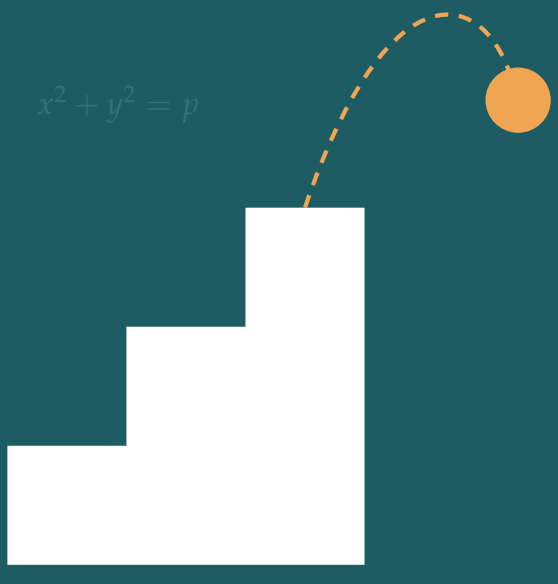
STEP 대비 · 대학 수학

Beyond STEP

STEP I, II 및 III

2015년 풀이



KEITH McNULTY

Beyond STEP

STEP 기출문제로 여는
대학 수학의 세계

STEP I, II 및 III

2015년 풀이

Keith McNulty

Beyond STEP: STEP 기출문제로 여는 대학 수학의 세계

2015년 풀이

2015년 STEP 문제지(STEP I, II 및 III)의 39개 문제 전체에 대한 풀이. 견본 문제지 이후 모든 STEP 문제의 풀이와 *Beyond STEP* 책 전체, 그리고 각 장을 `beyondstep.keithmcnulty.org`에서 무료로 읽고 내려받을 수 있다.

풀이를 읽기 전에 먼저 문제를 제대로 풀어 보자. 모든 답은 수치적으로 검증하였지만, 풀이가 이렇게 많으면 실수가 어느 정도 있을 수밖에 없다. 무언가 잘못된 것처럼 보이면 자신의 풀이를 믿고 꼼꼼히 확인해 보자.

영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.

2026년 11월 온라인 초판 발행.

이 PDF에서 지은이가 직접 만든 모든 것, 곧 본문, 풀이, 그림, 연습문제와 해답은 크리에이티브 커먼즈 CC0 1.0 Universal 라이선스에 따라 퍼블릭 도메인(public domain)으로 공개한다. 누구든 허락을 구하지 않고 어떤 목적으로든 복사하고, 고쳐 쓰고, 공유할 수 있다. 자세한 내용은 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`을 보라.

여기에서 다루는 STEP 문제의 저작권은 Cambridge University Press & Assessment에 있다. 문제는 이 책에 싣지 않았으며, 각 문제마다 공식 출처인 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스나 OCR의 기출 시험지로 가는 링크를 달았다.

오류 제보는 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty에 이슈로 남겨 주기 바란다.

차례

STEP I

Q1 곡선 그리기 순수수학 3

Q2 삼차방정식의 삼각함수 해법 순수수학 8

Q3 좌표기하와 가시성 순수수학 12

Q4 매개변수 곡선과 넓이 순수수학 16

Q5 매개변수가 있는 적분 순수수학 19

Q6 기하에서의 벡터 순수수학 23

Q7 구간에서의 최댓값 순수수학 26

Q8 거듭제곱 합의 나누어떨어짐 순수수학 30

Q9 포물체 운동 역학 34

Q10 상대 속도 역학 37

Q11 마찰과 모멘트 역학 41

Q12 푸아송 분포의 솎아내기 확률과 통계 46

Q13 조건부 확률 확률과 통계 50

STEP II

Q1 부등식과 급수 순수수학 54

Q2 삼각형의 기하 순수수학 58

Q3 경우의 수와 수학적 귀납법 순수수학 62

Q4 역탄젠트의 분지 순수수학 66

Q5 아크탄젠트 급수 순수수학 72

Q6 대칭성에 의한 적분 순수수학 76

Q7 교차하는 원 순수수학 80

Q8 벡터와 접하는 원 순수수학 84

Q9 강체의 회전 역학 88

Q10 구속 운동 역학 92
Q11 운동량과 에너지 역학 96
Q12 동전 수열 게임 확률과 통계 101
Q13 지수분포의 적률 확률과 통계 105

STEP III

Q1 점화 공식과 치환 순수수학 109
Q2 해석학 순수수학 113
Q3 극곡선과 넓이 순수수학 117
Q4 삼차방정식의 근 순수수학 122
Q5 무한 강하법에 의한 무리성 순수수학 126
Q6 근의 대칭함수 순수수학 130
Q7 미분 연산자 순수수학 134
Q8 극좌표 미분방정식 순수수학 138
Q9 비선형 탄성 진동 역학 143
Q10 회전하는 강체 막대 역학 147
Q11 원운동 역학 151
Q12 확률생성함수 확률과 통계 156
Q13 균등 확률변수의 함수 확률과 통계 160

풀이

STEP I 2015, 문제 1

순수수학 • 곡선 그리기

> **STEP I 2015, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/15-s1-q1

핵심 아이디어

인수분해할 수 있는 것은 모두 인수분해한다. 이차식이 인수분해되므로 영점이 바로 나오고, 도함수(derivative) 역시 e^x에 인수분해되는 이차식을 곱한 꼴이므로 극점(turning point)도 바로 나온다. 그래프를 올바르게 그리고 나면, "곡선 $= k$"의 해의 개수를 세는 일은 수평선을 위아래로 움직이면서 곡선과 몇 번 만나는지 지켜보는 것에 지나지 않는다. 소문항 (ii)에서는 새 함수가 원래 함수에 x^2을 대입한 것임을 알아차리면 거의 모든 결과를 다시 쓸 수 있다.

풀이

소문항 (i)

$f(x) = e^x(2x^2 - 5x + 2) = e^x(2x - 1)(x - 2)$라 하자.

영점과 부호. $e^x > 0$이므로 $f(x) = 0$인 것은 정확히 $x = \frac{1}{2}$ 또는 $x = 2$일 때이다. 또 f는 $x < \frac{1}{2}$와 $x > 2$에서 양수이고, $(\frac{1}{2}, 2)$에서 음수이다. 곡선은 $f(0) = 2$에서 y축과 만난다.

극점. 곱의 미분법(product rule)에 따라

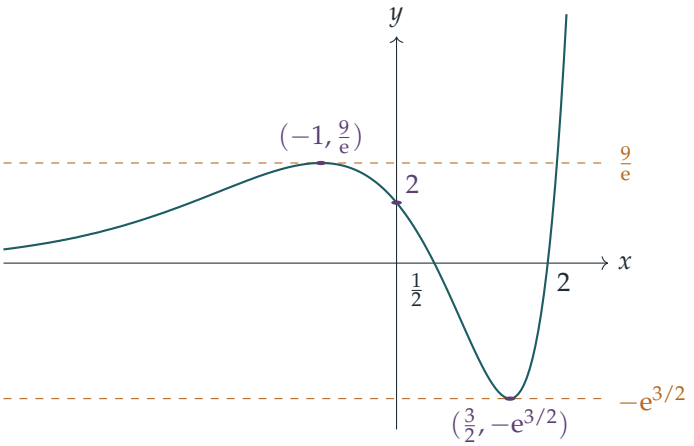
$$f'(x) = e^x(2x^2 - 5x + 2) + e^x(4x - 5) = e^x(2x^2 - x - 3) = e^x(2x - 3)(x + 1).$$

따라서 $f'(x) = 0$인 곳은 $x = -1$과 $x = \frac{3}{2}$이다. f'의 부호는 $(2x - 3)(x + 1)$의 부호와 같아서, $x < -1$에서 양수, $(-1, \frac{3}{2})$에서 음수, $x > \frac{3}{2}$에서 양수이다. 그러므로 f는 증가했다가

감소한 뒤 다시 증가하며,

$$f(-1) = \mathrm{e}^{-1}(2+5+2) = \frac{9}{\mathrm{e}} \approx 3.31 \qquad \text{(극댓값)},$$
$$f(\tfrac{3}{2}) = \mathrm{e}^{3/2}(\tfrac{9}{2} - \tfrac{15}{2} + 2) = -\mathrm{e}^{3/2} \approx -4.48 \qquad \text{(극솟값)}.$$

양 끝에서의 행동. $x \to \infty$일 때 두 인수가 모두 커지므로 $f(x) \to \infty$이다. $x \to -\infty$일 때는 주어진 사실($n = 2, 1, 0$)에 의해 $2x^2\mathrm{e}^x$, $-5x\mathrm{e}^x$, $2\mathrm{e}^x$가 각각 0으로 수렴하므로 $f(x) \to 0$이다. $x < \frac{1}{2}$에서 $f > 0$이므로 곡선은 x축의 음의 부분에 위쪽에서 다가간다. 즉 x축이 점근선(asymptote)이다.



$f(x) = k$의 해의 개수 세기. 해의 개수는 수평선 $y = k$가 곡선과 만나는 횟수이다. 곡선의 세 단조(monotonic) 구간을 차례로 살펴보면 다음과 같다.

- $(-\infty, -1]$에서 f는 순증가하며 $(0, \frac{9}{\mathrm{e}}]$의 모든 값을 정확히 한 번씩 갖는다(0에는 결코 도달하지 않는다).
- $[-1, \frac{3}{2}]$에서 f는 $\frac{9}{\mathrm{e}}$에서 $-\mathrm{e}^{3/2}$까지 순감소하며, 그 사이의 각 값을 정확히 한 번씩 갖는다.
- $[\frac{3}{2}, \infty)$에서 f는 $-\mathrm{e}^{3/2}$에서 ∞까지 순증가하며, 각 값을 정확히 한 번씩 갖는다.

각 구간의 기여를 더하면($x = -1$이나 $x = \frac{3}{2}$를 두 번 세지 않도록 주의한다) 다음을 얻는다.

$k < -e^{3/2}$	해 없음
$k = -e^{3/2}$	해 한 개 ($x = \frac{3}{2}$)
$-e^{3/2} < k \leq 0$	해 두 개
$0 < k < \frac{9}{e}$	해 세 개
$k = \frac{9}{e}$	해 두 개 ($x = -1$과 $x > 2$인 해 하나)
$k > \frac{9}{e}$	해 한 개

? **생각해 보기** $k = 0$일 때 해가 세 개가 아니라 두 개인 이유는 무엇인가?

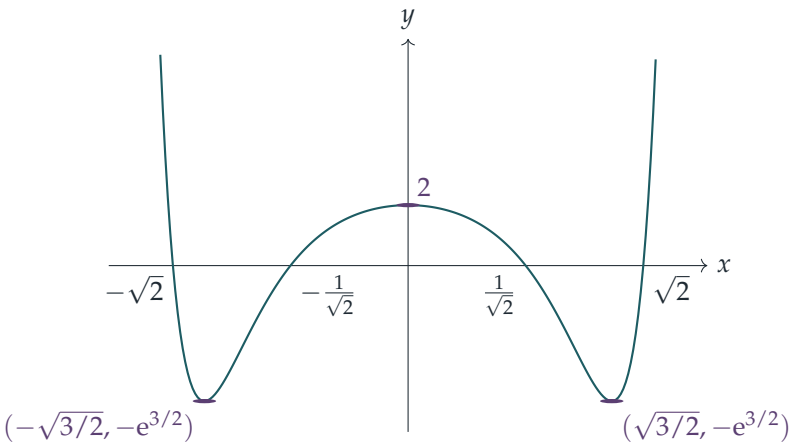
x축은 왼쪽에서 점근선이고, 모든 $x < \frac{1}{2}$에 대해 $f(x) > 0$이므로 왼쪽 끝 가지는 실제로 0에 도달하지 않는다. $f(x) = 0$의 해는 $x = \frac{1}{2}$와 $x = 2$뿐이다. 그러나 작은 $k > 0$에 대해서는 왼쪽 가지가 높이 k에 도달하므로, 해의 개수가 세 개로 늘어난다.

소문항 (ii)

$g(x) = e^{x^2}(2x^4 - 5x^2 + 2)$라 하자. 그러면 $g(x) = f(x^2)$이므로 g는 우함수(even function)이고 그래프는 y축에 대하여 대칭이다. x가 $[0, \infty)$를 움직일 때 $u = x^2$은 $[0, \infty)$를 증가하면서 움직이므로, $x \geq 0$에서 g의 그래프는 f의 그래프 중 $u \geq 0$인 부분을 그대로 다시 따라간다.

- $g(0) = f(0) = 2$이다.
- 영점은 $x^2 = \frac{1}{2}$ 또는 $x^2 = 2$인 곳, 즉 $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$와 $x = \pm\sqrt{2}$이다.
- 연쇄 법칙(chain rule)에 따라 $g'(x) = 2x\,f'(x^2) = 2x\,e^{x^2}(2x^2 - 3)(x^2 + 1)$이고, 이는 $x = 0$과 $x = \pm\sqrt{3/2}$에서만 0이 된다. ($x^2 = -1$은 실수해가 없으므로 $u = -1$에서의 f의 극점은 사라진다.)

$0 < x < \sqrt{3/2}$에서 $g'(x) < 0$이고, $x > \sqrt{3/2}$에서 $g'(x) > 0$이다. 따라서 $(0, 2)$는 극대점이고(대칭성에 의해 0의 바로 왼쪽에서 $g' > 0$), $x = \pm\sqrt{3/2}$는 극소점이며 그 값은 $f(\frac{3}{2}) = -e^{3/2}$이다. 마지막으로 $x \to \pm\infty$일 때 $g(x) \to \infty$이며, e^{x^2} 인수 때문에 매우 빠르게 커진다. 곡선은 "W" 모양이다.



검산

- $f(-1) = 9/e \approx 3.311$이고 $f(1.5) = -e^{1.5} \approx -4.482$이며, 근처의 몇몇 점에서 f의 값을 계산해 보면 이들이 각각 극대와 극소임을 확인할 수 있다.
- $x = 0$ 근처에서 $g(x) = f(x^2) \approx f(0) + f'(0)x^2 = 2 - 3x^2$으로 아래로 볼록한 포물선이 아닌 위로 열린 쪽이 아래를 향하는 포물선이므로, $(0, 2)$에서의 극대가 확인된다.
- 각 범위에서 k의 표본값에 대해 근의 개수를 컴퓨터로 확인하였다(예를 들어 $k = 2$이면 근이 세 개, $k = -1$이면 근이 두 개이다).
- $f(-40) \approx 1.4 \times 10^{-14}$으로, 점근선이 예측하는 대로 양수이고 매우 작다.

흔한 실수

- 곡선이 왼쪽에서 x축에 다가가기만 한다는 사실을 잊고 $k = 0$일 때 해를 세 개로 세는 것.
- 직선이 곡선에 접하여 두 해가 하나로 합쳐지는 경계의 경우 $k = \frac{9}{e}$와 $k = -e^{3/2}$를 빠뜨리는 것.
- 소문항 (ii)에서 $x^2 = -1$에 해당하는 극점을 남겨 두는 것.

STEP 너머

이 개수 세기 논증은 중간값 정리(intermediate value theorem)와 순단조성(strict monotonicity)에 기대고 있다. 구간에서 연속이고 순증가하는 함수는 양 끝값 사이의 각 값을 정확히 한 번씩 갖는다. 대학의 해석학 강의에서는 이런 사실들을, 여러분이 가정해도 좋다고

했던 극한 $x^n e^x \to 0$과 함께 엄밀하게 증명한다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해하기)는 이 과정을 아주 읽기 쉽게 보여 주는 책이다.

풀이

STEP I 2015, 문제 2

순수수학 • 삼차방정식의 삼각함수 해법

STEP I 2015, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/15-s1-q2

핵심 아이디어

삼차식 $4x^3 - 3x$는 정확히 삼배각 공식(triple-angle formula)이 만들어 내는 식이다: $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$. 따라서 이런 꼴의 삼차방정식은 코사인 값을 추측하여 풀 수 있다. 근 하나를 알면 인수분해한 뒤 남은 이차방정식을 풀면 된다. 마지막 소문항에서는 $y = 2x$로 크기를 바꾸면 주어진 삼차식이 이 꼴이 되고, 필요한 정확한 값은 소문항 (i)에서 얻는다.

풀이

소문항 (i)

$15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$로 쓰고 덧셈정리(compound-angle formulae)를 이용하면

$$\cos 15^\circ = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}},$$

이므로 원하는 결과를 얻는다. 같은 방법으로

$$\sin 15^\circ = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

분모를 유리화하면 다음과 같은 동치인 꼴을 얻는다.

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \qquad \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},$$

소문항 (iii)에서는 이 꼴이 더 쓰기 편하다.

소문항 (ii)

$c = \cos\alpha$, $s = \sin\alpha$라 하자. $\cos(2\alpha + \alpha)$를 전개하면

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha &= \cos 2\alpha \cos\alpha - \sin 2\alpha \sin\alpha \\ &= (2c^2 - 1)c - 2s^2 c \\ &= 2c^3 - c - 2(1 - c^2)c \\ &= 4c^3 - 3c.\end{aligned}$$

따라서 $4c^3 - 3c - \cos 3\alpha = 0$이므로 $x = \cos\alpha$는 근이다.

나머지 근을 구하기 위해 $\cos 3\alpha$를 $4c^3 - 3c$로 바꾸고 인수분해한다.

$$\begin{aligned}4x^3 - 3x - (4c^3 - 3c) &= 4(x^3 - c^3) - 3(x - c) \\ &= (x - c)\big(4x^2 + 4cx + 4c^2 - 3\big).\end{aligned}$$

> ? **생각해 보기** 이차 인수의 판별식을 어떻게 간단히 할 수 있을까?

$c^2 + s^2 = 1$을 이용하면 판별식(discriminant)은 $16c^2 - 16(4c^2 - 3) = 48(1 - c^2) = 48s^2$이다. 그 제곱근은 $4\sqrt{3}\,|s|$이지만, 부호 $\pm$를 모두 택하므로 절댓값 기호는 없애도 된다. 근의 공식에 의해

$$x = \frac{-4c \pm 4\sqrt{3}\,s}{8},$$

이므로 나머지 두 근은

$$x = -\tfrac{1}{2}\cos\alpha + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha \quad \text{그리고} \quad x = -\tfrac{1}{2}\cos\alpha - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha.$$

이 값들은 $\cos(\alpha - 120^\circ)$와 $\cos(\alpha + 120^\circ)$이다. 이는 자연스러운 결과이다. $3(\alpha \pm 120^\circ) = 3\alpha \pm 360^\circ$이므로 이 각들은 α와 같은 $\cos 3\theta$ 값을 가진다.

소문항 (iii)

> ? **생각해 보기** 주어진 삼차식은 $4x^3 - 3x - \cdots$가 아니라 $y^3 - 3y - \sqrt{2}$이다. 두 식을 어떻게 맞출 수 있을까?

소문항 (ii)에서처럼 삼차항과 일차항의 계수의 비가 4 대 3이 되도록 하고 싶다. $y = 2x$로 놓으면

$$8x^3 - 6x - \sqrt{2} = 0 \iff 4x^3 - 3x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

이는 $\cos 3\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^\circ$인 소문항 (ii)의 방정식이므로 $\alpha = 15^\circ$로 잡을 수 있다. 그러면 소문항 (ii)에서 세 근 x를 얻는다. 이 근들은 서로 다르므로(아래 참고) 삼차방정식의 근

전부이고, $y = 2x$에 의해

$$y = 2\cos\alpha, \qquad y = -\cos\alpha \pm \sqrt{3}\sin\alpha, \qquad \alpha = 15^\circ.$$

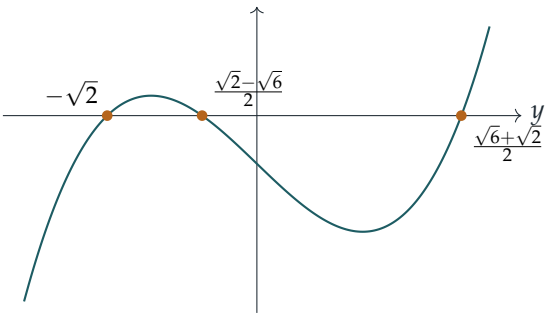
이제 소문항 (i)의 값을 대입한다.

- $y = 2\cos 15^\circ = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.
- $y = -\cos 15^\circ + \sqrt{3}\sin 15^\circ = \dfrac{-(\sqrt{6}+\sqrt{2})+(\sqrt{18}-\sqrt{6})}{4}$이고, 이를 간단히 하면 $\dfrac{2\sqrt{2}-2\sqrt{6}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$이다.
- $y = -\cos 15^\circ - \sqrt{3}\sin 15^\circ = \dfrac{-(\sqrt{6}+\sqrt{2})-(3\sqrt{2}-\sqrt{6})}{4} = -\sqrt{2}$.

여기서 $\sqrt{3}\sqrt{6} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$를 이용하였다. 이 세 값은 분명히 서로 다르다. 따라서 해는

$$y = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}, \qquad y = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}, \qquad y = -\sqrt{2}.$$

각으로 나타내면 이 값들은 $2\cos 15^\circ$, $2\cos 255^\circ$, $2\cos 135^\circ$이다.



검산

- $y^3 - 3y - \sqrt{2}$의 y^2의 계수가 0이므로 근의 합은 0이어야 한다. 실제로 $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} - \sqrt{2} = 0$이다.
- 근의 곱은 $\sqrt{2}$여야 한다. $(\sqrt{2}+\sqrt{6})(\sqrt{2}-\sqrt{6}) = 2-6 = -4$이므로 근의 곱은 $(-1)\cdot(-\sqrt{2}) = \sqrt{2}$이다.
- 근 $y = -\sqrt{2}$는 직접 확인하기 쉽다: $-2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$. 수치로는 $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \approx 1.93185$이고, $(1.93185)^3 - 3(1.93185) \approx 1.41421 = \sqrt{2}$이다.
- 소문항 (ii)에서 $\alpha = 0$이면 방정식 $4x^3 - 3x - 1 = 0$, 즉 $(x-1)(2x+1)^2 = 0$을 얻는다. 공식은 근 $1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$를 주며, 이는 예상한 대로이다.

흔한 실수

- 소문항 (iii)에서 크기를 바꾸는 것을 잊고 $4x^3 - 3x - \sqrt{2} = 0$을 푸는 실수. 이 방정식은 $\cos 3\alpha = \sqrt{2} > 1$이 되어야 하므로 불가능하다.
- $y = 2x$가 아니라 x에 대한 답을 쓰는 실수.
- $\pm$ 부호가 $\sin\alpha < 0$인 경우를 처리해 준다는 점을 언급하지 않고 $\sqrt{3(1-c^2)} = \sqrt{3}\sin\alpha$로 쓰는 실수.

STEP 너머

이것은 세 실근을 가진 삼차방정식을 푸는 삼각함수를 이용한 방법으로, 비에트(Viète)가 고안하였다. 어떤 삼차식이든 평행이동하여 이차항을 없애면 $t^3 + pt + q = 0$ 꼴이 된다. $p < 0$일 때 $t = 2\sqrt{-p/3}\,x$로 크기를 바꾸면 이 식은 $4x^3 - 3x = k$가 된다. 이 경우에는 카르다노(Cardano)의 공식이 도움이 되지 않는데, 세 근이 모두 실수인데도 음수의 제곱근을 거쳐야 하기 때문이다. 왜 이런 일이 생기는지, 그리고 왜 코사인을 이용한 방법은 이를 피해 가는지를 살펴보면 자연스럽게 복소수(complex numbers)와 단위근(roots of unity)으로 이어진다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이에 대한 아름다운 기하학적 그림을 보여 준다.

풀이

STEP I 2015, 문제 3

순수수학 • 좌표기하와 가시성

STEP I 2015, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

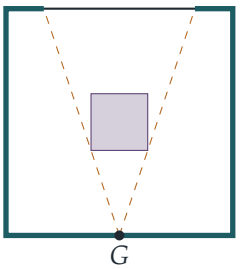
step.maths.org/questions/15-s1-q3

핵심 아이디어

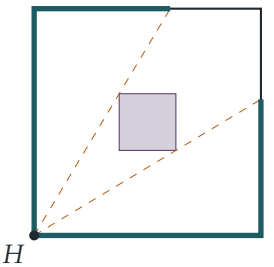
경비원의 시야는 건물에 가려지는데, 건물이 볼록(convex)한 정사각형이므로 건물의 한 꼭짓점을 스치듯 지나는 직선이 벽에서 보이는 부분이 끝나는 곳을 정한다. 따라서 각 위치마다 이러한 스치는 직선을 그리고, 그 직선이 둘레 벽과 만나는 점을 찾은 다음, 보이는 길이를 모두 더한다. 모든 계산은 닮은 삼각형(similar triangles)(또는 직선의 방정식)으로 해결된다. 수 $3a$는 벽의 중앙에서 그은 스치는 직선이 마당의 모서리에 정확히 닿을 때의 b의 값으로 나타난다.

풀이

원점을 중심에 두면, 둘레 벽은 변이 $x = \pm\frac{b}{2}, y = \pm\frac{b}{2}$ 위에 있는 정사각형이고, 건물은 정사각형 $|x| \leq \frac{a}{2}, |y| \leq \frac{a}{2}$이며, $0 < a < b$이다. 둘레의 전체 길이는 $4b$이다. 경비원에서 벽 위의 점 Q까지의 선분이 건물을 지나지 않을 때, 그리고 그때에만 경비원은 Q를 볼 수 있다.



벽의 중앙 ($b > 3a$)



모서리

벽에서 굵게 (청록색으로) 표시된 부분이 경비원이 볼 수 있는 부분이고, 점선은 건물의 꼭

짓점을 스치는 직선이다.

벽의 중앙에 있는 경비원

경비원이 아래쪽 벽의 중앙인 $G = (0, -\frac{b}{2})$에 있다고 하자. 건물이 아래쪽 벽보다 엄밀히 위에 있으므로 아래쪽 벽 전체가 보이며, 그 길이는 b이다. y축에 대한 대칭(symmetry)에 의해 오른쪽만 살펴보면 된다.

오른쪽 위로 향하는 시선은 가장 가까운 꼭짓점 $K = (\frac{a}{2}, -\frac{a}{2})$의 오른쪽을 지날 때, 그리고 그때에만 건물을 피한다. (이 직선은 먼저 $y = -\frac{a}{2}$와 만나고 올라갈수록 x좌표가 커지므로, 높이 $-\frac{a}{2}$에서 건물의 오른쪽에 있으면 계속 오른쪽에 있다. 그 높이에서 K의 왼쪽에 있으면 높이 $-\frac{a}{2}$에서의 x좌표가 0과 $\frac{a}{2}$ 사이이므로 건물 안으로 들어간다.) 따라서 G가 보는 영역의 경계는 직선 GK이다. 이 직선은 가로로 $\frac{a}{2}$만큼 갈 때 $\frac{b-a}{2}$만큼 올라가므로 기울기(gradient)는 $\frac{b-a}{a}$이다.

이 직선은 오른쪽 벽 $x = \frac{b}{2}$와 다음 높이에서 만난다.

$$y_1 = -\frac{b}{2} + \frac{b}{2} \cdot \frac{b-a}{a} = -\frac{b}{2} + \frac{b(b-a)}{2a}.$$

이 직선이 그 벽의 꼭대기에 닿는 것($y_1 \geq \frac{b}{2}$)은 $\frac{b-a}{a} \geq 2$일 때, 곧 $b \geq 3a$일 때, 그리고 그때에만이다.

? 생각해 보기 여기서 왜 b와 $3a$의 비교가 등장하는가?

이 비교가 스치는 직선 GK가 어느 벽에 닿는지를 결정한다. $b < 3a$이면 오른쪽 벽에, $b > 3a$이면 맞은편(위쪽) 벽에 닿는다. 두 경우는 보이는 길이에 대해 서로 다른 공식을 준다.

$b < 3a$인 경우. 경비원은 오른쪽 벽을 아래쪽 모서리에서 높이 y_1까지 보며, 그 길이는

$$y_1 + \frac{b}{2} = \frac{b(b-a)}{2a},$$

이고, 그보다 위는 보지 못한다(그 벽의 더 높은 점이나 위쪽 벽으로 가는 모든 직선은 K의 왼쪽을 지난다). 왼쪽의 대응하는 부분까지 더하면 보이는 전체 길이는

$$M = b + 2 \cdot \frac{b(b-a)}{2a} = b + \frac{b(b-a)}{a} = \frac{b^2}{a}.$$

$b > 3a$인 경우. 이제 오른쪽 벽 전체(길이 b)가 보이고, 직선 GK는 b만큼 올라간 뒤 위쪽 벽 $y = \frac{b}{2}$와 만나므로, 만나는 점은

$$x = \frac{a}{b-a} \cdot b = \frac{ab}{b-a},$$

이며, $2a < b - a$이므로 이 값은 $\frac{b}{2}$보다 작다. 경비원은 위쪽 벽을 그 점에서 모서리까지 보며, 그 길이는 $\frac{b}{2} - \frac{ab}{b-a} = \frac{b(b-3a)}{2(b-a)}$이다. 아래쪽 벽, 양쪽 옆 벽, 위쪽 벽의 두 부분을 모두 더하

면

$$M = 3b + \frac{b(b-3a)}{b-a} = \frac{3b(b-a)+b(b-3a)}{b-a} = \frac{b(4b-6a)}{b-a}.$$

모서리에 있는 경비원

경비원이 $H = (-\frac{b}{2}, -\frac{b}{2})$에 있다고 하자. H를 지나는 두 벽은 전부 보이며, 그 길이는 $2b$이다. 그림은 대각선 $y = x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 벽을 살펴보자. 앞에서와 같은 논리로, 보이는 부분은 H와 꼭짓점 $K = (\frac{a}{2}, -\frac{a}{2})$를 지나는 직선에 의해 잘리며, 이 직선의 기울기는

$$\frac{\frac{b}{2}-\frac{a}{2}}{\frac{b}{2}+\frac{a}{2}} = \frac{b-a}{b+a}.$$

벽 $x = \frac{b}{2}$까지 가로로 b만큼 가는 동안 이 직선은 $\frac{b(b-a)}{a+b}$만큼 올라가는데, 이는 b보다 작으므로 a와 b의 값에 관계없이 이 직선은 항상 오른쪽 벽에 닿는다. 경비원은 오른쪽 벽의 길이 $\frac{b(b-a)}{a+b}$만큼과 위쪽 벽의 같은 길이만큼을 보며, 두 벽의 나머지 부분은 보지 못한다. 따라서

$$C = 2b + \frac{2b(b-a)}{a+b} = \frac{2b(a+b)+2b(b-a)}{a+b} = \frac{4b^2}{a+b}.$$

두 위치의 비교

$b < 3a$인 경우.

$$C - M = \frac{4b^2}{a+b} - \frac{b^2}{a} = \frac{b^2\big(4a-(a+b)\big)}{a(a+b)} = \frac{b^2(3a-b)}{a(a+b)} > 0,$$

이므로 **모서리**가 더 낫다.

$b > 3a$인 경우.

$$M - C = \frac{b(4b-6a)}{b-a} - \frac{4b^2}{a+b} = \frac{b\big[(4b-6a)(a+b)-4b(b-a)\big]}{(b-a)(a+b)} = \frac{2ab(b-3a)}{(b-a)(a+b)} > 0,$$

이다. 왜냐하면 $(4b-6a)(a+b)-4b(b-a) = 4b^2-2ab-6a^2-4b^2+4ab = 2ab-6a^2$이기 때문이다. 따라서 **벽의 중앙**이 더 낫다.

$b = 3a$일 때는 M에 대한 두 공식이 모두 $9a$를 주고, $C = \frac{36a^2}{4a} = 9a$이기도 하므로 두 위치는 똑같이 좋다.

검산

- $a = 1, b = 2$로 두면 $M = 4$이고 $C = \frac{16}{3} \approx 5.33$이므로 모서리가 낫다. $a = 1, b = 5$로 두면 $M = \frac{5\cdot 14}{4} = 17.5$이고 $C = \frac{100}{6} \approx 16.67$이므로 중앙이 낫다. 이 값들은 벽 둘레의 수천 개의 점까지의 시선을 검사하는 컴퓨터 계산으로 확인하였다.

- $b \to a$이면 건물이 마당을 가득 채운다. 이때 $M \to a$(경비원이 있는 벽만 보임)이고 $C \to 2a$(모서리에서 만나는 두 벽)이며, 이는 마땅히 그래야 하는 결과이다.
- $b \to \infty$이면 건물은 무시할 만큼 작아진다. 이때 $M = \frac{b(4b-6a)}{b-a}$와 $C = \frac{4b^2}{a+b}$는 모두 전체 둘레 $4b$에 가까워지며, 둘 다 그보다 작은 값을 유지한다.

흔한 실수

- $b > 3a$일 때 벽의 중앙에 있는 경비원이 양쪽 옆 벽뿐만 아니라 맞은편 벽의 일부도 볼 수 있다는 사실을 잊는 것.
- 건물의 엉뚱한 꼭짓점을 스치는 직선을 쓰는 것. 아래쪽에서 볼 때 중요한 꼭짓점은 아래쪽의 두 꼭짓점 $(\pm\frac{a}{2}, -\frac{a}{2})$이다.
- 경비원이 있는 벽(또는 벽들)을 합계에서 빠뜨리는 것.

STEP 너머

한 점에서 영역의 어느 부분이 보이는지에 관한 문제는 계산 기하학(computational geometry)에 속한다. 고전적인 "미술관 정리(art gallery theorem)"에 따르면, 벽이 n개인 다각형(polygon) 모양의 미술관의 모든 점을 감시하는 데에는 언제나 $\lfloor n/3 \rfloor$명의 경비원으로 충분하며, 때로는 그만큼이 꼭 필요하다. 여기서 한 것처럼 가시 영역(visibility region)을 구하는 것은 이러한 문제의 기본 단계이며, 컴퓨터 그래픽스에서도 마찬가지인데, 그곳에서 은면 제거(hidden-surface removal)도 같은 방식으로 이루어진다. 이런 유형의 문제를 더 원한다면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)가 좋은 다음 단계이다.

풀이

STEP I 2015, 문제 4

순수수학 • 매개변수 곡선과 넓이

STEP I 2015, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/15-s1-q4

핵심 아이디어

곡선의 기울기(gradient)를 매개변수(parameter)로 쓴다. 중점(midpoint)에서의 접선(tangent)이 x축과 이루는 각이 θ이면 그 점에서의 기울기는 $\tan\theta$이고, 이것으로 중점이 정해진다. 그러면 각 끝점은 단위벡터(unit vector) $(\cos\theta, \sin\theta)$ 방향으로 중점에서 거리 b만큼 떨어진 점이다. 넓이를 구할 때는 반쪽 막대(rod) AP가 P에서의 접선 위에 놓이므로, 영역은 포물선(parabola)과 그 접선 하나 사이의 틈일 뿐이며, 그 피적분함수(integrand)는 완전제곱식(perfect square)이다.

풀이

끝점의 자취

중점을 P라 하고, 막대가 양의 x축과 이루는 각을 θ라 하자. $y = \frac{1}{4}x^2$에서 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}x$이고 막대는 P에서 곡선에 접하므로

$$\tfrac{1}{2}x_P = \tan\theta, \qquad \text{따라서} \qquad P = \left(2\tan\theta,\ \tan^2\theta\right).$$

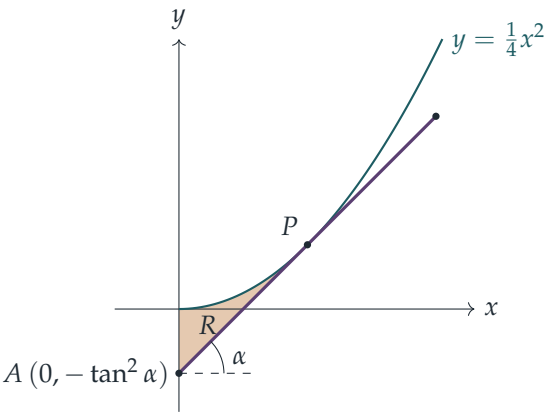
조건 $x \geq 0$에서 $\tan\theta \geq 0$이므로 $0 \leq \theta < \frac{1}{2}\pi$로 잡을 수 있다. θ가 이 범위를 움직이면 $2\tan\theta$는 $[0, \infty)$의 모든 값을 취하므로, 중점의 각 위치는 정확히 하나의 θ에서 나온다.

막대 방향의 단위벡터는 $(\cos\theta, \sin\theta)$이고, 각 끝점은 P에서 거리 b만큼 떨어져 있다. 따라서 끝점은 $P \pm b(\cos\theta, \sin\theta)$이다. 음의 부호(아래쪽, 왼쪽 끝점)를 택하면

$$x = 2\tan\theta - b\cos\theta,$$
$$y = \tan^2\theta - b\sin\theta,$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다. (다른 쪽 끝점은 $-b$ 대신 $+b$를 넣은 같은 식으로 나타난다.)

R의 넓이



y축에 닿는 끝점은 $x = 2\tan\theta - b\cos\theta$인 쪽이다. 다른 끝점은 항상 $x = 2\tan\theta + b\cos\theta > 0$이기 때문이다. 따라서 $\theta = \alpha$일 때

$$2\tan\alpha = b\cos\alpha.$$

A의 y좌표는 $\tan^2\alpha - b\sin\alpha$이고, 바로 앞의 식을 이용하여 b를 소거할 수 있다.

$$b\sin\alpha = (b\cos\alpha)\tan\alpha = 2\tan^2\alpha, \qquad \text{따라서} \qquad A = \big(0, -\tan^2\alpha\big).$$

생각해 보기 A는 원점에 대해 어디에 있는가? 그리고 직선 AP의 방정식은 무엇인가?

A는 원점 아래에 있고, 직선 AP는 P에서 포물선에 그은 접선이다. $t = \tan\alpha$로 놓자. $P = (2t, t^2)$에서의 접선은 기울기가 t이므로 그 방정식은

$$y = t^2 + t(x - 2t) = tx - t^2,$$

이고, 실제로 $A = (0, -t^2)$을 지난다. 또한

$$\tfrac{1}{4}x^2 - (tx - t^2) = \big(\tfrac{1}{2}x - t\big)^2 \geq 0.$$

이므로 포물선은 이 접선보다 위에 있다. 따라서 R은 $0 \leq x \leq 2t$이고 직선 AP(아래)와 곡선(위) 사이에 있는 점들의 집합이다. 그 왼쪽 경계는 y축 위에서 A부터 O까지의 선분이다. 그러므로

$$\begin{aligned} \text{넓이} R &= \int_0^{2t} \Big(\tfrac{1}{4}x^2 - (tx - t^2)\Big)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2t} \big(\tfrac{1}{2}x - t\big)^2\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[\tfrac{2}{3}\big(\tfrac{1}{2}x - t\big)^3\Big]_0^{2t} = 0 - \tfrac{2}{3}(-t)^3 = \tfrac{2}{3}t^3. \end{aligned}$$

따라서 R의 넓이는 $\frac{2}{3}\tan^3\alpha$이고, 요구된 결과를 얻는다.

b가 완전히 사라졌다는 점에 주목하자. 넓이는 P에서의 접선이 y축과 만나는 위치에만 의존한다. 물론 b와 α는 $2\sin\alpha = b\cos^2\alpha$로 연결되어 있으므로 b가 α를 결정한다.

검산

- $\alpha = \frac{1}{4}\pi$(그림의 경우)로 잡자. 그러면 $b\cos\alpha = 2$에서 $b = 2\sqrt{2}$이고, $P = (2,1)$, $A = (0,-1)$이다. 넓이는 $\int_0^2 \left(\frac{1}{4}x^2 - x + 1\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{3} - 2 + 2 = \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\tan^3\frac{1}{4}\pi$이다.
- $b = 2$일 때 $2\tan\alpha = 2\cos\alpha$를 수치적으로 풀면 $\alpha \approx 0.6662$이고, 수치적분(numerical integration)으로 구한 넓이는 0.32391로 $\frac{2}{3}\tan^3\alpha$와 일치한다.
- $b \to 0$이면 $\alpha \to 0$이고, 공식이 예측하는 대로 영역은 줄어들어 사라진다.

흔한 실수

- 영역을 x축에서 나누고 그 아래의 삼각형을 빠뜨리는 것. 접선과 곡선 사이의 적분 하나로 두 부분을 한꺼번에 처리할 수 있다.
- 막대의 엉뚱한 끝점을 쓰는 것. $+b\cos\theta$인 끝점은 결코 y축에 닿을 수 없다.
- $b\cos\alpha = 2\tan\alpha$를 이용해 b를 소거하지 않고 답에 b를 남겨 두는 것.

STEP 너머

중점은 포물선을 그리고, 각 끝점은 접선을 따라 일정한 거리 b만큼 떨어진 곡선을 그린다. 기존 곡선의 접선으로부터 새로운 곡선을 만드는 것은 평면곡선의 미분기하학(differential geometry)에서 흔히 다루는 주제이며(신개선(involute), 포락선(envelope), 추적선(tractrix)이 고전적인 예이다), 대학 1학년 과정에서 호의 길이(arc length), 곡률(curvature)과 함께 배운다. 넓이에 대한 깔끔한 답은 아르키메데스(Archimedes)의 포물선 구적법(quadrature)을 떠올리게 하는데, 이것은 포물선 활꼴의 넓이가 어떤 내접 삼각형 넓이의 $\frac{4}{3}$배임을 보여 준다. 이런 성격의 문제를 더 풀어 보고 싶다면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*를 참고하라.

풀이

STEP I 2015, 문제 5

순수수학 • 매개변수가 있는 적분

> **STEP I 2015, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/15-s1-q5

핵심 아이디어

두 적분 모두 x를 매개변수(parameter)로 고정하면 t에 대한 초등적인 원시함수(antiderivative)를 가지므로, "적분을 계산하여"라는 지시가 곧 힌트의 전부이다. 즉 x에 대한 닫힌 형태(closed form)를 구한 다음 그것을 그리면 된다. 주의할 점은 세부 사항에 있다. (i)에서는 피적분함수(integrand)가 $t = 1$에서 유계가 아닐 수 있고, (ii)에서는 제곱근이 절댓값(absolute value)으로 계산되므로 g는 놀랄 만큼 단순한 모양을 가진 구간별로 정의된 함수(piecewise function)가 된다.

풀이

소문항 (i)

$x > 0$을 고정하면 $(t-1)^{x-1}$의 원시함수는 $\frac{1}{x}(t-1)^x$이다. 따라서

$$f(x) = \left[\frac{(t-1)^x}{x}\right]_1^3 = \frac{2^x - 0}{x} = \frac{2^x}{x}.$$

$0 < x < 1$일 때 피적분함수 $(t-1)^{x-1}$은 $t \to 1^+$에서 무한대로 발산하므로 이 적분은 이상적분(improper integral)이다. 그러나 $x > 0$이므로 $t \to 1^+$일 때 $(t-1)^x \to 0$이 되어 적분은 수렴하고, 위의 값은 그대로 성립한다.

이제 $x > 0$에서 $y = 2^x/x$의 그래프를 그린다.

- $x \to 0^+$일 때 $2^x \to 1$이므로 $f(x) \to +\infty$이다. 즉 y축이 점근선(asymptote)이다.
- $x \to \infty$일 때 지수함수가 거듭제곱보다 빠르게 증가하므로 $f(x) \to \infty$이다(게다가 어떤 직선보다도 빠르게 증가한다).

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}2^x = 2^x \ln 2$를 이용하여 미분하면

$$f'(x) = \frac{2^x \ln 2 \cdot x - 2^x}{x^2} = \frac{2^x(x\ln 2 - 1)}{x^2},$$

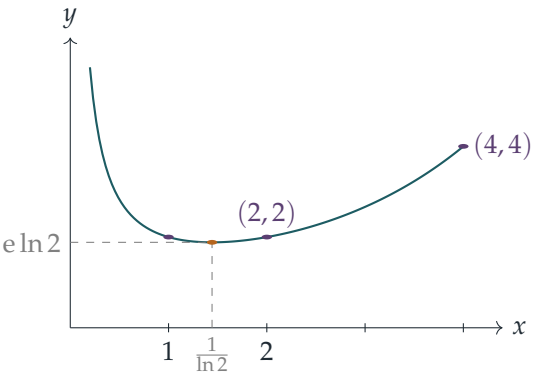
  이고, 이는 $x < 1/\ln 2$에서 음수, $x > 1/\ln 2$에서 양수이다. 따라서 정류점(stationary point)은 $x = 1/\ln 2 \approx 1.44$ 하나뿐이며, 이 점은 극소점(minimum)이다.

- 이 점에서 $2^{1/\ln 2} = \mathrm{e}^{(\ln 2)/\ln 2} = \mathrm{e}$이므로 최솟값은

$$f\left(\frac{1}{\ln 2}\right) = \mathrm{e}\ln 2 \approx 1.88.$$

- 유용한 점: $f(1) = f(2) = 2$, $f(4) = 4$.

이 곡선은 또한 볼록(convex)하다. $\ln f(x) = x\ln 2 - \ln x$는 볼록하고(이계도함수가 $1/x^2 > 0$이다), 볼록함수의 지수함수는 볼록하기 때문이다. 따라서 그래프는 하나의 U자 모양 곡선이다.



소문항 (ii)

먼저 피적분함수가 잘 정의됨을 확인한다. $-1 \le t \le 1$에 대하여

$$1 - 2xt + x^2 \ge 1 - 2|x| + x^2 = (1 - |x|)^2 \ge 0,$$

이고, 등호는 $|x| = 1$이고 $t = \pm 1$(끝점)일 때만 성립한다. 이 경우는 아래에서 다시 다룬다.

$x = 0$이면 피적분함수가 1이므로 $g(0) = 2$이다. $x \ne 0$이면 x를 상수로 보자. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1 - 2xt + x^2) = -2x$이므로 원시함수는 $-\frac{1}{x}\sqrt{1 - 2xt + x^2}$이다. 따라서

$$g(x) = -\frac{1}{x}\left[\sqrt{1 - 2xt + x^2}\right]_{-1}^{1} = \frac{\sqrt{(1+x)^2} - \sqrt{(1-x)^2}}{x} = \frac{|1+x| - |1-x|}{x}.$$

생각해 보기 왜 그냥 $\sqrt{(1+x)^2} = 1 + x$, $\sqrt{(1-x)^2} = 1 - x$라고 쓰면 안 될까?

$\sqrt{u^2} = |u|$이지 u가 아니기 때문이다. 이를 부주의하게 처리하면 모든 x에 대해 $g(x) = 2$를 얻는데, 이는 $|x|$가 클 때 분명히 틀렸다. 그때 피적분함수는 대략 $1/|x|$이므로 $g(x) \approx 2/|x|$이어야 하기 때문이다. 따라서 경우를 나누어야 한다.

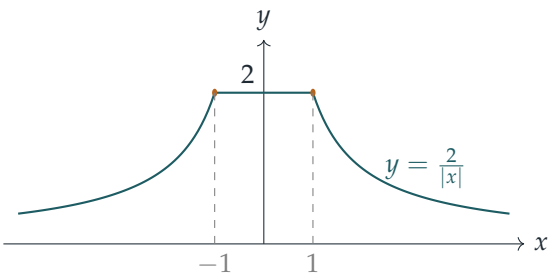
- $-1 \le x \le 1, x \ne 0$: $1+x$와 $1-x$가 모두 ≥ 0이므로 $g(x) = \dfrac{(1+x)-(1-x)}{x} = 2$이다. 이는 $g(0) = 2$와도 일치한다.
- $x > 1$: $|1+x| = 1+x$이고 $|1-x| = x-1$이므로 $g(x) = \dfrac{2}{x}$이다.
- $x < -1$: $|1+x| = -1-x$이고 $|1-x| = 1-x$이므로 $g(x) = \dfrac{-2}{x} = \dfrac{2}{|x|}$이다.

$x = \pm 1$에서는 피적분함수가 한쪽 끝점에서 유계가 아니므로(예를 들어 $x = 1$이면 피적분함수는 $1/\sqrt{2-2t}$이고, $t \to 1$일 때 발산한다) 적분은 이상적분이다. 원시함수 $-\sqrt{2-2t}$는 $t = 1$까지 연속이므로 적분은 수렴하고, 위의 공식은 여전히 $g(\pm 1) = 2$를 준다.

따라서

$$g(x) = \begin{cases} 2, & |x| \le 1, \\ \dfrac{2}{|x|}, & |x| \ge 1. \end{cases}$$

이 함수는 우함수(even function)이다(당연히 그래야 한다. t를 $-t$로 바꾸면 $g(-x) = g(x)$임을 알 수 있다). 이 함수는 모든 점에서 연속(continuous)이고, $[-1, 1]$에서 상수이며, 점근선 $y = 0$을 향해 $2/|x|$처럼 감소한다. $x = \pm 1$에서는 꺾인 점이 있다. 한쪽 기울기가 0(안쪽)과 ∓ 2(바깥쪽)이므로 g는 그 점에서 미분가능(differentiable)하지 않다.



검산

- 소문항 (i)에서 $x = 1$일 때: 피적분함수가 1이므로 $f(1) = 2$이고, 이는 $2^1/1$과 일치한다. $x = 2$일 때 적분은 $\int_1^3 (t-1)\,\mathrm{d}t = 2$이고, 이는 $2^2/2$와 일치한다.
- 소문항 (ii)에서 $x = 0$일 때: 피적분함수가 1이고 $g(0) = 2$이다. $|x|$가 크면 피적분함수는 길이가 2인 구간 위에서 $1/|x|$에 가까우므로 $2/|x|$와 일치한다.

- 수치적으로 $\int_1^3 (t-1)^{0.5}\,\mathrm{d}t = 1.8856\ldots = 2^{1.5}/1.5$이다. (ii)의 적분은 $x = 1.2$일 때 $1.6667 = 2/1.2$이고, $x = 0.8$일 때 2.0000이다.

흔한 실수

- 모든 x에 대해 $\sqrt{(1-x)^2} = 1 - x$라고 쓰고, g가 상수라고 결론짓는 것.
- (i)의 적분이 $0 < x < 1$에서 이상적분이라는 사실, 또는 $(t-1)^x$가 $t = 1$에서 0이 되는 것은 오직 $x > 0$이기 때문이라는 사실을 잊는 것.
- g를 $x = \pm 1$에서 매끄럽게 그리는 것. 두 조각은 서로 다른 기울기로 만난다.

STEP 너머

소문항 (ii)는 모습을 바꾼 뉴턴(Newton)의 껍질 정리(shell theorem)이다. $t = \cos\theta$로 놓으면 $1/\sqrt{1-2xt+x^2}$은 단위구의 중심에서 거리 x만큼 떨어진 점과 구면 위의 한 점 사이 거리의 역수이다. 따라서 g는 (상수배를 제외하면) 균일한 구 껍질이 만드는 중력 퍼텐셜(gravitational potential)이다. 이 퍼텐셜은 껍질 안쪽에서는 상수이고, 바깥쪽에서는 점질량의 퍼텐셜과 같다. 같은 식은 르장드르 다항식(Legendre polynomials)의 생성함수(generating function) $\sum_n P_n(t)x^n$이기도 하며, $|x| < 1$에서 $g(x) = 2$라는 사실은 $n \geq 1$인 모든 P_n을 $[-1, 1]$에서 적분하면 0이 된다는 사실을 반영한다. x를 매개변수로 두고 t^{x-1}을 적분하는 소문항 (i)은 감마 함수(Gamma function)와 베타 함수(Beta function)로 나아가는 첫걸음이다. Mary Boas의 *Mathematical Methods in the Physical Sciences*(물리 과학의 수학적 방법)는 르장드르 다항식과 감마 함수를 딱 알맞은 수준으로 다룬다.

풀이

STEP I 2015, 문제 6

순수수학 • 기하에서의 벡터

STEP I 2015, 6번 문제

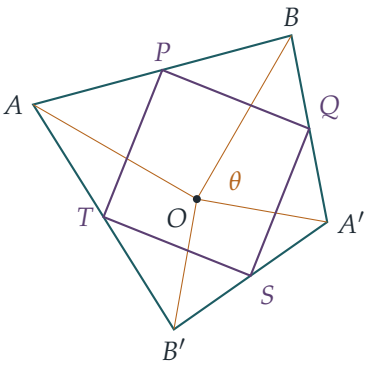
더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/15-s1-q6

핵심 아이디어

O를 원점으로 두면, 조건 $OA = OB$와 $\angle AOB = 90°$는 B가 A를 O를 중심으로 직각만큼 돌린 점이라는 뜻이고, 마찬가지로 B'은 A'을 같은 방향으로 돌린 점이다. 이 4분의 1 회전(quarter-turn)을 R로 쓰자. 그러면 중점 사각형의 각 변은 바로 앞 변에 R를 적용한 것이 되고, 바로 이 성질이 정사각형을 만든다. 변을 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{a}'$으로 나타내고 나면, 넓이는 코사인 법칙(cosine rule)으로 계산하면 된다.

풀이



중점들은 정사각형을 이룬다

O를 원점으로 잡고, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}', \mathbf{b}'$을 각각 A, B, A', B'의 위치벡터(position vector)라 하자. R를 O를 중심으로 시계 방향으로 90°만큼 돌리는 회전(rotation)이라 하자. 이 회전은 선

형(linear)이고, 길이를 보존하며, 영벡터가 아닌 모든 벡터를 직각만큼 돌린다.

꼭짓점이 시계 방향으로 돌아가며 놓여 있고 O가 사각형 내부에 있으므로, OA에서 OB로 가는 것은 시계 방향으로 90° 도는 것이다. $OA = OB$이므로 이로부터 $\mathbf{b} = R\mathbf{a}$를 얻는다. 같은 방법으로 $\mathbf{b}' = R\mathbf{a}'$이다.

P, Q, S, T를 각각 AB, BA', $A'B'$, $B'A$의 중점이라 하자.

$$\mathbf{p} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}), \quad \mathbf{q} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{a}'), \quad \mathbf{s} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}'+\mathbf{b}'), \quad \mathbf{t} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}'+\mathbf{a}).$$

이제 네 변을 차례로 살펴보자. $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}$라 하면

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PQ} &= \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}'-\mathbf{a}) = \mathbf{u},\\
\overrightarrow{QS} &= \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}'-\mathbf{b}) = \tfrac{1}{2}R(\mathbf{a}'-\mathbf{a}) = R\mathbf{u},\\
\overrightarrow{ST} &= \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{a}') = -\mathbf{u},\\
\overrightarrow{TP} &= \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}-\mathbf{b}') = -R\mathbf{u}.
\end{aligned}$$

여기서 $A \neq A'$이므로 $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$이다. 따라서 PQ와 ST는 크기가 같고 방향이 반대이므로, $PQST$는 평행사변형(parallelogram)이다. 이웃한 변 QS는 $\mathbf{u}$를 길이 변화 없이 직각만큼 돌린 것이다. 이웃한 두 변의 길이가 같고 서로 수직인 평행사변형은 정사각형이므로, 구하는 대로 $PQST$는 정사각형이다.

생각해 보기 A를 B로 보내는 4분의 1 회전이 왜 A'을 B'으로 보내는 회전과 같아야 할까?

두 쌍 모두 시계 방향으로 붙인 이름에서 연달아 나오고 O가 내부에 있으므로, 각 경우 첫 번째 반직선에서 두 번째 반직선으로 도는 방향은 시계 방향이다. 만약 한쪽 회전은 시계 방향이고 다른 쪽은 반시계 방향이라면, $\overrightarrow{QS}$에서 $R\mathbf{u}$로 넘어가는 단계가 성립하지 않으며, 일반적으로 도형은 정사각형이 되지 않는다.

넓이의 최대화

$OA = OB = p$, $OA' = OB' = q$라 하고 둘 다 고정하며, $\theta = \angle BOA'$이라 하자. O에서의 네 각의 합은 360°이고 그중 두 각이 직각이므로, $\angle B'OA = 180^\circ - \theta$이다. O가 내부에 있으므로 θ와 $180^\circ - \theta$는 모두 0°와 180° 사이에 엄밀하게 놓이고, 따라서 $0 < \theta < 180^\circ$이다.

정사각형의 한 변은 $|\mathbf{u}| = \frac{1}{2}AA'$이므로 넓이는 $\frac{1}{4}AA'^2$이다. OA에서 OB를 거쳐 OA'으로 돌아가면, $\mathbf{a}$와 $\mathbf{a}'$ 사이의 각은 $90^\circ + \theta$이고, $\cos(90^\circ + \theta) = -\sin\theta$이다. 코사인 법칙에 의해(또는 $|\mathbf{a}' - \mathbf{a}|^2$을 전개하면)

$$AA'^2 = p^2 + q^2 - 2pq\cos(90^\circ + \theta) = p^2 + q^2 + 2pq\sin\theta,$$

이므로

$$\text{넓이} = \tfrac{1}{4}\left(p^2 + q^2 + 2pq\sin\theta\right).$$

p와 q가 고정되어 있으므로, 이 값은 $\sin\theta$가 최대일 때 최대이다. $0 < \theta < 180°$에서 그런 경우는 정확히

$$\angle BOA' = \theta = 90°,$$

일 때이고, 최대 넓이는 $\frac{1}{4}(p+q)^2$이다. 이 경우 O에서의 네 각이 모두 직각이므로 A'은 AO를 O 너머로 연장한 직선 위에 놓이고, 정사각형의 한 변은 $\frac{1}{2}(p+q)$이다.

검산

- $p = 2, q = 3$으로 두자. 넓이 공식은 $\frac{1}{4}(13 + 12\sin\theta)$가 되는데, 이 값은 $\theta = 0$ 근처에서 3.25이고, $\theta = 90°$에서 $6.25 = \frac{1}{4}\cdot 5^2$까지 커졌다가, 다시 3.25 쪽으로 줄어든다. 컴퓨터로 θ를 촘촘히 훑어 보면 최댓값은 90.0°에서 나타난다.
- 대칭인 경우 $p = q, \theta = 90°$: $ABA'B'$ 자체가 중심이 O이고 한 변이 $p\sqrt{2}$인 정사각형이며, 그 중점 정사각형은 한 변이 p, 넓이가 $p^2 = \frac{1}{4}(2p)^2$으로 공식과 일치한다.
- p, q, θ를 무작위로 골라, 중점들이 넓이가 $\frac{1}{4}(p^2 + q^2 + 2pq\sin\theta)$인 정사각형을 이룬다는 것을 컴퓨터로 확인하였다.

흔한 실수

- OA와 OA' 사이의 각을 $90° + \theta$가 아니라 θ로 잡는 것. 그러면 넓이가 $\frac{1}{4}(p^2 + q^2 - 2pq\cos\theta)$가 되어, θ가 180°에 가까워져야 한다는 잘못된 결론에 이른다.
- 네 변의 길이가 같다는 것만 보이는 것. 그것만으로는 마름모(rhombus)일 뿐이다. 직각도 필요한데, 여기서는 $\overrightarrow{QS} = R\,\overrightarrow{PQ}$로부터 저절로 얻어진다.

STEP 너머

직각만큼의 회전은 선형사상(linear map) $R(x,y) = (y,-x)$이고, 복소평면(complex plane)에서는 $-\mathrm{i}$를 곱하는 것이다. 전체 논증은 선형사상을 이용한 계산이다. R가 뺄셈과 교환되므로 $\mathbf{q} - \mathbf{p}$와 $\mathbf{s} - \mathbf{q}$는 R만큼 차이가 난다. 같은 아이디어로 나폴레옹 정리(Napoleon's theorem)나 반 오벨 정리(van Aubel's theorem) 같은 결과를 빠르게 증명할 수 있다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 바로 이런 방식으로 복소수의 곱셈을 통해 기하학을 전개한다.

풀이

STEP I 2015, 문제 7

순수수학 • 구간에서의 최댓값

> **STEP I 2015, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/15-s1-q7

핵심 아이디어

닫힌구간(closed interval)에서 매끄러운 함수(smooth function)의 최댓값은 구간 내부의 정류점(stationary point)이나 끝점(endpoint) 중 한 곳에서 나타난다. 이 문제에서 정류점은 $x = 0$과 $x = \frac{a}{3}$이고, 두 번째 정류점은 a가 커짐에 따라 오른쪽으로 움직이다가 결국 구간을 벗어난다. 따라서 후보들을 나열한 뒤 a가 변할 때 이들을 비교한다. 세 개의 범위는 비교 결과가 바뀌는 지점과 $\frac{a}{3}$이 $x = 1$을 지나는 지점에서 생긴다.

풀이

후보들

미분하면

$$f'(x) = 6ax - 18x^2 = 6x(a - 3x),$$

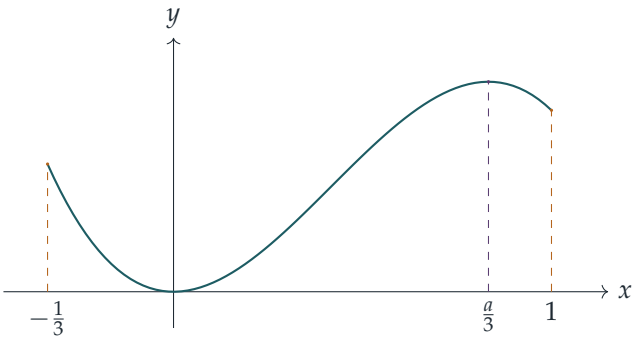
이므로 정류점은 $x = 0$과 $x = \frac{a}{3}$이다. $a \geq 0$일 때 f'의 부호로부터 그래프의 모양을 알 수 있다.

- $x < 0$이면 $6x < 0$이고 $a - 3x > 0$이므로 $f'(x) < 0$이고, f는 감소한다.
- $0 < x < \frac{a}{3}$이면 $f'(x) > 0$이고, f는 증가한다.
- $x > \frac{a}{3}$이면 $f'(x) < 0$이고, f는 감소한다.

따라서 $x = 0$은 극소(local minimum)이고 $x = \frac{a}{3}$은 극대(local maximum)이다($a = 0$이면 두 점이 일치하고 $f = -6x^3$은 전체에서 감소한다). 필요한 값은 다음과 같다.

$$f\left(-\tfrac{1}{3}\right) = \frac{a}{3} + \frac{2}{9}, \qquad f\left(\tfrac{a}{3}\right) = \frac{a^3}{3} - \frac{2a^3}{9} = \frac{a^3}{9}, \qquad f(1) = 3a - 6.$$

f는 $[-\frac{1}{3}, 0]$에서 감소하므로 이 부분에서의 최댓값은 $f(-\frac{1}{3})$이다. 값 $f(0) = 0$은 결코 최댓값이 되지 않는다. 따라서 $\mathrm{M}(a)$는 $f(-\frac{1}{3})$과 $[0, 1]$에서의 f의 최댓값 중 큰 쪽이다.



그림은 $a = \frac{5}{2}$인 경우이다. 세 후보는 두 끝점(호박색)과 극대점(자주색)이며, 이 경우에는 극대점이 가장 크다.

$0 \le a \le 3$인 경우

이때 $\frac{a}{3} \in [0, 1]$이므로 $[0, 1]$에서 함수는 $x = \frac{a}{3}$까지 증가한 뒤 감소한다. 이 구간에서의 최댓값은 $f(\frac{a}{3}) = \frac{a^3}{9}$이고, 이를 $f(-\frac{1}{3})$과 비교해야 한다.

$$\frac{a^3}{9} - \left(\frac{a}{3} + \frac{2}{9}\right) = \frac{a^3 - 3a - 2}{9} = \frac{(a+1)^2(a-2)}{9}.$$

? **생각해 보기** $a^3 - 3a - 2$의 인수분해(factorisation)는 어떻게 알아낼 수 있을까?

작은 정수를 대입해 본다. $a = -1$이면 $-1 + 3 - 2 = 0$이고, $a = 2$이면 $8 - 6 - 2 = 0$이다. 세 근의 합은 0이므로(a^2 항이 없다) 세 번째 근은 다시 -1이고, 따라서 $(a+1)^2(a-2)$를 얻는다.

$a \ge 0$에서 $(a+1)^2 > 0$이므로 차의 부호는 $a - 2$의 부호와 같다. 그러므로

$$\mathrm{M}(a) = \frac{a}{3} + \frac{2}{9} \quad \text{단, } 0 \le a \le 2, \qquad \mathrm{M}(a) = \frac{a^3}{9} \quad \text{단, } 2 \le a \le 3,$$

이고, $a = 2$에서 두 식은 모두 $\frac{8}{9}$를 준다.

$a > 3$인 경우

이때 $\frac{a}{3} > 1$이므로 f는 $[0, 1]$ 전체에서 증가하고, 이 구간에서의 최댓값은 $f(1) = 3a - 6$이다. 왼쪽 끝점과 비교하면

$$(3a - 6) - \left(\frac{a}{3} + \frac{2}{9}\right) = \frac{8a}{3} - \frac{56}{9} = \frac{8}{9}(3a - 7),$$

이고, $a > 3 > \frac{7}{3}$이므로 이 값은 양수이다. 따라서 $a \geq 3$에서 $\mathrm{M}(a) = 3a - 6$이다. $a = 3$에서 이 값은 $3 = \frac{27}{9}$으로, 가운데 식과 일치한다.

결론

$$\mathrm{M}(a) = \begin{cases} \dfrac{a}{3} + \dfrac{2}{9}, & 0 \leq a \leq 2, \\ \dfrac{a^3}{9}, & 2 \leq a \leq 3, \\ 3a - 6, & a \geq 3. \end{cases}$$

말로 하면, a가 작을 때는 왼쪽 끝점이 가장 크고, a가 중간 크기일 때는 극대점이 가장 크며, 극대점이 구간을 벗어나고 나면 오른쪽 끝점이 가장 크다.

검산

- M은 연속(continuous)이다. $a = 2$에서 양쪽 모두 $\frac{8}{9}$이고, $a = 3$에서 양쪽 모두 3이다. 최댓값은 a에 따라 연속적으로 변하므로 당연히 그래야 한다.
- $a = 0$: $f(x) = -6x^3$은 감소하므로 최댓값은 $f(-\frac{1}{3}) = \frac{2}{9}$이고, 이는 첫 번째 식과 일치한다.
- $a = \frac{5}{2}$: 식은 $\frac{125}{72} \approx 1.736$을 주고, 끝점에서의 값은 $f(-\frac{1}{3}) \approx 1.056$과 $f(1) = 1.5$로 둘 다 더 작다. 0과 12 사이의 수백 개의 a 값에 대해 x의 촘촘한 격자에서 컴퓨터로 탐색한 결과, 10^{-8} 이내의 오차로 식과 일치하였다.

흔한 실수

- 왼쪽 끝점 $x = -\frac{1}{3}$을 빠뜨리는 것. f는 $x < 0$에서 감소하므로 이 끝점에서의 값이 극댓값보다 클 수 있으며, 실제로 $a < 2$일 때 그렇다.
- $a > 3$일 때 $f(\frac{a}{3})$을 사용하는 것. 이때 $\frac{a}{3}$은 구간 밖에 있으므로 후보가 될 수 없다.
- 극댓값이 자동으로 구간에서의 최댓값이라고 가정하는 것.

STEP 너머

여기서 $\mathrm{M}(a) = \max_{x \in [-1/3, 1]} f(x)$는 함수족에 대한 최적화로 정의된 함수이며, 이러한 함수는 대개 연속이지만 구간별로만 매끄럽다(piecewise smooth). $a = 2$에서 M의 좌미분계수와 우미분계수(left and right derivatives)가 서로 다르다는 것을 확인해 볼 수 있다. 닫힌

유계 구간에서 연속인 함수가 애초에 최댓값을 가진다는 사실은 최대최소 정리(Extreme Value Theorem)이며, 해석학(analysis) 입문 과정에서 증명한다. Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 참고하라.

풀이

STEP I 2015, 문제 8

순수수학 • 거듭제곱 합의 나누어떨어짐

> **STEP I 2015, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/15-s1-q8

핵심 아이디어

합을 한 번은 앞에서부터, 한 번은 뒤에서부터 두 번 쓴 다음 더한다. 이것이 소문항 (i)에 쓰는 가우스(Gauss)의 기법이며, 소문항 (ii)는 항이 k제곱(단, k는 홀수)일 때 바로 이 기법을 쓰도록 만들어져 있다. r^k와 $(n-r)^k$를 짝지으면 $2S$가 n의 배수임을 알 수 있고, r^k와 $(n+1-r)^k$를 짝지으면 $2S$가 $n+1$의 배수이기도 함을 알 수 있다. n과 $n+1$은 공약수가 없으므로, 두 사실을 결합하면 $\frac{1}{2}n(n+1)$로 나누어떨어짐(divisibility)을 얻는다.

풀이

소문항 (i)

$T = 1+2+\cdots+n$이라 하자. 합을 역순으로 쓰면 다음과 같다.

$$T = 1+2+\cdots+(n-1)+n,$$
$$T = n+(n-1)+\cdots+2+1.$$

열끼리 더하면 n개의 열 각각의 합이 $n+1$이므로 $2T = n(n+1)$이고, 따라서 다음을 얻는다.

$$1+2+\cdots+n = \tfrac{1}{2}n(n+1).$$

소문항 (ii)

법(modulo) N으로 계산하면 $N-m \equiv -m$이므로 다음이 성립한다.

$$(N-m)^k + m^k \equiv (-m)^k + m^k = -m^k + m^k = 0 \pmod{N},$$

여기서 k가 홀수이므로 $(-m)^k = -m^k$이다. 따라서 N은 $(N-m)^k + m^k$를 나눈다.

합동식(congruence)을 피하고 싶다면 다음과 같이 할 수도 있다. 홀수 k에 대하여 다음 인수분해(factorisation)가 성립한다.

$$a^k + b^k = (a+b)\left(a^{k-1} - a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 - \cdots + b^{k-1}\right),$$

(부호가 번갈아 바뀌고 괄호 안에 k개의 항이 있으므로 마지막 부호는 $+$이다.) $a = N - m$, $b = m$으로 놓으면 결과는 $a + b = N$에 어떤 정수를 곱한 것이 된다. 여기서는 $m \leq N$일 필요가 전혀 없다. $m > N$이면 $N - m$은 음수이지만 여전히 정수이다.

n 또는 $\frac{1}{2}n$으로 나누어떨어짐

k가 홀수일 때 $S = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$라 하자. 소문항 (i)의 기법을 그대로 따라 한다. $0^k = 0$이므로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$S = \sum_{r=0}^{n} r^k = \sum_{r=0}^{n} (n-r)^k,$$

여기서 두 번째 꼴은 같은 합을 역순으로 쓴 것이다. 두 식을 더하면 다음을 얻는다.

$$2S = \sum_{r=0}^{n} \left[(n-r)^k + r^k\right].$$

$N = n$, $m = r$로 놓고 소문항 (ii)를 적용하면 각 괄호는 n으로 나누어떨어지므로 n은 $2S$를 나눈다. M을 정수로 하여 $2S = nM$이라 하자.

- n이 홀수이면, n은 $2S$를 나누고 2와 공약수가 없으므로 n은 S를 나눈다.
- n이 짝수이면, $\frac{1}{2}n$이 정수이고 $S = \frac{1}{2}n \cdot M$이므로 $\frac{1}{2}n$은 S를 나눈다.

> ? **생각해 보기** n이 짝수일 때 왜 그냥 "n은 S를 나눈다"라고 말할 수 없을까?

"$n \mid 2S$"에서 "$n \mid S$"로 넘어가려면 n이 2와 서로소(coprime)여야 하기 때문이다. 실제로 이는 성립하지 않을 수 있다. $n = 2$, $k = 1$이면 $S = 3$인데, 이는 2의 배수가 아니다. 짝수 n에 대해 말할 수 있는 것은 n의 절반이 S를 나눈다는 것뿐이다.

$1 + 2 + \cdots + n$으로 나누어떨어짐

소문항 (i)에 의해 $\frac{1}{2}n(n+1) \mid S$임을 보이면 된다. 이번에는 항을 다르게 짝짓는다. $1, 2, \ldots, n$을 역순으로 놓으면 r은 $n + 1 - r$로 가므로

$$2S = \sum_{r=1}^{n} \left[(n+1-r)^k + r^k\right],$$

이고, $N = n + 1$, $m = r$로 놓고 소문항 (ii)를 적용하면 각 괄호는 $n + 1$로 나누어떨어진다. 따라서 $n + 1$은 $2S$를 나눈다.

이제 n과 $n+1$은 연속한 정수이므로 1 이외의 공약수가 없다. 그러면 n의 임의의 약수와 $n+1$의 임의의 약수에 대해서도 마찬가지이다. 서로소인 두 정수가 각각 S를 나누면 그 곱도 S를 나눈다는 사실을 이용한다.

- **n이 홀수인 경우.** $n \mid S$임은 이미 보였다. 또 $n+1$은 짝수이고 $n+1 \mid 2S$이므로, $2S = (n+1)L$로 쓰면 $S = \frac{1}{2}(n+1)L$, 즉 $\frac{1}{2}(n+1) \mid S$이다. n과 $\frac{1}{2}(n+1)$은 서로소이므로 그 곱 $\frac{1}{2}n(n+1)$은 S를 나눈다.
- **n이 짝수인 경우.** $\frac{1}{2}n \mid S$임은 이미 보였다. 또 $n+1$은 홀수이고 $2S$를 나누므로, (2와 서로소이므로) S를 나눈다. $\frac{1}{2}n$과 $n+1$은 서로소이므로 그 곱 $\frac{1}{2}n(n+1)$은 S를 나눈다.

두 경우 모두 S는 $\frac{1}{2}n(n+1) = 1+2+\cdots+n$으로 나누어떨어지며, 이것이 증명하려던 것이다.

> **생각해 보기** 나누어떨어짐에 관한 두 사실을 약수끼리 곱하여 하나로 합치는 것이 왜 정당할까?

$\gcd(a,b) = 1$이고 $a \mid S$, $b \mid S$라 하자. $S = aq$로 쓰자. 그러면 $b \mid aq$이고 b는 a와 공통인 소인수가 없으므로, b를 나누는 모든 소수의 거듭제곱은 q를 나누어야 한다. 따라서 $b \mid q$이고 $ab \mid S$이다. 서로소가 아니면 이는 성립하지 않는다. $4 \mid 12$이고 $6 \mid 12$이지만 $24 \nmid 12$이다. 그래서 n이 짝수일 때 예컨대 n과 $n+1$을 짝짓지 않고, n과 $\frac{1}{2}(n+1)$, 또는 $\frac{1}{2}n$과 $n+1$을 조심스럽게 짝지은 것이다.

검산

$k=3, n=4$인 경우를 확인해 보자. $S = 1+8+27+64 = 100$이고, $1+2+3+4 = 10$은 100을 나눈다. 실제로 $1^3+\cdots+n^3 = \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2$이므로 $k=3$이면 결과가 바로 나온다. $k=5, n=5$이면 $S = 1+32+243+1024+3125 = 4425 = 15\times 295$이다. 최종 결과는 모든 $n \le 119$와 모든 홀수 $k \le 15$에 대하여 컴퓨터로도 확인하였다. k가 짝수이면 주장은 성립하지 않는다. $1^2+2^2 = 5$는 3으로 나누어떨어지지 않으며, 이는 k가 홀수라는 조건이 실제로 쓰인다는 것을 보여 준다.

흔한 실수

- n이 짝수일 때 $n \mid 2S$에서 $n \mid S$라고 결론짓는 것.
- 서로소가 아닌 약수를 곱하는 것. 예를 들어 $n(n+1) \mid 2S$라고 주장한 다음 주의 없이 반으로 나누는 것.
- r^k와 $(n-r)^k$를 짝지을 때 $r=0$인 항(또는 $r=n$인 항)을 빠뜨리는 것. $0^k = 0$을 포함하

면 모든 항이 깔끔하게 짝지어진다.

STEP 너머

거듭제곱의 합(power sum) $1^k + \cdots + n^k$는 n에 대한 $k+1$차 다항식(polynomial)이며, 베르누이 수(Bernoulli numbers)를 이용한 파울하버(Faulhaber)의 공식으로 주어진다. k가 홀수이면 이 합을 $\frac{1}{2}n(n+1)$에 대한 다항식으로 쓸 수도 있는데, 이는 이 결과를 다른 각도에서 설명해 준다. 여기서의 논증은 초등 정수론(elementary number theory)의 기본인 합동식과 서로소 다루기를 처음 맛보는 것이다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*은 훌륭한 입문서이다.

풀이

STEP I 2015, 문제 9

역학 • 포물체 운동

STEP I 2015, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/15-s1-q9

핵심 아이디어

"가장 늦게 땅에 떨어진다"는 것은 발사 시각이 아니라 **착지 시각**에 관한 말이다. 나중에 더 낮은 각도로 발사된 총알은 공중에 머무는 시간이 짧으므로, 먼저 발사된 총알보다 먼저 떨어질 수 있다. 착지 시각을 발사 시각과 비행 시간(time of flight)의 합으로 나타내고, 이를 발사 구간 전체에서 최대화한다. 변수로 t 대신 각 α를 쓰면 미분 계산이 깔끔해지고, k에 대한 조건에 따라 최댓값이 정류점(stationary point)에서 생기는지 구간의 끝점에서 생기는지가 결정된다.

풀이

식 세우기

각 총알을 공기 저항 없이 중력만 받으며 자유롭게 운동하는 입자로 보고, 지면 높이에서 발사된다고 하자. 앙각(elevation) α로 발사된 총알의 발사 후 시각 s에서의 연직 위치는 $y = u\sin\alpha\, s - \frac{1}{2}gs^2$이므로, 이 총알은

$$\frac{2u\sin\alpha}{g},$$

후에 지면으로 돌아오고, 그동안 수평으로

$$R(\alpha) = u\cos\alpha \cdot \frac{2u\sin\alpha}{g} = \frac{2u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}.$$

만큼 이동한다. 앙각이 α인 총알은 시각 $t = (\frac{1}{3}\pi - \alpha)/\lambda$에 발사되며, t가 $[0, \frac{\pi}{6\lambda}]$ 전체를 움직일 때 α는 $[\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi]$ 전체를 각 값마다 한 번씩 지난다. 따라서 이 총알의 착지 시각은

$$L(\alpha) = \frac{\frac{1}{3}\pi - \alpha}{\lambda} + \frac{2u\sin\alpha}{g}, \qquad \frac{1}{6}\pi \le \alpha \le \frac{1}{3}\pi.$$

이다. 가장 늦게 떨어지는 총알은 L을 최대로 만드는 총알이다. $k = \dfrac{g}{2\lambda u}$이므로 $\dfrac{2u}{g} = \dfrac{1}{\lambda k}$이고,

$$L(\alpha) = \frac{1}{\lambda}\left(\tfrac{1}{3}\pi - \alpha + \frac{\sin\alpha}{k}\right), \qquad L'(\alpha) = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\cos\alpha}{k} - 1\right) = \frac{\cos\alpha - k}{\lambda k}.$$

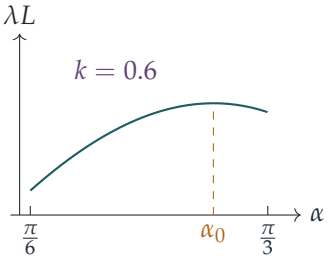
이다. 따라서 L은 $\cos\alpha > k$인 곳에서 증가하고 $\cos\alpha < k$인 곳에서 감소한다. 주어진 구간에서 $\cos\alpha$는 ($\alpha = \frac{1}{6}\pi$에서의) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$부터 ($\alpha = \frac{1}{3}\pi$에서의) $\frac{1}{2}$까지 감소한다.

> **생각해 보기** 왜 α가 클수록 발사 시각이 더 이르며, 이것이 L'의 부호에 왜 중요한가?

총신이 내려가고 있으므로 가파른 각도의 총알이 먼저 발사된다. α를 조금 키우면 발사 시각은 라디안당 $1/\lambda$만큼 앞당겨지지만, 비행 시간은 라디안당 $\frac{2u}{g}\cos\alpha$만큼 늘어난다. $L'(\alpha)$는 이 두 효과의 차이이고, 그 부호가 어느 쪽이 이기는지 알려 준다.

$\frac{1}{2} \le k \le \frac{1}{2}\sqrt{3}$인 경우

이때 k는 $\cos\alpha$의 치역 안에 있으므로, $\cos\alpha_0 = k$를 만족하는 $\alpha_0 \in [\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi]$가 정확히 하나 존재한다. 이 구간에서 cos는 감소함수이므로 $\alpha < \alpha_0$이면 $\cos\alpha > k$이고 $\alpha > \alpha_0$이면 $\cos\alpha < k$이다. 따라서 L은 α_0까지 증가하다가 그 뒤로 감소하며, 앙각 α_0로 발사된 총알이 가장 늦게 떨어진다. ($k = \frac{1}{2}$ 또는 $k = \frac{1}{2}\sqrt{3}$이면 α_0은 끝점이고 L은 단조(monotonic)이지만, 결론은 같다.)



(착지 시각의 변화가 잘 보이도록 세로축을 평행이동하였다.)

$\sin\alpha_0 = \sqrt{1-k^2}$($\alpha_0$이 예각이므로 양수)를 이용하면, 이 총알의 수평 도달 거리(range)는

$$R(\alpha_0) = \frac{2u^2 \sin\alpha_0 \cos\alpha_0}{g} = \frac{2ku^2\sqrt{1-k^2}}{g},$$

이고, 이것이 구하는 거리이다.

$k < \frac{1}{2}$인 경우

이때 구간 안의 모든 α에 대해 $\cos\alpha \ge \frac{1}{2} > k$이므로, 구간 전체에서 $L'(\alpha) > 0$이고 L은 순증가한다. 최댓값은 $\alpha = \frac{1}{3}\pi$에서 생긴다. 즉 **가장 먼저** 발사된 총알이 가장 늦게 떨어진다.

이 총알의 수평 도달 거리는

$$R\left(\tfrac{1}{3}\pi\right) = \frac{2u^2}{g} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}\,u^2}{2g}.$$

이다. 따라서 $k < \frac{1}{2}$이면 마지막 총알은 총에서 $\dfrac{\sqrt{3}\,u^2}{2g}$만큼 떨어진 곳에 착지한다.

(덧붙이면, $k > \frac{1}{2}\sqrt{3}$인 경우 L은 감소하므로 마지막으로 발사된 총알이 가장 늦게 떨어지고, $\sin\frac{\pi}{3} = \sin\frac{2\pi}{3}$이므로 거리는 역시 $\frac{\sqrt{3}\,u^2}{2g}$이다.)

검산

- 연속성: $k = \frac{1}{2}$일 때 첫 번째 공식은 $\dfrac{2 \cdot \frac{1}{2}u^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{g} = \dfrac{\sqrt{3}\,u^2}{2g}$를 주어 $k < \frac{1}{2}$일 때의 답과 일치한다. $k = \frac{1}{2}\sqrt{3}$일 때도 같은 값을 준다.
- $u^2/g = 1$, $k = 0.6$으로 두면 마지막 총알은 $\cos\alpha_0 = 0.6$이고 거리 $2(0.6)(0.8) = 0.96$인 곳에 착지한다. 발사 시각 2만 개를 표본으로 잡고 그 총알의 운동을 수치적으로 단계별 계산한 컴퓨터 검산 결과도 이와 일치하였다.
- 단위: k는 무차원(dimensionless)량이고(g를 속력 나누기 시간의 단위를 갖는 λu로 나눈 것), u^2/g는 길이이다.

흔한 실수

- 착지 시각 $t + \frac{2u\sin\alpha}{g}$ 대신 수평 도달 거리나 비행 시간만을 최대화하는 것.
- 마지막으로 발사된 총알이 가장 늦게 떨어진다고 가정하는 것.
- α가 커질 때 t가 작아진다는 사실을 잊어 L'의 부호를 잘못 구하는 것.

STEP 너머

닫힌 구간에서 함수를 최대화하려면 구간 내부의 정류점과 끝점을 비교해야 하며, 여기서는 매개변수가 어느 쪽이 이길지를 결정한다. 이처럼 "어떤 제약 조건이 활성화되는가"가 바뀌는 현상은 제약 최적화(constrained optimisation)의 출발점이며, 대학 1학년 응용수학 방법론 과목에서 만나게 된다. 이런 흐름의 역학을 더 접하고 싶다면 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 보라.

풀이

STEP I 2015, 문제 10

역학 • 상대 속도

> **STEP I 2015, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/15-s1-q10

핵심 아이디어

면에 닿는 비는 선속(flux)이다. 단위 시간당 양은 (단위 부피당 빗방울 수) × (넓이) × (면에 수직인 빗방울 속도 성분)이다. 버스가 움직일 때는 버스의 기준틀(frame)에서 생각하는데, 이때 빗방울 속도의 수평 성분만 바뀐다. 그런 다음 전체 이동에 대해 이 비율에 이동 시간 D/u를 곱하고 u에 대해 최소화한다. 절댓값(modulus) 때문에 버스가 비의 수평 운동보다 느린지 빠른지에 따라 두 경우로 나뉜다.

풀이

비가 버스에 닿는 비율

비를 공기 중에 고르게 퍼져 있는 빗방울로 모형화하고, 단위 부피당 빗방울이 n개이며 모두 같은 속도로 움직인다고 하자. 버스의 너비를 b라 하자. 북쪽을 수평 방향의 양의 방향으로 잡는다. 남쪽에서 오는 비는 북쪽으로 움직이므로, 그 속도는 다음과 같다.

$$\text{수평 성분} v\cos\theta \text{ (북쪽)}, \qquad \text{수직 성분} v\sin\theta \text{ (아래쪽)}.$$

비에는 동서 방향 성분이 없으므로 버스의 긴 두 옆면은 젖지 않는다.

$u = 0$인 경우. 시간 δt 동안 지붕에 닿는 빗방울은 지붕 위에 서 있는, 수직 높이가 $v\sin\theta\,\delta t$인 비스듬한 각기둥(prism) 안의 빗방울이다. 그 부피는 $ab\,v\sin\theta\,\delta t$이다. 뒷면(남쪽 면, 넓이 hb)에 닿는 빗방울은 그 뒤에 있는 수평 깊이 $v\cos\theta\,\delta t$인 각기둥을 채운다. 북쪽을 향한 앞면은 비를 맞지 않는다. 따라서 비율은 다음과 같다.

$$nb\left(h\,v\cos\theta + a\,v\sin\theta\right).$$

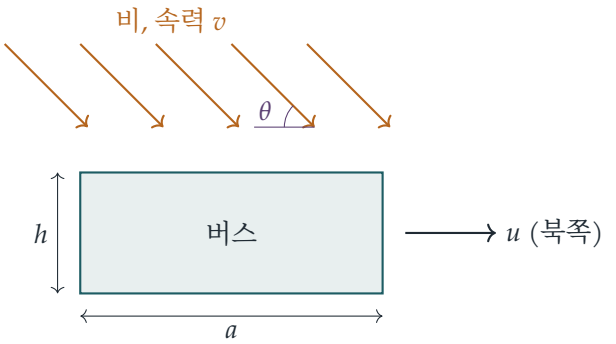
$u > 0$인 경우. 일정한 속도로 움직이는 버스의 기준틀에서 비의 속도는 다음과 같다.

$$(v\cos\theta - u) \text{ 북쪽}, \qquad v\sin\theta \text{ 아래쪽}.$$

이 기준틀에서 버스는 정지해 있으므로, 위의 논증에서 $v\cos\theta$를 $v\cos\theta - u$로 바꾸면 그대로 적용된다. 수직 성분은 변하지 않으므로 지붕은 여전히 비율 $nab\,v\sin\theta$로 비를 받는다. $v\cos\theta > u$이면 비가 여전히 버스를 따라잡아 비율 $nhb\,(v\cos\theta - u)$로 뒷면에 닿는다. $v\cos\theta < u$이면 버스가 비 속으로 달려 들어가므로, 이제 비는 비율 $nhb\,(u - v\cos\theta)$로 앞면에 닿는다. 어느 경우든 전체 비율은

$$nb\left(h\,|v\cos\theta - u| + a\,v\sin\theta\right),$$

이고, 이는 요구한 대로 $h|v\cos\theta - u| + av\sin\theta$에 비례한다.



속력 정하기

이동 거리를 D라 하자. 걸리는 시간은 D/u이므로, 받는 비의 총량은 다음에 비례한다.

$$R(u) = \frac{D}{u}\left(h|v\cos\theta - u| + av\sin\theta\right), \qquad 0 < u \le w.$$

$c = v\cos\theta$라 쓰고 절댓값을 없애자.

$u \le c$이면:

$$R(u) = D\left(\frac{hv\cos\theta + av\sin\theta}{u} - h\right).$$

분자가 양수이므로 R는 $0 < u \le c$에서 순감소(strictly decreasing)한다.

$u \ge c$이면:

$$R(u) = D\left(h + \frac{v\,(a\sin\theta - h\cos\theta)}{u}\right).$$

이것이 증가하는지 감소하는지는 오직 $a\sin\theta - h\cos\theta$의 부호에 달려 있다.

? **생각해 보기** 왜 더 빨리 가는 것이 항상 더 좋은 것은 아닐까?

더 빨리 가면 이동 시간이 짧아지므로 지붕에는 항상 도움이 된다. 지붕이 받는 몫은 $Dav\sin\theta/u$이다. 그러나 $u > c$가 되면 버스가 비 속으로 달려 들어가고, 앞면이 받는 몫 $Dh(u-c)/u$는 u와 함께 커진다. 어느 효과가 이기는지는 $a\sin\theta - h\cos\theta$의 부호가 알려준다.

두 식은 $u = c$에서 일치하므로 R는 연속(continuous)이다. 이제 다음을 얻는다.

- $w < v\cos\theta$이면 허용되는 모든 속력이 $u \le c$를 만족하고, 여기서 R는 감소한다. 따라서 최선의 선택은 $u = w$이다.
- $a\sin\theta > h\cos\theta$이면 R는 $u \le c$에서 감소하고 $u \ge c$에서도 감소한다. 따라서 R는 $(0, w]$ 전체에서 감소하고, 이번에도 최선의 선택은 $u = w$이다.

이로써 첫 번째 주장이 증명된다.

$w > v\cos\theta$**이고** $a\sin\theta < h\cos\theta$**이면**: R는 $(0, c]$에서 감소하고 $[c, w]$에서 순증가한다. 따라서 최솟값은

$$u = v\cos\theta,$$

에서 나타나며, 이는 정확히 비의 수평 속력으로 달린다는 뜻이다. 그러면 버스에 대해 비가 수직으로 떨어지므로 지붕만 젖고, 총량은 (우리 단위로) $R(c) = Da\tan\theta$이다.

$a\sin\theta = h\cos\theta$**이면**: $u \ge c$에서 $R(u) = Dh$이고, 이는 u에 의존하지 않는다. $w \ge v\cos\theta$이면 $v\cos\theta$와 w 사이의 어떤 속력이든 똑같이 좋다. $v\cos\theta$보다 낮은 속력은 모두 더 나쁘다. ($w < v\cos\theta$이면 첫 번째 경우가 적용되어 $u = w$이다.) 물리적으로 보면, $u = c$를 넘어서면 더 빨리 갈 때 지붕에서 줄어드는 비의 양과 앞면에서 늘어나는 비의 양이 정확히 같다. 이 조건은 $\tan\theta = h/a$라는 뜻이다. 즉 길에서 보면 비가 버스 옆면의 대각선과 평행하게 떨어진다.

돌아오는 길

이제 버스는 남쪽으로, 비를 마주하며 달린다. 북쪽을 양으로 잡은 우리 규약에서 버스의 속도는 $-u$이므로, 비의 상대 수평 속도는 $v\cos\theta + u > 0$이고 비는 항상 앞면에 닿는다. 총량은 다음에 비례한다.

$$R(u) = \frac{D}{u}\Big(h(v\cos\theta + u) + av\sin\theta\Big) = D\left(h + \frac{v\,(h\cos\theta + a\sin\theta)}{u}\right),$$

이는 u에 대해 순감소한다. 따라서 돌아오는 길에는 a, h, θ의 값과 관계없이 운전사는 가능한 한 빨리, 즉 $u = w$로 달려야 한다.

검산

- $a = 1.3$, $h = 0.8$, $v = 2$, $\theta = 0.6$, $u = 0.7$일 때 공식은 (단위 빗방울 밀도와 단위 너비당) 비율 2.229를 준다. 무작위로 배치한 빗방울이 버스의 단면을 지나가는 컴퓨터 시뮬레이션은 2.232를 주었다. $u = 0$일 때, $u > v\cos\theta$일 때, 그리고 u가 음수일 때(돌아오는 길)에도 똑같이 잘 일치했다.
- $\theta \to \frac{1}{2}\pi$(비가 수직으로 떨어지는 경우)로 하자. 그러면 $a\sin\theta > h\cos\theta$이므로 최대 속력으로 달려야 한다. 이는 타당하다. 지붕만 젖고, 비를 맞는 시간이 짧을수록 받는 비도 적기 때문이다.
- $\tan\theta = h/a$인 등호 경우에, 총량 Dh는 예측한 대로 $u = v\cos\theta$, $1.5v\cos\theta$, $3v\cos\theta$에서 모두 같다.

흔한 실수

- **총량** 대신 **비율**을 최소화하는 것. 비율에 이동 시간 D/u를 곱해야 한다.
- $u > v\cos\theta$일 때 비가 뒷면이 아니라 앞면에 닿는다는 사실을 잊는 것. 절댓값이 필요한 이유가 바로 이것이다.
- 돌아오는 길에 다시 $|v\cos\theta - u|$를 쓰는 것. 이제 상대 속력은 $v\cos\theta + u$이다.

STEP 너머

"밀도 × 넓이 × 법선 속도"라는 계산은 면을 지나는 벡터장(vector field)의 선속이다. 벡터 미적분학에서 이것은 면적분(surface integral) $\iint \rho\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S$가 되며, 유체역학(fluid dynamics)과 전자기학(electromagnetism)에서 보존 법칙(conservation law)의 출발점이다. 버스의 기준틀로 바꾸는 것은 갈릴레이 변환(Galilean transformation)으로, 상대성 이론(relativity)의 고전적 선구이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 상대 운동과 이런 종류의 선속 논증을 모두 다룬다.

풀이

STEP I 2015, 문제 11

역학 • 마찰과 모멘트

> **STEP I 2015, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/15-s1-q11

핵심 아이디어

원기둥에 작용하는 수직항력(normal reaction)은 모두 반지름 방향으로 작용하므로 중심을 지난다. 따라서 각 중심에 대한 모멘트(moment)를 취하면 무게와 모든 수직항력이 사라지고, 중심에서 모두 같은 거리에 작용하는 마찰력(frictional force)만 남는다. 그러면 소문항 (i)은 거의 공짜로 얻어진다. 소문항 (ii)에서는 각 원기둥에 대해 경사면 방향으로 힘을 분해한 다음, 부등식이 다루는 두 접촉점에 마찰 법칙을 적용한다.

풀이

두 원기둥을 반지름이 r인 균일한 강체(rigid body) 원기둥으로 모형화한다. 두 원기둥은 모두 경사면에 닿아 있고, 위쪽 원기둥이 경사면을 따라 더 높은 곳에 있다. 반지름이 같으므로 두 중심을 잇는 선은 경사면과 평행하고, 따라서 두 원기둥이 닿는 점은 경사면으로부터 높이 r인 곳, 즉 두 중심과 같은 높이에 있다. 두 원기둥 사이의 수직력은 중심을 잇는 선을 따라(경사면과 평행하게) 작용하고, 두 원기둥 사이의 마찰력은 경사면에 수직으로 작용한다.

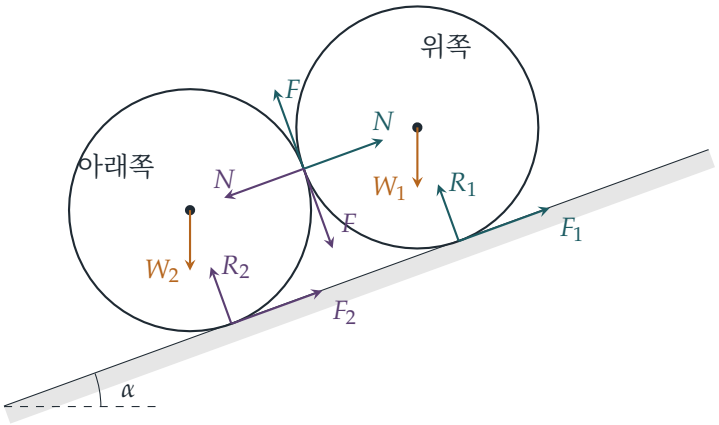
경사면을 따라 올라가는 방향을 x 방향, 경사면에 수직이고 경사면에서 멀어지는 방향을 y 방향으로 잡는다. 다음과 같이 놓자.

- R_1, R_2는 경사면이 위쪽 원기둥과 아래쪽 원기둥에 작용하는 수직항력이다.
- F_1, F_2는 경사면이 위쪽 원기둥과 아래쪽 원기둥에 작용하는 마찰력으로, 경사면을 따라 **올라가는** 방향으로 잰다(부호를 허용하므로, 값이 음수이면 경사면을 따라 내려가는 방향을 뜻한다).
- N은 아래쪽 원기둥이 위쪽 원기둥에 작용하는 수직력으로, 경사면을 따라 올라가는 방

향으로 작용한다.

- F는 아래쪽 원기둥이 위쪽 원기둥에 작용하는 마찰력으로, 경사면에서 **멀어지는** 방향으로 잰다(역시 부호를 허용한다).

뉴턴 제3법칙(Newton's third law)에 의해 위쪽 원기둥은 아래쪽 원기둥에 경사면을 따라 내려가는 방향으로 N을, 경사면을 향하는 방향으로 F를 작용한다.



위쪽 원기둥에 작용하는 힘은 청록색으로, 아래쪽 원기둥에 작용하는 힘은 자주색으로 나타내었다.

소문항 (i)

위쪽 원기둥의 중심에 대한 모멘트를 취한다. 무게는 중심에 작용하고, R_1과 N은 모두 반지름 방향으로 작용하므로 이들 중 어느 것도 모멘트를 갖지 않는다. 남는 것은 두 마찰력뿐이며, 각각 중심에서 거리 r인 곳에서 접선 방향으로 작용한다.

- F_1은 원기둥의 가장 낮은 점에서 경사면을 따라 올라가는 방향으로 작용하여 (그림에서) 반시계 방향으로 크기 rF_1의 모멘트를 준다.
- F는 중심보다 경사면 아래쪽에 있는 접촉점에서 경사면으로부터 멀어지는 방향으로 작용하여 시계 방향으로 크기 rF의 모멘트를 준다.

평형(equilibrium)이려면 이 둘이 균형을 이루어야 하므로 $rF_1 = rF$, 즉 $F_1 = F$이다.

? 생각해 보기 중심에 대한 모멘트를 취할 때 왜 수직항력을 무시할 수 있을까?

원에 작용하는 수직항력은 접촉점에서의 접선에 수직이므로 반지름 위에 놓이고, 그 작용선은 중심을 지난다. 따라서 중심에 대한 모멘트는 0이다. 바로 이 때문에 여기서는 중심에 대한 모멘트를 취하는 것이 올바른 선택이다.

아래쪽 원기둥에 대해서도 마찬가지로, 모멘트를 갖는 것은 F_2(가장 낮은 점에서 경사면을 따라 올라가는 방향, 반시계 방향 모멘트 rF_2)와, 중심보다 경사면 위쪽에 있는 접촉점에서 경사면을 향해 작용하는 마찰력 F(시계 방향 모멘트 rF)뿐이다. 따라서 $F_2 = F$이다.

그러므로 부호를 포함한 양으로서 $F = F_1 = F_2$이고, 특히 그 크기가 같으므로 증명이 끝났다.

소문항 (ii)

각 원기둥에 대해 경사면과 평행한 방향으로 힘을 분해하면

$$\begin{aligned} \text{위쪽:} \quad & F_1 + N = W_1 \sin\alpha, \\ \text{아래쪽:} \quad & F_2 = N + W_2 \sin\alpha. \end{aligned}$$

두 식을 더하고 $F_1 = F_2 = F$를 이용하면

$$2F = (W_1 + W_2)\sin\alpha, \qquad \text{따라서} \qquad F = \tfrac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha > 0,$$

이며, 이로부터 모든 마찰력이 그림에 그린 방향으로 작용함도 알 수 있다. 다시 대입하면

$$N = W_1 \sin\alpha - F = \tfrac{1}{2}(W_1 - W_2)\sin\alpha,$$

이고, $W_1 > W_2$이고 $\alpha > 0$이므로 이 값은 양수이다. 즉 두 원기둥은 실제로 서로를 누르고 있다. 위쪽 원기둥에 대해 경사면에 수직인 방향으로 힘을 분해하면

$$R_1 + F = W_1 \cos\alpha, \qquad \text{따라서} \qquad R_1 = W_1 \cos\alpha - F.$$

? 생각해 보기 실제로 필요한 마찰 부등식은 어느 것일까?

평형 상태에서 각 접촉점의 마찰력은 그곳의 마찰 계수(coefficient of friction)와 수직항력의 곱을 넘을 수 없다. 첫 번째 결과는 두 원기둥 사이의 접촉에서, 두 번째 결과는 위쪽 원기둥과 경사면 사이의 접촉에서 나온다. (아래쪽 접촉에서는 μ_2가 들어간 세 번째 조건이 나오지만, 이것은 묻지 않았다.)

두 원기둥 사이. $F \le \mu N$이어야 하므로

$$\tfrac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha \le \mu \cdot \tfrac{1}{2}(W_1 - W_2)\sin\alpha.$$

양수인 $\frac{1}{2}(W_1 - W_2)\sin\alpha$로 나누면

$$\mu \ge \frac{W_1 + W_2}{W_1 - W_2},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

위쪽 원기둥과 경사면 사이. $F \le \mu_1 R_1 = \mu_1(W_1 \cos\alpha - F)$이어야 하므로

$$(1+\mu_1)F \le \mu_1 W_1 \cos\alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}(1+\mu_1)(W_1+W_2)\sin\alpha \le \mu_1 W_1 \cos\alpha.$$

경사면(inclined plane)의 각은 $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$를 만족하므로 $\cos\alpha > 0$이고, $(1+\mu_1)(W_1+W_2) > 0$이다. 이 둘로 나누면

$$\tan\alpha \le \frac{2\mu_1 W_1}{(1+\mu_1)(W_1+W_2)},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. ($\mu_1 R_1 \ge F > 0$이므로 이 조건은 $R_1 > 0$도 보장한다. 즉 위쪽 원기둥은 경사면에서 떨어지지 않는다.)

검산

- $W_1 = 3, W_2 = 1$이면 $\mu \ge 2$이어야 하고, 여기에 $\mu_1 = 1$까지 주어지면 $\tan\alpha \le \frac{3}{4}$이어야 한다. 이런 값을 여섯 개의 평형 방정식(원기둥마다 두 개의 분해식과 하나의 모멘트 방정식)에 대입하여 직접 풀면 위와 같은 F, N, R_1을 얻는다.
- $W_1 \to W_2$이면 μ의 하한은 무한대로 간다. 이는 타당하다. 이때 $N \to 0$이므로 두 원기둥은 서로를 거의 누르지 않는데, 그 사이의 마찰력은 여전히 $\frac{1}{2}(W_1+W_2)\sin\alpha$이어야 하기 때문이다.
- $\mu_1 \to \infty$이면 조건은 $\tan\alpha \le 2W_1/(W_1+W_2)$가 되는데, 이것은 정확히 $R_1 \ge 0$이라는 조건이다. 위쪽 원기둥이 떠오르기 시작하면 아무리 거친 경사면이라도 도움이 되지 않는다.

흔한 실수

- 두 원기둥 사이의 마찰력이 경사면을 따라 작용한다고 보는 것. 마찰력은 접촉점에서의 공통 접선을 따라 작용하며, 여기서는 그 방향이 경사면에 수직이다.
- 모멘트 방정식을 잊는 것. 힘의 분해만으로는 미지수 여섯 개에 대한 방정식 네 개만 얻는다. 마찰력을 결정하는 것은 두 모멘트 방정식이다.
- 수직항력 R_1에서 F를 빠뜨리는 것. 아래쪽 원기둥의 마찰력이 위쪽 원기둥을 경사면에서 멀어지는 방향으로 밀기 때문에 R_1은 $W_1\cos\alpha$보다 작다.

STEP 너머

강체가 평형 상태에 있으려면 합력(resultant force)과 합모멘트(resultant moment)가 모두 0이어야 하며, 모멘트를 취할 점을 영리하게 고르는 것이 강체 정역학(rigid-body statics)의

핵심 기술이다. 이 문제에서는 방정식의 개수가 미지수의 개수와 정확히 같았다. 미지수가 방정식보다 많으면 그 문제는 **정역학적으로 부정정**(*statically indeterminate*)이며, 풀이를 마치려면 물체가 어떻게 변형되는지까지 모형화해야 한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 강체 정역학과 돌림힘(torque)을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP I 2015, 문제 12

확률과 통계 • 푸아송 분포의 솎아내기

STEP I 2015, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/15-s1-q12

핵심 아이디어

도착한 인원수를 조건으로 두면 수술이 필요한 사람의 수는 이항분포(binomial distribution)를 따르는 개수가 된다. 그다음 가능한 모든 도착 인원수에 대하여 더하면(전확률 법칙(law of total probability)) 수술이 필요한 사람 수의 분포를 얻고, 이 합은 지수함수의 급수(exponential series)로 정리된다. 마지막 소문항에서 핵심이 되는 사실은 평균이 같은 두 독립인 푸아송(Poisson) 개수를 그 합을 조건으로 두면, 둘 사이의 나뉨이 이항분포를 따른다는 것이다.

풀이

어느 날 도착하는 부상자의 수를 X라 하고, 그중 수술이 필요한 사람의 수를 Y라 하자.

소문항 (i)

$X = n$일 때, n명의 부상자 각각은 다른 사람과 독립적으로 확률 $\frac{1}{4}$로 수술이 필요하다. 따라서 조건부로 $Y \sim \mathrm{B}(n, \frac{1}{4})$이고, $0 \le r \le n$에 대하여

$$\mathrm{P}(Y = r \mid X = n) = \binom{n}{r}\left(\frac{1}{4}\right)^r\left(\frac{3}{4}\right)^{n-r} = \binom{n}{r}\frac{3^{n-r}}{4^n}.$$

이다. ($r > n$이면 확률은 0이다.)

소문항 (ii)

$r \geq 0$을 고정하자. $Y = r$는 $X \geq r$일 때만 일어날 수 있으므로, 전확률 법칙에 의해

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(Y = r) &= \sum_{n=r}^{\infty} \mathrm{P}(X = n)\,\mathrm{P}(Y = r \mid X = n) \\ &= \sum_{n=r}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-8}8^n}{n!} \cdot \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \left(\frac{1}{4}\right)^r \left(\frac{3}{4}\right)^{n-r}. \end{aligned}$$

이다. $n!$은 약분된다. 이제 $8^n = 8^r \cdot 8^{n-r}$로 나누면 $8^r(\frac{1}{4})^r = 2^r$이고 $8^{n-r}(\frac{3}{4})^{n-r} = 6^{n-r}$이므로

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(Y = r) &= \frac{\mathrm{e}^{-8}\,2^r}{r!} \sum_{n=r}^{\infty} \frac{6^{n-r}}{(n-r)!} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-8}\,2^r}{r!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{6^k}{k!} \qquad (k = n - r) \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-8}\,2^r}{r!}\,\mathrm{e}^6 = \frac{\mathrm{e}^{-2}\,2^r}{r!}. \end{aligned}$$

이다. 이는 모든 $r = 0, 1, 2, \ldots$에 대하여 성립하므로, 하루에 수술이 필요한 사람의 수는 평균이 $8 \times \frac{1}{4} = 2$인 푸아송 분포를 따른다.

> **생각해 보기** e^6은 어디에서 나왔는가?

r에만 의존하는 것을 모두 합 밖으로 꺼내고 나면, 남는 것은 $\sum 6^k/k!$, 곧 e^6의 지수함수 급수이다. 8^n을 $8^r \cdot 8^{n-r}$로 나누는 것이 바로 남은 합이 $n - r$에만 의존하도록 만드는 단계이다.

소문항 (iii)

월요일과 화요일에 수술이 필요한 사람의 수를 각각 M, T라 하자. 소문항 (ii)에 의해 각각은 $\mathrm{Po}(2)$를 따른다. 서로 다른 날의 도착은 독립이고 부상자들은 서로 독립적으로 수술이 필요하므로, M과 T는 독립이다. 그러면

$$\mathrm{P}(M = 8 \mid M + T = 12) = \frac{\mathrm{P}(M = 8,\ T = 4)}{\mathrm{P}(M + T = 12)}.$$

이다. 독립성에 의해 분자는

$$\mathrm{P}(M = 8)\,\mathrm{P}(T = 4) = \frac{\mathrm{e}^{-2}2^8}{8!} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-2}2^4}{4!} = \frac{\mathrm{e}^{-4}\,2^{12}}{8!\,4!}.$$

이다. 분모의 경우, 독립인 푸아송 확률변수들의 합은 평균을 더한 푸아송 분포를 따르므로 $M + T \sim \mathrm{Po}(4)$이다. 이 사실을 인용하고 싶지 않다면 직접 유도할 수 있다.

$$\mathrm{P}(M + T = 12) = \sum_{m=0}^{12} \frac{\mathrm{e}^{-2}2^m}{m!} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-2}2^{12-m}}{(12-m)!} = \frac{\mathrm{e}^{-4}2^{12}}{12!} \sum_{m=0}^{12} \binom{12}{m} = \frac{\mathrm{e}^{-4}\,4^{12}}{12!},$$

여기서 $\sum_m \binom{12}{m} = 2^{12}$을 이용하였다. 나누면

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(M = 8 \mid M + T = 12) &= \frac{\mathrm{e}^{-4}\,2^{12}}{8!\,4!} \cdot \frac{12!}{\mathrm{e}^{-4}\,4^{12}} \\ &= \binom{12}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{12} = \frac{495}{4096}.\end{aligned}$$

이다. $495 = 3^2 \cdot 5 \cdot 11$은 홀수이고 $4096 = 2^{12}$이므로 이 분수는 기약분수(lowest terms)이다. 따라서 구하는 확률은 $\dfrac{495}{4096}$이다.

? 생각해 보기 답이 왜 이항분포의 확률처럼 생겼는가?

합이 12라는 조건 아래에서, 두 날의 평균이 같으므로 12건의 수술 사례 각각은 월요일에서 왔을 가능성과 화요일에서 왔을 가능성이 같다. 따라서 월요일의 개수는 $\mathrm{B}(12, \frac{1}{2})$를 따른다. 원래의 평균 8이 완전히 사라졌다는 점에 주목하자.

검산

- 소문항 (ii)의 평균은 $\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}\big(\mathrm{E}(Y \mid X)\big) = \mathrm{E}(X/4) = 2$와 일치한다.
- $r = 0, \ldots, 14$에 대하여 소문항 (ii)의 급수를 수치적으로 더하면 반올림 오차 범위 안에서 $\mathrm{e}^{-2}2^r/r!$이 다시 나온다. 예를 들어 $\mathrm{P}(Y = 0) = \sum_n \mathrm{e}^{-8}8^n(\frac{3}{4})^n/n! = \mathrm{e}^{-8}\mathrm{e}^{6}$이다.
- $m = 0, \ldots, 12$에 대한 조건부 확률 $\binom{12}{m}/2^{12}$의 합은 1이고, $495/4096 \approx 0.121$이다. 전체 모형(푸아송 도착 후 각자 확률 $\frac{1}{4}$로 수술)을 컴퓨터로 시뮬레이션한 결과도 이 값과 부합하였다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)의 합을 $n = r$이 아니라 $n = 0$부터 시작하는 것: r명보다 적게 도착하면 r명이 수술을 받아야 할 수는 없다.
- 소문항 (iii)에서 각 날에 대해 $\mathrm{Po}(8)$을 사용하는 것. 조건은 수술 사례에 대한 것이므로 관련된 평균은 2이다. (여기서는 어차피 평균이 약분되지만, 풀이 과정은 올바라야 한다.)
- 기약분수로 나타내라고 했는데 답을 $\binom{12}{8}/2^{12}$이나 $1980/16384$로 남겨 두는 것.

STEP 너머

소문항 (ii)는 **솎아내기**(*thinning*)라고 불린다. 푸아송 과정(Poisson process)의 각 점을 독립적으로 확률 p로 남기면, 남은 점들은 비율이 p배가 된 푸아송 과정을 이루며, 놀랍게도

버려진 점들과 독립이다. 소문항 (iii)은 이것의 역이다. 합을 조건으로 두면 독립인 푸아송 개수들은 다항분포(multinomial distribution)에 따라 나뉜다. 이 두 사실은 푸아송 과정 이론의 토대가 되며, 이는 대학의 첫 확률론 강의에서 만나게 된다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문서)이 둘 다 다룬다.

풀이

STEP I 2015, 문제 13

확률과 통계 • 조건부 확률

STEP I 2015, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/15-s1-q13

핵심 아이디어

첫 번째 6이 나오는 시점을 조건(conditioning)으로 삼는다. 첫 번째 6이 n번째 던지기에서 나온다는 것을 알면, 그 앞의 $n-1$번의 던지기는 각각 독립적으로 $1,\dots,5$ 중 어느 것이든 같은 확률로 나오므로, 첫 번째 6 이전의 4와 5에 관한 질문은 평범한 이항분포(binomial distribution) 문제가 된다. 이를 n에 대해 더하면 등비급수(geometric series)와 그 도함수가 나오는데, 바로 이 지점에서 힌트에 주어진 이항전개(binomial expansion)가 쓰인다.

풀이

각 던지기는 독립이고, 각 면이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$이다. 첫 번째 6이 n번째 던지기에서 나오는 사건을 A라 하고 $p_n = \mathrm{P}(A)$라 쓴다.

소문항 (i)

첫 번째 6이 n번째 던지기에서 나오는 것은 $1,\dots,n-1$번째 던지기가 모두 6이 아니고 n번째 던지기가 6일 때와 정확히 같다. 독립성(independence)에 의해

$$\mathrm{P}(A) = p_n = \left(\tfrac{5}{6}\right)^{n-1}\tfrac{1}{6}, \qquad n = 1,2,3,\dots$$

조건부에 관한 사실. A가 주어지면, $1,\dots,n-1$번째 던지기 각각에 대해 알 수 있는 것은 "6이 아니다"라는 것뿐이다. 주사위가 공정하고 던지기가 독립이므로, 이 $n-1$번의 던지기는 서로 독립이고 각각 $\{1,2,3,4,5\}$ 위에서 균등분포(uniform distribution)를 따른다. 이후의 모든 소문항에서 이 사실과 함께 전확률 법칙(law of total probability) $\mathrm{P}(X) = \sum_n \mathrm{P}(X \mid A)\, p_n$을 사용한다.

소문항 (ii)

첫 번째 6 이전에 5가 한 번도 나오지 않을 확률 $\mathrm{P}(B')$를 구하는 것이 더 쉽다. A가 주어지면 앞의 $n-1$번의 던지기 각각이 5를 피할 확률은 $\frac{4}{5}$이므로

$$\mathrm{P}(B') = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{4}{5}\right)^{n-1} \left(\tfrac{5}{6}\right)^{n-1} \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{2}{3}\right)^{n-1} = \tfrac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \tfrac{1}{2}.$$

따라서 $\mathrm{P}(B) = \frac{1}{2}$이다.

소문항 (iii)

포함배제의 원리(inclusion–exclusion principle)를 여사건 꼴로 쓰면

$$\mathrm{P}(B \cap C) = 1 - \mathrm{P}(B') - \mathrm{P}(C') + \mathrm{P}(B' \cap C').$$

면 4와 5 사이의 대칭성(symmetry)에 의해 $\mathrm{P}(C') = \mathrm{P}(B') = \frac{1}{2}$이다. $B' \cap C'$의 경우, A가 주어지면 앞의 각 던지기는 4와 5를 모두 피해야 하고 그 확률은 $\frac{3}{5}$이다.

$$\mathrm{P}(B' \cap C') = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{3}{5}\right)^{n-1} \left(\tfrac{5}{6}\right)^{n-1} \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{3}.$$

그러므로 $\mathrm{P}(B \cap C) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$이다.

소문항 (iv)

A가 주어지면 앞의 $n-1$번의 던지기 중 5가 나오는 횟수는 $\mathrm{B}(n-1, \frac{1}{5})$를 따르므로

$$\mathrm{P}(D \mid A) = (n-1)\tfrac{1}{5} \left(\tfrac{4}{5}\right)^{n-2} \qquad (n \geq 2),$$

이고 $n = 1$일 때는 0이다. 따라서

$$\mathrm{P}(D) = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)\tfrac{1}{5} \left(\tfrac{4}{5}\right)^{n-2} \left(\tfrac{5}{6}\right)^{n-1} \tfrac{1}{6}.$$

$\frac{5}{6}$ 하나를 밖으로 꺼내고 나머지를 짝지으면 $\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$이고 $\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{2}{3}$이다. $m = n-1$로 놓으면

$$\mathrm{P}(D) = \tfrac{1}{36} \sum_{m=1}^{\infty} m \left(\tfrac{2}{3}\right)^{m-1} = \tfrac{1}{36} \left(1 - \tfrac{2}{3}\right)^{-2} = \tfrac{9}{36} = \tfrac{1}{4},$$

이며, 여기서 지수가 -2인 주어진 전개 $(1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots$를 사용하였다.

? **생각해 보기** 하나 또는 둘 다 일어나는 모든 경우를 나열하지 않고 $\mathrm{P}(D \cup E)$를 어떻게 구할 수 있을까?

소문항 (v)

$\mathrm{P}(D\cup E)=\mathrm{P}(D)+\mathrm{P}(E)-\mathrm{P}(D\cap E)$를 이용하고, 4–5 대칭성에 의해 $\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(D)=\frac{1}{4}$이다. 따라서 $\mathrm{P}(D\cap E)$만 구하면 된다.

A가 주어졌을 때, 앞의 $n-1$번의 던지기 중 4가 정확히 한 번, 5가 정확히 한 번 나온다는 것은 어느 던지기가 5이고 어느 던지기가 4인지를 고르고($(n-1)(n-2)$가지의 순서 있는 선택), 나머지 $n-3$번의 던지기가 모두 $\{1,2,3\}$에 속한다는 뜻이다.

$$\mathrm{P}(D\cap E\mid A)=(n-1)(n-2)\left(\tfrac{1}{5}\right)^2\left(\tfrac{3}{5}\right)^{n-3}\qquad(n\geq 3).$$

그러면

$$\mathrm{P}(D\cap E)=\sum_{n=3}^{\infty}(n-1)(n-2)\tfrac{1}{25}\left(\tfrac{3}{5}\right)^{n-3}\left(\tfrac{5}{6}\right)^{n-1}\tfrac{1}{6}.$$

$\left(\frac{5}{6}\right)^2$을 밖으로 꺼내면 상수 $\frac{1}{25}\cdot\frac{25}{36}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$이 나오고, $\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{6}=\frac{1}{2}$이다. $k=n-3$으로 놓으면

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(D\cap E)&=\tfrac{1}{216}\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)\left(\tfrac{1}{2}\right)^k=\tfrac{2}{216}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+2)!}{k!\,2!}\left(\tfrac{1}{2}\right)^k\\&=\tfrac{1}{108}\left(1-\tfrac{1}{2}\right)^{-3}=\tfrac{8}{108}=\tfrac{2}{27},\end{aligned}$$

이며, 여기서 지수가 -3인 주어진 전개를 사용하였고 그 x^k의 계수는 $\frac{(k+2)!}{k!\,2!}$이다. 그러므로

$$\mathrm{P}(D\cup E)=\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}-\tfrac{2}{27}=\tfrac{27-4}{54}=\tfrac{23}{54}.$$

검산

모든 답을 더 매끄럽게 볼 수 있는 방법이 있으며, 이는 훌륭한 검산이 된다. 1, 2, 3이 나온 던지기(그리고 (ii)와 (iv)에서는 4가 나온 던지기도)는 모두 무시한다. 이들은 사건에 전혀 영향을 주지 않는다. 남은 관련 있는 던지기들은 각 관련 면이 같은 확률로 나오는 수열을 이룬다.

- (ii): 5 또는 6이 나오는 첫 번째 던지기는 둘 중 어느 것이든 같은 확률이므로 $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$이다.
- (iii): 4, 5, 6 가운데 세 면 각각이 처음 나타나는 순서에서 마지막이 될 확률은 모두 같고, $B\cap C$는 6이 마지막이라는 뜻이므로 $\frac{1}{3}$이다.
- (iv): D는 5-또는-6 수열이 5, 6으로 시작한다는 뜻이므로 확률은 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$이다.
- (v): $D\cap E$는 4-5-6 수열이 4, 5, 6 또는 5, 4, 6으로 시작한다는 뜻이므로 확률은 $2\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{2}{27}$이다.

다섯 개의 답 모두 3×10^5개의 던지기 수열에 대한 컴퓨터 모의실험(simulation)으로도 확인하였으며, 그 결과 $\mathrm{P}(D \cup E) \approx 0.426$을 얻어 $\frac{23}{54} \approx 0.4259$와 일치하였다.

흔한 실수

- 앞의 던지기들을 여섯 면 전체 위의 균등분포로 취급하는 것: A가 주어지면 이들은 6일 수 없으므로, 5가 나올 확률은 각각 $\frac{1}{6}$이 아니라 $\frac{1}{5}$이다.
- (v)에서 인수 $(n-1)(n-2)$를 빠뜨리거나, 두 던지기 중 어느 것이 4인지를 구별하지 않는 $\binom{n-1}{2}$를 사용하는 것.
- (v)에서 겹치는 부분을 빼지 않고 $\mathrm{P}(D) + \mathrm{P}(E)$를 그대로 더하는 것.

STEP 너머

여기서처럼 무작위 정지 시각(stopping time)을 조건으로 삼고 더하는 것은 전확률 법칙의 가장 유용한 형태이며, 여기서 만난 급수들은 음이항분포(negative binomial distribution)의 생성함수(generating function)이다. "관련 없는 던지기는 무시한다"는 검산은 강력한 아이디어의 한 예이다. 즉, 어떤 과정을 관련 있는 일이 일어나는 순간에만 관찰하면 원래 과정보다 훨씬 단순해지는 경우가 많다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)에서 두 아이디어를 모두 다룬다.

풀이

STEP II 2015, 문제 1

순수수학 • 부등식과 급수

STEP II 2015, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/15-s2-q1

핵심 아이디어

함수와 로그(logarithm) 사이의 각 부등식에 적절히 고른 x의 값을 대입하면, 급수(series)의 한 항과 로그의 차 사이의 부등식이 된다. 이 차들을 모두 더하면 거의 모든 항이 소거되고(이런 합을 망원합(telescoping sum)이라 한다), 로그 한두 개만 남는다. 요령은 로그가 차의 꼴로 쪼개지도록 대입할 값을 고르는 데 있다.

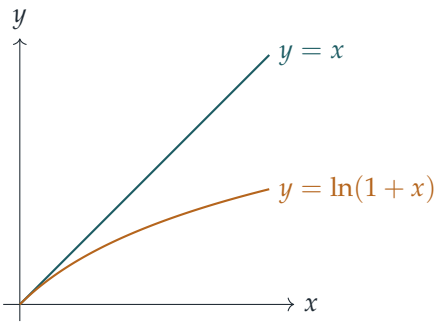
풀이

소문항 (i)

$x \geq 0$에 대하여 $f(x) = x - \ln(1+x)$라 하자. 그러면 $f(0) = 0 - \ln 1 = 0$이고

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} > 0 \qquad \text{단, } x > 0.$$

따라서 f는 $[0, \infty)$에서 순증가(strictly increasing)하고, 모든 $x > 0$에 대하여 $f(x) > f(0) = 0$이다. 즉 모든 양수 x에 대하여 $x > \ln(1+x)$이므로, 증명하려던 결과를 얻는다.



이제 양의 정수 k에 대하여 $x = \frac{1}{k}$로 놓으면

$$\frac{1}{k} > \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln k.$$

이 부등식들을 $k = 1, 2, \ldots, n$에 대하여 더하면, 우변이 연쇄적으로 소거된다.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &> \big(\ln 2 - \ln 1\big) + \big(\ln 3 - \ln 2\big) + \cdots + \big(\ln(n+1) - \ln n\big) \\ &= \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1).\end{aligned}$$

이것이 증명하려던 결과이다. (부수적으로, $\ln(n+1) \to \infty$이므로 조화급수(harmonic series)는 발산한다.)

소문항 (ii)

$0 \le x < 1$에 대하여 $g(x) = x + \ln(1-x)$라 하자. 그러면 $g(0) = 0$이고

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1-x} = \frac{-x}{1-x} < 0 \qquad \text{단, } 0 < x < 1,$$

이다. 이 범위에서 $1 - x > 0$이기 때문이다. 따라서 g는 순감소하고 $0 < x < 1$에서 $g(x) < 0$이다. 즉

$$x < -\ln(1-x) \qquad (0 < x < 1).$$

? **생각해 보기** x에 어떤 값을 대입해야 할까? 그리고 왜 $k = 1$은 쓸 수 없을까?

좌변에 $\frac{1}{k^2}$이 나오기를 원하므로 $x = \frac{1}{k^2}$으로 놓는다. 그러려면 $x < 1$이어야 하므로 $k \ge 2$이다. $k = 1$이면 로그 $\ln(1-1)$이 정의되지 않는다. 그래서 항 $\frac{1}{1} = 1$은 따로 떼어 두는데, 이것이 바로 상계 $1 + \ln 2$의 1이다. $k \ge 2$일 때 핵심은 $1 - \frac{1}{k^2}$이 다음과 같이 인수분해된다는 점이다.

$$1 - \frac{1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2},$$

따라서

$$\frac{1}{k^2} < -\ln\frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \big(\ln k - \ln(k-1)\big) - \big(\ln(k+1) - \ln k\big).$$

$a_k = \ln k - \ln(k-1)$이라 하면 우변은 $a_k - a_{k+1}$이다. $k = 2$부터 N까지 더하면 연쇄적으로 소거되어

$$\sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k^2} < a_2 - a_{N+1} = \ln 2 - \ln\left(\frac{N+1}{N}\right) < \ln 2,$$

을 얻는다. $\ln\frac{N+1}{N} > 0$이기 때문이다.

따라서 부분합(partial sum) $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2}$은 N에 대하여 증가하고, 모두 $1+\ln 2$보다 작다. 위로 유계(bounded above)인 증가수열은 수렴(converge)하므로, 이 무한급수는 수렴하고 그 합은 $1+\ln 2$ 이하이다.

부등식을 엄격하게 만들려면, 극한을 취하면 $\leq$만 보존된다는 점에 유의하여 약간의 여유를 남겨 두어야 한다. $k=2$일 때의 부등식 $\frac{1}{4} < \ln\frac{4}{3}$은 엄격하다. $\delta = \ln\frac{4}{3} - \frac{1}{4} > 0$이라 하자. 그러면 모든 $N \geq 2$에 대하여 같은 방식으로 소거하면

$$\sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k^2} < \ln 2 - \ln\left(\frac{N+1}{N}\right) - \delta < \ln 2 - \delta,$$

이므로, 극한을 취하면 $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \ln 2 - \delta < \ln 2$이다. 여기에 $k=1$인 항을 더하면

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < 1 + \ln 2,$$

이고, 이것이 증명하려던 결과이다.

검산

- 소문항 (i)에서 $n=1$이면 $1 > \ln 2 \approx 0.693$이다. $n=10$이면 $\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k} \approx 2.929$이고, $\ln 11 \approx 2.398$이다.
- 소문항 (ii): 실제 합은 $\frac{\pi^2}{6} \approx 1.6449$로, $1+\ln 2 \approx 1.6931$보다 넉넉히 작다. 사실 위의 풀이는 이보다 조금 더 정밀한 상계 $1+\ln 2 - \delta \approx 1.6555$를 주며, 이때 $\delta \approx 0.0377$이다.
- $\sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k^2}$에 대한 소거 후의 상계 $\ln 2 - \ln\frac{N+1}{N}$은 10^5 이하의 모든 N에 대하여 컴퓨터로 확인하였다.

흔한 실수

- $k=1$일 때에도 $x=\frac{1}{k^2}$을 대입하는 것: 이때 $\ln(1-x)$는 정의되지 않으며, 첫째 항을 따로 떼어 두지 않으면 $1+\ln 2$의 1을 잃게 된다.
- $f(0)=0$은 보이지 않고 $f'(x)>0$만 보이는 것: 증가하는 함수라도 음수일 수 있다.
- 엄격한 부등식에서 극한을 취한 뒤, 아무 설명 없이 극한에서도 엄격한 부등식이 성립한다고 주장하는 것: 극한은 $\leq$만 보장한다.

STEP 너머

합을 로그(또는 적분)와 비교하는 것은 적분 판정법(integral test)의 출발점이며, 소문항 (i)을 정교하게 다듬으면 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$이 오일러(Euler) 상수 $\gamma \approx 0.5772$로 수렴함을 보

일 수 있다. 정확한 값 $\sum \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$은 오일러가 바젤 문제(Basel problem)를 푼 결과로, 대학 1학년 과정에서는 흔히 푸리에 급수(Fourier series)를 이용해 유도한다. 여기서 사용한 단조 수렴(monotone convergence) 논법, 즉 유계인 증가수열은 수렴한다는 사실은 실해석학(real analysis)의 초석이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)가 이를 꼼꼼하게 전개한다.

풀이

STEP II 2015, 문제 2

순수수학 • 삼각형의 기하

STEP II 2015, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

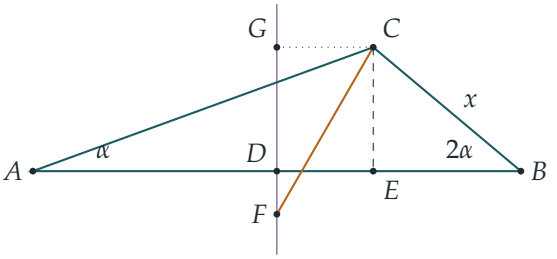
step.maths.org/questions/15-s2-q2

핵심 아이디어

첫 번째 결과는 사인법칙(sine rule)에 $\sin 3\alpha$에 대한 삼배각 공식(triple-angle formula)을 더하면 얻어진다. DE를 구할 때는 모든 길이를 AB를 따라 한쪽 끝에서부터 잰다. CE 양쪽에 있는 직각삼각형(right-angled triangle)에서 AE와 BE를 바로 얻을 수 있다. DE의 값은 놀라울 만큼 간단하게 나오는데, 바로 이 간단함 덕분에 삼등분(trisection)이 성립한다. 이 값은 C가 수직이등분선(perpendicular bisector)에서 얼마나 떨어져 있는지 알려 주고, 이를 $CF = x$와 비교하면 한 각이 결정된다.

풀이

풀이 전체에서 C에서의 각은 $\angle ACB = \pi - 3\alpha$이고, 2α가 예각이므로 $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$이다.



길이 AB

$\sin(\pi - 3\alpha) = \sin 3\alpha$를 이용하면 사인법칙에 의해

$$\frac{AB}{\sin 3\alpha} = \frac{x}{\sin \alpha}.$$

이제 삼배각 공식 $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$를 쓰고 $\sin\alpha \neq 0$으로 나누면

$$AB = x\,\frac{3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}{\sin\alpha} = (3 - 4\sin^2\alpha)\,x,$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

길이 DE

A와 B에서의 각이 모두 예각이므로, C에서 내린 수선의 발(foot of the perpendicular) E는 A와 B 사이에 있다. 직각삼각형 CEB에서

$$BE = x\cos 2\alpha, \qquad CE = x\sin 2\alpha.$$

따라서

$$AE = AB - BE = x\big(3 - 4\sin^2\alpha - (1 - 2\sin^2\alpha)\big) = x(2 - 2\sin^2\alpha) = 2x\cos^2\alpha,$$
$$AD = \tfrac{1}{2}AB = x\big(\tfrac{3}{2} - 2\sin^2\alpha\big).$$

두 식을 빼면

$$AE - AD = x\big(2 - 2\sin^2\alpha - \tfrac{3}{2} + 2\sin^2\alpha\big) = \tfrac{1}{2}x.$$

이 값은 양수이므로 E는 D와 B 사이에 있고,

$$DE = \tfrac{1}{2}x,$$

이며 이는 α에 무관하다.

삼등분

C에서 AB의 수직이등분선 DF에 내린 수선의 발을 G라 하자. CE와 GD가 모두 AB에 수직이므로 $CGDE$는 직사각형(rectangle)이다. 따라서 $CG = DE = \frac{1}{2}x$이고, CG는 AB에 평행하다. 즉 CG는 CE에 수직이다.

? **생각해 보기** $CF = x$를 어떻게 각으로 바꿀 수 있을까?

삼각형 CGF는 G에서 직각이고, 빗변(hypotenuse)은 $CF = x$, 한 변은 $CG = \frac{1}{2}x$이다. 그러므로

$$\cos\angle GCF = \frac{CG}{CF} = \frac{1}{2}, \qquad \text{따라서} \qquad \angle GCF = \frac{\pi}{3}.$$

수직이등분선 위에서 C로부터 거리가 x인 점은 G의 양쪽에 하나씩, 모두 두 개 있다. 반직선(ray) CE(AB를 향해 아래쪽을 가리킨다)에서 시작하여 A 쪽으로 각을 재면, 반직선 CG는 $\frac{\pi}{2}$의 각에 있다. 따라서 후보가 되는 두 반직선 CF는 각각 $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$($G$ 아래쪽의 점)과 $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$($G$ 위쪽의 점)의 각에 있다.

이제 둘 중 어느 것이 AC에 대하여 B와 같은 쪽에 있는지 정한다. 직각삼각형 ACE에서 $\angle ACE = \frac{\pi}{2} - \alpha$이므로, 반직선 CA는 같은 쪽으로 CE에서 $\frac{\pi}{2} - \alpha$의 각에 있다. 직선 AC에 대하여 B 쪽에 있는 C에서의 반직선은, 이렇게 잰 각이 $\frac{\pi}{2} - \alpha$보다 작은 것(또는 CE의 반대쪽, 즉 B 쪽에 있는 것)이다. $\alpha < \frac{\pi}{4}$이므로

$$\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} - \alpha < \frac{5\pi}{6},$$

이고, 따라서 G 아래쪽의 점은 B 쪽에 있고 G 위쪽의 점은 그렇지 않다. 그러므로 F는 아래쪽 점이고, $\angle ECF = \frac{\pi}{6}$이며, 반직선 CF는 각 ACE의 내부, 곧 $\angle ACB$의 내부에 있다. 따라서

$$\angle ACF = \angle ACE - \angle ECF = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} - \alpha = \frac{1}{3}(\pi - 3\alpha) = \frac{1}{3}\angle ACB.$$

즉 CF는 $\angle ACB$에서 CA 쪽의 3분의 1을 잘라 낸다($\angle FCB = \frac{2}{3}\angle ACB$이다). 그러므로 직선 FC는 각 ACB를 삼등분한다.

검산

- $\alpha = \frac{\pi}{6}$이면 삼각형의 세 각은 $30°$, $60°$, $90°$이고, $AB = (3-1)x = 2x$로 익숙한 빗변의 길이가 나온다. 이때 $AE = 2x\cos^2 30° = \frac{3}{2}x$이고 $AD = x$이므로 $DE = \frac{1}{2}x$이다. C에서의 각은 $90°$이고, $\angle ACF = 60° - 30° = 30°$로 그 3분의 1이다.
- $\alpha = 20°$, $x = 1$이면 $AB \approx 2.532$이고 $\angle ACB = 120°$이다. 좌표를 이용해 F를 직접 작도하면 $\angle ACF = 40°$를 얻는다. 세 결과 모두 무작위로 만든 수천 개의 삼각형에 대해 컴퓨터로도 확인하였다.

흔한 실수

- F를 G 위쪽의 점으로 잡는 실수. 그 점도 C에서 거리가 x이지만 AC의 반대쪽에 있으며, 문제에서 어느 쪽인지를 지정한 것은 바로 이 때문이다.
- DE를 길이의 차로 쓰기 전에 E가 A와 B 사이에 있는지(그리고 D의 어느 쪽에 있는지) 확인하는 것을 잊는 실수.

STEP 너머

자와 컴퍼스(ruler and compasses)로 일반적인 각을 삼등분하는 것은 불가능하며, 이 사실은 체론(field theory)으로 증명된다. $60°$를 삼등분하려면 기약 삼차다항식(irreducible cubic)의 근을 작도해야 하는데, 작도 가능한(constructible) 길이는 언제나 이차방정식을 거듭 쌓아 올린 것만 만족하기 때문이다. 여기서는 삼각형이 추가 정보(B에서의 각이 A에

서의 각의 두 배)를 주고, 바로 그 덕분에 간단한 작도로 삼등분이 가능하다. 더 우아한 삼각형 기하를 보려면 콕서터(Coxeter)와 Greitzer의 *Geometry Revisited*를, 불가능성의 증명은 Allenby의 *Rings, Fields and Groups*를 보라.

풀이

STEP II 2015, 문제 3

순수수학 • 경우의 수와 수학적 귀납법

STEP II 2015, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/15-s2-q3

핵심 아이디어

삼각형을 가장 긴 막대에 따라 분류한다. T_n에서는 세지만 T_{n-1}에서는 세지 않는 삼각형은 정확히 길이 n인 막대를 사용하는 삼각형이므로, $T_n - T_{n-1}$은 $a+b \geq n$을 만족하는 쌍 $a < b < n$의 개수이다. 가운데 막대 b를 하나 고를 때마다 이 개수는 간단히 셀 수 있고, 그 개수들은 등차수열(arithmetic progression)을 이룬다. 연속한 두 차를 더하면 $T_{2m} - T_{2m-2}$를 얻는데, 이것이 바로 귀납(induction) 단계에서 필요한 것이다.

풀이

가장 긴 막대가 c인 삼각형 세기

T_n에서 세는 삼각형의 막대는 $a < b < c \leq n$이다. 이 가운데 $c \leq n-1$인 것은 정확히 T_{n-1}에서 세는 삼각형이므로

$$T_n - T_{n-1} = \#\{(a,b) : 1 \leq a < b < n,\ a+b \geq n\}.$$

가운데 막대 b를 고정하자. $n-b \leq a \leq b-1$이어야 하므로($b < n$이므로 $a \geq 1$은 저절로 성립한다), $2b - n > 0$일 때는 $2b-n$가지 선택이 있고 그렇지 않으면 하나도 없다. 따라서 b는 $\frac{n}{2}$보다 큰 가장 작은 정수부터 $n-1$까지 움직인다.

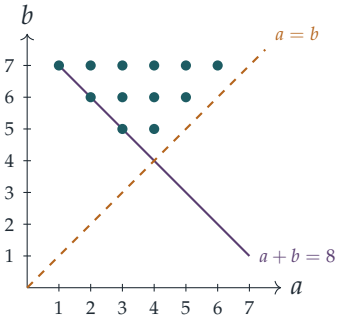
$n = 8$인 경우

$c = 8$일 때 가능한 가운데 막대는 $b = 5, 6, 7$이고, 각각 a의 선택은 2, 4, 6가지이다.

$$b = 5 :\ a \in \{3,4\}, \qquad b = 6 :\ a \in \{2,3,4,5\}, \qquad b = 7 :\ a \in \{1,\ldots,6\}.$$

($b = 4$이면 $4 \le a \le 3$이어야 하므로 불가능하다.) 따라서 요구한 대로 $T_8 - T_7 = 2 + 4 + 6 = 12$이다.

아래 그림은 이 12개의 쌍 (a, b)를 보여 준다. 이들은 직선 $a + b = 8$ 위 또는 그보다 위에 있고, 대각선 $a = b$보다 엄격히 위에 있는 점들이다.



$T_7 - T_6$의 경우 가장 긴 막대는 7이고, 가운데 막대 $b = 4, 5, 6$에 대해 $2b - 7 = 1, 3, 5$가지 선택이 있으므로 $T_7 - T_6 = 1 + 3 + 5 = 9$이다. 그러므로

$$T_8 - T_6 = (T_8 - T_7) + (T_7 - T_6) = 12 + 9 = 21.$$

일반적인 차

$n = 2m$이면 가운데 막대는 $b = m + 1, \ldots, 2m - 1$을 움직이고, 선택의 수는 $2b - 2m = 2, 4, \ldots, 2(m - 1)$이다.

$$T_{2m} - T_{2m-1} = 2 + 4 + \cdots + 2(m - 1) = m(m - 1).$$

$n = 2m - 1$이면 가운데 막대는 $b = m, \ldots, 2m - 2$를 움직이고, 선택의 수는 $2b - (2m - 1) = 1, 3, \ldots, 2m - 3$이며, 처음 $m - 1$개의 홀수의 합은 $(m - 1)^2$이다. 두 식을 더하면

$$T_{2m} - T_{2m-2} = m(m - 1) + (m - 1)^2 = (m - 1)(2m - 1).$$

($m = 4$이면 이 식들은 12와 21을 주어 위의 값과 일치한다.) 이 식들은 작은 쪽 첨자가 3 이상일 때, 즉 두 번째 식에서는 $m \ge 3$일 때 성립한다.

귀납법

$f(m) = \frac{1}{6}m(m - 1)(4m + 1)$이라 하자. 모든 $m \ge 2$에 대해 $T_{2m} = f(m)$임을 증명한다.

기저 단계(*base case*), $m = 2$. 막대 $1, 2, 3, 4$에서 가능한 네 가지 선택은 $(1, 2, 3)$, $(1, 2, 4)$, $(1, 3, 4)$, $(2, 3, 4)$이고, $(1, 2, 4)$를 제외한 모두가 $a + b \ge c$를 만족한다. 따라서 $T_4 = 3$이고, $f(2) = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 9 = 3$이다.

귀납 단계(*inductive step*). 어떤 $k \geq 3$에 대해 $T_{2k-2} = f(k-1)$이라 가정하자. 차에 관한 식에 의해

$$T_{2k} = f(k-1) + (k-1)(2k-1),$$

이므로 $f(k) - f(k-1) = (k-1)(2k-1)$임을 보이면 충분하다.

> **생각해 보기** 두 삼차식을 모두 전개하지 않고 $f(k) - f(k-1)$을 어떻게 정리할 수 있을까?

두 항 모두 인수 $k-1$을 가지므로 먼저 이것을 묶어 낸다.

$$\begin{aligned} f(k) - f(k-1) &= \tfrac{1}{6}(k-1)\big[k(4k+1) - (k-2)(4k-3)\big] \\ &= \tfrac{1}{6}(k-1)\big[(4k^2+k) - (4k^2-11k+6)\big] \\ &= \tfrac{1}{6}(k-1)(12k-6) = (k-1)(2k-1). \end{aligned}$$

따라서 $T_{2k} = f(k)$이다. 귀납법에 의해 모든 $m \geq 2$에 대해 $T_{2m} = \frac{1}{6}m(m-1)(4m+1)$이다.

막대의 개수가 홀수인 경우

$T_{2m-1} = T_{2m} - m(m-1)$을 이용하면

$$T_{2m-1} = \tfrac{1}{6}m(m-1)(4m+1) - m(m-1) = \tfrac{1}{6}m(m-1)(4m-5) \qquad (m \geq 2).$$

막대의 개수를 $2m+1$로 바꾸어 쓰면(m을 $m+1$로 바꾸면) 이 식은

$$T_{2m+1} = \tfrac{1}{6}m(m+1)(4m-1) \qquad (m \geq 1).$$

가 된다. 예를 들어 $T_3 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1$이며, 이는 단 하나의 삼각형 $(1, 2, 3)$이다.

검산

- 공식에 따르면 $T_6 = \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 13 = 13$, $T_7 = \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 11 = 22$, $T_8 = \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 17 = 34$이므로 $T_8 - T_7 = 12$, $T_8 - T_6 = 21$이 되어 직접 구한 값과 같다.
- $\{1, \ldots, n\}$에서 고른 모든 세 수의 조를 컴퓨터로 세어 보면, 3부터 79까지의 모든 n에 대해 두 닫힌 형태(closed form)와 일치한다.
- $n = 2m$일 때 짝수 공식은 대략 $\frac{2}{3}m^3 = \frac{n^3}{12}$이고, 홀수 공식도 같은 방식으로 움직인다. 이는 가능한 세 수의 조 $\binom{n}{3} \approx \frac{n^3}{6}$개의 절반이므로, n이 클 때 막대 세 개를 고르는 모든 방법 가운데 약 절반이 삼각형을 만든다.

흔한 실수

- 막대가 서로 다르므로 $a < b$가 엄격한 부등식이라는 것을 잊는 실수: $a = b$를 허용하면 과다하게 세게 된다.
- 넓이가 0인 (퇴화(degenerate)) 삼각형을 빠뜨리는 실수: 조건은 $a + b \geq c$이므로 $(1, 2, 3)$도 센다.
- 귀납법을 $m = 1$에서 시작하는 실수: $n \geq 3$이어야 하므로 T_2는 정의되지 않는다.

STEP 너머

그림에서처럼 어떤 영역 안의 격자점(lattice point)을 세는 것은 분할(partition)과 생성함수(generating function) 이론의 출발점이다. T_n은 유리 생성함수를 가지며, n이 짝수인 경우와 홀수인 경우로 나뉘는 것은 그 분모에 있는 인수 $1 - x^2$를 반영한다. 이처럼 개수가 n의 다항식이되 n의 나머지(residue)에 따라 달라지는 결과를 준다항식(quasi-polynomial)이라 한다. 점화식(recurrence)과 세기 논증에 대해 더 알고 싶다면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*를 보라.

풀이

STEP II 2015, 문제 4

순수수학 • 역탄젠트의 분지

STEP II 2015, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/15-s2-q4

핵심 아이디어

$\tan\theta$를 안다고 해도 θ는 π의 정수배 차이까지만 결정된다. 따라서 각 방정식에는 해의 가지(branch)가 무수히 많으며, 이 가지들은 모두 서로를 π만큼 수직으로 평행이동한 것이다. 연속성(continuity)과 $x = 0$에서의 값이 그중 한 가지를 골라 준다. 또한 우변이 $\pm\infty$로 발산할 때마다 연속성 때문에 가지를 **바꾸어야** 한다. 바로 그 순간이 각이 $\frac{1}{2}\pi$의 홀수배를 지나는 순간이다. 그래서 각 소문항에서 먼저 우변의 그래프를 그린 다음, 각을 연속적으로 따라간다.

이 풀이 전체에서 arctan은 $-\frac{1}{2}\pi < \arctan u < \frac{1}{2}\pi$인 주값(principal value)을 뜻한다.

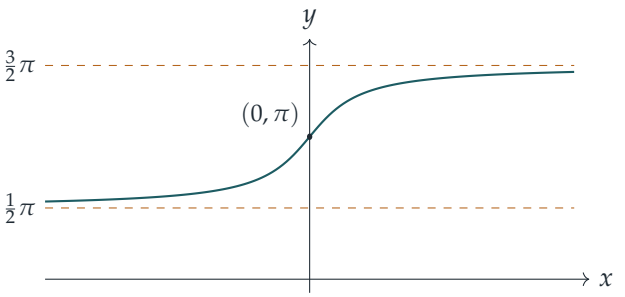
풀이

소문항 (i)

$\tan\theta = x$의 모든 해는 정수 n에 대해 $\theta = \arctan x + n\pi$ 꼴이다. 함수 $\arctan x$는 실수 전체에서 연속이므로 $\mathrm{f}(x) - \arctan x$는 $\{n\pi\}$에 속하는 값만 갖는 연속함수이다. 연속함수는 이렇게 서로 떨어져 있는 값들 사이를 건너뛸 수 없으므로 이 함수는 상수이다. $\mathrm{f}(0) = \pi$이고 $\arctan 0 = 0$이므로 그 상수는 π이다.

$$\mathrm{f}(x) = \pi + \arctan x.$$

따라서 이 곡선은 익숙한 arctan 곡선을 π만큼 위로 올린 것이다. 이 곡선은 순증가(strictly increasing)하고, 기울기(gradient) 1로 $(0, \pi)$를 지나며($\mathrm{f}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$이므로), $x \to -\infty$일 때 수평 점근선(horizontal asymptote) $y = \frac{1}{2}\pi$를, $x \to \infty$일 때 수평 점근선 $y = \frac{3}{2}\pi$를 갖는다. 또한 $(0, \pi)$에 대해 위수 2의 회전대칭(rotational symmetry)을 갖는데, 이는 $\mathrm{f}(-x) = 2\pi - \mathrm{f}(x)$이기 때문이다.



소문항 (ii)

곡선 $y = \dfrac{x}{1+x^2}$. 이를 $q(x)$라 하자. 이 함수는 기함수(odd function)이고, 함숫값이 영이 되는 것은 $x = 0$일 때뿐이며, 부호는 x의 부호와 같다. $x \to \pm\infty$일 때 $q(x) \approx 1/x \to 0$이므로 x축이 점근선이며, 오른쪽에서는 위에서, 왼쪽에서는 아래에서 접근한다. 미분하면

$$q'(x) = \frac{(1+x^2) - 2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2},$$

이므로 정상점(stationary point)은 $x = \pm 1$에 있다. 극댓점은 $(1, \frac{1}{2})$이고 극솟점은 $(-1, -\frac{1}{2})$이다. (산술-기하 평균 부등식(AM–GM)에 의해 $1 + x^2 \geq 2|x|$이므로 $|q(x)| \leq \frac{1}{2}$라고 해도 같다.) 원점에서의 기울기는 1이다.

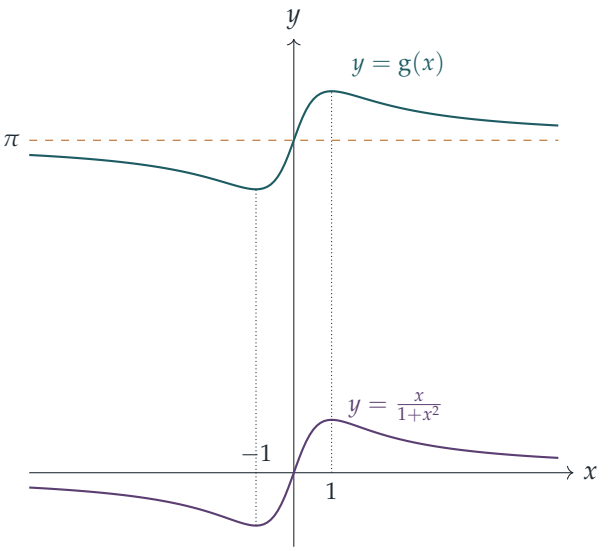
곡선 $y = \mathrm{g}(x)$. 이번에는 우변 $q(x)$가 연속이고 유계이므로, 소문항 (i)과 똑같은 논증으로 다음을 얻는다.

$$\mathrm{g}(x) = \pi + \arctan \frac{x}{1+x^2}.$$

arctan이 증가함수이므로 g는 q와 정확히 같은 구간에서 증가하고 감소한다. 따라서

- $x \to \pm\infty$일 때 $\mathrm{g}(x) \to \pi$이다(오른쪽에서는 위에서, 왼쪽에서는 아래에서 접근한다);
- g는 $x = 1$에서 극댓값 $\pi + \arctan \frac{1}{2} \approx 3.61$을, $x = -1$에서 극솟값 $\pi - \arctan \frac{1}{2} \approx 2.68$을 갖는다;
- 이 곡선은 기울기 $\dfrac{q'(0)}{1+q(0)^2} = 1$로 $(0, \pi)$를 지난다.

그 모양은 q의 그래프를 약간 납작하게 하고($u > 0$일 때 $\arctan u < u$이므로) π만큼 위로 올린 것이다. 이 곡선은 $\frac{1}{2}\pi$나 $\frac{3}{2}\pi$ 근처에는 결코 가지 않으므로 가지를 바꿀 필요가 전혀 없다.



소문항 (iii)

곡선 $y = \dfrac{x}{1-x^2}$**.** 이를 $r(x)$라 하자. 이 함수는 기함수이고, 함숫값이 영이 되는 것은 $x = 0$일 때뿐이며, $x = \pm 1$에서 수직 점근선을 갖는다. $x \to \pm\infty$일 때 $r(x) \approx -1/x \to 0$이다. 도함수는

$$r'(x) = \frac{(1-x^2)+2x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} > 0,$$

이므로 r는 정의된 세 구간 각각에서 순증가한다. x와 $1-x^2$의 부호를 살펴보면 다음과 같다.

- $x < -1$에서 r는 0^+($x \to -\infty$일 때)에서 $+\infty$($x \to -1^-$일 때)까지 증가한다;
- $-1 < x < 1$에서 r는 $-\infty$에서 $+\infty$까지 증가하며, 기울기 1로 원점을 지난다;
- $x > 1$에서 r는 $-\infty$($x \to 1^+$일 때)에서 0^-($x \to \infty$일 때)까지 증가한다.

곡선 $y = \mathrm{h}(x)$**.** 각 구간에서 따로 보면 r는 연속이므로, 그 구간에서 $\mathrm{h}(x) - \arctan r(x)$는 π의 일정한 정수배이다. 그러나 그 배수는 구간마다 다를 수 있다. 이를 구간별로 구해 보자.

$-1 < x < 1$에서는 조건 $\mathrm{h}(0) = \pi$로부터 $\mathrm{h}(x) = \pi + \arctan r(x)$를 얻는다. $x \to 1^-$일 때 $r \to +\infty$이므로 $\mathrm{h}(x) \to \pi + \frac{1}{2}\pi = \frac{3}{2}\pi$이고, $x \to -1^+$일 때 $r \to -\infty$이므로 $\mathrm{h}(x) \to \frac{1}{2}\pi$이다. $x = \pm 1$에서의 연속성에 의해 $\mathrm{h}(1) = \frac{3}{2}\pi$이고 $\mathrm{h}(-1) = \frac{1}{2}\pi$이어야 한다.

? **생각해 보기** $x = 1$의 바로 오른쪽에서는 $r(x)$가 절댓값이 큰 음수이므로 $\arctan r(x)$는 $-\frac{1}{2}\pi$에 가깝다. $x = 1$에서 h가 연속이 되려면 π의 몇 배를 더

? 해야 할까?

$x > 1$에서는 $\mathrm{h}(x) = n\pi + \arctan r(x)$이고, $x \to 1^+$일 때 이 값은 $n\pi - \frac{1}{2}\pi$로 수렴한다. 이것이 $\frac{3}{2}\pi$와 같으려면 $n = 2$이어야 한다. 마찬가지로 $x < -1$에서는 $x \to -1^-$일 때 $\mathrm{h}(x) = m\pi + \arctan r(x) \to m\pi + \frac{1}{2}\pi$이고, 이것이 $\frac{1}{2}\pi$와 같으려면 $m = 0$이어야 한다. 따라서

$$\mathrm{h}(x) = \begin{cases} \arctan \dfrac{x}{1-x^2}, & x < -1, \\ \pi + \arctan \dfrac{x}{1-x^2}, & -1 < x < 1, \\ 2\pi + \arctan \dfrac{x}{1-x^2}, & x > 1, \end{cases} \qquad \mathrm{h}(\pm 1) = \pi \pm \tfrac{1}{2}\pi.$$

즉 r가 $+\infty$로 치솟았다가 $-\infty$에서 다시 나타날 때, 각 h는 그저 $\frac{3}{2}\pi$를 지나 계속 증가한다($x = -1$에서 $\frac{1}{2}\pi$를 지날 때도 마찬가지이다).

이제 개형의 특징을 정리하자.

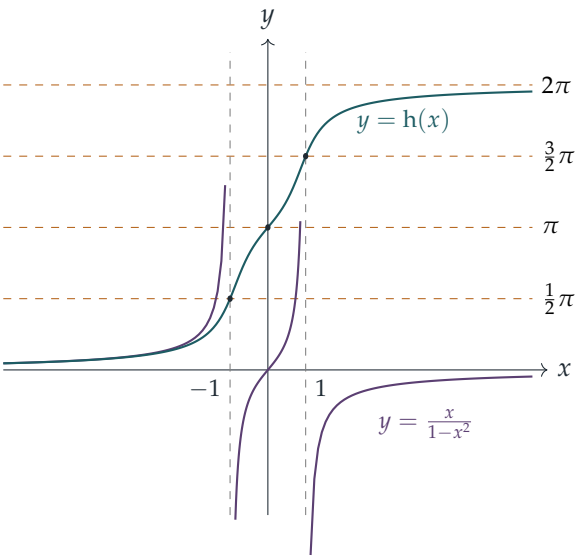
- **점근선.** $x \to -\infty$일 때 $r \to 0^+$이므로 $\mathrm{h}(x) \to 0$이고 위에서 접근한다. $x \to \infty$일 때 $r \to 0^-$이므로 $\mathrm{h}(x) \to 2\pi$이고 아래에서 접근한다.
- **단조성.** ± 1이 아닌 곳에서는 연쇄법칙(chain rule)에 의해

  $$\mathrm{h}'(x) = \frac{r'(x)}{1 + r(x)^2} = \frac{1 + x^2}{(1-x^2)^2 + x^2} = \frac{1 + x^2}{x^4 - x^2 + 1} > 0.$$

  (분모는 $(x^2 - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$이다.) 이 식은 $x = \pm 1$에서도 아무 문제 없이 정의되며 그 값은 2이므로, h는 그곳에서 매끄럽다. 즉 곡선은 꺾임 없이 $(1, \frac{3}{2}\pi)$와 $(-1, \frac{1}{2}\pi)$를 기울기 2로 지난다.
- **주요 점.** 기울기가 1인 $(0, \pi)$, 그리고 기울기가 2인 $(\pm 1, \pi \pm \frac{1}{2}\pi)$.
- **대칭성.** $\mathrm{h}(-x) = 2\pi - \mathrm{h}(x)$이므로 곡선은 $(0, \pi)$에 대해 회전대칭이다.

따라서 h는 0에서 2π까지 꾸준히 증가하며, 소문항 (i)의 곡선과 같은 S자 모양이지만 높이는 두 배이다. 그래프에서 r의 점근선 $x = \pm 1$은 h가 $\frac{1}{2}\pi$와 $\frac{3}{2}\pi$를 지나는 점과 정확히 일치한다.

세 경우를 한꺼번에 깔끔하게 나타내는 방법이 있다. $\mathrm{h}(x) - \pi$는 점 $(1 - x^2, x)$의 $(-\pi, \pi)$에 속하는 편각이다. 이 점은 원점이나 수평축의 음의 부분에 결코 닿지 않으며($1 - x^2 \le 0$일 때 $x \neq 0$이므로), 이것이 각이 연속적으로 변하는 이유이다.



검산

- 각 식은 정의 방정식을 만족한다. 예를 들어 $\tan(2\pi+\theta)=\tan\theta$이고, 0에서의 값은 모두 π이다.
- 특정 값 확인: $g(1)=\pi+\arctan\frac{1}{2}\approx 3.605$이고, $h(2)=2\pi+\arctan(-\frac{2}{3})\approx 5.695$인데, 이 값은 그래프에서 요구하는 대로 $\frac{3}{2}\pi\approx 4.712$와 $2\pi\approx 6.283$ 사이에 있다.
- h의 연속성: $h(0.999)\approx 4.710$이고 $h(1.001)\approx 4.714$로 $\frac{3}{2}\pi\approx 4.712$의 양쪽에 있으며, 이는 $x=1$에서 기울기가 2라는 사실과 들어맞는다. $[-10,10]$을 촘촘히 훑는 컴퓨터 검사로 f, g, h 중 어느 것도 어디에서도 값이 뛰지 않음을 확인했다.

흔한 실수

- 모든 x에 대해 $h(x)=\pi+\arctan\frac{x}{1-x^2}$라고 쓰는 것. 이 함수는 $x=1$에서 π만큼 아래로, $x=-1$에서 π만큼 위로 뛰므로 연속이 아니다.
- $\frac{x}{1-x^2}$가 수직 점근선을 가진다는 이유만으로 $y=h(x)$에도 $x=\pm1$에서 수직 점근선을 그리는 것. 각은 유한하게 남으며, 무한대로 발산하는 것은 그 탄젠트뿐이다.
- $y=h(x)$를 $x=\pm1$에서 꺾이게 그리는 것. 그곳에서의 기울기는 양쪽 모두 2이다.

STEP 너머

우리가 한 일은 다가 역함수(many-valued inverse function)의 연속인 **가지**를 고르는 것이었고, "탄젠트가 무한대를 지날 때마다 π를 더한다"는 규칙은 경로를 피복 공간(covering space)으로 올리기(lifting)를 처음 맛보는 것이다. 복소 로그와 $\arg z$에 대한 같은 아이디어가 복소해석학(complex analysis)의 회전수(winding number)와 편각 원리(argument principle)의 바탕을 이룬다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이를 기하학적으로 전개하며, 아주 즐겁게 읽을 수 있는 책이다.

풀이

STEP II 2015, 문제 5

순수수학 • 아크탄젠트 급수

> **STEP II 2015, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/15-s2-q5

핵심 아이디어

탄젠트 덧셈정리(tangent addition formula)를 쓰면 역탄젠트(arctangent)들의 합이 하나의 분수로 바뀌므로, $\tan S_n$에 대한 귀납법(induction)은 신중한 계산의 문제가 된다. 미묘한 점은 $\tan S_n$에서 S_n 자체로 넘어가는 단계이다. 탄젠트 값을 안다고 해서 각이 π의 정수배 차이를 넘어서 정해지지는 않으므로, S_n이 어느 구간에 있는지 확정해야 한다. 소문항 (ii)에서는 각 α_n이 바로 소문항 (i)의 역탄젠트들이라는 것이 밝혀지고, 무한급수(infinite sum)는 S_n의 극한(limit)이 된다.

풀이

소문항 (i)

$\theta_m = \arctan\left(\frac{1}{2m^2}\right)$로 두면 $S_n = \theta_1 + \cdots + \theta_n$이고 $\tan\theta_m = \frac{1}{2m^2}$이다.

$\tan S_n$에 대한 공식. $n = 1$일 때 $\tan S_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$이므로 결과가 성립한다.

어떤 $n \geq 1$에 대하여 $\tan S_n = \frac{n}{n+1}$이라고 가정하자. $S_{n+1} = S_n + \theta_{n+1}$이므로 덧셈정리에 의해

$$\tan S_{n+1} = \frac{\tan S_n + \tan\theta_{n+1}}{1 - \tan S_n \tan\theta_{n+1}} = \frac{\dfrac{n}{n+1} + \dfrac{1}{2(n+1)^2}}{1 - \dfrac{n}{2(n+1)^3}}.$$

곱 $\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{2(n+1)^2}$이 1보다 작으므로 분모는 0이 아니다. 분자와 분모에 $2(n+1)^3$을 곱하면

$$\tan S_{n+1} = \frac{(n+1)\big(2n(n+1)+1\big)}{2(n+1)^3 - n} = \frac{(n+1)(2n^2+2n+1)}{2n^3+6n^2+5n+2}.$$

생각해 보기 분모가 깔끔하게 인수분해된다는 것을 어떻게 알 수 있을까?

목표는 $\frac{n+1}{n+2}$이므로 분모는 $(n+2)(2n^2+2n+1)$이어야 한다. 전개해 보면 실제로 $(n+2)(2n^2+2n+1) = 2n^3+6n^2+5n+2$이다. 양수인 인수 $2n^2+2n+1$을 약분하면

$$\tan S_{n+1} = \frac{n+1}{n+2},$$

이고, 이것이 $n+1$에 대한 결과이다. 귀납법에 의해 모든 $n \geq 1$에 대하여 $\tan S_n = \frac{n}{n+1}$이다.

S_n에 대한 공식. $\tan S_n = \frac{n}{n+1}$만으로는 어떤 정수 k에 대하여 $S_n = \arctan\frac{n}{n+1} + k\pi$라는 것밖에 말할 수 없다. $k = 0$임을 보이기 위해 다시 귀납법으로

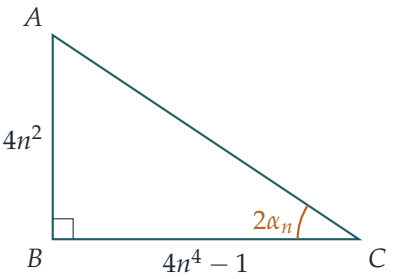
$$S_n = \arctan\frac{n}{n+1}.$$

임을 증명한다. $n = 1$일 때 $S_1 = \arctan\frac{1}{2}$이므로 성립한다. 어떤 n에 대하여 결과가 성립한다고 가정하자. $0 < \frac{n}{n+1} < 1$이므로 $0 < S_n < \arctan 1 = \frac{1}{4}\pi$이다. 또 $0 < \frac{1}{2(n+1)^2} < 1$이므로 $0 < \theta_{n+1} < \frac{1}{4}\pi$이다. 두 식을 더하면

$$0 < S_{n+1} = S_n + \theta_{n+1} < \tfrac{1}{2}\pi.$$

따라서 S_{n+1}은 $[0, \frac{1}{2}\pi)$에 있는데, 이는 음이 아닌 수에서 arctan의 치역과 정확히 일치하며, 첫 번째 결과에 의해 $\tan S_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$이다. 이 구간에서 tan은 일대일(one-to-one)이므로 $S_{n+1} = \arctan\frac{n+1}{n+2}$이다. 이로써 귀납법이 완성된다.

소문항 (ii)



B에서의 각이 직각이므로 각 C의 대변은 AB이고 이웃한 변은 BC이다($n \geq 1$이면 $4n^4 - 1 > 0$임에 주의하자). 따라서

$$\tan 2\alpha_n = \frac{AB}{BC} = \frac{4n^2}{4n^4-1}.$$

소문항 (i)을 보면 $\tan\alpha_n = \frac{1}{2n^2}$을 시도해 볼 만하다. $t = \frac{1}{2n^2}$로 두면 배각 공식(double-angle formula)에 의해

$$\frac{2t}{1-t^2} = \frac{\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{4n^4}} = \frac{4n^2}{4n^4-1},$$

이 되어 일치한다. 이것이 단지 가능한 값 중 하나가 아니라 바로 그 값임을 확인하기 위해 $t = \tan\alpha_n$으로 쓰자. 방정식 $\frac{2t}{1-t^2} = \frac{4n^2}{4n^4-1}$을 정리하면 이차방정식(quadratic)

$$4n^2t^2 + 2(4n^4-1)t - 4n^2 = 0,$$

을 얻고, 이 방정식의 두 근의 곱은 -1이다. 한 근이 $\frac{1}{2n^2}$이므로 다른 근은 $-2n^2 < 0$이다. 그런데 $2\alpha_n$은 직각삼각형에서 직각이 아닌 각이므로 $0 < 2\alpha_n < \frac{1}{2}\pi$이고, 따라서 $0 < \alpha_n < \frac{1}{4}\pi$이며 $t > 0$이다. 그러므로 $\tan\alpha_n = \frac{1}{2n^2}$이고, α_n이 arctan의 치역에 있으므로

$$\alpha_n = \arctan\frac{1}{2n^2}.$$

생각해 보기 여기서 무한급수는 무엇을 뜻하며, 소문항 (i)은 어떻게 도움이 될까?

무한급수는 부분합(partial sums)의 극한이며, 소문항 (i)에 의해 부분합은

$$\sum_{n=1}^{N}\alpha_n = S_N = \arctan\frac{N}{N+1}.$$

이다. $N \to \infty$일 때 $\frac{N}{N+1} \to 1$이고, arctan이 연속(continuous)이므로 $\arctan\frac{N}{N+1} \to \arctan 1 = \frac{1}{4}\pi$이다. 따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = \tfrac{1}{4}\pi,$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

검산

- $n = 1$일 때 소문항 (ii)의 삼각형은 익숙한 3–4–5 삼각형이고, $\tan 2\alpha_1 = \frac{4}{3}$이다. 이때 $\tan\alpha_1 = \frac{1}{2}$는 $\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$을 만족한다.
- $S_2 = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{8}$이고, $\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{16}} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$이므로 공식이 예측한 대로이다.
- 수치적으로 처음 2000개의 항을 더하면 $S_{2000} \approx 0.785148$이고, $\frac{1}{4}\pi \approx 0.785398$과 비교된다. 차이는 약 $\frac{1}{4000}$인데, 이는 당연하다. 뺄셈 공식(subtraction formula)에 의해 정확히 $\frac{1}{4}\pi - \arctan\frac{N}{N+1} = \arctan\frac{1}{2N+1}$이기 때문이다.

흔한 실수

- S_n이 $[0, \frac{1}{2}\pi)$에 있음을 보이지 않고 $\tan S_n = \frac{n}{n+1}$에서 곧바로 $S_n = \arctan \frac{n}{n+1}$이라고 결론짓는 것.
- 이차방정식의 다른 근을 배제하지 않고 운 좋은 추측만으로 $\tan \alpha_n = \frac{1}{2n^2}$이라고 두는 것.
- 무한급수가 S_N의 극한이라는 말 없이 S_∞처럼 다루는 것.

STEP 너머

이것은 모습을 바꾼 망원급수(telescoping series)이다. $\frac{1}{2m^2} = \frac{(2m+1)-(2m-1)}{1+(2m+1)(2m-1)}$이므로 각 항은 $\arctan(2m+1) - \arctan(2m-1)$이고, 합은 $\arctan(2n+1) - \frac{1}{4}\pi$로 줄어드는데, 이는 $\arctan \frac{n}{n+1}$과 같다. 무한급수를 부분합의 극한으로 정의하는 것, 그리고 극한을 연속함수 안으로 언제 옮길 수 있는지 아는 것은 해석학(analysis) 첫 강좌의 출발점이다. 이에 대해 읽어 보기 좋은 책은 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)이다.

풀이

STEP II 2015, 문제 6

순수수학 • 대칭성에 의한 적분

STEP II 2015, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/15-s2-q6

핵심 아이디어

$\sin x$를 $\cos\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$로 쓰면 $1 + \sin x$가 배각(double-angle) 식으로 바뀌고, 그러면 $\sec^2$은 곧바로 적분된다. 치환(substitution) $y = \pi - x$는 $[0, \pi]$를 그 중점에 대하여 반사(reflection)하는데, $\sin x$는 이 반사에 대해 변하지 않는다. 따라서 $\mathrm{f}(\sin x)$ 앞에 곱해진 다항식 인수는 그것을 반사한 형태로 바꿔 쓸 수 있다. 소문항 (iii)의 삼차식은 이렇게 바꿔 쓰면 x의 거듭제곱이 한꺼번에 모두 사라지도록 골라 놓은 것이다.

풀이

소문항 (i)

$\sin x = \cos\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$이고 $1 + \cos 2\theta = 2\cos^2\theta$이므로, $\theta = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x$로 두면

$$1 + \sin x = 1 + \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi - x\right) = 2\cos^2\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}x\right).$$

양변의 역수(reciprocal)를 취하고 2를 곱하면 $\sec^2\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x\right) = \dfrac{2}{1+\sin x}$를 얻으므로, 원하는 결과가 성립한다. (양변은 $\sin x = -1$인 같은 점들에서 정의되지 않는다.)

따라서

$$\int \frac{1}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sec^2\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}x\right)\mathrm{d}x = -\tan\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}x\right) + C,$$

이다. $\tan\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x\right)$를 미분하면 연쇄법칙(chain rule)에 의해 $-\frac{1}{2}$라는 인수가 생기기 때문이다.

소문항 (ii)

$I = \int_0^{\pi} x\,\mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x$라 하자. $y = \pi - x$로 두면 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}y$이고, 적분 구간의 끝 $x = 0, \pi$는 $y = \pi, 0$이 되며, $\sin x = \sin(\pi - y) = \sin y$이다. 그러면

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi}^{0} (\pi - y)\,\mathrm{f}(\sin y)\,(-\mathrm{d}y) = \int_0^{\pi} (\pi - y)\,\mathrm{f}(\sin y)\,\mathrm{d}y \\ &= \pi \int_0^{\pi} \mathrm{f}(\sin y)\,\mathrm{d}y - \int_0^{\pi} y\,\mathrm{f}(\sin y)\,\mathrm{d}y = \pi \int_0^{\pi} \mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x - I, \end{aligned}$$

이다. y는 단지 형식 변수(dummy variable)일 뿐이기 때문이다. 따라서 $2I = \pi \int_0^{\pi} \mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x$이고, 이것이 구하는 결과이다.

생각해 보기 모르는 적분 I가 양변에 모두 나타났다. 이것이 문제가 될까?

그렇지 않다. 오히려 바로 우리가 원하던 것이다. 치환으로 I의 값을 직접 구하는 것은 아니지만, I에 대한 일차방정식을 얻게 되고, 그 방정식을 풀면 된다.

이제 $\mathrm{f}(t) = \dfrac{1}{1+t}$로 두자. 이 함수는 $t \in [0,1]$에서 연속이며, 이 구간은 $[0, \pi]$에서 $\sin x$가 갖는 값의 범위이다. 소문항 (i)에 의해

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x = \Big[-\tan\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}x\right) \Big]_0^{\pi} = -\tan\left(-\tfrac{1}{4}\pi\right) + \tan\tfrac{1}{4}\pi = 1 + 1 = 2,$$

이고, $\tan\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x\right)$는 $[0, \pi]$에서 연속이다. 각이 $[-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]$ 안에 머물기 때문이다. 그러므로

$$\int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \times 2 = \pi.$$

소문항 (iii)

같은 반사를 이용한다. $g(x) = 2x^3 - 3\pi x^2$라 하자. 전개하면

$$\begin{aligned} g(\pi - x) &= 2(\pi^3 - 3\pi^2 x + 3\pi x^2 - x^3) - 3\pi(\pi^2 - 2\pi x + x^2) \\ &= -\pi^3 + 3\pi x^2 - 2x^3 = -\pi^3 - g(x). \end{aligned}$$

$J = \int_0^{\pi} \dfrac{g(x)}{(1+\sin x)^2}\,\mathrm{d}x$라 하자. 소문항 (ii)에서와 똑같이 $y = \pi - x$로 치환하면

$$J = \int_0^{\pi} \frac{g(\pi - y)}{(1+\sin y)^2}\,\mathrm{d}y = -\pi^3 K - J, \qquad \text{단, } K = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{(1+\sin x)^2}.$$

따라서 $J = -\frac{1}{2}\pi^3 K$이다.

생각해 보기 왜 하필 이 삼차식이 이렇게 잘 들어맞을까?

중점으로부터의 거리 $u = x - \frac{1}{2}\pi$로 나타내면 $g(x) = 2u^3 - \frac{3}{2}\pi^2 u - \frac{1}{2}\pi^3$이다. $\sin x = \cos u$이므로 함수 $1/(1+\sin x)^2$는 u에 대한 우함수(even function)이고, 따라서 홀수 차수 항 $2u^3$과 $-\frac{3}{2}\pi^2 u$는 대칭 구간에서 적분하면 0이 된다. 상수 $-\frac{1}{2}\pi^3$만 남는데, 이것이 바로 앞에서 얻은 결과이다. 소문항 (ii)도 $x = u + \frac{1}{2}\pi$로 두면 같은 이야기이다.

K를 구하기 위해 소문항 (i)의 항등식을 제곱하면 $\dfrac{1}{(1+\sin x)^2} = \frac{1}{4}\sec^4\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x\right)$이다. $u = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x$로 치환하면 $\mathrm{d}x = -2\,\mathrm{d}u$이고, $x = 0, \pi$는 $u = \frac{1}{4}\pi, -\frac{1}{4}\pi$가 된다. $\sec^4 u = (1+\tan^2 u)\sec^2 u$로 쓰면 그 적분은 $\tan u + \frac{1}{3}\tan^3 u$이므로

$$\begin{aligned} K &= \int_{\pi/4}^{-\pi/4} \tfrac{1}{4}\sec^4 u\,(-2\,\mathrm{d}u) = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (1+\tan^2 u)\sec^2 u\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\Big[\tan u + \tfrac{1}{3}\tan^3 u\Big]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{1}{2}\left(\tfrac{4}{3} + \tfrac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

그러므로

$$\int_0^{\pi} \frac{2x^3 - 3\pi x^2}{(1+\sin x)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi^3}{2}\cdot\frac{4}{3} = -\frac{2\pi^3}{3}.$$

검산

- $-\tan\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x\right)$를 미분하면 $\frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x\right) = 1/(1+\sin x)$를 얻는다.
- 부호: 소문항 (ii)에서 피적분함수는 양수이고, $\frac{1}{2} \le 1/(1+\sin x) \le 1$로부터 하한 $\frac{1}{4}\pi^2 \approx 2.47$과 상한 $\frac{1}{2}\pi^2 \approx 4.93$을 얻으므로 $\pi \approx 3.14$는 그럴듯한 값이다. 소문항 (iii)에서는 $(0, \pi]$에서 $2x^3 - 3\pi x^2 = x^2(2x - 3\pi) < 0$이므로 답이 음수인 것이 맞다.
- 수치 적분(numerical quadrature)으로 계산하면 $\int_0^{\pi}(1+\sin x)^{-2}\,\mathrm{d}x \approx 1.33333$이고 소문항 (iii)의 적분은 ≈ -20.6709인데, 이는 각각 $\frac{4}{3}$, $-\frac{2}{3}\pi^3$과 일치한다.

흔한 실수

- 소문항 (i)에서 연쇄법칙으로 생기는 인수 $-\frac{1}{2}$를 빠뜨려 $+2\tan(\dots)$나 $-\frac{1}{2}\tan(\dots)$를 얻는 실수.
- 적분 구간의 위끝과 아래끝을 바꾸면 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}y$에서 생긴 음의 부호가 상쇄된다는 것을 잊는 실수.
- 소문항 (iii)에서 부분적분(integration by parts)을 세 번 하려는 것. 그렇게 해도 풀 수는 있지만, 반사를 이용하면 한 줄로 끝난다.

STEP 너머

소문항 (ii)의 요령은 대칭성(symmetry)을 이용한다. 가중 함수(weight function)가 어떤 반사에 대해 변하지 않으면, 피적분함수 중 반사의 중심에 대해 우함수인 부분만이 적분값에 기여한다. 이 아이디어는 대학 1학년 수학 곳곳에서 만나게 된다. 푸리에 급수(Fourier series)에서 기함수(odd function)는 코사인 항을 갖지 않고, 확률에서 μ에 대해 대칭인 분포는 평균이 μ이다. 치환 $t = \tan\frac{1}{2}x$는 $\sin x$와 $\cos x$의 임의의 유리함수(rational function)에 대해 쓸 수 있는 체계적인 대안이다. 이와 같은 적분을 더 보고 싶다면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*를 참고하라.

풀이

STEP II 2015, 문제 7

순수수학 • 교차하는 원

STEP II 2015, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/15-s2-q7

핵심 아이디어

두 원이 두 점에서 만날 때, 그 두 점을 지나는 직선(공통현, common chord)은 두 중심을 잇는 직선에 수직이다. 원 D가 C를 이등분(bisect)하는 것은 정확히 이 현이 C의 지름일 때, 즉 이 현이 C의 중심을 지날 때이다. 그러면 두 중심과 한 교점이 이루는 직각삼각형에 피타고라스(Pythagoras) 정리를 적용하여 "이등분한다"는 조건을 하나의 방정식 $(\text{중심 사이의 거리})^2 = r^2 - a^2$으로 바꿀 수 있다.

풀이

소문항 (i)

D의 중심을 Q, 반지름을 r라 하고, O를 원점이라 하자.

일반적인 조건. D가 C를 이등분하고, $|P| = a$인 두 점 P와 $P' = -P$에서 만난다고 하자. 두 점 모두 D 위에 있으므로 $QP = QP' = r$이다. 따라서 Q는 P와 P'에서 같은 거리에 있으므로 PP'의 수직이등분선(perpendicular bisector) 위에 있고, 이 직선은 O(PP'의 중점)를 지난다. 그러므로 $OQ \perp OP$이고, 삼각형 OQP에 피타고라스 정리를 적용하면 다음을 얻는다.

$$r^2 = OQ^2 + a^2. \qquad (*)$$

역으로, D가 $OQ^2 = r^2 - a^2$이고 $OQ > 0$인 임의의 원이면, P를 C 위에서 $OP \perp OQ$가 되도록 잡자. 그러면 $QP^2 = OQ^2 + a^2 = r^2$이고, $-P$에 대해서도 마찬가지이므로 D는 C의 지름의 양 끝점인 두 점을 지난다. 서로 다른 두 원은 많아야 두 점에서 만나므로 이 두 점이 유일한 교점이고, D는 C를 이등분한다.

$r > a$**일 때의 존재성.** 중심을 x축 위, O로부터 거리 $\sqrt{r^2 - a^2} > 0$인 곳에 두자.

$$\left(x - \sqrt{r^2 - a^2}\right)^2 + y^2 = r^2.$$

직접 확인해 보자. 이 방정식에서 $x^2 + y^2 = a^2$을 빼면 $-2x\sqrt{r^2 - a^2} + (r^2 - a^2) = r^2 - a^2$이므로 $x = 0$이고($r \neq a$이므로), 따라서 $y = \pm a$이다. 두 원은 정확히 $(0, a)$와 $(0, -a)$에서 만나며, 이 두 점은 C 위에서 지름의 양 끝에 있다. 따라서 반지름이 r인 이 원은 C를 이등분한다.

$r \leq a$**일 때의 불가능성.** 반지름이 r인 어떤 원이 C를 이등분한다면, $(*)$에 의해 $r^2 = OQ^2 + a^2 \geq a^2$이다. 따라서 $r < a$는 불가능하다. $r = a$이면 $(*)$에 의해 $OQ = 0$이어야 하므로 D는 C 자신이 되고, 이 원은 C와 정확히 두 점이 아니라 무한히 많은 점에서 만난다. 그러므로 반지름이 $r \leq a$인 원은 C를 이등분하지 않는다.

소문항 (ii)

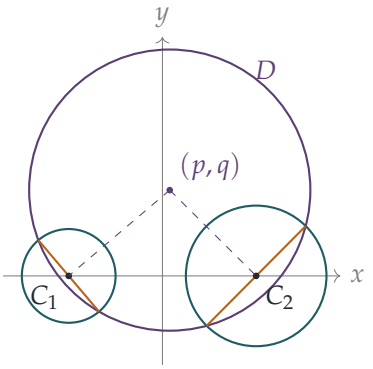
D의 중심을 (p, q)라 하자. 각 원에 $(*)$를 적용하면(원점을 해당 원의 중심으로 옮겨서) 다음을 얻는다.

$$(p + d)^2 + q^2 = r^2 - a_1^2,$$
$$(p - d)^2 + q^2 = r^2 - a_2^2.$$

첫째 식에서 둘째 식을 빼면 q^2항과 p^2항이 소거되어 $4pd = a_2^2 - a_1^2$만 남으므로

$$p = \frac{a_2^2 - a_1^2}{4d},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.



그림($d = 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1.5$, $r = 3$)에서 각 공통현(호박색)은 C_1 또는 C_2의 지름이며, 두 중심을 잇는 점선에 수직이다.

q를 구하기 위해 p를 첫째 방정식에 다시 대입한다. 먼저

$$p + d = \frac{4d^2 + a_2^2 - a_1^2}{4d},$$

이므로

$$q^2 = r^2 - a_1^2 - \frac{(4d^2 + a_2^2 - a_1^2)^2}{16d^2} = \frac{16d^2r^2 - 16d^2a_1^2 - (4d^2 + a_2^2 - a_1^2)^2}{16d^2}.$$

분자에서 빼는 항들을 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} 16d^2a_1^2 + (4d^2 + a_2^2 - a_1^2)^2 &= 16d^4 + 8d^2(a_2^2 - a_1^2) + 16d^2a_1^2 + (a_2^2 - a_1^2)^2 \\ &= 16d^4 + 8d^2(a_1^2 + a_2^2) + (a_2^2 - a_1^2)^2 \\ &= \left(4d^2 + (a_2 - a_1)^2\right)\left(4d^2 + (a_2 + a_1)^2\right), \end{aligned}$$

여기서 마지막 줄은 $(a_2 - a_1)^2 + (a_2 + a_1)^2 = 2(a_1^2 + a_2^2)$이고 $(a_2 - a_1)^2(a_2 + a_1)^2 = (a_2^2 - a_1^2)^2$이기 때문에 성립한다. 따라서

$$q = \pm\frac{\sqrt{16r^2d^2 - \left(4d^2 + (a_2 - a_1)^2\right)\left(4d^2 + (a_2 + a_1)^2\right)}}{4d}.$$

생각해 보기 부등식(inequality)은 어디에서 나오는가? 지금까지는 부등식처럼 보이는 것이 하나도 없다.

중심 (p, q)는 실제 좌표평면 위의 점이므로 $q^2 \geq 0$이다. $16d^2 > 0$이므로 이는 다음을 뜻한다.

$$16r^2d^2 \geq \left(4d^2 + (a_2 - a_1)^2\right)\left(4d^2 + (a_2 + a_1)^2\right),$$

이것이 r에 대하여 구하려는 조건이다.

또한 소문항 (i)의 조건 $r > a_1$(및 $r > a_2$)이 추가 조건이 아님을 확인해야 한다. $d > a_1$이므로 $4d^2 + a_2^2 - a_1^2 > 0$이고, 따라서 $p + d > 0$이다. 그러면 $r^2 - a_1^2 = (p + d)^2 + q^2 > 0$이다. 마찬가지로 $d > a_2$이므로 $d - p > 0$이고, $r^2 - a_2^2 = (p - d)^2 + q^2 > 0$이다. 따라서 위에서 구한 원 D는 실제로 C_1과 C_2를 모두 이등분한다.

검산

- 대칭인 경우 $a_1 = a_2 = a$: 이때 y축에 대한 대칭성이 요구하는 대로 $p = 0$이고, 조건은 $16r^2d^2 \geq 4d^2(4d^2 + 4a^2)$, 즉 $r^2 \geq d^2 + a^2$이 된다. 이는 중심이 원점에 있을 때의 $(*)$와 정확히 같으며, 원점은 두 점 $(\pm d, 0)$ 모두에 가장 가까운 중심의 위치이다.
- 그림의 예에서 $p = 0.15625$, $q \approx 1.830$이고, D와 C_1의 교점은 대략 $(-1.353, -0.762)$와 $(-2.647, 0.762)$이며, 그 중점은 C_1의 중심인 $(-2, 0)$이다. 이 경우 가능한 가장 작은 r는 약 2.377이다.

- C_1과 C_2를 맞바꾸어도$(a_1 \leftrightarrow a_2, d \to -d)$ p의 식의 꼴은 변하지 않고 부등식도 변하지 않는다. 당연히 그래야 한다.

흔한 실수

- 소문항 (i)에서 $r = a$인 경우를 빠뜨리는 것: $(*)$는 $OQ = 0$을 허용하므로, $D = C$가 왜 해당하지 않는지 밝혀야 한다.
- 조건을 $OQ^2 = r^2 + a^2$으로 쓰는 것. 이는 이등분하는 것과 직각으로 만나는 것(직교하는 원, orthogonal circles)을 혼동한 것이다. 삼각형을 그려 보라. 직각은 C의 중심에 있으므로 빗변은 D의 반지름 r이다.
- $q = +\sqrt{\cdots}$만 답하는 것: x축에 대하여 대칭이동하면 두 번째 원을 얻는다.

STEP 너머

점 (p, q)와 중심이 (x_0, y_0)이고 반지름이 r인 원에 대하여 $(p - x_0)^2 + (q - y_0)^2 - r^2$을 그 원에 대한 점의 **방멱**(power)이라 하고, 두 원에 대한 방멱이 같은 점들의 집합은 직선이 되는데, 이를 **근축**(radical axis)이라 한다. 우리가 한 것처럼 두 원의 방정식을 빼면 근축을 구할 수 있다. 여기서 이등분 조건은 C의 중심의 D에 대한 방멱이 $-a^2$이라는 것을 말한다. 이러한 아이디어와 이와 관련된 원에 대한 반전(inversion)은 Needham의 *Visual Complex Analysis*에 아름답게 전개되어 있으며, STEP 스타일의 활용 예는 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*에 많이 실려 있다.

풀이

STEP II 2015, 문제 8

순수수학 • 벡터와 접하는 원

STEP II 2015, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/15-s2-q8

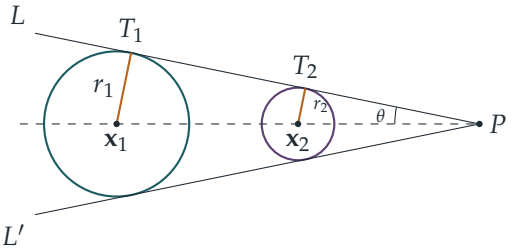
핵심 아이디어

각 원의 중심은 두 접선(tangent)으로부터 같은 거리(자기 반지름)만큼 떨어져 있으므로, 두 중심은 모두 L과 L'이 이루는 각을 이등분하는 직선 위에 있다. 그 직선 위에서 P로부터의 거리는 반지름에 비례하고, 이로부터 (i)의 공식이 곧바로 나온다. (ii)에서는 공식을 $r_1 r_2$로 나누면 훨씬 대칭적인 모양이 된다. $\mathbf{x}_i / r_i$와 $1/r_i$로 나타내면 세 초점(focus)은 계수의 합이 0인 하나의 일차 관계식을 만족하는데, 이것이 바로 한 직선 위에 있다(collinear)는 뜻이다.

풀이

소문항 (i)

P에서 L과 L'이 이루는 각 가운데 원들을 포함하는 각의 절반을 θ라 하자.



원의 접선은 중심으로부터의 수직 거리가 반지름과 같다. 따라서 $\mathbf{x}_1$은 L과 L' 모두로부터 거리 r_1만큼 떨어져 있고, 만나는 두 직선으로부터 같은 거리에 있는 점들은 P에서의 두 각의 이등분선(angle bisector) 가운데 하나 위에 있다. 두 원은 L에 대해 같은 쪽에, 그리고

L'에 대해서도 같은 쪽에 있으므로, 두 중심은 L과 L'이 나누는 네 각 영역 가운데 같은 영역에 있다. 그러므로 두 중심은 P에서 출발하는 **같은** 반직선, 즉 그 영역의 이등분선 위에 있다. 이 반직선 방향으로 P에서 원들을 향하는 단위벡터(unit vector)를 $\mathbf{u}$라 하자.

L이 C_1에 접하는 점을 T_1이라 하면, 삼각형 PT_1X_1(여기서 X_1은 중심)은 T_1에서 직각이므로 $r_1 = PX_1 \sin\theta$이다. 같은 방법으로 $r_2 = PX_2 \sin\theta$이다. 따라서

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{p} = \frac{r_1}{\sin\theta}\,\mathbf{u}, \qquad \mathbf{x}_2 - \mathbf{p} = \frac{r_2}{\sin\theta}\,\mathbf{u},$$

이고, 여기서 $\mathbf{p}$는 P의 위치벡터(position vector)이다. $\mathbf{u}/\sin\theta$를 소거하면

$$r_2(\mathbf{x}_1 - \mathbf{p}) = r_1(\mathbf{x}_2 - \mathbf{p}) \quad \Longrightarrow \quad (r_1 - r_2)\,\mathbf{p} = r_1\mathbf{x}_2 - r_2\mathbf{x}_1.$$

두 원의 크기가 다르므로 $r_1 \neq r_2$이고, 따라서 양변을 나눌 수 있다.

$$\mathbf{p} = \frac{r_1\mathbf{x}_2 - r_2\mathbf{x}_1}{r_1 - r_2},$$

이것이 구하는 결과이다. (반지름이 같으면 L과 L'이 평행하게 되어 초점이 아예 존재하지 않는다.)

소문항 (ii)

> **생각해 보기** $\mathbf{p}$에 대한 공식은 한눈에 보이는 방식으로 대칭적이지 않다. 세 초점이 서로 비슷한 모양이 되도록 고쳐 쓸 수 있을까?

$(r_1 - r_2)\mathbf{p} = r_1\mathbf{x}_2 - r_2\mathbf{x}_1$을 r_1r_2로 나누자. $s_i = 1/r_i$, $\mathbf{y}_i = \mathbf{x}_i/r_i$로 쓰면 이 식은

$$(s_2 - s_1)\,\mathbf{p} = \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1.$$

이 된다. 나머지 두 쌍의 원에 소문항 (i)을 적용하면($r_3 \neq r_1$, $r_3 \neq r_2$이고 원들이 겹치지 않으므로 적용할 수 있다), Q와 R의 위치벡터를 각각 $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$이라 할 때

$$(s_3 - s_1)\,\mathbf{q} = \mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_1, \qquad (s_3 - s_2)\,\mathbf{r} = \mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_2.$$

을 얻는다. 우변들은 $(\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1) + (\mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_2) = \mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_1$을 만족하므로

$$(s_2 - s_1)\,\mathbf{p} + (s_3 - s_2)\,\mathbf{r} = (s_3 - s_1)\,\mathbf{q}.$$

이다. $s_3 \neq s_1$이므로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{q} = \lambda\,\mathbf{p} + (1 - \lambda)\,\mathbf{r}, \qquad \text{여기서} \lambda = \frac{s_2 - s_1}{s_3 - s_1},$$

두 계수 $\frac{s_2 - s_1}{s_3 - s_1}$과 $\frac{s_3 - s_2}{s_3 - s_1}$의 합이 1이기 때문이다. 따라서 $\mathbf{q} = \mathbf{r} + \lambda(\mathbf{p} - \mathbf{r})$이고, 이는 R과 P를 지나는 직선 위의 점이다. 그러므로 P, Q, R은 한 직선 위에 있다. (만약 P와 R이 일치하면 이 식에서 $Q = P = R$도 성립하므로, 명제는 자명하게 성립한다.)

소문항 (iii)

소문항 (ii)에서 $\mathbf{q} = \lambda\mathbf{p} + (1-\lambda)\mathbf{r}$이다. $P \neq R$이라 가정하면, 점 $\lambda\mathbf{p} + (1-\lambda)\mathbf{r}$이 중점(midpoint) $\frac{1}{2}(\mathbf{p}+\mathbf{r})$이 되는 것은 정확히 $\lambda = \frac{1}{2}$일 때이다(λ의 값이 다르면 직선 위의 다른 점이 된다). 따라서 조건은

$$\frac{s_2 - s_1}{s_3 - s_1} = \frac{1}{2} \iff 2s_2 = s_1 + s_3 \iff \frac{2}{r_2} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} \iff r_2 = \frac{2r_1 r_3}{r_1 + r_3}.$$

이다. 말로 하면, r_2는 r_1과 r_3의 조화평균(harmonic mean)이어야 한다. (퇴화된(degenerate) 경우인 $P = R$에서는 세 초점이 모두 일치하므로, 반지름이 어떻든 Q는 자명하게 한가운데에 있다.)

검산

- 소문항 (i): $r_2 \to 0$으로 하면 C_2가 한 점으로 줄어들고, 공식은 $\mathbf{p} = \mathbf{x}_2$를 준다. 한 점에서 그은 접선은 그 점을 지나기 때문이다. 또한 $\mathbf{p}$는 $\mathbf{x}_2 + \frac{r_2}{r_1 - r_2}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$이므로, 그림에서처럼 $r_2 < r_1$일 때 작은 원 너머에 있다.
- (iii)의 수치 예: 중심이 $(0,0)$, $(10,1)$, $(3,8)$이고 반지름이 1, $\frac{3}{2}$, 3인 원을 잡으면 $\frac{2}{3/2} = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$이다. 이때 $P = (-20,-2)$, $R = (17,-6)$, $Q = (-\frac{3}{2},-4)$이고, 실제로 Q는 PR의 중점이다.
- 공식은 컴퓨터로도 확인하였다. 무작위로 고른 여러 쌍의 원에 대해 두 접선의 교점을 직접 구하면 같은 점 P가 나온다.

흔한 실수

- P가 왜 두 중심을 잇는 직선 위에 있는지, 또는 왜 P가 두 중심을 잇는 선분 바깥에 있는지 설명하지 않는 것(두 중심을 모두 품는 것은 P에서 출발하는 **같은** 반직선이다).
- 관계식의 계수의 합이 0인지 확인하지 않고 $\mathbf{q} - \mathbf{p}$와 $\mathbf{r} - \mathbf{p}$가 평행함을 보이려는 것. 관계식 $\alpha\mathbf{p} + \beta\mathbf{q} + \gamma\mathbf{r} = \mathbf{0}$이 세 점이 한 직선 위에 있음을 뜻하는 것은 $\alpha + \beta + \gamma = 0$일 때뿐이다.

STEP 너머

초점 P는 C_1을 C_2로 옮기는, 양의 배율 r_2/r_1을 갖는 확대(enlargement, 닮음변환 homothety)의 중심이다. 소문항 (ii)는 몽주(Monge)의 세 원 정리이다. Q와 R을 중심으로 하는 확대를 합성하면 P를 중심으로 하는 확대가 되고, 두 확대를 합성한 확대의 중심은 두 중심을 지나는 직선 위에 있다. (ii)의 계산은 무게중심좌표(barycentric coordinates, 아핀 좌표)를

처음 맛보는 것으로, 이 좌표에서 세 점이 한 직선 위에 있다는 것은 계수의 합이 0인 일차 관계식으로 표현된다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수 입문)는 이 뒤에 있는 선형사상을 다루고, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에는 이런 종류의 문제가 더 실려 있다.

풀이

STEP II 2015, 문제 9

역학 • 강체의 회전

STEP II 2015, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/15-s2-q9

핵심 아이디어

이 계의 모든 것은 한 점, 곧 두 입자의 질량중심(centre of mass) G가 좌우한다. A에 고정된 강체(rigid body)는 G가 A의 연직 아래에 있을 때 정지한 채 매달리고, G를 꼭대기 너머로 넘길 만큼 에너지가 충분할 때에만 완전한 회전을 한다. 따라서 G의 위치와 A로부터의 거리를 구하면 두 소문항 모두 금방 풀린다.

풀이

B와 C를 가벼운 강체 막대로 연결된 입자로, A에 있는 축을 매끄러운 축으로 모형화한다. 따라서 일을 하는 힘은 무게뿐이다.

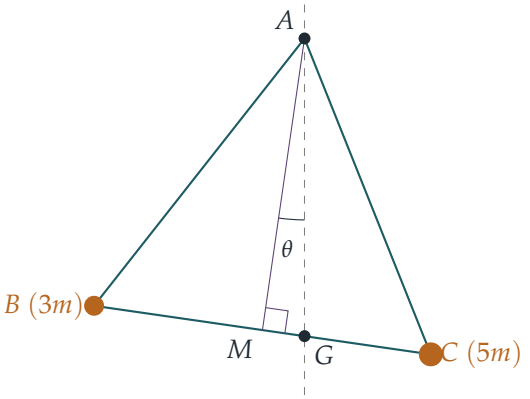
소문항 (i)

막대가 가벼우므로 계의 질량중심은 B에 있는 $3m$과 C에 있는 $5m$의 질량중심이다. 이 점 G는 BC 위에 있고

$$BG = \frac{5}{8}a, \qquad CG = \frac{3}{8}a.$$

BC의 중점을 M이라 하자. 그러면 C 쪽으로 $MG = \frac{5}{8}a - \frac{1}{2}a = \frac{1}{8}a$이다. 삼각형이 정삼각형이므로 $AM \perp BC$이고 $AM = \frac{\sqrt{3}}{2}a$이다. 따라서 삼각형 AMG에 피타고라스 정리(Pythagoras' theorem)를 적용하면

$$AG^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{64} = \frac{49a^2}{64}, \qquad AG = \frac{7a}{8}.$$



평형(equilibrium) 상태에서 G에 작용하는 무게 $8mg$의 A에 대한 모멘트(moment)는 0이어야 하므로, G는 A의 연직 아래에 있다. 즉 직선 AG는 연직이다. 그런데 BC는 AM에 수직이고, 수평선은 연직선 AG에 수직이다. 두 직선을 모두 직각만큼 회전해도 그 사이의 각은 변하지 않으므로

$$\theta = \angle GAM.$$

직각삼각형 AMG(M에서 직각)에서

$$\sin\theta = \frac{MG}{AG} = \frac{a/8}{7a/8} = \frac{1}{7},$$

이 되어 요구한 결과를 얻는다. 더 무거운 입자인 C가 BC의 낮은 쪽 끝에 있다는 점에 주목하자. 당연히 그래야 한다.

소문항 (ii)

두 입자 모두 축으로부터의 거리가 a이므로 항상 같은 속력을 가진다. 삼각형이 각속력(angular speed) ω로 회전하면 각 입자의 속력은 $a\omega$이다. 충격량(impulse)을 받은 직후 B의 속력이 v이므로 C의 속력도 같고, 운동 에너지(kinetic energy)는

$$\tfrac{1}{2}(3m)v^2 + \tfrac{1}{2}(5m)v^2 = 4mv^2.$$

(같은 이야기이지만, A에 대한 관성 모멘트(moment of inertia)는 $8ma^2$이고 $\omega = v/a$이다.) 아래의 에너지 방정식에는 속력만 들어가므로 충격량의 방향은 상관없다.

> ? **생각해 보기** 줄에 매달린 입자처럼, 꼭대기에서 무언가가 팽팽하게 유지되도록 v가 충분히 커야 할까?

그렇지 않다. 막대는 강체이므로 당길 뿐 아니라 밀 수도 있다. 따라서 필요한 조건은 계가 한 바퀴를 다 돌기 전에 각속력이 0으로 떨어지지 않는 것뿐이다. 이것은 순수한 에너지 조건이다.

계의 위치 에너지(potential energy)는 G의 높이에 $8mg$를 곱한 값이다. G는 A를 중심으로 반지름 $AG = \frac{7}{8}a$인 원 위를 움직이므로, 위치 에너지는 G가 A의 연직 위에 있을 때 가장 크며, 이때 처음 위치보다

$$2 \cdot \frac{7a}{8} = \frac{7a}{4}$$

만큼 높다. 에너지 보존(conservation of energy)에 의해, G가 h만큼 올라간 위치에서

$$4m(a\omega)^2 = 4mv^2 - 8mgh.$$

우변은 $h = \frac{7}{4}a$일 때 가장 작다. 그곳에서 우변이 양수이면 운동 내내 $\omega \neq 0$이므로 ω의 부호는 바뀌지 않고, 계는 같은 방향으로 계속 돌며 회전을 거듭한다. 음수이면 G가 꼭대기에 이르기 전에 ω가 0이 되어야 하므로 계는 되돌아 흔들린다. 따라서 조건은

$$4mv^2 > 8mg \cdot \frac{7a}{4} \iff v^2 > \frac{7ag}{2}.$$

따라서

$$v_0 = \sqrt{\frac{7ag}{2}}.$$

(정확히 $v = v_0$이면 G는 A 위의 위치를 향해 천천히 다가가며, 거기에 도달하는 데 무한히 긴 시간이 걸린다. 이 때문에 조건은 등호가 없는 부등식(strict inequality)이다.)

검산

- 질량이 같다면 G는 M에 있어 $\theta = 0$이고 $AG = \frac{\sqrt{3}}{2}a$이다. $MG = 0$으로 두면 위의 공식들은 정확히 이 결과를 준다.
- 모든 방향에 대해 위치 에너지를 수치적으로 최소화하면 $\sin\theta = 0.142857\ldots = \frac{1}{7}$을 얻는다.
- 단위: ag의 단위는 $\mathrm{m^2\,s^{-2}}$이므로 v_0은 속력이다. $a = 1\,\mathrm{m}$이고 $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$이면 $v_0 \approx 5.86\,\mathrm{m\,s^{-1}}$이다.
- 운동을 한 단계씩 계산하는 컴퓨터 시뮬레이션으로 $v = 1.01v_0$이면 계가 꼭대기를 넘어가고 $v = 0.99v_0$이면 되돌아 흔들린다는 것을 확인할 수 있다.

흔한 실수

- G가 올라가는 높이를 (AG 대신 AM을 써서) $2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a$로 잡는 실수. 이렇게 하면 $v_0^2 = 2\sqrt{3}\,ag$가 된다.
- B와 C를 따로 다루면서 충격량이 C에도 속력 v를 준다는 사실을 잊는 실수.
- 꼭대기에서 "줄이 팽팽하게 유지된다"는 조건을 부과하는 실수. 막대는 미는 힘(thrust)을 받을 수 있으므로 그런 조건은 필요 없다.

STEP 너머

여기서의 에너지 논증은 복합 진자(compound pendulum)의 강체 버전이다. 질량중심으로부터 거리 d인 곳에 고정된 물체는 운동 방정식 $I\ddot{\psi} = -Mgd\sin\psi$를 따르며 단진자(simple pendulum)처럼 움직인다. 대학 1학년 과정에서는 이 방정식의 위상 평면(phase plane)을 배우게 되는데, 여기서 임계 속력 v_0은 진동과 완전한 회전을 나누는 분리선(separatrix)에 해당한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 고정축에 대한 강체의 회전과 물리 진자를 자세히 다룬다.

풀이

STEP II 2015, 문제 10

역학 • 구속 운동

STEP II 2015, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

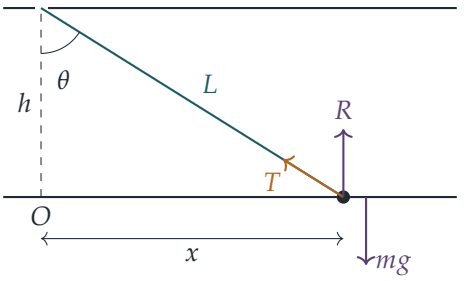
step.maths.org/questions/15-s2-q10

핵심 아이디어

이 문제는 구속 조건(constraint) 문제이다. 입자의 운동은 줄에 의해 완전히 결정되므로, 운동학(kinematics)을 먼저 다루고 힘은 그다음에 다룬다. 천장 아래에 있는 줄의 길이를 구멍 바로 아래 점으로부터 입자까지의 수평 거리로 나타낸 뒤 시간에 대하여 미분한다. 이때 그 길이의 변화율은 이미 알고 있다. 가속도를 구하고 나면 수평 방향으로 뉴턴(Newton)의 제2법칙을 적용하여 장력(tension)을 얻고, 연직 방향으로 힘을 분해하여 수직항력(normal reaction)을 얻는다. 입자가 바닥 위에 있는 동안 수직항력은 음이 아니어야 한다.

풀이

입자를 매끄러운 수평 바닥 위의 점으로, 줄을 가볍고 늘어나지 않는 것으로 모형화한다. 따라서 장력 T는 줄 전체에서 같다. 구멍 바로 아래에 있는 바닥 위의 점을 O, 입자와 O 사이의 거리를 x, 구멍과 입자 사이에 있는 줄의 길이를 L이라 하자.



속력

피타고라스(Pythagoras) 정리와 삼각형으로부터

$$L^2 = x^2 + h^2, \qquad x = h\tan\theta, \qquad \sin\theta = \frac{x}{L}.$$

줄은 속력 V로 구멍을 통해 끌려 들어가므로 $\dot{L} = -V$이다. $L^2 = x^2 + h^2$을 시간에 대하여 미분하면(h는 상수이다)

$$2L\dot{L} = 2x\dot{x} \quad \Longrightarrow \quad \dot{x} = \frac{L}{x}\dot{L} = -\frac{VL}{x} = -\frac{V}{\sin\theta}.$$

따라서 입자는 다음 속력으로 O를 향해 움직인다.

$$\boxed{v = \frac{V}{\sin\theta} = V\operatorname{cosec}\theta}$$

이 값은 항상 V보다 크다(V로 움직이는 것은 입자가 아니라 줄이다).

? 생각해 보기 입자의 속력이 왜 그냥 V나 $V\sin\theta$가 아닐까?

줄이 끌려 들어가는 속력과 같아야 하는 것은 입자 속도 중 **줄 방향** 성분뿐이다. 줄이 바닥과 이루는 각이 $\frac{\pi}{2} - \theta$이므로 그 성분은 $v\sin\theta$이다. $v\sin\theta = V$로 놓으면 위와 같은 답을 얻으며, 왜 $v > V$인지도 분명해진다.

가속도

몫의 미분법(quotient rule)과 $\dot{L} = -V$, $\dot{x} = -VL/x$를 이용하여 $\dot{x} = -VL/x$를 한 번 더 미분한다.

$$\ddot{x} = -V\,\frac{\dot{L}\,x - L\,\dot{x}}{x^2} = -V\,\frac{-Vx + VL^2/x}{x^2} = -\frac{V^2(L^2 - x^2)}{x^3} = -\frac{V^2h^2}{x^3}.$$

$x = h\tan\theta$를 대입하면 $\ddot{x} = -\dfrac{V^2}{h\tan^3\theta}$이다. $\dot{x}$와 $\ddot{x}$가 모두 음수이므로 입자는 빨라지고 있다. 그 가속도의 크기는

$$\boxed{a = \frac{V^2}{h\tan^3\theta} = \frac{V^2\cos^3\theta}{h\sin^3\theta}}$$

이고, 방향은 O를 향한다. (검산으로, θ가 감소하면 $v = V/\sin\theta$는 실제로 증가한다.)

장력과 바닥에서 떨어지는 순간

입자에 작용하는 힘은 무게 mg, 바닥으로부터의 수직항력 R(바닥이 매끄러우므로 연직 방향), 줄 방향의 장력 T이다. 장력의 수평 성분은 O를 향하는 $T\sin\theta$, 연직 성분은 위쪽을 향하는 $T\cos\theta$이다.

수평 방향으로 뉴턴의 제2법칙을 적용하면

$$T\sin\theta = ma = \frac{mV^2}{h\tan^3\theta} \quad\Longrightarrow\quad \boxed{T = \frac{mV^2}{h\sin\theta\tan^3\theta} = \frac{mV^2\cos^3\theta}{h\sin^4\theta}}$$

연직 방향으로는 입자가 바닥 위에 있는 동안 평형 상태이므로

$$R + T\cos\theta = mg \quad\Longrightarrow\quad R = mg - \frac{mV^2\cos\theta}{h\sin\theta\tan^3\theta} = mg - \frac{mV^2}{h\tan^4\theta}.$$

생각해 보기 입자가 끌려 들어올 때 R은 어느 쪽으로 변할까?

입자가 O에 가까워지면 θ가 감소하므로 $\tan^4\theta$가 감소하고, R은 꾸준히 감소한다. 처음에는(θ가 클 때) R이 mg에 가깝다. 입자는 $R \geq 0$인 동안 바닥 위에 머무르고, 처음으로 $R = 0$이 되는 순간 바닥에서 떨어진다. 그 순간은

$$\frac{mV^2}{h\tan^4\theta} = mg \quad\Longleftrightarrow\quad \tan^4\theta = \frac{V^2}{gh},$$

일 때이며, 이것이 보이려던 것이다. θ가 이보다 작으면 식이 $R < 0$을 주는데 이는 불가능하므로, 입자는 실제로 바닥에서 떨어진 것이다.

검산

- 차원(dimension): V^2/h는 가속도, mV^2/h는 힘이며, $V^2/(gh)$는 $\tan^4\theta$가 그래야 하듯이 무차원이다.
- 극한: $\theta \to \frac{\pi}{2}$일 때(입자가 매우 멀리 있을 때) 줄은 거의 수평이고, 예상대로 $v \to V$, $a \to 0$이다. $\theta \to 0$일 때는 속력과 장력이 한없이 커지므로, 입자는 O에 도달하기 전에 바닥에서 떨어져야 한다.
- 수치: $V = 2$, $h = 1$, $\theta = \frac{\pi}{4}$이면 $v = 2\sqrt{2} \approx 2.83$, $a = 4$이다. $x(t) = \sqrt{(L_0 - Vt)^2 - h^2}$를 수치적으로 미분해도 같은 값을 얻는다. $g = 9.8$이면 입자는 $\theta \approx 38.6°$일 때 바닥에서 떨어진다.

흔한 실수

- 입자의 속력을 $V/\sin\theta$가 아니라 V나 $V\sin\theta$로 놓는 것.
- $\dot{x} = -VL/x$를 두 번째로 미분할 때 L이 변한다는 사실을 잊는 것.
- 줄이 일정한 속력으로 움직이므로 장력이 일정하다고 가정하는 것. 입자는 가속하므로 장력은 일정하지 않다.

STEP 너머

이 문제의 입자는 자유도(degree of freedom)가 하나뿐이다. 줄의 운동이 정해지면 매 순간 입자의 위치가 결정된다. 이런 구속 조건이 있는 문제는 대학 과정 1, 2학년에 배우는 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)에서 체계적으로 다룬다. 라그랑주 역학에서는 구속 조건을 좌표 선택에 반영하고, R과 T 같은 구속력은 나중에 구한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)에 이런 종류의 문제가 많이 실려 있다.

풀이

STEP II 2015, 문제 11

역학 • 운동량과 에너지

STEP II 2015, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

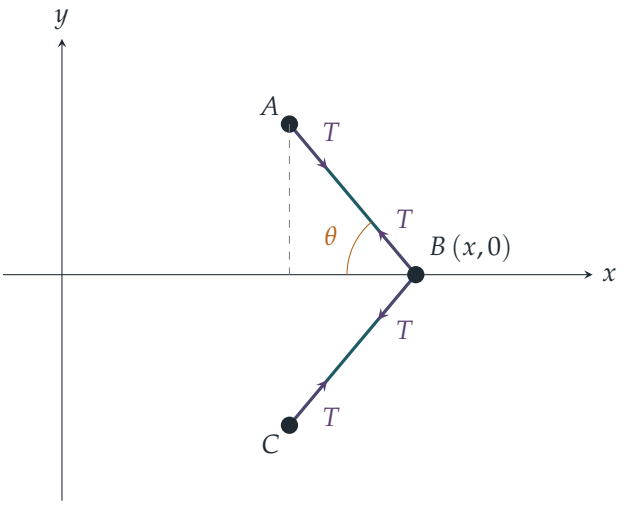
step.maths.org/questions/15-s2-q11

핵심 아이디어

운동이 x축에 대하여 대칭을 유지하므로, 두 좌표 x와 θ만으로 계 전체를 기술할 수 있다. 탁자는 매끄럽고(smooth) 줄은 가볍고 늘어나지 않으므로(inextensible), 두 가지 양이 보존된다(conserved). 바로 x 방향의 운동량(momentum)과 운동에너지(kinetic energy)이다. 이 두 보존 법칙에서 (ii)의 두 식이 곧바로 나오며, 두 번째 식을 주의 깊게 읽으면 $\dot{\theta}$가 결코 0이 될 수 없음을 알 수 있다. 이 사실 하나로 (iii)과 (iv)가 모두 해결된다.

풀이

A, B, C를 입자로, 줄을 가볍고 늘어나지 않는 것으로 모형화한다. 중력과 수직항력(normal reaction)은 연직 방향이므로, 수평 방향의 힘은 장력(tension)뿐이고 이는 계의 내력이다.



소문항 (i)

A는 음의 x 방향과 각 θ를 이루는 직선을 따라 B로부터 거리 a만큼 떨어져 있으므로

$$A = (x - a\cos\theta,\ a\sin\theta).$$

$\cos\theta$와 $\sin\theta$에 연쇄법칙(chain rule)을 적용하여 t에 대해 미분하면

$$\dot{\mathbf{r}}_A = \left(\dot{x} + a\sin\theta\,\dot{\theta},\ a\cos\theta\,\dot{\theta}\right),$$

이 되어 요구한 결과를 얻는다(여기서 $\dot{x} = v$는 B의 속력이다).

처음 설정과 충격량(impulse)이 모두 x축에 대한 대칭 변환에서 변하지 않으므로, 운동은 계속 대칭을 유지한다. 즉 $C = (x - a\cos\theta,\ -a\sin\theta)$이고 그 속도는 $\left(\dot{x} + a\sin\theta\,\dot{\theta},\ -a\cos\theta\,\dot{\theta}\right)$이다.

소문항 (ii)

먼저 초깃값을 구한다. 충격이 가해지는 순간 두 줄은 모두 y축 위에 놓여 B의 새 속도와 수직이므로, 줄이 A나 C를 갑자기 잡아당길 필요가 없다. 따라서 이들은 정지 상태에서 출발하고, $\dot{x} = u$이다. 전체 x-운동량은 mu이고 운동에너지는 $\frac{1}{2}mu^2$이다.

운동량. 외부의 수평 방향 힘이 없으므로 전체 x-운동량은 계속 mu와 같다.

$$m\dot{x} + 2m\left(\dot{x} + a\sin\theta\,\dot{\theta}\right) = mu \quad\Longrightarrow\quad 3\dot{x} + 2a\dot{\theta}\sin\theta = u. \tag{1}$$

(A와 C의 y-운동량은 당연히 서로 상쇄된다.) 여기서 우변은 B의 처음 속력인 u이다. 문제지에는 v로 인쇄되어 있지만, v는 이미 $\dot{x}$를 나타내는 데 쓰였으므로 이는 u의 오식임이 분명하다.

에너지. 줄이 가볍고 늘어나지 않으므로 장력이 계 전체에 하는 알짜 일은 없고, 나머지 힘들도 일을 하지 않는다. 따라서 A와 C가 충돌하기 전까지 운동에너지가 보존된다.

$$\dot{x}^2 + 2\Big[\big(\dot{x} + a\sin\theta\,\dot{\theta}\big)^2 + a^2\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2\Big] = u^2. \tag{2}$$

$s = \sin\theta$, $c = \cos\theta$라 하면 (1)에서

$$\dot{x} = \tfrac{1}{3}\big(u - 2as\dot{\theta}\big), \qquad \dot{x} + as\dot{\theta} = \tfrac{1}{3}\big(u + as\dot{\theta}\big).$$

이를 (2)에 대입하면 교차항 $\mp 4uas\dot{\theta}$가 상쇄된다.

$$\tfrac{1}{9}\big(u - 2as\dot{\theta}\big)^2 + \tfrac{2}{9}\big(u + as\dot{\theta}\big)^2 + 2a^2c^2\dot{\theta}^2 = \tfrac{1}{9}\big(3u^2 + 6a^2s^2\dot{\theta}^2\big) + 2a^2c^2\dot{\theta}^2 = u^2.$$

따라서 $a^2\dot{\theta}^2\big(\frac{2}{3}s^2 + 2c^2\big) = \frac{2}{3}u^2$, 즉 $a^2\dot{\theta}^2(s^2 + 3c^2) = u^2$이다. $s^2 + 3c^2 = 3 - 2s^2$이므로

$$\dot{\theta}^2 = \frac{u^2}{a^2(3 - 2\sin^2\theta)},$$

이고, 이것이 두 번째 결과이다(앞에서와 마찬가지로 v를 u로 읽는다).

소문항 (iii)

$3 - 2\sin^2\theta \le 3$이므로 소문항 (ii)에서

$$\dot{\theta}^2 \ge \frac{u^2}{3a^2} > 0.$$

따라서 $\dot{\theta}$는 결코 0이 되지 않는다. 충돌과 충돌 사이에서 이는 연속이므로 부호가 바뀌지 않고, θ는 단조적으로(monotonically) 변한다.

처음에 A는 정지해 있으므로 소문항 (i)에서 $\dot{x} + a\dot{\theta} = 0$, 즉 $\dot{\theta} = -u/a < 0$이다. 따라서 θ는 $\frac{\pi}{2}$에서부터 꾸준히 감소한다. A와 C는 항상 같은 x좌표를 가지고 y좌표는 $\pm a\sin\theta$이므로, 두 입자는 정확히 $\sin\theta = 0$일 때 만난다. 첫 번째 충돌은 B의 뒤쪽인 $\theta = 0$에서 일어난다.

생각해 보기 충돌은 $\dot{x}$와 $\dot{\theta}$에 어떤 영향을 주는가?

$\theta = 0$에서 두 줄은 모두 x축 위에 놓이고, A와 C의 x방향 속도는 같으며 y방향 속도는 $\pm a\dot{\theta}$이다. 두 입자는 y 방향으로 다가오므로 이들 사이의 충격량은 y 방향이다. 이는 줄과 수직이므로 충격 장력이 생기지 않고, 모든 x방향 속도는 변하지 않는다. 질량이 같은 두 물체의 탄성 충돌(elastic collision)에서는 중심을 잇는 직선 방향의 속도 성분이 서로 교환된다. 따라서 A의 y방향 속도는 $a\dot{\theta}$에서 $-a\dot{\theta}$로 바뀐다. 즉 충돌은 단지 $\dot{\theta}$의 부호를 뒤집을 뿐이고, $\dot{x}$는 그대로이다.

충돌 후의 운동량과 에너지는 충돌 전과 같으므로, (1)과 (2), 따라서 (ii)의 두 결과는 다음 단계의 운동에서도 성립한다. 이제 $\dot{\theta} > 0$이고, 앞에서와 마찬가지로 이는 0이 될 수

없다. 따라서 θ는 0에서부터 꾸준히 증가하며, $\sin\theta = 0$이 되는 다음 값은 $\theta = \pi$이다. $\dot\theta \geq u/(a\sqrt{3})$이므로 θ는 유한한 시간, 많아야 $\pi a\sqrt{3}/u$ 안에 그 값에 도달한다. 두 번째 충돌은

$$\theta = \pi,$$

에서 일어나며, 이때 A와 C는 B의 **앞쪽에서** 만난다.

소문항 (iv)

운동 전체에 걸쳐 $\theta \in [0, \pi]$이므로 $\sin\theta \geq 0$이다. $v = \dot x = 0$이면 (1)에서 $2a\dot\theta\sin\theta = u$이고, 이를 제곱하여 (ii)를 이용하면

$$4a^2\sin^2\theta \cdot \frac{u^2}{a^2(3-2\sin^2\theta)} = u^2 \iff 4\sin^2\theta = 3 - 2\sin^2\theta \iff \sin^2\theta = \tfrac{1}{2}.$$

따라서 가능한 값은 $\theta = \frac{\pi}{4}$와 $\theta = \frac{3\pi}{4}$이다.

> **생각해 보기** 제곱하면서 부호 정보를 잃었다. 실제로 필요한 부호는 무엇인가?

$2a\dot\theta\sin\theta = u$를 제곱했는데, $u > 0$이므로 $\dot\theta\sin\theta > 0$, 즉 $\dot\theta > 0$이어야 한다. $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$에서 $\dot\theta^2 = \frac{u^2}{2a^2}$이므로 $\dot\theta = \pm\frac{u}{a\sqrt{2}}$이고 $2a\dot\theta\sin\theta = \pm u$이다. (1)에서

- $\dot\theta > 0$이면 $\dot x = \frac{1}{3}(u - u) = 0$이다.
- $\dot\theta < 0$이면 $\dot x = \frac{1}{3}(u + u) = \frac{2}{3}u$이다.

따라서 답은 "아니다"이다. 첫 번째 흔들림(θ가 $\frac{\pi}{2}$에서 0으로 감소)에서 θ는 $v = \frac{2}{3}u$인 상태로 $\frac{\pi}{4}$를 지난다. 첫 번째 충돌과 두 번째 충돌 사이(θ가 0에서 π로 증가)에서는 $\theta = \frac{\pi}{4}$와 $\theta = \frac{3\pi}{4}$에서 모두 $v = 0$이다. 두 번째 충돌 후에는 $\dot\theta$가 다시 음수가 되므로, π에서 0으로 되돌아오는 흔들림에서는 두 값에서 모두 $v = \frac{2}{3}u$이다. 그 뒤로는 이 양상이 반복된다. 즉 이 각도들에서 $v = 0$이 되는 것은 θ가 증가하는 흔들림에서뿐이다.

검산

- 처음 $\theta = \frac{\pi}{2}$일 때 (ii)는 $\dot\theta^2 = u^2/a^2$을 주며, 이는 A가 정지해 있다는 사실에서 직접 구한 $\dot\theta = -u/a$와 일치한다.
- (1)에서 $\dot x = \frac{u}{3}\left(1 - \frac{2a\dot\theta\sin\theta}{u}\right)$이다. $\theta = 0$에서 이 값은 $\frac{u}{3}$이다. 즉 세 입자가 모두 $\frac{u}{3}$으로 함께 움직이는데, 이는 질량중심(centre of mass)의 속도로서, 줄이 x축을 따라 곧게 펴져 있을 때 마땅히 그래야 한다. 증가하는 흔들림에서 $\theta = \frac{\pi}{2}$일 때 $\dot x = -\frac{u}{3}$이므로 B는 한동안 뒤로 움직이며, 이것이 v가 0을 두 번 지나는 이유이다.
- 세 입자를 매우 단단한 용수철로 연결하고 $a = u = 1$로 둔 컴퓨터 시뮬레이션은 (ii)의

두 식을 모두 재현한다. 시뮬레이션에서 첫 번째 충돌은 $\theta = 0$에서, 두 번째 충돌은 $\theta = \pi$에서 일어나며, v는 증가하는 흔들림에서 $\theta \approx 0.785$와 2.356 근처에서만 부호가 바뀌고 그때 $\dot{\theta} \approx 0.707$이다. 첫 번째 흔들림에서는 $\theta = \frac{\pi}{4}$일 때 $v \approx 0.67$이다.

흔한 실수

- (1)의 우변을 $\dot{x}$로 보는 것. 우변은 충격량에 의해 정해지는 상수 u이다.
- 충돌 후 θ가 다시 $\frac{\pi}{2}$ 쪽으로 올라가서 두 번째 충돌도 $\theta = 0$에서 일어난다고 가정하는 것. $\dot{\theta}$의 부호가 뒤집히면 θ는 $\frac{\pi}{2}$를 **지나서** 증가하며, $\dot{\theta}^2$이 0으로부터 떨어진 값으로 아래로 유계이므로 π에 이르기 전에는 아무것도 이를 멈출 수 없다.
- 소문항 (iv)에서 제곱하면 $\dot{\theta}$의 부호를 잃는다는 사실을 잊는 것.

STEP 너머

x와 θ를 좌표로 택하고 이들로 운동에너지를 나타내는 것은 대학 1학년에서 배우는 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)의 출발점이다. 라그랑주 역학에서는 에너지에 x가 나타나지 않으므로(즉 x가 "무시 가능한(ignorable)" 좌표이므로) x-운동량 보존이 저절로 나타난다. 그러면 여기에서와 마찬가지로 에너지 방정식이 문제를 θ에 대한 하나의 1계 방정식으로 환원한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 입자계에 대한 운동량 방법과 에너지 방법을 매우 철저하게 다룬다.

풀이

STEP II 2015, 문제 12

확률과 통계 • 동전 수열 게임

> **STEP II 2015, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/15-s2-q12

핵심 아이디어

여기서 다루는 수열은 모두 길이가 3이므로, 어떤 던지기에서 게임이 끝나는지는 그 던지기와 바로 앞의 두 던지기에만 달려 있다. 따라서 **마지막 두 번의 던지기**를 추적하는 것이 자연스럽다. 가능한 상태(state)는 HH, HT, TH, TT의 네 가지뿐이고, 각 상태에서 다음 던지기는 게임을 끝내거나 다른 상태로 옮겨 간다. 어떤 상태에서는 승자가 곧바로 정해진다. 나머지 상태에 대해서는 다음 던지기에 대한 조건부 확률(conditioning)을 이용해 간단한 연립방정식을 세운다.

풀이

전체에 걸쳐 각 던지기는 독립(independent)이고, 각각 확률 $\frac{1}{2}$로 H 또는 T가 나온다. 처음 두 번의 던지기만으로 완성되는 수열은 없으므로, 게임은 항상 두 번 던진 뒤의 네 상태 중 하나에 도달하며 각 상태의 확률은 $\frac{1}{4}$이다. 또한 게임이 확률 1로 끝난다는 점에 주목하자. 어떤 위치에서든 다음 세 번의 던지기가 주어진 수열을 완성할 확률은 $\frac{1}{8}$이므로, 게임이 앞으로 $3n$번보다 더 오래 계속될 확률은 많아야 $(\frac{7}{8})^n \to 0$이다.

소문항 (i)

여기서는 HHT(A의 수열)와 THH(B의 수열)만 고려한다.

처음 두 번이 HH인 경우: 동전은 한동안 H를 계속 보이고, 처음 나오는 T는 앞에 적어도 두 개의 H가 있으므로 HHT를 완성한다. 그 T 이전에는 뒷면이 한 번도 나오지 않았으므로 THH는 나올 수 없다. 따라서 A가 이긴다.

처음 두 번 중에 T가 있는 경우: 그 T 이후 처음으로 앞면이 두 번 연속 나오는 때를 생각하

자. 이 HH 바로 앞의 던지기는 H일 수 없다(그렇다면 T 이후에 더 이른 HH가 있었거나, 이 HH가 처음 두 번의 던지기여야 하는데, 이는 이미 배제하였다). 따라서 그것은 T이고 THH가 완성된다. HHT는 HH가 있어야 하는데 이것이 첫 번째 HH이므로, HHT가 그 전에 나왔을 수 없다. 따라서 B가 이긴다.

그러므로 A는 처음 두 번이 모두 앞면일 때, 그리고 그때에만 이기며,

$$\mathrm{P}(A \text{ 승리}) = \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4},$$

이다. 이로써 요구된 결과를 얻는다.

소문항 (ii)

이제 네 수열 HHT, THH, TTH, HTT가 모두 유효하다. 처음 두 번의 던지기에 대해 조건을 걸어 생각한다.

- **HH.** 소문항 (i)에서처럼 던지기는 처음 T가 나올 때까지 H, H, ...로 이어지고, 그 T가 HHT를 완성한다. 다른 수열 중 어느 것도 HH 뒤에 H가 오는 형태를 포함하지 않으며, THH, TTH, HTT를 시작할 뒷면도 아직 나오지 않았다. 따라서 A가 이긴다.
- **TT.** H와 T의 역할을 바꾸어 같은 논증을 하면, 처음 나오는 H가 TTH를 완성하므로 C가 이긴다.
- **HT.** 다음 던지기가 T이면 HTT가 되어 D가 이긴다. H이면 마지막 두 번은 TH가 된다(그리고 HTH는 아무 수열도 완성하지 않는다).
- **TH.** 다음 던지기가 H이면 THH가 되어 B가 이긴다. T이면 마지막 두 번은 HT가 된다(그리고 THT는 아무 수열도 완성하지 않는다).

따라서 게임이 일단 상태 HT나 TH에 들어가면, D나 B가 이길 때까지 이 두 상태 사이를 오간다. HT에서 시작할 때와 TH에서 시작할 때 D가 이길 확률을 각각 d_1, d_2라 하자. 다음 던지기에 대해 조건을 걸면

$$d_1 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}d_2, \qquad d_2 = \tfrac{1}{2}d_1.$$

대입하면 $d_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}d_1$이므로 $d_1 = \frac{2}{3}$, $d_2 = \frac{1}{3}$이다. 이 상태들에서는 B나 D만 이길 수 있으므로, B는 HT에서 확률 $\frac{1}{3}$, TH에서 확률 $\frac{2}{3}$로 이긴다. 그러므로

$$\mathrm{P}(A) = \tfrac{1}{4}, \qquad \mathrm{P}(C) = \tfrac{1}{4},$$
$$\mathrm{P}(D) = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{4}, \qquad \mathrm{P}(B) = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{2}{3} = \tfrac{1}{4}.$$

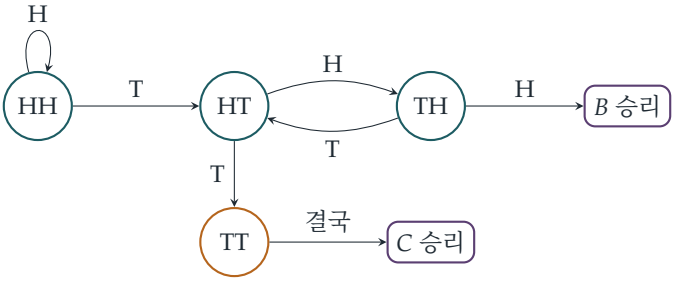
각 참가자가 이길 확률은 모두 $\frac{1}{4}$이다.

소문항 (iii)

이제 THH(B의 수열)와 TTH(C의 수열)만 고려한다.

처음 두 번이 TT인 경우. 그 뒤 던지기는 처음 H가 나올 때까지 T, T, ...로 이어지고, 그 H가 TTH를 완성한다. THH가 나오려면 TH 뒤에 H가 와야 하는데 아직 H가 한 번도 나오지 않았으므로, B가 먼저 이겼을 수는 없다. 따라서 C가 확률 1로 이긴다.

다른 시작의 경우에는 게임이 끝나지 않았다는 조건에서 상태(마지막 두 번의 던지기)가 어떻게 바뀌는지 보면 도움이 된다.



(TT에서 다음에 T가 나오면 TT에 머물고, H가 나오면 TTH가 완성된다. 그래서 TT를 C의 승리로 취급할 수 있다.)

HT, TH, HH에서 C가 이길 확률을 각각 p, q, r라 하자.

***HT*에서.** T가 나오면 TT가 되고, 여기서 C는 확률 1로 이긴다. H가 나오면 HTH가 되는데, 이는 어느 수열도 완성하지 않고 상태 TH에 놓이게 한다. 따라서

$$p = \tfrac{1}{2} \cdot 1 + \tfrac{1}{2} \cdot q = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}q,$$

이고, 이로써 요구된 결과를 얻는다.

***TH*에서.** H가 나오면 THH가 완성되어 B가 이긴다. T가 나오면 THT가 되어 아무것도 완성되지 않고 상태 HT에 놓인다. 따라서 $q = \tfrac{1}{2} \cdot 0 + \tfrac{1}{2}p = \tfrac{1}{2}p$이다.

> **생각해 보기** 마지막 두 번의 던지기를 알고 나면 왜 그 이전의 기록은 중요하지 않을까?

두 목표 수열은 모두 길이가 3이므로, 다음 던지기가 게임을 끝내는지는 그 던지기와 직전 두 번의 던지기에만 달려 있다. 그보다 앞선 던지기는 무관하며, 앞으로의 던지기는 과거와 독립이다. 따라서 주어진 상태에서 C가 이길 확률은 그 상태에 어떻게 도달했는지와 상관없이 같고, 바로 이 때문에 p에 대한 식의 우변에 q가 다시 나타날 수 있다.

***HH*에서.** H가 나오면 HH에 머물고, T가 나오면 HT로 옮겨 간다. 따라서 $r = \tfrac{1}{2}r + \tfrac{1}{2}p$이고, $r = p$를 얻는다.

풀면 $p = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}p$이므로

$$p = \tfrac{2}{3}, \qquad q = \tfrac{1}{3}, \qquad r = \tfrac{2}{3}.$$

마지막으로, 각각 확률 $\frac{1}{4}$인 처음 두 번의 던지기에 대해 조건을 걸면

$$\mathrm{P}(C \text{ 승리}) = \tfrac{1}{4}(1 + p + q + r) = \tfrac{1}{4}\left(1 + \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}\right) = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{8}{3} = \tfrac{2}{3}.$$

검산

- 소문항 (ii)에서 네 확률의 합은 1이고, 답은 대칭적이다. H와 T를 바꾸면 $A \leftrightarrow C$, $B \leftrightarrow D$가 서로 바뀌므로, $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(C)$와 $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(D)$는 당연히 성립해야 한다.
- 소문항 (iii)에서 $q = \frac{1}{3} < p$인 것은 이치에 맞는다. TH에서는 B가 한 번만 더 던지면 이길 수 있기 때문이다.
- 각 유형의 게임을 200,000번씩 컴퓨터로 모의실험(simulation)한 결과, 소문항 (i)에서 $\mathrm{P}(A) \approx 0.250$, 소문항 (ii)에서 네 참가자 모두 0.25에 가까운 값, 소문항 (iii)에서 $\mathrm{P}(C) \approx 0.667$을 얻었으며, 이는 마르코프 연쇄(Markov chain)를 따라 정확히 계산한 값과 일치한다.

흔한 실수

- 길이가 같은 두 수열은 먼저 나올 가능성도 같아야 한다고 가정하는 것. HHT와 THH는 각각 따로 보면 기대 대기 시간(expected waiting time)이 8번의 던지기로 같지만, THH는 네 번 중 세 번꼴로 HHT를 이긴다.
- 이기지 못한 던지기도 여전히 쓸모 있는 상태로 이끌 수 있다는 점을 잊는 것. HT에서 H가 나오는 것은 단지 "실패"가 아니라 TH로 옮겨 가는 것이다.
- HTH가 왜 TH에서 시작하는 것과 같은 위치에 놓이게 하는지 설명하지 않고 $p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}q$라고 쓰는 것.

STEP 너머

여기서 쓴 방법은 **마르코프 연쇄**로 들어가는 첫걸음이다. 마르코프 연쇄는 미래가 현재 상태에만 의존하는 과정으로, 흡수 확률(absorption probability)에 대한 일차방정식을 풀어 분석한다. 이 게임은 페니 게임(Penney's game)의 한 형태이다. 페니 게임에서는 상대가 세 번의 던지기로 이루어진 어떤 수열을 고르든, 항상 적어도 $\frac{2}{3}$의 확률로 그것을 이기는 수열을 고를 수 있다. 따라서 "어느 수열이 먼저 나오는가"는 추이적(transitive) 관계가 아니다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 마르코프 연쇄와 흡수 확률을 바로 이 수준에서 다룬다.

풀이

STEP II 2015, 문제 13

확률과 통계 • 지수분포의 적률

> **STEP II 2015, 13번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/15-s2-q13

핵심 아이디어

비용은 고정된 금액 ky에, 홍수가 대비 수준을 넘지 않으면 0인 확률적인 금액을 더한 것이다. 따라서 모든 것은 홍수가 대비한 높이를 넘는 초과분 $W = \max(X - y, 0)$의 적률(moments)로 귀결된다. 지수분포(exponential distribution)는 **무기억성**(*memoryless*)을 가진다. 즉 $X > y$라는 조건 아래에서 초과분 $X - y$는 다시 같은 모수의 지수분포를 따른다. 이 성질 덕분에 기댓값(expectation)과 분산(variance)이 모두 한 줄짜리 계산이 된다.

풀이

$p = \mathrm{P}(X > y) = \int_y^\infty \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\lambda y}$라 쓰고,

$$W = \begin{cases} X - y & \text{경우: } X > y, \\ 0 & \text{경우: } X \le y, \end{cases} \qquad \text{이때} \qquad C = ky + aW.$$

라 하자. 여기서 $y \ge 0$은 미리 정해 두는 상수이므로 ky는 확률적인 양이 아니다.

소문항 (i)

$X \le y$일 때 $W = 0$이므로

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(W) &= \int_y^\infty (x - y)\,\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty u\,\lambda \mathrm{e}^{-\lambda(u+y)}\,\mathrm{d}u \qquad (u = x - y) \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda y} \int_0^\infty u\,\lambda \mathrm{e}^{-\lambda u}\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-\lambda y} \cdot \frac{1}{\lambda}, \end{aligned}$$

이다. 여기서 모수가 λ인 지수분포의 평균이 $\frac{1}{\lambda}$라는 사실을 이용했다(또는 부분적분(integration by parts)을 해도 된다). 따라서

$$\mathrm{E}(C) = ky + a\,\mathrm{E}(W) = ky + \frac{a}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda y},$$

이고, 이것이 보이려던 식이다.

최소화. $y \geq 0$에 대하여 $g(y) = ky + \frac{a}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda y}$라 하자. 그러면

$$g'(y) = k - a\mathrm{e}^{-\lambda y}, \qquad g''(y) = a\lambda\mathrm{e}^{-\lambda y} > 0,$$

이므로 g'은 $g'(0) = k - a$에서 시작하여 $y \to \infty$일 때 k를 향해 순증가한다.

생각해 보기 왜 그냥 $g'(y) = 0$으로 놓고 끝낼 수 없을까?

y가 $y \geq 0$으로 제한되어 있고, 정류점(stationary point) $\mathrm{e}^{-\lambda y} = k/a$는 $k/a \leq 1$일 때에만 그 범위 안에 있기 때문이다. 그래서 a/k의 값에 따라 경우를 나눈다.

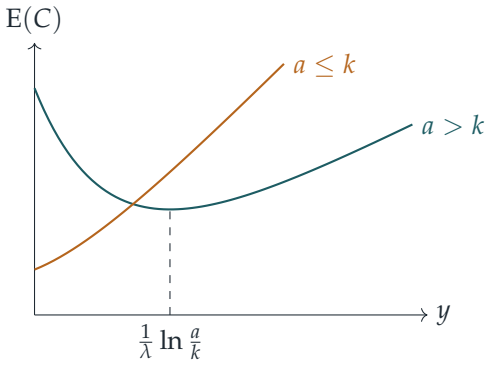
- $a/k > 1$. 이때 $g'(0) = k - a < 0$이고,

  $$y = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{a}{k} > 0.$$

  에서 $g'(y) = 0$이다. g'이 증가하므로 g는 이 점 앞에서 감소하고 뒤에서 증가한다. 따라서 이 점은 $y \geq 0$에서의 전역 최솟값(global minimum)을 준다. 최소 기대 비용은 $\frac{k}{\lambda}\left(1 + \ln\frac{a}{k}\right)$이다.

- $a/k \leq 1$. 이때 모든 $y > 0$에 대하여 $g'(y) > g'(0) = k - a \geq 0$이므로 g는 $y \geq 0$에서 순증가하고, 최솟값은 $y = 0$에서 얻어진다. 즉 아무런 대비도 하지 않는 것이 최선이다. 이때 기대 비용은 $\frac{a}{\lambda}$이다.

이는 이치에 맞는다. 대비를 1미터 더 할 때마다 비용 k는 확실히 들지만, 절약되는 a는 홍수가 그 높이까지 차올랐을 경우에만 얻어진다. $a \leq k$라면 절약분이 지출을 결코 정당화할 수 없다.



소문항 (ii)

상수 ky를 더해도 분산은 변하지 않으므로 $\mathrm{Var}(C) = a^2\,\mathrm{Var}(W)$이다. 이차 적률(second moment)은 같은 치환 $u = x - y$를 써서

$$\mathrm{E}(W^2) = \int_y^\infty (x-y)^2 \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\lambda y}\int_0^\infty u^2 \lambda \mathrm{e}^{-\lambda u}\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-\lambda y}\cdot\frac{2}{\lambda^2},$$

이다. 모수가 λ인 지수분포를 따르는 확률변수 U에 대하여 $\mathrm{E}(U^2) = \mathrm{Var}(U) + \mathrm{E}(U)^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2}$이기 때문이다. 따라서 $p = \mathrm{e}^{-\lambda y}$로 두면

$$\mathrm{Var}(C) = a^2\left(\frac{2p}{\lambda^2} - \frac{p^2}{\lambda^2}\right) = \frac{a^2}{\lambda^2}\,\mathrm{e}^{-\lambda y}\left(2 - \mathrm{e}^{-\lambda y}\right).$$

이다.

미리 지출하는 금액은 ky이고, $k > 0$이므로 이는 y에 대하여 증가한다. 따라서 y가 증가할 때 $\mathrm{Var}(C)$가 감소함을 보이면 된다. 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(2\mathrm{e}^{-\lambda y} - \mathrm{e}^{-2\lambda y}\right) = -2\lambda\mathrm{e}^{-\lambda y} + 2\lambda\mathrm{e}^{-2\lambda y} = -2\lambda\mathrm{e}^{-\lambda y}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda y}\right),$$

이고, $y > 0$이면 $0 < \mathrm{e}^{-\lambda y} < 1$이므로 이 값은 순음수이다. 따라서 $\mathrm{Var}(C)$는 $y \geq 0$에서 y에 대하여 순감소한다. 즉 대비에 많이 지출할수록 비용의 분산이 작아지며, 이로써 증명이 끝난다. (같은 말로, $p(2-p) = 1 - (1-p)^2$은 $[0,1]$에서 p에 대하여 증가하고, $p = \mathrm{e}^{-\lambda y}$는 y에 대하여 감소한다.)

검산

- $y = 0$에서 $C = aX$이므로 $\mathrm{E}(C) = a/\lambda$, $\mathrm{Var}(C) = a^2/\lambda^2$이고, 둘 다 공식과 일치한다.
- $y \to \infty$일 때 분산은 0으로 수렴한다. 엄청나게 높은 홍수 방벽을 쌓으면 불확실성은 사실상 사라지고 고정 비용 ky만 남는다.
- $k = 1$, $a = 3$, $\lambda = 0.5$, $y = 1.2$일 때 공식은 $\mathrm{E}(C) \approx 4.493$, $\mathrm{Var}(C) \approx 28.67$을 준다. 백만 년에 대한 컴퓨터 모의실험(simulation)에서는 4.496과 28.68을 얻었다. 이 값들에 대한 최적 높이는 $2\ln 3 \approx 2.197$이며, 컴퓨터 탐색으로도 확인되었다.

흔한 실수

- $a(x-y)\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}$를 y부터가 아니라 0부터 적분하는 것. $X \leq y$일 때는 홍수 피해가 없다.
- 경계 조건 $y \geq 0$을 잊고, $a < k$여서 값이 음수가 되는 경우에도 $y = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{a}{k}$를 답으로 내는 것.
- 분산에 ky를 포함시키는 것. ky는 상수이므로 분산에 아무런 기여도 하지 않는다.

STEP 너머

양 $\mathrm{E}\big(\max(X-y,0)\big)$는 정확히 행사가격(strike)이 y인 콜옵션(call option)의 수익이고, 최적 조건 $\mathrm{P}(X > y) = k/a$는 운용과학(operations research)의 고전적인 "신문 판매원(newsvendor)" 규칙이다. 즉 대비의 한계비용(marginal cost)이 기대 한계 절약분과 같아지는 수준을 택하는 것이다. 이처럼 깔끔한 답을 가능하게 한 무기억성은 연속분포(continuous distribution) 가운데 지수분포만이 가지는 특별한 성질이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 지수분포와 확률변수의 함수의 기댓값을 다룬다.

풀이

STEP III 2015, 문제 1

순수수학 • 점화 공식과 치환

STEP III 2015, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/15-s3-q1

핵심 아이디어

소문항 (i)에서 $I_n - I_{n+1}$은 분자에 u^2이 있는 하나의 적분으로 합쳐진다. u^2을 $u \cdot u$로 쓰고 부분적분(integration by parts)을 하면 다시 I_n이 나온다. 소문항 (ii)에서 식 $(x - x^{-1})^2$은 x를 $1/x$로 바꾸어도 변하지 않으며, 이 치환(substitution)에서 인수 x^{-2}가 생긴다. 두 형태를 평균하면 $1 + x^{-2}$가 나오는데, 이것은 정확히 $x - x^{-1}$의 도함수이므로 치환 $u = x - x^{-1}$이 잘 작동한다. 소문항 (iii)은 분모를 $x - x^{-1}$로 나타내고 나면 모습만 바꾼 소문항 (ii)이다.

풀이

소문항 (i)

두 피적분함수를 통분하여 합치면

$$I_n - I_{n+1} = \int_0^\infty \frac{(1+u^2)-1}{(1+u^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}u = \int_0^\infty u \cdot \frac{u}{(1+u^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}u.$$

두 번째 인수는 원시함수(antiderivative)를 쉽게 구할 수 있다.

$$\int \frac{u}{(1+u^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2n(1+u^2)^n}.$$

따라서 u는 미분하고 $u/(1+u^2)^{n+1}$은 적분하는 방식으로 부분적분을 하면

$$I_n - I_{n+1} = \left[-\frac{u}{2n(1+u^2)^n}\right]_0^\infty + \frac{1}{2n}\int_0^\infty \frac{1}{(1+u^2)^n}\,\mathrm{d}u.$$

경계항(boundary term)은 $u = 0$에서 0이다. 또한 $n \geq 1$이면 $0 \leq u/(1+u^2)^n \leq u/(1+u^2) < 1/u$이므로, $u \to \infty$일 때에도 경계항은 0으로 수렴(converge)한다. 그러므

로

$$I_n - I_{n+1} = \frac{1}{2n} I_n,$$

이고, 이것이 증명하려던 식이다. 정리하면

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n \qquad (n \geq 1).$$

초깃값은 $I_1 = \left[\arctan u\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2}$이다. 이 점화식(recurrence relation)을 반복해서 적용하면

$$I_{n+1} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}.$$

? **생각해 보기** 홀수들의 곱을 어떻게 계승(factorial)으로 바꿀 수 있을까?

분자와 분모에 짝수들의 곱 $2 \cdot 4 \cdots (2n) = 2^n n!$을 곱한다. 그러면 분자는 $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2n) = (2n)!$이 되고, 분모는 $(2^n n!)^2$이 된다. 따라서

$$I_{n+1} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{(2n)!\,\pi}{2^{2n+1}(n!)^2},$$

이고, 이것이 증명하려던 식이다. (엄밀한 증명은 수학적 귀납법(induction)으로 한다. 공식은 $n = 0$일 때 $I_1 = \frac{\pi}{2}$를 주므로 성립한다. 공식이 I_n에 대해 성립하면, $\frac{2n-1}{2n} = \frac{(2n-1)(2n)}{(2n)^2}$을 곱할 때 $\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}((n-1)!)^2}$이 $\frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}$로 바뀐다.)

소문항 (ii)

첫 번째 등식. J에서 $x = 1/t$로 치환하면 $\mathrm{d}x = -t^{-2}\,\mathrm{d}t$이고, x가 0에서 ∞까지 변하는 것은 t가 ∞에서 0까지 변하는 것에 대응한다. 또한 제곱을 하면 부호 변화가 사라지므로

$$\left(x - x^{-1}\right)^2 = \left(t^{-1} - t\right)^2 = \left(t - t^{-1}\right)^2,$$

이다. 그러므로

$$J = \int_\infty^0 \mathrm{f}\big((t - t^{-1})^2\big) \left(-t^{-2}\right) \mathrm{d}t = \int_0^\infty t^{-2}\,\mathrm{f}\big((t - t^{-1})^2\big)\,\mathrm{d}t,$$

이고, 적분 변수(dummy variable) t의 이름을 x로 바꾸면 첫 번째 형태를 얻는다.

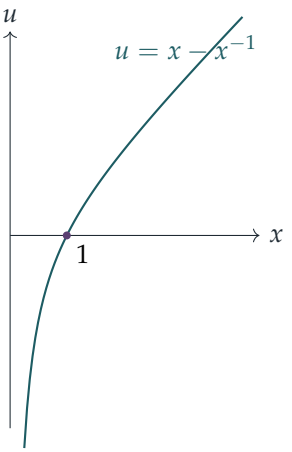
두 번째 등식. J의 원래 식과 이 식을 더하여 반으로 나누면

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(1 + x^{-2}\right) \mathrm{f}\big((x - x^{-1})^2\big)\,\mathrm{d}x.$$

세 번째 등식. 이제 $u = x - x^{-1}$로 놓으면 $\mathrm{d}u = (1 + x^{-2})\,\mathrm{d}x$이다. $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x > 0$이므로 u는 x에 대하여 순증가하며, $-\infty$ ($x \to 0^+$일 때)에서 $+\infty$ ($x \to \infty$일 때)까지 변한다. 따라서 이 치환은 전체 구간에서 일대일(one-to-one) 변수 변환이다.

$$J = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \mathrm{f}(u^2)\,\mathrm{d}u = \int_0^\infty \mathrm{f}(u^2)\,\mathrm{d}u.$$

마지막 단계가 성립하는 것은 $\mathrm{f}(u^2)$이 u에 대한 우함수(even function)이어서 $(-\infty, 0)$과 $(0, \infty)$에서의 적분이 같기 때문이다. 이로써 소문항 (ii)가 증명되었다.



이 곡선은 $(1, 0)$을 지나고 $x > 0$에서 꾸준히 증가하며, u의 모든 실숫값을 정확히 한 번씩 지난다.

소문항 (iii)

목표는 피적분함수를 $x^{-2}\,\mathrm{f}\big((x - x^{-1})^2\big)$ 꼴로 다시 쓰는 것이다. $(x - x^{-1})^2 = x^2 - 2 + x^{-2}$이므로

$$x^4 - x^2 + 1 = x^2\left(x^2 - 1 + x^{-2}\right) = x^2\left(1 + (x - x^{-1})^2\right).$$

그러므로

$$\frac{x^{2n-2}}{(x^4 - x^2 + 1)^n} = \frac{x^{2n-2}}{x^{2n}\big(1 + (x - x^{-1})^2\big)^n} = x^{-2}\,\mathrm{f}\big((x - x^{-1})^2\big), \qquad \text{여기서} \mathrm{f}(y) = \frac{1}{(1+y)^n}.$$

소문항 (ii)에서 얻은 J의 첫 번째 형태와 마지막 형태에 의하여

$$\int_0^\infty \frac{x^{2n-2}}{(x^4 - x^2 + 1)^n}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{1}{(1+u^2)^n}\,\mathrm{d}u = I_n.$$

소문항 (i)의 공식에서 n을 $n-1$로 바꾸면($n - 1 \geq 0$, 즉 모든 양의 정수 n에 대하여 성립한다)

$$\int_0^\infty \frac{x^{2n-2}}{(x^4 - x^2 + 1)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{(2n-2)!\,\pi}{2^{2n-1}\big((n-1)!\big)^2}.$$

검산

▶ $n = 1$일 때 답은 $\frac{\pi}{2}$이므로 $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^4 - x^2 + 1} = \frac{\pi}{2} \approx 1.5708$이다. $n = 2$일 때는 $\frac{\pi}{4}$이고, $n = 3$일 때는 $\frac{3\pi}{16} \approx 0.5890$이다. 원래 적분을 수치 적분한 값은 이 값들과 모두 일치하며,

$n = 8$까지의 경우와도 일치한다.

- 점화식에서 얻은 $I_2 = \frac{1}{2}I_1 = \frac{\pi}{4}$는 $u = \tan\theta$로 직접 계산한 결과와 일치한다: $I_2 = \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4}$.
- $\mathrm{f}(y) = \mathrm{e}^{-y}$로 놓으면 소문항 (ii)는 $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(x-1/x)^2} \, \mathrm{d}x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u^2} \, \mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \approx 0.88623$임을 말해 준다. 네 가지 형태를 모두 수치적으로 계산하면 이 값이 나온다.

흔한 실수

- 경계항 $u/(1+u^2)^n$이 무한대에서 사라지는지 확인하지 않는 것. 여기서는 사라지지만, 그것은 $n \geq 1$이기 때문이다.
- $u = x - x^{-1}$로 치환하고도 적분 구간을 0과 ∞로 그대로 두는 것. 새 아래끝은 $-\infty$이며, 구간을 다시 $(0, \infty)$로 되돌려 주는 것은 $\mathrm{f}(u^2)$이 우함수라는 사실이다.
- 첨자를 옮기지 않고 I_{n+1}의 공식을 그대로 쓰는 것. 소문항 (iii)의 답은 I_{n+1}이 아니라 I_n이다.

STEP 너머

비 $\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \binom{2n}{n}/4^n$은 중심 이항 확률(central binomial probability)이며, 소문항 (i)의 점화식은 π에 대한 월리스 곱(Wallis product)을 주는 점화식과 같다. 소문항 (ii)의 기법은 코시(Cauchy)–Schlömilch 변환이라고 불린다. 이 변환을 이용하면 검산에서 본 것과 같은 가우스(Gauss)형 적분을 비롯하여, 초등함수로 된 원시함수가 없는 많은 정적분의 값을 구할 수 있다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*에는 잘 고른 치환으로 풀리는 적분이 더 많이 실려 있고, Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*는 이상적분(improper integral)과 변수 변환을 엄밀하게 다룬다.

풀이

STEP III 2015, 문제 2

순수수학 • 해석학

> **STEP III 2015, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/15-s3-q2

이 문제는 *Beyond STEP*의 2.1 절 "**결국**"이란 무슨 뜻인가에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch02/eventually.html

핵심 아이디어

관계 $(s_n) \leq (t_n)$은 "언젠가부터(eventually) $s_n \leq t_n$이다"라는 뜻이다. 즉 앞쪽의 유한 개 항은 무시해도 된다. 따라서 참인 명제를 증명하려면 그 뒤로는 부등식(inequality)이 반드시 성립하는 지점 m을 명시해야 하고, 거짓인 명제를 보이려면 가능한 모든 m의 선택을 무너뜨리는 두 수열(sequence)을 찾아야 한다. 늘 **어떤 n부터** 이것이 성립하는지를 물어야 한다.

풀이

소문항 (i)

참. 양의 정수 n에 대해서는 $n > 0$으로 나눌 수 있으므로

$$1000n \leq n^2 \iff 1000 \leq n.$$

따라서 $n \geq 1000$이면 언제나 $1000n \leq n^2$이고, $m = 1000$이 조건을 만족한다. ($1000 \cdot 999 > 999^2$이므로 이보다 작은 m은 조건을 만족하지 않는다.)

소문항 (ii)

거짓. 함정은 "언젠가부터 $s_n \leq t_n$인 것은 아니다"라는 사실이 $s_n > t_n$인 경우가 **무한히 많다**는 것만 알려 줄 뿐, **언젠가부터** 그렇다는 것을 알려 주지는 않는다는 점이다. 두 수열은

서로 계속 앞서거니 뒤서거니 할 수 있다. 다음과 같이 잡자.

$$s_n = 2 + (-1)^n, \qquad t_n = 2,$$

그러면 s_n은 $1, 3, 1, 3, \ldots$으로 진행하고, 두 수열의 모든 항은 양수이다.

- $(s_n) \leq (t_n)$은 성립하지 않는다. 어떤 양의 정수 m을 제시하더라도 $n \geq m$인 짝수 n이 존재하고, 그 n에 대해 $s_n = 3 > 2 = t_n$이다.
- $(t_n) \leq (s_n)$도 성립하지 않는다. 어떤 m을 제시하더라도 $n \geq m$인 홀수 n이 존재하고, 그 n에 대해 $t_n = 2 > 1 = s_n$이다.

따라서 명제의 가정은 성립하지만 결론은 성립하지 않는다.

소문항 (iii)

참. 가정에 의해 모든 $n \geq m_1$에 대해 $s_n \leq t_n$인 양의 정수 m_1이 존재하고, 모든 $n \geq m_2$에 대해 $t_n \leq u_n$인 양의 정수 m_2가 존재한다. 다음과 같이 놓자.

$$m = \max(m_1, m_2).$$

$n \geq m$이면 $n \geq m_1$이고 $n \geq m_2$이므로, 두 부등식이 모두 n에서 성립하여

$$s_n \leq t_n \leq u_n.$$

이다. 따라서 $n \geq m$이면 언제나 $s_n \leq u_n$이고, 이것이 곧 $(s_n) \leq (u_n)$이다.

> ? **생각해 보기** 왜 단순히 $m = m_1$이나 $m = m_1 + m_2$로 잡지 않는가?

$m = m_1$로 잡으면 실패한다. $m_1 \leq n < m_2$인 경우에는 t_n과 u_n의 대소에 대해 아무것도 알 수 없기 때문이다. n이 두 기준점을 동시에 넘어야 하며, $\max(m_1, m_2)$는 이를 보장하는 가장 작은 선택이다. ($m_1 + m_2$도 성립하지만 낭비가 있다.)

소문항 (iv)

참이며, $m = 4$이다. 간단한 표를 보면 어디서 시작해야 할지 알 수 있다.

n	1	2	3	4	5	6
n^2	1	4	9	16	25	36
2^n	2	4	8	16	32	64

부등식은 $n = 1, 2$에서 성립하고, $n = 3$에서 성립하지 않으며, $n = 4$부터 다시 성립한다. 따라서 $m = 4$가 가능한 가장 작은 선택이며, 모든 $n \geq 4$에 대해 $n^2 \leq 2^n$임을 수학적 귀납법(induction)으로 증명한다.

기저 단계(*base case*). $n = 4$일 때 $n^2 = 16 = 2^4$이다.

귀납 단계(*inductive step*). $n \geq 4$이고 $n^2 \leq 2^n$이라고 가정하자. $n \geq 3$이므로 $n^2 - 2n - 1 = (n-1)^2 - 2 \geq 2 > 0$이고, 따라서 $2n + 1 < n^2$이다. 그러므로

$$\begin{aligned}(n+1)^2 &= n^2 + 2n + 1 \\ &< n^2 + n^2 && \text{다음 부등식에 의해: } 2n+1 < n^2 \\ &= 2n^2 \\ &\leq 2 \cdot 2^n && \text{귀납 가정(inductive hypothesis)에 의해} \\ &= 2^{n+1}.\end{aligned}$$

따라서 n에 대한 결과가 $n+1$에 대한 결과를 함의하고, 수학적 귀납법에 의해 모든 $n \geq 4$에 대해 $n^2 \leq 2^n$이다. 그러므로 $m = 4$로 $(n^2) \leq (2^n)$이 성립한다.

? **생각해 보기** 귀납법의 정확히 어느 부분에서 n이 커야 했는가?

$2n + 1 < n^2$을 쓰는 단계에서만 필요하며, 이 부등식은 $n \geq 3$을 요구한다. 이 때문에 귀납법을 $n = 1$부터 시작할 수 없다. $n = 2$에서 $n = 3$으로 넘어가는 단계는 $5 < 4$를 사용하는데 이는 거짓이고, 실제로 $3^2 > 2^3$이다.

검산

- 소문항 (i): $n = 1000$에서 양변은 모두 10^6이고, $n = 999$에서는 $999\,000 > 998\,001$이다.
- 소문항 (iv): 4부터 2000까지의 모든 n에 대해 컴퓨터로 $n^2 \leq 2^n$을 확인하면 성립함을 알 수 있고, 위의 표는 $n = 3$에서 성립하지 않음을 확인해 준다. 2^n이 얼마나 빨리 앞서는지 감을 잡아 보면, $20^2 = 400$이지만 $2^{20} = 1\,048\,576$이다.
- 소문항 (ii): 어떤 m을 시도하든 (한 방향의 순서에 대해서는) 그다음 짝수 n에 의해, (다른 방향에 대해서는) 그다음 홀수 n에 의해 무너진다.

흔한 실수

- "언젠가부터 $\leq$인 것은 아니다"를 "언젠가부터 $>$이다"로 취급하는 것. "어떤 m이 존재하여 모든 $n \geq m$에 대해..."의 부정(negation)은 "모든 m에 대해 $s_n > t_n$인 어떤 $n \geq m$이 존재한다"이다.
- (iv)에서 귀납법을 $n = 1$이나 $n = 2$에서 시작하는 것. 그곳에서는 귀납 단계가 실제로 성립하지 않는다.
- (iii)에서 두 가정에 같은 문자 m을 사용하여, 마치 두 기준점이 일치해야 하는 것처럼 다

루는 것.

STEP 너머

여기서의 관계는 실해석학(real analysis) 전체를 관통하는 "언젠가부터"라는 한정기호(quantifier)이다. 수열이 수렴(converge)한다는 것은 임의의 허용 오차에 대해 수열이 **언젠가부터** 극한값과 그 오차 이내에 있다는 뜻이다. 소문항 (ii)는 실수의 순서와 달리 이 수열의 순서가 전순서(total order)가 아님을 보여 준다. 즉 두 수열이 아예 비교 불가능할 수도 있다. 컴퓨터 과학자들은 같은 아이디어를 빅오 표기법(big-O notation)에 사용하며, 거기서 (iv)는 지수함수(exponential)가 결국 다항식(polynomial)을 앞선다는 익숙한 사실이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 이러한 한정기호 논증이 체계적으로 정리되는 모습을 친절하게 보여 주는 책이다.

풀이

STEP III 2015, 문제 3

순수수학 • 극곡선과 넓이

> **STEP III 2015, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/15-s3-q3

핵심 아이디어

$r\cos\theta = x$이므로 곡선 $r = a\sec\theta$는 바로 직선 $x = a$이다. 따라서 $r - a\sec\theta$는 원점에서 각 θ 방향으로 뻗은 반직선(ray)을 따라 잰, 한 점과 그 반직선이 이 직선과 만나는 점 사이의 거리이고, 주어진 방정식은 이 거리가 b라는 뜻이다. 이것은 극(pole)을 고정점으로 하는 콘코이드(conchoid)의 정의와 정확히 같다. 그래프를 그리려면 절댓값(modulus)을 풀어 $r = a\sec\theta + b$와 $r = a\sec\theta - b$로 나누고, 각각에 대해 어떤 θ 값에서 $r \geq 0$이 되는지 따져 본다.

풀이

풀이 전체에서 $\sec\theta$는 $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$에서 정의되지 않으므로 이 각은 제외한다. 절댓값을 풀면 $(*)$는

$$r = a\sec\theta + b \qquad \text{또는} \qquad r = a\sec\theta - b,$$

를 뜻하고, 어느 경우든 $r \geq 0$이어야 한다.

소문항 (i)

$\sec\theta > 0$**인 이유.** $\sec\theta < 0$이라고 가정하자. 그러면 $|\cos\theta| \leq 1$에서 $\sec\theta \leq -1$이므로 $a\sec\theta \leq -a$이다. 이때 $a > b$를 이용하면 가능한 두 r 값은 모두

$$r = a\sec\theta \pm b \leq -a + b < 0,$$

을 만족한다. 이것은 $r \geq 0$에 모순이므로, $(*)$를 만족하는 모든 점에서 $\sec\theta > 0$, 즉 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$이다.

콘코이드. A를 극 O로, L을 직선 $x = a$(극좌표로는 $r\cos\theta = a$, 즉 $r = a\sec\theta$)로, $d = b$로 잡는다. $a > 0$이므로 A는 L 위에 있지 않다.

점 P가 $(*)$를 만족하고 그 편각이 θ라 하면 $\cos\theta > 0$이다. 직선 OP는 L과 평행하지 않으며, 같은 반직선 위에서 $OQ = a\sec\theta$인 점 Q, 즉 직교좌표(Cartesian coordinates)로 $Q = (a, a\tan\theta)$에서 L과 만난다. O, Q, P는 모두 O에서 나오는 한 반직선 위에 있고 O로부터의 거리가 각각 $a\sec\theta$와 r이므로

$$PQ = |r - a\sec\theta| = b.$$

이다. 따라서 P는 $A = O$를 지나는 직선을 따라 잰 L까지의 거리가 b인 점이다. 즉 P는 이 L, A와 $d = b$로 정해지는 니코메데스(Nicomedes)의 콘코이드 위에 있다.

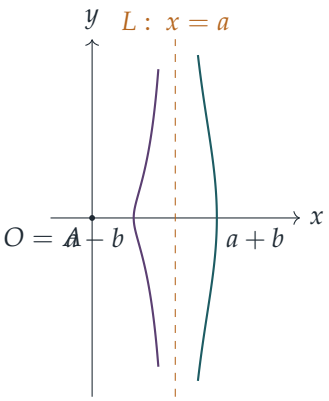
(역으로, 그 콘코이드 위의 모든 점은 $(*)$를 만족한다. O를 지나 L과 Q에서 만나는 임의의 직선 위에서 Q로부터 거리가 b인 두 점은 반직선 OQ를 따라 O로부터 거리 $a\sec\theta \pm b$에 있으며, $a\sec\theta \geq a > b$이므로 둘 다 양수이다. 따라서 자취(locus)는 콘코이드 전체이다.)

그래프. 직교좌표로 $x = r\cos\theta = a \pm b\cos\theta$, $y = r\sin\theta$이다. $r - a\sec\theta = \pm b$에 $\cos\theta$를 곱하면 $x - a = \pm b\cos\theta = \pm bx/r$이므로 곡선은

$$(x - a)^2(x^2 + y^2) = b^2x^2.$$

이다. 가지(branch)는 두 개이며, 둘 다 x축에 대하여 대칭이고(θ를 $-\theta$로 바꾸면 된다), $r \to \infty$가 되는 $\theta \to \pm\frac{\pi}{2}$에서 둘 다 L을 점근선(asymptote)으로 가진다.

- 바깥 가지 $r = a\sec\theta + b$는 $x = a + b\cos\theta \in (a, a + b]$이고, $(a + b, 0)$에서 축과 만난다.
- 안쪽 가지 $r = a\sec\theta - b$는 $x = a - b\cos\theta \in [a - b, a)$이고, O의 오른쪽에 있는 $(a - b, 0)$에서 축과 만난다.



(그림은 $a = 2$, $b = 1$인 경우이다. 바깥 가지는 청록색, 안쪽 가지는 자주색이다.)

소문항 (ii)

이제 $a < b$이다. 두 경우를 다시 살피면서 $r \geq 0$이 되는 곳을 확인한다.

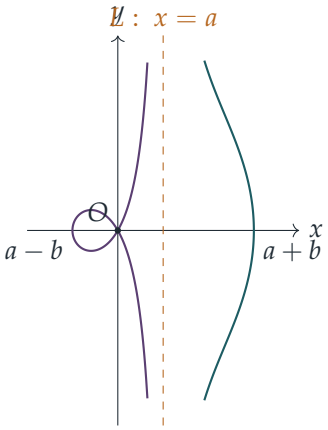
- $r = a\sec\theta + b$. $\sec\theta > 0$이면 이 값은 항상 양수이고, 앞에서와 같이 L의 오른쪽에 있는 바깥 가지가 된다. $\sec\theta < 0$이면 $r \geq 0$일 필요충분조건은 $-a\sec\theta \leq b$, 즉 $|\sec\theta| \leq b/a$, 즉 $\cos\theta \leq -a/b$이다.
- $r = a\sec\theta - b$. $\sec\theta < 0$이면 이 값은 음수이므로 점이 없다. $\sec\theta > 0$이면 $r \geq 0$일 필요충분조건은 $\sec\theta \geq b/a$, 즉 $0 < \cos\theta \leq a/b$이다.

$\alpha = \arccos(a/b)$라 하자. $0 < a/b < 1$이므로 α는 $(0, \frac{\pi}{2})$에 속한다.

> **생각해 보기** $\sec\theta < 0$인 부분은 어떤 모양일까?

이 부분은 $\cos\theta \leq -a/b$, 즉 $\pi - \alpha \leq |\theta| \leq \pi$에서의 $r = b + a\sec\theta$이다. 양 끝에서는 $\cos\theta = -a/b$이므로 $r = b - b = 0$이 되어, 이 부분은 원점에서 시작하여 원점에서 끝난다. $\theta = \pi$에서는 $r = b - a$이고, 이는 음의 x축 위의 점 $(a - b, 0)$이다. 그 사이에서는 $r > 0$이고 곡선은 x축에 대하여 대칭이므로, 이 부분은 원점 왼쪽에 놓인 닫힌 고리이며 ($x = a + b\cos\theta$이므로) $a - b \leq x \leq 0$ 범위에 있다.

안쪽 가지 $r = a\sec\theta - b(\alpha \leq |\theta| < \frac{\pi}{2})$ 역시 원점($\cos\theta = a/b$인 곳)에서 시작하여 $|\theta| \to \frac{\pi}{2}$일 때 점근선 L을 향해 뻗어 나가며, $0 \leq x < a$ 범위에 머문다. 따라서 안쪽 가지와 고리는 함께 O에서 자기 자신과 교차하는 하나의 곡선을 이루고, 그 점에서의 접선 방향은 $\theta = \pm\alpha$이다.



(그림은 $a = 1, b = 2$인 경우이므로 $\alpha = \frac{\pi}{3}$이다. 바깥 가지는 청록색이고, 안쪽 가지와 고리는 함께 자주색이다.)

$a = 1, b = 2$일 때 고리의 넓이. 이때 $\cos\theta \leq -\frac{1}{2}$는 $\frac{2\pi}{3} \leq |\theta| \leq \pi$를 뜻하고, 고리 위에서 $r = 2 + \sec\theta$이다. θ가 이 범위를 지나는 동안 반직선은 고리를 정확히 한 번 훑으므로 넓이

는 $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$이다. x축에 대한 대칭성을 이용하여 위쪽 절반 $\frac{2\pi}{3} \le \theta \le \pi$의 두 배를 구한다.

$$\begin{aligned}\text{넓이} &= 2\cdot\frac{1}{2}\int_{2\pi/3}^{\pi}(2+\sec\theta)^2\,\mathrm{d}\theta = \int_{2\pi/3}^{\pi}\left(4+4\sec\theta+\sec^2\theta\right)\mathrm{d}\theta \\ &= \Big[4\theta+4\ln|\sec\theta+\tan\theta|+\tan\theta\Big]_{2\pi/3}^{\pi}.\end{aligned}$$

적분 구간이 $\frac{\pi}{2}$를 포함하지 않으므로 주어진 $\sec\theta$의 부정적분(antiderivative)을 여기서 쓸 수 있다. $\theta=\pi$에서는 $\sec\theta=-1$, $\tan\theta=0$이므로 괄호 안의 값은 $4\pi+4\ln 1+0=4\pi$이다. $\theta=\frac{2\pi}{3}$에서는 $\sec\theta=-2$, $\tan\theta=-\sqrt{3}$이므로 괄호 안의 값은 $\frac{8\pi}{3}+4\ln(2+\sqrt{3})-\sqrt{3}$이다. 빼면

$$\text{고리의 넓이} = \frac{4\pi}{3}+\sqrt{3}-4\ln\left(2+\sqrt{3}\right).$$

이다.

검산

- 넓이의 수치는 $4.1888+1.7321-5.2678\approx 0.6530$이다. 당연히 양수이고, 고리가 들어가는 직사각형 $-1\le x\le 0$, $|y|\le 0.45$(넓이 0.9)에 비해 작다. $\frac{1}{2}(2+\sec\theta)^2$을 $[\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}]$에서 직접 수치적분해도 0.65301을 얻는다.
- 고리는 O와 $(-1,0)$을 지난다. $\theta=\frac{2\pi}{3}$에서 $r=2-2=0$이고, $\theta=\pi$에서 $r=2-1=1$이다.
- (i)의 곡선 위의 한 점, 예를 들어 $a=2$, $b=1$, $\theta=\frac{\pi}{4}$를 택하자. 그러면 $r=2\sqrt{2}+1$이고, 반직선은 O로부터 거리 $2\sqrt{2}$인 $(2,2)$에서 L과 만나므로, 이 점은 그보다 $1=b$만큼 더 나아간 곳에 있다.

흔한 실수

- 조건 $r\ge 0$을 잊는 것. 이 조건이 바로 (i)에서 $\sec\theta>0$을 강제하고, (ii)에서 고리에 대한 θ의 범위를 정한다.
- $\theta=\frac{2\pi}{3}$에서 $r=0$이 되는 곳부터 시작하지 않고, 점근선 방향을 지나는 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 고리를 적분하는 것.
- $\sec\theta$와 $\tan\theta$가 모두 음수인 제2사분면에서 $\ln|\sec\theta+\tan\theta|$의 부호를 틀리는 것.

STEP 너머

콘코이드는 기원전 200년경 니코메데스가 각의 삼등분(angle trisection)과 세제곱근 구하기를 위해 고안했는데, 이 문제들은 눈금 없는 자와 컴퍼스만으로는 불가능하다. 그 불가

능성의 증명은 체론(field theory)에서 나오며, 대학 첫 대수학 강의에서 배운다(Allenby, *Rings, Fields and Groups* 참고). (ii)에서 원점의 자기 교차는 **마디점**(node)으로, 대수곡선(algebraic curve), 여기서는 사차곡선(quartic) $(x-a)^2(x^2+y^2) = b^2x^2$ 위의 특이점(singular point)의 한 예이다. STEP 스타일의 곡선 그리기 문제를 더 보고 싶다면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*를 참고하라.

풀이

STEP III 2015, 문제 4

순수수학 • 삼차방정식의 근

STEP III 2015, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/15-s3-q4

핵심 아이디어

(iii)의 세 조건은 삼각함수 퍼즐처럼 보이지만, 각각은 어떤 수의 허수부(imaginary part)이다. $z_k = r_k e^{i\theta_k}$일 때 $r_k^n \sin(n\theta_k)$는 z_k^n의 허수부이다. 따라서 이 조건들은 세 복소수의 거듭제곱 합(power sum) S_1, S_2, S_3이 실수라는 뜻이다. (ii)는 실수인 거듭제곱 합을 실수 계수 삼차식(cubic)으로 바꾸어 주고, 그러면 (i)이 실근(real root)을 하나 건네준다.

풀이

소문항 (i)

실수 x에 대하여 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$라 하자. 이것은 연속(continuous)인 실함수이다. $R = 1 + |a| + |b| + |c|$로 둔다. $x \geq R$이면 $x \geq 1$이므로 $|x| \leq x^2$이고 $1 \leq x^2$이며, 따라서 $|ax^2 + bx + c| \leq (|a| + |b| + |c|)x^2$이다. 그러므로

$$f(x) \geq x^3 - (|a| + |b| + |c|)x^2 = x^2\big(x - |a| - |b| - |c|\big) > 0.$$

같은 방법으로 $x \leq -R$이면 $f(x) \leq -|x|^2\big(|x| - |a| - |b| - |c|\big) < 0$을 얻는다. 따라서 $f(-R) < 0 < f(R)$이고, 사잇값 정리(intermediate value theorem)에 의하여 f는 $-R$과 R 사이에 영점을 가진다. 이 영점이 $(*)$의 실근이다.

(같은 말이지만, 실수 계수 다항식의 허근은 켤레(conjugate) 쌍으로 나타나며, 세 근이 모두 짝을 지을 수는 없다.)

소문항 (ii)

z_1, z_2, z_3이 근이므로

$$z^3 + az^2 + bz + c = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3),$$

이고, 계수를 비교(comparing coefficients)하면

$$a = -(z_1 + z_2 + z_3), \qquad b = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1, \qquad c = -z_1z_2z_3.$$

를 얻는다. 따라서 $a = -S_1$이다. 합을 제곱하면 $S_1^2 = S_2 + 2(z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1) = S_2 + 2b$이므로

$$a = -S_1, \qquad b = \tfrac{1}{2}\left(S_1^2 - S_2\right).$$

c를 구할 때는 S_1^3을 전개하는 대신, 각 근이 방정식을 만족한다는 사실을 이용한다. 즉 $k = 1, 2, 3$에 대하여 $z_k^3 + az_k^2 + bz_k + c = 0$이다. 이 세 식을 더하면

$$S_3 + aS_2 + bS_1 + 3c = 0.$$

a와 b를 대입하고 2를 곱하면

$$\begin{aligned} 6c &= -2S_3 + 2S_1S_2 - S_1\left(S_1^2 - S_2\right) \\ &= -S_1^3 + 3S_1S_2 - 2S_3, \end{aligned}$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

소문항 (iii)

$k = 1, 2, 3$에 대하여 $z_k = r_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}$로 정의한다. 드무아브르 정리(de Moivre's theorem)에 의하여 $z_k^n = r_k^n\left(\cos n\theta_k + \mathrm{i}\sin n\theta_k\right)$이므로, 주어진 세 조건은 정확히

$$\operatorname{Im} S_1 = \operatorname{Im} S_2 = \operatorname{Im} S_3 = 0,$$

을 뜻한다. 여기서 S_1, S_2, S_3은 (ii)에서와 같이 z_1, z_2, z_3의 거듭제곱 합이다. 따라서 S_1, S_2, S_3은 모두 실수이다.

생각해 보기 (ii)는 삼차식에서 출발했다. 여기서 삼차식은 어디에 있는가?

직접 만든다. $(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = z^3 + az^2 + bz + c$가 되도록 a, b, c를 정의하자. 그러면 z_1, z_2, z_3은 이 삼차식의 근이므로 (ii)를 적용할 수 있고,

$$a = -S_1, \qquad b = \tfrac{1}{2}\left(S_1^2 - S_2\right), \qquad c = \tfrac{1}{6}\left(-S_1^3 + 3S_1S_2 - 2S_3\right),$$

를 얻으며, 이들은 모두 실수이다. (i)에 의하여 이 삼차식은 실근을 가지는데, 그 근은 z_1, z_2, z_3뿐이므로 어떤 z_k는 실수이다. 그런데 $r_k > 0$인 $z_k = r_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}$가 실수이려면 $\sin\theta_k = 0$,

즉 θ_k가 π의 배수여야 한다. $-\pi < \theta_k < \pi$에서 그런 값은 $\theta_k = 0$뿐이다. 따라서 적어도 하나의 k에 대하여 $\theta_k = 0$이다.

이제 $\theta_1 = 0$이라 하자. 그러면 $z_1 = r_1$은 0이 아닌 실수이다. 그러면

$$z_2 + z_3 = S_1 - z_1 \quad \text{그리고} \quad z_2 z_3 = \frac{-c}{z_1}$$

는 모두 실수이다. 따라서 z_2와 z_3은 실수 계수 이차방정식(quadratic) $z^2 - (z_2 + z_3)z + z_2 z_3 = 0$의 근이다. 두 가지 경우가 있다.

- 근이 허수이면, 두 근은 서로 켤레복소수이다. 즉 $z_3 = \overline{z_2} = r_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_2}$이다. $-\theta_2$도 $(-\pi, \pi)$에 속하고 이 구간에서 편각(argument)은 유일하므로 $\theta_3 = -\theta_2$이다(그리고 $r_3 = r_2$이다).
- 근이 실수이면, 앞에서와 똑같이(각 근의 절댓값(modulus)은 양수이고 편각은 $(-\pi, \pi)$에 속하므로) $\theta_2 = \theta_3 = 0$을 얻고, 따라서 이 경우에도 $\theta_2 = -\theta_3$이다.

어느 경우든 $\theta_2 = -\theta_3$이므로 증명이 끝난다.

검산

- 근이 1, 2, 3일 때의 (ii): $S_1 = 6$, $S_2 = 14$, $S_3 = 36$이고, $-216 + 252 - 72 = -36 = 6c$에서 $c = -6$이다. 이는 $(z-1)(z-2)(z-3)$에 대하여 기대한 값과 같다.
- (iii)의 역방향: $\theta_1 = 0$, $\theta_3 = -\theta_2$, $r_3 = r_2$이면 각 합에서 둘째 항과 셋째 항이 상쇄되고 첫째 항은 0이므로 세 조건이 모두 성립한다. 수천 개의 무작위 시작점에서 세 조건을 수치적으로 푸는 컴퓨터 탐색에서도, 한 각이 0이고 나머지 두 각이 서로 반대인 해만 발견되었다.

흔한 실수

- (i)에서 "삼차식은 항상 축과 만난다"고만 쓰고 근거를 대지 않는 것. $|x|$가 클 때 부호가 바뀐다는 것은 한 줄의 논증이 필요하다.
- (iii)에서 $\theta_k = \pm\pi$여도 z_k가 실수가 된다는 점을 잊는 것. 이 경우를 배제하는 것은 개구간(open interval) $(-\pi, \pi)$이다.
- 켤레인 경우만으로 $\theta_2 = -\theta_3$을 결론짓고, z_2, z_3이 모두 실수인 경우를 빠뜨리는 것.

STEP 너머

다항식의 계수는 그 근의 기본 대칭함수(elementary symmetric functions)이며, (ii)의 항등식들은 이들을 거듭제곱 합과 연결하는 뉴턴(Newton) 항등식(Newton's identities)의 처음 몇 개이다. 대수학 입문 과정에서는 근에 대한 모든 대칭 다항식(symmetric polynomial)이 기본 대칭함수의 다항식으로 나타난다는 것을 배우는데, 이것이 갈루아(Galois) 이론(Galois theory)의 출발점이다. 이에 관해서는 Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)를 읽어 보면 좋다.

풀이

STEP III 2015, 문제 5

순수수학 • 무한 강하법에 의한 무리성

STEP III 2015, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/15-s3-q5

이 문제는 *Beyond STEP*의 1.3 절 **가장 작은 반례**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch01/well-ordering.html

핵심 아이디어

이것은 **무한강하법**(infinite descent)에 의한 증명이다. $\sqrt{2}$가 유리수(rational)라면, 곱했을 때 $\sqrt{2}$를 정수로 만드는 가장 작은 양의 정수가 존재할 것이고, 우리는 그보다 더 작은 것을 만들어 낸다. 이 일은 $\sqrt{2}-1$을 곱하면 해결된다. 이 수는 0과 1 사이에 있으면서도 우리를 집합 안에 머물게 해 주기 때문이다. 2의 세제곱근에 대해 같은 기법을 쓰려면 $2^{2/3}$까지 함께 다루는 집합이 필요하다. 문제가 먼저 두 수를 서로 연결하라고 요구하는 것은 이 때문이다.

풀이

소문항 (i)

3단계. 1단계의 가정에 의해, $q \neq 0$인 어떤 정수 p, q에 대하여 $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$이다. $\sqrt{2} > 0$이므로 p와 q를 모두 양수로 잡을 수 있다. 그러면

$$q\sqrt{2} = p$$

는 정수이고 q는 양의 정수이므로 $q \in S$이다. 따라서 S는 공집합이 아니다.

5단계. $k \in S$이므로 수 $m = k\sqrt{2}$는 정수이다. $n = (\sqrt{2}-1)k$에 대하여 두 가지를 확인해야 한다.

- n은 양의 정수이다. $n = k\sqrt{2} - k = m - k$는 정수의 차이고, $k > 0$이고 $\sqrt{2} > 1$이므로 $n > 0$이다.
- $n\sqrt{2}$는 정수이다.

$$n\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)k\sqrt{2} = 2k - k\sqrt{2} = 2k - m,$$

이것 역시 정수의 차이다.

따라서 $(\sqrt{2} - 1)k \in S$이다.

6단계. $1 < 2 < 4$이므로 $1 < \sqrt{2} < 2$이고, 따라서 $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$이다. 그러므로 $k > 0$이므로

$$(\sqrt{2} - 1)k < k.$$

즉 5단계는 S에 속하면서 k보다 작은 양의 정수를 주며, 이는 4단계에서 k를 S의 가장 작은 원소로 택한 것에 모순이다. (공집합이 아닌 양의 정수의 집합은 언제나 가장 작은 원소를 가지고, 3단계에서 S가 공집합이 아님을 보였으므로 4단계는 정당하다.) 세운 가정은 1단계뿐이었으므로 그 가정이 거짓이어야 한다. 즉 $\sqrt{2}$는 무리수(irrational)이다.

소문항 (ii)

$a = 2^{1/3}$이라 하면 $a^2 = 2^{2/3}$이고 $a^3 = 2$이다.

동치(equivalence). a가 유리수이면 유리수의 곱인 a^2도 유리수이다. 역으로 a^2이 유리수이면, $a^2 \neq 0$이므로

$$a = \frac{a^3}{a^2} = \frac{2}{a^2}$$

는 유리수이다. 따라서 $2^{1/3}$이 유리수일 필요충분조건은 $2^{2/3}$이 유리수인 것이다.

무리성. 귀류법(proof by contradiction)을 쓰기 위해 a가 유리수라고 가정하자. 앞의 동치에 의해 a^2도 유리수이다. na와 na^2가 **모두** 정수인 양의 정수 n 전체의 집합을 T라 정의한다.

> **생각해 보기** 왜 그냥 $S = \{n : na$가 정수$\}$로 두고 소문항 (i)를 그대로 따라 하지 않는가?

소문항 (i)에서 $(\sqrt{2} - 1)k \in S$임을 확인할 때는 $k(\sqrt{2})^2 = 2k$가 정수이어야 했는데, 이는 자동으로 성립한다. 여기서는 $(a - 1)k$에 a를 곱하면 $ka^2 - ka$가 되는데, "ka는 정수"라는 조건 어디에도 ka^2이 정수라는 말은 없다. 그래서 그 조건을 집합 안에 넣어 두는 것이고, 바로 여기서 이 소문항의 앞부분이 필요하다.

T는 공집합이 아니다. p, q를 양의 정수로 하여 $a = \frac{p}{q}$라 쓰자. 그러면 $q^2a = pq$와 $q^2a^2 = p^2$은 정수이므로 $q^2 \in T$이다.

강하. k를 T의 가장 작은 원소라 하면 $u = ka$와 $v = ka^2$은 정수이다. $n = (a - 1)k$를 생각하자.

- $n = u - k$는 정수이고, $1^3 < 2$이므로 $a > 1$이어서 $n > 0$이다.
- $na = ka^2 - ka = v - u$는 정수이다.
- $a^3 = 2$를 이용하면 $na^2 = ka^3 - ka^2 = 2k - v$는 정수이다.

따라서 $n \in T$이다. 그런데 $2^3 = 8 > 2$이므로 $a < 2$이고, 따라서 $0 < a - 1 < 1$이어서 $n = (a-1)k < k$이다. 이는 k의 최소성에 모순이다. 그러므로 $2^{1/3}$은 무리수이고, 앞의 동치에 의해 $2^{2/3}$도 무리수이다.

검산

- 거의 맞는 경우에 강하를 적용해 보자. 분수 $\frac{7}{5}$는 $\sqrt{2}$에 가깝다. 5단계의 사상 $(k, m) \mapsto (m-k, 2k-m)$은 $(5,7)$을 $(2,3)$으로 보내고, $3^2 - 2 \cdot 2^2 = 1 = -(7^2 - 2 \cdot 5^2)$이다. 양 $m^2 - 2k^2$은 부호만 바뀌므로, 만약 이 값이 0이라면(즉 $m = k\sqrt{2}$라면) k가 계속 작아지는 동안 이 값은 계속 0으로 남아야 하는데, 이는 불가능하다.
- 수치적으로 $\sqrt{2} - 1 \approx 0.414$이고 $2^{1/3} - 1 \approx 0.260$이며, 강하에 필요한 대로 둘 다 0과 1 사이에 엄격히 놓인다.
- 컴퓨터로 $n \le 2 \times 10^5$인 모든 n을 탐색해 보면, $2n^2$이 완전제곱수이거나 $2n^3$ 또는 $4n^3$이 완전세제곱수인 n은 하나도 없다.

흔한 실수

- $(\sqrt{2} - 1)k$가 **양수**임을 보이는 것을 잊는 실수. S는 양의 정수만 포함하므로 이것이 필요하다.
- 소문항 (ii)에서 na만으로 정의된 집합을 쓴 뒤, 근거 없이 ka^2이 정수라고 주장하는 실수.
- 가장 작은 원소 k가 왜 존재하는지 말하지 않는 실수. 이를 위해서는 S(또는 T)가 공집합이 아니어야 하며, 3단계의 요점이 바로 그것이다.

STEP 너머

이 논증은 사실 수학적 귀납법(induction)의 바탕이 되는 원리인 양의 정수의 정렬성(well-ordering)에 관한 것이며, 일반화할 수 있다. $\sqrt[r]{N}$이 정수가 아니면 무리수인데, 이는 $n\alpha, n\alpha^2, \ldots, n\alpha^{r-1}$이 모두 정수가 되는 n 전체의 집합을 잡고 그 최소 원소에 0과 1 사이에 엄격히 놓인 $\alpha - \lfloor \alpha \rfloor$를 곱해 보면 알 수 있다. 대학의 첫 대수학 강의에서 이것은 정수 전체가 **정수적으로 닫힌**(integrally closed) 환(ring)을 이룬다는 명제가 된다. 즉 정수 계수를 가

진 최고차항의 계수가 1인 다항식(monic polynomial)의 유리수 근은 반드시 정수이다. 대븐포트(Davenport)의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 정수와 그 성질에 대해 더 읽어보기에 아주 좋은 책이다.

풀이

STEP III 2015, 문제 6

순수수학 • 근의 대칭함수

STEP III 2015, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/15-s3-q6

핵심 아이디어

w, z 쌍에 관한 모든 것은 그 합과 곱이 결정한다. w와 z는 $t^2 - (w+z)t + wz = 0$의 두 근(root)이기 때문이다. 그러면 소문항 (i)은 실수 계수 이차방정식(quadratic)이 언제 실근을 갖는가에 대한 명제가 되고, 조건 $u^2 \leq 2v$는 모습을 바꾼 판별식(discriminant)이다. 소문항 (ii)에서는 처음 두 식이 곱 wz를 결정하고, 그러면 세 번째 식은 u만의 삼차방정식(cubic)이 되는데, 그 근 하나는 눈으로 찾을 수 있다.

풀이

소문항 (i)

모든 것을 이끌어 가는 항등식(identity)은 다음과 같다.

$$2v - u^2 = 2(w^2+z^2) - (w+z)^2 = w^2 - 2wz + z^2 = (w-z)^2.$$

또한 $wz = \frac{1}{2}\big((w+z)^2 - (w^2+z^2)\big) = \frac{1}{2}(u^2 - v)$임에 주목한다.

w와 z가 실수인 경우: 이때 $u = w+z$와 $v = w^2+z^2$는 당연히 실수이고, $w-z$가 실수이므로 $2v - u^2 = (w-z)^2 \geq 0$이다. 따라서 $u^2 \leq 2v$이다.

역으로, u와 v가 실수이고 $u^2 \leq 2v$라고 하자. 그러면 $p = wz = \frac{1}{2}(u^2 - v)$도 실수이다.

$$(t-w)(t-z) = t^2 - ut + p,$$

이므로 수 w와 z는 정확히 계수가 실수인 이차방정식 $t^2 - ut + p = 0$의 두 근이다. 이 방정식의 판별식은

$$u^2 - 4p = u^2 - 2(u^2 - v) = 2v - u^2 \geq 0,$$

이므로 두 근은 모두 실수이다. 따라서 w와 z는 실수이고, 이것으로 동치(equivalence)의 증명이 끝난다.

? 생각해 보기 왜 "u와 v가 실수"라는 조건만으로는 충분하지 않을까?

켤레(conjugate) 복소수 쌍도 합과 제곱의 합이 실수이기 때문이다. 예를 들어 $w = 1 + 2\mathrm{i}$, $z = 1 - 2\mathrm{i}$이면 $u = 2$, $v = -6$으로 둘 다 실수이지만 $u^2 = 4 > -12 = 2v$이다. 이 부등식이 바로 실수가 아닌 켤레 쌍을 배제하는 조건이다.

소문항 (ii)

삼차방정식으로 바꾸기. 첫 번째 식은 $u = w + z$라는 뜻이다. $v = w^2 + z^2$라 쓰면 두 번째 식은 $v = u^2 - \frac{2}{3}$이므로

$$wz = \tfrac{1}{2}(u^2 - v) = \tfrac{1}{3}.$$

세제곱에 대해서는 잘 알려진 항등식

$$w^3 + z^3 = (w+z)^3 - 3wz(w+z) = u^3 - u.$$

을 쓴다. 따라서 세 번째 식은 $u^3 - u - \lambda u = -\lambda$, 즉

$$u^3 - (1+\lambda)u + \lambda = 0.$$

이 된다. $u = 1$을 대입하면 $1 - 1 - \lambda + \lambda = 0$이므로 $u - 1$은 인수이고,

$$u^3 - (1+\lambda)u + \lambda = (u-1)(u^2 + u - \lambda).$$

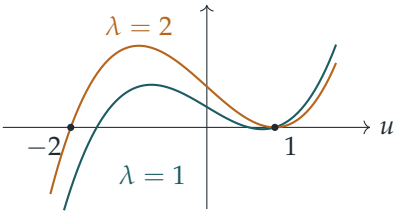
근의 개수 세기. $\lambda > 0$이므로 이차 인수의 판별식은 $1 + 4\lambda > 0$이다. 따라서 서로 다른 두 실근

$$u = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\lambda}}{2}.$$

를 갖는다. 이 중 하나가 1과 같은 것은 정확히 $1^2 + 1 - \lambda = 0$, 즉 $\lambda = 2$일 때이다. 따라서

- $\lambda \neq 2$이면 u의 가능한 값은 1과 $\frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1+4\lambda}\right)$로, 서로 다른 세 값이며 모두 실수이다.
- $\lambda = 2$이면 삼차식은 $(u-1)^2(u+2)$이고 값은 $u = 1$과 $u = -2$의 두 개뿐이다.

이 값들은 각각 실제로 나타난다. u가 주어지면 w와 z를 $t^2 - ut + \frac{1}{3} = 0$의 근으로 잡자. 그러면 $w + z = u$, $wz = \frac{1}{3}$이고, 위의 단계를 거꾸로 밟으면 세 식이 모두 성립함을 알 수 있다. 따라서 예외가 되는 값은 $\lambda = 2$이다.



위 그림(세로 방향으로 축소함)은 $u^3 - (1+\lambda)u + \lambda$를 나타낸 것으로, $\lambda = 1$일 때는 축과 서로 다른 세 점에서 만나고, $\lambda = 2$일 때는 곡선이 $u = 1$에서 축에 접하기만 한다.

w와 z는 반드시 실수일까? 그렇지 않다. u가 실수이고 $v = u^2 - \frac{2}{3}$도 실수이므로, 소문항 (i)에 의해 w와 z가 실수일 필요충분조건은 $u^2 \le 2v = 2u^2 - \frac{4}{3}$, 즉 $u^2 \ge \frac{4}{3}$이다. 근 $u = 1$은 모든 λ에 대해 존재하고 $1 < \frac{4}{3}$이므로, 이 근은 항상 실수가 아닌 w와 z를 준다.

구체적으로, $u = 1$이면 $t^2 - t + \frac{1}{3} = 0$이므로

$$w = \frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{3}}, \qquad z = \frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{3}}.$$

확인해 보면 $w + z = 1 = u$이고, $wz = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$이므로 $w^2 + z^2 = 1 - \frac{2}{3} = u^2 - \frac{2}{3}$이며, $w^3 + z^3 = u^3 - 3wz\,u = 1 - 1 = 0$이므로 모든 $\lambda > 0$에 대해 $w^3 + z^3 - \lambda u = -\lambda$이다. 이것은 반례(counterexample)이다. u의 세 값은 모두 실수이지만 w와 z는 실수가 아닐 수 있다.

검산

- $\lambda = 1$일 때 u의 값은 1과 $\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5}) \approx 0.618,\ -1.618$이고, 각각 $u^3 - 2u + 1 = 0$을 만족한다.
- $\lambda = 2$일 때 삼차식 $u^3 - 3u + 2$는 $u = -2$에서 0이 되고$(-8 + 6 + 2 = 0)$, 이 식과 그 도함수(derivative) $3u^2 - 3$이 모두 $u = 1$에서 0이 되므로 중근(double root)임이 확인된다.
- 여러 λ 값에 대해 컴퓨터로 각 u로부터 w와 z를 만들어 세 식이 반올림 오차 범위에서 모두 성립함을 확인하였고, $\lambda = 2$를 제외하면 서로 다른 u의 값이 세 개임도 확인하였다.

흔한 실수

- 소문항 (i)에서 한쪽 방향만 증명하는 것. 역을 보이려면 곱 wz가 실수여야 하며, 바로 여기서 v가 실수라는 조건이 쓰인다.
- 이차식의 근이 1과 다른지 확인하지 않아 예외 값 $\lambda = 2$를 놓치는 것.

- u가 실수이므로 w와 z도 실수여야 한다고 가정하는 것. w와 z의 대칭함수(symmetric functions)가 실수라는 사실은 켤레 쌍과도 똑같이 잘 맞아떨어진다.

STEP 너머

수의 쌍(또는 임의의 수의 집합)이 그 대칭함수로 결정된다는 생각은 대칭다항식(symmetric polynomials) 이론의 출발점이다. w와 z에 대한 모든 대칭다항식은 $w+z$와 wz로 나타낼 수 있으며, 뉴턴(Newton)의 항등식(Newton's identities)은 w^3+z^3 같은 거듭제곱 합(power sums)을 이들과 연결한다. 같은 추론을 판별식과 함께 쓰면 실수 계수 다항식의 근이 언제 모두 실수인지 판정할 수 있다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 복소수 공부에 훌륭한 길잡이가 되며, Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 대칭다항식을 더 깊이 다룬다.

풀이

STEP III 2015, 문제 7

순수수학 • 미분 연산자

STEP III 2015, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/15-s3-q7

핵심 아이디어

x의 거듭제곱은 $\mathrm{D} = x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$의 고유함수(eigenfunction)이다. 즉 x^a에 D를 적용하면 단지 a가 곱해질 뿐이다. 따라서 D^n은 다항식(polynomial)에 항별로 작용하여 x^r의 계수에 r^n을 곱하는데, 바로 여기서 최종 합의 r^n이 나온다. 나누어떨어짐(divisibility)에 대해서는, D를 한 번 적용할 때마다 인수 $(1-x)$의 거듭제곱 지수가 많아야 하나씩만 줄어든다는 점에 주목한다.

풀이

첫 번째 결과

임의의 상수 a에 대하여 (a가 정수가 아니면 $x > 0$이라 하자)

$$\mathrm{D}x^a = x \cdot ax^{a-1} = ax^a.$$

D를 한 번 더 적용하고, 상수 a를 밖으로 꺼낸 뒤 이 결과를 쓰면

$$\mathrm{D}^2x^a = \mathrm{D}\left(ax^a\right) = a\,\mathrm{D}x^a = a^2x^a,$$

이므로 원하는 결과를 얻는다. D는 선형(linear)이므로 (상수 α, β에 대하여 $\mathrm{D}(\alpha f + \beta g) = \alpha\,\mathrm{D}f + \beta\,\mathrm{D}g$), 이 과정을 반복하면 수학적 귀납법(induction)에 의해

$$\mathrm{D}^n x^a = a^n x^a \qquad (n \geq 1).$$

를 얻는다.

소문항 (i)

$c_r \neq 0$인 $\mathrm{P}(x) = \sum_{k=0}^{r} c_k x^k$로 쓰자. 선형성과 위의 결과에 의해

$$\mathrm{D}^n \mathrm{P}(x) = \sum_{k=0}^{r} c_k \, k^n x^k.$$

이것은 x^r보다 높은 차수의 항이 없는 다항식이고, x^r의 계수는 $r^n c_r$이다. $r \geq 1$이므로 $r^n \neq 0$이고, $c_r \neq 0$이므로 $r^n c_r \neq 0$이다. 따라서 $\mathrm{D}^n \mathrm{P}(x)$는 차수(degree)가 정확히 r인 다항식이다.

($r \geq 1$이라는 조건은 중요하다. $0^n = 0$이므로 상수 다항식은 0으로 보내지기 때문이다.)

소문항 (ii)

m을 고정한다. $1 \leq n \leq m$일 때 다음이 성립함을 n에 대한 귀납법으로 증명한다.

$$\mathrm{D}^n (1-x)^m = (1-x)^{m-n} \, \mathrm{Q}_n(x) \quad \text{어떤 다항식} \mathrm{Q}_n.$$

기저 단계(*base case*). $\mathrm{D}(1-x)^m = x \cdot \left(-m(1-x)^{m-1}\right) = (1-x)^{m-1} \cdot (-mx)$이므로 $\mathrm{Q}_1(x) = -mx$이다.

귀납 단계(*inductive step*). $n < m$인 어떤 n에 대하여 명제가 성립한다고 가정하자. 그러면 $m - n \geq 1$이다. 곱의 미분법(product rule)에 의해

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}^{n+1}(1-x)^m &= x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \Big[(1-x)^{m-n} \mathrm{Q}_n(x) \Big] \\
&= x \Big[-(m-n)(1-x)^{m-n-1} \mathrm{Q}_n(x) + (1-x)^{m-n} \mathrm{Q}_n'(x) \Big] \\
&= (1-x)^{m-n-1} \cdot x \Big[(1-x)\mathrm{Q}_n'(x) - (m-n)\mathrm{Q}_n(x) \Big].
\end{aligned}$$

괄호 안은 다항식이므로, 이 식은 $\mathrm{Q}_{n+1}(x) = x\big[(1-x)\mathrm{Q}_n'(x) - (m-n)\mathrm{Q}_n(x)\big]$으로 두면 원하는 꼴이 된다.

> **생각해 보기** 귀납 단계에서 $n < m$이라는 조건은 어디에 쓰였는가?

인수 $(1-x)^{m-n-1}$을 묶어 내는 것은 $m - n - 1 \geq 0$, 즉 $n < m$일 때에만 다항식 인수로서 의미가 있다. $n = m$이 되면 더 이상 잃을 $(1-x)$ 인수가 남아 있지 않으므로, 귀납법은 (올바르게) 거기서 멈춘다.

따라서 $n < m$인 모든 양의 정수 n에 대하여 $\mathrm{D}^n(1-x)^m$은 $(1-x)^{m-n}$으로 나누어떨어진다.

소문항 (iii)

이항정리(binomial theorem)로 전개하면

$$(1-x)^m = \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \binom{m}{r} x^r.$$

소문항 (i)에서와 똑같이 D^n을 항별로 적용하면

$$\mathrm{D}^n (1-x)^m = \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \binom{m}{r} r^n x^r.$$

소문항 (ii)에 의해 $n < m$이면 좌변은 $m - n \geq 1$인 $(1-x)^{m-n}\mathrm{Q}_n(x)$와 같으므로 $x = 1$에서 0이 된다. 따라서 우변에 $x = 1$을 대입하면

$$\sum_{r=0}^{m} (-1)^r \binom{m}{r} r^n = 0,$$

이므로 원하는 결과를 얻는다. ($r = 0$인 항은 $0^n = 0$인데, 이는 D가 상수항을 없앤다는 사실과 일치한다.)

검산

$m = 3, n = 2$로 두면 합은 $0 - 3 \cdot 1 + 3 \cdot 4 - 1 \cdot 9 = 0$이다. $m = 4, n = 3$으로 두면 $0 - 4 + 6 \cdot 8 - 4 \cdot 27 + 64 = 0$이다. 이 항등식은 $1 \leq n < m \leq 19$인 모든 경우에 대해 컴퓨터로도 확인하였고, $m \leq 11$에 대해서는 $(1-x)^{m-n}$이 $\mathrm{D}^n(1-x)^m$을 나누는 **정확한** 거듭제곱이라는 사실도 함께 확인하였다. 대조적으로, $n = m$이면 합은 더 이상 0이 아니다. $m = 2$일 때 합은 $0 - 2 + 4 = 2 = 2!$이고, 일반적으로는 $(-1)^m m!$이다.

흔한 실수

- $\mathrm{D}^2 x^a$를 $x^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} x^a = a(a-1)x^a$로 쓰는 것. D^2는 D를 두 번 적용한 것이지, 이계도함수에 x^2를 곱한 것이 아니다.
- 소문항 (i)에서 최고차항 계수(leading coefficient) $r^n c_r$이 0이 아닌 이유를 밝히지 않는 것. 바로 여기서 $r \geq 1$이 쓰인다.
- 소문항 (iii)에서 D^n을 적용하기 **전에** $(1-x)^m$에 $x = 1$을 대입하는 것. 핵심은 인수 $(1-x)$가 $n < m$번의 적용 뒤에도 살아남는다는 점이다.

STEP 너머

연산자(operator) $x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$는 오일러(Euler) 연산자(Euler operator)라고도 불리며, x^a는 고윳값(eigenvalue)이 a인 고유함수이다. 이 연산자는 $x^2y'' + bxy' + cy = 0$과 같은 오일러-코시 방정식(Euler–Cauchy equations)을 다루는 자연스러운 도구로, 이러한 방정식은 $x = e^t$로 치환하면 상수계수 방정식이 된다. 소문항 (iii)의 항등식은 차수가 m보다 작은 다항식의 m계 유한 차분(finite difference)이 0이라는 것을 말해 주며, 스털링(Stirling) 수(Stirling numbers), 그리고 포함-배제(inclusion–exclusion)를 이용한 전사(surjection)의 개수 세기와 밀접하게 연결되어 있다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(미분방정식 입문서)는 오일러 방정식을 다루고, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제집)에는 이런 스타일의 문제가 더 실려 있다.

풀이

STEP III 2015, 문제 8

순수수학 • 극좌표 미분방정식

STEP III 2015, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/15-s3-q8

이 문제는 *Beyond STEP*의 8.4 절 **원으로 감겨드는 나선**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch08/limit-cycle.html

핵심 아이디어

두 미분방정식(differential equation)은 모두 $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$와 $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y$라는 조합으로 이루어져 있는데, 이것들은 바로 극좌표(polar coordinates)가 간단하게 만들어 주는 식이다. 극좌표로 쓰면 이들은 각각 $r^2\,\mathrm{d}\theta$와 $r\,\mathrm{d}r$가 된다. 그래서 θ를 곡선을 따라가는 매개변수(parameter)로 보고, $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$를 θ-도함수(derivative)들의 비로 쓴 다음, 삼각함수 식이 정리되어 사라지게 한다. 소문항 (ii)에서는 추가된 항들 때문에 방정식이 r에 대한 베르누이 방정식(Bernoulli equation)이 되는데, 치환(substitution) $u = r^{-2}$를 하면 이것이 선형(linear) 방정식이 된다.

풀이

$\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$를 r'으로, $c = \cos\theta$, $s = \sin\theta$로 쓰자. 곡선 $r = r(\theta)$를 따라

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = r'c - rs, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = r's + rc, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta}.$$

어느 방정식이든 양변에 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta$를 곱하면, $P\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = Q$ 꼴의 방정식은

$$P\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} - Q\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = 0.$$

이 된다. 다음 두 항등식이 모든 일을 해 준다.

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = rc(r's + rc) - rs(r'c - rs) = r^2(c^2 + s^2) = r^2,$$
$$x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} + y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = rc(r'c - rs) + rs(r's + rc) = rr'.$$

소문항 (i)

여기서는 $P = y + x$, $Q = y - x$이므로

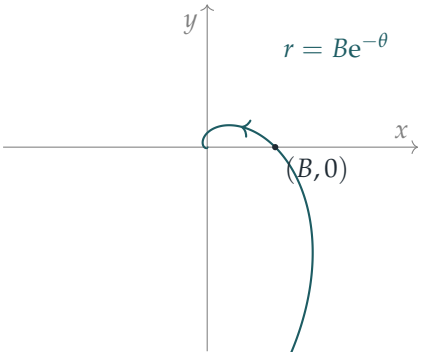
$$\begin{aligned}(y+x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} - (y-x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} &= \left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\right) + \left(x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} + y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\right)\\ &= r^2 + rr'.\end{aligned}$$

따라서 방정식은 $r(r' + r) = 0$이고, $r > 0$이므로 r로 나누면

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} + r = 0,$$

을 얻는다. 이것이 보이려던 식이다.

이 방정식은 변수분리형(separable)이다(또는 그냥 지수적 감소(exponential decay)임을 알아보면 된다). 따라서 $B > 0$에 대해 $r = B\mathrm{e}^{-\theta}$이다. 이것은 **등각 나선**(equiangular spiral), 즉 로그 나선(logarithmic spiral)이다. θ가 증가하면 곡선은 반시계 방향으로 감기며 원점으로 다가가지만 원점에 닿지는 않는다. θ가 감소하면 곡선은 한없이 바깥으로 감겨 나간다. $r/r' = -1$이므로 이 곡선은 원점에서 나가는 모든 반직선과 같은 각도, 즉 안쪽 방향 반지름과 45°의 각을 이루며 만난다. $B\mathrm{e}^{-\theta} = \mathrm{e}^{-(\theta - \ln B)}$이므로, B가 달라지면 같은 나선을 회전시킨 곡선이 된다.



화살표는 θ가 증가하는 방향을 나타낸다. 나선은 한 바퀴 돌 때마다 $\mathrm{e}^{2\pi} \approx 535$배로 줄어들기 때문에, 어떤 축척에서든 보이는 것은 대략 한 바퀴뿐이고 나머지는 원점 주위에 촘촘히 감겨 있다.

소문항 (ii)

이제 $P = y + x - x(x^2+y^2)$, $Q = y - x - y(x^2+y^2)$이고 $x^2+y^2 = r^2$이다. 새로 생긴 항들은

$$-r^2\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\right) = -r^2\cdot r^2 = -r^4,$$

를 더하므로, 원래 항들에는 소문항 (i)의 결과를 쓰면 방정식은

$$r^2 + rr' - r^4 = 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = r^3 - r,$$

이 된다. 여기서도 $r > 0$으로 나누었다.

> **?** **생각해 보기** 방정식이 선형이 되지 못하게 막는 r^3 항은 어떻게 처리할까?

이것은 베르누이 방정식이다. 목표로 하는 답이 r^2로 표현되어 있으므로 $u = r^{-2}$를 써 보는 것이 좋겠다. 그러면

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = -2r^{-3}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -2r^{-3}(r^3 - r) = -2 + 2u.$$

따라서 $u' - 2u = -2$이고, 이는 상수계수 선형 방정식이다. $u = 1$은 특수해(particular solution)이고 $A\mathrm{e}^{2\theta}$는 동차 방정식(homogeneous equation)의 해이므로

$$\frac{1}{r^2} = 1 + A\mathrm{e}^{2\theta} \qquad\Longrightarrow\qquad r^2 = \frac{1}{1 + A\mathrm{e}^{2\theta}},$$

을 얻고, 이것이 요구된 꼴이다. (변수를 분리하고 $\dfrac{1}{r(r-1)(r+1)}$을 부분분수(partial fractions)로 분해해도 같은 결과를 얻지만 더 수고스럽다.) 곡선은 $1 + A\mathrm{e}^{2\theta} > 0$인 곳에서만 존재한다.

해곡선의 모양

먼저 $A = \pm\mathrm{e}^{-2\alpha}$이면 $A\mathrm{e}^{2\theta} = \pm\mathrm{e}^{2(\theta-\alpha)}$이므로, A에 대한 곡선은 $A = \pm 1$에 대한 곡선을 α만큼 회전시킨 것임에 주목하자. 따라서 A의 부호에 따라 실제로는 세 가지 모양만 있다.

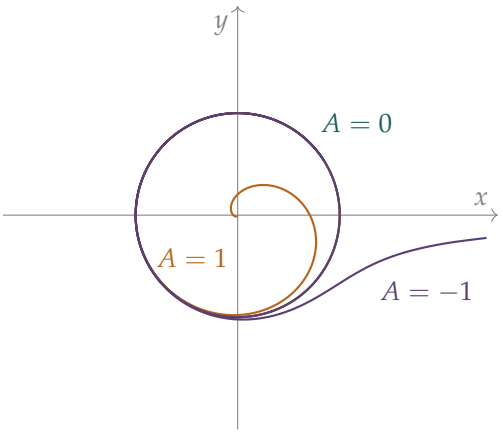
- $A = 0$: $r = 1$, 즉 단위원이다.
- $A > 0$: $1 + A\mathrm{e}^{2\theta} > 1$이므로 $r < 1$이고, 곡선은 모든 θ에 대해 정의된다. $r' = r(r^2-1) < 0$이므로 r는 계속 감소한다. $\theta \to -\infty$일 때 $r \to 1$이므로 곡선은 안쪽에서 단위원을 향해 감겨 나간다. $\theta \to +\infty$일 때 $r \approx A^{-1/2}\mathrm{e}^{-\theta} \to 0$이므로 곡선은 나선을 그리며 원점으로 들어가고, 점점 소문항 (i)의 나선과 비슷해진다.
- $A < 0$: $\mathrm{e}^{2\theta} < -1/A$, 즉 $\theta < \theta_0 = \frac{1}{2}\ln(-1/A)$이어야 한다. 이때 $r > 1$이고 $r' > 0$이다. $\theta \to -\infty$일 때 r는 위에서 $r \to 1$로 다가가므로 곡선은 바깥에서 단위원을 향해 감겨 들어간다. $\theta \to \theta_0^-$일 때 $r \to \infty$이다. θ_0 근처에서는 ($A\mathrm{e}^{2\theta_0} = -1$이므로)

$1 + Ae^{2\theta} \approx 2(\theta_0 - \theta)$이고, 따라서 $r \approx \left(2(\theta_0 - \theta)\right)^{-1/2}$이며, 곡선에서 직선 $\theta = \theta_0$까지의 거리는

$$r\sin(\theta_0 - \theta) \approx r(\theta_0 - \theta) \approx \frac{1}{2r} \to 0.$$

이다. 그러므로 곡선은 원점을 지나고 각 θ_0를 이루는 직선을 점근선(asymptote)으로 가지며 무한히 뻗어 나가고, 시계 방향 쪽에서 그 직선에 다가간다. $A = -1$이면 $\theta_0 = 0$이고, 큰 x에 대해 곡선은 $y = -\frac{1}{2x}$에 가까워진다.

단위원은 극한 순환(limit cycle)이다. 다른 모든 해는 $\theta \to -\infty$일 때 나선을 그리며 단위원으로 다가가고, θ가 증가하면 단위원에서 멀어진다.



자주색 곡선($A = -1$)은 양의 x축 바로 아래에서 그 축을 따라 무한히 뻗어 나간다.

검산

- $r = Be^{-\theta}$를 (i)의 원래 방정식에 몇몇 점에서 다시 대입하면(x, y, $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$로 바꾸어서) o이 나온다. (ii)의 식도 양수와 음수의 여러 A 값에 대해 마찬가지이다.
- $A = 0$이면 $r = 1$이고, 실제로 상수 $r = 1$은 $r' = r^3 - r$를 만족한다. x, y로 보면 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위에서는 추가된 항들이 원래 항들과 정확히 상쇄된다.
- $r(0) = \frac{1}{2}$(즉 $A = 3$)에서 시작하면 식은 $r(2) = 1/\sqrt{1 + 3e^4} \approx 0.0779$를 주며, 이는 $r' = r^3 - r$를 단계별로 수치적으로 푼 결과와 소수점 아래 여러 자리까지 일치한다.
- $A = -1$, $\theta = -10^{-4}$에서 $r \approx 70.71$이고 x축까지의 거리는 $0.00707 \approx 1/(2r)$이므로 점근선이 확인된다.

흔한 실수

- $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$를 r가 변한다는 것을 고려하여 $(\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta)/(\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta)$로 구해야 한다는 것을 잊는 것, 즉 r' 항들을 빠뜨리는 것.
- $A < 0$일 때 $1 + A\mathrm{e}^{2\theta} > 0$이라는 제한을 놓쳐서, 이 곡선들이 유한한 각도에서 무한히 뻗어 나간다는 것을 알아차리지 못하는 것.
- A의 부호마다 곡선을 하나씩만 그리고, 나머지 곡선들이 그것을 회전시킨 것이라는 말을 하지 않는 것.

STEP 너머

방정식 $r' = r^3 - r$는 평면 역학계(dynamical system)를 극좌표로 나타낸 것이고, 단위원은 **극한 순환**, 즉 근처의 궤적들이 나선을 그리며 다가가거나 멀어지는 고립된 닫힌 궤도이다. 이처럼 반지름 방향 방정식이 분리되는 계는 비선형 미분방정식과 상평면 분석(phase-plane analysis) 강의에서 가장 먼저 다루는 표준적인 예이며, 푸앵카레(Poincaré)–벤딕손(Bendixson) 정리로 이어진다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에 비선형계와 극한 순환을 다룬 좋은 장이 있다.

풀이

STEP III 2015, 문제 9

역학 • 비선형 탄성 진동

> **STEP III 2015, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/15-s3-q9

핵심 아이디어

레일은 매끄럽고 수직항력(normal reaction)은 일을 하지 않으므로 에너지가 보존되며(conservation of energy), 이로부터 1계 방정식(first-order equation)이 곧바로 얻어진다. 레일 위의 모든 점에서 $PQ \geq a$이므로 줄은 절대 느슨해지지 않는다. 되돌아오는 점(turning point)은 $\dot{x} = 0$인 곳이다. 주기(period)는 중심에서 x_0까지 가는 데 걸리는 시간의 네 배이다. v가 작으면 입자는 출발점 가까이에 머무르므로 $\sqrt{x^2+a^2} - a \approx x^2/(2a)$이고, 치환(substitution) $x = x_0 u$를 하면 적분이 깔끔하게 정리된다.

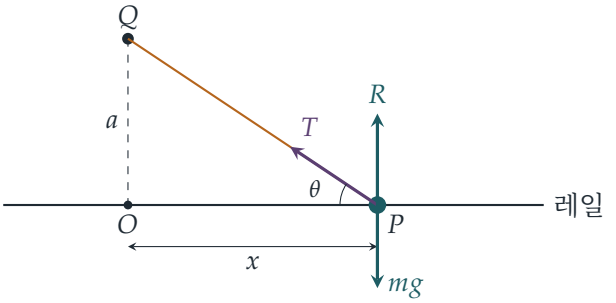
풀이

에너지 방정식

P를 입자로, 줄을 훅의 법칙(Hooke's law)을 따르는 가볍고 탄성 있는 줄로 모형화한다. 레일을 x축으로 잡고, P는 Q에서 내린 수선의 발인 원점에서 출발한다고 하자. P가 x에 있을 때 Q까지의 거리는 $PQ = \sqrt{x^2+a^2} \geq a$이므로 줄은 팽팽하며, 늘어난 길이(extension)는

$$e = \sqrt{x^2+a^2} - a \quad (\geq 0).$$

이다.



P에 작용하는 힘은 무게, 레일의 수직항력 R(둘 다 운동 방향에 수직이므로 일을 하지 않는다), 그리고 장력(tension) T이다. 장력은 탄성 위치 에너지(elastic potential energy)가 $\lambda e^2/(2a)$인 보존력(conservative force)이다. 처음에 $e = 0$이고 속력이 v이므로, 에너지 보존에 의해

$$\tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{\lambda}{2a}\left(\sqrt{x^2+a^2} - a\right)^2 = \tfrac{1}{2}mv^2.$$

이다. 양변에 $2/m$을 곱하고 $k^2 = \lambda/(ma)$로 놓으면

$$\dot{x}^2 = v^2 - k^2\left(\sqrt{x^2+a^2} - a\right)^2,$$

이 되어 요구된 식을 얻는다.

최대 변위와 그곳에서의 가속도

늘어난 길이 e는 $|x|$에 따라 증가하므로, P가 바깥으로 움직일수록 $\dot{x}^2$은 감소하고, P는 $\dot{x} = 0$이 될 때까지 바깥으로 움직인다. 그 점에서 $k\left(\sqrt{x_0^2+a^2} - a\right) = v$이다($e \geq 0$이므로 양의 근을 택한다). 따라서

$$\sqrt{x_0^2+a^2} = a + \frac{v}{k} \quad \Longrightarrow \quad x_0^2 = \left(a + \frac{v}{k}\right)^2 - a^2 = \frac{2av}{k} + \frac{v^2}{k^2},$$

이고, 이로부터

$$x_0 = \frac{\sqrt{v\,(2ak+v)}}{k}.$$

를 얻는다.

가속도를 구하기 위해 레일 방향으로 힘을 분해한다. θ를 PQ와 레일 사이의 각이라 하면 $\cos\theta = x/\sqrt{x^2+a^2}$이고, 장력의 레일 방향 성분은 O를 향하는 $T\cos\theta$이다. $T = \lambda e/a$이므로

$$m\ddot{x} = -\frac{\lambda}{a}\left(\sqrt{x^2+a^2} - a\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}, \qquad \text{따라서} \qquad \ddot{x} = -k^2\left(\sqrt{x^2+a^2} - a\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

이다. (에너지 방정식을 t에 대해 미분하고 $2\dot{x}$를 약분해도 같은 결과를 얻는다.) $x = x_0$에서 $\sqrt{x_0^2+a^2} - a = v/k$이고 $\sqrt{x_0^2+a^2} = (ak+v)/k$이므로

$$\ddot{x} = -k^2 \cdot \frac{v}{k} \cdot \frac{k\,x_0}{ak+v} = -\frac{k^2 v\,x_0}{ak+v} = -\frac{kv\sqrt{v\,(2ak+v)}}{ak+v}.$$

이다. 따라서 x_0에서 가속도의 크기는 $\dfrac{kv\sqrt{v(2ak+v)}}{ak+v}$이고, 방향은 레일을 따라 처음 위치 쪽을 향한다.

주기

$\dot{x}^2$에 대한 식은 x^2에만 의존하므로 운동은 O에 대해 대칭이다. 입자는 $-x_0$와 x_0 사이에서 진동하며, 네 개의 사분 구간 $O \to x_0 \to O \to -x_0 \to O$ 각각에 걸리는 시간은 같다. 첫 번째 사분 구간에서 $\dot{x} > 0$이므로 $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x/\dot{x}$이고, 주기는

$$\tau = 4\int_0^{x_0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{v^2 - k^2\left(\sqrt{x^2+a^2}-a\right)^2}}.$$

이다. 피적분함수는 x_0에서 발산하지만 $(x_0-x)^{-1/2}$ 정도로만 발산하므로 적분은 수렴(converge)한다.

? 생각해 보기 $v \ll ka$는 x의 크기에 대해 무엇을 알려 주는가?

$x_0^2 = 2av/k + v^2/k^2$이므로, $v/k \ll a$이면 $x_0^2 \approx 2av/k$이고 따라서 $x_0^2/a^2 \approx 2v/(ka) \ll 1$이다. 그러므로 적분 구간의 모든 x는 $|x| \ll a$를 만족하고, 이항 전개(binomial expansion)에 의해

$$\sqrt{x^2+a^2} - a = a\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)^{1/2} - a \approx \frac{x^2}{2a}.$$

이다. 주기는

$$\tau \approx 4\int_0^{x_0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{v^2 - k^2x^4/(4a^2)}}, \qquad x_0 \approx \sqrt{\frac{2av}{k}},$$

가 되며, $k^2x_0^4/(4a^2) = v^2$이므로 이 근사적인 x_0는 정확히 새 분모가 0이 되는 점이다. 이제 $x = x_0u$로 치환하면 $\mathrm{d}x = x_0\,\mathrm{d}u$이고 $k^2x^4/(4a^2) = v^2u^4$이므로

$$\tau \approx 4\int_0^1 \frac{x_0\,\mathrm{d}u}{v\sqrt{1-u^4}} = \frac{4}{v}\sqrt{\frac{2av}{k}}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^4}} = \sqrt{\frac{32a}{kv}}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^4}},$$

이다. 여기서 $\frac{16}{v^2}\cdot\frac{2av}{k} = \frac{32a}{kv}$를 이용하였다. 이것이 요구된 근사식이다.

검산

- 단위: $k^2 = \lambda/(ma)$의 단위는 s^{-2}이므로 v/k는 길이이고(x_0에서의 늘어난 길이이므로 당연히 그래야 한다), $\sqrt{a/(kv)}$는 시간이다.
- $m=1, \lambda=2, a=1, v=1$이면 $k=\sqrt{2}$, $x_0 = \sqrt{1+2\sqrt{2}} \approx 1.3836$이고 x_0에서의 가속도는 ≈ -1.1462이다. 운동 방정식을 수치적으로 한 단계씩 풀어 나가면 같은 되돌아오는 점을 얻고, 주기는 약 7.612로 적분값과 일치한다.

- $a = 1, k = 2, v = 0.001$일 때 주기 적분의 정확한 값은 165.862이고, 근사식으로는 165.833이다. 여기서 $\int_0^1 (1 - u^4)^{-1/2}\,\mathrm{d}u \approx 1.3110$이다. $v \to 0$일 때 두 값의 비는 1로 수렴한다.

흔한 실수

- 늘어난 길이로 $\sqrt{x^2 + a^2} - a$ 대신 x나 $\sqrt{x^2 + a^2}$을 사용하는 것. 줄은 자연 길이(natural length)에서 출발한다.
- 장력을 분해하는 것을 잊는 것. 레일 방향으로는 성분 $T\cos\theta$만 작용한다.
- 주기를 $2\int_0^{x_0}$이나 $\int_0^{x_0}$로 잡는 것. 진동은 $-x_0$와 x_0 사이에서 일어나므로 사분 주기 네 개가 필요하다.

STEP 너머

v가 작을 때 복원력(restoring force)은 x가 아니라 대략 x^3에 비례하므로, 이것은 주기가 진폭(amplitude)에 의존하는 비선형 진동자(nonlinear oscillator)이다. 단순 조화 운동(simple harmonic motion)과 달리 에너지가 줄어들수록 주기는 $v^{-1/2}$처럼 커진다. 적분 $\int_0^1 (1 - u^4)^{-1/2}\,\mathrm{d}u$는 타원 적분(elliptic integral)(렘니스케이트 상수(lemniscate constant)의 절반)으로, 진자의 정확한 주기를 구할 때에도 나타나는 종류의 적분이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)은 이러한 관점에서 에너지 방법과 진동을 다룬다.

풀이

STEP III 2015, 문제 10

역학 • 회전하는 강체 막대

STEP III 2015, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

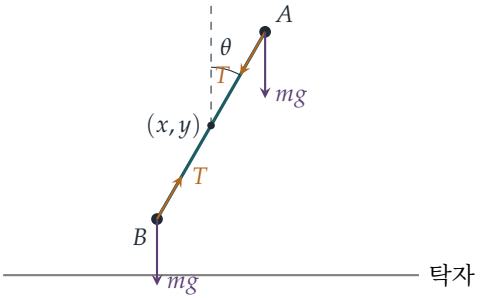
step.maths.org/questions/15-s3-q10

핵심 아이디어

계를 중점의 운동과 막대의 회전으로 기술한다. 각 입자의 위치를 x, y, θ로 나타내고, 두 번 미분한 다음, 각 입자에 뉴턴 제2법칙(Newton's second law)을 적용한다. 두 식을 더하면 장력(tension)이 사라지고 질량중심(centre of mass)의 운동이 나온다. 두 식을 빼고 막대에 수직인 방향으로 분해하면 장력이 다시 사라지고 회전만 남는다. 세 가속도를 모두 알고 나면, 마지막 부분은 포물체 운동(projectile motion)에 일정한 회전을 더한 것이 된다.

풀이

두 질량을 가벼운 강체 막대로 연결된 입자로 모형화한다. 각 입자에 작용하는 힘은 무게와 막대가 가하는 힘뿐이며, 막대가 가하는 힘은 막대 방향으로 작용한다. 장력을 T라 하자. 그러면 $T > 0$은 막대가 각 입자를 중점 쪽으로 당긴다는 뜻이다. (막대는 밀 수도 있으며, 그 때는 $T < 0$이다. 아래의 어떤 내용도 부호에 의존하지 않는다.)



입자 A의 운동 방정식

처음에 중점보다 위에 있는 막대 끝의 입자를 A라 하자. 그러면 중점에서 A로 가는 벡터는 $a(\sin\theta, \cos\theta)$이다. 따라서 A의 위치는

$$\mathbf{r}_A = \begin{pmatrix} x + a\sin\theta \\ y + a\cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \text{이므로} \qquad \dot{\mathbf{r}}_A = \begin{pmatrix} \dot{x} + a\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y} - a\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix}$$

이다. 이는 연쇄법칙(chain rule)에 의한 것이다. 이것이 구하는 속도이다. $\dot{\theta}\cos\theta$와 $\dot{\theta}\sin\theta$에 곱의 미분법(product rule)을 써서 한 번 더 미분하면

$$\ddot{\mathbf{r}}_A = \begin{pmatrix} \ddot{x} + a\ddot{\theta}\cos\theta - a\dot{\theta}^2\sin\theta \\ \ddot{y} - a\ddot{\theta}\sin\theta - a\dot{\theta}^2\cos\theta \end{pmatrix}.$$

막대는 A를 중점 쪽, 즉 $-(\sin\theta, \cos\theta)$ 방향으로 크기 T의 힘으로 당긴다. 중력은 $-mg(0,1)$을 준다. 따라서 A에 대한 뉴턴 제2법칙은 정확히 문제에 주어진 식이 된다.

$$m\begin{pmatrix} \ddot{x} + a\ddot{\theta}\cos\theta - a\dot{\theta}^2\sin\theta \\ \ddot{y} - a\ddot{\theta}\sin\theta - a\dot{\theta}^2\cos\theta \end{pmatrix} = -T\begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} - mg\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{A}$$

다른 입자

반대쪽 끝에 있는 B에 대해서는 모든 곳에서 a를 $-a$로 바꾼다. 이제 막대는 B를 $+(\sin\theta, \cos\theta)$ 방향으로 당긴다.

$$m\begin{pmatrix} \ddot{x} - a\ddot{\theta}\cos\theta + a\dot{\theta}^2\sin\theta \\ \ddot{y} + a\ddot{\theta}\sin\theta + a\dot{\theta}^2\cos\theta \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} - mg\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{B}$$

여기서 B의 속도는 $(\dot{x} - a\dot{\theta}\cos\theta,\ \dot{y} + a\dot{\theta}\sin\theta)$이다.

가속도 구하기

(A)와 (B)를 더하면 a나 T를 포함한 항이 모두 소거된다.

$$2m\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = -2mg\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{따라서} \qquad \ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = -g.$$

(A)에서 (B)를 빼고 2로 나누면 다음을 얻는다.

$$ma\ddot{\theta}\cos\theta - ma\dot{\theta}^2\sin\theta = -T\sin\theta,$$
$$-ma\ddot{\theta}\sin\theta - ma\dot{\theta}^2\cos\theta = -T\cos\theta.$$

생각해 보기 값을 모르는 T를 어떻게 없앨 수 있을까?

장력은 막대 방향으로 작용하므로, 막대에 수직인 방향 $(\cos\theta, -\sin\theta)$으로 분해한다. 즉, 첫 번째 식에 $\cos\theta$를 곱한 것에서 두 번째 식에 $\sin\theta$를 곱한 것을 뺀다. 우변은 $-T\sin\theta\cos\theta + T\cos\theta\sin\theta = 0$이 되고, $\dot\theta^2$ 항들도 같은 방식으로 소거된다. 남는 것은

$$ma\ddot\theta(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 0,$$

이고, $m, a \neq 0$이므로 $\ddot\theta = 0$이다. (대신 막대 방향으로 분해하면 $T = ma\dot\theta^2$을 얻는데, 이는 중점을 중심으로 하는 원운동에 필요한 장력이다.)

마지막 부분

$t = 0$일 때 막대는 연직이므로 $\theta = 0$이다. 이때 입자 A가 위쪽에 있고 속도는 $(\dot x + a\dot\theta,\ \dot y)$이며, B가 아래쪽에 있고 속도는 $(\dot x - a\dot\theta,\ \dot y)$이다. 이를 주어진 처음 속도와 맞추면

$$\dot x + a\dot\theta = u, \qquad \dot x - a\dot\theta = 0, \qquad \dot y = v,$$

이므로 처음에 $\dot x = \frac{1}{2}u, \dot\theta = \dfrac{u}{2a}, \dot y = v$이다.

앞 부분에 의해 $\dot\theta$는 일정하게 유지되므로 $\theta = \dfrac{ut}{2a}$이다. θ가 증가하도록 $u > 0$으로 둔다. 또한 $y(0) = h$에서 $\ddot y = -g$이므로

$$y = h + vt - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

막대가 $\frac{1}{2}\pi$만큼 회전하는 것은 $\dfrac{ut}{2a} = \dfrac{\pi}{2}$, 즉 $t = \dfrac{\pi a}{u}$일 때이다. 이때 막대는 수평이므로 두 입자 모두 중점의 높이 y에 있다. 두 입자가 이 순간에 함께 탁자에 닿는 것은 그때 $y = 0$인 경우와 정확히 같다.

$$h + v\cdot\frac{\pi a}{u} - \frac{1}{2}g\cdot\frac{\pi^2a^2}{u^2} = 0.$$

양변에 $2u^2$을 곱하고 정리하면

$$2hu^2 = \pi^2a^2g - 2\pi uva,$$

가 되어 요구된 결과를 얻는다.

검산

- $v = 0$이면 떨어지는 데 걸리는 시간은 $\sqrt{2h/g}$이고, 이것이 $\pi a/u$와 같아야 한다. 제곱하면 $2hu^2 = \pi^2a^2g$이 되어 결과와 일치한다.
- 단위: 결과의 모든 항은 차원(dimensions) $\mathrm{L^3T^{-2}}$을 가진다.
- 강체 막대로 연결된 두 입자를 컴퓨터로 시뮬레이션하였다. $g = 9.8$로 두고 a, u, v를 여러 번 무작위로 고른 뒤 h는 공식으로 정하였다. 예를 들어 $a \approx 1.754$이면 $h \approx 17.93$이다. 모든 경우에 두 입자는 10^{-10} 이내의 오차로 $t = \pi a/u$에 막대가 수평인 상태로 함께 탁자에 닿았다.

흔한 실수

- 두 입자 중 하나에 대해 장력의 방향을 잘못 잡는 것. 막대는 각 입자를 중점 쪽으로 당기므로 두 힘은 크기가 같고 방향이 반대이다.
- 각 식에서 서로 다른 T 값을 쓰는 것. 막대는 가벼우므로 막대에 작용하는 알짜힘은 0이어야 하고, 따라서 양 끝의 장력은 같다.
- $\dot{\theta}\cos\theta$를 미분할 때 $-a\dot{\theta}^2$ 항을 빠뜨리는 것. 이 항이 없으면 뺄는 단계가 깔끔하게 정리되지 않는다.

STEP 너머

이 문제는 입자계에 관한 일반적인 정리의 작은 예이다. 질량중심은 모든 질량과 모든 외력이 그곳에 집중된 것처럼 운동한다. 내력은 쌍으로 상쇄되므로, 질량중심에 대한 외부 토크(torque)가 없으면 질량중심에 대한 각운동량(angular momentum)이 보존된다. 대학 1학년 역학에서는 라그랑주 방법(Lagrangian approach)도 배우게 되는데, 이 방법은 x, y, θ를 일반화 좌표(generalised coordinates)로 삼으며 T가 전혀 필요하지 않다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 질량중심과 강체 회전(rigid-body rotation)을 철저하게 다룬다.

풀이

STEP III 2015, 문제 11

역학 • 원운동

> **STEP III 2015, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/15-s3-q11

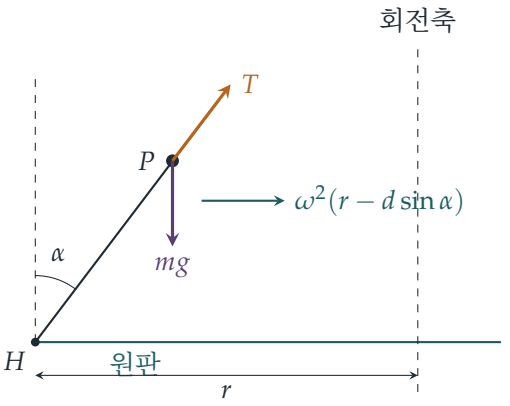
핵심 아이디어

가벼운 막대(light rod)는 질량이 없으므로, 막대가 움직이고 있더라도 막대에 작용하는 힘과 모멘트(moment)는 정확히 평형을 이루어야 한다. 소문항 (i)에서는 막대에 두 힘만 작용하고, 경첩(hinge)에서 오는 힘은 경첩에 대한 모멘트가 없으므로 P에서 오는 힘은 경첩을 똑바로 향해야 한다. 그다음에는 P가 수평면 위에서 원운동을 하는 입자이므로, 힘을 성분으로 분해(resolving)하면 나머지가 해결된다. 소문항 (ii)에서는 두 입자에서 오는 힘이 막대 방향일 필요가 없지만, 경첩에 대한 모멘트를 취하면 여전히 β에 대한 하나의 방정식을 얻는다.

풀이

모형. 입자는 질점(point mass)이고, 막대는 가볍고 강체이며, 경첩은 매끄러우므로 경첩은 자신의 축(막대를 포함하는 연직 평면에 수직이고 경첩을 지나는 수평선)에 대하여 짝힘(couple)을 작용하지 않는다. 그 평면에 좌표축을 잡되, 원점은 경첩 H에 두고, x축은 수평으로 회전축을 향하게, y축은 연직 위쪽을 향하게 한다. H에서 거리 s인 막대 위의 점은 $(s\sin\theta,\ s\cos\theta)$에 있다. 여기서 θ는 막대가 위쪽 연직선과 이루는 각이며, 이 점은 회전축에서 수평 거리 $r - s\sin\theta$만큼 떨어져 있다.

소문항 (i)



위 그림에 P에 작용하는 힘을 나타내었다. 하나는 무게이고, 다른 하나는 막대에서 오는 힘인데, 이 힘이 막대 방향으로 작용함을 곧 보일 것이다. 청록색 화살표는 P의 가속도이다.

P에서 오는 힘은 막대 방향이다. 막대에는 두 힘만 작용한다. 하나는 H에 작용하는 경첩의 힘이고, 다른 하나는 P에 작용하는, P에서 오는 힘 $\mathbf{G}$이다. 막대는 가벼우므로, 막대가 어떻게 움직이든 경첩 축에 대한 막대의 전체 모멘트는 0이다(질량 곱하기 각가속도가 0이기 때문이다). 경첩의 힘은 H에 대한 모멘트가 없으므로, $\mathbf{G}$도 모멘트가 없다.

다음으로, P는 회전축을 중심으로 하는 수평 원 위를 움직이므로, 그 가속도는 수평이고 회전축을 향하며, 회전축은 막대를 포함하는 연직 평면 안에 있다. 무게 역시 그 평면 안에 있으므로, 막대가 P에 작용하는 힘도, 따라서 (뉴턴(Newton)의 제3법칙에 의해 크기가 같고 방향이 반대인) $\mathbf{G}$도 그 평면 안에 있다. 평면 안의 힘이 H에 대한 모멘트가 0이면 그 작용선은 H를 지난다. 그 작용선은 막대 위에 있는 P도 지나므로, $\mathbf{G}$는 막대와 평행하다. 이로써 증명되었다.

각. 따라서 막대는 막대 방향으로 크기 T인 힘으로 P를 밀거나 당긴다. 이 힘은 H에서 P를 향하는 방향으로 잡는다. 즉 성분은 $(T\sin\alpha,\ T\cos\alpha)$이다. P는 회전축에서 거리 $r - d\sin\alpha$만큼 떨어져 있는데, $d\sin\alpha < r$이므로 이 값은 양수이다. 따라서 P는 회전축에 대해 H와 같은 쪽에 있고, 그 가속도 $\omega^2(r - d\sin\alpha)$는 $+x$ 방향을 향한다. P에 대한 뉴턴의 제2법칙은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\text{연직 방향:} \quad T\cos\alpha - mg = 0, \\ &\text{수평 방향:} \quad T\sin\alpha = m\omega^2(r - d\sin\alpha). \end{aligned}$$

둘째 식을 첫째 식으로 나누면($\cos\alpha \neq 0$이다. 그렇지 않으면 $T\cos\alpha = 0 \neq mg$이기 때문이다)

$$\tan\alpha = \frac{\omega^2(r - d\sin\alpha)}{g} = \frac{r - d\sin\alpha}{a}.$$

양변에 $a\cot\alpha$를 곱하면 $a = r\cot\alpha - d\cos\alpha$, 즉

$$r\cot\alpha = a + d\cos\alpha,$$

이므로 증명되었다.

경첩의 힘. 첫째 식에서 $T = mg/\cos\alpha > 0$이므로, 막대는 P를 경첩에서 멀어지는 쪽으로 민다. 즉 막대는 압축(compression) 상태에 있다. 뉴턴의 제3법칙에 의해 P는 막대 방향으로 H를 향해 크기 T인 힘으로 막대를 민다. 막대는 가벼우므로 막대에 작용하는 힘의 합은 0이고, 따라서 경첩이 막대에 작용하는 힘은 이 힘과 크기가 같고 방향이 반대이다. 즉 경첩의 힘은 **막대 방향으로, 경첩에서 멀어져 P를 향하여** (위쪽으로, 그리고 회전축을 향해 안쪽으로) 작용하며, 그 크기는

$$\frac{mg}{\cos\alpha} = mg\sec\alpha.$$

이다.

소문항 (ii)

이제 질량 m_i $(i = 1, 2)$인 입자는 $(d_i\sin\beta,\ d_i\cos\beta)$에 있고, 회전축에서 거리 $r - d_i\sin\beta > 0$만큼 떨어져 있다.

> **생각해 보기** 이제 각 입자는 우리가 모르는 어떤 방향으로 막대를 당긴다. 이 힘들을 하나하나 구하지 않으려면 어떻게 해야 할까?

이 힘들을 하나하나 구할 필요는 없다. 각 입자에 대한 뉴턴의 제2법칙으로 막대가 그 입자에 작용하는 힘을 구하고, 가벼운 막대의 H에 대한 모멘트 방정식을 쓰면 미지의 경첩 힘이 사라진다. 막대가 입자 i에 작용하는 힘을 $\mathbf{F}_i$라 하자. 입자의 가속도는 $+x$ 방향으로 $\omega^2(r - d_i\sin\beta)$이므로

$$\mathbf{F}_i + (0, -m_ig) = \big(m_i\omega^2(r - d_i\sin\beta),\ 0\big) \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{F}_i = \big(m_i\omega^2(r - d_i\sin\beta),\ m_ig\big).$$

뉴턴의 제3법칙에 의해, 입자 i는 점 $(x_i, y_i) = (d_i\sin\beta,\ d_i\cos\beta)$에서 막대에 $-\mathbf{F}_i$를 작용한다. (x, y)에 작용하는 힘 (X, Y)의 H에 대한 반시계 방향 모멘트는 $xY - yX$이므로, $-\mathbf{F}_i$의 모멘트는

$$-d_i\sin\beta\cdot m_ig + d_i\cos\beta\cdot m_i\omega^2(r - d_i\sin\beta).$$

이다. 경첩의 힘은 H에 대한 모멘트가 없고 막대는 가벼우므로, 이 두 모멘트의 합은 0이다. $\omega^2\sin\beta$로 나누고(이 값은 0이 아니다. $\beta = 0$이면 모멘트 방정식이 $\sum m_id_i\omega^2r = 0$이 되는데, 이는 거짓이다) $g/\omega^2 = a$를 이용하면

$$\sum_{i=1}^{2} m_id_i\big(-a + r\cot\beta - d_i\cos\beta\big) = 0,$$

즉

$$(m_1d_1 + m_2d_2)\,r\cot\beta = (m_1d_1 + m_2d_2)\,a + (m_1d_1^2 + m_2d_2^2)\cos\beta.$$

이다. $m_1 d_1 + m_2 d_2 > 0$으로 나누면

$$r \cot \beta = a + b \cos \beta, \qquad b = \frac{m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2}{m_1 d_1 + m_2 d_2}.$$

검산

- 입자가 하나뿐이면(예를 들어 $m_2 = 0$) $b = d_1$이 되어 소문항 (i)의 결과를 다시 얻는다. $d_1 = d_2 = d$이면 역시 $b = d$이다. 같은 점에 있는 두 입자는 하나의 입자처럼 행동한다.
- b는 d_1과 d_2의 ($m_i d_i$를 가중치로 하는) 가중평균(weighted average)이므로, 마땅히 두 값 사이에 있다.
- $\omega \to 0$이면 $a \to \infty$이므로 $\cot \alpha \to \infty$이고, 막대는 연직에 가까워진다. 원판이 거의 돌지 않을 때 기대되는 결과이다. $d > r$인 상태에서 $\omega \to \infty$이면 $a \to 0$이고 방정식은 $r = d \sin \alpha$에 가까워진다. 즉 입자는 회전축에 다가가며, 그곳에서는 구심력(centripetal force)이 거의 필요하지 않다.
- $r = 1\,\mathrm{m}$, $\omega = 5\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$, $d = 0.6\,\mathrm{m}$, $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$이면 $a = 0.3924\,\mathrm{m}$이고, 방정식에서 $\alpha \approx 0.9251$ (약 53.0°)을 얻는다. 이때 $r \cot \alpha \approx 0.7538 \approx a + d \cos \alpha$이다. 이 각에서 정지 상태로 출발시킨 막대의 운동을 컴퓨터로 시뮬레이션하면 막대는 그 자리에 머문다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)에서 각 입자가 막대에 작용하는 힘이 막대 방향이라고 가정하는 것. 그것은 입자가 하나일 때만 성립하는 특수한 사실이며, 입자가 둘이면 H에 대한 전체 모멘트만 0이다.
- 입자가 그리는 원의 반지름으로 $r - d \sin \alpha$ 대신 r (또는 $d \sin \alpha$)를 쓰는 것.
- 경첩의 힘이 경첩을 향해 작용한다고 답하는 것. 막대는 압축 상태에 있으므로, 경첩은 막대를 P 쪽으로 민다.

STEP 너머

소문항 (ii)의 모멘트 방정식은 유효 퍼텐셜(effective potential) $\sum m_i \left(g d_i \cos \theta - \frac{1}{2} \omega^2 (r - d_i \sin \theta)^2 \right)$이 정류값을 가질(stationary) 조건이다. 회전 좌표계(rotating frame)에서는 원심력(centrifugal force)이 추가된 퍼텐셜처럼 행동한다. 이는 원심 조속기(centrifugal governor)와 같은 회전계를 분석하고, 정상 상태가 안정한지(stable) 묻는 출발점이 된다. 여기서 유효 퍼텐셜은 $\theta = \alpha$에서 극댓값을 가지므로, 소문항 (i)의 정상 상태는 사실 불안정

하다. 막대를 살짝 건드리면 멀리 흔들려 나간다. Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 강체의 모멘트와 회전 좌표계를 다룬다.

풀이

STEP III 2015, 문제 12

확률과 통계 • 확률생성함수

STEP III 2015, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/15-s3-q12

핵심 아이디어

m으로 나눈 나머지(remainder)는 지수를 m으로 나눈 나머지에만 관계하므로, 나머지의 생성함수(generating function)에서는 x^m이 나타날 때마다 이를 1로 바꾸어도 된다. 서로 독립(independent)인 던지기 결과를 더하면 생성함수가 곱해지고, 그다음 다시 x의 거듭제곱을 줄인다. 이 규칙을 쓰면 계산 전체가 $x \cdot y$와 y^2이 y의 배수로 줄어드는 간단한 다항식 계산이 된다.

풀이

전체에 걸쳐 $X_1, X_2, \ldots$를 각 던지기의 결과라 하자. 이들은 서로 독립이고 각각 $\{1, \ldots, 6\}$ 위의 균등분포(uniform distribution)를 따른다.

축소 규칙. m을 양의 정수라 하자. U와 V가 서로 독립이고 $\{0, 1, \ldots, m-1\}$의 값을 가지면, $U+V$의 확률생성함수(pgf, probability generating function)는 $G_U(x)G_V(x)$이며, 이는 x^k항이 $U+V=k$일 확률을 계수로 갖는 다항식이다. $U+V$를 m으로 나눈 나머지가 j인 것은 정확히 $U+V$가 j 또는 $j+m$일 때이다. 따라서 $k \geq m$인 모든 x^k를 x^{k-m}으로 바꾸면, 즉 $x^m = 1$로 두면 그 나머지의 확률생성함수를 얻는다. S_n의 나머지는 (S_{n-1}의 나머지) + (X_n의 나머지)의 나머지이고 이 둘은 서로 독립이므로, 각 나머지의 확률생성함수는 바로 앞의 것에 곱한 다음 $x^m = 1$로 두어 얻는다. "$x^m = 1$을 사용하면 같다"는 뜻으로 $\equiv$를 쓴다.

소문항 (i)

$1, \ldots, 5$가 나오면 나머지는 $1, \ldots, 5$이고, 6이 나오면 나머지는 0이다. 각각의 확률은 $\frac{1}{6}$이므로

$$\mathrm{G}(x) = \tfrac{1}{6}\left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5\right) = \tfrac{1}{6}z, \qquad \text{여기서} z = 1 + x + \cdots + x^5.$$

$x^6 = 1$이면 z에 x를 곱하는 것은 각 항을 한 자리씩 돌리는 것일 뿐이다: $xz = x + x^2 + \cdots + x^5 + x^6 \equiv z$. 따라서 모든 k에 대하여 $x^k z \equiv z$이고

$$z^2 = \sum_{k=0}^{5} x^k z \equiv 6z.$$

그러므로 R_2의 확률생성함수는

$$\tfrac{1}{36}z^2 \equiv \tfrac{1}{36} \cdot 6z = \tfrac{1}{6}z = \mathrm{G}(x),$$

이고, 이것이 보이려던 것이다.

같은 단계가 모든 단계에서 그대로 성립한다. R_{n-1}의 확률생성함수가 $\mathrm{G}(x)$이면 R_n의 확률생성함수는 $\mathrm{G}(x)^2 \equiv \mathrm{G}(x)$이다. 수학적 귀납법(induction)에 의하여 모든 R_n의 확률생성함수는 $\mathrm{G}(x) = \frac{1}{6}z$이다. $6 \mid S_n$일 확률은 $\mathrm{P}(R_n = 0)$, 즉 $\mathrm{G}(x)$의 상수항이므로

$$\mathrm{P}(S_n \text{ 이 다음의 배수: } 6) = \tfrac{1}{6}.$$

소문항 (ii)

이제 $m = 5$이다. $1, 2, 3, 4$가 나오면 나머지는 $1, 2, 3, 4$이고, 5가 나오면 0, 6이 나오면 1이다. 따라서 나머지 1의 확률은 $\frac{2}{6}$이고 나머지 값들은 각각 $\frac{1}{6}$이다:

$$\mathrm{G}_1(x) = \tfrac{1}{6}\left(1 + 2x + x^2 + x^3 + x^4\right) = \tfrac{1}{6}(x + y), \qquad y = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4.$$

소문항 (i)과 똑같이, $x^5 = 1$이면 $xy \equiv y$이므로 모든 k에 대하여 $x^k y \equiv y$이고

$$y^2 = \sum_{k=0}^{4} x^k y \equiv 5y.$$

그러므로

$$\begin{aligned}\mathrm{G}_2(x) &\equiv \tfrac{1}{36}(x + y)^2 = \tfrac{1}{36}\left(x^2 + 2xy + y^2\right) \\ &\equiv \tfrac{1}{36}\left(x^2 + 2y + 5y\right) = \tfrac{1}{36}\left(x^2 + 7y\right),\end{aligned}$$

이고, 이것이 구하는 결과이다. (확인 삼아 $x = 1$을 대입하면 $\frac{1}{36}(1 + 35) = 1$이다.)

일반적인 확률생성함수. 축소 규칙에 의하여 $G_n(x) \equiv G_1(x)^n = \frac{1}{6^n}(x+y)^n$이다. 이항정리(binomial theorem)로 전개하면

$$(x+y)^n = x^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

$k \geq 1$이면 $y^k \equiv 5^{k-1} y$($y^2 \equiv 5y$에 대한 귀납법)와 $x^{n-k} y \equiv y$를 차례로 사용하여

$$x^{n-k} y^k \equiv 5^{k-1} y.$$

따라서

$$(x+y)^n \equiv x^n + y \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 5^{k-1} = x^n + \frac{y}{5}\left[(1+5)^n - 1\right] = x^n + \frac{6^n - 1}{5} y.$$

? **생각해 보기** $(6^n - 1)/5$는 어디서 나왔는가?

이항정리에 의하여 합 $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 5^k$는 $(1+5)^n = 6^n$이다. 여기서는 $k = 0$인 항(1)이 빠져 있고 $\frac{1}{5}$이라는 인수가 더 붙어 있다. 그러므로

$$G_n(x) = \frac{1}{6^n}\left(x^r + \frac{6^n - 1}{5} y\right),$$

이고, 여기서 r은 n을 5로 나눈 나머지이다($x^n \equiv x^r$이므로). 따라서 모든 나머지의 확률은 $\frac{6^n - 1}{5 \cdot 6^n}$이고, 나머지 r만 $\frac{1}{6^n}$을 더 갖는다.

5로 나누어떨어질 확률. 구해야 할 것은 $P(T_n = 0)$, 즉 $G_n(x)$의 상수항이다. y의 상수항은 1이다.

- $5 \nmid n$이면 $r \neq 0$이므로 x^r은 상수항에 아무것도 더하지 않는다. 따라서

  $$P(S_n \text{ 이 다음의 배수: } 5) = \frac{6^n - 1}{5 \cdot 6^n} = \frac{1}{5}\left(1 - \frac{1}{6^n}\right),$$

  이고, 이것이 보이려던 것이다.

- $5 \mid n$이면 $r = 0$이므로 $x^r = 1$이 $\frac{1}{6^n}$을 더한다:

  $$P(S_n \text{ 이 다음의 배수: } 5) = \frac{6^n - 1}{5 \cdot 6^n} + \frac{1}{6^n} = \frac{6^n + 4}{5 \cdot 6^n} = \frac{1}{5}\left(1 + \frac{4}{6^n}\right).$$

검산

- $n = 1$: 공식은 $\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$을 준다. 실제로 5로 나누어떨어지는 것은 5가 나오는 경우뿐이다.

- $n = 2$: 공식은 $\frac{1}{5} \cdot \frac{35}{36} = \frac{7}{36}$을 준다. 직접 세어 보면 합이 5인 경우(네 가지)와 10인 경우(세 가지)로 $\frac{7}{36}$이며, 이는 $\frac{1}{36}(x^2 + 7y)$의 상수항과 일치한다.
- $n = 5$: 답은 $\frac{6^5+4}{5 \cdot 6^5} = \frac{389}{1944} \approx 0.2001$로, $\frac{1}{5}$보다 조금 크다. $n \leq 8$에 대하여 컴퓨터로 6^n가지 결과를 모두 열거해 보면 확률생성함수 $G_n(x)$ 전체와 두 경우 모두가 확인된다.
- $n \to \infty$이면 두 답 모두 $\frac{1}{5}$로 수렴한다. 즉 나머지가 균등분포가 된다.

흔한 실수

- 6을 5로 나눈 나머지가 1이어서 G_1에서 x의 계수가 $\frac{2}{6}$이라는 것을 잊는 실수.
- 모든 n에 대하여 x^n을 x^0으로 줄이는 실수: x^n항은 n의 나머지 r에 대한 x^r로 줄어들며, 바로 이 때문에 $5 \mid n$인 경우가 다르다.
- $G_n(x) = G_1(x)^n$을 "="로 쓴 다음 $x^5 = 1$로 줄이지 않고 계수를 읽는 실수.

STEP 너머

$x^m = 1$로 두는 것은 $x^m - 1$을 법으로 하는 다항식환(ring), 즉 위수가 m인 순환군(cyclic group)의 군대수(group algebra)에서 계산하는 것과 같다. 이와 동등한 도구로 단위근 필터(roots-of-unity filter)가 있다: $P(m \mid S_n) = \frac{1}{m} \sum_{\omega^m=1} G_S(\omega)$이며, 이는 이산 푸리에 변환(discrete Fourier transform)이 작동하는 모습이다. 이 관점은 또한 순환 위에서 무작위 걸음을 더해 가면 왜 균등분포가 되는지도 설명해 주며, 이것이 마르코프 연쇄(Markov chain)와 군 위의 무작위 행보(random walk) 이론의 출발점이다. Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 생성함수와 무작위 행보를 알맞은 수준에서 다룬다.

풀이

STEP III 2015, 문제 13

확률과 통계 • 균등 확률변수의 함수

STEP III 2015, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/15-s3-q13

핵심 아이디어

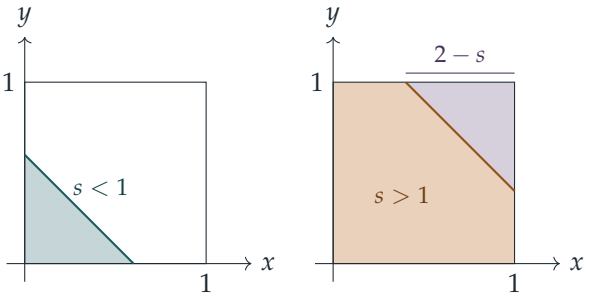
X와 Y가 서로 독립(independent)이고 $[0,1]$에서 균등분포(uniform distribution)를 따르므로, 순서쌍 (X,Y)는 단위정사각형(unit square) 위에서 균등하게 분포한다. 따라서 X와 Y에 관한 모든 확률은 그저 **넓이**이다. $X+Y \le s$나 $Y \le rX$ 같은 사건은 정사각형을 직선을 따라 자르며, 한쪽 부분의 넓이는 삼각형의 넓이이거나 정사각형에서 삼각형을 뺀 넓이이다. 그다음에는 $1/(X+Y)$와 $X/(X+Y)$에 관한 사건을 이미 넓이를 구한 사건들로 다시 써서 그 분포를 얻는다.

풀이

풀이 전체에서 (X,Y)는 넓이가 1인 단위정사각형 $[0,1]^2$ 위에서 균등분포를 따른다. 따라서 정사각형의 임의의 영역 A에 대하여 $\mathrm{P}\big((X,Y)\in A\big)$는 A의 넓이와 같다.

소문항 (i)

$[0,2]$의 값을 가지는 $S=X+Y$를 생각하고, $F(s)=\mathrm{P}(S\le s)$라 하자. 사건 $S\le s$는 정사각형에서 직선 $x+y=s$ 위 또는 그 아래에 있는 부분이다.



$0 \le s \le 1$이면 직선은 두 축과 $(s,0)$, $(0,s)$에서 만나고, 그 아래 영역은 직각을 낀 두 변의 길이가 s인 직각이등변삼각형이다. $1 \le s \le 2$이면 직선 위의 영역이 꼭짓점 $(1,1)$ 쪽 모서리에 있는 삼각형이 된다. 이 삼각형의 직각을 낀 두 변은 직선에서 모서리까지 이어지며, 그 길이는 $1-(s-1)=2-s$이다. 따라서

$$F(s) = \mathrm{P}(X+Y \le s) = \begin{cases} 0 & s < 0, \\ \frac{1}{2}s^2 & 0 \le s \le 1, \\ 1 - \frac{1}{2}(2-s)^2 & 1 \le s \le 2, \\ 1 & s > 2. \end{cases}$$

가운데 두 식은 $s=1$에서 일치하며(둘 다 $\frac{1}{2}$이다), 당연히 그래야 한다.

소문항 (ii)

$T = 1/S$라 하자. $0 < S \le 2$이므로(값 $S=0$의 확률은 0이다), T는 $[\frac{1}{2}, \infty)$의 값을 가진다. $t > 0$에 대하여, $s \mapsto 1/s$가 $s > 0$에서 감소하므로

$$\mathrm{P}(T \le t) = \mathrm{P}\left(S \ge \tfrac{1}{t}\right) = 1 - F\left(\tfrac{1}{t}\right),$$

이다. 여기서 S가 연속확률변수(continuous random variable)이므로 $\mathrm{P}(S = 1/t) = 0$이라는 사실을 이용하였다.

> **생각해 보기** F의 어느 식을 사용해야 할까? 그것은 t가 어디에 있는지가 아니라 $1/t$가 어디에 있는지에 따라 정해진다.

$t \ge 1$이면 $0 < 1/t \le 1$이므로 첫 번째 식을 사용한다: $\mathrm{P}(T \le t) = 1 - \frac{1}{2}t^{-2}$. $\frac{1}{2} \le t \le 1$이면 $1 \le 1/t \le 2$이므로 두 번째 식을 사용한다: $\mathrm{P}(T \le t) = \frac{1}{2}\left(2 - t^{-1}\right)^2$. 그리고 $t < \frac{1}{2}$이면 $\mathrm{P}(T \le t) = 0$이다.

미분하면 밀도함수(density)를 얻는다. $t \ge 1$일 때

$$f(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(1 - \tfrac{1}{2}t^{-2}\right) = t^{-3},$$

이고, $\frac{1}{2} \le t \le 1$일 때는 연쇄법칙(chain rule)에 의해

$$f(t) = \left(2 - t^{-1}\right) \cdot t^{-2} = 2t^{-2} - t^{-3},$$

이며, 그 밖에서는 $f(t) = 0$이다. 이것이 구하는 밀도함수이다.

기댓값(expectation)은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\Big(\frac{1}{X+Y}\Big) = \int_{1/2}^{\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{1/2}^{1} \left(2t^{-1} - t^{-2}\right)\mathrm{d}t + \int_{1}^{\infty} t^{-2}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[2\ln t + t^{-1}\right]_{1/2}^{1} + \left[-t^{-1}\right]_{1}^{\infty} \\
&= (0+1) - (-2\ln 2 + 2) + 1 \\
&= 2\ln 2.
\end{aligned}$$

t^{-2}가 $[1,\infty)$에서 적분 가능하므로 이 이상적분(improper integral)은 수렴한다.

소문항 (iii)

$[0,\infty)$의 값을 가지는 $R = Y/X$를 생각하자(사건 $X = 0$의 확률은 0이다). $r \ge 0$에 대하여 사건 $R \le r$는 $Y \le rX$, 즉 정사각형에서 원점을 지나는 직선 $y = rx$ 위 또는 그 아래에 있는 부분이다.

$0 \le r \le 1$이면 이 직선은 오른쪽 변의 점 $(1, r)$에서 정사각형을 빠져나가고, 그 아래 영역은 밑변이 1, 높이가 r인 삼각형으로 넓이는 $\frac{1}{2}r$이다. $r \ge 1$이면 직선은 윗변의 점 $(1/r, 1)$에서 빠져나가고, 직선 위의 영역은 윗변을 따라 놓인 밑변이 $1/r$이고 높이가 1인 삼각형으로 넓이는 $\frac{1}{2r}$이다. 따라서

$$H(r) = \mathrm{P}\Big(\frac{Y}{X} \le r\Big) = \begin{cases} 0 & r < 0, \\ \frac{1}{2}r & 0 \le r \le 1, \\ 1 - \dfrac{1}{2r} & r \ge 1. \end{cases}$$

이제 $[0,1]$의 값을 가지는 $Z = \dfrac{X}{X+Y} = \dfrac{1}{1+R}$를 생각하자. $0 < z \le 1$에 대하여, $r \mapsto 1/(1+r)$가 $r \ge 0$에서 감소하므로

$$\mathrm{P}(Z \le z) = \mathrm{P}\Big(1 + R \ge \frac{1}{z}\Big) = \mathrm{P}\Big(R \ge \frac{1-z}{z}\Big) = 1 - H\Big(\frac{1-z}{z}\Big).$$

이번에도 어느 식을 쓸지는 $(1-z)/z$가 어디에 있는지에 따라 정해진다. 이 값이 1 이하인 것은 정확히 $z \ge \frac{1}{2}$일 때이다.

- $\frac{1}{2} \le z \le 1$일 때: $\mathrm{P}(Z \le z) = 1 - \dfrac{1-z}{2z} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2z}$.

- $0 < z \le \frac{1}{2}$일 때: $\mathrm{P}(Z \le z) = 1 - \left(1 - \dfrac{z}{2(1-z)}\right) = \dfrac{z}{2(1-z)}$.

두 식 모두 $z = \frac{1}{2}$에서 $\frac{1}{2}$이다. 미분하면(두 번째 식은 $\frac{z}{2(1-z)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-z} - 1\right)$로 고쳐 쓴다) Z의 밀도함수는

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2(1-z)^2} & 0 \le z \le \frac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{2z^2} & \frac{1}{2} \le z \le 1, \\ 0 & \text{그 밖.} \end{cases}$$

$g(1-z) = g(z)$임에 주목하자. 즉 밀도함수는 $\frac{1}{2}$에 대하여 대칭이다.

기댓값. 적분하지 않고도 바로 구할 수 있다. X와 Y는 서로 독립이고 같은 분포를 따르므로, 순서쌍 (X, Y)와 (Y, X)는 같은 분포를 가진다. 따라서 $\dfrac{X}{X+Y}$와 $\dfrac{Y}{X+Y}$는 같은 기댓값을 가진다. 둘의 합은 정확히 1이므로

$$\mathrm{E}\left(\frac{X}{X+Y}\right) = \frac{1}{2}.$$

적분으로 확인하기.

$$\mathrm{E}(Z) = \int_0^{1/2} \frac{z}{2(1-z)^2}\,\mathrm{d}z + \int_{1/2}^1 \frac{1}{2z}\,\mathrm{d}z.$$

두 번째 적분은 $\frac{1}{2}\left[\ln z\right]_{1/2}^1 = \frac{1}{2}\ln 2$이다. 첫 번째 적분에서 $u = 1 - z$로 치환하면 $\mathrm{d}z = -\mathrm{d}u$이고, $z = 0, \frac{1}{2}$는 $u = 1, \frac{1}{2}$에 대응한다:

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} \frac{z}{2(1-z)^2}\,\mathrm{d}z &= \frac{1}{2}\int_{1/2}^1 \frac{1-u}{u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{u} - \ln u\right]_{1/2}^1 \\ &= \frac{1}{2}\left(-1 - (-2 + \ln 2)\right) = \frac{1}{2}(1 - \ln 2). \end{aligned}$$

더하면 $\mathrm{E}(Z) = \frac{1}{2}(1 - \ln 2) + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}$이 되어 위의 값이 확인된다.

검산

- 각 분포함수(distribution function)는 0에서 1까지 증가하고, 식이 바뀌는 지점에서 연속이다: $F(1) = \frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(T \le 1) = \frac{1}{2}$, $H(1) = \frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(Z \le \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$. 이 값들이 모두 $\frac{1}{2}$인 것은 정사각형이 대각선에 대하여 대칭이기 때문이다.
- 밀도함수 f를 적분하면 1이 된다: $\int_{1/2}^1 (2t^{-2} - t^{-3})\,\mathrm{d}t = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$이고 $\int_1^\infty t^{-3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$이다.
- $2\ln 2 \approx 1.386$은 당연히 1과 2 사이에 있고, 볼록함수 $1/s$에 대한 옌센 부등식(Jensen's inequality)이 예측하듯이 $1/\mathrm{E}(X+Y) = 1$보다 크다. 정사각형 위에서 $\iint (x +$

$y)^{-1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$를 직접 수치 계산하면 1.3863을 얻는다. 분포함수들과 $\mathrm{E}(Z) = \frac{1}{2}$도 컴퓨터 시뮬레이션으로 확인하였다.

흔한 실수

- F나 H의 식을 $1/t$나 $(1-z)/z$가 아니라 t나 z에 따라 고르는 것. 그러면 두 식이 뒤바뀐다.
- $1/s$와 $1/(1+r)$가 감소함수여서 부등호의 방향을 바꿔야 한다는 사실을 잊는 것: $T \le t$는 $S \ge 1/t$를 뜻한다.
- 소문항 (i)에서 모서리 삼각형의 변의 길이를 잘못 구하는 것: 그 길이는 $s-1$이 아니라 $2-s$이다.

STEP 너머

(X, Y)에 관한 명제를 넓이로 바꾼 다음 분포함수를 미분하는 것은, 확률변수(random variable)의 함수의 분포를 구하는 일반적인 **분포함수법**(distribution function method)이다. 대학에서는 여기에 결합밀도함수(joint density)에 대한 변수변환(야코비안, Jacobian) 공식이 더해지는데, 이 공식을 쓰면 $X+Y$와 $X/(X+Y)$를 함께 다룰 수 있다. 특히 여기서 $X+Y$의 밀도함수는 두 균등분포 밀도함수의 **합성곱**(convolution)이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 두 방법을 모두 다루며, Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률 입문)에는 같은 맥락의 예제가 많이 실려 있다.

Beyond STEP

STEP은 대부분의 학생이 학창 시절에 치르는 수학 시험 가운데 가장 어려운 시험이다. 또한 가장 훌륭한 시험 가운데 하나이기도 하다. 문제는 짧고 낯설며 깊이가 있고, 그중 가장 뛰어난 문제들은 대학 수학의 작은 조각이 모습을 감추고 있는 것이다.

이 책은 1987년 첫 시험에 앞서 나온 예시 시험지(specimen papers)부터 2025년 시험지까지 가운데 가장 흥미로운 STEP 문제들을 골라, 각 문제를 하나의 문으로 삼는다. 모든 문제는 뛰어난 학생이 풀어 가면서 던질 법한 질문들과 함께 꼼꼼하게 풀이하고, 그런 다음 책은 그 문을 지나 한 걸음 더 나아간다. 그 아이디어가 어디에서 왔는지, 대학에서는 무엇으로 발전하는지, 그리고 다음에는 무엇을 읽으면 좋은지를 살펴본다.

이 책은 STEP을 준비하면서 기출 문제 연습 이상의 것을 원하는 재능 있는 예비 수학자를 위해 쓰였다. 수학과 학부생처럼 생각하기 시작하고, 앞으로 무엇이 자신을 기다리고 있는지 알아보고 싶은 학생들을 위한 책이다.

- 순수수학(pure mathematics), 역학(mechanics), 확률(probability)과 통계(statistics)를 아우르는 13개의 장
- 이 36개의 STEP 기출 문제와 각 문제의 안내식 풀이
- 모든 문제 뒤에 숨은 대학 수학
- 답이 실린 후속 연습 문제와 더 읽을거리

2015년 풀이. 책 전체와 모든 장,
모든 풀이를 다음 주소에서 무료로 읽고, 내려받고, 공유할 수 있다.

beyondstep.keithmcnulty.org

본문은 퍼블릭 도메인(CC0 1.0)으로 공개한다. STEP 문제 © Cambridge University Press & Assessment.

