
Q13 정규근사 확률과 통계 93

STEP III

Q1 점화 공식 순수수학 97
Q2 포물선의 법선 순수수학 101
Q3 적분과 다항식 순수수학 105
Q4 망원급수 순수수학 109
Q5 소수의 곱 순수수학 113
Q6 쌍곡선 함수 순수수학 117
Q7 1의 거듭제곱근 순수수학 121
Q8 함수방정식 순수수학 125
Q9 탄성 용수철과 단진동 역학 129
Q10 평면 위의 원운동 역학 133
Q11 일률과 저항 역학 138
Q12 체비쇼프 부등식 확률과 통계 142
Q13 합의 첨도 확률과 통계 145

풀이

STEP I 2016, 문제 1

순수수학 • 다항식의 항등식과 인수분해

> **STEP I 2016, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/16-s1-q1

핵심 아이디어

몫(quotient) $q_n(x)$는 사실 다항식(polynomial)이다. $2n+1$이 홀수이므로 $x+1$은 $x^{2n+1}+1$을 나누어떨어지게 하고, 그 몫은 부호가 번갈아 바뀌는 등비수열의 합이다. 따라서 소문항 (i)은 p_n을 전개하여 계수(coefficient)를 비교하는 문제이다. 소문항 (ii)의 핵심은 p_n의 꼴에서 나온다. $2n+1$과 x의 곱이 완전제곱수이면 p_n은 두 제곱의 차(difference of two squares)가 되므로 인수분해(factorisation)된다.

풀이

소문항 (i)

$x \neq -1$일 때, 첫째항이 1이고 공비가 $-x$인 등비급수(geometric series)의 합을 구하면

$$1 - x + x^2 - \cdots + x^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} (-x)^k = \frac{1-(-x)^{2n+1}}{1+x} = \frac{1+x^{2n+1}}{1+x},$$

이다. 여기서 $2n+1$이 홀수이므로 $(-x)^{2n+1} = -x^{2n+1}$임을 이용하였다. 따라서

$$q_n(x) = x^{2n} - x^{2n-1} + x^{2n-2} - \cdots - x + 1,$$

이고, $2n+1$개의 계수는 모두 ± 1이며 부호가 번갈아 바뀐다. 이제 각 경우에 p_n을 전개한다.

$n = 1$.

$$p_1(x) = (x+1)^2 - 3x = x^2 + 2x + 1 - 3x = x^2 - x + 1 = q_1(x).$$

$n = 2$.

$$\begin{aligned} p_2(x) &= (x+1)^4 - 5x(x^2+x+1) \\ &= (x^4+4x^3+6x^2+4x+1) - (5x^3+5x^2+5x) \\ &= x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = q_2(x). \end{aligned}$$

$n = 3$. 먼저 $(x^2+x+1)^2 = x^4+2x^3+3x^2+2x+1$이므로

$$\begin{aligned} p_3(x) &= (x+1)^6 - 7x(x^2+x+1)^2 \\ &= (x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x+1) - (7x^5+14x^4+21x^3+14x^2+7x) \\ &= x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = q_3(x). \end{aligned}$$

따라서 $n = 1, 2, 3$일 때 $x \neq -1$에 대하여 $p_n(x) \equiv q_n(x)$이고, 이것이 증명하려던 것이다.

$n = 4$. 항등식(identity)이 성립하지 않음을 보이려면 x의 값 하나로 충분하다. $x = 1$일 때

$$p_4(1) = 2^8 - 9 \cdot 1 \cdot 3^3 = 256 - 243 = 13, \qquad q_4(1) = \frac{1+1}{1+1} = 1,$$

이므로 $p_4 \not\equiv q_4$이다. (끝까지 전개하면 $p_4(x) = x^8 - x^7 + x^6 + 2x^5 + 7x^4 + 2x^3 + x^2 - x + 1$이고, x^5항부터 어긋난다.)

소문항 (ii)

생각해 보기 어떤 n과 어떤 x를 써야 하며, p_n은 도대체 어떻게 인수분해될 수 있을까?

$\dfrac{x^{2n+1}+1}{x+1}$을 주어진 수와 맞추어 보면 x와 n이 정해진다. 그다음에는 p_n의 꼴이 도움이 된다. $(x+1)^{2n} = ((x+1)^n)^2$은 언제나 제곱수이고, n이 홀수이면 $(x^2+x+1)^{n-1}$도 제곱수이다. 따라서 $(2n+1)x$까지 완전제곱수이면 $p_n(x)$는 두 제곱의 차가 된다.

(a) $n = 1$, $x = 300$으로 놓으면 $2n+1 = 3$이고 $3x = 900 = 30^2$이다. 소문항 (i)에 의하여

$$\begin{aligned} \frac{300^3+1}{301} = q_1(300) = p_1(300) &= 301^2 - 3 \cdot 300 \\ &= 301^2 - 30^2 \\ &= (301-30)(301+30) = 271 \times 331. \end{aligned}$$

두 인수 모두 1이 아니다. (직접 계산하면 $300^2 - 300 + 1 = 89\,701 = 271 \times 331$이다.)

(b) $7^{49} = (7^7)^7$이므로 $n = 3$ (따라서 $2n+1 = 7$), $x = 7^7$로 놓는다. 그러면 $(2n+1)x =$

$7 \cdot 7^7 = 7^8 = (7^4)^2$은 완전제곱수이고, $n-1=2$는 짝수이다. 소문항 (i)에 의하여

$$\begin{aligned}\frac{7^{49}+1}{7^7+1} = q_3(7^7) = p_3(7^7) &= (7^7+1)^6 - 7^8\,(7^{14}+7^7+1)^2 \\ &= [(7^7+1)^3]^2 - [7^4(7^{14}+7^7+1)]^2,\end{aligned}$$

이므로

$$\frac{7^{49}+1}{7^7+1} = \Big[(7^7+1)^3 - 7^4(7^{14}+7^7+1)\Big]\Big[(7^7+1)^3 + 7^4(7^{14}+7^7+1)\Big].$$

두 번째 인수는 분명히 1보다 크다. 첫 번째 인수의 경우, $(7^7+1)^3 > 7^{21}$이고

$$7^4(7^{14}+7^7+1) = 7^{18}+7^{11}+7^4 < 7^{19},$$

이므로 첫 번째 인수는 $7^{21}-7^{19} = 48\cdot 7^{19} > 1$보다 크다. 두 인수 모두 1이 아니므로 구하는 인수분해를 얻는다. (괄호를 전개하면 두 인수를 $7^{21}+3\cdot 7^{14}+3\cdot 7^7+1 \mp (7^{18}+7^{11}+7^4)$로 쓸 수도 있다.)

검산

- 소문항 (i)에 $x=1$을 대입하면 $p_1(1) = 4-3 = 1$, $p_2(1) = 16-15 = 1$, $p_3(1) = 64-63 = 1$로 모두 $q_n(1)=1$과 같지만, $p_4(1) = 13$이다.
- (a)에서 $271\times 331 = 89\,701 = 300^2 - 300 + 1$이다.
- (b)에서 정확한 정수값을 컴퓨터로 확인하면 두 인수의 곱이 $(7^{49}+1)/(7^7+1)$과 같음을 알 수 있다. 두 인수는 각각 약 5.57×10^{17}, 5.60×10^{17}이다.

흔한 실수

- 두 인수가 모두 1이 아닌 이유를 밝히지 않는 것. (b)에서는 크기를 간단히 어림하는 과정이 필요하다.
- (b)에서 $n=24$나 $x=7$을 쓰는 것. 지수 49는 7×7로 써야 하며, 그러면 $x=7^7$, $2n+1=7$이 된다.

STEP 너머

여기서 쓴 기법은 오리푀유 인수분해(Aurifeuillean factorisation)의 특수한 경우이다. 이는 $x^4+4y^4 = (x^2+2y^2-2xy)(x^2+2y^2+2xy)$와 같은 항등식으로, $a^k \pm 1$ 꼴의 수를 뻔한 대수적 인수분해로 예상되는 것보다 더 잘게 쪼개 준다. 이러한 항등식은 원분

다항식(cyclotomic polynomial)에서 나오며, 원분다항식은 대학 1학년 대수학과 정수론(number theory) 강의에 등장한다. 또한 이 항등식들은 $2^k \pm 1$ 꼴의 큰 수를 인수분해하려는 탐색에 쓰였다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 인수분해와 소수에 대해 더 읽어 보기에 좋은 책이다.

풀이

STEP I 2016, 문제 4

순수수학 • 곡선의 곡률

> **STEP I 2016, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/16-s1-q4

핵심 아이디어

κ의 식은 어려운 2계 미분방정식(second-order differential equation)처럼 보이지만, 소문항 (i)은 그것이 완전 도함수(exact derivative)임을 보여 주려고 있는 것이다. $p = \mathrm{f}'(x)$로 놓으면 곡률(curvature)은 $p/\sqrt{1+p^2}$의 x에 대한 도함수이므로, 곡률이 상수이면 한 번의 적분은 보자마자 할 수 있다. 그다음 두 번째 적분은 일상적인 계산이며, 답은 익숙한 모양으로 드러난다.

풀이

소문항 (i)

$z(1+z^2)^{-1/2}$에 곱의 미분법(product rule)을 쓰면

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z}{(1+z^2)^{1/2}}\right) &= (1+z^2)^{-1/2} - z\cdot z(1+z^2)^{-3/2} \\ &= \frac{(1+z^2)-z^2}{(1+z^2)^{3/2}} = \frac{1}{(1+z^2)^{3/2}}.\end{aligned}$$

소문항 (ii)

κ를 0이 아닌 상수라 하고 $p = \mathrm{f}'(x)$로 놓으면 $\mathrm{f}''(x) = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$이다. 소문항 (i)과 연쇄법칙(chain rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) = \frac{1}{(1+p^2)^{3/2}}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{f}''(x)}{\left(1+(\mathrm{f}'(x))^2\right)^{3/2}} = \kappa.$$

x에 대해 적분하면, 어떤 상수(이를 $-\kappa a$로 쓴다. $\kappa \neq 0$이므로 이렇게 쓸 수 있다)가 존재하여 다음이 성립한다.

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \kappa(x-a). \qquad (*)$$

생각해 보기 부호를 놓치지 않으면서 $(*)$를 p에 대해 어떻게 풀 수 있을까?

제곱할 때 무엇을 버리게 되는지 기억한다면 제곱해도 안전하다. $\sqrt{1+p^2} > 0$이므로 $(*)$는 p의 부호가 $\kappa(x-a)$의 부호와 같다는 것을 말해 주며, $|p| < \sqrt{1+p^2}$이므로 $|\kappa(x-a)| < 1$이라는 것도 말해 준다. 제곱하면 $p^2 = \kappa^2(x-a)^2(1+p^2)$이므로

$$p^2 = \frac{\kappa^2(x-a)^2}{1-\kappa^2(x-a)^2}, \qquad \text{그리고 위와 같이 부호를 고르면,} \qquad p = \frac{\kappa(x-a)}{\sqrt{1-\kappa^2(x-a)^2}}.$$

역으로, $1+p^2 = 1/\left(1-\kappa^2(x-a)^2\right)$이므로 이 p는 실제로 $(*)$를 만족한다.

이제 다시 적분한다. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{1-\kappa^2(x-a)^2} = \dfrac{-\kappa^2(x-a)}{\sqrt{1-\kappa^2(x-a)^2}}$이므로, 어떤 상수 b에 대해 다음을 얻는다.

$$y = b - \frac{1}{\kappa}\sqrt{1-\kappa^2(x-a)^2}, \qquad |x-a| < \frac{1}{|\kappa|}.$$

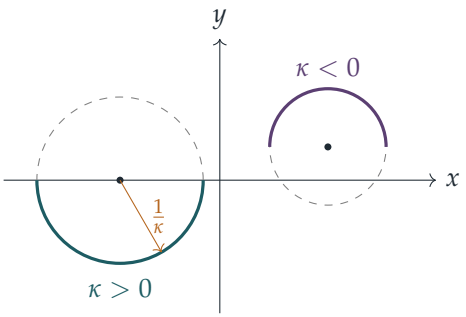
식을 정리하면 $\kappa(y-b) = -\sqrt{1-\kappa^2(x-a)^2}$이고, 양변을 제곱하면

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = \frac{1}{\kappa^2}.$$

따라서 0이 아닌 일정한 부호 있는 곡률(signed curvature) κ를 갖는 곡선은 모두 반지름이 $1/|\kappa|$이고 중심이 (a,b)인 원의 일부이며, 그러한 호는 모두 실제로 나타난다. 과정을 거꾸로 따라가면 위의 각 함수는 부호 있는 곡률이 정확히 κ이기 때문이다. 더 정확히 말하면 $\kappa(y-b) \leq 0$이므로 다음과 같다.

- $\kappa > 0$이면 곡선은 아래쪽 반원 $y = b - \sqrt{\kappa^{-2} - (x-a)^2}$이며, 중심보다 아래에 놓이고 위쪽으로 휘어 있다($\mathrm{f}'' > 0$).
- $\kappa < 0$이면 곡선은 위쪽 반원 $y = b + \sqrt{\kappa^{-2} - (x-a)^2}$이며, 중심보다 위에 놓이고 아래쪽으로 휘어 있다($\mathrm{f}'' < 0$).

끝점 $x = a \pm 1/|\kappa|$는 제외된다. 그곳에서는 기울기가 무한대이기 때문이다. 곡선 $y = \mathrm{f}(x)$는 그래프일 수밖에 없으므로 열린 반원(또는 그 일부)보다 더 클 수는 없다.



기하학적 의미

이 곡선들에 대해 $|\kappa|$는 원의 반지름의 역수이므로, $|\kappa|$가 클수록 더 작고 더 급하게 휘는 원이 된다. κ의 부호는 곡선이 어느 쪽으로 휘는지를 나타낸다. 원의 중심이 곡선보다 위에 있으면(곡선이 아래로 볼록(concave up)) $\kappa > 0$이고, 중심이 곡선보다 아래에 있으면 $\kappa < 0$이다.

검산

- $\kappa = \frac{1}{2}, a = b = 0$으로 놓자. 곡선은 $y = -\sqrt{4 - x^2}$, 즉 반지름이 2인 원의 아래쪽 반이다. $x = 1$에서 $y = -\sqrt{3}, y' = x/\sqrt{4 - x^2} = 1/\sqrt{3}, y'' = 4/(4 - x^2)^{3/2} = 4/3^{3/2}$이므로 $1 + y'^2 = \frac{4}{3}$이고 $\kappa = \dfrac{4/3^{3/2}}{(4/3)^{3/2}} = \frac{1}{2}$로, 예상한 대로이다.
- 직선은 $f'' = 0$이므로 $\kappa = 0$이다. 이는 반지름 $1/|\kappa| \to \infty$일 때 원의 극한이며, 문제에서 $\kappa = 0$을 제외하는 이유이기도 하다.
- 임의의 초깃값에서 시작하여 $f'' = \kappa(1 + f'^2)^{3/2}$를 컴퓨터로 단계별로 풀어 보았더니, 점들은 소수점 아래 여섯째 자리까지 예측한 원 위에 머물렀다.

흔한 실수

- 첫 단계에서 적분상수(constant of integration)를 빠뜨리는 것. 그러면 중심을 수평 방향으로 옮길 자유를 잃게 된다.
- p에 대해 잘못된 제곱근을 택하는 것. 그러면 중심의 반대쪽에 있는 반원이 나오고 κ의 부호도 틀리게 된다.
- "κ는 반지름이다"라고만 말하는 것. 그것은 반지름의 역수이며, 휘는 방향을 나타내는 부호가 붙어 있다.

STEP 너머

곡률은 곡선의 미분기하학(differential geometry)의 출발점이다. 호의 길이(arc length) s로 매개화된 곡선에 대해 $\kappa = \mathrm{d}\psi/\mathrm{d}s$이며, 여기서 ψ는 접선이 x축과 이루는 각이다. 이 문제에서는 $p/\sqrt{1+p^2} = \sin\psi$이므로, $(*)$는 사실 곡선을 따라 ψ가 일정한 비율로 변한다는 명제이다. 3차원에서는 곡률에 비틀림률(torsion)이 더해지며, 프레네–세레(Frenet–Serret) 공식은 이 두 함수가 강체 운동(rigid motion)을 제외하고 곡선을 결정한다는 것을 보여 준다. Pressley의 *Elementary Differential Geometry*(초등 미분기하학)는 대학 1학년 수준의 친절한 입문서이다.

풀이

STEP I 2016, 문제 5

순수수학 • 서로 접하는 원

STEP I 2016, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/16-s1-q5

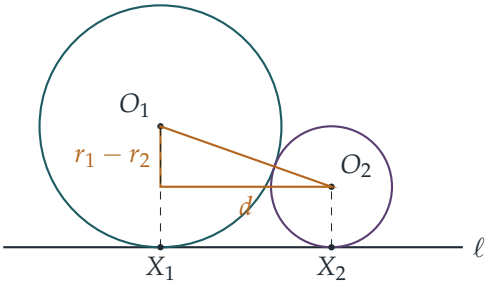
핵심 아이디어

모든 것은 한 가지 사실에 달려 있다. 두 원이 서로 접하고 둘 다 같은 직선에 접하면, 두 원과 직선의 접점(point of contact) 사이의 거리는 $2\sqrt{r_1 r_2}$이다. 이것은 직각삼각형 하나에서 바로 나온다. 그다음 치환(substitution) $x = 1/\sqrt{a}, y = 1/\sqrt{b}, z = 1/\sqrt{c}$를 하면 $(**)$는 대칭(symmetric) 사차식(quartic)이 되고, 이 사차식은 네 개의 일차 인수(linear factor)로 인수분해(factorise)되는데, 그 인수 중 하나가 바로 $(*)$이다.

풀이

소문항 (i)

한 직선 위에서 서로 접하는 두 원. 반지름이 r_1과 r_2인 두 원이 서로 외접(touching externally)하고, 둘 다 직선 ℓ의 같은 쪽에 있으면서 각각 점 X_1과 X_2에서 그 직선에 접한다고 하자. X_1과 X_2로 그은 반지름은 ℓ에 수직이므로, 중심 O_1, O_2는 ℓ로부터 각각 높이 r_1과 r_2에 있다. 두 원이 외접하므로 $O_1O_2 = r_1 + r_2$이다.



O_2에서 반지름 O_1X_1에 수선(perpendicular)을 내린다(그림은 $r_1 \geq r_2$인 경우이다). 그러면 빗변(hypotenuse)이 $r_1 + r_2$, 세로 변이 $|r_1 - r_2|$, 가로 변이 $d = X_1X_2$인 직각삼각형이 생긴다. 피타고라스(Pythagoras)의 정리에 의해

$$d^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 = 4r_1r_2, \qquad \text{따라서} \qquad X_1X_2 = 2\sqrt{r_1r_2}.$$

세 번 적용하기. 그림에서 세 원은 두 개씩 서로 접하고, 셋 모두 직선에 점 P, Q, R에서 접하며, Q는 P와 R 사이에 있다. 따라서

$$PQ = 2\sqrt{ab}, \qquad QR = 2\sqrt{bc}, \qquad PR = 2\sqrt{ac},$$

이고, $PQ + QR = PR$로부터 $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} = \sqrt{ac}$를 얻는다. 양변을 $\sqrt{abc} > 0$으로 나누면

$$\frac{1}{\sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{b}},$$

이고, 이것이 $(*)$이다.

$(**)$ **유도하기.** $x = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{b}}$, $z = \dfrac{1}{\sqrt{c}}$로 놓으면 $\dfrac{1}{a} = x^2$ 등이 성립하고, $(*)$는 $y = x + z$라는 뜻이 된다. 그러면 $(**)$는 $2(x^4 + y^4 + z^4) = (x^2 + y^2 + z^2)^2$이 된다. 우변을 전개하고 정리하면, 이는 다음과 동치이다.

$$F := x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 = 0.$$

? **생각해 보기** 이 사차식을 어떻게 인수분해할 수 있을까?

제곱의 차(difference of two squares) 꼴로 묶는다. $(x^2 + y^2 - z^2)^2 = x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2$이므로

$$\begin{aligned} F &= (x^2 + y^2 - z^2)^2 - (2xy)^2 \\ &= \left(x^2 - 2xy + y^2 - z^2\right)\left(x^2 + 2xy + y^2 - z^2\right) \\ &= \left((x-y)^2 - z^2\right)\left((x+y)^2 - z^2\right) \\ &= (x - y - z)(x - y + z)(x + y - z)(x + y + z). \end{aligned}$$

$(*)$에 의해 $x - y + z = 0$이므로 $F = 0$이고, 따라서 $(**)$가 성립한다.

소문항 (ii)

이제 a, b, c는 $b < c < a$를 만족하고 $(**)$를 만족하는 임의의 양수이다. x, y, z를 앞에서와 같이 정의하면 이들은 양수이고, $t \mapsto 1/\sqrt{t}$가 $t > 0$에서 감소함수(decreasing function)이므로 조건 $b < c < a$로부터

$$y > z > x > 0.$$

소문항 (i)에서 보였듯이 $(**)$는

$$(x-y-z)(x-y+z)(x+y-z)(x+y+z)=0,$$

과 동치이므로, 네 인수 중 하나는 0이다. 그런데 그중 세 개는 0이 될 수 없다.

- 세 수가 모두 양수이므로 $x+y+z>0$이다.
- $y>z$이고 $x>0$이므로 $x+y-z>0$이다.
- $x<y$이고 $z>0$이므로 $x-y-z<0$이다.

따라서 $x-y+z=0$, 즉 $y=x+z$이고, 이는

$$\frac{1}{\sqrt{b}}=\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{c}},$$

곧 $(*)$이다. (실제로 필요했던 것은 b가 셋 중 가장 작다는 사실뿐이다.)

검산

- $a=4$, $c=1$로 놓자. 그러면 $(*)$로부터 $1/\sqrt{b}=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$이므로 $b=\frac{4}{9}$이다. 이때 $2\left(\frac{1}{16}+\frac{81}{16}+1\right)=\frac{49}{4}$이고 $\left(\frac{1}{4}+\frac{9}{4}+1\right)^2=\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{49}{4}$이므로, $(**)$가 요구하는 대로 성립한다.
- (ii)에서 왜 크기 순서가 필요할까? $a=4$, $c=1$일 때 관계식 $(**)$는 $1/b$에 대한 이차방정식이고, 두 근 $b=\frac{4}{9}$와 $b=4$를 가진다($1/\sqrt{b}=|x-z|=\frac{1}{2}$에서 나온다). 두 번째 근에서는 b가 가장 작은 것이 아니라 가장 크며, 이 경우 $(**)$는 만족하지만 $(*)$는 만족하지 않는다. 이때 $1/\sqrt{c}=1/\sqrt{a}+1/\sqrt{b}$를 통해 묶이는 것은 a와 b이다. 문자의 역할을 바꾸는 것은 어느 원이 가운데에 놓이는지를 바꾸는 것에 해당한다.
- 한 직선 위에서 서로 접하는 세 원의 무작위 배치 수천 개에 대해 컴퓨터로 확인한 결과, $(*)$와 $(**)$가 모두 성립함을 확인하였다.

흔한 실수

- 두 중심 사이의 거리 r_1+r_2를 두 접점 사이의 거리로 착각하는 것. 두 중심은 높이가 서로 다르다.
- 소문항 (ii)에서 나머지 세 인수를 배제하지 않고 인수분해로부터 바로 $(*)$를 결론짓는 것. 바로 이 부분에서 $b<c<a$가 쓰인다.

STEP 너머

관계식 $(**)$는 데카르트 원 정리(Descartes' circle theorem)의 퇴화된 경우(degenerate case)이다. 서로 접하는 네 원의 곡률(curvature)을 $k_i = 1/r_i$라 하면 $2\sum k_i^2 = \left(\sum k_i\right)^2$이 성립하고, 직선은 곡률이 0인 원으로 간주한다. 틈마다 새로운 원을 계속 끼워 넣으면 아폴로니우스 개스킷(Apollonian gasket)이 만들어지는데, 곡률이 정수인 경우 놀라운 정수론(number theory)으로 이어진다. F의 인수분해는 헤론의 공식(Heron's formula)의 배후에 있는 인수분해이기도 하다. x, y, z를 삼각형의 세 변이라 하면 $16\Delta^2 = -F$이다. 이 결과들을 명쾌하게 보여 주는 원의 기하와 반전(inversion)에 대해 더 알고 싶다면 Needham, *Visual Complex Analysis*를 보라.

풀이

STEP I 2016, 문제 6

순수수학 • 벡터 기하

STEP I 2016, 6번 문제

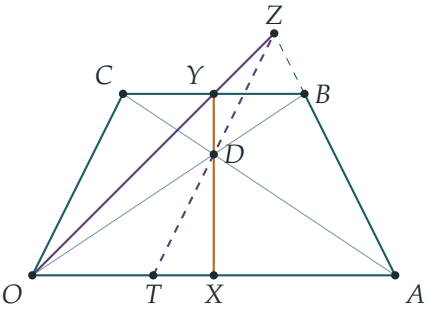
더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/16-s1-q6

핵심 아이디어

그림의 모든 점은 두 직선의 교점이므로, 각 직선을 벡터 형태로 나타내고 서로 같다고 놓는다. $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$는 평행(parallel)하지 않으므로 임의의 벡터는 $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ 꼴로 오직 한 가지 방법으로만 나타낼 수 있다. 따라서 같은 점에 대한 두 표현을 같다고 놓으면 $\mathbf{a}$의 계수와 $\mathbf{b}$의 계수를 따로따로 비교할 수 있다. 처음부터 끝까지 기저(basis) $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$로 계산하면 모든 단계가 짧은 일차방정식 두 개로 정리된다.

풀이



c와 x의 꼴

CB가 OA와 평행하므로 벡터 $\overrightarrow{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$는 $\mathbf{a}$의 스칼라배(scalar multiple)이다. 이를 $\mathbf{c} - \mathbf{b} = k\mathbf{a}$라 하면 $\mathbf{c} = k\mathbf{a} + \mathbf{b}$이다. 사각형(quadrilateral)을 $O \to A \to B \to C$ 순서로 돌 때, 변 BC는 OA와 반대 방향이어야 하고(같은 방향이라면 변 AB와 CO가 서로 교차하여

$OABC$는 제대로 된 사각형이 아니다), 또 $C \neq B$이다. 따라서

$$k < 0.$$

음수라면 어떤 값이든 가능하며, $k = -1$이면 평행사변형(parallelogram)이다.

X는 OA 위에 있으므로 $\mathbf{x}$는 $\mathbf{a}$의 실수배이다. 이를 $\mathbf{x} = m\mathbf{a}$라 하면, X가 O와 A 사이에 (양 끝점을 제외하고) 있다는 것은

$$0 < m < 1.$$

을 뜻한다. 또한 O, A, B가 한 직선 위에 있지 않으므로(not collinear) $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$는 평행하지 않다.

점 Z

D 구하기. OB 위의 점은 $\lambda\mathbf{b}$이고, AC 위의 점은

$$\mathbf{a} + \mu(\mathbf{c} - \mathbf{a}) = (1 - \mu + \mu k)\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}.$$

이다. 계수를 비교하면 $\lambda = \mu$이고 $1 - \mu(1 - k) = 0$이다. $k < 0$이므로 $1 - k > 0$이고, 따라서 $\mu = \frac{1}{1-k}$이며

$$\mathbf{d} = \frac{\mathbf{b}}{1 - k}.$$

Y 구하기. BC 위의 점은 $\mathbf{b} + t\mathbf{a}$이다. XD 위의 점은

$$m\mathbf{a} + s(\mathbf{d} - m\mathbf{a}) = m(1 - s)\mathbf{a} + \frac{s}{1 - k}\,\mathbf{b}.$$

이다. $\mathbf{b}$의 계수를 비교하면 $s = 1 - k$이고, 이때 $\mathbf{a}$의 계수는 $m(1 - (1 - k)) = mk$이다. 따라서

$$\mathbf{y} = \mathbf{b} + mk\,\mathbf{a}.$$

Z 구하기. OY 위의 점은 $\rho(\mathbf{b} + mk\mathbf{a})$이고, AB 위의 점은 $\mathbf{a} + \sigma(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (1 - \sigma)\mathbf{a} + \sigma\mathbf{b}$이다. 계수를 비교하면 $\rho = \sigma$이고 $\rho mk = 1 - \sigma$이므로 $\rho(mk + 1) = 1$이다. $mk + 1 \neq 0$이라면

$$\mathbf{z} = \frac{\mathbf{b} + mk\,\mathbf{a}}{mk + 1},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. ($k < -1$일 때 일어날 수 있는 경우로 $mk = -1$이면 $\mathbf{y} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$이므로 OY가 AB와 평행하여 Z가 존재하지 않는다.)

생각해 보기 Z는 변 AB 자체 위에 있는가?

아니다. $-1 < mk < 0$이므로 $\sigma = \frac{1}{mk+1} > 1$이고, 따라서 그림에서처럼 Z는 AB를 B 너머로 연장한 직선 위에 있다. 문제는 직선에 관한 것이므로 이는 상관없다.

점 T와 두 관계식

DZ 위의 점은 $\mathbf{d}+\tau(\mathbf{z}-\mathbf{d})$이다. $(1-k)-(mk+1)=-k(1+m)$을 이용하면 $\mathbf{b}$의 계수는

$$\frac{1}{1-k}+\tau\left(\frac{1}{mk+1}-\frac{1}{1-k}\right)=\frac{1}{1-k}-\tau\,\frac{k(1+m)}{(mk+1)(1-k)},$$

이다. T가 OA 위에 있으려면 이 값이 0이어야 하므로 $\tau=\dfrac{mk+1}{k(1+m)}$이다($k\neq 0$임을 기억하자). 이때 $\mathbf{a}$의 계수는

$$\tau\cdot\frac{mk}{mk+1}=\frac{mk+1}{k(1+m)}\cdot\frac{mk}{mk+1}=\frac{m}{1+m}.$$

이다. 따라서

$$\mathbf{t}=\frac{m}{1+m}\,\mathbf{a}.$$

놀랍게도 k가 사라졌다. 즉 T는 오직 X의 위치에만 의존한다.

이제 $a=|\mathbf{a}|=OA$라 하자. $0<\frac{m}{1+m}<1$이므로 T는 O와 A 사이에 있고, 따라서

$$OT=\frac{ma}{1+m},\qquad TA=a-\frac{ma}{1+m}=\frac{a}{1+m},\qquad OX=ma.$$

그러므로

$$OT\times OA=\frac{ma^2}{1+m}=ma\times\frac{a}{1+m}=OX\times TA,$$

이고

$$\frac{1}{OX}+\frac{1}{OA}=\frac{1}{ma}+\frac{1}{a}=\frac{1+m}{ma}=\frac{1}{OT},$$

이다. 이 둘이 바로 증명해야 할 결과이다.

검산

그림의 사다리꼴(trapezium)로 확인해 보자. $\mathbf{a}=(4,0)$, $\mathbf{b}=(3,2)$, $k=-\frac{1}{2}$, $m=\frac{1}{2}$이다. 그러면 $D=(2,\frac{4}{3})$, $Y=(2,2)$, $Z=(\frac{8}{3},\frac{8}{3})$, $T=(\frac{4}{3},0)$이고, T, D, Z가 한 직선 위에 있음과 $\frac{1}{OT}=\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{OX}+\frac{1}{OA}$임을 확인할 수 있다. 무작위로 만든 사다리꼴 20,000개에 대해 컴퓨터로 검산한 결과, 위의 모든 식이 10^{-10} 이내의 오차로 일치했다. 극한의 경우인 $m\to 1$ ($X\to A$)에서는 $OT=\frac{1}{2}OA$가 되어 $\frac{1}{OT}=\frac{2}{OA}$와 들어맞는다.

흔한 실수

- $k>0$으로 잡는 것: $\mathbf{c}=\mathbf{b}+k\mathbf{a}$에서 $k>0$이면 그 "사각형"은 스스로 교차한다.
- 계수를 비교하면서 그것이 왜 허용되는지 말하지 않는 것: 계수 비교는 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$가 평행하지 않다는 사실에 기대고 있다.

- 서로 다른 두 직선에 같은 매개변수(parameter) 문자를 쓰는 것: 이렇게 하면 있지도 않은 일치를 억지로 만들어 내게 된다.

STEP 너머

T가 k에(그리고 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$ 사이의 각에도) 의존하지 않는다는 사실은, 이것이 실은 아핀 기하(affine geometry), 나아가 사영 기하(projective geometry)의 정리임을 보여 준다. 즉 점과 직선의 결합 관계와 한 직선 위에서의 비만이 중요하다. 관계식 $\frac{1}{OT} = \frac{1}{OX} + \frac{1}{OA}$는 복비(cross-ratio)와 조화점렬(harmonic range)로 우아하게 다룰 수 있는 종류의 명제이며, 같은 작도를 반복하면 점들이 $\frac{m}{1+2m}\mathbf{a}$, $\frac{m}{1+3m}\mathbf{a}$, $\cdots$에 놓인다. 더 알고 싶다면 콕서터(Coxeter)와 Greitzer의 *Geometry Revisited*(기하학 다시 보기), 또는 콕서터의 *Projective Geometry*(사영 기하학)를 보라.

풀이

STEP I 2016, 문제 7

순수수학 • 4를 법으로 하는 인수분해

> **STEP I 2016, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/16-s1-q7

이 문제는 *Beyond STEP*의 1.7 절 **인수분해가 무너질 때**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch01/factorisation-fails.html

핵심 아이디어

모든 것은 법(modulo) 4로 계산하는 데서 나온다. 홀수는 $\equiv 1$이거나 $\equiv 3 \equiv -1 \pmod 4$이므로, 홀수들의 곱은 T에서 온 인수가 짝수 개인지 홀수 개인지에 따라 S 또는 T에 속한다. 이 홀짝성(parity) 규칙 하나로 (ii), (iii), (iv)(a)가 해결된다. (iv)(b)에서는 S-소수가 소수일 필요가 없다는 것을 알아차려야 하며, 그 결과 소인수분해의 유일성(unique factorisation)이 깨진다.

풀이

소문항 (i)

모든 양의 홀수는 4로 나눈 나머지가 1 또는 3이고, 짝수는 그렇지 않다. 따라서 $S \cup T$는 모든 양의 홀수의 집합이다. 어떤 정수도 서로 다른 두 나머지를 가질 수 없으므로 $S \cap T$는 공집합(*empty set*)이다.

소문항 (ii)

$a, b \geq 0$인 정수에 대하여 S의 원소 $4a+1$과 $4b+1$을 잡자. 그러면

$$(4a+1)(4b+1) = 16ab + 4a + 4b + 1 = 4(4ab + a + b) + 1,$$

이고, 이는 나머지가 1인 양의 정수이므로 S에 속한다.

T에 대해서는 답이 **아니다**이다. 예를 들어 $3 \in T$이지만 $3 \times 3 = 9 = 4 \times 2 + 1 \in S$이고, $S \cap T$는 공집합이다. 사실 이는 항상 일어난다.

$$(4a+3)(4b+3) = 16ab + 12a + 12b + 9 = 4(4ab + 3a + 3b + 2) + 1 \in S.$$

섞인 곱도 필요하다.

$$(4a+1)(4b+3) = 16ab + 12a + 4b + 3 = 4(4ab + 3a + b) + 3 \in T.$$

요컨대 T의 수를 $\equiv -1 \pmod 4$로 쓰면, 홀수들의 곱은 $\equiv (-1)^k \pmod 4$이다. 여기서 k는 T에서 온 인수의 개수이다. 따라서 k가 짝수이면 곱은 S에, k가 홀수이면 T에 속한다.

소문항 (iii)

$n \in T$를 합성수(composite)라 하고, $n = p_1 p_2 \cdots p_r$를 소수(prime)들의 곱으로 나타내자. n이 홀수이므로 모든 p_i는 홀수이고, 따라서 (i)에 의해 각 p_i는 S 또는 T에 속한다.

귀류법(proof by contradiction)으로, 모든 p_i가 S에 속한다고 가정하자. (ii)를 반복해서 적용하면 $p_1 p_2 \in S$, 그다음 $(p_1 p_2)p_3 \in S$, 이런 식으로 계속하여 $n \in S$이다. 그런데 $n \in T$이고 $S \cap T = \varnothing$이므로 모순이다. 따라서 n의 소인수 중 적어도 하나는 T에 속한다. (홀짝성으로 말하면, $n \equiv -1$이 되려면 $\equiv -1$인 인수가 홀수 개, 따라서 적어도 하나 있어야 한다.)

소문항 (iv)(a)

먼저 $1 \notin T$이므로 T의 모든 원소는 3 이상임에 주목하자.

모든 $n \in T$는 T-소수이거나 T-소수들의 곱이다. n에 대한 강한 귀납법(strong induction)을 쓴다. n이 T-소수이면 끝이다. 그렇지 않으면 $k \geq 2$이고 각 $t_i \in T$인 $n = t_1 t_2 \cdots t_k$로 쓸 수 있다. 각 $t_i \geq 3$이므로 각 $t_i \leq n/3 < n$이고, 귀납 가정(induction hypothesis)에 의해 각 t_i는 T-소수이거나 T-소수들의 곱이다. 이것들을 $n = t_1 \cdots t_k$에 대입하면 n이 T-소수들의 곱으로 표현된다.

> **생각해 보기** T-소수들의 곱을 얻었는데, 왜 그 개수가 반드시 **홀수**여야 할까?

모든 T-소수는 T에 속하므로 $\equiv -1 \pmod 4$이다. 따라서 (ii)의 끝에서 얻은 규칙에 의해 이런 수 m개의 곱은 $\equiv (-1)^m \pmod 4$이다. 만약 m이 짝수라면 곱은 $\equiv 1$이 되어 T가 아니라 S에 속할 것이다. 곱이 $n \in T$이므로 m은 홀수이다. 따라서 모든 $n \in T$는 T-소수이거나 홀수 개의 T-소수의 곱이며, 이것이 보이려던 것이다.

T-소수가 소수일 필요는 없다는 점에 주의하자. $15 = 3 \times 5$는 T-소수인데, $5 \notin T$이고 1보다 큰 수들로의 유일한 인수분해가 3×5이기 때문이다.

소문항 (iv)(b)

15에 대한 앞의 관찰과 같은 아이디어가 S에서도 통한다. T에 속하는 두 소수의 곱은 S에 속하지만 S 안에서는 인수분해되지 않는다. 다음을 보자.

$$9 = 3 \times 3, \qquad 21 = 3 \times 7, \qquad 49 = 7 \times 7.$$

각각은 S에 속한다. 또 각각은 S-소수이다. 1과 자기 자신 이외의 약수는 3 또는 7뿐인데, 이들은 S가 아니라 T에 속하기 때문이다. (21의 약수는 $1, 3, 7, 21$이다.) 이제

$$441 = 9 \times 49 = 21 \times 21,$$

이고 $441 = 4 \times 110 + 1 \in S$이다. 이 둘은 441을 S-소수들로 인수분해하는 진짜로 서로 다른 두 방법이다. 첫 번째는 9와 49를 쓰고, 두 번째는 21을 두 번 쓴다. 따라서 441이 구하는 예이다.

? **생각해 보기** 이 예를 어떻게 찾을 수 있었을까?

보통의 정수에서 $441 = 3^2 \times 7^2$이고, 소수 $3, 7$은 T에 속한다. S 안에서는 3이나 7 하나만 따로 떼어 낼 수 없으므로, T에 속하는 소수들을 둘씩 짝지어야 한다. 3이 두 개, 7이 두 개 있으면 짝짓는 방법은 $(3 \cdot 3)(7 \cdot 7)$ 또는 $(3 \cdot 7)(3 \cdot 7)$의 두 가지이다. 서로 다른 소수 $p, q \in T$에 대한 임의의 p^2q^2도 같은 방식으로 통하며, 예를 들어 $9 \times 121 = 33 \times 33$이다.

검산

- 작은 경우를 확인해 보자. $5 \times 9 = 45 \in S, 3 \times 7 = 21 \in S, 5 \times 7 = 35 \in T$.
- (iii)에 대하여: $15 = 3 \times 5$와 $35 = 5 \times 7$은 T에 속하고, 각각 T에 속하는 소인수$(3, 7)$를 가진다.
- 컴퓨터로 확인하면, 3000 미만의 모든 $n \in T$에 대하여 T-소수들로의 모든 인수분해는 인수의 개수가 홀수이다. T-소수는 $3, 7, 11, 15, 19, 23, 31, 35, \ldots$로 시작한다. $27 = 3 \times 3 \times 3$은 T-소수가 아님에 주의하자. 인수가 세 개, 즉 홀수 개이다.

흔한 실수

- 한 가지 경우도 확인해 보지 않고 T의 두 원소의 곱이 T에 속한다고 주장하는 것. $3 \times 3 = 9$ 하나로 곧바로 결론이 난다.
- X-소수가 소수일 필요가 없다는 것을 잊는 것. 이것이 (iv)(b)의 요점 전부이다. 9와 21은 S-소수이다.

- (iv)(a)에서 인수의 개수가 홀수라는 것만 증명하고, T-소수들로의 인수분해가 애초에 존재한다는 것을 보이는 일을 잊는 것.

STEP 너머

집합 S는 곱셈에 대하여 닫혀 있고(closed under multiplication), 그 "소수"들은 유일하게 인수분해되지 않는다. 이것은 $6 = 2 \times 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$가 성립하는 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ 같은 환(ring)에서 무엇이 잘못되는지를 보여 주는 고전적인 장난감 모형(힐베르트(Hilbert) 수(Hilbert numbers)라고도 부른다)이다. 이런 환에서 소인수분해의 유일성을 되살리려는 시도가 아이디얼(ideal)과 대수적 정수론(algebraic number theory)으로 이어졌다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 $\mathbb{Z}$에서 소인수분해의 유일성이 왜 증명이 필요한 정리(theorem)인지 설명하고, Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 그것이 성립하지 않는 환들을 다룬다.

풀이

STEP I 2016, 문제 8

순수수학 • 생성함수

> **STEP I 2016, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/16-s1-q8

이 문제는 *Beyond STEP*의 9.4 절 **함수로서의 수열**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch09/generating-functions.html

핵심 아이디어

생성함수(generating function)는 수열 전체를 하나의 함수로 묶어 주며, 수열에 대한 연산은 그 함수에 대한 대수 계산이 된다. 소문항 (i)에서는 $1-x$의 음의 거듭제곱에 대한 이항급수(binomial series)가 원하는 계수를 만들어 내고, 이미 알고 있는 수열들로부터 n^2을 구성한다. 소문항 (ii)에서는 x^n을 곱하고 더하여 점화식(recurrence relation)을 f에 대한 방정식으로 바꾼다. 수열의 첨자를 한 칸 미는 것은 그 생성함수에 x를 곱하는 것과 같다.

풀이

소문항 (i)

지수가 -2인 이항급수에 의해

$$(1-x)^{-2} = \sum_{n\geq 0} \binom{-2}{n} (-x)^n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \sum_{n\geq 0} (n+1)x^n,$$

이다. 왜냐하면 $\binom{-2}{n}(-1)^n = \frac{2\cdot 3\cdots(n+1)}{n!} = n+1$이기 때문이다. x를 곱하면

$$x(1-x)^{-2} = \sum_{n\geq 0} (n+1)x^{n+1} = \sum_{n\geq 0} nx^n,$$

이 되는데, 합의 첨자를 다시 매기면 $n=0$인 항을 아무 문제 없이 포함할 수 있다(그 항은 0이다). 따라서 요구한 대로 $u_n = n$의 생성함수는 $x(1-x)^{-2}$이다.

마찬가지로 지수가 -3일 때

$$\binom{-3}{n}(-1)^n = \frac{3\cdot 4\cdots(n+2)}{n!} = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

이므로

$$(1-x)^{-3} = \sum_{n\geq 0}\frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n.$$

이다. x를 곱하고 앞에서처럼 첨자를 다시 매기면

$$x(1-x)^{-3} = \sum_{n\geq 0}\frac{n(n+1)}{2}x^n,$$

이므로 수열은 $u_n = \frac{1}{2}n(n+1)$, 즉 $0,1,3,6,10,\ldots$이며, 이는 삼각수(triangular numbers)이다.

? **생각해 보기** 이제 알고 있는 두 수열로부터 어떻게 n^2을 얻을 수 있을까?

생성함수는 선형(linear)이다. 즉 u_n과 v_n의 생성함수가 각각 f와 g이면, $\alpha u_n + \beta v_n$의 생성함수는 $\alpha \mathrm{f} + \beta \mathrm{g}$이다.

$$n^2 = 2\cdot\tfrac{1}{2}n(n+1) - n,$$

이므로 $u_n = n^2$의 생성함수는

$$\frac{2x}{(1-x)^3} - \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{2x - x(1-x)}{(1-x)^3} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

이다.

소문항 (ii)(a)

각 $n \geq 1$에 대하여 $u_n x^n = k u_{n-1} x^n$이다. 모든 $n \geq 1$에 대하여 더하면

$$\sum_{n\geq 1} u_n x^n = kx \sum_{n\geq 1} u_{n-1}x^{n-1}$$
$$\mathrm{f}(x) - u_0 = kx\,\mathrm{f}(x),$$

이다. 왼쪽 합은 상수항이 빠진 $\mathrm{f}(x)$이고, 오른쪽 합은 $m = n-1$로 놓으면 $\sum_{m\geq 0} u_m x^m = \mathrm{f}(x)$이기 때문이다. $u_0 = a$이므로 요구한 대로 $\mathrm{f}(x) = a + kx\,\mathrm{f}(x)$이다. 따라서

$$\mathrm{f}(x) = \frac{a}{1-kx}.$$

이다. (검산으로 전개하면 $a + akx + ak^2x^2 + \cdots$이고, 실제로 $u_n = ak^n$이다.)

소문항 (ii)(b)

$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$에 x^n을 곱하고 $n \geq 2$에 대하여 더한다(점화식은 $n = 2$부터만 성립하므로 여기서부터 시작해야 한다).

$$\sum_{n\geq 2} u_n x^n = x \sum_{n\geq 2} u_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n\geq 2} u_{n-2} x^{n-2}.$$

생각해 보기 이 세 합 각각에서 f의 어떤 항이 빠져 있을까?

좌변에는 $u_0 + u_1 x$ 항이 빠져 있다. 우변의 첫 번째 합은 $u_1 x + u_2 x^2 + \cdots$에 걸쳐 있으므로 u_0만 빠져 있다. 두 번째 합은 $\mathrm{f}(x)$ 전체이다. 따라서

$$\mathrm{f}(x) - u_0 - u_1 x = x\big(\mathrm{f}(x) - u_0\big) + x^2\,\mathrm{f}(x).$$

이다. $u_0 = 0$, $u_1 = 1$이면 이 식은 $\mathrm{f}(x) - x = x\,\mathrm{f}(x) + x^2\,\mathrm{f}(x)$가 되므로

$$\mathrm{f}(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

이다. 이것은 피보나치 수(Fibonacci numbers) $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$의 생성함수이다.

검산

- $x(1+x)(1-x)^{-3} = (x + x^2)(1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \cdots)$를 전개하면 $x + 4x^2 + 9x^3 + 16x^4 + \cdots$, 즉 제곱수가 마땅히 나온다.
- x를 $1 - x - x^2$로 나누는 다항식의 나눗셈(long division)을 하면 $x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + \cdots$를 얻는다.
- $x = 0.1$일 때: 합 $\sum n^2 (0.1)^n$과 $0.11/0.9^3 = 0.150891\ldots$가 일치하고, 피보나치 수에 대한 $\sum u_n (0.1)^n$은 $0.1/0.89 = 10/89 = 0.112359\ldots$와 일치한다. 이 결과들은 문제에 나오는 모든 생성함수의 처음 30개 계수와 함께 컴퓨터로 확인하였다.

흔한 실수

- 음의 지수에 대한 이항계수를 잘못 구하는 것: $\binom{-r}{n}$에서 나오는 부호와 $(-x)^n$에서 나오는 부호는 서로 상쇄되므로, 모든 계수는 양수이다.
- (ii)(b)에서 점화식이 성립하지 않는 $n = 0$이나 $n = 1$부터 더하거나, 초기항 u_0과 $u_1 x$를 빼는 것을 잊는 것.
- 삼각수를 $\frac{1}{2}n(n-1)$로 쓰는 것: $u_1 = 1$인지 확인하라.

STEP 너머

$\phi, \psi = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$로 놓고 $1 - x - x^2 = (1 - \phi x)(1 - \psi x)$로 인수분해한 다음, 부분분수(partial fractions)와 소문항 (ii)(a)를 함께 이용하면 비네(Binet) 공식 $u_n = (\phi^n - \psi^n)/\sqrt{5}$를 얻는다. 같은 방법으로 상수 계수를 갖는 모든 선형 점화식을 풀 수 있으며, 생성함수는 조합론(combinatorics)과 확률론에서 핵심적인 도구이다(확률론에서는 확률생성함수(probability generating function)가 된다). Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 확률 쪽을 다루고, Wilf의 *generatingfunctionology*는 조합론 쪽을 다루는, 생동감 있고 무료로 구할 수 있는 책이다.

풀이

STEP I 2016, 문제 9

역학 • 최대 정지 마찰과 평형

> **STEP I 2016, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/16-s1-q9

핵심 아이디어

A에 대한 모멘트(moment)를 취한다. 그러면 벽에서 작용하는 두 힘이 사라지고, 레일에서의 수직항력(normal reaction)이 마찰과 상관없이 θ로 곧바로 표현된다. 각 마찰력(friction)이 어느 방향으로 작용하는지만 알면, 수평 방향과 수직 방향으로 힘을 분해(resolving)하여 문제를 마무리할 수 있다. 이것이 이 문제의 진짜 핵심이다. 마찰력은 막대가 막 일으키려는 운동을 방해하므로, 끝점 A가 벽을 따라 미끄러져 내려가려 하는지 올라가려 하는지를 판단해야 한다.

풀이

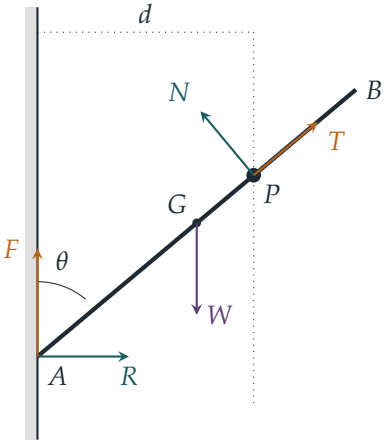
막대를 무게가 W이고 무게중심 G가 A에서 거리 a만큼 떨어져 있는 균일한 강체(rigid body) 막대로, 레일을 막대와 한 점 P에서만 만나는 고정된 직선으로 모형화한다. A에서 레일까지의 수평 거리가 d이고 막대가 연직선과 이루는 각이 θ이므로

$$AP = \frac{d}{\sin\theta}.$$

조건 $a\sin\theta < d$는 G가 A와 P 사이에 있다는 뜻이다.

작용하는 힘은 다음과 같다.

- A에서: 벽에서 멀어지는 수평 방향의 수직항력 R과 벽을 따라 작용하는 마찰력 F;
- P에서: 막대에 수직인 수직항력 N과 막대를 따라 작용하는 마찰력 T;
- G에 작용하는 무게 W.



F와 T의 화살표는 아래에서 다루는 첫 번째 경우의 방향을 나타낸다.

A에 대한 모멘트

N은 막대에 수직이므로 A에 대한 N의 모멘트는 $N \cdot AP$이다. T는 막대를 따라 작용하므로 A에 대한 모멘트가 없고, R와 F도 마찬가지이다. 무게의 팔 길이는 $a\sin\theta$이다. 따라서

$$N\frac{d}{\sin\theta} = Wa\sin\theta \quad \Longrightarrow \quad N = \frac{Wa\sin^2\theta}{d}. \tag{1}$$

이 식은 막대가 어느 쪽으로 미끄러지려 하든 성립한다.

어느 쪽으로 미끄러지는가?

생각해 보기 A는 벽을 따라 미끄러져 내려가려 하는가, 올라가려 하는가?

먼저 마찰이 전혀 없다고 가정하자. 수직 방향으로 분해하면 $N\sin\theta = W$이어야 하고, (1)과 함께 보면 이는 $a\sin^3\theta = d$를 뜻한다. 그런데 여기서는 $a\sin^3\theta < a\sin\theta < d$이므로 (1)에 의해 $N\sin\theta < W$이다. 즉 수직항력만으로는 막대를 떠받칠 수 없고, 나머지는 마찰력이 메워야 한다. 막대는 **아래쪽으로** 미끄러지려 한다. A가 벽을 따라 내려가면 θ가 감소하고 $AP = d/\sin\theta$가 커지므로, 막대는 레일 위를 지나 벽 쪽으로 미끄러져 내려간다. 마찰력은 이를 방해하므로 그림처럼 F는 벽을 따라 위쪽으로, T는 막대를 따라 위쪽(B 쪽)으로 작용한다. 두 접촉점 모두에서 극한 평형(limiting equilibrium) 상태이므로

$$F = \mu R, \qquad T = \lambda N.$$

힘의 분해

막대를 따라 위쪽을 향하는 단위벡터는 $(\sin\theta, \cos\theta)$이고, N의 방향은 $(-\cos\theta, \sin\theta)$(벽 쪽이면서 위쪽)이다. 수평 방향으로 분해하면

$$R - N\cos\theta + \lambda N\sin\theta = 0 \quad \Longrightarrow \quad R = N(\cos\theta - \lambda\sin\theta).$$

(벽이 막대를 밀어야 하므로 $R \geq 0$이어야 하고, 따라서 이 경우에는 $\tan\theta \leq 1/\lambda$가 필요하다.) 수직 방향으로 분해하면

$$\begin{aligned} W &= \mu R + N\sin\theta + \lambda N\cos\theta \\ &= N\big(\mu\cos\theta - \lambda\mu\sin\theta + \sin\theta + \lambda\cos\theta\big) \\ &= N\big((\lambda+\mu)\cos\theta + (1-\lambda\mu)\sin\theta\big). \end{aligned}$$

(1)의 N을 대입하고 $W\sin^2\theta$로 나누면

$$d\,\mathrm{cosec}^2\theta = a\big((\lambda+\mu)\cos\theta + (1-\lambda\mu)\sin\theta\big),$$

이것이 구하려던 결과이다.

$a\sin\theta > d$인 경우

이제 G는 레일 너머에 있다. 식 (1)과 기하적 상황은 그대로이므로, 남은 문제는 이번에도 미끄러지는 방향뿐이다.

> **생각해 보기** G가 레일 너머에 있게 되면 무엇이 달라지는가?

앞의 논증에서 $a\sin^3\theta < d$이면 아래쪽으로, $a\sin^3\theta > d$이면 위쪽으로 미끄러진다는 것을 보였다. $a\sin\theta < d$일 때는 앞의 경우만 가능했다. $a\sin\theta > d$이면 뒤의 경우가 가능해진다. 레일 너머로 튀어나온 부분의 무게 때문에 $N\sin\theta > W$가 되어, 막대는 레일 위를 지나 벽에서 **멀어지는** 쪽으로 미끄러져 내려가려 하고, A는 벽을 따라 올라간다. 이것이 새로운 경우이며, 여기서는 두 마찰력의 방향이 모두 반대가 된다. 즉 $F = \mu R$는 벽을 따라 아래쪽으로, $T = \lambda N$은 막대를 따라 아래쪽으로 작용한다. 위의 계산에서 λ를 $-\lambda$로, μ를 $-\mu$로 바꾸면

$$R = N(\cos\theta + \lambda\sin\theta), \qquad W = N\big((1-\lambda\mu)\sin\theta - (\lambda+\mu)\cos\theta\big),$$

이고, (1)과 함께 쓰면

$$d\,\mathrm{cosec}^2\theta = a\big((1-\lambda\mu)\sin\theta - (\lambda+\mu)\cos\theta\big).$$

이 경우에는 $R > 0$이 자동으로 성립한다. (만약 $a\sin^3\theta < d < a\sin\theta$이면 막대는 여전히 아래쪽으로 미끄러지기 직전이고, 첫 번째 결과가 그대로 적용된다. 그 유도 과정에서 G의 위치를 전혀 사용하지 않았기 때문이다.)

검산

- 마찰이 없으면($\lambda = \mu = 0$) 두 결과 모두 앞에서 구한 마찰 없는 평형 조건 $d = a\sin^3\theta$로 바뀐다.
- $\lambda = \tan\alpha$, $\mu = \tan\beta$(마찰각(angles of friction))로 놓으면 우변은 각각 $a\sin(\theta+\alpha+\beta)/(\cos\alpha\cos\beta)$와 $a\sin(\theta-\alpha-\beta)/(\cos\alpha\cos\beta)$가 된다. 두 경우는 마찰각의 부호만 다르며, 마땅히 그래야 한다.
- $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$, $\theta = \frac{1}{3}\pi$로 두면 두 경우에서 각각 $d/a = \frac{3}{8} + \frac{9\sqrt{3}}{32} \approx 0.862$와 $d/a = \frac{9\sqrt{3}}{32} - \frac{3}{8} \approx 0.112$를 얻는다. 각 값을 위의 마찰 방향과 함께 힘과 모멘트에 관한 식에 다시 대입하면 합력과 합 모멘트가 모두 0이 된다.

흔한 실수

- 레일에서의 수직항력을 연직 방향으로 잡는 것. 막대가 레일과 한 점에서만 닿으므로 수직항력은 막대에 수직이다.
- 모멘트 식에서 A에서 레일까지의 거리로 $d/\sin\theta$ 대신 길이 d를 쓰는 것.
- 막대가 실제로 어느 쪽으로 움직일지 따져 보지 않고 마찰력의 방향을 정해 버리는 것.

STEP 너머

막대는 아래쪽 극한 경우와 위쪽 극한 경우 사이의 각 θ 구간 전체에서 안정하다. 마찰은 평형 상태를 하나가 아니라 범위로 만들어 낸다. 이러한 집합(각 접촉점에서의 마찰 원뿔(friction cone)과 접촉이 유지할 수 있는 상태들의 집합)을 기술하는 것이 접촉 역학(contact mechanics)과 로봇공학에서 물체 파지(grasping) 분석의 출발점이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 대학 1학년 수준에서 마찰과 강체 정역학을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP I 2016, 문제 10

역학 • 충돌과 반발계수

> **STEP I 2016, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/16-s1-q10

핵심 아이디어

충돌은 세 번 일어나며, 각 충돌은 똑같은 두 방정식, 즉 운동량 보존(conservation of momentum)과 뉴턴(Newton)의 반발 법칙(law of restitution)으로 다룬다. 처음 두 충돌은 동시에 일어나지만 서로 독립적이므로, 따로따로 계산하여 B와 C가 만나기 직전의 속도를 구할 수 있다. 그러면 B가 결국 정지한다는 조건에서 λ와 e를 잇는 방정식 하나를 얻는다.

풀이

네 물체를 매끄러운 탁자 위의 입자로 모형화한다. 따라서 충돌할 때를 제외하면 수평 방향의 힘은 작용하지 않으며, 모든 충돌은 정면충돌(direct collision, 한 직선을 따라 일어나는 충돌)이다. A에서 D를 향하는 방향을 양의 방향으로 잡으면, A의 처음 속도는 u이고 D의 처음 속도는 $-u$이다.



소문항 (i)

A가 B와 충돌한다. 충돌 후 A와 B의 속도를 각각 v_A와 v_B라 하자. 그러면

$$\begin{aligned} \text{운동량:} \quad & \lambda m u = \lambda m v_A + m v_B, \\ \text{반발:} \quad & v_B - v_A = eu. \end{aligned}$$

$v_B = v_A + eu$를 첫 번째 방정식에 대입하면 $(\lambda+1)v_A = (\lambda-e)u$를 얻으므로

$$v_A = \frac{(\lambda-e)u}{\lambda+1}, \qquad v_B = v_A + eu = \frac{\lambda(1+e)u}{\lambda+1}.$$

D가 C와 충돌한다. 충돌 후 C와 D의 속도를 각각 v_C와 v_D라 하자. 그러면

$$\text{운동량:} \quad -mu = mv_C + mv_D,$$
$$\text{반발:} \quad v_D - v_C = e\big(0-(-u)\big) = eu.$$

(충돌 전에 C와 D는 속력 u로 가까워진다. 충돌 후에는 D가 C의 오른쪽에 있으므로, 둘은 $v_D - v_C$의 비율로 멀어진다.) 이 두 방정식을 풀면

$$v_C = -\tfrac{1}{2}(1+e)u, \qquad v_D = -\tfrac{1}{2}(1-e)u.$$

따라서 C는 속력 $\frac{1}{2}(1+e)u$로 B를 향해 움직이고, D는 그보다 작은 속력 $\frac{1}{2}(1-e)u$로 그 뒤를 따라 왼쪽으로 움직인다.

B가 C와 충돌한다. 이제 B는 v_B로 오른쪽으로, C는 왼쪽으로 움직이므로, 둘은 속력 $v_B - v_C$로 가까워진다. 충돌 후 B는 정지해 있다. C의 속도를 w라 하자. 그러면

$$\text{운동량:} \quad mv_B + mv_C = 0 + mw,$$
$$\text{반발:} \quad w - 0 = e(v_B - v_C).$$

w를 소거하면 $v_B + v_C = e(v_B - v_C)$, 즉

$$(1-e)v_B = -(1+e)v_C.$$

위에서 구한 속도를 대입하면

$$(1-e)\cdot\frac{\lambda(1+e)u}{\lambda+1} = (1+e)\cdot\tfrac{1}{2}(1+e)u.$$

$u \neq 0$이고 $1+e>0$이므로 양변을 $(1+e)u$로 나눌 수 있다.

$$2\lambda(1-e) = (1+e)(\lambda+1)$$
$$2\lambda - 2\lambda e = \lambda + 1 + e\lambda + e$$
$$\lambda - 1 = e(3\lambda+1),$$

그리고 $3\lambda+1>0$이므로

$$e = \frac{\lambda-1}{3\lambda+1},$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다.

이로부터 이끌어 내야 할 결론은 다음과 같다.

$$\frac{1}{3} - e = \frac{(3\lambda+1)-3(\lambda-1)}{3(3\lambda+1)} = \frac{4}{3(3\lambda+1)} > 0,$$

$\lambda > 1$이기 때문이다. 따라서 $e < \frac{1}{3}$이다. (또한 $\lambda>1$이므로 $e>0$이고, 따라서 충돌들은 실제로 완전 비탄성(perfectly inelastic) 충돌이 아니다.)

소문항 (ii)

세 번째 충돌 후 C의 속도는

$$w = v_B + v_C = (1+e)u\left(\frac{\lambda}{\lambda+1} - \frac{1}{2}\right) = \frac{(1+e)(\lambda-1)u}{2(\lambda+1)},$$

이고, $\lambda > 1$이므로 이 값은 양수이다. 즉 C는 이제 오른쪽으로, 다시 D를 향해 움직이며, D는 여전히 속력 $\frac{1}{2}(1-e)u$로 왼쪽으로 움직이고 있다.

> **생각해 보기** "같은 속력"이라는 조건은 어떤 방정식을 주는가? 그리고 e는 어떻게 없앨 수 있는가?

두 속력이 같을 조건은

$$\frac{(1+e)(\lambda-1)}{2(\lambda+1)} = \frac{1-e}{2}.$$

소문항 (i)에서 $1+e = \dfrac{4\lambda}{3\lambda+1}$이고 $1-e = \dfrac{2(\lambda+1)}{3\lambda+1}$이다. 이를 대입하고 공통인수 $\dfrac{1}{3\lambda+1}$을 약분하면

$$\begin{aligned}\frac{4\lambda(\lambda-1)}{\lambda+1} &= 2(\lambda+1)\\ 2\lambda^2 - 2\lambda &= \lambda^2 + 2\lambda + 1\\ \lambda^2 - 4\lambda - 1 &= 0,\end{aligned}$$

이므로 $\lambda = 2 \pm \sqrt{5}$이다. 이 가운데 $\lambda > 1$을 만족하는 것은 $\lambda = 2+\sqrt{5}$뿐이다(다른 근은 음수이다). 그러면

$$e = \frac{1+\sqrt{5}}{7+3\sqrt{5}} = \frac{(1+\sqrt{5})(7-3\sqrt{5})}{49-45} = \frac{4\sqrt{5}-8}{4} = \sqrt{5}-2.$$

따라서

$$\lambda = 2+\sqrt{5}, \qquad e = \sqrt{5}-2.$$

검산

- $e = \sqrt{5}-2 \approx 0.236$이고, 이는 소문항 (i)에서 요구한 대로 실제로 0과 $\frac{1}{3}$ 사이에 있다.
- $\lambda = 2+\sqrt{5} \approx 4.236$, $u = 1$, $e \approx 0.236$으로 놓고 세 충돌을 수치로 계산해 보면, 세 번째 충돌 직전에 $v_B = 1$(공교롭게도 정확히 1이다)이고 $v_C \approx -0.618$이다. 충돌 후에는 B가 정지하고 C는 약 0.382의 속력으로 오른쪽으로 움직이며, D는 약 0.382의 속력으로 왼쪽으로 움직인다. 공통 속력은 $\frac{1}{2}(1-e)u = \frac{1}{2}(3-\sqrt{5})u$이다.
- 극한의 경우: $\lambda \to 1$이면 $e \to 0$이다. 질량이 같고 $e = 0$이면 B와 C는 크기가 같고 방향이 반대인 속도로 만나므로, 한 덩어리로 합쳐지면 마땅히 그래야 하듯 정지한다.

흔한 실수

- C와 D 사이의 충돌에 대한 반발 방정식에서 부호를 틀리는 실수. 모든 속도를 같은 양의 방향을 기준으로 쓰고, "멀어지는 속력 $= e\times$ 가까워지는 속력"을 주의 깊게 적용하자.
- 세 번째 충돌에서 C가 B를 **향해** 움직이며 도착한다는 사실을 잊는 실수. 가까워지는 속력은 $v_B - \frac{1}{2}(1+e)u$가 아니라 $v_B - v_C = v_B + \frac{1}{2}(1+e)u$이다.
- 음수인 근 $\lambda = 2 - \sqrt{5}$를 버리지 않고 남겨 두는 실수.

STEP 너머

반발이 있는 충돌은 에너지 손실을 나타내는 가장 단순한 모형이다. 정면충돌에서 잃는 운동 에너지(kinetic energy)는 $1 - e^2$에 비례하며, $e = 1$은 에너지가 보존되는 탄성(elastic) 충돌의 경우이다. 대학 1학년 과정에서는 이러한 개념이 질량중심 좌표계(centre-of-mass frame)로 이어지는데, 이 좌표계에서는 어떤 두 물체의 충돌도 대칭적으로 보이고 위의 계산은 거의 자명해진다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 충돌을 이러한 방식으로 전개한다.

풀이

STEP I 2016, 문제 11

역학 • 포물체의 최대 도달 거리

STEP I 2016, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

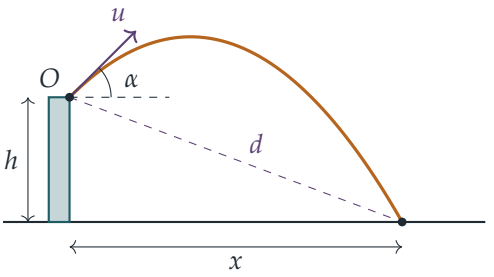
step.maths.org/questions/16-s1-q11

핵심 아이디어

수평 방향과 연직 방향의 운동을 식으로 쓰고, 시간을 소거한 다음 $\sin\alpha$와 $\cos\alpha$의 제곱을 배각(double angle)으로 바꾼다. 최대 도달 거리를 구할 때에는 착지 방정식이 x를 α의 함수로 음함수(implicit function)처럼 정의한다고 보고 이를 미분한다. 최댓값에서 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\alpha = 0$이고, 나머지는 미지수 $\cos 2\alpha$ 하나에 대한 삼각함수 계산이다.

풀이

P를 공기 저항 없이 중력만 받아 움직이는 입자로, 평지를 수평면으로 모형화한다. 탑의 밑부분을 원점으로 하고, 발사 방향의 수평축을 x, 연직 위쪽을 y로 잡는 좌표축을 사용하면 O는 점 $(0, h)$이다.



착지 방정식

발사하고 시간 t가 지났을 때,

$$X = ut\cos\alpha, \qquad Y = h + ut\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

탑은 똑바로 서 있고 P는 어떤 거리 $x > 0$인 곳에 떨어지므로 $\cos\alpha \neq 0$이며, $Y = 0$이 되는 착지 순간에 $t = \dfrac{x}{u\cos\alpha}$이다. 따라서

$$0 = h + x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha}.$$

양변에 $2\cos^2\alpha$를 곱하고 $2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$와 $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$를 이용하면

$$\frac{gx^2}{u^2} = 2h\cos^2\alpha + 2x\sin\alpha\cos\alpha = h(1+\cos 2\alpha) + x\sin 2\alpha,$$

이고, 이것이 구하는 방정식이다.

최대 수평 거리

각 α는 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$의 범위에서 움직일 수 있다(아래쪽으로 쏘는 것도 허용한다). 이러한 각 α마다 착지 거리 x는 α에 대해 매끄럽게 변하는 양의 함수이고, $\alpha \to \pm\frac{\pi}{2}$일 때 $x \to 0$이다. 비행 시간은 유계로 남아 있는 반면 수평 속력 $u\cos\alpha$는 0으로 가기 때문이다. 그러므로 x는 구간 내부의 어떤 α에서 최댓값을 가지며, 그곳에서 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\alpha = 0$이다.

$x' = \mathrm{d}x/\mathrm{d}\alpha$로 쓰고 착지 방정식을 α에 대해 미분하면

$$\frac{2gx}{u^2}\,x' = -2h\sin 2\alpha + x'\sin 2\alpha + 2x\cos 2\alpha.$$

$x' = 0$으로 놓으면

$$x\cos 2\alpha = h\sin 2\alpha.$$

여기서 $\cos 2\alpha \neq 0$이다. 그렇지 않으면 $h > 0$이므로 $h\sin 2\alpha = 0$에서 $\sin 2\alpha = 0$이어야 하는데, 이는 불가능하다. 따라서 최댓값에서

$$x = h\tan 2\alpha,$$

이고, 이것이 보이려던 것이다.

> **생각해 보기** 이제 x와 α에 대한 방정식이 두 개 있다. x를 어떻게 깔끔하게 소거할까?

$x = h\tan 2\alpha$를 착지 방정식에 대입하고 $c = \cos 2\alpha$, $s = \sin 2\alpha$로 쓴다. 우변은

$$h(1+c) + h\frac{s^2}{c} = \frac{h\,(c + c^2 + s^2)}{c} = \frac{h(1+c)}{c},$$

가 되고, 좌변은

$$\frac{gh^2}{u^2}\cdot\frac{s^2}{c^2} = \frac{gh^2(1-c)(1+c)}{u^2c^2}.$$

이다. 두 식을 같게 놓고 $h(1+c)/c$로 나눈다. $c \neq -1$이므로 이 값은 0이 아니다($c \neq 0$임은 이미 보였고, $c = -1$이면 $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$가 된다).

$$\frac{gh(1-c)}{u^2c} = 1 \quad\Longrightarrow\quad gh - ghc = u^2c \quad\Longrightarrow\quad \cos 2\alpha = \frac{gh}{u^2+gh}.$$

정상점(stationary point)에서 가능한 값은 이것뿐이고, $\tan 2\alpha = x/h > 0$이므로 $0 < 2\alpha < \frac{\pi}{2}$로 정해진다. 따라서 정상점은 정확히 하나이며 그것이 최댓값이다. (참고로 $\tan 2\alpha = \dfrac{u\sqrt{u^2+2gh}}{gh}$이므로 최대 거리는 $x = \dfrac{u\sqrt{u^2+2gh}}{g}$이다.)

O로부터의 최대 거리

착지점은 $(x, 0)$이므로 $O = (0, h)$로부터의 거리는

$$d = \sqrt{x^2 + h^2}.$$

이다. h가 고정되어 있으면 d는 x에 대해 증가하므로, d가 최대인 것은 정확히 x가 최대일 때이다. 그때 $x = h\tan 2\alpha$이므로

$$d = \sqrt{h^2\tan^2 2\alpha + h^2} = h\sec 2\alpha = h \cdot \frac{u^2+gh}{gh} = \frac{u^2}{g} + h,$$

이다. 여기서 $\sec 2\alpha > 0$을 이용했다. 이것이 구하는 최대 거리이다.

검산

- $h = 0$이면 $\cos 2\alpha = 0$이므로 $\alpha = 45°$이고, 최대 도달 거리는 u^2/g이다. 평지에서의 익숙한 결과이다.
- $u = 10, g = 10, h = 5$(SI 단위)로 두자. 그러면 $\cos 2\alpha = \frac{50}{150} = \frac{1}{3}$이고, 최대 도달 거리는 $\sqrt{100\cdot 200}/10 = 10\sqrt{2} \approx 14.14$이며, $d = \sqrt{200+25} = 15 = \frac{100}{10} + 5$로 예측과 일치한다. 컴퓨터로 α를 탐색해 보면 14.14가 가장 큰 착지 거리임을 확인할 수 있다.
- h가 커지면 $\cos 2\alpha \to 1$이므로 최적의 각은 0으로 간다. 아주 높은 탑에서는 거의 수평으로 쏘아야 한다.

흔한 실수

- $x = h\tan 2\alpha$를 써 놓고, 이 식이 모든 α가 아니라 최댓값에서만 성립한다는 사실을 잊는 것.
- $1 + \cos 2\alpha$나 $\cos 2\alpha$로 나누면서 이 값들이 왜 0이 아닌지 밝히지 않는 것.
- $d^2 = x^2 + h^2$가 x와 같은 각에서 최대가 된다는 점을 알아채지 못하고 d를 따로 최대화하는 것.

STEP 너머

답 $d = u^2/g + h$에는 멋진 기하학적 설명이 있다. O에서 속력 u로 쏜 모든 궤적은 하나의 **포락선**(*envelope*), 곧 "안전 포물선(parabola of safety)"에 접한다. 이 포물선은 초점이 O이고 준선이 O보다 높이 u^2/g만큼 위에 있다. 가장 먼 착지점은 이 포락선 위에 있으므로, 초점–준선 성질에 의해 그 점에서 O까지의 거리는 그 점에서 준선까지 내려온 거리, 즉 $u^2/g + h$와 같다. 곡선족의 포락선은 대학 1학년 미적분학과 역학의 표준 주제이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이런 식으로 세심하게 다룬 포물체 문제를 공부하기에 좋은 다음 단계이다.

풀이

STEP I 2016, 문제 12

확률과 통계 • 이항계수의 대칭성

> **STEP I 2016, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/16-s1-q12

이 문제는 *Beyond STEP*의 12.6 절 **동전 하나 더**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch12/one-more-coin.html

핵심 아이디어

소문항 (i)과 (ii)는 이항 확률(binomial probability)을 직접 계산하는 문제이며, 두 소문항 모두 놀라울 만큼 간단한 같은 답을 준다. 소문항 (iii)은 그 이유를 설명한다. Bob의 던지기를 처음 n번과 추가로 던지는 한 번으로 나누어 보자. 처음 n번의 던지기에서 Bob과 Alice는 대등한 조건에 있으므로 대칭성(symmetry)이 문제를 해결해 주고, 추가로 던지는 한 번은 동점을 공평하게 가른다.

풀이

이 풀이 전체에서 A를 Alice가 얻은 앞면의 개수, B를 Bob이 얻은 앞면의 개수라 하자. 공정한 동전을 m번 던질 때 앞면의 개수 X는

$$\mathrm{P}(X = k) = \binom{m}{k}\frac{1}{2^m}, \qquad k = 0, 1, \ldots, m,$$

을 만족하고, Alice의 던지기와 Bob의 던지기는 서로 독립(independent)이므로 A와 B에 대한 확률을 곱할 수 있다.

소문항 (i)

Alice는 두 번, Bob은 세 번 던지므로

k	0	1	2	3
$\mathrm{P}(A=k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	
$\mathrm{P}(B=k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

이다. Alice의 점수를 조건으로 놓자(conditioning). $A=a$일 때 $B>a$이어야 하므로, 꼬리 확률(tail probability) $\mathrm{P}(B>0)=\frac{7}{8}, \mathrm{P}(B>1)=\frac{1}{2}, \mathrm{P}(B>2)=\frac{1}{8}$이 필요하다. 따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B>A) &= \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{7}{8}+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{8}\\ &= \frac{7+8+1}{32}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

소문항 (ii)

이제 $a=0,1,2,3$에 대하여 $\mathrm{P}(A=a)=\frac{1}{8},\frac{3}{8},\frac{3}{8},\frac{1}{8}$이고, $k=0,\dots,4$에 대하여 $\mathrm{P}(B=k)=\frac{1}{16},\frac{4}{16},\frac{6}{16},\frac{4}{16},\frac{1}{16}$이다. 꼬리 확률은

$$\mathrm{P}(B>0)=\tfrac{15}{16},\quad \mathrm{P}(B>1)=\tfrac{11}{16},\quad \mathrm{P}(B>2)=\tfrac{5}{16},\quad \mathrm{P}(B>3)=\tfrac{1}{16}.$$

이다. 그러므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B>A) &= \tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{15}{16}+\tfrac{3}{8}\cdot\tfrac{11}{16}+\tfrac{3}{8}\cdot\tfrac{5}{16}+\tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{1}{16}\\ &= \frac{15+33+15+1}{128}=\frac{64}{128}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

이번에도 답은 정확히 $\frac{1}{2}$이다.

소문항 (iii)

먼저 두 사람이 같은 횟수만큼 던지는 게임에 관한 사실 하나를 살펴보자. Alice와 Bob이 각각 n번씩 던질 때, "Bob이 더 많다", "같다", "Alice가 더 많다" 중 정확히 하나가 일어난다. 두 사람은 똑같은 실험을 하므로 상황은 두 사람 사이에서 대칭이고, 따라서 "Alice가 더 많다"의 확률도 p_2이다. 그러므로

$$2p_2+p_1=1. \qquad (*)$$

이제 Alice가 n번, Bob이 $n+1$번 던진다고 하자. B'을 Bob의 **처음** n번 던지기에서 나온 앞면의 개수라 하고, H를 Bob의 마지막 던지기가 앞면인 사건이라 하자. 그러면 H가 일어나면 $B=B'+1$이고, 그렇지 않으면 $B=B'$이다.

? **생각해 보기** B와 A의 비교는 B'과 A의 비교에 어떻게 의존하는가?

B'과 A는 정수이고 B는 B' 또는 $B'+1$이므로

- $B'>A$이면 마지막 던지기와 관계없이 반드시 $B>A$이다.

- $B' = A$이면 마지막 던지기가 앞면일 때, 그리고 그때에만 $B > A$이다.
- $B' < A$이면 $B' \leq A - 1$이므로 $B \leq A$이고, Bob은 이기지 못한다.

Bob의 처음 n번 던지기와 Alice의 n번 던지기를 비교하는 것은 바로 같은 횟수 게임이므로 $\mathrm{P}(B' > A) = p_2$이고 $\mathrm{P}(B' = A) = p_1$이다. 마지막 던지기는 나머지 모든 것과 독립이고 $\mathrm{P}(H) = \frac{1}{2}$이다. 따라서

$$\mathrm{P}(\text{Bob이 Alice보다 앞면을 더 많이 얻는다}) = p_2 + \tfrac{1}{2}p_1.$$

$(*)$에 의하여 $p_2 + \frac{1}{2}p_1 = \frac{1}{2}(2p_2 + p_1) = \frac{1}{2}$이다.

이것이 일반화(generalisation)이다. *Alice*가 공정한 동전을 n번 던지고 *Bob*이 공정한 동전을 $n+1$번 던지면, 모든 $n \geq 0$에 대하여 *Bob*이 *Alice*보다 앞면을 더 많이 얻을 확률은 $\frac{1}{2}$이다. 소문항 (i)과 (ii)는 각각 $n = 2$와 $n = 3$인 경우이다.

검산

- $n = 0$: Alice는 한 번도 던지지 않고 Bob은 한 번 던진다. Bob은 앞면이 나올 때, 그리고 그때에만 이기며, 그 확률은 $\frac{1}{2}$이다.
- $n = 2$: 직접 계산하면 $p_1 = \frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3}{8}$이고, $(*)$로부터 $p_2 = \frac{5}{16}$이다. 그러면 $p_2 + \frac{1}{2}p_1 = \frac{5}{16} + \frac{3}{16} = \frac{1}{2}$로 소문항 (i)의 결과와 일치한다.
- 컴퓨터로 정확히 열거해 보면 29 이하의 모든 n에 대하여 $\mathrm{P}(B > A) = \frac{1}{2}$임을 확인할 수 있고, 소문항 (ii)를 200 000회 시행으로 모의실험(simulation)한 결과는 0.4997이었다.

흔한 실수

- 같은 횟수 게임에서 $p_2 = \frac{1}{2}$라고 가정하는 것. 동점이 될 확률이 양수이므로 $p_2 = \frac{1}{2}(1 - p_1) < \frac{1}{2}$이다.
- 소문항 (iii)에서 $B' = A$인 경우를 빠뜨리거나, 추가 던지기에 대한 인수 $\frac{1}{2}$를 곱하지 않고 그 경우를 통째로 세는 것.
- $\mathrm{P}(B > a)$ 대신 꼬리 확률 $\mathrm{P}(B \geq a)$를 사용하는 것.

STEP 너머

이 깔끔한 답은 대칭성 논법에 추가된 한 단계에 대한 조건부 계산을 더한 데서 나온다. 이러한 방식은 무작위 행보(random walk)에서 투표 문제(ballot problem)에 이르기까지 확률론 전반에 걸쳐 나타난다. 더 매끄러운 풀이도 있다. Bob은 한 번 더 던지므로, Bob이

Alice보다 앞면을 더 많이 얻지 **못하는** 것은 Bob이 Alice보다 뒷면을 더 많이 얻는 것과 정확히 같다. 앞면과 뒷면을 맞바꾸어 보면 "앞면이 더 많다"와 "뒷면이 더 많다"의 확률이 같음을 알 수 있고, 두 사건은 서로 여사건이므로 각각의 확률은 $\frac{1}{2}$이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 이러한 조건부 확률과 대칭성 기법을 전개한다.

풀이

STEP I 2016, 문제 13

확률과 통계 • 지수분포의 순서통계량

> **STEP I 2016, 13번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/16-s1-q13

핵심 아이디어

첫 번째와 두 번째 도착에 대해서는, 그 일이 **아직 일어나지 않은** 때가 언제인지를 묻는다. 첫 번째 이메일이 시각 t 이후에 도착하는 것은 정확히 n개 모두가 그 이후에 도착할 때이고, 두 번째 이메일이 t 이후에 도착하는 것은 정확히 그때까지 도착한 이메일이 많아야 하나일 때이다. 두 사건 모두 독립성(independence)을 이용하면 쉽게 셀 수 있고, 생존 확률(survival probability)을 미분하면 밀도함수(density)를 얻는다.

풀이

$X_1, \ldots, X_n$을 도착 시각이라 하자. 이들은 서로 독립이고, 각각

$$\mathrm{P}(X_i > t) = \int_t^\infty \lambda \mathrm{e}^{-\lambda s}\,\mathrm{d}s = \mathrm{e}^{-\lambda t}, \qquad \mathrm{P}(X_i \le t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

을 만족한다(단, $t \ge 0$). $k > 0$일 때의 표준 적분 $\int_0^\infty t\,k\mathrm{e}^{-kt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k}$를 사용할 것인데, 이는 모수(parameter)가 k인 지수분포(exponential distribution)의 평균이다. (부분적분(integration by parts)을 하면 $\left[-t\mathrm{e}^{-kt}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-kt}\,\mathrm{d}t = 0 + \frac{1}{k}$이다.)

소문항 (i)

첫 번째 도착이 t보다 늦게 일어날 필요충분조건은 모든 이메일이 t보다 늦게 도착하는 것이다. 독립성에 의해

$$\mathrm{P}(T > t) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(X_i > t) = \left(\mathrm{e}^{-\lambda t}\right)^n = \mathrm{e}^{-n\lambda t}.$$

따라서 누적분포함수(cumulative distribution function)는 $t \geq 0$에 대하여 $F(t) = 1 - \mathrm{e}^{-n\lambda t}$이다. 이를 미분하면 밀도함수

$$f(t) = F'(t) = n\lambda\,\mathrm{e}^{-n\lambda t} \qquad (t \geq 0),$$

를 얻으며, 이것이 구하는 결과이다. 이는 모수가 $n\lambda$인 지수분포의 밀도함수이므로, $k = n\lambda$로 두고 표준 적분을 쓰면

$$\mathrm{E}(T) = \frac{1}{n\lambda}.$$

소문항 (ii)

S를 두 번째 이메일의 도착 시각이라 하자(따라서 $n \geq 2$이어야 한다). 두 번째 도착이 t보다 늦게 일어날 필요충분조건은 시각 t까지 도착한 이메일이 **많아야 하나**인 것이다. 즉 하나도 도착하지 않았거나, 정확히 하나만 도착한 경우이다.

? **생각해 보기** 시각 t까지 정확히 하나의 이메일만 도착하는 경우는 몇 가지인가?

n개의 이메일 중 어느 것이든 일찍 도착한 하나가 될 수 있다. 그 하나는 도착했고(확률 $1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$), 나머지 $n-1$개는 도착하지 않았다(각각 확률 $\mathrm{e}^{-\lambda t}$). 독립성에 의해, 그리고 n가지 경우가 서로 배반(mutually exclusive)이므로

$$\mathrm{P}(S > t) = \mathrm{e}^{-n\lambda t} + n\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\right)\mathrm{e}^{-(n-1)\lambda t}.$$

두 번째 항을 전개하면 $n\mathrm{e}^{-(n-1)\lambda t} - n\mathrm{e}^{-n\lambda t}$이므로

$$\mathrm{P}(S > t) = n\,\mathrm{e}^{-(n-1)\lambda t} - (n-1)\,\mathrm{e}^{-n\lambda t}.$$

간단히 확인해 보면, 이 값은 $t = 0$에서 1이고 $t \to \infty$일 때 0으로 수렴한다.

S의 밀도함수 g는 $1 - \mathrm{P}(S > t)$의 도함수이다.

$$\begin{aligned} g(t) &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(n\,\mathrm{e}^{-(n-1)\lambda t} - (n-1)\,\mathrm{e}^{-n\lambda t}\right) \\ &= n(n-1)\lambda\,\mathrm{e}^{-(n-1)\lambda t} - n(n-1)\lambda\,\mathrm{e}^{-n\lambda t} \\ &= n(n-1)\lambda\left(\mathrm{e}^{-(n-1)\lambda t} - \mathrm{e}^{-n\lambda t}\right) \qquad (t \geq 0). \end{aligned}$$

기댓값(expectation)을 구하기 위해 g를 지수분포 밀도함수들의 결합으로 나타낸다.

$$g(t) = n \cdot (n-1)\lambda\,\mathrm{e}^{-(n-1)\lambda t} \;-\; (n-1) \cdot n\lambda\,\mathrm{e}^{-n\lambda t}.$$

$k = (n-1)\lambda$와 $k = n\lambda$로 두고 표준 적분을 쓰면($n \geq 2$이므로 두 경우 모두 $k > 0$이어서 사용할 수 있다)

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(S) = \int_0^\infty t\,g(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{n}{(n-1)\lambda} - \frac{n-1}{n\lambda} \\ &= \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{n^2 - (n-1)^2}{n(n-1)} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{2n-1}{n(n-1)}. \end{aligned}$$

$\dfrac{1}{n-1}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{n+(n-1)}{n(n-1)}=\dfrac{2n-1}{n(n-1)}$이므로, 이는

$$\mathrm{E}(S)=\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right),$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

? 생각해 보기 답이 왜 간단한 두 항의 합으로 나오는가?

지수분포는 무기억성(memoryless property)을 가진다. 첫 번째 도착은 비율이 $n\lambda$인 지수분포를 따르는 시간 뒤에 일어나며, 그 평균은 $\frac{1}{n\lambda}$이다. 그 뒤 남은 $n-1$개의 이메일은 마치 시계가 방금 초기화된 것처럼 새로 출발하므로, 추가로 기다리는 시간은 비율이 $(n-1)\lambda$이고 평균이 $\frac{1}{(n-1)\lambda}$인 지수분포를 따른다. 두 대기 시간을 더하면 곧바로 답이 나오며, 이는 결과를 기억하는 좋은 방법이기도 하다.

검산

- $n=2, \lambda=1$일 때 두 번째 도착은 독립인 두 지수분포 시간 중 늦은 쪽이다. 그 평균은 $1+\frac{1}{2}=1.5$이어야 하며, 10^5회 시행한 컴퓨터 시뮬레이션에서는 1.501이 나왔다.
- 밀도함수 g를 적분하면 1이다: $\int_0^\infty g = n-(n-1)=1$.
- $n=5, \lambda=1$일 때 공식은 $\mathrm{E}(S)=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=0.45$를 주며, 이는 $\int_0^\infty t\,g(t)\,\mathrm{d}t$를 수치적으로 계산한 값과 일치한다.

흔한 실수

- 정확히 하나의 이메일만 도착한 경우에 인수 n을 빠뜨리는 것. n개 중 어느 것이든 일찍 도착한 하나가 될 수 있다.
- $\mathrm{P}(S>t)$를 **정확히** 하나가 도착했을 확률로 써서, 하나도 도착하지 않은 경우를 빠뜨리는 것.

STEP 너머

T와 S는 지수분포 표본의 처음 두 **순서통계량**(*order statistics*)이다. 위의 무기억성 논증을 확장하면 k번째 도착의 평균이 $\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\cdots+\frac{1}{n-k+1}\right)$임을 보일 수 있으며, 이는 포아송 과정(Poisson process)과 대기행렬 이론(queueing theory)의 기초가 된다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)는 순서통계량과 무기억성을 명쾌하게 다룬다.

풀이

STEP II 2016, 문제 1

순수수학 • 매개변수 곡선과 접선

STEP II 2016, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/16-s2-q1

핵심 아이디어

좌표 대신 매개변수(parameter)로 생각한다. O에서의 직각 조건은 두 점의 매개변수 p와 q 사이의 매우 간단한 관계식 하나로 바뀌고, 일반적인 점에서의 접선(tangent)은 t에 대한 깔끔한 방정식으로 나타난다. 두 접선의 교점을 구하면 그 좌표는 p와 q의 대칭함수(symmetric function)로 나오며, p와 q 사이의 관계식이 바로 이들을 소거하는 데 필요한 것이다.

풀이

일반적인 점에서의 접선

매개변수가 t인 점에서

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{3t^2}{2t} = \frac{3t}{2} \qquad (t \neq 0).$$

따라서 (t^2, t^3)에서의 접선은 $y - t^3 = \frac{3t}{2}(x - t^2)$, 즉

$$2y = 3tx - t^3. \qquad (*)$$

이다. ($t = 0$일 때 이 식은 $y = 0$이 되고, 이는 첨점(cusp)에서의 접선이지만 이 점은 필요하지 않다.)

직각 조건

$P = (p^2, p^3)$, $Q = (q^2, q^3)$이라 하자. $\angle POQ$가 의미를 가지려면 두 점 모두 O가 아니어야 하므로 $p \neq 0$이고 $q \neq 0$이다. 이 각이 직각일 필요충분조건은 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0$이다.

$$p^2q^2 + p^3q^3 = p^2q^2(1 + pq) = 0.$$

$p^2q^2 \neq 0$이므로 반드시

$$pq = -1.$$

이다. 특히 (두 수의 곱이 음수이므로) $p \neq q$이고, 따라서 P와 Q에서의 접선은 서로 다른 기울기(gradient) $\frac{3p}{2} \neq \frac{3q}{2}$를 가지며 실제로 한 점에서 만난다.

두 접선이 만나는 점

$t = p$와 $t = q$를 대입한 두 $(*)$ 식을 서로 빼면

$$3(p - q)x = p^3 - q^3 = (p - q)(p^2 + pq + q^2).$$

$p - q \neq 0$으로 나누고 $pq = -1$을 이용하면

$$3x = p^2 + pq + q^2 = p^2 + q^2 - 1.$$

이를 $t = p$인 $(*)$에 다시 대입하면

$$\begin{aligned} 2y &= p(p^2 + pq + q^2) - p^3 \\ &= p^2q + pq^2 = pq(p + q) = -(p + q). \end{aligned}$$

> **생각해 보기** x와 y를 두 매개변수로 나타냈다. 어떻게 하면 x와 y만의 방정식 하나를 얻을 수 있을까?

y를 제곱한다. 그러면 나타나는 교차항 $2pq$는 이미 아는 상수이고, 남는 것은 $p^2 + q^2$인데, 이는 바로 $3x$에 들어 있는 것이다. 실제로

$$4y^2 = (p + q)^2 = p^2 + q^2 + 2pq = p^2 + q^2 - 2 = (3x + 1) - 2 = 3x - 1.$$

따라서 P와 Q에서의 접선은 요구한 대로 $C_2 : 4y^2 = 3x - 1$ 위에서 만난다.

(사실 C_2의 모든 점이 이렇게 얻어진다. p가 모든 양의 실수를 움직일 때 $2y = -(p + q) = \frac{1}{p} - p$는 모든 실숫값을 가지고, 그러면 x는 C_2의 방정식으로 정해진다.)

C_1과 C_2는 만나는가?

C_2의 방정식에 $x = t^2$, $y = t^3$을 대입하면

$$4t^6 = 3t^2 - 1 \iff 4u^3 - 3u + 1 = 0, \quad \text{여기서} u = t^2 \geq 0.$$

분명히 $u = -1$이 근이고, 인수 $u+1$로 나누면

$$4u^3 - 3u + 1 = (u+1)(4u^2 - 4u + 1) = (u+1)(2u-1)^2.$$

이다. $u \geq 0$이므로 가능한 것은 $u = \frac{1}{2}$뿐이고, 따라서 $t = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$이다. 그러므로 두 곡선은 **실제로** 만나며, 그 교점은 정확히 다음 두 점이다.

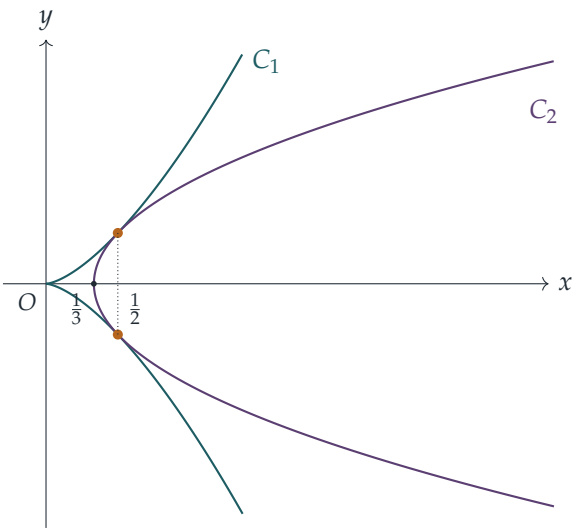
$$\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2\sqrt{2}}\right) \quad \text{와} \quad \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2\sqrt{2}}\right).$$

중근(repeated root)은 더 많은 것을 알려 준다. 두 곡선은 그 점에서 교차하는 것이 아니라 접한다. 이를 직접 확인할 수 있다. $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$에서 C_1의 기울기는 $\frac{3t}{2} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$이다. $4y^2 = 3x - 1$을 음함수 미분(implicit differentiation)하면 $8y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3$이므로, $y = \frac{1}{2\sqrt{2}}$에서 C_2의 기울기는 $\frac{3}{8y} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$으로 같다. x축에 대한 대칭성에 의해 다른 점에서도 마찬가지이다.

$u \geq 0$일 때 $4u^3 - 3u + 1 = (u+1)(2u-1)^2 \geq 0$이므로 곡선 C_1은 결코 포물선(parabola)의 안쪽으로 들어가지 않는다. 즉 C_2는 두 접점을 제외하면 C_1의 두 갈래 사이에 놓인다.

개형

C_1은 $y^2 = x^3$을 만족한다. 이 곡선은 $x \geq 0$인 영역에 있고, x축에 대하여 대칭이며, O에서 첨점을 가진다(두 갈래 모두 기울기가 $\frac{3t}{2} \to 0$이므로 양의 x축 방향으로 O를 떠난다). C_2는 꼭짓점(vertex)이 $(\frac{1}{3}, 0)$이고 오른쪽으로 열린 포물선 $x = \frac{1}{3}(4y^2 + 1)$이며, 역시 x축에 대하여 대칭이다. 포물선은 첨점 안쪽, C_1의 두 갈래 사이에 놓이며, $x = \frac{1}{2}$에서 각 갈래와 한 번씩 접한다.



검산

- $p = 1, q = -1$로 두면 $P = (1,1), Q = (1,-1)$이고 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 1 - 1 = 0$이다. 접선은 $2y = 3x - 1$과 $2y = -3x + 1$이며, C_2의 꼭짓점인 $(\frac{1}{3}, 0)$에서 만난다.
- $p = 2, q = -\frac{1}{2}$로 두면 접선 $2y = 6x - 8$과 $2y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{8}$은 $x = \frac{13}{12}, y = -\frac{3}{4}$에서 만나고, $4y^2 = \frac{9}{4} = 3 \cdot \frac{13}{12} - 1$이다.
- 접점 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}}) \approx (0.5, 0.35355)$는 $4y^2 = \frac{1}{2} = 3x - 1$을 만족하고, 그 점에서 두 기울기는 모두 ≈ 1.06066이다. $pq = -1$인 무작위 쌍 10^5개를 컴퓨터로 확인한 결과, 모든 교점이 반올림 오차 범위 안에서 C_2 위에 있었다.

흔한 실수

- $p = 0$ 또는 $q = 0$을 제외하는 것을 잊는 실수. $pq = -1$을 얻기 위해 나누기 전에 인수 p^2q^2가 0이 아님을 확인해야 한다.
- $p - q$가 왜 0이 아닌지 밝히지 않고 $p - q$로 나누는 실수.
- "$4u^3 - 3u + 1 = 0$이 근을 가진다"에서 멈추고, 그 근이 $u = t^2 \geq 0$을 만족하는지 확인하지 않는 실수. 근 $u = -1$은 C_1의 어떤 점에도 대응하지 않는다.

STEP 너머

곡선 $y^2 = x^3$은 대표적인 **첨점 삼차곡선**(*cuspidal cubic*)이며, 곡선을 매개변수로 나타낸 곡선과 만나게 하여 중근으로부터 접함을 읽어 내는 기법은 대수기하학(algebraic geometry)의 출발점이다. 교차 중복도(intersection multiplicity)는 곡선들이 몇 번 만나는지를 세고, 베주(Bézout) 정리는 삼차곡선(cubic)과 원뿔곡선(conic)이 제대로 세면 여섯 점에서 만난다고 말한다. 여기서 그 여섯 개는 중근 $t = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$(모두 합쳐 네 개)와 복소수 쌍 $t = \pm i$이다. 친절한 입문서로는 Kirwan, *Complex Algebraic Curves*(복소 대수곡선)가 있다.

풀이

STEP II 2016, 문제 2

순수수학 • 인수정리

> **STEP II 2016, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/16-s2-q2

핵심 아이디어

$(*)$를 계수에 마침 a와 b가 들어 있는 c에 대한 다항식(polynomial)으로 생각한다. 인수정리(factor theorem)에 따르면 $c-(a+b)$가 인수(factor)가 되는 것은 $c=a+b$를 대입한 값이 영이 될 때, 그리고 그때뿐이다. 인수 하나를 찾으면 a, b, c에 대한 $(*)$의 대칭성(symmetry)이 인수 두 개를 공짜로 더 건네주고, 차수(degree)를 세어 보면 인수분해(factorisation)가 끝난다. 그러면 두 방정식은 변장한 특수한 경우일 뿐이다. 할 일은 이들과 맞아떨어지도록 a, b, c (나중에는 d, e)를 고르는 것이다.

풀이

인수 $a+b-c$

$(*)$를 $F(a,b,c)$로 쓴다. c에 대한 다항식으로 보면, F가 인수 $c-(a+b)$를, 따라서 $a+b-c$를 가질 필요충분조건(if and only if)은 $F(a,b,a+b)=0$이다. $p=a+b$로 놓고 $c=p$로 둔다. 그러면 $a+b+c=2p$이고, $a^2+b^2=p^2-2ab$와 $a^3+b^3=p^3-3abp$를 이용하면

$$a^2+b^2+c^2=2p^2-2ab, \qquad a^3+b^3+c^3=2p^3-3abp.$$

따라서

$$\begin{aligned} F(a,b,a+b) &= 8p^3-6(2p)(2p^2-2ab)+8(2p^3-3abp) \\ &= 8p^3-24p^3+24abp+16p^3-24abp=0, \end{aligned}$$

이므로 요구한 대로 $a+b-c$는 $(*)$의 인수이다.

$(*)$를 완전히 인수분해하기

F는 a, b, c를 어떻게 재배열해도 변하지 않는다. b와 c를 바꾸면 인수 $a+b-c$는 $a+c-b$가 되고, a와 c를 바꾸면 $b+c-a$가 된다. 따라서

$$a+b-c, \qquad b+c-a, \qquad c+a-b$$

세 개가 모두 인수이다. 이들은 서로 다른 일차 다항식(linear polynomial)이고 어느 것도 다른 것의 상수배가 아니므로, 이들의 곱은 F를 나눈다. F의 모든 항의 차수가 3이므로 나머지 인수의 차수는 0이다. 즉 그것은 상수 k이고

$$F(a,b,c) = k(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

k를 구하기 위해 $a=b=c=1$을 대입한다. 좌변은 $27-6\cdot 3\cdot 3+8\cdot 3=-3$이고 곱은 1이다. 따라서 $k=-3$이고

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3-6(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)+8(a^3+b^3+c^3)\\ = -3(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).\end{aligned}$$

소문항 (i)

방정식의 가운데 항과 마지막 항을 나누어 $(*)$의 꼴로 만든다.

$$(x+1)^3-6(x+1)\left(x^2+\tfrac{5}{2}\right)+8\left(x^3+\tfrac{13}{4}\right)=0.$$

생각해 보기 어떤 a, b, c의 값이 이것을 정확히 $(*)$로 만드는가?

b, c를 상수로 두고 $a=x$로 해 본다. 필요한 조건은 다음과 같다.

$$b+c=1, \qquad b^2+c^2=\tfrac{5}{2}, \qquad b^3+c^3=\tfrac{13}{4}.$$

앞의 두 식에서 $2bc=(b+c)^2-(b^2+c^2)=-\tfrac{3}{2}$이므로 $bc=-\tfrac{3}{4}$이다. 그러면

$$b^3+c^3=(b+c)^3-3bc(b+c)=1+\tfrac{9}{4}=\tfrac{13}{4},$$

이므로 세 번째 조건은 저절로 성립한다. 이제 b, c는 $t^2-t-\tfrac{3}{4}=0$, 즉 $(2t-3)(2t+1)=0$의 근이므로 $b=\tfrac{3}{2}, c=-\tfrac{1}{2}$이다.

$a=x, b=\tfrac{3}{2}, c=-\tfrac{1}{2}$로 두면 인수분해에서 다음을 얻는다.

$$a+b-c=x+2, \qquad b+c-a=1-x, \qquad c+a-b=x-2,$$

따라서 방정식은 $-3(x+2)(1-x)(x-2)=0$이 되고, 해는

$$x=-2, \quad x=1, \quad x=2.$$

소문항 (ii)

네 변수 식을 $G(a,b,d,e)$로 쓴다. ($c = d+e$로 놓으면 $a+b-d-e$가 $a+b-c$처럼 보이므로 이 인수를 짐작할 수 있다. 하지만 직접 확인하는 것도 그만큼 빠르다.) G를 e에 대한 다항식으로 보면, 인수정리에 의해 $a+b = d+e$일 때 $G = 0$임을 보이면 충분하다. $p = a+b = d+e$라 하자. 앞에서와 똑같이 $a^2+b^2 = p^2-2ab$, $d^2+e^2 = p^2-2de$, $a^3+b^3 = p^3-3abp$, $d^3+e^3 = p^3-3dep$이므로, $q = ab+de$로 두면

$$\begin{aligned} G &= (2p)^3 - 6(2p)(2p^2-2q) + 8(2p^3-3pq) \\ &= 8p^3 - 24p^3 + 24pq + 16p^3 - 24pq = 0. \end{aligned}$$

따라서 $a+b-d-e$는 G의 인수이다.

이제 G는 a, b, d, e를 어떻게 재배열해도 변하지 않는다. 인수 $a+b-d-e$는 네 문자를 두 쌍 $\{a,b\}$와 $\{d,e\}$로 나누는 데서 나온다. 쌍으로 나누는 나머지 두 방법에서 다음 인수들을 얻는다.

$$a+d-b-e \quad (\text{교환: } b,d), \qquad a+e-b-d \quad (\text{교환: } b,e).$$

이 세 일차 인수는 서로 다르고 어느 것도 다른 것의 배수가 아니며, G는 차수가 3인 동차식(homogeneous polynomial)이므로 어떤 상수 k에 대해 $G = k(a+b-d-e)(a+d-b-e)(a+e-b-d)$이다. $a = 1, b = d = e = 0$을 대입하면 좌변은 $1-6+8 = 3$, 우변은 k이므로

$$G = 3(a+b-d-e)(a+d-b-e)(a+e-b-d).$$

방정식에 대해서는 $a = x$로 두고, 다음을 만족하는 상수 b, d, e를 잡는다.

$$b+d+e = 6, \qquad b^2+d^2+e^2 = 14, \qquad b^3+d^3+e^3 = 36.$$

수 $1, 2, 3$이 조건을 만족한다. $1+2+3 = 6$, $1+4+9 = 14$, $1+8+27 = 36$. 따라서 $a = x$, $b = 1, d = 2, e = 3$으로 두면 방정식은 정확히 $G = 0$이고, 이는 다음과 같이 인수분해된다.

$$3(x+1-2-3)(x+2-1-3)(x+3-1-2) = 3(x-4)(x-2)x = 0.$$

따라서 해는

$$x = 0, \quad x = 2, \quad x = 4.$$

검산

- $(*)$에 $a = b = 1, c = 2$를 대입하면 $64 - 6\cdot 4\cdot 6 + 8\cdot 10 = 0$으로, 인수 $a+b-c$가 예측하는 대로이다.
- (i)에서 $x = 1$이면 $8 - 3\cdot 2\cdot 7 + 2\cdot 17 = 8 - 42 + 34 = 0$이다.

- (ii)에서 $x = 0$이면 $216 - 6 \cdot 6 \cdot 14 + 8 \cdot 36 = 216 - 504 + 288 = 0$이고, $x = 4$이면 $1000 - 6 \cdot 10 \cdot 30 + 8 \cdot 100 = 0$이다.
- 인수분해는 변수에 수천 개의 무작위 유리수 값을 넣어 컴퓨터로도 확인하였다.

흔한 실수

- 상수를 잊는 실수: $(*)$는 인수들의 곱 자체가 아니라 그 곱의 -3배이다. 편리한 값을 대입하여 항상 k를 확정해야 한다.
- (ii)에서 인수를 세 개보다 많이 나열하는 실수. 예를 들어 a와 d를 바꾸면 $d + b - a - e$가 나오는데, 이것은 $-(a + e - b - d)$일 뿐이다. 진정으로 서로 다른 세 인수는 네 문자를 두 개씩 짝짓는 세 가지 방법에서 나온다.
- 모든 것을 무작정 전개하는 실수. 그래도 답은 나오지만 길고 실수하기 쉽다. 방정식을 항등식(identity)에 맞추는 것이 이 문제의 핵심이다.

STEP 너머

인수정리는 임의의 체(field) 위에서 성립하며, 여기서는 변수 하나를 뺀 나머지를 모두 상수로 취급하여 여러 변수의 다항식에 적용하였다. 대칭성과 다항식의 유일 인수분해(unique factorisation)를 함께 쓰면 강력하다. 대칭다항식(symmetric polynomial) 이론에 따르면 모든 대칭다항식은 기본 대칭다항식 $a + b + c$, $ab + bc + ca$, abc로 나타낼 수 있으며, 이것이 (i)에서 b, c에 대한 조건 뒤에 숨은 구조이다. 덧붙여, 곱 $(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)$는 삼각형의 넓이에 대한 헤론(Heron)의 공식에 나타나는 바로 그 식이다. 다항식환(polynomial ring)과 인수분해에 대해 더 알고 싶다면 Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)를 보라.

풀이

STEP II 2016, 문제 3

순수수학 • 다항식의 근

STEP II 2016, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/16-s2-q3

핵심 아이디어

모든 것은 하나의 항등식(identity) $\mathrm{f}_n(x) = \mathrm{f}_{n-1}(x) + \dfrac{x^n}{n!}$에 바탕을 둔다. 이를 소문항 (i)과 함께 쓰면, f_n의 근(root) a에서의 기울기가 $\mathrm{f}_n'(a) = -a^n/n!$임을 알 수 있다. 따라서 근을 구하지 않고도 모든 근에서의 기울기(gradient)를 알 수 있다. 모든 근의 부호가 같으므로 그 기울기들의 부호도 모두 같다. 그런데 곡선은 그 사이에서 한 번 아래로 축을 지나지 않고서는 위쪽 방향으로 두 번 연달아 축을 지날 수 없다.

풀이

이 풀이 전체에서 $\mathrm{f}_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$로 쓴다.

소문항 (i)

항별로 미분(term by term differentiation)하면 상수항 1은 사라지고, $1 \le k \le n$에 대해

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^k}{k!}\right) = \frac{kx^{k-1}}{k!} = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}.$$

이다. 따라서

$$\mathrm{f}_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^j}{j!} = \mathrm{f}_{n-1}(x),$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

소문항 (ii)

$x \geq 0$이면 $\mathrm{f}_n(x)$의 모든 항은 음이 아니고 첫째 항이 1이므로 $\mathrm{f}_n(x) \geq 1 > 0$이다. 따라서 어떤 근도 $a \geq 0$을 만족할 수 없고, 모든 실근은 $a < 0$이다. ($n = 0$일 때는 $\mathrm{f}_0 = 1$이 근을 전혀 갖지 않으므로 이 결론과 모순되지 않는다.)

소문항 (iii)

정의로부터 $\mathrm{f}_n(x) = \mathrm{f}_{n-1}(x) + \dfrac{x^n}{n!}$이다. $\mathrm{f}_n(a) = 0$이면 소문항 (i)에 의해

$$\mathrm{f}_n'(a) = \mathrm{f}_{n-1}(a) = \mathrm{f}_n(a) - \frac{a^n}{n!} = -\frac{a^n}{n!},$$

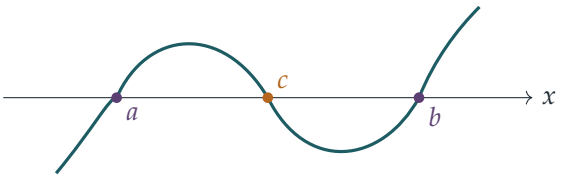
이고, 마찬가지로 $\mathrm{f}_n'(b) = -b^n/n!$이다. 따라서

$$\mathrm{f}_n'(a)\,\mathrm{f}_n'(b) = \frac{(ab)^n}{(n!)^2} > 0,$$

이다. 소문항 (ii)에 의해 $a < 0$이고 $b < 0$이므로 $ab > 0$이기 때문이다. 이것이 구하는 부등식이다. 특히 두 기울기 모두 0이 아니며, 둘의 부호가 같다.

> **생각해 보기** 두 기울기의 부호가 같으면 왜 그 사이에 또 다른 근이 반드시 있어야 할까?

$a < b$로 두고 두 기울기가 모두 양수라고 하자(음수인 경우는 이를 뒤집은 것이다). $\mathrm{f}_n'(a) > 0$이므로 곡선은 a에서 위쪽으로 축을 지나고, 따라서 x가 a보다 조금 크면 $\mathrm{f}_n(x) > 0$이다. 또 $\mathrm{f}_n'(b) > 0$이므로 곡선은 b에서도 위쪽으로 축을 지나고, 따라서 x가 b보다 조금 작으면 $\mathrm{f}_n(x) < 0$이다. 어떤 점에서 양수이고 그보다 뒤의 점에서 음수인 연속함수(continuous function)는 그 사이에서 반드시 0이 되므로(중간값 정리(intermediate value theorem)), $a < c < b$인 어떤 c에 대해 $\mathrm{f}_n(c) = 0$이다.



곡선은 a를 지나며 올라가고 b를 지나며 올라가므로, 그 사이 어딘가에서 축을 지나 내려와야 한다.

실근은 많아야 하나이다. $(*)$가 서로 다른 실근을 두 개 이상 갖는다고 가정하자. 이는 n차 다항식(polynomial)이므로 근의 개수가 유한하고, 따라서 그중 두 근 $a < b$를 그 사이에 다른 근이 없도록, 즉 **이웃하도록** 고를 수 있다. 그런데 위의 논증은 a와 b 사이에 엄격히 놓인 근 c를 만들어 내므로 모순이다. 따라서 $(*)$의 실근은 많아야 하나이다. (이 논증은 문제에서

처럼 $n \geq 2$를 사용했다. $n = 1$이면 유일한 근은 -1이고 $n = 0$이면 근이 없으므로, 이 결론은 모든 n에 대해 성립한다.)

n이 홀수인 경우. 이때 f_n은 홀수 차수이고 최고차항의 계수(leading coefficient) $1/n!$이 양수이므로, $x \to -\infty$일 때 $\mathrm{f}_n(x) \to -\infty$이고 $x \to +\infty$일 때 $\mathrm{f}_n(x) \to +\infty$이다. 중간값 정리에 의해 이 함수는 실근을 적어도 하나 가지며, 따라서 **정확히 하나**를 갖는다.

n이 짝수인 경우. $n = 0$이면 근이 없다. 짝수 $n \geq 2$에 대해서는 $x \to \pm\infty$일 때 $\mathrm{f}_n(x) \to +\infty$이므로, f_n은 어떤 점 x_0에서 전역 최솟값(global minimum)을 가지며, 그 점에서 $\mathrm{f}_n'(x_0) = \mathrm{f}_{n-1}(x_0) = 0$이다. $\mathrm{f}_{n-1}(0) = 1 \neq 0$이므로 $x_0 \neq 0$이고, 따라서

$$\mathrm{f}_n(x_0) = \mathrm{f}_{n-1}(x_0) + \frac{x_0^n}{n!} = \frac{x_0^n}{n!} > 0,$$

이다. n이 짝수이기 때문이다. 최솟값이 양수이므로 모든 x에 대해 $\mathrm{f}_n(x) > 0$이고, $(*)$는 **실근을 갖지 않는다**.

(다른 방법: 근 a가 있다면 $\mathrm{f}_n'(a) \neq 0$이므로 그 근은 단순근(simple root)이고, 따라서 f_n은 그 점에서 부호가 바뀐다. 그런데 최고차항의 계수가 양수인 짝수 차 다항식이 정확히 한 번만 부호가 바뀐다면, 충분히 큰 모든 x에서 음수이거나 절댓값이 매우 큰 음수인 모든 x에서 음수여야 하는데, 이는 불가능하다.)

검산

- $n = 1$: $1 + x = 0$은 유일한 근 -1을 갖는다. $n = 2$: $1 + x + \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}\left((x+1)^2 + 1\right) > 0$이므로 근이 없다. 두 경우 모두 결론과 맞는다.
- $n = 3$: 근은 약 -1.596이고, 그 점에서 $\mathrm{f}_3'(a) = \mathrm{f}_2(a) \approx 0.678 = -a^3/3!$로 예측과 같다.
- $n \leq 25$인 모든 경우에 대해 f_n의 부호 변화를 컴퓨터로 확인한 결과, 홀수 n에서는 근이 정확히 하나, 짝수 n에서는 근이 하나도 없었다.

흔한 실수

- 기울기의 곱이 양수임을 보이면서 왜 $ab > 0$인지 밝히지 않는 것. 여기에는 소문항 (ii)가 필요하다.
- 두 근을 이웃하도록 고르지 않은 채, 임의의 두 근 사이에 근이 있다는 사실만으로 "근은 많아야 하나"라고 결론짓는 것. 모순을 만들어 내는 것은 바로 그 선택이다.
- 짝수 n의 경우 $x_0 \neq 0$임을 확인하지 않는 것. $x_0^n/n! > 0$이 엄격한 부등식이 되려면 이것이 필요하다.

STEP 너머

다항식 f_n은 e^x의 테일러 다항식(Taylor polynomial)이고, 소문항 (i)은 $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$의 유한한 그림자이다. e^x는 결코 0이 되지 않으므로 f_n의 실근이 적은 것은 자연스럽다. 이 다항식들의 복소근을 $1/n$배로 축소하면, $n \to \infty$일 때 세게(Szegő) 곡선이라 불리는 곡선 위로 모여든다. 여기서 사용한 도구인 중간값 정리와 연속함수의 최솟값 존재는 대학의 첫 해석학(analysis) 강의에서 엄밀하게 증명한다. Abbott, *Understanding Analysis*를 참고하라.

풀이

STEP II 2016, 문제 4

순수수학 • 유리함수의 치역

STEP II 2016, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/16-s2-q4

핵심 아이디어

분모를 없애면 y의 정의는 x에 대한 이차방정식(quadratic equation)이 되고, "x가 실수이다"라는 조건은 "판별식(discriminant)이 음이 아니다"라는 조건이 된다. θ를 없애려면 모든 θ에 대해 성립하는 $y\cos\theta - \sin\theta$의 상계(upper bound)가 필요하다. 이 식을 $(y, -1)$과 단위벡터(unit vector) $(\cos\theta, \sin\theta)$의 내적(dot product)으로 쓰면 정확히 $\sqrt{y^2+1}$을 얻는다. 소문항 (ii)에서는 부등식의 사슬에 있는 모든 부등식이 등식이 되어야 하며, 이로부터 x와 θ가 모두 결정된다.

풀이

소문항 (i)

먼저 분모가 결코 0이 되지 않음을 확인한다. x에 대한 이차식으로 보면 $x^2 + x\cos\theta + 1$의 판별식은 $\cos^2\theta - 4 < 0$이므로 이 식은 항상 양수이다. 따라서 양변에 분모를 곱해도 안전하다.

$$y\left(x^2 + x\cos\theta + 1\right) = x^2 + x\sin\theta + 1 \iff (y-1)x^2 + (y\cos\theta - \sin\theta)\,x + (y-1) = 0.$$

$y \neq 1$이면 이것은 x에 대한 진짜 이차방정식이고, 이 방정식이 실근 x를 가질 필요충분조건은 판별식이 음이 아닌 것이다.

$$(y\cos\theta - \sin\theta)^2 - 4(y-1)^2 \geq 0.$$

$y = 1$이면 증명할 부등식은 $(\cos\theta - \sin\theta)^2 \geq 0$이 되는데, 이는 어차피 참이다. 따라서 실수 x에 대하여

$$(y\cos\theta - \sin\theta)^2 \geq 4(y-1)^2,$$

이 성립하고, 이것이 증명할 내용이었다.

생각해 보기 어떻게 하면 θ를 없앨 수 있을까? θ에 의존하지 않으면서 $(y\cos\theta - \sin\theta)^2$보다 큰 것을 찾고 싶다.

식 $y\cos\theta - \sin\theta$는 $(y, -1)$과 단위벡터 $(\cos\theta, \sin\theta)$의 스칼라곱이므로, 그 크기는 많아야 $|(y,-1)| = \sqrt{y^2+1}$이다. 같은 내용을 코시-슈바르츠 부등식(Cauchy–Schwarz inequality)으로 얻을 수도 있고, 다음 식에서 직접 얻을 수도 있다.

$$(y^2+1)(\cos^2\theta + \sin^2\theta) - (y\cos\theta - \sin\theta)^2 = (y\sin\theta + \cos\theta)^2 \geq 0,$$

따라서 $(y\cos\theta - \sin\theta)^2 \leq y^2+1$이다. 이를 첫 번째 결과와 결합하면

$$y^2+1 \geq (y\cos\theta - \sin\theta)^2 \geq 4(y-1)^2,$$

이고, 이것이 두 번째 부등식이다.

전개하면 $y^2+1 \geq 4y^2 - 8y + 4$, 즉

$$3y^2 - 8y + 3 \leq 0.$$

이다. $3y^2 - 8y + 3 = 0$의 근은 $y = \dfrac{8 \pm \sqrt{64-36}}{6} = \dfrac{4 \pm \sqrt{7}}{3}$이고, 이 이차식은 최고차항의 계수(leading coefficient)가 양수이므로 정확히 두 근 사이에서 0 이하이다. 그러므로

$$\frac{4-\sqrt{7}}{3} \leq y \leq \frac{4+\sqrt{7}}{3}.$$

소문항 (ii)

$y = \frac{1}{3}(4+\sqrt{7})$이라 하면 $y - 1 = \frac{1}{3}(1+\sqrt{7}) > 0$이다. 이때

$$y^2+1 = \frac{16+8\sqrt{7}+7}{9} + 1 = \frac{32+8\sqrt{7}}{9},$$
$$4(y-1)^2 = \frac{4(1+2\sqrt{7}+7)}{9} = \frac{32+8\sqrt{7}}{9}.$$

두 값이 같고 $2(y-1) > 0$이므로, 양의 제곱근을 취하면 $\sqrt{y^2+1} = 2(y-1)$을 얻는다. 이것이 증명할 내용이었다. (당연한 결과이다. y는 $3y^2 - 8y + 3 = 0$의 근이고, 이 방정식은 곧 $y^2+1 = 4(y-1)^2$이다.)

생각해 보기 이 등식은 소문항 (i)의 부등식 사슬에 대해 무엇을 말해 주는가?

사슬 $y^2+1 \geq (y\cos\theta - \sin\theta)^2 \geq 4(y-1)^2$의 양 끝이 이제 같으므로, 두 부등식은 모두 등식이다.

판별식이 o이므로, x에 대한 이차방정식은 중근(repeated root)

$$x = -\frac{y\cos\theta - \sin\theta}{2(y-1)}.$$

을 가진다.

θ에 대한 상계가 실제로 달성되므로, $y\sin\theta + \cos\theta = 0$이고, 따라서

$$\tan\theta = -\frac{1}{y} = -\frac{3}{4+\sqrt{7}} = -\frac{3(4-\sqrt{7})}{16-7} = \frac{\sqrt{7}-4}{3}.$$

이다. (여기서 $\cos\theta \neq 0$이다. 그렇지 않으면 $\sin\theta = 0$도 되기 때문이다.) 또한 $(y\cos\theta - \sin\theta)^2 = y^2 + 1 = 4(y-1)^2$이므로 $y\cos\theta - \sin\theta = \pm 2(y-1)$이고, 따라서

$$x = \mp 1.$$

이다. 구체적으로, $(\cos\theta, \sin\theta)$는 $(y, -1)$과 평행하다. 같은 방향을 가리키면 $\cos\theta > 0$이고 $\sin\theta < 0$이므로 $y\cos\theta - \sin\theta = +2(y-1)$이고 $x = -1$이다. 반대 방향을 가리키면 $\cos\theta < 0$이고 $\sin\theta > 0$이므로 $x = 1$이다. 두 경우 모두

$$x = \pm 1, \qquad \tan\theta = \frac{\sqrt{7}-4}{3}.$$

이다. 사실 두 경우는 하나이다. x를 $-x$로, θ를 $\theta + \pi$로 바꾸어도 y는 변하지 않기 때문이다.

검산

- $x = 1$에서 식은 $y = \dfrac{2+\sin\theta}{2+\cos\theta}$이다. $\tan\theta = \frac{1}{3}(\sqrt{7}-4) \approx -0.4514$를 만족하는 제2사분면(quadrant)의 θ를 택하면 $\theta \approx 2.7176$이고, 이때 $y \approx 2.21525$로 $\frac{1}{3}(4+\sqrt{7}) \approx 2.21525$와 일치한다.
- 컴퓨터로 실수 x와 θ를 무작위로 많이 뽑아 보면, y의 값은 0.45142와 2.21524 사이에 머물렀고, 이는 경계 $\frac{1}{3}(4 \mp \sqrt{7}) \approx 0.451416$과 2.215250의 바로 안쪽이다.
- 눈여겨볼 만한 깔끔한 우연이 있다. $\tan\theta = -\frac{1}{3}(4-\sqrt{7})$은 하한에 음의 부호를 붙인 값인데, 이는 두 경계가 서로 역수(reciprocal)이기 때문이다(두 값의 곱은 $\frac{1}{9}(16-7) = 1$이다).

흔한 실수

- $y = 1$인 경우를 빠뜨리는 것. 이 경우 x에 대한 방정식은 이차방정식이 아니므로 판별식 논증을 그대로 적용할 수 없다.

- $\sqrt{y^2+1} = -2(y-1)$로 두거나 부호를 확인하지 않는 것. 여기서 양의 제곱근이 맞는 것은 오직 $y > 1$이기 때문이다.
- x의 값을 하나만 답하는 것. $x = 1$과 $x = -1$이 모두 나타나며, 각각 θ는 서로 다른 사분면에 있다.

STEP 너머

단계 $(y\cos\theta - \sin\theta)^2 \leq (y^2+1)(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$는 코시-슈바르츠 부등식 $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|$의 2차원인 경우이며, 등호는 정확히 두 벡터가 평행할 때 성립한다. 이 부등식은 모든 내적 공간(inner-product space)에서 성립하며, 대학 1학년 해석학과 선형대수학에서 가장 많이 쓰이는 도구 가운데 하나이다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 이를 기하적으로 전개하고, Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)는 이 부등식이 해석학에서 활용되는 모습을 보여 준다.

풀이

STEP II 2016, 문제 5

순수수학 • 이항계수 항등식

> **STEP II 2016, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/16-s2-q5

핵심 아이디어

세 항등식(identity)은 모두 하나의 요령에서 나온다. 한 함수를 두 가지 방법으로 곱의 꼴로 쓰고, x의 한 거듭제곱의 계수를 비교하는 것이다. 첨자의 합이 일정한 이항계수(binomial coefficient)들의 곱의 합은 두 거듭제곱급수(power series)를 곱한 뒤 계수 하나를 읽어 낼 때 얻는 것과 정확히 같다. $p \geq q \geq 0$가 아닐 때 $\binom{p}{q} = 0$으로 둔다는 문제의 약속 덕분에, 어떤 항이 존재하는지 따질 필요 없이 j에 대한 합을 깔끔한 범위에서 잡을 수 있다.

풀이

소문항 (i)

$|x| < 1$일 때 이항급수(binomial series)에 따르면 $(1-x)^{-N}$에서 x^n의 계수는 다음과 같다.

$$\frac{(-N)(-N-1)\cdots(-N-n+1)}{n!}(-1)^n = \frac{N(N+1)\cdots(N+n-1)}{n!}$$
$$= \frac{(N+n-1)!}{n!\,(N-1)!} = \binom{N+n-1}{n}.$$

인수들에서 나온 n개의 음의 부호가 $(-x)^n$에서 나온 n개의 음의 부호와 상쇄된다. 따라서

$$(1-x)^{-N} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{N+n-1}{n} x^n \qquad (|x| < 1).$$

($n = 0$일 때 계수는 $\binom{N-1}{0} = 1$이다. $N \geq 1$이므로 문제없다.)

이제 $(1-x)^{-1}(1-x)^{-N} = (1-x)^{-(N+1)}$이다. 위의 전개에서 N 대신 $N+1$을 쓰면, 우변에서 x^n의 계수는 $\binom{N+n}{n}$이다.

좌변에서 $(1-x)^{-1} = \sum_{i\geq 0} x^i$는 모든 계수가 1이다. $(1-x)^{-N}$의 항 x^j는 $(1-x)^{-1}$의 x^{n-j}와 짝을 이루어야 하고, j는 0부터 n까지 움직인다. 따라서 곱에서 x^n의 계수는

$$\sum_{j=0}^{n} 1 \cdot \binom{N+j-1}{j}.$$

두 거듭제곱급수는 모두 $|x|<1$에서 수렴(converge)하고 그 범위에서 같은 함수를 나타내므로, 계수가 서로 같다. 그러므로

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{N+j-1}{j} = \binom{N+n}{n},$$

이고, 이것이 증명하려던 식이다.

소문항 (ii)

$(1+x)^{m+n} = (1+x)^m(1+x)^n$을 이용한다. 여기서 세 식은 모두 다항식(polynomial)이다. 문제의 약속을 쓰면

$$(1+x)^m = \sum_{j\geq 0} \binom{m}{j} x^j, \qquad (1+x)^n = \sum_{k\geq 0} \binom{n}{k} x^k,$$

로 쓸 수 있다. $j>m$ 또는 $k>n$인 계수는 0이기 때문이다. 곱에서 x^r의 계수는 $j+k=r$인 쌍, 즉 $0\leq j\leq r$이고 $k=r-j$인 쌍에서 나온다.

$$\sum_{j=0}^{r} \binom{m}{j}\binom{n}{r-j}.$$

> **생각해 보기** $j>m$ 또는 $r-j>n$인 항은 어떻게 되는가? 그런 거듭제곱은 다항식에 나타나지 않는다.

그런 항에는 $j>m$인 인수 $\binom{m}{j}$ 또는 $r-j>n$인 인수 $\binom{n}{r-j}$가 들어 있으므로, 약속에 의해 0이다. 이 항들은 아무것도 더하지 않을 뿐 아니라 실제로 존재하는 항들의 곱에도 대응하지 않으므로, $0\leq j\leq r$에 대한 합이 정확히 맞다. $(1+x)^{m+n}$에서 x^r의 계수는 $\binom{m+n}{r}$이다. 같은 다항식은 계수가 같으므로

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{j=0}^{r} \binom{m}{j}\binom{n}{r-j}.$$

소문항 (iii)

인수 $(-1)^j\binom{m+j-1}{j}$를 보면 소문항 (i)에서 x 대신 $-x$를 넣는 것이 떠오른다. 소문항 (i)의 전개에서 x를 $-x$로, N을 m으로 바꾸면

$$(1+x)^{-m} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{m+j-1}{j} x^j \qquad (|x|<1).$$

생각해 보기 어떤 곱을 이용해야 하는가?

다른 인수 $\binom{N+m}{n-j}$는 $(1+x)^{N+m}$의 계수이고, 답 $\binom{N}{n}$은 $(1+x)^N$의 계수이다. m이 양의 정수이므로 $|x|<1$에서

$$(1+x)^{N+m}(1+x)^{-m}=(1+x)^N.$$

좌변에서 $(1+x)^{N+m}=\sum_{k\geq 0}\binom{N+m}{k}x^k$이다($k>N+m$에 대해서는 약속을 쓴다). x^n의 계수는 $0\leq j\leq n$에 대하여 $(1+x)^{-m}$의 x^j와 $(1+x)^{N+m}$의 x^{n-j}를 곱한 것에서 나온다.

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{N+m}{n-j}(-1)^j\binom{m+j-1}{j}.$$

우변에서 $(1+x)^N$의 x^n의 계수는 $\binom{N}{n}$이다. $n>N$이면 약속에 의해 이 값은 0인데, $(1+x)^N$의 차수가 N이므로 이것 역시 옳다. 두 변은 $|x|<1$에서 같으므로, 거듭제곱급수의 계수가 서로 같다.

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{N+m}{n-j}\binom{m+j-1}{j}=\binom{N}{n}.$$

검산

- $N=2, n=3$일 때 소문항 (i): $1+2+3+4=10=\binom{5}{3}$.
- $m=n=2, r=2$일 때 소문항 (ii): $1\cdot 1+2\cdot 2+1\cdot 1=6=\binom{4}{2}$.
- $m=2, N=3, n=2$일 때 소문항 (iii): $\binom{5}{2}\binom{1}{0}-\binom{5}{1}\binom{2}{1}+\binom{5}{0}\binom{3}{2}=10-10+3=3=\binom{3}{2}$. $n>N$이면 교대합이 0이 되어야 한다. 예를 들어 $m=1, N=1, n=2$이면 $\binom{2}{2}-\binom{2}{1}+\binom{2}{0}=1-2+1=0$이다.

세 항등식 모두 모든 $m, N\leq 9$와 $n\leq 24$에 대하여 컴퓨터로도 확인하였다.

흔한 실수

- $(1-x)^{-N}$의 계수에서 부호를 놓치는 것. $(-1)^n$이 두 번 나오며, 이 둘은 상쇄된다.
- 소문항 (iii)에서 $(1+x)^{-m}$의 급수가 무한급수이고 $|x|<1$에서만 성립한다는 것을 잊는 것. 구간에서 일치하는 두 거듭제곱급수는 계수가 같으므로 계수 비교(comparing coefficients)가 정당하다.

STEP 너머

이것이 **생성함수**(*generating functions*)의 방법이다. 수열을 거듭제곱급수의 계수로 나타내면, 급수의 곱셈은 여기서 본 합성곱(convolution) 합이 된다. 소문항 (ii)는 방데르몽드(Vandermonde) 항등식이고, 소문항 (i)은 흔히 하키스틱 항등식(hockey-stick identity)이라 부른다. 둘 다 깔끔한 셈하기 증명도 있으니 찾아볼 만하다. Wilf의 *generatingfunctionology*(온라인에서 무료로 볼 수 있다)와 Graham, Knuth, Patashnik의 *Concrete Mathematics*는 이 도구들을 훨씬 더 깊이 발전시킨다.

풀이

STEP II 2016, 문제 6

순수수학 • 체비쇼프 다항식 방정식

STEP II 2016, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/16-s2-q6

핵심 아이디어

모든 소문항은 제시된 함수를 미분방정식(differential equation)에 대입하고 $x = 1$에서의 조건을 확인하는 문제이며, 나머지는 유일성(uniqueness) 가정이 해결해 준다. (iii)과 (iv)의 요령은 y_n을 절대 전개하지 않고(우리는 y_n을 명시적으로 알지 못한다), 방정식 $(1-x^2)y_n'^2 = n^2(1-y_n^2)$ 자체를 이용하여 도함수(derivative)를 소거하는 것이다.

풀이

이 풀이 전체에서 y_k는

$$(1-x^2)\big(y_k'(x)\big)^2 = k^2\big(1-y_k(x)^2\big), \qquad y_k(1) = 1,$$

을 만족하며, 이는 $(*)$를 정리한 것에 불과하다. 어떤 함수가 y_k와 같음을 보이려면, (가정한 유일성에 의해) 그 함수가 해당 k 값에 대하여 $(*)$를 만족하고 $x = 1$에서 값 1을 가짐을 보이면 충분하다.

소문항 (i)

$k = 1$일 때 방정식은

$$(1-x^2)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + y^2 = 1.$$

이다. $y = x$이면 $y' = 1$이고, 좌변은 $(1-x^2) + x^2 = 1$이 되어 조건을 만족한다. 또한 $y(1) = 1$이므로 $y_1(x) = x$이다.

소문항 (ii)

$k = 2$일 때 방정식은

$$(1 - x^2)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + 4y^2 = 4.$$

이다. $y = 2x^2 - 1$이면 $y' = 4x$이므로

$$\begin{aligned}(1 - x^2)(4x)^2 + 4(2x^2 - 1)^2 &= 16x^2 - 16x^4 + 16x^4 - 16x^2 + 4 \\ &= 4.\end{aligned}$$

이다. $y(1) = 2 - 1 = 1$이므로 $y_2(x) = 2x^2 - 1$을 얻는다.

소문항 (iii)

간단히 $y = y_n(x)$라 쓰자. 연쇄법칙(chain rule)으로 $z = 2y^2 - 1$을 미분하면 $z' = 4yy'$이므로, y_n에 대한 방정식을 이용하면

$$(1 - x^2)z'^2 = 16y^2\,(1 - x^2)y'^2 = 16y^2 \cdot n^2(1 - y^2),$$

이다. 또한

$$4n^2z^2 = 4n^2(2y^2 - 1)^2 = 4n^2(4y^4 - 4y^2 + 1).$$

이다. 두 식을 더하면

$$(1 - x^2)z'^2 + 4n^2z^2 = 16n^2y^2 - 16n^2y^4 + 16n^2y^4 - 16n^2y^2 + 4n^2 = 4n^2,$$

이 되어, 구하려던 방정식을 얻는다.

> **?** **생각해 보기** 이 방정식은 y_{2n}과 어떤 관계가 있을까?

$(2n)^2 = 4n^2$이므로 이는 정확히 $k = 2n$일 때의 $(*)$이다. 더구나 $z(1) = 2y_n(1)^2 - 1 = 2 - 1 = 1$이다. 따라서 z는 $k = 2n$일 때 $(*)$의 해이고 $x = 1$에서 값 1을 가지므로, 유일성에 의해

$$y_{2n}(x) = 2\big(y_n(x)\big)^2 - 1.$$

이다. 확인해 보면, $n = 1$일 때 $y_2 = 2x^2 - 1$이 되어 (ii)와 일치하고, $n = 2$일 때 $y_4 = 2(2x^2 - 1)^2 - 1 = 8x^4 - 8x^2 + 1$이 된다.

소문항 (iv)

$u = y_m(x)$라 쓰면 $v = y_n(u)$이다. 연쇄법칙에 의해

$$v'(x) = y_n'(u)\,y_m'(x).$$

이다. 따라서 먼저 (x에서의) y_m에 대한 방정식을, 다음으로 (u에서의) y_n에 대한 방정식을 이용하면

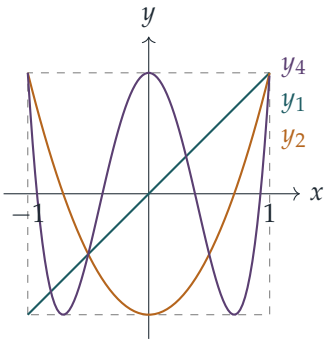
$$\begin{aligned}(1-x^2)v'^2 &= y_n'(u)^2\,(1-x^2)y_m'(x)^2\\ &= y_n'(u)^2\cdot m^2(1-u^2)\\ &= m^2\,(1-u^2)y_n'(u)^2\\ &= m^2\cdot n^2\big(1-y_n(u)^2\big) = m^2n^2(1-v^2).\end{aligned}$$

이다. 그러므로 $(1-x^2)v'^2+(mn)^2v^2=(mn)^2$이고, 이는 $k=mn$일 때의 $(*)$이다. 마지막으로

$$v(1)=y_n\big(y_m(1)\big)=y_n(1)=1,$$

이므로 유일성에 의해 $v(x)=y_{mn}(x)$이다. 이로써 증명이 끝난다.

y_n에 대한 방정식은 x가 아니라 점 u에서 적용된다. 이 방정식은 변수의 모든 값에 대하여 성립하므로 x 대신 u를 넣어 사용할 수 있다. 바로 이 단계가 (iv)를 가능하게 한다.



세 곡선 모두 $(1,1)$을 지나고 $[-1,1]$에서 -1과 1 사이에 머무는데, 이는 방정식이 강제하는 바이다. 그 구간에서 $(1-x^2)y'^2\geq 0$이므로 $k^2y^2\leq k^2$이기 때문이다.

검산

- $n=2$일 때 소문항 (iii)은 $y_4(x)=8x^4-8x^2+1$을 예측한다. 직접 대입하면 $y_4'=32x^3-16x$이고 $(1-x^2)(32x^3-16x)^2+16(8x^4-8x^2+1)^2$을 정리하면 16이 된다. $x=0.3$에서 $y_4=0.3448$이다.
- $m=n=2$일 때 소문항 (iv): $y_2(y_2(x))=2(2x^2-1)^2-1$이며, 이는 (iii)에서 얻은 y_4와 같고, 마땅히 그래야 한다.
- 컴퓨터로 정확한 산술을 이용하여 확인한 결과, 이렇게 만든 다항식들은 24 이하의 모든 k에 대하여 $(*)$를 만족하고, $m,n\leq 4$에 대하여 $y_n(y_m(x))=y_{mn}(x)$가 성립하였다.

흔한 실수

- $x = 1$에서의 조건을 잊는 것. $(*)$를 만족하는 것만으로는 충분하지 않다. $-y_k$도 이를 만족하기 때문이다.
- (iii)이나 (iv)에서 y_n을 명시적으로 전개하려 하는 것. y_n에 대해 명시적으로 알려진 것은 없다. 그 미분방정식을 이용하여 $(1-x^2)y_n'^2$을 바꾸어 써야 한다.
- (iv)에서 y_n에 대한 방정식을 $u = y_m(x)$ 대신 x로 사용하는 것. 그러면 인수 $(1-x^2)$가 엉뚱한 자리에 나타난다.

STEP 너머

함수 y_k는 체비쇼프(Chebyshev) 다항식(Chebyshev polynomials) T_k이다. $x = \cos\theta$로 놓으면 $(*)$는 $(\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta)^2 = k^2(1-y^2)$이 되고, 그 해는 $y = \cos k\theta$이므로 $T_k(\cos\theta) = \cos k\theta$이다. 그러면 소문항 (iii)은 배각 공식(double-angle formula)이 되고, 소문항 (iv)는 $\cos\big(n(m\theta)\big) = \cos(mn\theta)$라는 뜻이 된다. 한 가지 주의할 점이 있다. 문제에서 가정해도 된다고 한 유일성은 사실 엄밀히 참이 아니다. 상수함수 $y = 1$도 $(*)$와 $y(1) = 1$을 만족하기 때문이다. 이 방정식처럼 도함수가 부호를 제외하고만 결정되는 방정식이야말로 유일성 정리를 신중하게 다루어야 하는 곳이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에서 해의 존재성과 유일성을 다룬다.

풀이

STEP II 2016, 문제 7

순수수학 • 대칭성을 이용한 정적분

STEP II 2016, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/16-s2-q7

핵심 아이디어

구간(interval) $[0, a]$를 그 중점에 대하여 뒤집는 변환 $x \mapsto a - x$는 적분값을 바꾸지 않지만, 피적분함수(integrand)를 원래 함수와 멋지게 어우러지는 꼴로 바꿀 수 있다. $[0, \frac{1}{2}\pi]$에서 정의된 삼각함수 피적분함수라면 이 변환은 sin과 cos을 맞바꾸고, $[0, \frac{1}{4}\pi]$에서는 $\tan(\frac{1}{4}\pi - x)$에 대한 덧셈정리(compound-angle formula)가 그 역할을 한다. 마지막 소문항은 새로워 보이지만, 부분적분(integration by parts)을 한 번 하면 소문항 (iii)으로 바뀐다.

풀이

결과 $(*)$

$\int_0^a f(a-x)\,\mathrm{d}x$에서 $u = a - x$로 치환(substitution)하면 $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}x$이고, $x = 0$일 때 $u = a$, $x = a$일 때 $u = 0$이다. 따라서

$$\int_0^a f(a-x)\,\mathrm{d}x = \int_a^0 f(u)\,(-\mathrm{d}u) = \int_0^a f(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x,$$

인데, 적분변수의 이름은 상관없기 때문이다. 이것이 $(*)$이다.

소문항 (i)

이 적분을 I라 하자. $a = \frac{1}{2}\pi$이면 $\sin(\frac{1}{2}\pi - x) = \cos x$이고 $\cos(\frac{1}{2}\pi - x) = \sin x$이므로, $(*)$에 의해

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x.$$

이것을 원래 꼴의 I에 더하면

$$2I = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin x + \cos x}{\cos x + \sin x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} 1\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2},$$

이므로

$$I = \frac{\pi}{4}.$$

(분모(denominator) $\cos x + \sin x$는 $[0, \frac{1}{2}\pi]$에서 양수이므로 아무 문제가 없다.)

소문항 (ii)

이제 $a = \frac{1}{4}\pi$이고, 소문항 (i)의 방법으로는 더 이상 sin과 cos이 맞바뀌지 않는다. 대신 분자와 분모를 $\cos x$(이 구간에서 양수)로 나누면 피적분함수는

$$\frac{\sin x}{\cos x + \sin x} = \frac{\tan x}{1 + \tan x}.$$

이다. $t = \tan x$라 하자. $\tan(\frac{1}{4}\pi - x) = \dfrac{1-t}{1+t}$이므로

$$\frac{\tan(\frac{1}{4}\pi - x)}{1 + \tan(\frac{1}{4}\pi - x)} = \frac{(1-t)/(1+t)}{2/(1+t)} = \frac{1-t}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\tan x.$$

따라서 이 적분을 J라 하면 $(*)$에 의해

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\tan x\Big)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\Big[-\ln\cos x\Big]_0^{\frac{1}{4}\pi} \\ &= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2. \end{aligned}$$

? **생각해 보기** $(*)$를 전혀 쓰지 않고 소문항 (ii)를 푸는 방법이 있을까?

있다. $K = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}\,\mathrm{d}x$라 하자. 그러면 $J + K = \frac{1}{4}\pi$이고, 분자(numerator) $\cos x - \sin x$가 분모의 도함수(derivative)이므로

$$K - J = \Big[\ln(\cos x + \sin x)\Big]_0^{\frac{1}{4}\pi} = \ln\sqrt{2} = \tfrac{1}{2}\ln 2.$$

두 식을 빼면 $2J = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\ln 2$이고, 이는 위의 답과 일치한다.

소문항 (iii)

이 적분을 L이라 하자. 같은 덧셈정리에 의해

$$1 + \tan(\tfrac{1}{4}\pi - x) = 1 + \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \frac{2}{1 + \tan x}.$$

따라서 $(*)$에 의해

$$L = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \ln \frac{2}{1+\tan x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \big(\ln 2 - \ln(1+\tan x)\big)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\ln 2 - L.$$

그러므로 $2L = \frac{1}{4}\pi \ln 2$이고

$$L = \frac{\pi}{8}\ln 2.$$

소문항 (iv)

분자와 분모를 $\cos^2 x$로 나눈다.

$$\frac{x}{\cos x\,(\cos x + \sin x)} = \frac{x\sec^2 x}{1+\tan x}.$$

? **생각해 보기** $\dfrac{\sec^2 x}{1+\tan x}$는 소문항 (iii)과 무슨 관계가 있을까?

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+\tan x) = \sec^2 x$이므로, 이것은 정확히 $\ln(1+\tan x)$의 도함수이다. 또한 $[0, \frac{1}{4}\pi]$에서 $1+\tan x > 0$이다. 따라서 $u = x$, $\mathrm{d}v = \dfrac{\sec^2 x}{1+\tan x}\,\mathrm{d}x$, $v = \ln(1+\tan x)$로 두고 부분적분한다.

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{x\sec^2 x}{1+\tan x}\,\mathrm{d}x &= \Big[x\ln(1+\tan x)\Big]_0^{\frac{1}{4}\pi} - \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \ln(1+\tan x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{4}\ln 2 - \frac{\pi}{8}\ln 2 \qquad \text{(소문항 (iii) 이용)} \\ &= \frac{\pi}{8}\ln 2.\end{aligned}$$

따라서 소문항 (iv)의 적분은 소문항 (iii)의 적분과 같은 값을 가진다.

검산

- 소문항 (i): 피적분함수는 0에서 1까지 증가하고 점 $(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2})$에 대하여 대칭(symmetric)이므로, 평균값이 $\frac{1}{2}$이고 적분값은 구간 길이의 절반인 $\frac{1}{4}\pi$이다.
- 소문항 (ii)의 값은 소문항 (i)의 절반보다 작아야 한다. $[0, \frac{1}{4}\pi]$에서 피적분함수가 $\frac{1}{2}$보다 작기 때문이다. 실제로 $\frac{1}{8}\pi - \frac{1}{4}\ln 2 \approx 0.2194 < 0.3927$이다.
- 수치 적분(numerical quadrature)(심프슨 공식(Simpson's rule))으로 계산하면 네 소문항에 대해 0.785398, 0.219412, 0.272198, 0.272198을 얻는데, 이는 $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{1}{8}\pi - \frac{1}{4}\ln 2$, 그리고 $\frac{1}{8}\pi\ln 2$(두 번)와 일치한다.

흔한 실수

- 치환 $u = a - x$를 하면 적분의 위끝과 아래끝이 뒤바뀐다는 것을 잊는 실수. $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}x$에서 나오는 음의 부호가 이를 다시 뒤바꾼다.
- 소문항 (ii)에서 소문항 (i)처럼 sin과 cos을 맞바꾸려는 실수. $[0, \frac{1}{4}\pi]$에서의 뒤집기는 $\frac{1}{2}\pi - x$가 아니라 $x \mapsto \frac{1}{4}\pi - x$이다.
- $\int \tan x \,\mathrm{d}x = \ln\cos x$라고 쓰는 실수. 올바른 값은 $-\ln\cos x$(또는 $\ln\sec x$)이다.

STEP 너머

소문항 (iii)은 고전적인 문제이다. 같은 뒤집기 기법으로 $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln\sin x \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\pi\ln 2$와 같은 적분도 계산할 수 있는데, 이 적분은 초등함수(elementary functions)로 된 원시함수(antiderivative)로는 구할 수 없다. 대학에서는 이러한 대칭 논법이 복소 경로 적분(contour integration), 적분 기호 아래에서의 미분(differentiation under the integral sign)과 더불어, 초등함수인 원시함수가 없는 정적분(definite integral)을 다루는 도구로 쓰인다. STEP의 정신을 담은 예제를 더 많이 보려면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)를, 치환과 부분적분을 정당화하는 해석학(analysis)에 대해서는 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해하기)를 참고하라.

풀이

STEP II 2016, 문제 8

순수수학 • 적분을 이용한 합의 근사

STEP II 2016, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/16-s2-q8

핵심 아이디어

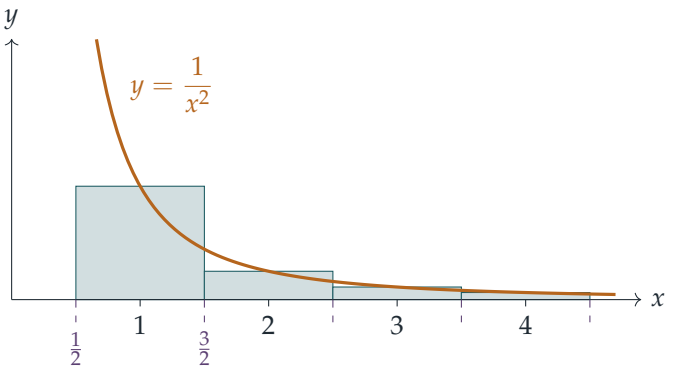
항 $\frac{1}{r^2}$은 너비가 1이고 높이가 $\frac{1}{r^2}$인 직사각형의 넓이이다. 이 직사각형의 중심을 $x = r$에 두면, 그 넓이는 $r - \frac{1}{2}$부터 $r + \frac{1}{2}$까지 $y = \frac{1}{x^2}$ 아래의 넓이와 매우 가깝다(중점 공식(midpoint rule)). 이 띠들을 이어 붙이면 합이 하나의 적분(integral)으로 바뀐다. 그러면 각 띠에서 생기는 오차를 정확히 계산할 수 있고, 이 오차들을 더하면 두 번째 급수(series) $\sum \frac{1}{r^4}$이 거의 공짜로 얻어진다.

풀이

적분과 그림

$m > \frac{1}{2}$이면 아래끝이 양수이므로 피적분함수(integrand)는 적분 구간에서 연속이고

$$\int_{m-\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{X\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_{m-\frac{1}{2}}^{X} = \frac{1}{m-\frac{1}{2}} = \frac{2}{2m-1}.$$



$x = r$에 중심을 둔 직사각형은 너비가 1, 높이가 $\frac{1}{r^2}$이므로 넓이가 $\frac{1}{r^2}$이다. 띠 $r - \frac{1}{2} \le x \le r + \frac{1}{2}$에서 곡선은 왼쪽 절반에서는 직사각형의 윗변보다 위에, 오른쪽 절반에서는 아래에 있고, 이 두 작은 조각은 거의 상쇄된다. 따라서

$$\frac{1}{r^2} \approx \int_{r-\frac{1}{2}}^{r+\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

이것을 $r = m, m+1, \ldots, n$에 대해 더하면 띠들이 끝과 끝이 맞닿아 $[m - \frac{1}{2},\ n + \frac{1}{2}]$를 덮으므로 $(*)$를 얻는다.

소문항 (i)

$(*)$에서 $n \to \infty$로 보내자. 우변은 앞에서 계산한 적분으로 수렴(converge)하므로

$$\sum_{r=m}^{\infty} \frac{1}{r^2} \approx \frac{2}{2m-1}.$$

이것을 급수 전체에 적용할 수도 있고, 처음 몇 항은 정확히 더한 뒤 꼬리(tail)만 근사할 수도 있다.

$$\begin{aligned}
m = 1: &\quad E \approx \frac{2}{1} = 2,\\
m = 2: &\quad E = 1 + \sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{r^2} \approx 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3},\\
m = 3: &\quad E = 1 + \frac{1}{4} + \sum_{r=3}^{\infty} \frac{1}{r^2} \approx \frac{5}{4} + \frac{2}{5} = \frac{33}{20}.
\end{aligned}$$

이것이 요구된 세 근삿값이다. 멀리 갈수록 곡선이 평평해져 중점 근사가 더 좋아지므로, m이 커질수록 근삿값도 좋아질 것이다.

소문항 (ii)

띠 하나에서의 적분은

$$\int_{r-\frac{1}{2}}^{r+\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{r-\frac{1}{2}} - \frac{1}{r+\frac{1}{2}} = \frac{1}{r^2-\frac{1}{4}} = \frac{4}{4r^2-1}.$$

따라서 $\frac{1}{r^2}$을 이 적분으로 근사할 때의 오차는

$$\frac{4}{4r^2-1} - \frac{1}{r^2} = \frac{4r^2-(4r^2-1)}{r^2(4r^2-1)} = \frac{1}{r^2(4r^2-1)} = \frac{1}{4r^4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4r^2}}.$$

r이 크면 $\frac{1}{4r^2}$이 작으므로 마지막 인수는 1에 가깝고, 요구된 대로 오차는 대략 $\frac{1}{4r^4}$이다. (적분이 항상 더 크다는 사실은 그림과도 맞아떨어진다. $\frac{1}{x^2}$은 볼록(convex)하므로 각 띠의 왼쪽에서 더해지는 넓이가 오른쪽에서 모자라는 넓이보다 크다.)

마지막 결과를 얻기 위해 $r = m$부터의 오차를 모두 더한다. 띠 위의 적분들을 더하면 처음에 계산한 적분이 되므로

$$\frac{2}{2m-1} - \sum_{r=m}^{\infty}\frac{1}{r^2} = \sum_{r=m}^{\infty}\frac{1}{r^2(4r^2-1)} \approx \frac{1}{4}\sum_{r=m}^{\infty}\frac{1}{r^4}.$$

? **생각해 보기** 가장 간단해 보이는 $m = 1$을 택하지 않는 이유는 무엇일까?

$m = 1$이면 좌변은 $2 - 1.645 = 0.355$이고, $\sum \frac{1}{r^4} \approx 1.42$가 되어 너무 크다. 문제는 "$\approx \frac{1}{4r^4}$"가 r이 클 때에만 좋은 근사라는 점이다. $r = 1$에서 실제 오차는 $\frac{1}{4}$가 아니라 $\frac{1}{3}$이며, 이 첫 항이 전체 합을 좌우한다. 그러므로 처음 몇 항은 정확히 두고 꼬리에만 근사를 써야 한다. $m = 3$($\frac{33}{20}$을 준 선택)을 택하면 가장 나쁜 인수 $\frac{1}{1-1/(4r^2)}$이 $\frac{36}{35}$으로, 1과 3% 이내로 차이 난다.

$$\frac{1}{4}\sum_{r=3}^{\infty}\frac{1}{r^4} \approx \frac{2}{5} - \left(E - 1 - \frac{1}{4}\right) \approx 0.4 - 0.395 = 0.005,$$

따라서 $\sum_{r=3}^{\infty}\frac{1}{r^4} \approx 0.02$이고

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^4} \approx 1 + \frac{1}{16} + 0.02 = 1.0825 \approx 1.08.$$

이것이 요구된 결과이다. E가 소수점 아래 셋째 자리까지만 주어져 있으므로 E의 오차는 최대 0.0005이고, 이것이 여기서는 최대 0.002의 오차가 되지만 여전히 1.08이 남는다.

검산

- 근삿값 2, $\frac{5}{3} \approx 1.667$, $\frac{33}{20} = 1.65$는 $E = \frac{\pi^2}{6} \approx 1.6449$를 향해 감소하며, 볼록성 논증이 예측하듯 모두 실제보다 크다.

- $r = 10$에서 정확한 오차 $\frac{1}{100\times399} \approx 2.506 \times 10^{-5}$은 $\frac{1}{4\times10^4} = 2.5 \times 10^{-5}$에 매우 가깝다.
- 정확한 값은 $\sum \frac{1}{r^4} = \frac{\pi^4}{90} \approx 1.0823$으로, 우리가 얻은 1.0825와 일치한다. 대신 $m = 2$를 쓰면 $1 + 4\left(\frac{2}{3} - 0.645\right) \approx 1.087$로 눈에 띄게 나빠지고, $m = 1$을 쓰면 1.42가 된다.

흔한 실수

- 마지막 부분에서 큰 r에 대한 근사 $\frac{1}{4r^4}$이 부정확한 $m = 1$을 써서 1.42를 얻는 것.
- 오차의 부호를 거꾸로 잡는 것. 적분이 $\frac{1}{r^2}$보다 크므로 $\frac{2}{2m-1}$은 꼬리를 과대추정(overestimate)한 값이다.
- 정확히 계산한 처음 항들($1 + \frac{1}{4}$, 그리고 $1 + \frac{1}{16}$)을 다시 더하는 것을 잊는 것.

STEP 너머

이것은 중점 공식이며, 오차항 $\frac{1}{4r^4}$은 오일러–매클로린 공식(Euler–Maclaurin formula)을 살짝 엿본 것이다. 이 공식은 합을 적분과 도함수 항들로 이루어진 급수로 보정하며, $\sum \frac{1}{r^2}$ 같은 합을 소수점 아래 여러 자리까지 계산하는 방법이기도 하다. 정확한 값 $\frac{\pi^2}{6}$과 $\frac{\pi^4}{90}$은 푸리에 급수(Fourier series)나 $\sin x$에 대한 오일러(Euler)의 곱에서 나온다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해)는 급수와 적분을 꼼꼼하게 다루며, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제)에는 이런 정신의 문제가 더 실려 있다.

풀이

STEP II 2016, 문제 9

역학 • 운동량과 에너지 손실

STEP II 2016, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

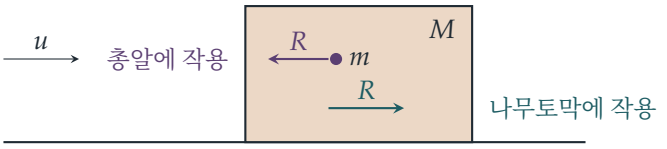
step.maths.org/questions/16-s2-q9

핵심 아이디어

저항력 R는 총알과 나무토막 사이에 작용하는 내력(internal force)이다. 이 힘은 총알을 감속시키고, 뉴턴(Newton)의 제3법칙에 따라 같은 크기로 나무토막을 앞으로 민다. 따라서 둘을 합친 계의 운동량(momentum)은 보존되지만 운동 에너지(kinetic energy)는 보존되지 않는다. 잃어버린 에너지는 정확히 총알이 나무토막 안에서 움직인 **상대** 거리만큼 R가 한 일과 같다. 나무토막 하나에만 일-에너지 원리(work–energy principle)를 적용하면 나무토막이 얼마나 움직이는지 알 수 있다.

풀이

총알과 나무토막을 하나의 수평선 위에서 움직이는 입자로 모형화하고, 총알이 나무토막에 대해 움직이는 동안 저항력 R는 일정하다고 한다. 총알의 처음 운동 방향을 양의 방향으로 잡는다.



연직 방향의 힘(무게와 탁자의 수직 항력)은 서로 평형을 이루므로 아무 역할도 하지 않는다. 수평 방향으로는 총알이 뒤쪽으로 R를 받고, 나무토막은 앞쪽으로 R를 받는다.

소문항 (i)

나무토막이 고정되어 있으면 총알의 감속도는 R/m로 일정하다. 나중 속력을 0, $\alpha = -R/m$로 두고 $v^2 = u^2 + 2\alpha s$를 쓰면

$$0 = u^2 - \frac{2R}{m}a \quad \Longrightarrow \quad \boxed{a = \frac{mu^2}{2R}.}$$

(같은 말로, 저항력에 맞서 한 일 Ra는 총알의 처음 운동 에너지 $\frac{1}{2}mu^2$와 같다.)

소문항 (ii)

공통의 나중 속도. 탁자가 매끄러우므로 총알과 나무토막으로 이루어진 계에는 외부의 수평 방향 힘이 작용하지 않는다. 총알이 나무토막에 대해 정지하면 둘은 같은 속도 V로 움직이고, 운동량 보존에 의해

$$mu = (M+m)V \quad \Longrightarrow \quad V = \frac{mu}{M+m}.$$

> **생각해 보기** 저항력은 나무토막 안의 총알 경로를 따라 거리 b에 걸쳐 작용하지만, 총알 자체는 탁자에 대해 $b+c$만큼 이동한다. 에너지 방정식에는 어느 거리가 들어가야 하는가?

b 구하기. 탁자를 기준으로 하면, 총알은 $b+c$만큼 움직이므로 총알에 작용하는 힘 R가 한 일은 $-R(b+c)$이고, 나무토막은 c만큼 움직이므로 나무토막에 작용하는 힘 R가 한 일은 $+Rc$이다. 따라서 계에 한 알짜 일은 $-Rb$이다. 즉 상대 변위만 중요하다. 일-에너지 원리에 의해

$$\begin{aligned} Rb &= \tfrac{1}{2}mu^2 - \tfrac{1}{2}(M+m)V^2 \\ &= \tfrac{1}{2}mu^2 - \frac{m^2u^2}{2(M+m)} \\ &= \tfrac{1}{2}mu^2\left(1 - \frac{m}{M+m}\right) = \tfrac{1}{2}mu^2 \cdot \frac{M}{M+m}. \end{aligned}$$

소문항 (i)에서 $\frac{1}{2}mu^2 = Ra$이므로, 양변을 R로 나누면

$$\boxed{b = \frac{M}{M+m}a.}$$

c 구하기. 이번에는 나무토막 하나에만 일-에너지 원리를 적용한다. 나무토막은 정지 상태에서 출발해 속력 V로 끝나며, 나무토막에 작용하는 수평 방향의 힘은 앞쪽으로 거리 c에 걸쳐 작용하는 R뿐이다.

$$Rc = \tfrac{1}{2}MV^2 = \frac{Mm^2u^2}{2(M+m)^2} = \tfrac{1}{2}mu^2 \cdot \frac{mM}{(M+m)^2}.$$

다시 $\frac{1}{2}mu^2 = Ra$를 쓰면

$$\boxed{c = \frac{mM}{(M+m)^2}\,a.}$$

운동학(kinematics)을 이용한 다른 방법. 총알은 R/m로 감속하고 나무토막은 R/M로 가속한다. 두 속도는 $u - Rt/m = Rt/M$일 때 같아지므로

$$t = \frac{mMu}{R(M+m)}, \qquad c = \frac{1}{2}\cdot\frac{R}{M}\,t^2 = \frac{m^2Mu^2}{2R(M+m)^2},$$

이고, 이는 위의 결과와 일치한다. b는 총알의 변위에서 c를 빼서 얻는다.

검산

- $M \to \infty$이면 나무토막은 고정된 것처럼 행동한다. 실제로 $b \to a$, $c \to 0$이 되어 마땅히 그래야 하는 대로이다.
- $\frac{M}{M+m} < 1$이므로 $b < a$이다. 움직일 수 있는 나무토막은 총알의 에너지를 열로 덜 흡수하므로 총알이 그만큼 깊이 박히지 않는다.
- $M = 4m$이면 $b = \frac{4}{5}a$, $c = \frac{4}{25}a$이다. m, M, u, R를 여러 가지로 무작위로 골라 작은 시간 간격으로 운동을 수치적으로 진행시켜 보면 a, b, c가 유효숫자 네 자리까지 재현된다.

흔한 실수

- 에너지 손실 방정식에 상대 거리 b 대신 탁자에 대한 총알의 이동 거리 $b + c$를 쓰는 것.
- 충돌에서 운동 에너지가 보존된다고 가정하는 것. 운동 에너지는 보존되지 않으며, 손실 Rb는 발생한 열이다.
- 나무토막도 힘 R를 받는다는 것(뉴턴의 제3법칙)을 잊어서 나무토막의 운동을 설명하지 못하는 것.

STEP 너머

내력이 한 알짜 일은 상대 운동이 없을 때에만 0이라는 사실은 입자계의 에너지를 엄밀하게 다루는 출발점이다. 질량 중심 좌표계(centre-of-mass frame)에서 생각하면 깔끔해진다. 소산될 수 있는 운동 에너지는 환산 질량(reduced mass) $\mu = mM/(M+m)$을 써서 $\frac{1}{2}\mu u^2$이며, 이는 여기서 정확히 Rb와 같다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 아이디어를 철저하게 전개한다.

풀이

STEP II 2016, 문제 10

역학 • 마찰과 평형

> **STEP II 2016, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/16-s2-q10

핵심 아이디어

삼각형에 작용하는 것은 두 가지뿐이다. 질량중심(centre of mass) G에 작용하는 무게, 그리고 접촉점 P에서 못(peg)이 가하는 하나의 접촉력(contact force)이다. 평형(equilibrium) 상태에 있는 두 힘은 크기가 같고 방향이 반대이며 같은 직선 위에 있어야 하므로, 삼각형은 G가 P의 바로 아래에 올 때까지 돌아간다. 그러면 문제는 이렇게 바뀐다. 못의 반작용은 BC의 법선에서 얼마나 크게 기울어져야 하며, 마찰은 그만큼을 버틸 만큼 충분히 강한가? 따라서 첫 번째 할 일은 G의 위치를 찾는 것이다.

풀이

모형과 질량중심

철사를 단위 길이당 질량이 같은 균일한 막대 세 개로 보고, 못은 수직항력(normal reaction) R(BC에 수직)과 마찰력(friction force) F(BC 방향)를 주는 하나의 접촉점으로 본다. 이때 $F \le \mu R$이다.

$AB = AC = b$라 하고 M을 BC의 중점이라 하자. A에서의 각이 2θ이므로 직선 AM은 이 각을 이등분하고 BC에 수직이다. 따라서

$$BM = MC = b\sin\theta, \qquad AM = b\cos\theta, \qquad BC = 2b\sin\theta.$$

대칭성에 의해 G는 AM 위에 있다. 거리는 BC에서 A 쪽으로 잰다. 막대 AB와 AC는 각각 질량이 b에 비례하고, 그 중심은 각자의 중점으로 BC에서 거리가 $\frac{1}{2}b\cos\theta$인 곳에 있다. 막대 BC는 질량이 $2b\sin\theta$에 비례하고 그 중심은 BC 위에 있다. 따라서 거리 $d = GM$은

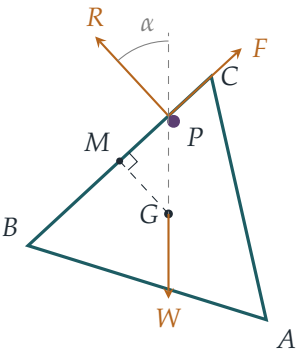
$$d = \frac{b\cdot\frac{1}{2}b\cos\theta + b\cdot\frac{1}{2}b\cos\theta + 2b\sin\theta\cdot 0}{b+b+2b\sin\theta} = \frac{b\cos\theta}{2(1+\sin\theta)}.$$

못이 일반적인 점에 있을 때의 평형

못이 BC의 점 P에 닿아 있고 $MP = x$라 하자. 여기서 $0 \le x \le b\sin\theta$이다(대칭성에 의해 P가 M과 C 사이에 있다고 해도 된다). 삼각형은 못 아래에 매달려 있으므로, 못은 삼각형 안쪽에 있고 BC가 그 위에 얹혀 있다.

> **생각해 보기** 삼각형은 어떤 각도로도 매달릴 수 있다. 실제로 어느 각도를 취하는지 어떻게 알 수 있을까?

삼각형에 작용하는 힘은 G에서의 무게 W와 P에서 못이 가하는 전체 접촉력이다. 힘이 두 개뿐이므로, 평형이 되려면 두 힘의 크기가 같고 방향이 반대여야 하며(따라서 접촉력은 연직 위 방향의 W이다), 같은 직선 위에서 작용해야 한다(그렇지 않으면 두 힘이 짝힘(couple)을 이룬다). 따라서 PG는 연직이어야 한다. 즉 삼각형은 G가 P의 바로 아래에 오도록 자리 잡는다.



α를 PG(연직선)와 BC의 법선 GM 사이의 각이라 하자. 직각삼각형 PMG에서

$$\tan\alpha = \frac{MP}{GM} = \frac{x}{d}.$$

BC의 법선은 연직선과 각 α를 이루고, BC는 수평선과 각 α를 이룬다. BC에 수직인 방향과 BC를 따르는 방향으로 힘을 분해하면

$$R = W\cos\alpha, \qquad F = W\sin\alpha.$$

$0 \le \alpha < \frac{1}{2}\pi$이므로 둘 다 음이 아니고, $R > 0$이다. 삼각형이 미끄러지지 않고 그대로 있을 조건은 $F \le \mu R$, 즉

$$\mu \ge \tan\alpha = \frac{x}{d}.$$

BC의 모든 점

우변 x/d는 x에 대해 증가하므로, 이 조건은 P가 끝점, 즉 $x = b\sin\theta$에 있을 때 가장 만족하기 어렵다. BC의 모든 점에서 평형이 가능할 필요충분조건은 그 끝점에서 평형이 가능한

것이다.

$$\mu \geq \frac{b\sin\theta}{d} = b\sin\theta \cdot \frac{2(1+\sin\theta)}{b\cos\theta} = 2\tan\theta\,(1+\sin\theta),$$

이것이 구하는 조건이다. 이 조건이 성립하면 $\mu \geq x/d$가 $[0, b\sin\theta]$의 모든 x에 대해 성립하므로, 못이 BC의 어느 점에 있든 삼각형이 정지해 있을 수 있다.

검산

- $x = 0$(못이 M에 있을 때)이면 $\alpha = 0$이다. 삼각형은 BC가 수평인 채로 매달리고, 대칭성에서 예상되듯 마찰이 전혀 필요 없다.
- $\theta = 30^\circ$이면 삼각형은 정삼각형이고 $d = \frac{1}{3}b\cos 30^\circ$이다. 이때 G는 무게중심(centroid), 즉 BC에서 높이 $b\cos 30^\circ$의 3분의 1만큼 올라간 곳에 있어야 한다. 실제로 그렇다. 조건은 $\mu \geq 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{3}{2} = \sqrt{3} \approx 1.732$가 된다. 꼭짓점에서는 BC가 수평선과 60°를 이루어야 한다.
- $\theta \to 0$이면 삼각형은 가느다란 뾰족한 모양이 되고, BC는 한없이 줄어들며 한계값은 0으로 간다. $\theta \to \frac{1}{2}\pi$이면 길고 납작한 띠가 되고 한계값은 한없이 커진다. 둘 다 직관과 맞는다.
- 컴퓨터로 확인한 결과, 세 막대를 작은 조각 여러 개로 나누어 G를 구하고 임의의 θ와 b에 대해 BC를 따라 201개의 점에서 힘을 분해했더니 $2\tan\theta(1+\sin\theta)$와 10^{-11} 이내로 일치했다.

흔한 실수

- **철사**의 질량중심 대신 삼각형 **박판**(lamina)의 무게중심(AM을 따라 3분의 1 올라간 곳)을 쓰는 실수. 철사 틀은 질량이 변에 있으므로 BC는 $2b\sin\theta$의 가중치로 들어간다.
- BC가 수평을 유지한다고 가정하고 모멘트(moment)를 구하려는 실수. 삼각형은 G가 못 아래에 올 때까지 기울어지며, 바로 이 기울어진 각을 마찰이 감당해야 한다.
- BC의 한 점만 확인하는 실수. 최악의 경우는 BC의 끝점이며, 한계값을 정하는 것도 바로 그 점이다.

STEP 너머

$\tan\alpha \leq \mu$라고 쓰는 것은 전체 접촉력이 **마찰원뿔**(cone of friction), 즉 법선을 축으로 하고 반각이 $\arctan\mu$인 원뿔 안에 있어야 한다는 뜻이다. 이렇게 보면 많은 마찰 문제(사다리, 쐐기, 거친 못)가 거의 기하 문제가 되며, 이 관점은 접촉점이 여러 개인 강체(rigid body)로

일반화된다. 이때 문제는 각 원뿔 안에서 힘을 적절히 골라 하중과 균형을 이루게 할 수 있는가가 된다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*는 마찰과 강체의 평형을 이처럼 세심하게 다룬다.

풀이

STEP II 2016, 문제 11

역학 • 포물체의 충돌

> **STEP II 2016, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/16-s2-q11

핵심 아이디어

두 입자는 **같은** 시각에 두 좌표가 모두 일치할 때 충돌(collide)한다. 따라서 하나의 미지수 t를 공유하는 두 방정식을 얻고, 한 방정식을 다른 방정식으로 나누면 t가 소거된다. 소문항 (ii)의 요령은 중력이 매 순간 총알과 표적을 정확히 같은 양 $\frac{1}{2}gt^2$만큼 아래로 끌어내린다는 점을 알아차리는 것이다. 따라서 둘이 만나는지 여부는 소문항 (i)의 중력 없는 운동으로 결정되고, 중력은 둘이 만날 때 표적이 어디에 있는지를 따질 때에만 중요하다.

풀이

소문항 (i)

첫 번째 입자를 $P((a,0)$에서 출발), 두 번째 입자를 $Q((0,b)$에서 출발)라 하자. 두 입자가 시각 t에 충돌한다고 가정한다. x좌표와 y좌표를 각각 같게 놓으면

$$\begin{aligned} a + ut\cos\alpha &= vt\cos\beta, && \text{따라서} \quad t\left(v\cos\beta - u\cos\alpha\right) = a, \\ ut\sin\alpha &= b + vt\sin\beta, && \text{따라서} \quad t\left(u\sin\alpha - v\sin\beta\right) = b. \end{aligned}$$

$a > 0$이므로 첫 번째 방정식에서 $t \neq 0$이다(두 입자는 서로 다른 점에서 출발한다). 그러므로 $t > 0$이고, 두 번째 방정식을 첫 번째 방정식으로 나눌 수 있다.

$$\frac{u\sin\alpha - v\sin\beta}{v\cos\beta - u\cos\alpha} = \frac{b}{a} = \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}.$$

(분모는 $a/t \neq 0$이다.) 양변에 분모를 곱하면

$$\cos\theta\left(u\sin\alpha - v\sin\beta\right) = \sin\theta\left(v\cos\beta - u\cos\alpha\right),$$

이고, u가 있는 항을 좌변에, v가 있는 항을 우변에 모으면

$$u(\sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta) = v(\sin\beta\cos\theta + \cos\beta\sin\theta).$$

$\sin(A+B)$에 대한 삼각함수의 덧셈정리(compound-angle formula)에 의해 이는

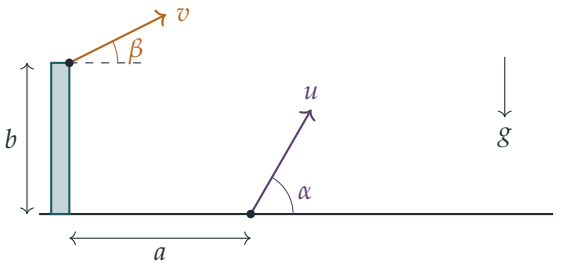
$$u\sin(\theta+\alpha) = v\sin(\theta+\beta),$$

이므로 증명이 끝난다. 나중을 위해 두 가지 사실도 적어 둔다. $a, b, t > 0$이므로

$$v\cos\beta > u\cos\alpha \qquad \text{그리고} \qquad u\sin\alpha > v\sin\beta. \tag{$*$}$$

소문항 (ii)

총알과 표적을 공기 저항(air resistance) 없이 중력만 받으며 자유롭게 움직이는 입자로 모형화한다. 탑의 밑을 원점으로 잡고, x축은 표적의 발사 지점을 지나는 수평선(탑에서 멀어지는 방향)으로, y축은 연직 위쪽으로 잡는다. 명중이 가능하려면 총알을 표적 쪽으로 쏘아야 하므로, 둘 다 이 연직 평면 안에서 움직인다.



시각 t에(둘 중 어느 것도 땅에 닿기 전), 표적과 총알의 위치는

$$T = \left(a + ut\cos\alpha,\ ut\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2\right), \qquad B = \left(vt\cos\beta,\ b + vt\sin\beta - \tfrac{1}{2}gt^2\right).$$

이는 소문항 (i)의 위치를 각각 같은 양 $\frac{1}{2}gt^2$만큼 아래로 옮긴 것과 정확히 같다.

생각해 보기 소문항 (i)에는 중력이 없었는데, 왜 소문항 (i)의 결과를 쓸 수 있을까?

명중은 $T = B$일 때 일어난다. y에 대한 방정식에서 $-\frac{1}{2}gt^2$ 항이 양변에 나타나 소거되므로, 충돌 조건은 소문항 (i)의 조건과 글자 하나 다르지 않다.

$$t\,(v\cos\beta - u\cos\alpha) = a, \qquad t\,(u\sin\alpha - v\sin\beta) = b.$$

특히 소문항 (i)과 $(*)$가 그대로 성립하고, 명중 시각은

$$t = \frac{b}{u\sin\alpha - v\sin\beta},$$

이며, $(*)$에 의해 분모는 양수이다.

이 순간 표적이 아직 공중에 있을 필요충분조건은 표적의 높이가 양수인 것이다.

$$ut\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2 > 0 \iff t < \frac{2u\sin\alpha}{g},$$

여기서 $\frac{1}{2}t > 0$으로 나누었다. 명중 시각을 대입하면

$$\frac{b}{u\sin\alpha - v\sin\beta} < \frac{2u\sin\alpha}{g}.$$

두 분모가 모두 양수이므로 양변에 $g(u\sin\alpha - v\sin\beta)$를 곱해도 부등호의 방향은 바뀌지 않고, 따라서

$$2u\sin\alpha\,(u\sin\alpha - v\sin\beta) > bg,$$

를 얻어 증명이 끝난다. (명중 순간 총알은 표적과 같은 높이에 있으므로 총알 역시 지면 위에 있다.)

왜 $\alpha > \beta$이어야 하는가

명중하려면 두 입자가 소문항 (i)의 의미에서 충돌해야 함을 보았으므로

$$u\sin(\theta+\alpha) = v\sin(\theta+\beta),$$

이 성립한다. 여기서 $\tan\theta = b/a$이고, $(*)$에서 $u\sin\alpha > v\sin\beta$이기도 하다. θ, α, β가 예각이므로 $\theta+\alpha$와 $\theta+\beta$는 0과 π 사이에 있고, 따라서 여기 나오는 네 사인값은 모두 양수이다. 등식을 부등식으로 나누면 부등호 방향이 뒤집힌다.

$$\frac{\sin(\theta+\alpha)}{\sin\alpha} < \frac{\sin(\theta+\beta)}{\sin\beta}.$$

전개하면 $\dfrac{\sin(\theta+\alpha)}{\sin\alpha} = \sin\theta\cot\alpha + \cos\theta$이고 β에 대해서도 마찬가지이므로

$$\sin\theta\cot\alpha < \sin\theta\cot\beta \iff \cot\alpha < \cot\beta,$$

이다($\sin\theta > 0$이므로). $(0, \frac{\pi}{2})$에서 코탄젠트(cotangent)는 순감소하므로 $\alpha > \beta$이다.

물리적으로 보면, 중력이 상쇄되므로 총알에 대한 표적의 상대 운동은 등속 직선 운동이다. 그 상대 속도(relative velocity)는 표적의 출발점 $(a, 0)$에서 총이 있는 $(0, b)$를 향해야 하므로 뒤쪽 위를 향해야 한다. $(*)$에 의해 표적은 총알보다 수평 방향으로는 느리고 연직 방향으로는 빨라야 하며, 이로 인해 표적의 경로가 더 가팔라야 한다. 즉 $\tan\alpha > \tan\beta$이다. ($(*)$의 두 부등식을 서로 나누어도 같은 결론을 바로 얻는다.)

검산

$u = 20$, $\alpha = 60°$, $v = 15$, $\beta = 30°$, $t = 1$에서 명중, $g = 9.8$인 경우를 시험해 보자. 충돌 방정식에서 $a \approx 2.990$, $b \approx 9.821$이므로 $\theta \approx 73.06°$이다. 그러면 $u\sin(\theta + \alpha) \approx 14.612$, $v\sin(\theta + \beta) \approx 14.612$로 일치한다. 명중 순간 표적의 높이는 $17.32 - 4.9 \approx 12.42 > 0$이고, 실제로 $2u\sin\alpha(u\sin\alpha - v\sin\beta) \approx 340.2 > bg \approx 96.2$이다. 수천 번의 무작위 발사에 대한 컴퓨터 검사에서도, 명중 순간 표적이 아직 공중에 있을 때 정확히 이 부등식이 성립하고, 모든 명중에서 $\alpha > \beta$임이 확인되었다.

흔한 실수

- 두 입자가 **같은** 시각에 같은 곳에 있어야 한다는 점을 잊고, 서로 다른 두 시각에 대해 푸는 것.
- $u\sin\alpha - v\sin\beta$가 양수임을 먼저 확인하지 않고 양변에 곱하는 것. $t > 0$이고 $b > 0$이므로 이 값은 양수이다.
- $u\sin\alpha > v\sin\beta$만으로 $\alpha > \beta$를 주장하는 것. 속력도 함께 비교하지 않으면 이 부등식은 각에 대해 아무것도 말해 주지 않는다.

STEP 너머

중력이 상쇄되는 것은 갈릴레이 상대성(Galilean relativity)의 한 예이다. 총알과 함께 자유 낙하하는 기준계에서 표적은 등속 직선 운동을 하므로, "표적을 곧장 겨냥하라"가 통한다. 이것이 고전적인 "원숭이와 사냥꾼(monkey and hunter)" 실험이며, 관성 기준계(inertial frame, 또는 자유 낙하 기준계)라는 개념은 대학 1학년 역학의 출발점이자, 나중에는 일반 상대성 이론(general relativity)의 등가 원리(equivalence principle)의 출발점이 된다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 상대 운동과 기준계(reference frame)를 신중하게 전개한다.

풀이

STEP II 2016, 문제 12

확률과 통계 • 포함배제와 교란순열

> **STEP II 2016, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/16-s2-q12

이 문제는 *Beyond STEP*의 9.8 절 **아무도 자기 셔츠를 받지 못한다**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch09/derangements.html

핵심 아이디어

세 사건(event)의 경우에는 $A \cup B$를 하나의 사건으로 보고 두 사건에 대한 규칙을 두 번 적용한다. 같은 교대 패턴(한 사건씩 더하고, 두 사건의 교집합을 빼고, 세 사건의 교집합을 더하고, ...)은 사건이 몇 개이든 성립한다. 이를 "카드 i가 i번째 자리에 있다"는 사건들에 적용하면, r개의 사건으로 이루어진 항은 모두 확률이 같으므로 합의 각 층이 하나의 분수로 정리된다. "정확히 하나"의 경우에는 어느 카드가 일치하는지를 고정하고, 나머지 카드는 하나도 일치하지 않을 확률을 구한다.

풀이

세 사건

$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$로 쓰고, A 대신 $A \cup B$, B 대신 C를 넣어 두 사건에 대한 규칙을 적용한다.

$$\mathrm{P}(A \cup B \cup C) = \mathrm{P}(A \cup B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}\big((A \cup B) \cap C\big).$$

첫째 항은 $\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$이다. 마지막 항은 분배법칙(distributive law)에 의해 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$이고, 두 사건에 대한 규칙을 한 번 더 적용하면

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\big((A \cap C) \cup (B \cap C)\big) &= \mathrm{P}(A \cap C) + \mathrm{P}(B \cap C) - \mathrm{P}\big((A \cap C) \cap (B \cap C)\big) \\ &= \mathrm{P}(A \cap C) + \mathrm{P}(B \cap C) - \mathrm{P}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

두 식을 모두 대입하면

$$\mathrm{P}(A\cup B\cup C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(A\cap B)-\mathrm{P}(B\cap C)-\mathrm{P}(C\cap A)+\mathrm{P}(A\cap B\cap C),$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다.

네 사건

네 개의 단일 사건의 확률을 더하고, 여섯 개의 두 사건 교집합(intersection)의 확률을 빼고, 네 개의 세 사건 교집합의 확률을 더한 뒤, 네 사건 모두의 교집합의 확률을 뺀다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B\cup C\cup D)=\ &\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)+\mathrm{P}(D)\\&-\mathrm{P}(A\cap B)-\mathrm{P}(A\cap C)-\mathrm{P}(A\cap D)\\&-\mathrm{P}(B\cap C)-\mathrm{P}(B\cap D)-\mathrm{P}(C\cap D)\\&+\mathrm{P}(A\cap B\cap C)+\mathrm{P}(A\cap B\cap D)+\mathrm{P}(A\cap C\cap D)+\mathrm{P}(B\cap C\cap D)\\&-\mathrm{P}(A\cap B\cap C\cap D).\end{aligned}$$

소문항 (i)–(iii)

$n!$가지 배열은 모두 같은 정도로 일어날 수 있다. 특정한 r장의 카드가 각자 제자리에 있어야 한다면 나머지 $n-r$장의 카드는 $(n-r)!$가지 방법으로 배열할 수 있으므로, 그 확률은 $(n-r)!/n!$이다. 따라서

$$\text{(i) }\mathrm{P}(E_i)=\frac{1}{n},\qquad \text{(ii) }\mathrm{P}(E_i\cap E_j)=\frac{1}{n(n-1)},\qquad \text{(iii) }\mathrm{P}(E_i\cap E_j\cap E_k)=\frac{1}{n(n-1)(n-2)}.$$

((ii)는 다음과 같이 보아도 같다. 카드 i가 i번째 자리에 놓일 확률은 $\frac{1}{n}$이고, 그다음 카드 j가 남은 $n-1$개의 자리 중 j번째 자리에 놓일 확률은 $\frac{1}{n-1}$이다.)

적어도 하나가 일치할 확률

적어도 한 장의 카드가 일치하는 것은 정확히 $E_1\cup E_2\cup\cdots\cup E_n$이 일어날 때이다. 위의 패턴은 n개의 사건으로 확장된다. 즉 r번째 층은 서로 다른 r개의 사건의 모든 교집합의 확률을 합한 것에 $(-1)^{r+1}$을 곱한 것이다.

> **생각해 보기** 어떤 사건들인지 모르는 채로, r개의 사건을 고르는 모든 경우에 대한 합을 어떻게 계산할 수 있을까?

대칭성(symmetry)에 의해 서로 다른 r개의 사건의 교집합은 모두 같은 확률 $(n-r)!/n!$을 가지며, r개의 사건을 고르는 방법은 $\binom{n}{r}$가지이다. 따라서 r번째 층의 기여는

$$(-1)^{r+1}\binom{n}{r}\frac{(n-r)!}{n!}=(-1)^{r+1}\frac{n!}{r!\,(n-r)!}\cdot\frac{(n-r)!}{n!}=\frac{(-1)^{r+1}}{r!}.$$

$r = 1, 2, \ldots, n$에 대하여 합하면

$$\mathrm{P}(\text{적어도 하나 일치}) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!},$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다. ($r = 1, 2, 3$일 때 이는 소문항 (i)–(iii)에서 얻은 $n \cdot \frac{1}{n}$, $\binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n(n-1)}$, $\binom{n}{3} \cdot \frac{1}{n(n-1)(n-2)}$에 불과하다.)

정확히 하나가 일치할 확률

섞은 m장의 카드 중 어느 것도 제자리에 있지 않을 확률을 p_m이라 하자. 앞의 결과에 의해

$$p_m = 1 - \left(1 - \frac{1}{2!} + \cdots + (-1)^{m+1}\frac{1}{m!}\right) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^{m}\frac{1}{m!}.$$

"정확히 하나 일치"라는 사건은 "카드 i는 일치하고 다른 카드는 일치하지 않는다"는 사건들의 i에 대한 서로소인 합집합(disjoint union)이다. E_i가 일어났을 때, 나머지 $n-1$장의 카드는 나머지 $n-1$개의 자리에 어떤 순서로든 같은 정도로 놓일 수 있으므로, 이는 $n-1$장의 카드를 새로 섞는 것과 같고, 그중 어느 것도 일치하지 않을 확률은 p_{n-1}이다. 따라서

$$\mathrm{P}(\text{정확히 하나 일치}) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(E_i)\, p_{n-1} = n \cdot \frac{1}{n} \cdot p_{n-1} = p_{n-1},$$

즉

$$\mathrm{P}(\text{정확히 하나 일치}) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!} \qquad (n \geq 2),$$

이고, $n = 1$일 때는 1이다. 같은 말로, 이 확률은 $\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r/r!$이며, 이 식은 $n = 1$인 경우도 포함한다.

검산

$n = 3$일 때 배열은 123, 132, 213, 231, 312, 321이다. 이 중 네 개에 일치하는 카드가 있으므로 확률은 $\frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$이다. 또 세 개(맞바꾼 배열 132, 213, 321)에서 정확히 하나가 일치하므로 확률은 $\frac{1}{2}$이고, 이는 공식과 일치한다. $n = 2$일 때는 정확히 하나만 일치하는 것이 불가능하며(한 카드가 제자리에 있으면 다른 카드도 제자리에 있다), 공식도 0을 준다. $n \leq 7$에 대하여 컴퓨터로 모든 배열을 나열해 보면 두 공식 모두와 일치한다. 예를 들어 $n = 7$일 때 정확히 하나가 일치할 확률은 $\frac{53}{144} \approx 0.368$이다. $n \to \infty$일 때 두 답은 모두 익숙한 극한(limit)으로 수렴한다. 적어도 하나가 일치할 확률은 $1 - \mathrm{e}^{-1} \approx 0.632$로, 정확히 하나가 일치할 확률은 e^{-1}로 수렴한다.

흔한 실수

- $\mathrm{P}(E_i \cap E_j) = \frac{1}{n^2}$로 쓰는 것. 이 사건들은 독립(independent)이 아니다. 카드 i가 i번째 자리에 놓이면 카드 j가 놓일 수 있는 자리는 $n-1$개만 남기 때문이다.

- "정확히 하나"의 답을 $n \cdot \frac{1}{n} = 1$이나 $\mathrm{P}(E_1)$로 쓰는 것. 카드 i가 제자리에 있고 **동시에** 다른 카드는 하나도 제자리에 있지 않아야 한다.
- "적어도 하나"에 대한 합에서 $r = 1$인 항이 $n \cdot \frac{1}{n} = 1$이라는 것을 잊는 것. 이 때문에 급수(series)가 1로 시작한다.

STEP 너머

이것은 고전적인 **교란순열**(*derangement*) 문제(*problème des rencontres*)이며, 일반적인 포함배제 원리(inclusion–exclusion) 공식은 수학적 귀납법(induction)이나 지시 확률변수(indicator random variables)를 이용하여 깔끔하게 증명된다. 큰 n에 대하여 일치하는 카드의 개수는 근사적으로 평균이 1인 푸아송 분포(Poisson distribution)를 따르는 것으로 밝혀진다. 즉 정확히 k개가 일치할 확률은 $\mathrm{e}^{-1}/k!$로 수렴한다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)과 Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)는 모두 포함배제 원리와 일치 문제를 다룬다.

풀이

STEP II 2016, 문제 13

확률과 통계 • 정규근사

> **STEP II 2016, 13번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/16-s2-q13

이 문제는 *Beyond STEP*의 12.23 절 **확률로 얻는 스털링 공식**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch12/stirling-probability.html

핵심 아이디어

이산 분포(discrete distribution)의 확률 하나 $\mathrm{P}(X = k)$는 k를 중심으로 하는 폭 1인 막대의 넓이이다. 분포가 정규분포(normal distribution)에 가깝다면, 그 넓이는 대략 k에서의 정규분포 밀도(density)에 폭 1을 곱한 값이다. 이 사실을 평균(mean)에서 적용하면, 그곳에서 표준정규분포(standard normal distribution)의 밀도는 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$이므로, 정확히 알고 있는 확률이 하나의 근사식으로 바뀐다. 분포를 영리하게 고르면 그 정확한 확률 안에 우리가 원하는 계승(factorial)이 들어 있게 된다.

풀이

풀이 전체에서 쓰는 근사

W가 정숫값을 갖고 평균이 μ, 분산(variance)이 σ^2이며, $V \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$로 잘 근사된다고 하자. V의 밀도는

$$f(v) = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{v-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

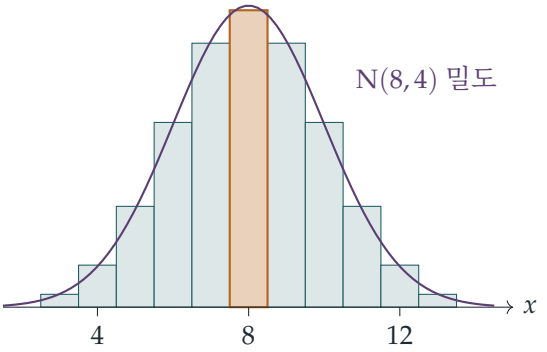
이다. 연속성 수정(continuity correction)을 하면

$$\mathrm{P}(W = k) \approx \mathrm{P}\left(k - \tfrac{1}{2} < V < k + \tfrac{1}{2}\right) = \int_{k-1/2}^{k+1/2} f(v)\,\mathrm{d}v \approx 1 \times f(k),$$

이다. 마지막 단계는 구간의 폭이 1이고, σ가 작지 않을 때 그 구간에서 f가 거의 변하지 않기 때문이다. $k = \mu$에서 지수 부분은 $e^0 = 1$이므로

$$P(W = \mu) \approx \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}. \qquad (*)$$

이다.



소문항 (i)

$X \sim B(16, \frac{1}{2})$에 대하여

$$E(X) = np = 8, \qquad Var(X) = np(1-p) = 16 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = 4,$$

이므로 $\sigma = 2$이다. $p = \frac{1}{2}$이므로 분포는 8에 대하여 대칭(symmetric)이고 n도 꽤 크므로, $N(8, 4)$는 좋은 근사이다(그림은 막대들을 정규분포 곡선과 함께 보여 준다). $(*)$에 의해 색칠한 막대의 넓이는

$$P(X = 8) \approx \frac{1}{2\sqrt{2\pi}},$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

소문항 (ii)

$Y \sim B(2n, \frac{1}{2})$라 하자. 그러면 $E(Y) = n$이고 $Var(Y) = 2n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$이므로 $\sigma = \sqrt{n/2}$이다. 정확한 값은

$$P(Y = n) = \binom{2n}{n} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \left(\tfrac{1}{2}\right)^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2\, 2^{2n}}.$$

이다. n이 크면 정규근사를 적용할 수 있고, $(*)$에 의해

$$P(Y = n) \approx \frac{1}{\sqrt{n/2}\,\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{n\pi}}.$$

이다. 두 식을 같다고 놓고 양변에 $2^{2n}(n!)^2$을 곱하면

$$(2n)! \approx \frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n\pi}},$$

이고, 이것이 구하는 결과이다. (소문항 (i)은 $n = 8$인 경우이다: $\sqrt{8\pi} = 2\sqrt{2\pi}$.)

소문항 (iii)

$Z \sim \mathrm{Po}(n)$이라 하면 $\mathrm{E}(Z) = \mathrm{Var}(Z) = n$이고 $\sigma = \sqrt{n}$이다. 정확한 값은

$$\mathrm{P}(Z = n) = \frac{\mathrm{e}^{-n} n^n}{n!}.$$

이다.

> **생각해 보기** 여기서 왜 포아송 분포(Poisson distribution)를 정규분포로 근사해도 되는가?

$\mathrm{Po}(n)$ 확률변수는 서로 독립(independent)인 $\mathrm{Po}(1)$ 확률변수 n개의 합과 같은 분포를 가지므로, 중심극한정리(central limit theorem)에 의해 n이 클 때 근사적으로 $\mathrm{N}(n, n)$을 따른다. 이것은 λ가 클 때 $\mathrm{Po}(\lambda) \approx \mathrm{N}(\lambda, \lambda)$라는 표준적인 규칙이다.

따라서 $(*)$에 의해

$$\frac{\mathrm{e}^{-n} n^n}{n!} \approx \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}},$$

이고, 정리하면

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\, \mathrm{e}^{-n}\, n^n,$$

이 되어 구하는 결과를 얻는다.

검산

- 소문항 (i): 정확한 값은 $\mathrm{P}(X = 8) = \binom{16}{8}/2^{16} = 12870/65536 \approx 0.1964$이고, $\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \approx 0.1995$이다. 오차는 약 1.6% 이내이다.
- $n = 10$일 때의 소문항 (ii): $\binom{20}{10}/2^{20} \approx 0.1762$이고 $1/\sqrt{10\pi} \approx 0.1784$이다. 계승 근사식의 양변의 비는 n이 커질수록 1로 수렴한다($n = 100$에서 약 0.9988).
- $n = 10$일 때의 소문항 (iii): $10! = 3\,628\,800$이고 $\sqrt{20\pi}\,\mathrm{e}^{-10}\,10^{10} \approx 3\,598\,696$이므로, 1% 미만만큼 작다.
- 일관성: (iii)의 결과를 (ii)의 $(2n)!$과 $n!$에 모두 대입하면 양변이 모두 $\sqrt{4\pi n}\,\mathrm{e}^{-2n}(2n)^{2n}$이 되므로, 두 근사식은 서로 맞아떨어진다.

흔한 실수

- 표준정규분포의 밀도 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$를 σ로 나누지 않고 그대로 쓰는 것. $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$의 평균에서의 밀도는 $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$이다.

- 소문항 (ii)에서 표준편차(standard deviation)로 $\sqrt{n/2}$ 대신 $\frac{n}{2}$를 쓰거나, $\mathrm{B}(2n, \frac{1}{2})$의 분산을 잘못 구하는 것.
- 소문항 (iii)에서 포아송 분포를 정규분포로 근사해도 되는 이유를 밝히지 않는 것.

STEP 너머

소문항 (iii)의 결과는 스털링 공식(Stirling's formula)이고, 이 논증은 중심극한정리를 한 점에서 적용한 발견적(heuristic) 형태, 곧 "국소 극한 정리(local limit theorem)"이다. 이를 엄밀하게 만들려면 주의가 필요하다. 분포함수(distribution function)가 정규분포의 분포함수에 가깝다는 사실만으로는 개별 확률이 밀도에 가깝다고 말할 수 없기 때문이다. 스털링 공식은 직접 증명할 수도 있는데, 예를 들어 $\ln n! = \sum \ln k$를 $\int \ln x \, \mathrm{d}x$와 비교하거나, 감마함수(gamma function)에서 출발하여 라플라스(Laplace)의 방법을 쓰면 된다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)는 중심극한정리와 포아송 분포와 정규분포의 관계를 다루며, Grimmett과 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률: 입문)은 함께 읽기 좋은 책이다.

풀이

STEP III 2016, 문제 1

순수수학 • 점화 공식

STEP III 2016, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/16-s3-q1

핵심 아이디어

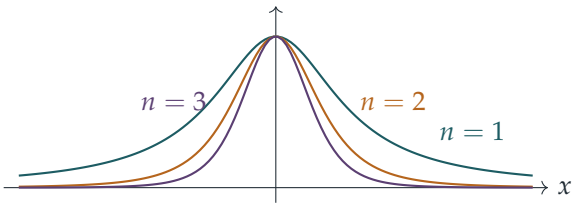
완전제곱식으로 고치기(completing the square)를 하면 이차식은 $(x+a)^2+c^2$ 꼴이 되고, 여기서 $c^2 = b-a^2 > 0$이다. 그러면 탄젠트 치환(substitution)으로 I_1을 곧바로 구할 수 있다. 점화식(reduction formula)을 얻는 요령은 1과 짝지어 부분적분(integration by parts)하는 것이다. $(x^2+2ax+b)^{-n}$을 미분하면 지수가 $n+1$로 올라가는데, 이것이 바로 I_n과 I_{n+1}을 연결하는 데 필요한 것이다. 그다음 귀납법(induction)은 이항계수(binomial coefficient)를 정리하는 일에 지나지 않는다.

풀이

이 풀이 전체에서 다음과 같이 쓴다.

$$Q(x) = x^2+2ax+b = (x+a)^2+c^2, \qquad c = \sqrt{b-a^2} > 0.$$

모든 x에 대하여 $Q(x) \geq c^2 > 0$이므로 피적분함수(integrand)는 연속이고, $Q(x)^n$은 x^{2n}처럼 커지며 $2n \geq 2$이므로 모든 I_n은 수렴(converge)한다.



$a=0, b=1$일 때의 피적분함수 $1/Q^n$이다. n이 커질수록 그래프가 좁아지므로, $c=1$일 때 I_n이 작아질 것으로 예상할 수 있다.

소문항 (i)

$x + a = c\tan u$로 놓으면 $\mathrm{d}x = c\sec^2 u\,\mathrm{d}u$이다. x가 $-\infty$에서 ∞까지 움직일 때 u는 $-\frac{\pi}{2}$에서 $\frac{\pi}{2}$까지 움직이고,

$$Q(x) = c^2\tan^2 u + c^2 = c^2\sec^2 u.$$

따라서

$$I_1 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{c\sec^2 u}{c^2\sec^2 u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{c}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}u = \frac{\pi}{c} = \frac{\pi}{\sqrt{b-a^2}},$$

이고, 이것이 증명하려던 것이다.

소문항 (ii)

$u = Q^{-n}$, $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$로 잡고 I_n을 부분적분한다. $Q'(x) = 2(x+a)$이므로 $v = x$보다 $v = x + a$로 고르는 편이 더 영리하다(역도함수(antiderivative)는 어느 것이든 상관없다). 그러면

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,Q^{-n} = -2n(x+a)\,Q^{-n-1},$$

이므로

$$I_n = \left[\frac{x+a}{Q^n}\right]_{-\infty}^{\infty} + 2n\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x+a)^2}{Q^{n+1}}\,\mathrm{d}x.$$

생각해 보기 경계항(boundary term)은 왜 사라지는가?

분자는 $|x|$처럼 커지고 분모는 x^{2n}처럼 커지며, $n \geq 1$이므로 $2n \geq 2$이다. 따라서 $x \to \pm\infty$일 때 $(x+a)/Q^n \to 0$이고, 대괄호 항은 0이다.

이제 $(x+a)^2 = Q - c^2$을 이용하여 남은 적분을 나눈다.

$$\begin{aligned} I_n &= 2n\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Q-c^2}{Q^{n+1}}\,\mathrm{d}x \\ &= 2n\,I_n - 2nc^2\,I_{n+1}. \end{aligned}$$

정리하면 $2nc^2 I_{n+1} = (2n-1)I_n$, 즉

$$2n(b-a^2)\,I_{n+1} = (2n-1)\,I_n,$$

이고, 이것이 증명하려던 것이다. (I_n과 I_{n+1}이 모두 수렴하므로 적분을 나누는 것은 정당하다.)

소문항 (iii)

$P(n)$을 다음 명제라 하자.

$$I_n = \frac{\pi}{2^{2n-2}\,c^{2n-1}}\binom{2n-2}{n-1},$$

여기서 $c^{2n-1} = (b-a^2)^{n-\frac{1}{2}}$이다.

기저 단계(base case). $n=1$일 때 우변은 $\dfrac{\pi}{2^0 c^1}\binom{0}{0} = \dfrac{\pi}{c}$이고, 소문항 (i)에 의하여 이것은 I_1과 같다. 따라서 $P(1)$이 성립한다.

귀납 단계(inductive step). 어떤 $n \geq 1$에 대하여 $P(n)$이 성립한다고 가정하자. 소문항 (ii)에 의하여

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2nc^2} I_n = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{\pi}{2^{2n-2}\, c^{2n+1}} \binom{2n-2}{n-1}.$$

이것이 $P(n+1)$인 $\dfrac{\pi}{2^{2n} c^{2n+1}}\binom{2n}{n}$과 같음을 보이려 한다. 두 이항계수 사이의 관계는 다음과 같다.

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\,n!} = \frac{(2n)(2n-1)}{n \cdot n} \cdot \frac{(2n-2)!}{(n-1)!\,(n-1)!} = \frac{2(2n-1)}{n}\binom{2n-2}{n-1}.$$

? **생각해 보기** 2의 거듭제곱을 어떻게 맞출 것인가?

$\dfrac{2n-1}{2n} = \dfrac{4}{2^2} \cdot \dfrac{2n-1}{2n} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{2(2n-1)}{n}$으로 쓴다. 그러면

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{1}{4} \cdot \frac{2(2n-1)}{n} \cdot \frac{\pi}{2^{2n-2}\, c^{2n+1}} \binom{2n-2}{n-1} \\ &= \frac{\pi}{2^{2n}\, c^{2n+1}} \cdot \frac{2(2n-1)}{n} \binom{2n-2}{n-1} = \frac{\pi}{2^{2n}\, c^{2n+1}} \binom{2n}{n}. \end{aligned}$$

$2n = 2(n+1)-2$, $n = (n+1)-1$이고 $c^{2n+1} = (b-a^2)^{(n+1)-\frac{1}{2}}$이므로, 이것은 정확히 $P(n+1)$이다.

수학적 귀납법에 의하여 모든 양의 정수 n에 대하여 $P(n)$이 성립한다.

$$I_n = \frac{\pi}{2^{2n-2}(b-a^2)^{n-\frac{1}{2}}} \binom{2n-2}{n-1}.$$

검산

- $a=0, b=1, n=2$일 때 공식은 $I_2 = \frac{\pi}{4}\binom{2}{1} = \frac{\pi}{2} \approx 1.5708$을 준다. $\int_{-\infty}^{\infty}(1+x^2)^{-2}\,\mathrm{d}x$를 수치적으로 계산하면 소수점 아래 열 자리까지 일치한다.
- 탄젠트 치환으로 $I_n = c^{1-2n}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^{2n-2}u\,\mathrm{d}u$도 얻는데, 이것은 표준적인 월리스(Wallis) 적분이며 그 알려진 값이 공식과 일치한다.
- $b > a^2$인 여러 무작위 a, b에 대하여 수치적분으로 $n=1,\ldots,5$일 때 공식을 확인하였고, 따라서 소문항 (ii)의 점화식도 확인하였다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)에서 경계항이 사라지는 이유를 밝히지 않는 것. 여기에는 $n \geq 1$이 필요하다.
- 부분적분에서 $v = x + a$ 대신 $v = x$를 고르는 것. 이렇게 해도 풀리기는 하지만, 처리해야 할 $a \int (x+a) Q^{-n-1} \, \mathrm{d}x$ 항이 추가로 남는다.
- 귀납 단계에서 $b - a^2$의 지수를 놓치는 것. 각 단계마다 $1/c^2$을 곱하므로 c의 지수는 정확히 2만큼, 즉 $2n-1$에서 $2n+1$로 올라간다.

STEP 너머

실수 전체에서 유리함수(rational function)를 적분하는 문제는 복소해석학(complex analysis)의 위력을 잘 보여 주는 예이다. 유수 정리(residue theorem)를 쓰면 상반평면(upper half-plane)에 있는 $1/Q^n$의 유일한 극(pole) $z = -a + ic$만 살펴보아 몇 줄 만에 I_n을 계산할 수 있다. 여기 나타난 중심 이항계수(central binomial coefficient)는 π에 대한 월리스 곱(Wallis product)과 무작위 행보(random walk)에도 등장한다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 유수에 대하여 아름답고 기하학적인 설명을 제공한다.

풀이

STEP III 2016, 문제 2

순수수학 • 포물선의 법선

> **STEP III 2016, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/16-s3-q2

핵심 아이디어

일반적인 점 $(at^2, 2at)$에서의 법선(normal)을 쓰고, 어떤 t의 값에 대해 그 법선이 P를 지나는지 묻는다. 이 조건은 t에 대한 삼차식(cubic)이 되고, 그 한 근(root) $t = p$는 언제나 존재한다(P에서의 법선은 P를 지난다). 이 근을 제거하면 이차방정식(quadratic)이 남는데, 그 두 근이 바로 q와 r이다. 그 뒤로는 모든 것이 두 근의 합과 곱, 즉 $q + r$와 qr에 의해 결정된다.

풀이

소문항 (i)

$y^2 = 4ax$ 위에서 $x = at^2, y = 2at$라 하면 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2a}{2at} = \dfrac{1}{t}$이므로, 매개변수(parameter) t인 점에서의 법선의 기울기(gradient)는 $-t$이다.

$$y - 2at = -t\,(x - at^2), \qquad \text{즉} \qquad y + tx = 2at + at^3.$$

(이 형태는 법선이 x축이 되는 꼭짓점(vertex) $t = 0$의 경우도 포함한다.)

t에서의 법선이 $P(ap^2, 2ap)$를 지날 필요충분조건은

$$2ap + tap^2 = 2at + at^3$$

이다. $a > 0$으로 나누고 정리하면

$$\begin{aligned} 0 &= 2(p - t) + t(p^2 - t^2) \\ &= (p - t)\big(2 + t(p + t)\big) \\ &= (p - t)\,(t^2 + pt + 2). \end{aligned}$$

생각해 보기 왜 인수 $p-t$를 버려도 되는가?

근 $t=p$는 자명한 근이다. P 자신에서의 법선은 P를 지나기 때문이다. 문제에서 $Q\neq P$라 했으므로 $q\neq p$이고, 따라서 인수 $p-q$는 0이 아니다. 그러므로

$$q^2+qp+2=0$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. 같은 논법으로 $r^2+rp+2=0$이다.

소문항 (ii)

따라서 q와 r는 모두 $t^2+pt+2=0$의 근이다. $Q\neq R$이므로 $q\neq r$이고, 따라서 이들이 이 방정식의 두 근이며

$$q+r=-p,\qquad qr=2.$$

(특히 판별식(discriminant)은 양수이다: $p^2>8$. 또한 $q=p$이려면 $2p^2+2=0$이어야 하는데 이는 불가능하므로, Q와 R는 자동으로 P와 다르다.)

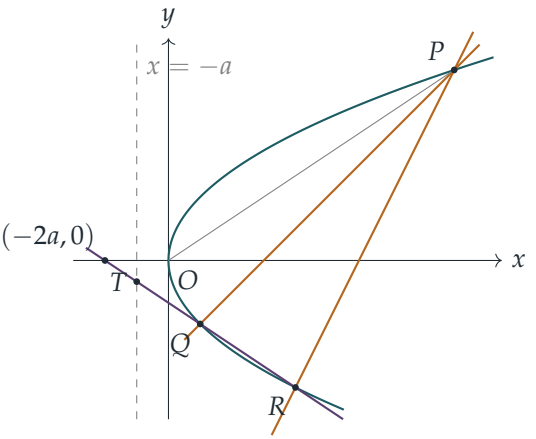
$(aq^2,2aq)$와 $(ar^2,2ar)$를 지나는 현(chord)의 기울기는 $\dfrac{2a(q-r)}{a(q^2-r^2)}=\dfrac{2}{q+r}$이고, 그 방정식은

$$(q+r)\,y=2x+2aqr$$

이다. (확인: Q에서 좌변은 $2aq^2+2aqr$이고 이는 우변과 같다. R에서도 마찬가지이다.) $q+r=-p$와 $qr=2$를 대입하면

$$-p\,y=2x+4a.$$

p의 값이 무엇이든 점 $(-2a,0)$은 이 방정식을 만족한다. 따라서 QR는 언제나 $(-2a,0)$을 지나며, 이 점은 P의 선택에 의존하지 않는다.



그림은 $a = 1$, $p = 3$인 경우로, 이때 $q = -1$, $r = -2$이다. 두 법선(호박색)은 P에서 만나고, 현 QR(자주색)는 $(-2, 0)$을 지나며, T는 점선 $x = -1$ 위에 있다.

소문항 (iii)

$p^2 > 8$이므로 $p \neq 0$이고, 따라서 $P \neq O$이며 직선 OP는 $y = \dfrac{2ap}{ap^2}x = \dfrac{2}{p}x$, 즉 $x = \frac{1}{2}py$이다. (이 직선은 기울기가 $-2/p$인 QR와 평행하지 않다.)

$x = \frac{1}{2}py$를 QR의 방정식에 대입하면

$$-py = py + 4a \quad \Longrightarrow \quad y = -\frac{2a}{p}, \qquad x = \tfrac{1}{2}p\left(-\frac{2a}{p}\right) = -a.$$

따라서 $T = \left(-a, -\frac{2a}{p}\right)$이고, 이 점은 P의 선택과 무관하게 언제나 직선 $x = -a$(포물선(parabola)의 준선(directrix)) 위에 있다.

x축에서 T까지의 거리는 $\dfrac{2a}{|p|}$이다. 소문항 (ii)에서 P를 지나는 서로 다른 두 법선이 존재한다는 사실로부터 $p^2 > 8$, 즉 $|p| > 2\sqrt{2}$이다. $a > 0$이므로

$$\frac{2a}{|p|} < \frac{2a}{2\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

이고, 이로써 증명이 끝난다. $p^2 = 8$이면 $q = r$가 되므로 부등식은 등호 없이 성립한다.

검산

- 그림의 경우 $a = 1$, $p = 3$에서: $t^2 + 3t + 2$의 근은 -1과 -2이다. 법선 $y = x - 3$과 $y = 2x - 12$는 모두 $P(9, 6)$을 지난다. $(1, -2)$와 $(4, -4)$를 지나는 현은 $-3y = 2x + 4$이고, 이는 $(-2, 0)$을 지난다. 그리고 $T = (-1, -\frac{2}{3})$이며 $\frac{2}{3} < \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$이다.
- $|p| \to 2\sqrt{2}$로 위에서부터 접근시키면 Q와 R가 합쳐지고 T의 높이는 $a/\sqrt{2}$에 수렴하므로, 이 상계는 최선이다. 무작위로 고른 20,000개의 a, p 값에 대해 컴퓨터로 확인한 결과 모든 결과가 성립했으며, T의 높이는 $a/\sqrt{2}$의 0.9996배까지 도달했지만 이를 넘지는 않았다.

흔한 실수

- $p - q$로 나누는 것을 정당화하지 않는 것. 이를 가능하게 하는 것은 조건 $Q \neq P$이다.
- $q \neq r$를 이용해 q와 r가 같은 이차방정식의 두 근임을 말하지 않는 것. 바로 이것이 $q + r = -p$와 $qr = 2$를 준다.
- $p^2 > 8$이 어디서 나오는지 말하지 않고 마지막 상계를 증명하는 것. 이는 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다는 조건에서 나온다.

STEP 너머

소문항 (i)의 바탕에 있는 t에 대한 삼차식은 고전적인 사실의 특수한 경우이다. 일반적인 점 (h,k)에 대해 조건은 $at^3 + (2a - h)\,t - k = 0$이므로, 평면 위의 한 점에서 포물선에 그을 수 있는 법선은 최대 세 개이고, "법선이 하나"인 영역과 "법선이 셋"인 영역의 경계는 **축폐선**(evolute)이라 불리는 곡선(여기서는 반삼차 포물선(semicubical parabola))이다. 축폐선, 포락선(envelope), 곡률(curvature)은 곡선의 미분기하학(differential geometry) 첫 강좌에서 다루는 표준적인 주제이다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*에는 이런 좌표기하 스타일의 STEP 문제가 더 실려 있다.

풀이

STEP III 2016, 문제 3

순수수학 • 적분과 다항식

STEP III 2016, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/16-s3-q3

이 문제는 *Beyond STEP*의 4.6 절 **공식으로 나타낼 수 없는 적분**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch04/no-formula.html

핵심 아이디어

$\int g(x)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \frac{P}{Q}\,\mathrm{e}^x + \text{상수}$ 꼴의 등식은 결국 도함수(derivative)에 관한 명제일 뿐이다. 따라서 우변을 미분하고 분모를 없앤다. 그러면 문제는 다항식 항등식(polynomial identity)으로 바뀌고, 다항식 항등식은 두 가지 방법으로 공략할 수 있다. 하나는 잘 고른 값(여기서는 $x=-1$)을 대입하는 것이고, 다른 하나는 차수(degree)를 비교하는 것이다.

풀이

이 풀이 전체에서 $P(x)$, $Q(x)$를 P, Q로 쓴다. 몫의 미분법(quotient rule)과 곱의 미분법(product rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{P}{Q}\,\mathrm{e}^x\right) = \frac{PQ + P'Q - PQ'}{Q^2}\,\mathrm{e}^x.$$

따라서 주어진 적분 등식은 이 식이 피적분함수(integrand)와 같을 때, 그리고 그때에만 성립한다(단, Q는 영다항식이 아니다).

소문항 (i)

도함수를 $\frac{x^3-2}{(x+1)^2}\,\mathrm{e}^x$와 같다고 놓고, $\mathrm{e}^x \neq 0$을 약분한 뒤 분모를 곱해 없애면 다항식 항등식

$$(x+1)^2\left(PQ + P'Q - PQ'\right) = \left(x^3-2\right)Q^2. \qquad (*)$$

을 얻는다.

Q는 인수 $x+1$을 가진다. $(*)$에 $x=-1$을 대입한다. 좌변은 0이고, 우변은 $-3\,Q(-1)^2$이다. 따라서 $Q(-1)=0$이고, 인수정리(factor theorem)에 의해 $x+1$은 Q를 나눈다.

차수. P는 영다항식이 아니다. 만약 그렇다면 도함수가 피적분함수가 아니라 0이 되기 때문이다. $\deg P = p$, $\deg Q = q$라 하고, 최고차항 계수(leading coefficient)를 각각 $a \neq 0$, $b \neq 0$이라 하자. $PQ + P'Q - PQ'$에서 항 PQ는 차수가 $p+q$이고 최고차항 계수가 ab인 반면, $P'Q$와 PQ'는 각각 차수가 많아야 $p+q-1$이다. 따라서 $PQ + P'Q - PQ'$의 차수는 정확히 $p+q$이고, $(*)$의 좌변의 차수는 $p+q+2$이다. 우변의 차수는 $3+2q$이다. 그러므로

$$p+q+2 = 2q+3 \quad \Longrightarrow \quad p = q+1,$$

즉 P의 차수는 Q의 차수보다 정확히 1만큼 크다.

$Q = x+1$인 경우. 이제 P의 차수는 2이므로 $P = ax^2+bx+c$라 하자. $Q = x+1$, $Q' = 1$이므로 $(*)$는

$$(x+1)^2\big((x+1)P + (x+1)P' - P\big) = (x^3-2)(x+1)^2,$$

이 되고, $(x+1)^2$을 약분하면

$$xP + (x+1)P' = x^3 - 2.$$

를 얻는다. $xP = ax^3+bx^2+cx$이고 $(x+1)P' = (x+1)(2ax+b) = 2ax^2 + (2a+b)x + b$이므로

$$ax^3 + (2a+b)x^2 + (2a+b+c)x + b = x^3 - 2.$$

계수를 비교(comparing coefficients)하면 $a=1$이다. 상수항에서 $b=-2$이고, 그러면 x^2항의 조건 $2a+b=0$도 모순 없이 성립하며, x항에서 $c = -(2a+b) = 0$이다. 따라서

$$P(x) = x^2 - 2x, \qquad \int \frac{x^3-2}{(x+1)^2}\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2-2x}{x+1}\,\mathrm{e}^x + \text{상수}.$$

소문항 (ii)

모순(contradiction)을 이끌어 내기 위해, 공통인수(common factor)가 없는 그러한 P와 Q가 존재한다고 가정하자. 앞에서와 마찬가지로 미분하고 분모를 없애면

$$(x+1)\big(PQ + P'Q - PQ'\big) = Q^2. \qquad (**)$$

를 얻는다. $x=-1$을 대입하면 $Q(-1)^2 = 0$이므로 $x+1$은 Q를 나눈다.

$$Q = (x+1)^n R, \qquad n \geq 1, \quad R(-1) \neq 0,$$

으로 쓰자. 즉 n은 Q에 들어 있는 $x+1$의 정확한 거듭제곱 지수이다. 그러면 $Q' = n(x+1)^{n-1}R + (x+1)^n R'$이고,

$$\begin{aligned} PQ + P'Q - PQ' &= (x+1)^n\big(PR + P'R - PR'\big) - n(x+1)^{n-1}PR \\ &= (x+1)^{n-1}\Big[(x+1)\big(PR + P'R - PR'\big) - nPR\Big]. \end{aligned}$$

이를 $(**)$에 대입하고 양변에서 공통인수 $(x+1)^n$을 약분하면(우변은 $(x+1)^{2n}R^2$이다)

$$(x+1)\big(PR + P'R - PR'\big) - nPR = (x+1)^n R^2.$$

> **생각해 보기** $(**)$에 $x=-1$을 다시 대입하는 대신, 굳이 $x+1$의 정확한 거듭제곱을 뽑아내는 수고를 하는 이유는 무엇일까?

$(**)$에 $x=-1$을 곧바로 대입하면 $Q(-1)=0$이라는 사실만 알 수 있다. 그러고 나면 모든 항이 사라져 P에 대해서는 아무것도 알 수 없다. Q에서 $x+1$ 인수를 모두 제거하면, $x=-1$에서 저절로 사라지지 **않는** 항 $-nPR$이 남는다.

이제 $x=-1$을 대입한다. $n \geq 1$이므로 우변은 0이고, 좌변의 첫째 항도 마찬가지이다. 따라서

$$-n\,P(-1)\,R(-1) = 0.$$

그런데 $n \neq 0$이고 $R(-1) \neq 0$이므로 $P(-1)=0$이다. 그러면 $x+1$은 Q뿐 아니라 P의 인수이기도 하므로, 둘이 공통인수를 갖지 않는다는 가정에 모순이다. 따라서 그러한 다항식은 존재하지 않는다. ■

(서로소(coprime)인 P, Q로 제한해도 잃는 것은 없다. 공통인수가 있다면 함수를 바꾸지 않고 P/Q에서 약분해 버리면 되기 때문이다.)

검산

- (i)의 답을 직접 미분해 보자. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^2-2x}{x+1}\right) = \frac{x^2+2x-2}{(x+1)^2}$이고, 여기에 $\frac{x^2-2x}{x+1} = \frac{x^3-x^2-2x}{(x+1)^2}$를 더하면 요구한 대로 $\frac{x^3-2}{(x+1)^2}$를 얻는다.
- 수치적으로 $\int_0^1 \frac{x^3-2}{(x+1)^2}\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \approx -1.359141$이고, 이는 $\left[\frac{x^2-2x}{x+1}\mathrm{e}^x\right]_0^1 = -\frac{\mathrm{e}}{2}$와 일치한다.
- (i)에서 차수도 맞는다. P의 차수는 2로, $Q=x+1$의 차수보다 1만큼 크다.

흔한 실수

- 최고차항이 상쇄되기 때문에 $P'Q - PQ'$의 차수가 $p+q$보다 **작다**는 사실을 잊는 것. 차수를 결정하는 것은 PQ 하나뿐이다.

▶ (ii)에서 $(**)$에 $x = -1$만 대입하고 $Q(-1) = 0$을 얻은 데서 멈추는 것. 모순을 얻으려면 Q에 들어 있는 $x+1$의 정확한 거듭제곱이 필요하다.

STEP 너머

소문항 (ii)는 본질적으로 지수적분(exponential integral) Ei인 $\int \frac{e^x}{x+1}\,\mathrm{d}x$가 이 제한된 의미에서 "초등적(elementary)"이지 않다는 것을 말해 준다. 어떤 적분을 초등함수로 나타낼 수 있는지 없는지를 판정하는 완전한 이론은 미분대수(differential algebra)의 리우빌(Liouville) 정리와 Risch 알고리즘(Risch algorithm)이며, 여기서의 논증은 그 작은 사례이다. 위에서 사용한 다항식 대수(인수정리, 나누어떨어짐, 서로소)를 꼼꼼하게 다룬 책으로는 Allenby, *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)를 참고하라.

풀이

STEP III 2016, 문제 4

순수수학 • 망원급수

STEP III 2016, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/16-s3-q4

핵심 아이디어

문제에서 제시한 두 분수의 차는 일반항의 상수배가 되므로, 이 합은 망원급수(telescoping sum)처럼 정리된다. 즉 거의 모든 항이 소거되고 처음과 마지막 조각만 남는다. 소문항 (ii)에서는 sech를 지수함수로 나타내고 인수 하나를 밖으로 빼내면, 각 항이 $x = \mathrm{e}^{-2y}$일 때의 소문항 (i)의 항과 정확히 같은 꼴이 된다. 그다음 sech가 우함수(even function)이므로, 양쪽으로 무한한 합은 한쪽으로만 무한한 합으로 되접힌다.

풀이

소문항 (i)

제시된 차를 통분(common denominator)하면

$$\frac{1}{1+x^r} - \frac{1}{1+x^{r+1}} = \frac{x^{r+1}-x^r}{(1+x^r)(1+x^{r+1})} = (x-1)\,\frac{x^r}{(1+x^r)(1+x^{r+1})}.$$

$|x| \neq 1$이므로 $x \neq 1$이고, 따라서 $x-1$로 나눌 수 있다. (이 조건은 $x \neq -1$도 보장하므로 분모 $1+x^r$가 0이 되는 일은 없다. $x^r = -1$이면 $|x| = 1$이어야 하기 때문이다.) 따라서

$$\frac{x^r}{(1+x^r)(1+x^{r+1})} = \frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{1+x^r} - \frac{1}{1+x^{r+1}}\right).$$

$r = 1$부터 N까지 더하면 각 괄호의 두 번째 분수가 다음 괄호의 첫 번째 분수와 소거되어

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{N} \frac{x^r}{(1+x^r)(1+x^{r+1})} &= \frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+x^{N+1}}\right)\\ &= \frac{x\,(x^N-1)}{(x-1)(1+x)(1+x^{N+1})},\end{aligned}$$

만 남는다. 여기서 두 번째 꼴은 두 분수를 하나로 합쳐서 얻은 것이다. 분자는 $x^{N+1} - x = x(x^N - 1)$이다.

이제 $|x| < 1$이라고 하자. 그러면 $N \to \infty$일 때 $x^{N+1} \to 0$이므로 부분합(partial sum)은

$$\frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{1+x} - 1\right) = \frac{1}{x-1} \cdot \frac{-x}{1+x} = \frac{x}{1-x^2},$$

로 수렴(converge)하고, 이것이 구하는 무한급수의 값이다.

소문항 (ii)

임의의 실수 t에 대하여

$$\operatorname{sech} t = \frac{2}{e^t + e^{-t}} = \frac{2e^{-t}}{1 + e^{-2t}}.$$

$x = e^{-2y}$로 놓자. $y > 0$이므로 $0 < x < 1$이다. 그러면 $\operatorname{sech}(ry) = 2e^{-ry}/(1 + x^r)$이고,

$$\operatorname{sech}(ry)\operatorname{sech}\big((r+1)y\big) = \frac{4\,e^{-(2r+1)y}}{(1+x^r)(1+x^{r+1})} = 4e^{-y}\,\frac{x^r}{(1+x^r)(1+x^{r+1})},$$

이다. $e^{-2ry} = x^r$이기 때문이다.

> **생각해 보기** 왜 $e^{-(2r+1)y}$를 $e^{-y} \cdot e^{-2ry}$로 나누는가?

분자가 분모에 나타나는 것과 같은 x의 거듭제곱인 x^r가 되어야 소문항 (i)을 항별로 적용할 수 있기 때문이다. 남는 인수 e^{-y}는 r에 의존하지 않으므로 합의 밖으로 나온다.

$|x| < 1$이므로 소문항 (i)에 의해

$$\sum_{r=1}^{\infty} \operatorname{sech}(ry)\operatorname{sech}\big((r+1)y\big) = 4e^{-y}\,\frac{x}{1-x^2} = \frac{4e^{-y}}{x^{-1} - x} = \frac{4e^{-y}}{e^{2y} - e^{-2y}} = \frac{4e^{-y}}{2\sinh 2y},$$

이고, 이는 요구한 대로 $2e^{-y}\operatorname{cosech}(2y)$이다. 이 합을 S라 하자.

양쪽으로 무한한 합

모든 정수 r에 대한 합을 $r \geq 1$, $r \in \{-1, 0\}$, $r \leq -2$의 세 부분으로 나눈다.

> **생각해 보기** r가 음수인 항은 어떤 모양인가?

$r \leq -2$일 때 $s = -r - 1$로 놓으면 $s \geq 1$이고 $r + 1 = -s$, $r = -(s+1)$이다. sech는 우함수이므로

$$\operatorname{sech}(ry)\operatorname{sech}\big((r+1)y\big) = \operatorname{sech}\big((s+1)y\big)\operatorname{sech}(sy),$$

이고, r가 $-2, -3, \ldots$을 지날 때 s는 $1, 2, \ldots$을 지난다. 따라서 $r \leq -2$인 항들의 합도 S이다. (한쪽으로 무한한 두 합이 모두 수렴하므로, 양쪽으로 무한한 합을 이렇게 나누는 것은 정당하다.)

가운데 두 항은

$$r=-1:\ \operatorname{sech}(-y)\operatorname{sech}0=\operatorname{sech}y,\qquad r=0:\ \operatorname{sech}0\operatorname{sech}y=\operatorname{sech}y.$$

이다. 따라서 $\sinh 2y=2\sinh y\cosh y$를 이용하면

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty}\operatorname{sech}(ry)\operatorname{sech}\big((r+1)y\big)=2S+2\operatorname{sech}y=\frac{2\mathrm{e}^{-y}}{\sinh y\cosh y}+\frac{2\sinh y}{\sinh y\cosh y}$$
$$=\frac{2(\mathrm{e}^{-y}+\sinh y)}{\sinh y\cosh y}.$$

그런데 $\mathrm{e}^{-y}+\sinh y=\mathrm{e}^{-y}+\frac12(\mathrm{e}^{y}-\mathrm{e}^{-y})=\frac12(\mathrm{e}^{y}+\mathrm{e}^{-y})=\cosh y$이므로 $\cosh y$가 약분되어

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty}\operatorname{sech}(ry)\operatorname{sech}\big((r+1)y\big)=\frac{2}{\sinh y}=2\operatorname{cosech}y.$$

검산

- $N=1$이면 유한합 공식은 $\dfrac{x(x-1)}{(x-1)(1+x)(1+x^2)}=\dfrac{x}{(1+x)(1+x^2)}$를 주는데, 이는 $r=1$인 항 하나와 같다.
- $x=\frac12$이면 무한급수의 값은 $\frac{1/2}{3/4}=\frac23$이어야 하고, 실제로 부분합은 0.6667에 가까워진다.
- $y=1$이면 $2\mathrm{e}^{-1}\operatorname{cosech}2\approx0.202864$이고 $2\operatorname{cosech}1\approx1.701836$이며, 둘 다 급수를 직접 더한 값과 소수점 아래 여러 자리까지 일치한다(여러 y 값에 대해 컴퓨터로 확인하였다).
- $y\to\infty$이면 $r=-1,0$인 항만 남고 각각 약 $2\mathrm{e}^{-y}$이므로 합은 약 $4\mathrm{e}^{-y}$이다. 한편 $2\operatorname{cosech}y\approx4\mathrm{e}^{-y}$이기도 하다.

흔한 실수

- 인수 $\frac{1}{x-1}$을 빠뜨리거나 부호를 틀리는 것. 차는 항의 $(x-1)$배이지 $(1-x)$배가 아니다.
- 양쪽으로 무한한 합에서 S를 두 배 하고 $r=-1$과 $r=0$인 두 항을 빠뜨리는 것. 이 두 항은 $\operatorname{sech}0=1$을 포함하며, 어느 쪽의 한쪽 합에도 속하지 않는다.

STEP 너머

여기서 무한급수의 순서를 바꾸고 나누어도 괜찮은 것은 모든 항이 양수이기 때문이다(급수가 절대수렴(absolute convergence)한다). 조건수렴(conditional convergence)하는 급

수에 대해서는 리만(Riemann)의 재배열 정리(rearrangement theorem)가 말해 주듯이, 순서를 바꾸면 합을 원하는 어떤 값으로도 바꿀 수 있다. 이는 처음 배우는 해석학(analysis) 강의에서 만나는 놀라운 결과이다. $\operatorname{sech}(ry)\operatorname{sech}((r+1)y)$와 같은 곱을 모든 정수에 대해 더한 합은 타원함수(elliptic function) 이론에도 등장하는데, 그곳에서 이러한 양방향 급수(bilateral series)는 아름다운 닫힌 꼴을 가진다. 급수의 해석학에 대해서는 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 참고하라.

풀이

STEP III 2016, 문제 5

순수수학 • 소수의 곱

> **STEP III 2016, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/16-s3-q5

이 문제는 *Beyond STEP*의 1.2 절 소수는 얼마나 드문드문 흩어져 있는가?에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch01/prime-distribution.html

핵심 아이디어

가운데 이항계수(binomial coefficient) $\binom{2m+1}{m}$은 작다(이 수와 그 쌍둥이 $\binom{2m+1}{m+1}$이 다른 항들과 함께 합계 2^{2m+1}을 나누어 가진다). 그런데도 이 수는 $m+1$과 $2m+1$ 사이의 모든 소수(prime)로 나누어떨어진다. 따라서 그 소수들의 곱도 작다. $2m+1$ 이하의 소수를 "$m+1$ 이하"와 "$m+1$ 초과"로 나누면 강한 귀납법(strong induction)을 세울 수 있다. 짝수는 (2를 제외하면) 결코 소수가 아니므로 아무 부담도 되지 않는다.

풀이

소문항 (i)

$(1+x)^{2m+1}$의 이항전개(binomial expansion)에 $x=1$을 대입하면

$$\sum_{k=0}^{2m+1}\binom{2m+1}{k}=2^{2m+1}.$$

좌변의 모든 항은 양수이다. 대칭성에 의해 $\binom{2m+1}{m}=\binom{2m+1}{m+1}$이고, 이 둘은 합에서 서로 다른 두 항이다. $m\geq 1$이므로 항 $\binom{2m+1}{0}=1$은 이들과 다른 세 번째 항이다. 따라서

$$2\binom{2m+1}{m}=\binom{2m+1}{m}+\binom{2m+1}{m+1}<2^{2m+1},$$

이므로 요구한 대로 $\binom{2m+1}{m}<2^{2m}$이다.

소문항 (ii)

다음과 같이 쓴다.

$$\binom{2m+1}{m} = \frac{(2m+1)!}{m!\,(m+1)!}, \qquad \text{따라서} \qquad m!\,(m+1)!\binom{2m+1}{m} = (2m+1)!.$$

p를 $m+1 < p \le 2m+1$인 소수라 하자. 그러면 p는 $(2m+1)!$의 인수 중 하나이므로 p는 우변을 나눈다. 그런데 $m!\,(m+1)!$의 모든 인수는 $m+1 < p$ 이하이므로 소수 p는 그 어느 것도 나누지 못하고, 따라서 $p \nmid m!\,(m+1)!$이다. 곱 ab를 나누는 소수는 a나 b를 나누어야 하므로 $p \mid \binom{2m+1}{m}$이다.

> **생각해 보기** 이러한 소수 각각이 이 계수를 나눈다. 그렇다면 왜 그들의 곱도 이 계수를 나누는가?

이 소수들은 서로 다르므로 쌍마다 서로소(coprime)이고, 쌍마다 서로소인 수들로 각각 나누어떨어지는 수는 그들의 곱으로도 나누어떨어진다. (같은 말로, 소인수분해의 유일성(unique factorisation)에 의해 이 소수들은 각각 $\binom{2m+1}{m}$의 소인수분해에 나타난다.) 따라서 $P_{m+1,2m+1}$은 $\binom{2m+1}{m}$을 나눈다. 그러한 소수가 없으면 $P_{m+1,2m+1} = 1$이고, 이는 모든 수를 나눈다.

양의 정수의 양의 약수는 그 수보다 크지 않으므로, 소문항 (i)에 의해

$$P_{m+1,2m+1} \le \binom{2m+1}{m} < 2^{2m}.$$

소문항 (iii)

$m \ge 1$이므로 $1 < m+1 < 2m+1$이다. $p \le 2m+1$인 모든 소수는 $p \le m+1$ 또는 $m+1 < p \le 2m+1$ 중 정확히 하나를 만족하므로

$$P_{1,2m+1} = P_{1,m+1}\,P_{m+1,2m+1}.$$

또한 ($m \ge 1$이므로) $2 \le m+1 \le 2m$이어서 $k = m+1$은 가정이 적용되는 값 중 하나이고, 따라서 $P_{1,m+1} < 4^{m+1}$이다. 소문항 (ii)와 합치면

$$P_{1,2m+1} < 4^{m+1} \cdot 2^{2m} = 4^{m+1} \cdot 4^m = 4^{2m+1}.$$

소문항 (iv)

n에 대한 강한 귀납법을 쓴다. $S(n)$을 명제 $P_{1,n} < 4^n$이라 하자.

기저 단계(*base case*). $P_{1,2} = 2 < 16 = 4^2$.

귀납 단계(*inductive step*). $n \ge 3$이라 하고, $k = 2, 3, \ldots, n-1$에 대해 $S(k)$가 성립한다고 가정하자.

- n이 홀수이면 $m \geq 1$인 m으로 $n = 2m+1$이라 쓴다. 그러면 $n-1 = 2m$이므로 $k = 2, \ldots, 2m$에 대해 $S(k)$가 성립한다. 소문항 (iii)에 의해 $P_{1,2m+1} < 4^{2m+1}$이고, 이것이 곧 $S(n)$이다.
- n이 짝수이면 $n \geq 4$는 2보다 큰 짝수이므로 소수가 아니다. 따라서 n 이하의 소수는 정확히 $n-1$ 이하의 소수이고,

$$P_{1,n} = P_{1,n-1} < 4^{n-1} < 4^n.$$

? **생각해 보기** 왜 모든 n에 대해 그냥 소문항 (iii)을 쓸 수 없는가?

소문항 (iii)은 홀수 $2m+1$에만 적용된다. 짝수 n에 대해서는 별도의 논증이 필요한데, 위의 논증은 쉽다. 2보다 큰 짝수는 곱에 새로운 소수를 더하지 않기 때문이다.

따라서 두 경우 모두 $S(n)$이 성립하고, 강한 귀납법에 의해 모든 $n \geq 2$에 대해 $P_{1,n} < 4^n$이다.

검산

- $m = 3$: $\binom{7}{3} = 35 < 64 = 2^6$. $(4, 7]$에 있는 소수는 5와 7이고, $P_{4,7} = 35$는 35를 정확히 나눈다.
- $m = 5$: $\binom{11}{5} = 462 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$이고, 이는 $P_{6,11} = 77$로 나누어떨어진다. 또한 $462 < 1024$이다.
- $P_{1,10} = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$으로, $4^{10} = 1\,048\,576$보다 훨씬 작다. 컴퓨터로 확인하면 2부터 1500까지의 모든 n에 대해 $P_{1,n} < 4^n$이 성립한다.

흔한 실수

- 소문항 (i)에서 $<$ 대신 $\leq$로 쓰는 것: 엄격한 부등호를 얻으려면 가운데 두 항 외에 $\binom{2m+1}{0}$과 같은 세 번째 양의 항이 필요하다.
- 소문항 (iii)에서 $m+1$이 가정이 적용되는 범위 $2, \ldots, 2m$에 속하는지 확인하는 것을 잊는 것.
- 소문항 (iv)에서 홀수 n만 다루거나, 기저 단계 $n = 2$를 잊는 것.

STEP 너머

이것은 부등식 $\prod_{p \leq n} p < 4^n$에 대한 에르되시(Erdős)의 초등적 증명이다. 로그를 취하면, 이는 체비쇼프(Chebyshev) 함수 $\theta(n) = \sum_{p \leq n} \ln p$가 $n \ln 4$보다 작다는 뜻이다. 이는 n 이

하의 소수의 개수가 $n/\ln n$ 정도의 크기라는 체비쇼프 정리의 절반에 해당한다. 에르되시는 같은 종류의 이항계수 논증으로 베르트랑 공준(Bertrand's postulate), 즉 n과 $2n$ 사이에는 언제나 소수가 존재한다는 사실을 증명하였다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 초등 정수론을 더 공부하기 위한 좋은 다음 단계이다.

풀이

STEP III 2016, 문제 6

순수수학 • 쌍곡선 함수

> **STEP III 2016, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/16-s3-q6

핵심 아이디어

$\operatorname{sech} x = a\tanh x + b$의 양변에 $\cosh x$를 곱하면 $a\sinh x + b\cosh x = 1$을 얻는데, 이것이 바로 첫 소문항에 나오는 결합이다. 따라서 첫 번째 할 일은 익숙한 "$R\cos(x+\alpha)$" 기법의 쌍곡선함수(hyperbolic function) 버전이다. 삼각함수의 경우와 달리, 얻어지는 꼴은 B와 $\pm A$의 대소 관계에 따라 달라지며, 각 꼴을 보면 해가 몇 개인지 곧바로 알 수 있다.

풀이

$A\sinh x + B\cosh x$의 꼴

전개하면

$$R\cosh(x+\gamma) = R\sinh\gamma\,\sinh x + R\cosh\gamma\,\cosh x,$$

이므로 $R\sinh\gamma = A$, $R\cosh\gamma = B$가 되어야 한다. $\cosh^2\gamma - \sinh^2\gamma = 1$이므로 반드시 $R^2 = B^2 - A^2$이고 $\tanh\gamma = A/B$이다. $B > A > 0$이면 두 조건을 모두 만족시킬 수 있다. 다음과 같이 잡자.

$$R = \sqrt{B^2 - A^2} > 0, \qquad \gamma = \operatorname{artanh}\frac{A}{B},$$

$0 < A/B < 1$이므로 이 값은 존재한다. 그러면 $\cosh\gamma = 1/\sqrt{1 - A^2/B^2} = B/R$이고 $\sinh\gamma = \tanh\gamma\cosh\gamma = A/R$이므로, 요구한 대로 $R\cosh\gamma = B$, $R\sinh\gamma = A$이다. 따라서 $A\sinh x + B\cosh x = R\cosh(x+\gamma)$이다.

$A > 0$일 때 나머지 경우는 다음과 같다.

▶ $-A < B < A$: 대신 $R\sinh(x+\gamma) = R\cosh\gamma\sinh x + R\sinh\gamma\cosh x$와 계수를 비교

하면

$$A\sinh x + B\cosh x = \sqrt{A^2 - B^2}\,\sinh(x+\gamma), \qquad \gamma = \operatorname{artanh}\frac{B}{A}.$$

- $B = A$: $A(\sinh x + \cosh x) = Ae^x$.
- $B = -A$: $A(\sinh x - \cosh x) = -Ae^{-x}$.
- $B < -A$: 첫 번째 결과를 $-A\sinh x - B\cosh x$에 적용하면($-B > A$, $-A < 0$이다. 위의 계산에는 $|A| < B$만 필요했다)

$$A\sinh x + B\cosh x = -\sqrt{B^2 - A^2}\,\cosh(x+\gamma), \qquad \gamma = \operatorname{artanh}\frac{A}{B}.$$

교점의 방정식

$\cosh x > 0$이므로 두 곡선은 다음을 만족하는 곳에서 만난다.

$$\operatorname{sech} x = a\tanh x + b \iff 1 = a\sinh x + b\cosh x. \qquad (*)$$

소문항 (i)

$b > a > 0$일 때 $R = \sqrt{b^2 - a^2}$라 하면 $(*)$는 다음이 된다.

$$\cosh\left(x + \operatorname{artanh}\tfrac{a}{b}\right) = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}}.$$

두 곡선이 만나면 이 방정식은 해를 가지므로 우변은 1 이상이다. $c \geq 1$일 때 $\cosh u = c$의 해는 $u = \pm\operatorname{arcosh} c$이므로

$$x = \pm\operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}}\right) - \operatorname{artanh}\frac{a}{b},$$

이고, 이것이 구하는 꼴이다.

소문항 (ii)

$a > b > 0$이면 sinh의 경우이다. $(*)$는 $\sqrt{a^2 - b^2}\,\sinh\left(x + \operatorname{artanh}\frac{b}{a}\right) = 1$이 된다. sinh는 $\mathbb{R}$에서 $\mathbb{R}$로의 전단사함수(bijection)이므로 교점은 항상 정확히 하나이며, 그 위치는 다음과 같다.

$$x = \operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right) - \operatorname{artanh}\frac{b}{a}.$$

소문항 (iii)

첫 소문항의 각 경우($A = a > 0$, $B = b$)에 대해 $(*)$의 해의 개수를 세어 보자.

- $b < -a$: 좌변 $-\sqrt{b^2 - a^2}\cosh(x+\gamma)$가 음수이므로 해가 없다.

- $b = -a$: $-ae^{-x} = 1$은 해가 없다.
- $-a < b < a$: (ii)에서처럼 해가 정확히 하나이다. 거기서의 논증은 이 범위의 모든 b에 대해 성립한다.
- $b = a$: $ae^{x} = 1$은 유일한 해 $x = -\ln a$를 갖는다.
- $b > a$: $\cosh(x+\gamma) = 1/\sqrt{b^2-a^2}$는 $1/\sqrt{b^2-a^2} > 1$이면 해가 두 개, 1과 같으면 한 개, 1보다 작으면 없다.

? **생각해 보기** $b \le a$인 경우에는 왜 결코 두 점이 나올 수 없을까?

이 경우 $(*)$의 좌변은 x에 대한 순단조(strictly monotonic) 함수이거나($\sinh(x+\gamma)$ 또는 $e^{\pm x}$의 상수배), 항상 음수이다. 따라서 값 1을 많아야 한 번 취한다. 감소했다가 다시 증가하는 cosh 꼴만이 1에 두 번 도달할 수 있다.

따라서 두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만날 필요충분조건은 $b > a$이고 $b^2 - a^2 < 1$인 것, 즉

$$a < b < \sqrt{a^2+1}.$$

소문항 (iv)

$\operatorname{sech} x - (a\tanh x + b) = \operatorname{sech} x\,(1 - a\sinh x - b\cosh x)$이고 $\operatorname{sech} x \neq 0$이므로, 두 곡선은 $g(x) = a\sinh x + b\cosh x - 1$이 중근(repeated zero)을 갖는 곳, 즉 $g(x) = g'(x) = 0$인 곳에서 정확히 접한다. sinh의 경우와 지수함수의 경우에는 $g'(x)$가 $\cosh(x+\gamma)$ 또는 e^x의 상수배여서 결코 0이 되지 않으므로 중근이 없다. $b > a$인 경우 $g(x) = R\cosh(x+\gamma) - 1$, $g'(x) = R\sinh(x+\gamma)$이고, 둘이 동시에 0이 되는 것은 $x + \gamma = 0$이고 $R = 1$일 때뿐이다. 따라서 두 곡선이 접할 필요충분조건은

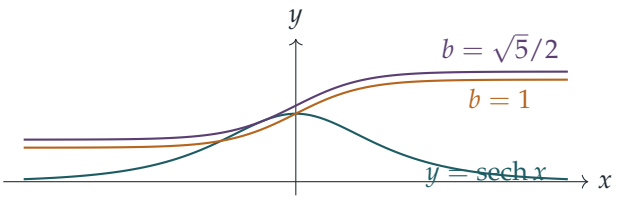
$$b > a \quad \text{그리고} \quad b^2 - a^2 = 1, \qquad \text{즉} \quad b = \sqrt{1+a^2}.$$

접점의 x좌표는 $x = -\gamma = -\operatorname{artanh}(a/b)$이므로

$$y = \operatorname{sech}\left(\operatorname{artanh}\tfrac{a}{b}\right) = \sqrt{1-\tfrac{a^2}{b^2}} = \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b} = \frac{1}{b} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}},$$

이다. 여기서 $\operatorname{sech}^2 u = 1 - \tanh^2 u$와 $\operatorname{sech} u > 0$을 이용했다. 검산으로, 다른 곡선에서도 $y = -a\cdot\frac{a}{b} + b = \frac{b^2-a^2}{b} = \frac{1}{b}$를 얻는다.

아래 그림은 $a = \frac{1}{2}$인 경우이다. $b = 1$(호박색)이면 교점이 두 개이고, $b = \sqrt{5}/2$(자주색)이면 두 곡선이 높이 $2/\sqrt{5}$에서 접한다.



검산

$a = \frac{3}{4}$, $b = 1$로 잡으면 $b^2 - a^2 = \frac{7}{16} < 1$이므로 (iii)에 따르면 교점이 두 개이다. 이때 $\operatorname{arcosh}(4/\sqrt{7}) = \ln\big((4+3)/\sqrt{7}\big) = \ln\sqrt{7}$이고 $\operatorname{artanh}\frac{3}{4} = \frac{1}{2}\ln 7 = \ln\sqrt{7}$이므로, (i)의 공식은 $x = 0$과 $x = -\ln 7 \approx -1.946$을 준다. $x = 0$에서 두 곡선은 예상대로 모두 $(0, 1)$을 지난다. 또한 무작위로 고른 많은 a, b에 대해 $(*)$를 컴퓨터로 확인한 결과, 모든 경우에 근의 개수가 맞았고 접할 조건에서 중근이 생기는 것도 확인되었다.

흔한 실수

- 경계인 경우 $b = \pm a$를 빠뜨리는 것. 이때는 cosh 꼴도 sinh 꼴도 존재하지 않고, 식이 하나의 지수함수가 된다.
- (iii)에서 $b^2 - a^2 < 1$만 쓰고 $b > a$를 빠뜨리는 것. $b < a$이면 두 곡선은 여전히 만나지만 한 번만 만난다.
- γ의 부호를 틀리는 것. 해는 $\pm\operatorname{arcosh}(\cdot)$에서 $\operatorname{artanh}(a/b)$를 뺀 것이다.

STEP 너머

경우의 구분은 $B^2 - A^2$의 부호가 결정한다. 점 (A, B)는 직선 $B = \pm A$로 나뉜 영역 중 하나의 내부에 있거나, 그 직선 위에 있다. 이것은 특수 상대성 이론(special relativity)의 기하학이다. 거기서 로런츠 부스트(Lorentz boost)는 보통의 회전이 $x^2 + y^2$을 보존하듯 $t^2 - x^2$을 보존하는 쌍곡적 "회전"이며, $B = \pm A$는 광원뿔(light cone), 즉 부스트로는 결코 넘어갈 수 없는 유일한 경계의 역할을 한다. 쌍곡선함수와 이런 종류의 문제를 더 보려면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)를 참고하라.

풀이

STEP III 2016, 문제 7

순수수학 • 1의 거듭제곱근

STEP III 2016, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/16-s3-q7

이 문제는 *Beyond STEP*의 5.4 절 **정다각형 속의 거리**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch05/polygon-distances.html

핵심 아이디어

거리는 절댓값(modulus)이고, 절댓값들의 곱은 곱의 절댓값이다. 다각형을 아르강 도표(Argand diagram) 위에 놓아 그 꼭짓점들이 n제곱 단위근(roots of unity)을 회전시킨 점이 되게 하면, 처음의 항등식에 의해 거리들의 곱은 적당한 w에 대하여 $|w^n - 1|$이 된다. 실제로 해야 할 일은 좌표를 잘 고르는 것뿐이다. O를 원점에 두고 X_0X_1의 수직이등분선(perpendicular bisector)이 실수축이 되게 하면 P는 실수가 된다.

풀이

인수분해

$k = 0, 1, \ldots, n-1$에 대하여 $(\omega^k)^n = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k} = 1$이므로 각 ω^k는 $z^n - 1$의 근이다. 이 n개의 수는 서로 다르다. 그 편각(argument) $2\pi k/n$이 $[0, 2\pi)$ 안의 서로 다른 수이기 때문이다. 항등식의 양변은 모두 최고차항의 계수가 1인 n차 다항식(monic polynomial)이므로, 그 차

$$D(z) = (z-1)(z-\omega)\cdots(z-\omega^{n-1}) - (z^n - 1)$$

의 차수는 많아야 $n-1$이다. 그런데 D는 서로 다른 n개의 점 $1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}$에서 0이 되고, 차수가 많아야 $n-1$인 영이 아닌 다항식은 근을 많아야 $n-1$개 가진다. 따라서 $D \equiv 0$이고, 다음이 성립한다.

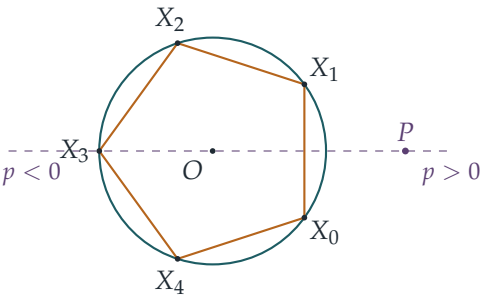
$$\prod_{k=0}^{n-1}(z-\omega^k) = z^n - 1 \quad \text{모든 복소수} z.$$

소문항 (i)

꼭짓점에는 원을 따라 차례로 이름이 붙어 있다고 하자. 그러면 X_0과 X_1은 이웃하고 $\angle X_0OX_1 = 2\pi/n$이다. 도형을 회전하거나 대칭이동해도 거리는 변하지 않으므로, O를 원점에 두고

$$X_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k-1)\pi/n} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/n}\,\omega^k, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

로 놓을 수 있다. 그러면 $X_0 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/n}$과 $X_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n}$은 실수축에 대하여 서로 대칭이므로, X_0X_1의 수직이등분선은 실수축이다. X_0과 X_1에서 같은 거리에 있는 점은 정확히 이 직선 위의 점들이므로, P는 실수 p이고 $|OP| = |p|$이다. X_0X_1의 중점은 $\cos(\pi/n) > 0$이므로, $p > 0$은 P가 O에 대하여 변 X_0X_1과 같은 쪽에 있다는 뜻이다.



(그림은 $n = 5$인 경우이다. n이 홀수이면 O를 지나는 이 직선은 반대쪽 꼭짓점도 지난다.)

이제 $|ab| = |a||b|$와 $|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/n}| = 1$을 이용하면

$$\begin{aligned}|PX_0|\,|PX_1|\cdots|PX_{n-1}| &= \prod_{k=0}^{n-1}|p - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/n}\omega^k| = \prod_{k=0}^{n-1}|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/n}|\,|p\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n} - \omega^k| \\ &= \left|\prod_{k=0}^{n-1}(p\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n} - \omega^k)\right| = \left|(p\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n})^n - 1\right|,\end{aligned}$$

이다. 마지막 등호는 $z = p\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n}$으로 놓은 인수분해(factorisation)에서 나온다. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$이므로

$$|PX_0|\,|PX_1|\cdots|PX_{n-1}| = |-p^n - 1| = |p^n + 1|.$$

생각해 보기 n이 홀수일 때는 p의 부호가 중요한데, n이 짝수일 때는 왜 그렇지 않을까?

n이 짝수이면 p의 부호와 관계없이 $p^n = |p|^n \geq 0$이므로 $|p^n + 1| = |p|^n + 1$이고,

$$|PX_0| \times |PX_1| \times \cdots \times |PX_{n-1}| = |OP|^n + 1,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. n이 홀수이면 p^n은 p와 부호가 같으며, 두 경우로 나뉜다.

- P가 O에서 X_0X_1의 중점을 지나는 반직선(ray) 위에 있으면($p \geq 0$), $p^n = |OP|^n$이고 곱은 $|OP|^n + 1$이다.
- P가 반대쪽 반직선 위에 있으면($p < 0$), 이 반직선은 n이 홀수일 때 O에서 꼭짓점 $X_{(n+1)/2}$($e^{i\pi} = -1$에 있는 점)를 지나는 반직선이고, $p^n = -|OP|^n$이며 곱은

$$\big|\,|OP|^n - 1\big|.$$

  이다.

두 번째 경우에는 절댓값 기호가 중요하다. P가 원 안에 있을 때 그 값은 $1 - |OP|^n$이고, $P = X_{(n+1)/2}$일 때는 0이다. 이때 거리 중 하나가 0이므로 당연히 그래야 한다.

소문항 (ii)

이번에는 $X_k = \omega^k$가 되도록 회전하여 $X_0 = 1$로 놓는다. $z \neq 1$에 대하여 인수분해로부터

$$(z-\omega)(z-\omega^2)\cdots(z-\omega^{n-1}) = \frac{z^n - 1}{z-1} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}.$$

을 얻는다. 양 끝은 무한히 많은 점(모든 $z \neq 1$)에서 값이 같은 다항식이므로, $z = 1$을 포함한 모든 z에 대하여 같다. $z = 1$을 대입하면

$$(1-\omega)(1-\omega^2)\cdots(1-\omega^{n-1}) = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n} = n.$$

이다. 절댓값을 취하고 $|1 - \omega^k| = |X_0X_k|$를 이용하면

$$|X_0X_1| \times |X_0X_2| \times \cdots \times |X_0X_{n-1}| = n,$$

이고, 이것이 원하는 결과이다.

검산

- 정사각형($n = 4$)에서 $P = O$인 경우: 모든 거리가 1이므로 곱은 $1 = 0^4 + 1$이다. P가 아주 멀리 있으면 곱은 공식대로 $|OP|^n$처럼 행동한다.
- 정삼각형($n = 3$)에서 P가 반대쪽으로 O에서 거리 2에 있는 경우: 거리는 1(-1에 있는 반대쪽 꼭짓점까지)과 $\sqrt{(-2-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \sqrt{7}$ 두 번이므로, 곱은 $7 = 2^3 - 1$이다.
- 정사각형에 대한 소문항 (ii): $|X_0X_1|\,|X_0X_2|\,|X_0X_3| = \sqrt{2} \times 2 \times \sqrt{2} = 4$. 세 결과 모두 임의의 n, 회전, P의 위치에 대하여 컴퓨터로도 확인하였다.

흔한 실수

- 소문항 (i)에서 X_0을 1에 놓는 것: 그러면 X_0X_1의 수직이등분선은 실수축이 아니라 각 π/n을 이루는 직선이 되어 계산이 더 복잡해진다. 좌표는 P에 맞게 고르자.
- n이 홀수이고 P가 반대쪽에 있는 경우에 절댓값을 빠뜨리는 것: P가 원 안에 있으면 $|OP|^n - 1$은 음수이다.
- $\dfrac{z^n-1}{z-1}$에 $z=1$을 바로 대입하는 것: 값 n을 정당화하는 것은 다항식 항등식이다.

STEP 너머

소문항 (ii)는 $z^n - 1$의 $z = 1$에서의 미분계수, 즉 도함수(derivative)의 값이 n이라는 명제이다. 일반적으로 $f(z) = \prod(z - a_k)$이면 $f'(a_0) = \prod_{k\neq 0}(a_0 - a_k)$이다. 이와 같은 단위근에 대한 곱은 원분다항식(cyclotomic polynomial)의 이론과 판별식(discriminant)의 계산에 등장하며, 소문항 (i)은 본질적으로 정다각형의 대칭축 위의 한 점에서 꼭짓점까지의 거리에 관한 로저 코츠(Roger Cotes)의 고전적인 결과이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 복소수 곱셈의 이러한 기하학이 전개되는 모습을 볼 수 있는 아름다운 책이다.

풀이

STEP III 2016, 문제 8

순수수학 • 함수방정식

> **STEP III 2016, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/16-s3-q8

핵심 아이디어

각 방정식은 x에서의 미지의 함수의 값을 어떤 변환된 점에서의 값과 연결한다. 그 변환을 한 번 더(또는 세 번째로) 적용했을 때 다시 x로 돌아온다면, 변환된 점을 방정식에 대입하여 같은 미지수에 대한 **두 번째** 방정식을 얻는다. 이제 연립일차방정식(simultaneous linear equations)이 생겼으므로, 보통의 미지수를 다룰 때와 똑같이 원하지 않는 값들을 소거(eliminate)할 수 있다.

풀이

소문항 (i)

이 방정식은 **모든** x에 대하여 성립하므로, x를 $-x$로 바꾸어도 성립한다.

$$\mathrm{f}(-x) + (1+x)\,\mathrm{f}(x) = (-x)^2 = x^2,$$

이것이 바로 구하려던 결과이다.

이제 두 미지수 $\mathrm{f}(x)$와 $\mathrm{f}(-x)$에 대한 두 방정식이 있다. 두 번째 방정식에서 $\mathrm{f}(-x) = x^2 - (1+x)\mathrm{f}(x)$를 얻고, 이를 원래 방정식에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(x) + (1-x)\big(x^2 - (1+x)\mathrm{f}(x)\big) &= x^2\\ \mathrm{f}(x)\big(1 - (1-x^2)\big) &= x^2 - (1-x)x^2\\ x^2\,\mathrm{f}(x) &= x^3.\end{aligned}$$

$x \neq 0$이면 x^2으로 나누어 $\mathrm{f}(x) = x$를 얻는다. $x = 0$에서는 원래 방정식이 $\mathrm{f}(0) + \mathrm{f}(0) = 0$이

되므로 역시 $f(0) = 0$이다. 따라서

$$f(x) = x \quad \text{모든} x.$$

이다.

확인: $x + (1-x)(-x) = x - x + x^2 = x^2$이므로 조건을 만족한다.

생각해 보기 문제에서는 왜 굳이 답을 확인하라고 요구할까?

우리의 논증이 보여 주는 것은 어떤 함수가 방정식을 만족한다**면** 그 함수는 반드시 $f(x) = x$라는 사실뿐이다. 그런 함수가 실제로 존재한다는 것은 보여 주지 않는다. 식을 변형하는 과정에서 정보를 잃어버렸을 수도 있고, 그렇다면 어떤 함수도 조건을 만족하지 않을 것이다. 다시 대입해 보는 것이 이 빈틈을 메운다.

소문항 (ii)

먼저 $x \neq 1$인 모든 x에 대하여 $K(x) \neq 1$임에 주목하자. $\frac{x+1}{x-1} = 1$이 되려면 $x+1 = x-1$이어야 하기 때문이다. 따라서 $K(K(x))$가 정의되고, 분자와 분모에 $x-1$을 곱하면 다음을 얻는다.

$$K(K(x)) = \frac{\dfrac{x+1}{x-1} + 1}{\dfrac{x+1}{x-1} - 1} = \frac{(x+1)+(x-1)}{(x+1)-(x-1)} = \frac{2x}{2} = x.$$

g에 대한 방정식은 $g(x) + x\,g(K(x)) = x$이다. $K(x) \neq 1$이므로 x를 $K(x)$로 바꿀 수 있고, $K(K(x)) = x$이므로 다음을 얻는다.

$$g(K(x)) + K(x)\,g(x) = K(x).$$

$K(x)$를 K로 쓰자. 그러면 $g(K) = K - K\,g(x)$이고, 이를 원래 방정식에 대입하면

$$g(x) + x\big(K - K\,g(x)\big) = x \quad \Longrightarrow \quad (1 - xK)\,g(x) = x - xK.$$

이다. 이제

$$1 - xK = \frac{(x-1) - x(x+1)}{x-1} = -\frac{x^2+1}{x-1},$$
$$x - xK = x \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{x-1} = -\frac{2x}{x-1}.$$

이다. $x^2 + 1 > 0$이므로 인수 $1 - xK$는 결코 0이 아니고, 따라서 나눌 수 있다.

$$g(x) = \frac{-2x/(x-1)}{-(x^2+1)/(x-1)} = \frac{2x}{x^2+1} \qquad (x \neq 1),$$

이것이 구하려던 결과이다. (이 함수가 실제로 방정식을 만족함을 확인할 수 있다. 예를 들어 $x = 2$일 때 $K(2) = 3$이고 $\frac{4}{5} + 2 \cdot \frac{6}{10} = 2$이다.)

소문항 (iii)

$\mathrm{M}(x) = \dfrac{1}{1-x}$라 하자. 방정식은

$$\mathrm{h}(x) + \mathrm{h}(\mathrm{M}(x)) = 1 - x - \mathrm{M}(x),$$

이고, 우변이 x와 $\mathrm{M}(x)$만으로 쓰여 있다는 점이 고무적이다.

이번에는 M이 자기 자신의 역함수(inverse)가 아니므로, 거듭 적용해 보자. $x \neq 0, 1$에 대하여

$$\mathrm{M}(\mathrm{M}(x)) = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{1-x}{-x} = \frac{x-1}{x}, \qquad \mathrm{M}(\mathrm{M}(\mathrm{M}(x))) = \frac{1}{1-\frac{x-1}{x}} = \frac{x}{1} = x.$$

이다. 따라서 M의 주기(period)는 3이다. 또한 M이 우리를 정의역(domain) 안에 머물게 해야 한다. $\mathrm{M}(x)$는 결코 0이 아니고, $\mathrm{M}(x) = 1$은 $x = 0$일 때뿐이므로, $x \neq 0, 1$이면 $\mathrm{M}(x) \neq 0, 1$이기도 하다.

> ? **생각해 보기** M을 두 번 적용해서는 x로 돌아오지 않는다. 어떻게 하면 충분한 개수의 방정식을 얻을 수 있을까?

순환의 세 점을 모두 사용한다. $a = x$, $b = \mathrm{M}(x)$, $c = \mathrm{M}(b) = \frac{x-1}{x}$로 두면 $\mathrm{M}(c) = a$이다. 방정식을 a, b, c에 차례로 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathrm{h}(a) + \mathrm{h}(b) &= 1 - a - b, \\ \mathrm{h}(b) + \mathrm{h}(c) &= 1 - b - c, \\ \mathrm{h}(c) + \mathrm{h}(a) &= 1 - c - a. \end{aligned}$$

세 식을 모두 더하고 2로 나누면

$$\mathrm{h}(a) + \mathrm{h}(b) + \mathrm{h}(c) = \tfrac{3}{2} - (a + b + c).$$

이다. 여기서 두 번째 방정식을 빼면

$$\mathrm{h}(a) = \tfrac{3}{2} - a - b - c - (1 - b - c) = \tfrac{1}{2} - a.$$

가 남는다. 따라서

$$\mathrm{h}(x) = \tfrac{1}{2} - x \qquad (x \neq 0,\ x \neq 1).$$

이다.

확인: $\left(\frac{1}{2} - x\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1-x}\right) = 1 - x - \frac{1}{1-x}$이므로 조건을 만족한다.

검산

▶ (i)에서 $x = 3$을 넣어 보자. $3 + (-2)(-3) = 9 = 3^2$이다.

- (ii)에서 $x = -1$을 넣어 보자. $\mathrm{K}(-1) = 0$이고 $\mathrm{g}(-1) + (-1)\,\mathrm{g}(0) = -1 - 0 = -1$이다. 또한 $\mathrm{K}(0) = -1$이므로 주기가 2임이 확인된다.
- (iii)에서 $x = 2$를 넣어 보자. 순환은 $2 \to -1 \to \frac{1}{2} \to 2$이고, $\mathrm{h}(2) + \mathrm{h}(-1) = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0$이며, $1 - 2 - (-1) = 0$이다.

세 함수 모두, 정확한 산술을 사용하여 무작위로 고른 유리수 2000개에서 각 방정식을 확인하는 컴퓨터 검사로도 확인하였다.

흔한 실수

- (i)에서 x^2으로 나누면서 $x = 0$인 경우를 잊는 것. 이 경우는 따로 (한 줄짜리) 논증이 필요하다.
- $\mathrm{K}(x)$나 $\mathrm{M}(x)$를 x 자리에 대입하면서, 그 값이 방정식이 성립하는 정의역 안에 머무는지 확인하지 않는 것.
- (iii)에서 한 번만 대입하고 세 미지수 앞에서 막혀 버리는 것. 순환 전체가 필요하다.

STEP 너머

사상 $x \mapsto -x$, K, M은 모두 뫼비우스 변환(Möbius transformation) $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$이며, 이들은 합성(composition)에 대하여 군(group)을 이룬다. 유한한 위수(finite order)를 갖는 변환은 유한 순환군(cyclic group)을 생성하고, 여기서 사용한 방법은 그 군 전체에 걸쳐 더하는(또는 소거하는) 것인데, 이 아이디어는 군 표현론(group representation theory)에서 다시 등장한다. 뫼비우스 변환은 2×2 행렬에 대응하며, 행렬을 세제곱하여 $\mathrm{M}^3 =$ 항등함수임을 알아낼 수 있다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)에는 뫼비우스 변환에 대한 아름다운 설명이 실려 있다.

풀이

STEP III 2016, 문제 9

역학 • 탄성 용수철과 단진동

> **STEP III 2016, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/16-s3-q9

핵심 아이디어

원점을 삼각형의 중심에 두고 대칭성을 이용한다. 평형 위치(equilibrium position)는 중심이며, 이곳에서 크기가 같은 세 장력(tension)이 서로 상쇄된다. 입자가 P를 향하는 직선을 따라 움직일 때, 용수철 QX와 RX는 계속 서로의 거울상이므로 옆으로 당기는 힘이 상쇄되고, 운동은 그 직선 위에 머문다. RX를 구하려면 코사인 법칙(cosine rule)이 필요하다. 주기(period)를 구할 때는 정확한 복원력(restoring force)을 먼저 적은 다음, 작은 변위에 대해 일차인 항만 남긴다.

풀이

X를 매끄러운 탁자 위의 입자로, 용수철을 훅의 법칙(Hooke's law)을 따르는 가벼운 용수철로 모형화한다. 따라서 길이가 r인 용수철의 장력은 $\frac{\lambda}{l}(r-l)$이다.

평형

O를 삼각형의 중심이라 하자. 각 꼭짓점은 O로부터

$$c = \frac{2}{3} \times (\text{높이}) = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}\, a = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

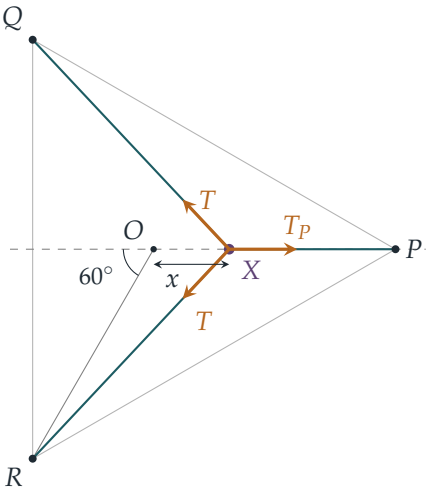
만큼 떨어져 있고, 직선 OP, OQ, OR는 서로 120°를 이룬다. X가 O에 있으면 각 용수철의 길이는 c이므로 세 장력의 크기가 모두 같다. 서로 120°를 이루는 크기가 같은 세 힘의 합은 0이므로, O는 평형 위치이다. 이것이 우리가 사용할 평형이다. $l < \frac{2}{\sqrt{3}}a$이므로 각 용수철은 늘어나 있고, 늘어난 길이(extension)는

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\, a - l,$$

이다. 이로써 요구된 결과를 얻는다.

RX의 장력

x축을 OP를 따라 잡고, P 쪽을 양의 방향으로 한다. X가 O로부터 P 쪽으로 변위 x만큼 떨어져 있다고 하자. 그러면 $OX = x, OR = c, \angle XOR = 180° - 60° = 120°$이다.



삼각형 XOR에서 코사인 법칙에 의해

$$RX^2 = c^2 + x^2 - 2cx\cos 120° = c^2 + cx + x^2 = \frac{4a^2}{3} + \frac{2ax}{\sqrt{3}} + x^2.$$

따라서 훅의 법칙에 의해 RX의 장력은

$$T = \frac{\lambda}{l}\left(\sqrt{\frac{4a^2}{3} + \frac{2ax}{\sqrt{3}} + x^2} - l\right),$$

이고, 이로써 요구된 결과를 얻는다. 축 OP에 대한 대칭성에 의해 $QX = RX$이므로, QX의 장력도 같은 T이다.

운동 방정식

$r = RX$라 하자. 용수철 PX의 길이는 $c - x$이므로 그 장력은 $T_P = \frac{\lambda}{l}(c - x - l)$이고, P 쪽$(+x$ 방향$)$으로 작용한다.

점 R의 x좌표는 $-c\cos 60° = -\frac{c}{2}$이므로, X에서 R까지의 변위의 x성분은 $-\left(x + \frac{c}{2}\right)$이다. 따라서 XR 방향의 힘 T의 x성분은 $-T\frac{x + c/2}{r}$이다. QX에 의한 힘도 같은 x성분을 가지며, 두 수직 성분은 대칭성에 의해 상쇄된다. 그러므로 직선 OP를 가로지르는 힘은 없고, X는 이 직선을 따라 움직인다.

? 생각해 보기 이 제곱근에서 어떻게 일차 방정식을 얻을 수 있을까?

먼저 정확한 힘을 적은 다음, 작은 x에 대해 전개한다. OP 방향으로 힘을 분해하면

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= T_P - 2T\,\frac{x+c/2}{r} = \frac{\lambda}{l}\left[(c-x-l)-(2x+c)\left(1-\frac{l}{r}\right)\right] \\ &= \frac{\lambda}{l}\left[-3x-l+\frac{l(2x+c)}{r}\right]. \end{aligned}$$

이 방정식은 정확하다. 이제 $r^2 = c^2\left(1+\frac{x}{c}+\frac{x^2}{c^2}\right)$이다. 이항 전개(binomial expansion)를 이용하고 x^2 이상의 항을 버리면

$$\frac{1}{r} \approx \frac{1}{c}\left(1-\frac{x}{2c}\right), \qquad \frac{2x+c}{r} \approx \left(1+\frac{2x}{c}\right)\left(1-\frac{x}{2c}\right) \approx 1+\frac{3x}{2c}.$$

이를 대입하면

$$m\ddot{x} \approx \frac{\lambda}{l}\left[-3x-l+l+\frac{3lx}{2c}\right] = -\frac{3\lambda}{l}\left(1-\frac{l}{2c}\right)x.$$

$\frac{l}{2c} = \frac{\sqrt{3}l}{4a}$이므로

$$\ddot{x} \approx -\omega^2 x, \qquad \omega^2 = \frac{3\lambda(4a-\sqrt{3}\,l)}{4mla}.$$

$\sqrt{3}l < 2a < 4a$이므로 이 ω^2은 양수이다. 따라서 이 힘은 복원력이며, 작은 x에 대해 입자는 O를 중심으로 근사적인 단진동(simple harmonic motion)을 하고, 그 주기는

$$\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{4mla}{3(4a-\sqrt{3}\,l)\lambda}},$$

이다. 이로써 요구된 결과를 얻는다.

검산

- $x = 0$일 때 정확한 힘은 $\frac{\lambda}{l}\left[-l+\frac{lc}{c}\right] = 0$이며, 이는 처음에 구한 평형과 일치한다.
- 단위: λ는 힘이고 l, a는 길이이므로 $\frac{mla}{a\lambda}$의 단위는 $\mathrm{kg\,m/N} = \mathrm{s}^2$이고, 주기는 시간의 단위를 가진다.
- ω^2을 구하는 두 번째 방법. 작은 변위에 대해 용수철 하나는 늘어남에 의해 강성(stiffness) $\frac{\lambda}{l}\cos^2\phi$를, 회전에 의해 강성 $\frac{T_0}{c}\sin^2\phi$를 기여한다. 여기서 ϕ는 용수철이 OP와 이루는 각이고, $T_0 = \frac{\lambda}{l}(c-l)$은 평형 상태의 장력이다. $\phi = 0°, 60°, 60°$이면 전체 강성은 $\frac{3}{2}\cdot\frac{\lambda}{l}+\frac{3}{2}\cdot\frac{T_0}{c} = \frac{3\lambda}{l}\left(1-\frac{l}{2c}\right)$로, 앞의 결과와 같다.
- $a = \lambda = m = 1, l = 0.8$일 때 공식은 약 2.838의 주기를 준다. P 쪽으로 작은 변위를 준 상태에서 시작하여 2차원 운동 전체를 컴퓨터로 시뮬레이션하면, 유효숫자 네 자리까지 같은 값을 얻는다.

흔한 실수

- $\cos 120^\circ = +\frac{1}{2}$을 쓰거나, 코사인 법칙에서 잘못된 각을 쓰는 것. 그러면 제곱근 안에 $-\frac{2ax}{\sqrt{3}}$이 나온다.
- QX와 RX의 장력을 상수로 취급하는 것. 장력의 **방향** 변화와 **크기** 변화가 모두 x에 대해 일차인 항을 만든다.
- 중심에서 꼭짓점까지의 거리를 구할 때 삼각형의 한 변을 $2a$가 아니라 a로 쓰는 것.

STEP 너머

모든 안정한 평형 근처에서 힘은 변위에 대해 근사적으로 일차이다. 여기서 복원력은 탄성 위치 에너지(elastic potential energy)의 기울기(gradient)이고, $m\omega^2$은 그 이계도함수(second derivative)이다. 2차원에서는 이 이계도함수가 2×2 행렬(헤세 행렬(Hessian))이 되고, 그 고유벡터(eigenvector)가 미소 진동의 **기준 진동**(normal modes)이다. 삼중 대칭성에 의해 이 계는 OP 방향만이 아니라 O를 중심으로 모든 방향에서 같은 주기로 진동한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 미소 진동과 연성계를 다룬다.

풀이

STEP III 2016, 문제 10

역학 • 평면 위의 원운동

> **STEP III 2016, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/16-s3-q10

핵심 아이디어

줄이 팽팽하고 입자가 평면 위에 머무는 동안 P는 항상 A로부터 거리 a만큼 떨어져 있고 평면 위에 있으므로, A에서 평면에 내린 수선의 발을 중심으로 하는 원을 **평면 위에서** 그리며 움직인다. 평면 안에서 보면 이것은 줄어든 중력 $g\sin\alpha$를 받는 연직 원운동일 뿐이다. 평면에 수직인 방향으로는 줄이 P를 면에서 떼어 내려고 당기므로, 수직항력(normal reaction)이 계속 양수여야 한다. 따라서 장력(tension)을 구하고, 수직항력을 구한 다음, 각각이 어디에서 가장 작아지는지 따져 본다.

풀이

상황 설정

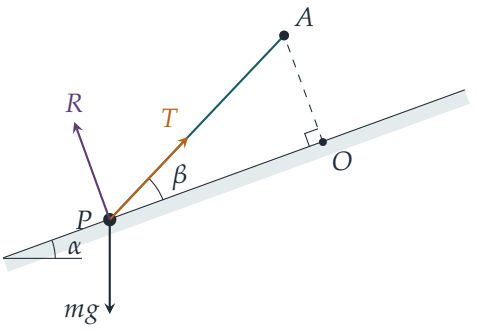
P를 입자로, 줄을 가볍고 늘어나지 않는(inextensible) 것으로, 평면을 매끄러운(smooth) 것으로 모형화한다. A에서 평면에 내린 수선의 발을 O라 하자. 줄의 길이가 a이고 줄이 평면과 이루는 각이 β이므로

$$AO = a\sin\beta, \qquad OP = a\cos\beta.$$

평형(equilibrium) 상태에서 중력 말고 평면 방향 성분을 갖는 힘은 장력뿐이므로, 줄은 최대경사선(line of greatest slope) 위에 놓여야 하고 P는 O에서 경사면 바로 아래쪽에 있다. 평면에 평행한 방향과 수직인 방향으로 힘을 분해하면(장력 T_0, 수직항력 R_0)

$$T_0\cos\beta = mg\sin\alpha, \qquad R_0 + T_0\sin\beta = mg\cos\alpha,$$

이므로 $R_0 = mg(\cos\alpha - \sin\alpha\tan\beta) = mg\cos(\alpha+\beta)/\cos\beta$이다. 따라서 애초에 평형이 존재하려면 $\cos(\alpha+\beta) > 0$이어야 한다.



그림은 처음 상태에서 최대경사선을 지나는 단면이다. AO는 평면에 수직이다.

충격량(impulse)이 가해진 뒤에도 줄이 팽팽하고 P가 평면 위에 있는 한 $AP = a$, $AO = a\sin\beta$이므로, 피타고라스(Pythagoras) 정리에 의해 항상 $OP = a\cos\beta$이다. 즉 P는 평면 위에서 O를 중심으로 하고 반지름이

$$r = a\cos\beta$$

인 원 위를 움직인다. 줄은 항상 평면과 각 β를 이루고, 줄을 평면에 정사영한 것은 P에서 O를 향한다. 충격량은 수평이면서 평면에 평행하므로, 이 원의 가장 낮은 점에서 원에 접한다.

O를 지나며 아래로 향하는 최대경사선과 OP가 이루는 각을 θ라 하여 처음에 $\theta = 0$이 되게 하고, 속력을 v라 하자. 무게는 경사면 아래 방향(평면 안)으로 성분 $mg\sin\alpha$를, 평면 안쪽으로 성분 $mg\cos\alpha$를 갖는다.

평면에 수직인 방향으로 P는 가속도가 없으므로

$$R + T\sin\beta = mg\cos\alpha. \tag{1}$$

평면 안에서 O를 향하는 방향으로 가속도는 v^2/r이다. 장력은 $T\cos\beta$만큼, 경사면 아래 방향의 무게 성분은 $-mg\sin\alpha\cos\theta$만큼 기여하므로

$$T\cos\beta - mg\sin\alpha\cos\theta = \frac{mv^2}{a\cos\beta}. \tag{2}$$

에너지(*energy*): 수직항력과 장력은 일을 하지 않으며(각각 속도에 수직이다), P는 경사면을 따라 거리 $r(1-\cos\theta)$만큼, 즉 높이로는 $r(1-\cos\theta)\sin\alpha$만큼 올라간다. 따라서

$$v^2 = u^2 - 2ga\cos\beta\sin\alpha\,(1-\cos\theta). \tag{3}$$

곧바로 평면을 떠나지 않을 조건

충격량을 가한 직후에는 $\theta = 0, v = u$이다. (2)에서 $T\cos\beta = mg\sin\alpha + \dfrac{mu^2}{a\cos\beta}$이고, 이를 (1)에 넣으면

$$\begin{aligned} R &= mg\cos\alpha - \tan\beta\left(mg\sin\alpha + \frac{mu^2}{a\cos\beta}\right) \\ &= \frac{m}{\cos\beta}\left(g\cos\alpha\cos\beta - g\sin\alpha\sin\beta\right) - \frac{mu^2\tan\beta}{a\cos\beta} \\ &= \frac{m}{a\cos\beta}\Big(ag\cos(\alpha+\beta) - u^2\tan\beta\Big). \end{aligned}$$

$\cos\beta > 0$이므로, 수직항력이 양수이고 따라서 입자가 곧바로 평면을 떠나지 않을 조건은

$$ag\cos(\alpha+\beta) > u^2\tan\beta,$$

이고, 이것이 보이려던 것이다.

완전한 원운동

이제 (3)을 (2)에 대입하여 일반적인 위치에서의 장력을 구하면

$$T\cos\beta = \frac{mu^2}{a\cos\beta} - 2mg\sin\alpha + 3mg\sin\alpha\cos\theta,$$

이고, 따라서 (1)에서

$$R = mg\cos\alpha - \tan\beta\left(\frac{mu^2}{a\cos\beta} - 2mg\sin\alpha + 3mg\sin\alpha\cos\theta\right).$$

생각해 보기 입자가 평면을 떠날 가능성이 가장 큰 곳은 원의 어디일까? 꼭대기일까, 바닥일까?

연직 원운동에서 얻은 직관으로는 "꼭대기"라고 답하고 싶지만, 여기서 꼭대기는 평면이 아니라 줄에게 위험한 지점이다. 줄은 힘 $T\sin\beta$로 P를 평면에서 떼어 내려고 당기는데, 장력은 바닥에서 가장 크다. 바닥에서 P가 가장 빠르게 움직이고, 평면 안의 중력도 O에서 멀어지는 쪽으로 당기기 때문이다. 실제로 R는 $\cos\theta$가 가장 클 때, 즉 $\theta = 0$에서 가장 작고, T는 $\cos\theta = -1$일 때, 즉 꼭대기에서 가장 작다. 따라서 평면에 닿은 채로 원을 한 바퀴 다 돌려면 두 가지가 필요하다.

- **바닥에서 접촉 유지.** $\theta = 0$에서 $R > 0$이어야 하며, 이는 정확히 앞 소문항의 조건 $u^2\tan\beta < ag\cos(\alpha+\beta)$이다.
- **꼭대기에서 줄이 팽팽함.** $\theta = \pi$에서 $T \geq 0$이어야 하므로 $\dfrac{u^2}{a\cos\beta} - 5g\sin\alpha \geq 0$, 즉 $u^2 \geq 5ag\sin\alpha\cos\beta$이다. (이때 (3)에 의해 꼭대기에서 $v^2 > 0$도 성립한다.)

두 번째 조건에 $\tan\beta > 0$을 곱하면, 두 조건이 동시에 성립할 수 있으려면

$$5ag\sin\alpha\cos\beta\tan\beta \le u^2\tan\beta < ag\cos(\alpha+\beta),$$

이어야 하고, 이는 곧

$$5\sin\alpha\sin\beta < \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \iff 6\sin\alpha\sin\beta < \cos\alpha\cos\beta.$$

양변을 $\cos\alpha\cos\beta > 0$으로 나누면 필요조건

$$6\tan\alpha\tan\beta < 1.$$

을 얻는다. (이 조건은 충분조건이기도 하다. 이 조건이 성립하면 $5ag\sin\alpha\cos\beta \le u^2 < ag\cos(\alpha+\beta)/\tan\beta$를 만족하는 어떤 u든 가능한데, 그때 원 위의 모든 곳에서 R와 T가 양수이기 때문이다.)

검산

- $u = 0$이면 첫 번째 소문항의 수직항력은 $mg\cos(\alpha+\beta)/\cos\beta$가 되어 평형 상태의 값 R_0와 일치한다.
- $\beta \to 0$이면(줄이 거의 평면을 따라 놓이면) 줄은 입자를 들어 올릴 수 없고, 조건 $6\tan\alpha\tan\beta < 1$은 당연히 그래야 하듯 저절로 성립한다.
- $\alpha = 30°$, $\beta = 5°$(따라서 $6\tan\alpha\tan\beta \approx 0.30$), $a = 1\,\mathrm{m}$, $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$로 두면 허용 범위는 $24.4 \le u^2 < 91.8$(단위 $\mathrm{m^2\,s^{-2}}$)이다. $u^2 = 50$으로 잡으면 바닥에서 가장 작은 수직항력은 약 $0.37mg$, 꼭대기에서 가장 작은 장력은 약 $2.63mg$이다. 원 전체에 걸쳐 3차원에서 뉴턴(Newton)의 제2법칙을 컴퓨터로 풀어, R와 T가 위의 값들을 가지며 계속 양수로 유지됨을 확인하였다.

흔한 실수

- 줄의 전체 길이 a를 원의 반지름으로 쓰는 것. 반지름은 $a\cos\beta$이다.
- 입자가 원의 꼭대기에서 평면을 떠날 가능성이 가장 크다고 가정하는 것. 수직항력은 바닥에서 가장 작다.
- 에너지 방정식에서 $g\sin\alpha$ 대신 g를 쓰는 것. 입자가 연직으로 올라가는 높이는 $r(1-\cos\theta)\sin\alpha$뿐이다.

STEP 너머

이것은 구속 조건(constraint) 아래에서의 운동이다. 평면과 줄은 각각 구속 조건을 유지하는 데 필요한 만큼의 크기를 갖는 반작용력을 제공하며, 운동은 그 힘들의 부호가 올바른 동안에만 유효하다. 대학 1학년 과정에서는 이를 체계적으로 다루는 법을 배우는데, 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)을 이용해 구속 조건을 제거한 뒤 나중에 반작용력을 되찾는다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)에는 바로 이런 "언제 접촉을 잃는가?" 유형의 문제가 많이 실려 있다.

풀이

STEP III 2016, 문제 11

역학 • 일률과 저항

STEP III 2016, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

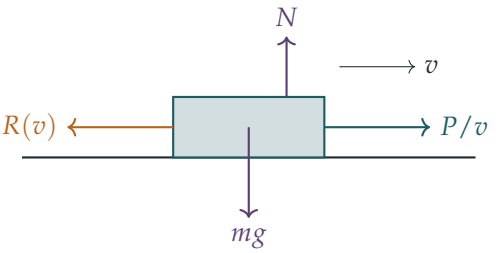
step.maths.org/questions/16-s3-q11

핵심 아이디어

일정한 일률(power) P로 작동하는 엔진은 속력 v에서 P/v의 구동력(driving force)을 낸다. 우리가 원하는 것은 시간이 아니라 속력의 함수로서의 **거리**이므로, 가속도(acceleration)를 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$로 쓴다. 그러면 뉴턴(Newton)의 운동 제2법칙(Newton's second law)이 v에 대한 x의 변수분리형 방정식(separable equation)이 된다. 속력 $4U$에서 가속도가 0이 된다는 사실로부터 저항(resistance) 상수가 P와 U로 결정되고, 그러면 각 거리는 정적분(definite integral) 하나로 귀결된다.

풀이

자동차를 수평 직선 위를 움직이는 질량 m인 입자로 모형화하고, 앞쪽으로 견인력(tractive force) P/v, 뒤쪽으로 저항 $R(v)$가 작용한다고 하자. 연직 방향으로는 무게와 수직항력(normal reaction)이 평형을 이루므로 더 이상 고려하지 않는다.



$a = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$를 이용하면 수평 방향의 운동 방정식(equation of motion)은 다음과 같다.

$$mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{P}{v} - R(v), \qquad \text{따라서} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}v} = \frac{mv^2}{P - vR(v)}.$$

두 모형 모두에서 $vR(v)$는 v에 대해 증가하고 $v = 4U$에서 P와 같다. 그러므로 $U \le v \le 2U$에서 분모는 양수이고, 자동차는 그 구간 내내 실제로 가속한다. 즉 x는 v에 대해 증가하며, 거리는 다음과 같다.

$$X = \int_U^{2U} \frac{mv^2}{P - vR(v)}\,\mathrm{d}v.$$

소문항 (i)

$R = kv$라 하자. $4U$에서 가속도가 0이므로 $\dfrac{P}{4U} = 4kU$이고, 따라서 $k = \dfrac{P}{16U^2}$이다. 그러면

$$P - kv^2 = k\left(16U^2 - v^2\right), \qquad \frac{m}{k} = \frac{16mU^2}{P} = \frac{1}{\lambda U}.$$

그러므로 $v = Uw$로 치환하면

$$\lambda X_1 = \frac{1}{U}\int_U^{2U} \frac{v^2}{16U^2 - v^2}\,\mathrm{d}v = \int_1^2 \frac{w^2}{16 - w^2}\,\mathrm{d}w,$$

이다. $\dfrac{w^2}{16 - w^2} = -1 + \dfrac{16}{16 - w^2} = -1 + \dfrac{2}{4 - w} + \dfrac{2}{4 + w}$로 쓰면

$$\begin{aligned}\lambda X_1 &= \Big[-w + 2\ln\frac{4 + w}{4 - w}\Big]_1^2 \\ &= -1 + 2\ln 3 - 2\ln\tfrac{5}{3} = 2\ln\tfrac{9}{5} - 1,\end{aligned}$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다.

소문항 (ii)

이제 $R = cv^2$라 하자. $4U$에서 가속도가 0이므로 $\dfrac{P}{4U} = 16cU^2$이고, 따라서 $c = \dfrac{P}{64U^3}$이다. 그러면

$$P - cv^3 = c\left(64U^3 - v^3\right), \qquad \frac{m}{c} = \frac{64mU^3}{P} = \frac{4}{\lambda}.$$

> ? **생각해 보기** 여기에 깔끔한 역도함수(antiderivative)가 있을까, 아니면 다시 부분분수(partial fractions)가 필요할까?

분자 v^2는 상수배를 제외하면 분모 $64U^3 - v^3$의 도함수이다. 따라서 이 적분은 곧바로 로그가 된다.

$$\begin{aligned}\lambda X_2 &= 4\int_U^{2U} \frac{v^2}{64U^3 - v^3}\,\mathrm{d}v = 4\Big[-\tfrac{1}{3}\ln\left(64U^3 - v^3\right)\Big]_U^{2U} \\ &= \tfrac{4}{3}\ln\frac{63U^3}{56U^3} = \tfrac{4}{3}\ln\tfrac{9}{8},\end{aligned}$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다.

소문항 (iii)

$\lambda > 0$이므로 $X_1 > X_2$인 것은 정확히 $\lambda X_1 - \lambda X_2 > 0$일 때이다. 주어진 것은 $\ln 24$와 $\ln 5$에 대한 범위뿐이므로, 차를 이 둘로 다시 쓴다.

$$\begin{aligned}\lambda(X_1 - X_2) &= 2\ln 9 - 2\ln 5 - 1 - \tfrac{4}{3}\ln 9 + \tfrac{4}{3}\ln 8 \\ &= \tfrac{4}{3}\ln 3 + 4\ln 2 - 2\ln 5 - 1 \\ &= \tfrac{4}{3}(\ln 3 + 3\ln 2) - 2\ln 5 - 1 = \tfrac{4}{3}\ln 24 - 2\ln 5 - 1.\end{aligned}$$

? **생각해 보기** 각 범위를 어느 방향으로 사용해야 할까?

차가 양수임을 보이려면 **하계**(lower bound)가 필요하다. 따라서 (더하기 부호로 나타나는) $\ln 24$에는 하계를, (빼기 부호로 나타나는) $\ln 5$에는 상계(upper bound)를 사용한다.

$$\lambda(X_1 - X_2) > \tfrac{4}{3}(3.17) - 2(1.61) - 1 = 4.22\dot{6} - 3.22 - 1 = 0.00\dot{6} > 0.$$

그러므로 $X_1 > X_2$이다. 즉 자동차가 U에서 $2U$까지 가속하는 동안, 저항이 속력에 비례할 때가 속력의 제곱에 비례할 때보다 더 먼 거리를 이동한다.

이는 물리적으로도 타당하다. 두 저항은 $v = 4U$에서 일치하지만, $v < 4U$에서는 $cv^2 = kv \cdot \frac{v}{4U} < kv$이다. 따라서 해당 속력 범위에서 제곱 법칙의 저항이 **더 작고**, 자동차는 더 세게 가속하여 $2U$에 더 빨리 도달한다.

검산

- 수치적으로 $\lambda X_1 = 2\ln 1.8 - 1 \approx 0.1756$이고 $\lambda X_2 = \frac{4}{3}\ln 1.125 \approx 0.1570$이므로, 차는 약 0.0185로 앞에서 구한 대로 양수이다. $v = U$에서 시작하여 운동 방정식을 시간에 따라 단계적으로 계산하는 컴퓨터 시뮬레이션도 두 값을 소수점 아래 다섯째 자리까지 재현한다.
- 단위: $P/(mU^3)$의 단위는 $\mathrm{W}/(\mathrm{kg\,m^3\,s^{-3}}) = \mathrm{m^{-1}}$이므로, λX는 마땅히 그래야 하듯 무차원(dimensionless)이다.
- 소문항 (iii) 끝의 물리적 논증은 같은 대소 관계를 독립적으로 예측한다.

흔한 실수

- $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$를 사용하는 것. 이렇게 하면 거리가 아니라 시간을 얻는다. 여기서는 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$가 필요하다.
- 소문항 (iii)에서 범위를 거꾸로 사용하는 것. 3.18과 1.60을 사용하면 상계만 얻으므로 부호에 대해 아무것도 증명하지 못한다.

▶ 여유가 아주 작다는 것($0.00\dot{6}$)을 잊는 것. $\frac{4}{3}(3.17)$을 4.2로 반올림하면 결과를 잃는다.

STEP 너머

$a = v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$로 쓰는 것은 대학 역학의 에너지 방법을 향한 첫걸음이다. 운동 방정식에 v를 곱하면 운동 에너지(kinetic energy)의 변화율을 얻는데, 이는 공급되는 일률에서 소산되는 일률을 뺀 것과 같다. 두 일률이 균형을 이루는 $4U$와 같은 속력은 1계 미분방정식(first-order differential equation)의 **평형점**(equilibria)이며, 해가 평형점에 어떻게 다가가는지를 연구하는 것이 동역학계(dynamical systems)의 시작이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 일, 일률, 속도에 의존하는 힘을 이러한 방식으로 다룬다.

풀이

STEP III 2016, 문제 12

확률과 통계 • 체비쇼프 부등식

> **STEP III 2016, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/16-s3-q12

핵심 아이디어

체비쇼프(Chebyshev) 부등식(Chebyshev's inequality)은 평균에서 **멀리** 떨어질 확률의 상한을 준다. 따라서 어떤 값이 평균에 **가깝다**는 명제는 여사건(complement)에서 얻는다. 각 소문항에서 할 일은 알맞은 확률변수(random variable)를 찾고, 그 평균과 표준편차(standard deviation)를 구한 다음, $k\sigma$가 우리가 관심을 두는 거리와 정확히 같아지도록 k를 고르는 것이다. 소문항 (ii)에서 e^n 옆에 놓인 합 $\sum n^r/r!$은 푸아송 분포(Poisson distribution)의 흔적이다.

풀이

소문항 (i)

$100n$번 던졌을 때 앞면이 나온 횟수를 X라 하자. 각 시행이 독립(independent)이고 앞면이 나올 확률이 각각 0.2라고 가정하면 $X \sim \mathrm{B}(100n, 0.2)$이므로

$$\mu = 100n \times 0.2 = 20n, \qquad \sigma^2 = 100n \times 0.2 \times 0.8 = 16n, \qquad \sigma = 4\sqrt{n}.$$

사건 $16n \le X \le 24n$은 정확히 $|X - 20n| \le 4n$이므로

$$\alpha = \mathrm{P}\big(|X - \mu| \le 4n\big) = 1 - \mathrm{P}\big(|X - \mu| > 4n\big).$$

$k\sigma = 4n$, 즉 $k \cdot 4\sqrt{n} = 4n$이 되기를 원하므로 $k = \sqrt{n}$이고, 이 값은 양수이다. 체비쇼프 부등식에 의해

$$\mathrm{P}\big(|X - \mu| > 4n\big) = \mathrm{P}\big(|X - \mu| > \sqrt{n}\,\sigma\big) \le \frac{1}{(\sqrt{n})^2} = \frac{1}{n},$$

이고, 따라서

$$\alpha \ge 1 - \frac{1}{n},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. (조건 $n > 1$은 이 부등식이 의미 있는 내용을 담도록 할 뿐이다. $n = 1$이면 부등식은 $\alpha \geq 0$이 된다.)

소문항 (ii)

생각해 보기 확률이 $n^r/r!$ 꼴로 생긴 확률변수는 무엇인가?

$Y \sim \mathrm{Po}(n)$이면 $r = 0, 1, 2, \ldots$에 대하여 $\mathrm{P}(Y = r) = \mathrm{e}^{-n} n^r / r!$이므로

$$\mathrm{e}^{-n}\left(1 + n + \frac{n^2}{2!} + \cdots + \frac{n^{2n}}{(2n)!}\right) = \mathrm{P}(Y \leq 2n).$$

따라서 증명할 부등식은 $\mathrm{e}^n > 0$으로 나누면 다음과 동치이다.

$$\mathrm{P}(Y \leq 2n) \geq 1 - \frac{1}{n}.$$

푸아송 분포의 평균과 분산(variance)은 모두 n이므로 $\mu = n, \sigma = \sqrt{n}$이다.

생각해 보기 체비쇼프 부등식은 양쪽 꼬리를 다루지만 $Y \leq 2n$은 한쪽 사건이다. 둘을 어떻게 맞출 수 있는가?

$Y \geq 0$이므로 항상 $Y - n \geq -n$이고, 따라서 $Y - n < -n$은 일어날 수 없다. 그러므로

$$|Y - n| > n \iff Y - n > n \iff Y > 2n.$$

$k\sigma = n$이 되도록 $k = \sqrt{n}$으로 잡으면 체비쇼프 부등식에 의해

$$\mathrm{P}(Y > 2n) = \mathrm{P}\left(|Y - n| > \sqrt{n}\,\sigma\right) \leq \frac{1}{n},$$

이므로 $\mathrm{P}(Y \leq 2n) = 1 - \mathrm{P}(Y > 2n) \geq 1 - \frac{1}{n}$이다. 양변에 e^n을 곱하면

$$1 + n + \frac{n^2}{2!} + \cdots + \frac{n^{2n}}{(2n)!} \geq \left(1 - \frac{1}{n}\right)\mathrm{e}^n,$$

이 되어 결과가 증명된다.

검산

이 부등식들은 참이지만 여유가 많다. (i)에서 $n = 2$일 때 정확한 이항분포(binomial distribution) 확률은 $\alpha \approx 0.868$로, 하한 0.5보다 훨씬 크다. $n = 10$이면 $\alpha \approx 0.9986$으로, 하한 0.9와 비교된다. (ii)에서 $n = 2$이면 좌변은 $1 + 2 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 7$이고, $\frac{1}{2}\mathrm{e}^2 \approx 3.69$이다. 두 부등식을 (i)에서는 2부터 30까지, (ii)에서는 1부터 59까지의 모든 n에 대하여 정확히 확인하였다.

흔한 실수

- k를 고를 때 표준편차 $4\sqrt{n}$ 대신 분산 $16n$을 사용하는 것.
- 체비쇼프 부등식이 구간 **바깥**에 있을 확률의 상한을 준다는 것을 잊고, α를 얻으려면 여사건을 써야 한다는 점을 놓치는 것.
- (ii)에서 아래쪽 꼬리 $Y < 0$이 아무것도 기여하지 않는 이유를 설명하지 않는 것.

STEP 너머

체비쇼프 부등식은 **집중 부등식**(concentration inequality)의 가장 간단한 예이며, 이것을 m번의 독립 시행의 평균에 적용하면 큰 수의 약한 법칙(weak law of large numbers)을 얻는다. 즉 퍼짐의 정도가 $1/\sqrt{m}$처럼 줄어든다. 소문항 (ii)는 또한 지수함수 급수(exponential series)에서 $n^{2n}/(2n)!$ 다음부터의 나머지 합이 많아야 e^n/n이라는 것을 말해 주는데, 이는 확률로 증명한 해석학적 사실이다. 체르노프 상한(Chernoff bounds) 같은 더 정밀한 도구를 쓰면 실제 확률이 지수적으로 1에 가깝다는 것을 보일 수 있다. 더 알고 싶다면 Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)을 참고하라.

풀이

STEP III 2016, 문제 13

확률과 통계 • 합의 첨도

> **STEP III 2016, 13번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/16-s3-q13

핵심 아이디어

첨도(kurtosis)는 평균(mean)으로부터의 편차(deviation)만으로 만들어지므로, 확률변수를 평행이동해도 변하지 않는다. 덕분에 모든 확률변수의 중심을 0에 두고 단순한 적률(moment)로 계산할 수 있다. 정규분포(Normal distribution)의 경우 4차 적률은 부분적분(integration by parts)으로 구하는데, x 하나를 떼어 내어 지수함수와 짝지으면 된다. 평균이 0인 독립(independent) 확률변수들의 합에서는 T^4를 전개하여 기댓값을 취하면 어떤 변수가 1제곱으로 들어 있는 항이 모두 사라진다. 이것이 소문항 (ii)의 전부이며, 그 결과는 곧바로 소문항 (iii)으로 이어진다.

풀이

평행이동. $W = X - a$라 하자. 기댓값의 선형성(linearity of expectation)에 의해 $\mathrm{E}(W) = \mu - a$이므로

$$W - \mathrm{E}(W) = (X - a) - (\mu - a) = X - \mu.$$

W의 평균으로부터의 편차는 X의 평균으로부터의 편차와 정확히 같다. 따라서 W는 같은 분산(variance) $\mathrm{E}\big((X-\mu)^2\big) = \sigma^2$과 같은 4차 중심적률(fourth central moment) $\mathrm{E}\big((X-\mu)^4\big)$을 가지며, 따라서 첨도도 같다. 특히 $a = \mu$로 두면, 모든 확률변수는 평균이 0인 중심화된 변수 $X - \mu$와 같은 첨도를 가진다.

소문항 (i)

$X \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$이고 확률밀도함수가

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/(2\sigma^2)}, \qquad \text{이므로} \qquad f'(x) = -\frac{x}{\sigma^2}\,f(x).$$

라 하자. $\mu = 0$이므로 구해야 할 것은 $\mathrm{E}(X^4) = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 f(x)\,\mathrm{d}x$이다.

> **생각해 보기** $\mathrm{e}^{-x^2/(2\sigma^2)}$이 초등함수로 된 역도함수(antiderivative)를 갖지 않는데, $x^4\mathrm{e}^{-x^2/(2\sigma^2)}$은 어떻게 적분할까?

함수 $xf(x)$는 역도함수를 **가지며**, 그것은 $-\sigma^2 f(x)$이다. 그러므로 $x^4 f(x) = x^3 \cdot xf(x)$로 쓰고 $u = x^3$, $\mathrm{d}v = xf(x)\,\mathrm{d}x$, $v = -\sigma^2 f(x)$로 놓아 부분적분하면

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[-\sigma^2 x^3 f(x)\Big]_{-\infty}^{\infty} + 3\sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 3\sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

경계항이 사라지는 것은 $x \to \pm\infty$일 때 $x^3\mathrm{e}^{-x^2/(2\sigma^2)} \to 0$이기 때문이다(지수함수는 어떤 거듭제곱이 커지는 것보다도 빨리 감소한다). $u = x$로 같은 과정을 거치면

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[-\sigma^2 x f(x)\Big]_{-\infty}^{\infty} + \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \sigma^2,$$

을 얻는다. f는 확률밀도함수(probability density)이므로 적분값이 1이기 때문이다. (이로써 분산이 σ^2임도 확인된다.) 따라서 $\mathrm{E}(X^4) = 3\sigma^2 \cdot \sigma^2 = 3\sigma^4$이고

$$\kappa = \frac{3\sigma^4}{\sigma^4} - 3 = 0.$$

평행이동에 관한 결과에 의해, 평균이 무엇이든 모든 정규분포의 첨도는 0이다.

소문항 (ii)

$T^4 = (Y_1 + \cdots + Y_n)^4$을 다항정리(multinomial theorem)로 전개한다. 각 항은 네 개의 인수 Y_r의 곱이며, 네 인수가 서로 다른 첨자들에 어떻게 나뉘는지에 따라 항은 다섯 가지 유형으로 나뉜다.

$$Y_r^4, \qquad 4\,Y_r^3 Y_s, \qquad 6\,Y_r^2 Y_s^2, \qquad 12\,Y_r^2 Y_s Y_t, \qquad 24\,Y_r Y_s Y_t Y_u,$$

여기서 서로 다른 문자는 서로 다른 첨자를 나타낸다. 계수는 배열의 가짓수를 센 것이다. 예를 들어 $Y_r^2 Y_s^2$은 4개의 괄호 가운데 어느 2개에서 Y_r를 택할지 정하는 데서 나오므로 $\binom{4}{2} = 6$가지이다. 순서 없는 쌍 $\{r, s\}$ 하나는 $Y_r^2 Y_s^2$ 유형에서 한 번씩 나타난다.

이제 기댓값을 취한다. Y들은 독립이므로, 서로 다른 Y들의 거듭제곱의 곱의 기댓값은 각 기댓값의 곱이다. $Y_r^3 Y_s$, $Y_r^2 Y_s Y_t$, $Y_r Y_s Y_t Y_u$ 유형에서는 어떤 변수가 1제곱으로만 나타나고, 그 인수 $\mathrm{E}(Y_s) = 0$ 때문에 기댓값 전체가 0이 된다. 예를 들어

$$\mathrm{E}(Y_r^3 Y_s) = \mathrm{E}(Y_r^3)\,\mathrm{E}(Y_s) = 0.$$

첫째와 셋째 유형만 남으며, $r \neq s$일 때 역시 독립성에 의해 $\mathrm{E}(Y_r^2 Y_s^2) = \mathrm{E}(Y_r^2)\,\mathrm{E}(Y_s^2)$이다. 쌍을 $r < s$로 나열하면

$$\mathrm{E}(T^4) = \sum_{r=1}^{n} \mathrm{E}(Y_r^4) + 6 \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{s=r+1}^{n} \mathrm{E}(Y_r^2)\,\mathrm{E}(Y_s^2),$$

이 되어 증명이 끝난다. (이 소문항에서는 독립성과 평균이 0이라는 사실만 썼고, Y들이 동일한 분포(identically distributed)를 따른다는 사실은 쓰지 않았다.)

소문항 (iii)

각 X_r의 평균이 μ, 표준편차(standard deviation)가 σ라 하고 $S = X_1 + \cdots + X_n$이라 하자. $Y_r = X_r - \mu$로 두면 Y_r들은 평균이 0인 독립이고 동일한 분포를 따르는 확률변수이며

$$\mathrm{E}(Y_r^2) = \sigma^2, \qquad \mathrm{E}(Y_r^4) = (\kappa + 3)\sigma^4,$$

이다. 둘째 식은 κ의 정의를 정리하여 얻는다. 그러면 $T = \sum Y_r = S - n\mu$이다. 평행이동에 관한 결과에 의해 S는 T와 같은 첨도를 가지므로, 평균이 0인 T로 계산한다.

독립성에 의해 $\mathrm{Var}(T) = \sum \mathrm{Var}(Y_r) = n\sigma^2$이다. 소문항 (ii)의 이중합은 $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$개의 항으로 이루어지고 각 항은 σ^4이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(T^4) &= n(\kappa+3)\sigma^4 + 6 \cdot \tfrac{1}{2}n(n-1)\sigma^4 \\ &= n\sigma^4\big(\kappa + 3 + 3(n-1)\big) = n\sigma^4(\kappa + 3n).\end{aligned}$$

따라서 T의 첨도, 곧 S의 첨도는

$$\frac{\mathrm{E}(T^4)}{(\mathrm{Var}\, T)^2} - 3 = \frac{n\sigma^4(\kappa+3n)}{n^2\sigma^4} - 3 = \frac{\kappa}{n} + 3 - 3 = \frac{\kappa}{n},$$

이 되어 증명이 끝난다.

검산

- $Y = \pm 1$이 각각 확률 $\frac{1}{2}$로 나온다고 하자. 그러면 $\mathrm{E}(Y^4) = \sigma^4 = 1$이므로 $\kappa = 1 - 3 = -2$이다. $n = 2$일 때 합은 $-2, 0, 2$를 각각 확률 $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$로 가지므로 $\mathrm{E}(T^4) = 8$이고 $\mathrm{Var}\, T = 2$이다. 따라서 첨도는 $8/4 - 3 = -1 = \kappa/2$로, 예측과 일치한다.
- $n = 1$이면 소문항 (iii)은 아무것도 바뀌지 않는다고 말하며, 당연히 그래야 한다.
- 독립인 정규분포 확률변수들의 합은 정규분포를 따르므로, $\kappa = 0$일 때 소문항 (iii)은 다시 0을 주어야 하며 실제로 그렇다.
- 정확한 분수 계산을 이용하여, 세 값을 갖는 확률변수의 독립인 복사본을 최대 여섯 개까지 더한 합의 첨도가 정확히 κ/n임을 컴퓨터로 확인하였다. 또한 여러 σ 값에 대해 $\int x^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 3\sigma^4$임을 수치적으로 확인하였다.

흔한 실수

- $Y_r^2 Y_s^2$의 계수를 잘못 구하는 것. 계수는 순서 없는 쌍마다 $\binom{4}{2} = 6$(순서 있는 쌍마다 3)이지, 4나 12가 아니다.
- 평균이 0이어야 하는 소문항 (ii)를 쓰기 전에 X_r를 중심화하는 것을 잊는 것.
- $(n\sigma^2)^2$ 대신 σ^4로 나누는 것. 합의 분산은 $n\sigma^2$이다.

STEP 너머

여기서 정의한 첨도는 4차 **누적률**(cumulant)을 σ^4으로 나눈 것이다. 누적률은 적률생성함수(moment generating function)의 로그를 전개했을 때의 계수이며, 독립인 확률변수들의 합에서는 단순히 더해진다. 그래서 합의 표준화된 4차 누적률은 $1/n$처럼 줄어들고, 3차 누적률(왜도(skewness))은 $1/\sqrt{n}$처럼 줄어든다. 이것은 중심극한정리(central limit theorem)를 정량적으로 엿보게 해 준다. 합은 점점 더 정규분포처럼 보이게 되는데, 정규분포는 2차보다 높은 누적률이 모두 0이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 이 수준에서 생성함수와 중심극한정리를 전개한다.

Beyond STEP

STEP은 대부분의 학생이 학창 시절에 치르는 수학 시험 가운데 가장 어려운 시험이다. 또한 가장 훌륭한 시험 가운데 하나이기도 하다. 문제는 짧고 낯설며 깊이가 있고, 그중 가장 뛰어난 문제들은 대학 수학의 작은 조각이 모습을 감추고 있는 것이다.

이 책은 1987년 첫 시험에 앞서 나온 예시 시험지(specimen papers)부터 2025년 시험지까지 가운데 가장 흥미로운 STEP 문제들을 골라, 각 문제를 하나의 문으로 삼는다. 모든 문제는 뛰어난 학생이 풀어 가면서 던질 법한 질문들과 함께 꼼꼼하게 풀이하고, 그런 다음 책은 그 문을 지나 한 걸음 더 나아간다. 그 아이디어가 어디에서 왔는지, 대학에서는 무엇으로 발전하는지, 그리고 다음에는 무엇을 읽으면 좋은지를 살펴본다.

이 책은 STEP을 준비하면서 기출 문제 연습 이상의 것을 원하는 재능 있는 예비 수학자를 위해 쓰였다. 수학과 학부생처럼 생각하기 시작하고, 앞으로 무엇이 자신을 기다리고 있는지 알아보고 싶은 학생들을 위한 책이다.

- 순수수학(pure mathematics), 역학(mechanics), 확률(probability)과 통계(statistics)를 아우르는 13개의 장
- 이 36개의 STEP 기출 문제와 각 문제의 안내식 풀이
- 모든 문제 뒤에 숨은 대학 수학
- 답이 실린 후속 연습 문제와 더 읽을거리

2016년 풀이. 책 전체와 모든 장,
모든 풀이를 다음 주소에서 무료로 읽고, 내려받고, 공유할 수 있다.

beyondstep.keithmcnulty.org

본문은 퍼블릭 도메인(CC0 1.0)으로 공개한다. STEP 문제 © Cambridge University Press & Assessment.

