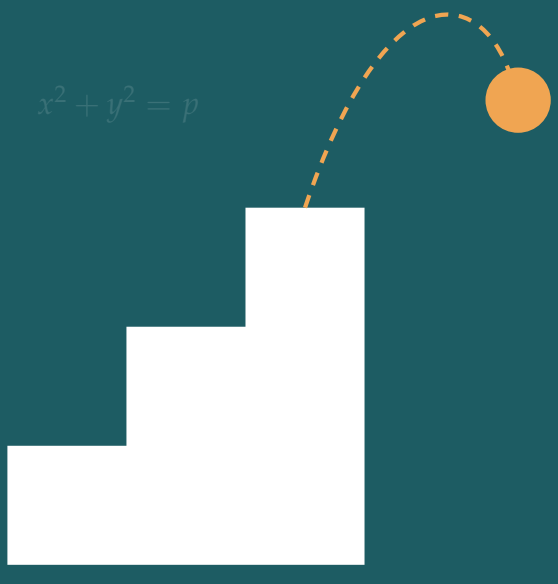
STEP 대비 · 대학 수학

Beyond STEP

STEP I, II 및 III

2014년 풀이



KEITH McNULTY

Beyond STEP

STEP 기출문제로 여는
대학 수학의 세계

STEP I, II 및 III

2014년 풀이

Keith McNulty

Beyond STEP: STEP 기출문제로 여는 대학 수학의 세계

2014년 풀이

2014년 STEP 문제지(STEP I, II 및 III)의 39개 문제 전체에 대한 풀이. 견본 문제지 이후 모든 STEP 문제의 풀이와 *Beyond STEP* 책 전체, 그리고 각 장을 `beyondstep.keithmcnulty.org`에서 무료로 읽고 내려받을 수 있다.

풀이를 읽기 전에 먼저 문제를 제대로 풀어 보자. 모든 답은 수치적으로 검증하였지만, 풀이가 이렇게 많으면 실수가 어느 정도 있을 수밖에 없다. 무언가 잘못된 것처럼 보이면 자신의 풀이를 믿고 꼼꼼히 확인해 보자.

영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.

2026년 11월 온라인 초판 발행.

이 PDF에서 지은이가 직접 만든 모든 것, 곧 본문, 풀이, 그림, 연습문제와 해답은 크리에이티브 커먼즈 CC0 1.0 Universal 라이선스에 따라 퍼블릭 도메인(public domain)으로 공개한다. 누구든 허락을 구하지 않고 어떤 목적으로든 복사하고, 고쳐 쓰고, 공유할 수 있다. 자세한 내용은 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`을 보라.

여기에서 다루는 STEP 문제의 저작권은 Cambridge University Press & Assessment에 있다. 문제는 이 책에 싣지 않았으며, 각 문제마다 공식 출처인 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스나 OCR의 기출 시험지로 가는 링크를 달았다.

오류 제보는 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty에 이슈로 남겨 주기 바란다.

차례

STEP I

Q1 제곱의 차 순수수학 . . . 3

Q2 로그함수의 적분 순수수학 . . . 7

Q3 다항방정식과 부등식 순수수학 . . . 12

Q4 관련 변화율 순수수학 . . . 16

Q5 삼차부등식 순수수학 . . . 20

Q6 로지스틱 사상의 점화식 순수수학 . . . 24

Q7 삼각형에서의 벡터 순수수학 . . . 28

Q8 직선족의 포락선 순수수학 . . . 32

Q9 수평 방향의 힘을 받는 포물체 역학 . . . 36

Q10 충돌과 반발계수 역학 . . . 40

Q11 연결된 도르래 계 역학 . . . 44

Q12 이산확률변수 확률과 통계 . . . 48

Q13 삼각분포 확률과 통계 . . . 52

STEP II

Q1 삼각형의 기하와 이차식 순수수학 . . . 56

Q2 적분 부등식 순수수학 . . . 61

Q3 접선과 포락선 순수수학 . . . 65

Q4 치환적분 순수수학 . . . 69

Q5 동차 미분방정식 순수수학 . . . 72

Q6 삼각급수 순수수학 . . . 76

Q7 절댓값 함수의 그래프 순수수학 . . . 80

Q8 가장 큰 이항계수 순수수학 . . . 85

Q9 강체의 평형 역학 . . . 89

Q10 궤적의 포락선 역학 93
Q11 원운동 역학 97
Q12 위험 함수 확률과 통계 102
Q13 이산확률변수 확률과 통계 106

STEP III

Q1 로그함수의 급수 전개 순수수학 110
Q2 쌍곡선 함수 적분법 순수수학 114
Q3 포물선까지의 거리 순수수학 118
Q4 적분 부등식 순수수학 123
Q5 기하에서의 복소수 순수수학 128
Q6 볼록성을 이용한 부등식 순수수학 133
Q7 벡터와 원에 내접하는 사각형 순수수학 137
Q8 급수의 수렴 순수수학 141
Q9 저항을 받는 포물체 역학 145
Q10 연성 진동 역학 149
Q11 원운동 역학 153
Q12 로그정규분포 확률과 통계 157
Q13 확률생성함수 확률과 통계 161

풀이

STEP I 2014, 문제 1

순수수학 • 제곱의 차

> **STEP I 2014, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/14-s1-q1

핵심 아이디어

모든 것은 하나의 인수분해(factorisation) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$에 달려 있다. n을 두 제곱수의 차(difference of two squares)로 나타내는 것은 $d = a - b$, $e = a + b$로 두고 $n = de$로 나타내는 것과 같다. 그리고 d와 e는 짝수 $2b$만큼 차이가 나므로 홀짝성(parity)이 같아야 한다. 이것을 알아차리면 모든 소문항이 홀짝성이 같은 인수쌍(factor pair)에 대한 문제가 된다.

풀이

이 풀이 전체에서 a와 b는 음이 아닌 정수(non-negative integer)이다. $n \geq 1$이고 $n = a^2 - b^2$이면 $a > b$이므로, 한 가지 방법을 언제나 $a > b \geq 0$인 (a, b)로 나타낼 수 있다.

소문항 (i)

$$3 = 2^2 - 1^2, \quad 5 = 3^2 - 2^2, \quad 8 = 3^2 - 1^2, \quad 12 = 4^2 - 2^2, \quad 16 = 5^2 - 3^2.$$

(16의 경우 뻔한 $4^2 - 0^2$는 허용되지 않는다. 제곱수가 0이 아니어야 하기 때문이다.)

소문항 (ii)

연속한 두 제곱수의 차는 홀수이다: $(m+1)^2 - m^2 = 2m + 1$. 따라서 $m \geq 0$인 임의의 홀수 $2m + 1$은

$$2m + 1 = (m+1)^2 - m^2.$$

이다.

소문항 (iii)

2만큼 떨어진 두 수의 제곱의 차는 4의 배수이다: $(k+1)^2 - (k-1)^2 = 4k$. $k \geq 1$이면 $k+1$과 $k-1$이 모두 음이 아니므로

$$4k = (k+1)^2 - (k-1)^2.$$

이다. $k = 0$이면 간단히 $0 = 0^2 - 0^2$ (또는 $1^2 - 1^2$)이다.

소문항 (iv)

모든 제곱수는 4로 나눈 나머지(remainder)가 0 또는 1이다: $(2m)^2 = 4m^2$이고 $(2m+1)^2 = 4(m^2+m)+1$이다. 따라서 $a^2 - b^2$을 4로 나눈 나머지는

$$0-0=0, \quad 1-1=0, \quad 1-0=1 \quad \text{또는} \quad 0-1 \equiv 3 \pmod 4,$$

이고, 결코 2가 아니다. 그러므로 $4k+2$ 꼴의 수는 두 제곱수의 차가 될 수 없다.

(같은 내용을 다르게 말하면 다음과 같다. $(a-b)(a+b) = 4k+2$이면 $a-b$와 $a+b$는 홀짝성이 같다. 둘 다 홀수이면 곱이 홀수이고, 둘 다 짝수이면 곱이 4로 나누어떨어진다. 어느 경우도 $4k+2$가 아니다.)

소문항 (v)

$a > b \geq 0$이고 $pq = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$라 하자. $d = a-b$, $e = a+b$로 두자. 그러면 d와 e는 $d \leq e$이고 $de = pq$인 양의 정수이다. 역으로, $d \leq e$이고 d, e의 홀짝성이 같은 인수분해 $pq = de$는 각각 정확히 한 가지 방법을 준다. 곧

$$a = \frac{e+d}{2}, \qquad b = \frac{e-d}{2},$$

이고, 이들은 음이 아닌 정수이다. 따라서 pq를 나타내는 방법들은 이러한 인수쌍 (d,e)와 일대일 대응(one-to-one correspondence)을 이룬다.

? **생각해 보기** 여기서 d와 e의 홀짝성은 왜 항상 같을까? 그리고 왜 인수쌍이 두 개뿐일까?

p와 q가 홀수 소수(odd prime)이므로 pq는 홀수이고, 따라서 pq의 모든 약수(divisor)가 홀수이므로 홀짝성 조건은 저절로 성립한다. $p \leq q$라 하자. 소인수분해의 유일성(unique factorisation)에 의해 $d \leq e$인 인수쌍은

$$(d,e) = (1, pq) \qquad \text{그리고} \qquad (d,e) = (p,q).$$

뿐이다. ($p = q$일 때에도 이는 여전히 참이다. p^2의 약수는 1, p, p^2이다.) 이들로부터

$$pq = \left(\frac{pq+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{pq-1}{2}\right)^2 \qquad \text{그리고} \qquad pq = \left(\frac{p+q}{2}\right)^2 - \left(\frac{q-p}{2}\right)^2.$$

을 얻는다. 두 방법의 $d = a - b$ 값은 각각 1과 p이고 $p \geq 3$이므로, 두 방법은 서로 다르다. 따라서 pq를 두 제곱수의 차로 나타내는 방법은 정확히 두 가지이다. 예를 들어 $15 = 8^2 - 7^2 = 4^2 - 1^2$이다. $p = q$일 때 두 번째 방법은 $p^2 - 0^2$인데, 0이 아닌 제곱수를 요구하는 것은 소문항 (i)뿐이므로 여기서는 허용된다.

$q = 2$일 때에는 이 결과가 성립하지 **않는다**. 이때 $pq = 2p$이고 p는 홀수이므로 $p = 2m + 1$로 두면 $2p = 4m + 2$이다. 소문항 (iv)에 의해 $2p$는 어떤 방법으로도 두 제곱수의 차로 나타낼 수 없다. (인수쌍 $(1, 2p)$와 $(2, p)$는 각각 하나는 홀수, 하나는 짝수이다.)

소문항 (vi)

소문항 (v)에서처럼 675를 나타내는 방법들은 $d \leq e$이고 d, e의 홀짝성이 같은 인수쌍 $675 = de$와 대응한다. 675는 홀수이므로 모든 약수가 홀수이고, 따라서 모든 인수쌍이 해당된다.

이제 $675 = 27 \times 25 = 3^3 \times 5^2$이므로 약수는 $(3+1)(2+1) = 12$개이다. 이들은 $d \leftrightarrow 675/d$로 짝지어지며, 675는 완전제곱수(perfect square)가 아니므로($26^2 = 676$) 자기 자신과 짝지어지는 약수는 없다. 따라서 인수쌍은 $12/2 = 6$개이다:

(d, e)	$(1, 675)$	$(3, 225)$	$(5, 135)$	$(9, 75)$	$(15, 45)$	$(25, 27)$
(a, b)	$(338, 337)$	$(114, 111)$	$(70, 65)$	$(42, 33)$	$(30, 15)$	$(26, 1)$

그러므로 675를 두 제곱수의 차로 나타내는 서로 다른 방법은 정확히 **6**가지이다.

> ? **생각해 보기** (a, b)와 $(-a, b)$, 또는 $a^2 - b^2$과 $-(b^2 - a^2)$을 서로 다른 방법으로 세어야 할까?

그렇지 않다. 문제에서 모든 수를 음이 아닌 정수로 제한했고, $a^2 - b^2 = 675 > 0$이므로 $a > b$일 수밖에 없다. 따라서 각 방법은 $a > b \geq 0$인 하나의 순서쌍 (a, b)이며, 우리가 센 것이 바로 이것이다.

검산

- 표의 일부를 확인해 보자: $26^2 - 1^2 = 676 - 1 = 675$이고 $30^2 - 15^2 = 900 - 225 = 675$이다.
- 소문항 (ii)–(iv)를 종합하면, $n \geq 1$이 두 제곱수의 차가 될 필요충분조건은 $n \not\equiv 2 \pmod 4$이다. 2000 이하의 모든 n에 대해 컴퓨터로 확인한 결과도 이와 일치하며, $p \leq q < 200$인 모든 홀수 소수에 대해 pq의 표현이 정확히 두 가지이고 $2p$의 표현은 하나도 없음을 확인한 결과도 마찬가지이다.
- 모든 b에 대해 탐색하면 675의 표현은 정확히 여섯 가지, 곧 표에 있는 여섯 가지가 나온

다.

흔한 실수

- 홀짝성 조건을 잊는 것: $2p$에 대해 $(2, p)$와 같은 쌍을 세면 정수가 아닌 $a = \frac{p+2}{2}$가 나온다.
- 소문항 (v)에서 $p = q$인 경우를 빠뜨리거나, 그 경우의 $p^2 - 0^2$을 제외하는 것. 소문항 (i) 밖에서는 0이 허용된다.
- 소문항 (vi)에서 인수쌍의 개수(6) 대신 약수의 개수(12)를 세는 것.

STEP 너머

표현의 개수가 n의 약수에 의해 결정된다는 이 패턴은 초등 정수론(elementary number theory)의 전형적인 모습이다. 이와 관련된 유명한 결과로 두 제곱수의 합에 관한 페르마(Fermat)의 정리가 있다. 홀수 소수가 $x^2 + y^2$ 꼴이 될 필요충분조건은 그 수가 $1 \bmod 4$인 것이며, 이 명제는 가우스 정수(Gaussian integer) $a + bi$를 이용하여 깔끔하게 증명된다. 더 알고 싶다면 Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)을 읽어 보라.

풀이

STEP I 2014, 문제 2

순수수학 • 로그함수의 적분

> **STEP I 2014, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/14-s1-q2

핵심 아이디어

모든 것은 $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$로 인수분해(factorising)하는 데서 출발한다. 그러면 이 차식의 로그(logarithm)가 $\ln(2-x) + \ln(2+x)$로 나뉘고, 이 두 조각은 소문항 (i)과 그 거울상을 이용하여 곧바로 적분할 수 있다. 그다음 절댓값(modulus) 기호는 $\ln|x^2-4|$가 어디에서 양수이고 어디에서 음수인지만 따져 보라고 요구할 뿐이며, (ii)의 그래프 개형이 바로 그것을 보여 준다.

풀이

소문항 (i)

$x < 2$이면 $2 - x > 0$이므로 모든 식이 정의된다. 우변을 미분하되, $-(2-x)\ln(2-x)$에는 곱의 미분법(product rule)을 쓴다. $-(2-x)$의 도함수는 1이고, 연쇄 법칙(chain rule)에 의해 $\ln(2-x)$의 도함수는 $-\frac{1}{2-x}$이다. 따라서

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[-(2-x)\ln(2-x) + (2-x)\Big] &= 1\cdot\ln(2-x) - (2-x)\cdot\left(-\frac{1}{2-x}\right) - 1 \\ &= \ln(2-x) + 1 - 1 = \ln(2-x),\end{aligned}$$

이므로 주어진 부정적분(antiderivative)은 옳다.

(다른 방법으로, $u = 2-x$로 치환(substitute)하고 $\int \ln u \,\mathrm{d}u = u\ln u - u$를 이용해도 된다.)

같은 방법으로 $x > -2$일 때

$$\int \ln(2+x)\,\mathrm{d}x = (2+x)\ln(2+x) - (2+x) + c,$$

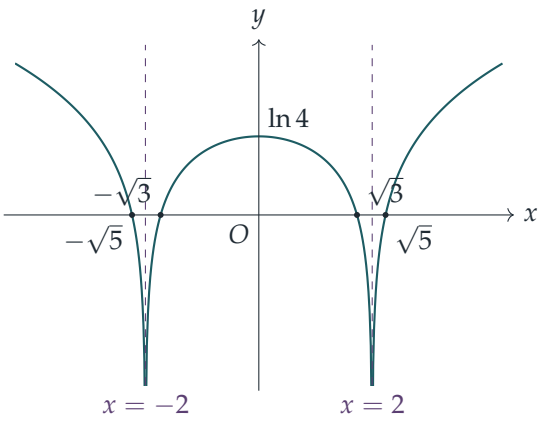
이며, 이 식도 나중에 필요하다.

소문항 (ii)

$f(x) = \ln|x^2 - 4|$라 하자. 이 함수는 $x \neq \pm 2$에서 정의된다. $f(-x) = f(x)$이므로 곡선은 y축에 대하여 대칭(symmetric)이다.

- $|x| < 2$일 때: $f(x) = \ln(4 - x^2)$이고, 이는 $x = 0$에서 최대이며 그때 $y = \ln 4$이다. $4 - x^2 = 1$, 즉 $x = \pm\sqrt{3}$에서 0이 되고, $x \to \pm 2$일 때 $-\infty$로 발산한다.
- $|x| > 2$일 때: $f(x) = \ln(x^2 - 4)$이고, 이는 $x = \pm 2$ 근처의 $-\infty$에서 출발하여 증가하다가 $x^2 - 4 = 1$, 즉 $x = \pm\sqrt{5}$에서 x축과 만나고, 그 뒤로는 $2\ln|x|$처럼 천천히 증가한다.

직선 $x = \pm 2$는 수직 점근선(vertical asymptote)이다.



소문항 (iii)

양의 x축, y축, 그리고 A로 둘러싸인 유한한 영역은 $x = 0$과 $x = \sqrt{3}$ 사이의 아치 모양 부분이며, 이 구간에서 $y = \ln(4 - x^2) \geq 0$이다. 그 넓이는

$$\int_0^{\sqrt{3}} \ln(4 - x^2)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{3}} \ln(2 - x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\sqrt{3}} \ln(2 + x)\,\mathrm{d}x,$$

이다. 여기서 $\ln(4 - x^2) = \ln(2 - x) + \ln(2 + x)$를 이용했는데, 이 구간에서는 두 인수가 모두 양수이므로 이 식이 성립한다. 소문항 (i)에 의해

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}} \ln(2 - x)\,\mathrm{d}x &= \Big[-(2 - x)\ln(2 - x) + (2 - x)\Big]_0^{\sqrt{3}} \\ &= -(2 - \sqrt{3})\ln(2 - \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) + 2\ln 2 - 2 \\ &= -(2 - \sqrt{3})\ln(2 - \sqrt{3}) - \sqrt{3} + 2\ln 2,\end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}} \ln(2+x)\,\mathrm{d}x &= \Big[(2+x)\ln(2+x)-(2+x)\Big]_0^{\sqrt{3}}\\ &= (2+\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3})-(2+\sqrt{3})-2\ln 2+2\\ &= (2+\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3})-\sqrt{3}-2\ln 2.\end{aligned}$$

이다.

? **생각해 보기** $\ln(2-\sqrt{3})$과 $\ln(2+\sqrt{3})$을 어떻게 하나로 합칠 수 있을까?

$(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=4-3=1$이므로 $\ln(2-\sqrt{3})=-\ln(2+\sqrt{3})$이다. 두 적분을 더하면 $\ln 2$ 항이 소거되어

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}} \ln(4-x^2)\,\mathrm{d}x &= (2-\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3})-2\sqrt{3}\\ &= 4\ln(2+\sqrt{3})-2\sqrt{3},\end{aligned}$$

이 되고, 이것이 구하려던 결과이다.

소문항 (iv)

$|x|<2$에서 B는 두 점근선 사이에 있는 A의 부분 중 x축 아래에 있는 조각을 위로 대칭이동한 것이다. 그래프 개형에 따르면 $|x|\le\sqrt{3}$에서 $\ln(4-x^2)\ge 0$이고, $\sqrt{3}<|x|<2$에서 $\ln(4-x^2)<0$이다. 대칭성을 이용하면 구하는 넓이는

$$2\left[\int_0^{\sqrt{3}} \ln(4-x^2)\,\mathrm{d}x-\int_{\sqrt{3}}^{2} \ln(4-x^2)\,\mathrm{d}x\right].$$

이다. 두 번째 적분은 피적분함수가 $x=2$에서 $-\infty$로 발산하므로 이상적분(improper integral)이다. 따라서 $x=2-\varepsilon$까지 적분한 뒤 $\varepsilon\to 0^+$으로 보낸다. (i)에서 구한 $\ln(2-x)$의 부정적분에 $x=2-\varepsilon$을 대입하면

$$-\varepsilon\ln\varepsilon+\varepsilon\to 0,$$

을 얻는데, 이는 $t\to 0$일 때 $t\ln t\to 0$이라는 주어진 사실에서 나온다. 따라서 위끝에서의 값은 0이고,

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{3}}^{2} \ln(2-x)\,\mathrm{d}x &= 0-\Big[-(2-\sqrt{3})\ln(2-\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})\Big]\\ &= -(2-\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3})-2+\sqrt{3},\end{aligned}$$

이다. 여기서도 $\ln(2-\sqrt{3})=-\ln(2+\sqrt{3})$을 이용했다. 다른 조각은 보통의 적분이다.

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{3}}^{2} \ln(2+x)\,\mathrm{d}x &= (4\ln 4-4)-\Big[(2+\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3})-(2+\sqrt{3})\Big]\\ &= 8\ln 2-2+\sqrt{3}-(2+\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3}).\end{aligned}$$

두 식을 더하면

$$\int_{\sqrt{3}}^{2} \ln(4-x^2)\,\mathrm{d}x = 8\ln 2 - 4 + 2\sqrt{3} - 4\ln(2+\sqrt{3}),$$

이고, 이 값은 약 -0.259로 예상대로 음수이다. 따라서 넓이는

$$\begin{aligned} &2\Big[\big(4\ln(2+\sqrt{3}) - 2\sqrt{3}\big) - \big(8\ln 2 - 4 + 2\sqrt{3} - 4\ln(2+\sqrt{3})\big)\Big] \\ &\quad = 16\ln(2+\sqrt{3}) - 16\ln 2 + 8 - 8\sqrt{3} \\ &\quad = 16\ln\Big(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\Big) + 8 - 8\sqrt{3} \approx 4.125. \end{aligned}$$

이다.

검산

- $[0,\sqrt{3}]$과 $[\sqrt{3},2]$에서의 두 적분을 더하면 $\int_0^2 \ln(4-x^2)\,\mathrm{d}x = 8\ln 2 - 4 \approx 1.545$이다. 이 값은 (i)로부터 한 줄 만에 바로 얻을 수도 있다. $x=0$에서 두 부정적분의 값은 $-2\ln 2 + 2$와 $2\ln 2 - 2$로, 서로 소거되기 때문이다.
- (iii)의 넓이는 $4\ln(2+\sqrt{3}) - 2\sqrt{3} \approx 1.804$이다. 이는 아치를 둘러싸는 직사각형의 넓이 $\sqrt{3}\times\ln 4 \approx 2.40$보다 작으며, 당연히 그래야 한다.
- $(-2,2)$에서 $\big|\ln|x^2-4|\big|$를 수치적분(numerical integration)하면 4.1246이 나오며, 이는 $16\ln\big(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\big) + 8 - 8\sqrt{3} = 4.12457\ldots$과 일치한다.

흔한 실수

- $x=\sqrt{3}$과 $x=2$ 사이의 곡선 부분이 x축 아래에 있다는 것을 잊고, 부호가 있는 적분값을 빼는 대신 더하는 실수.
- $\ln(2-\sqrt{3})$을 합치지 않고 그대로 두는 실수. 답을 깔끔하게 만들어 주는 것은 항등식 $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 1$이다.
- 아무 설명 없이 $(2-x)\ln(2-x)$에 $x=2$를 그냥 대입하는 실수. 이 식은 그 점에서 정의되지 않으며, 값 0을 정당화하는 것은 극한 $t\ln t \to 0$이다.

STEP 너머

(iv)의 적분은 **이상적분**이다. 피적분함수는 유계가 아니지만, 로그가 매우 천천히 발산하여 $t\ln t \to 0$이 되므로 넓이는 유한하다. 대학에서는 이를 엄밀하게 다루며, 유계가 아

닌 g에 대해 $\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$가 정확히 언제 수렴하는지 판정하게 된다(예를 들어 $\int_0^1 t^{-p}\,\mathrm{d}t$는 $p < 1$일 때, 그리고 그때에만 수렴한다). Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해)는 $t \ln t \to 0$ 같은 극한과 적분의 정의를 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP I 2014, 문제 3

순수수학 • 다항방정식과 부등식

> **STEP I 2014, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/14-s1-q3

핵심 아이디어

두 적분(integral) 모두 기본적인 적분이므로, 주어진 조건은 a와 b에 대한 다항식 방정식(polynomial equation)일 뿐이다. 핵심은 공통인수(common factor) $b-a$를 찾아내는 것(이 값은 0이 아니므로 약분할 수 있다)과, 소문항 (iii)에서 남은 식이 충분히 대칭적(symmetric)이어서 합 $b+a$와 차 $b-a$로 깔끔하게 나타낼 수 있음을 알아차리는 것이다.

풀이

적분을 계산하면 조건은 다음과 같다.

$$\frac{b^3-a^3}{3} = \left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2(b+a)^2}{4}. \qquad (*)$$

$b^3-a^3 = (b-a)(b^2+ab+a^2)$이고 $b-a>0$이므로, $(*)$를 $b-a$로 나누면 다음을 얻는다.

$$4(b^2+ab+a^2) = 3(b-a)(b+a)^2. \qquad (**)$$

소문항 (i)

$a=0$이면 $(**)$는 $4b^2=3b^3$이 된다. $b>0$이므로 b^2으로 나눌 수 있고, 따라서

$$b = \tfrac{4}{3}.$$

소문항 (ii)

$a = 1$이면 $(**)$는 다음이 된다.

$$4(b^2+b+1) = 3(b-1)(b+1)^2 = 3(b^3+b^2-b-1),$$

즉 $3b^3+3b^2-3b-3-4b^2-4b-4=0$이고, 정리하면

$$3b^3-b^2-7b-7=0,$$

이므로 원하는 식이 성립한다.

이제 $f(x) = 3x^3-x^2-7x-7$이라 하면

$$f'(x) = 9x^2-2x-7 = (9x+7)(x-1).$$

정류점(stationary point)은 $x = -\frac{7}{9}$(삼차식(cubic)의 최고차항 계수(leading coefficient)가 양수이므로 극댓값(local maximum))과 $x=1$(극솟값(local minimum))에 있고,

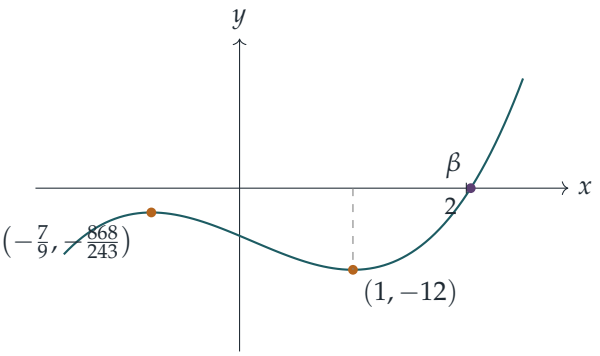
$$f(1) = 3-1-7-7 = -12, \qquad f\left(-\tfrac{7}{9}\right) = \frac{-343-147+1323-1701}{243} = -\frac{868}{243}.$$

생각해 보기 극댓값을 알면 근의 개수를 어떻게 알 수 있을까?

극댓값은 음수이다. $x \le 1$에서 f는 $x=-\frac{7}{9}$까지 증가한 뒤 감소하므로, 그 범위에서 $f(x) \le f(-\frac{7}{9}) < 0$이다. 따라서 $x \le 1$인 근은 없다. $x > 1$에서 f는 순증가하고(f'의 두 인수가 모두 양수이다) $f(x) \to \infty$이므로, 0을 정확히 한 번 지난다. 그러므로 실근은 정확히 하나이고,

$$f(2) = 24-4-14-7 = -1 < 0, \qquad f(3) = 81-9-21-7 = 44 > 0,$$

이므로 연속성(continuity)에 의해 이 근은 2와 3 사이에 있다.



그림은 곡선 $y = 3x^3-x^2-7x-7$을 나타낸다. 두 극점(turning point)이 모두 x축 아래에 있으므로, 곡선은 $\beta \approx 2.04$에서 단 한 번만 x축과 만난다.

소문항 (iii)

$p = b + a$, $q = b - a$라 하면 $p^2 = b^2 + 2ab + a^2$, $q^2 = b^2 - 2ab + a^2$이므로

$$3p^2 + q^2 = 4b^2 + 4ab + 4a^2 = 4(b^2 + ab + a^2).$$

따라서 $(**)$의 좌변은 $3p^2 + q^2$이고, 우변은 $3qp^2$이다. 그러므로

$$3p^2 + q^2 = 3p^2 q,$$

이므로 원하는 식이 성립한다. 정리하면 $q^2 = 3p^2(q-1)$이다. $q > 0$이므로 좌변은 양수이고, 따라서 $q \neq 1$이며

$$p^2 = \frac{q^2}{3(q-1)}.$$

이제 결론을 이끌어 내자.

- **하계.** $q^2 > 0$이고 ($p = b + a > 0$이므로) $p^2 > 0$이다. 따라서 $3(q-1) = q^2/p^2 > 0$, 즉 $q > 1$이다.
- **상계.** $a \geq 0$이므로 $p = q + 2a \geq q > 0$이고, 따라서 $p^2 \geq q^2$이다. 그러므로

  $$\frac{q^2}{3(q-1)} \geq q^2 \iff 1 \geq 3(q-1) \iff q \leq \tfrac{4}{3},$$

  여기서 $q^2 > 0$으로 나누고 $3(q-1) > 0$을 곱했는데, 둘 다 부등호의 방향을 바꾸지 않는다.

따라서 $1 < b - a \leq \frac{4}{3}$이고, 등호는 정확히 $a = 0$일 때 성립하며 이것이 소문항 (i)의 경우이다.

검산

- 소문항 (i)은 소문항 (iii)과 들어맞는다. $a = 0$이면 $q = b = \frac{4}{3}$으로, 범위의 최댓값이다.
- 소문항 (ii)도 들어맞는다. 근은 $b \approx 2.0390$이므로 $q = b - 1 \approx 1.039$이고, 이는 $(1, \frac{4}{3}]$ 안에 있다. $[1, 2.0390]$에서 두 적분을 계산하면 소수점 아래 여러 자리까지 같은 값(약 2.4924)이 나온다.
- 역으로, $(1, \frac{4}{3}]$ 안의 임의의 q에 대해 $p = q/\sqrt{3(q-1)} \geq q$이므로 유효한 $a = \frac{1}{2}(p - q) \geq 0$을 얻는다. 즉 이 범위는 정확하다(sharp).

흔한 실수

- 소문항 (ii)에서 $b - a$를 약분하지 않아, 불필요한 근(spurious root) $b = 1$을 가진 사차식(quartic)이 남는 경우.

- $f(2) < 0 < f(3)$만 보이는 경우. 이것은 $(2,3)$에 근이 **하나 존재함**은 증명하지만, 그것이 유일한 실근임은 증명하지 못한다. 극점도 함께 살펴야 한다.
- 소문항 (iii)에서 $q-1>0$임을 확인하기 전에 부등식을 $q-1$로 나누는 경우.

STEP 너머

적분에 대한 코시–슈바르츠 부등식(Cauchy–Schwarz inequality)에 의하면 $\left(\int_a^b x\,\mathrm{d}x\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b x^2\,\mathrm{d}x$이고, 등호는 피적분함수(integrand) x가 상수일 때만 성립하는데 여기서는 그렇지 않다. 이를 주어진 조건과 결합하면 $\int_a^b x^2\,\mathrm{d}x < (b-a)\int_a^b x^2\,\mathrm{d}x$가 되므로 $b-a>1$이다. 소문항 (iii)의 하계를 한 줄로 얻는 것이다. 다양한 형태의 코시–슈바르츠 부등식은 대학 1학년 해석학(analysis)에서 가장 많이 쓰이는 도구 중 하나이다. Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)는 리만(Riemann) 적분과 이와 같은 부등식들을 꼼꼼하게 전개한다.

풀이

STEP I 2014, 문제 4

순수수학 • 관련 변화율

STEP I 2014, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/14-s1-q4

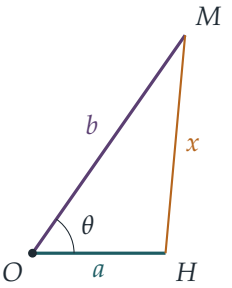
핵심 아이디어

두 바늘과 두 바늘 끝을 잇는 선분은 삼각형을 이루므로, 코사인 법칙(cosine rule)으로 x를 θ에 대한 식으로 나타낼 수 있다. 시계가 정확하므로 θ는 일정한 비율로 증가하고, 따라서 x의 증가율은 그 상수에 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta$를 곱한 것이다. 이제 이것을 최대화하는 일은 평범한 일변수 미적분 문제가 되며, 정류점(stationary point)을 구하는 방정식은 $\cos\theta$에 대한 이차식으로 깔끔하게 인수분해된다.

풀이

x의 증가율

O를 회전축, H를 시침의 끝, M을 분침의 끝이라 하자. 그러면 $OH = a$, $OM = b$, $\angle HOM = \theta$, $HM = x$이다.



코사인 법칙에 의하여

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta.$$

$x \geq b - a > 0$이므로 x로 마음껏 나눌 수 있다. 양변을 시간 t에 대하여 미분하면

$$2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2ab\sin\theta\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}.$$

시계가 정확하므로 각 바늘은 일정한 각속도(angular speed)로 돌고, 두 바늘 사이의 각은 일정한 비율 $\omega > 0$로 변한다(이는 두 각속도의 차이다. $0 \leq \theta < \pi$인 동안에는 분침이 앞서 나가므로 θ는 증가한다). 따라서

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \omega\, ab\,\frac{\sin\theta}{x}.$$

그러므로 $0 \leq \theta < \pi$에서 $f(\theta) = \dfrac{\sin\theta}{x}$가 최대가 되는 곳을 찾아야 한다. 이때 x는 θ에 의존하며 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = \dfrac{ab\sin\theta}{x}$임을 기억하자.

최대화하기

몫의 미분법(quotient rule)에 의하여

$$f'(\theta) = \frac{x\cos\theta - \sin\theta\cdot\dfrac{ab\sin\theta}{x}}{x^2} = \frac{x^2\cos\theta - ab\sin^2\theta}{x^3}.$$

$c = \cos\theta$라 하자. $x^2 = a^2 + b^2 - 2abc$와 $\sin^2\theta = 1 - c^2$을 이용하면 분자는

$$\begin{aligned} x^2\cos\theta - ab\sin^2\theta &= (a^2+b^2)c - 2abc^2 - ab + abc^2 \\ &= -\left(abc^2 - (a^2+b^2)c + ab\right) \\ &= -(ac-b)(bc-a) \\ &= (b-ac)(bc-a). \end{aligned}$$

생각해 보기 이 정류점이 최댓값이고, 또 유일한 정류점이라는 것을 어떻게 알 수 있는가?

$c \leq 1 < b/a$이므로 $ac < b$이고, 따라서 인수 $b - ac$는 항상 양수이다. 또 $x^3 > 0$이다. 그러므로 $f'(\theta)$의 부호는 $bc - a$의 부호, 즉 $\cos\theta - \dfrac{a}{b}$의 부호와 같다.

- $\cos\theta > a/b$일 때(θ가 작을 때) $f'(\theta) > 0$이고 f는 증가한다.
- $\cos\theta < a/b$일 때(θ가 클 때) $f'(\theta) < 0$이고 f는 감소한다.

$\cos\theta$는 $[0, \pi)$에서 감소하고 $0 < a/b < 1$이므로, 이 범위에서 $\cos\theta = a/b$를 만족하는 θ는 정확히 하나 존재하며, f는 그 점까지 증가하다가 그 뒤로 감소한다. 따라서 이 점에서 x의 증가율은 전역 최댓값(global maximum)을 가진다. 이 점에서

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\frac{a}{b} = b^2 - a^2,$$

이므로 x의 증가율은 $x = (b^2 - a^2)^{1/2}$일 때 최대가 되어, 요구된 결과를 얻는다.

기하학적으로 보면 $x^2 + a^2 = b^2$은 삼각형이 H에서 직각을 가진다는 뜻이다. 즉 두 바늘 끝을 잇는 선분이 시침과 수직일 때 증가율이 최대가 된다.

$b = 2a$인 경우

이제 $\cos\theta = a/b = \frac{1}{2}$이므로 최대 증가율은 $\theta = \pi/3$일 때 나타난다.

t를 정오 이후 흐른 시간(분 단위)이라 하자. 분침은 60분에 2π만큼, 시침은 720분에 2π만큼 돌며, 둘 다 수직 방향에서 시계 방향으로 돈다. 따라서 두 바늘 사이의 각은

$$\theta = 2\pi\left(\frac{1}{60} - \frac{1}{720}\right)t = 2\pi \cdot \frac{11}{720}\,t = \frac{11\pi}{360}\,t,$$

이며, 이 값이 π보다 작은 동안 이 식이 성립한다. 정오에 $\theta = 0$에서 출발하여 θ가 처음으로 $\pi/3$에 도달하는 것은

$$\frac{11\pi}{360}\,t = \frac{\pi}{3} \quad\Longrightarrow\quad t = \frac{120}{11} = 10\tfrac{10}{11}\text{ 분.}$$

일 때이다. 이는 약 10.91분(10분 약 55초)으로, 요구된 대로 11분보다 조금 짧다.

검산

- $\theta = 0$일 때 증가율은 0이고(두 바늘이 겹쳐 있으며 $x = b - a$가 최솟값이다), $\theta \to \pi$일 때 증가율은 다시 0으로 수렴한다(이때 $x \to a + b$로 최댓값이다). 따라서 그 사이 어딘가에서 최댓값이 나타나는 것은 정확히 예상한 대로이다.
- $a = 1, b = 2$로 놓고 바늘 끝의 위치를 1분마다 추적하여 두 끝 사이 거리의 변화율을 어림하면, 최대 변화율은 $t \approx 10.909$분에서 나타나며, 이때 $x \approx 1.732 = \sqrt{3} = \sqrt{b^2 - a^2}$이다.
- 답이 11보다 조금 작은 이유는 다음과 같다. 시침이 멈춰 있다면 분침이 60°에 도달하는 데 정확히 10분이 걸린다. 그런데 시침이 조금씩 앞으로 움직이므로 시간이 약간 더 필요하다. 또 120/11은 잘 알려진 "두 바늘은 720/11분 뒤에 다시 겹친다"에 나오는 수와 같은 종류의 수이다.

흔한 실수

- x 자체를 최대화하거나, 몫의 미분법 단계에서 x도 θ에 의존한다는 것을 놓친 채 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta$를 최대화하는 것.
- $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$로 분침의 속력($2\pi/60$ per minute)만 사용하여 정확히 10분이라는 답을 얻는 것. 두 바늘 사이의 각은 두 속력의 **차이**로 증가한다.

▶ $b > a$이므로 불가능한 근 $\cos\theta = b/a$를 버리는 것을 잊는 것.

STEP 너머

이것은 관련 변화율(related rates) 문제이다. 한 양이 알려진 비율로 변할 때, 그 양과 기하학적으로 연결된 다른 양이 어떻게 반응하는지를 추적한다. 시간에 따라 균일하게 변하는 각으로 위치를 나타낸다는 같은 아이디어는 행성 운동을 다루는 출발점이기도 하다. 원 궤도를 도는 두 행성 사이의 거리는 여기서의 x와 똑같이 움직이며, 가장 빠르게 멀어지는 순간도 같은 방법으로 구할 수 있다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이런 종류의 운동학을 벡터를 사용하여 전개한다.

풀이

STEP I 2014, 문제 5

순수수학 • 삼차부등식

> **STEP I 2014, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/14-s1-q5

핵심 아이디어

소문항 (i)은 한 변수의 삼차함수(cubic)로, $x \geq 0$에서의 최솟값이 정확히 0이 되어 $x = a$에서 축에 접한다. 이 하나의 부등식 $(x+2a)^3 \geq 27a^2x$는 사실 모습을 바꾼 산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)이다. 좌변에는 합 $x + a + a$가, 우변에는 곱 $x \cdot a \cdot a$가 들어 있다. 소문항 (ii)와 (iii)의 핵심은 무엇을 x와 a로 둘지 정하고, 등호가 정확히 언제 성립하는지 추적하는 것이다.

풀이

소문항 (i)

미분하면

$$f'(x) = 3(x+2a)^2 - 27a^2 = 3\big((x+2a)^2 - 9a^2\big) = 3(x-a)(x+5a),$$

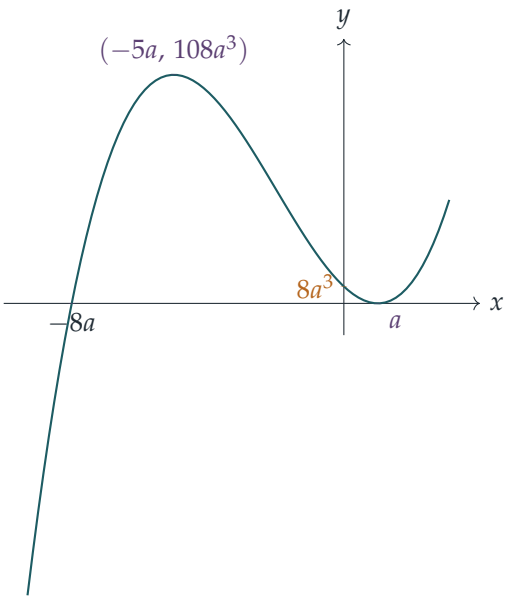
이므로 정류점(stationary point)은 $x = a$와 $x = -5a$이다. 이 점들에서

$$f(a) = (3a)^3 - 27a^3 = 0, \qquad f(-5a) = (-3a)^3 + 135a^3 = 108a^3,$$

이고, $f(0) = 8a^3$이다. f는 최고차항의 계수(leading coefficient)가 양수인 삼차함수이므로 $x = -5a$에서 극대(local maximum)이고 $x = a$에서 극소(local minimum)이다. 극솟값이 0이므로 그래프는 $x = a$에서 x축에 접하고, 따라서 $(x-a)^2$은 인수(factor)이다. 이제 상수항을 비교하면

$$f(x) = (x-a)^2(x+8a),$$

를 얻는데, 양변을 전개하여 모두 $x^3 + 6ax^2 - 15a^2x + 8a^3$이 됨을 확인할 수 있다.



$x \geq 0$에서 그래프는 높이 $8a^3 \geq 0$에서 출발하여 $x = a$에서 0까지 감소한 뒤, 그 후로는 계속 증가한다. 따라서 $x \geq 0$에서 f의 최솟값은 0이고,

$$f(x) \geq 0 \quad \text{여기서} x \geq 0,$$

이며, 등호는 $x = a$일 때만 성립한다. (인수분해된 꼴도 같은 사실을 바로 말해 준다. $x \geq 0$이면 $(x-a)^2 \geq 0$이고, $x = a = 0$인 경우를 제외하면 $x + 8a > 0$이다.) $a = 0$이면 그림은 $f(x) = x^3$으로 퇴화하는데, 이 역시 $x \geq 0$에서 음이 아니며 등호는 $x = 0 = a$일 때만 성립한다. 어느 경우든

$$(x+2a)^3 \geq 27a^2x \quad (x, a \geq 0), \qquad \text{등호 성립의 필요충분조건: } x = a.$$

소문항 (ii)

xy^2을 다루어야 하므로 소문항 (i)에서 $a = y \geq 0$으로 둔다. $x \geq 0, y \geq 0$일 때

$$27xy^2 \leq (x+2y)^3 \leq 3^3 = 27,$$

이다. 두 번째 부등식은 $0 \leq x + 2y \leq 3$이고 세제곱이 증가함수이기 때문이다. 따라서 영역 전체에서 $xy^2 \leq 1$이다.

이 상한(upper bound)은 실제로 도달된다. 등호가 성립하려면 (소문항 (i)에 의해) $x = y$이고 $x + 2y = 3$이어야 하므로 $x = y = 1$이며, 실제로 $1 \cdot 1^2 = 1$이다. 따라서 xy^2의 최댓값(greatest value)은 1이고, 이는 $x = 1, y = 1$에서만 얻어진다.

소문항 (iii)

> **생각해 보기** 소문항 (i)에는 x와 a라는 두 수만 등장한다. 이것이 어떻게 세 수에 대해 무언가를 말해 줄 수 있을까?

q와 r을 하나로 묶는다. $x = p, 2a = q + r$로 두면 $a = \frac{1}{2}(q + r) \geq 0$이다. 소문항 (i)에 의해

$$(p + q + r)^3 \geq 27p\left(\frac{q + r}{2}\right)^2.$$

이제 $\left(\frac{q+r}{2}\right)^2 - qr = \frac{(q-r)^2}{4} \geq 0$이고 $p \geq 0$이므로

$$(p + q + r)^3 \geq 27p\left(\frac{q + r}{2}\right)^2 \geq 27pqr,$$

이며, 이것이 구하는 부등식이다.

등호 조건. $(p + q + r)^3 = 27pqr$이면 이 부등식 연쇄의 두 부등식이 모두 등식이어야 한다.

- 첫 번째 부등식은 정확히 $x = a$일 때, 즉 $p = \frac{1}{2}(q + r)$일 때 등식이 된다.
- 두 번째 부등식은 정확히 $\frac{27}{4}p(q - r)^2 = 0$일 때, 즉 $p = 0$ 또는 $q = r$일 때 등식이 된다.

$p = 0$이면 첫 번째 조건에서 $q + r = 0$이므로 $q = r = 0$이기도 하다. $q = r$이면 첫 번째 조건에서 $p = q$이다. 어느 쪽이든 $p = q = r$이다. 역으로 $p = q = r$이면 양변은 모두 $27p^3$이다. 따라서 등호가 성립하는 것은 다음 경우이고, 그 경우뿐이다.

$$p = q = r.$$

검산

- $(x - a)^2(x + 8a)$를 전개하면 $(x + 2a)^3 - 27a^2x$가 다시 나온다. $a = 1$이면 $f(0) = 8$, $f(1) = 0, f(3) = 4 \cdot 11 = 44$로 모두 음이 아니다.
- 소문항 (ii)에서 직선 $x + 2y = 3$ 위의 다른 점들을 시험해 보자. $(x, y) = (2, \frac{1}{2})$이면 $\frac{1}{2}$, $(0.5, 1.25)$이면 약 0.78로, 둘 다 1보다 작다. 삼각형 영역을 촘촘한 격자로 나누어 컴퓨터로 탐색해도 $(1, 1)$에서 최댓값 1이 나온다.
- 소문항 (iii)에서 $p = 1, q = 2, r = 3$이면 $216 \geq 162$이다. 작은 자연수들에 대해 컴퓨터로 탐색해 보면 등호는 $p = q = r$일 때만 성립했다.

흔한 실수

- $f(a) = 0$임을 보이고서 이것이 왜 $x \geq 0$에서의 **최솟값**인지 설명하지 않는 것. 끝점에서의 값 $f(0) = 8a^3 \geq 0$을 포함하여 그래프의 모양(또는 인수분해)을 근거로 들어야 한다.
- 소문항 (ii)에서 상한 1이 실제로 도달되는지 확인하지 않는 것. 상한만으로는 최댓값이 되지 않는다.
- 소문항 (iii)의 등호 조건에서 $q = r$만 결론짓고 다른 경우인 $p = 0$을 빠뜨리는 것. 이 경우는 배제하거나, $p = q = r = 0$이 될 수밖에 없음을 보여야 한다.

STEP 너머

소문항 (iii)은 세 항의 산술-기하 평균 부등식 $\frac{1}{3}(p+q+r) \geq \sqrt[3]{pqr}$이며, 여기서 쓴 방법, 즉 두 변수를 그 평균으로 합치고 두 변수 부등식을 이용하는 방법은 n개 항에 대한 산술-기하 평균 부등식의 고전적인 증명들의 씨앗이다. 소문항 (ii)는 작은 제약 최적화(constrained optimisation) 문제로, 대학 과정에서는 라그랑주(Lagrange) 승수법(Lagrange multipliers)으로 공략하는 종류의 문제이다. 하지만 산술-기하 평균 부등식 같은 부등식이 훨씬 깔끔하게 답을 주는 경우가 많다. 이런 정신의 문제를 더 많이 보려면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)를 보라.

풀이

STEP I 2014, 문제 6

순수수학 • 로지스틱 사상의 점화식

STEP I 2014, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/14-s1-q6

이 문제는 *Beyond STEP*의 8.7 절 **풀 수 있는 혼돈**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch08/solvable-chaos.html

핵심 아이디어

식 $4x(1-x)$는 다루기 어색해 보이지만 $x = \sin^2\theta$로 놓으면 사정이 달라진다. 이때 $1-x = \cos^2\theta$이고 $4\sin^2\theta\cos^2\theta = (2\sin\theta\cos\theta)^2$는 배각 공식(double-angle formula)이 모습을 바꾼 것이다. 점화식(recurrence)의 각 단계는 단지 각을 두 배로 만들 뿐이다. 그러면 소문항 (ii)는 계수에 관한 조건 하나만 성립하면 **어떤** 이차 점화식이든 일차 변수 변환(change of variable)으로 이 점화식으로 바꿀 수 있다는 것을 알아차리는 문제이다.

풀이

소문항 (i)

$u_0 = \sin^2\theta$이면 $1-u_0 = \cos^2\theta$이므로

$$u_1 = 4\sin^2\theta\cos^2\theta = (2\sin\theta\cos\theta)^2 = \sin^2 2\theta.$$

이는 u_0에서 θ를 2θ로 바꾼 것과 정확히 같은 꼴이므로, 같은 계산을 하면

$$u_2 = 4\sin^2 2\theta\ \cos^2 2\theta = \sin^2 4\theta.$$

각이 단계마다 두 배가 되므로 다음과 같이 추측한다(conjecture).

$$u_n = \sin^2(2^n\theta) \qquad (n \geq 0).$$

수학적 귀납법(*induction*)에 의한 증명. $n = 0$일 때 이 식은 $u_0 = \sin^2\theta$이므로 참이다. 어떤 $k \geq 0$에 대하여 $u_k = \sin^2(2^k\theta)$라고 가정하자. 그러면 $1 - u_k = \cos^2(2^k\theta)$이고,

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 4\sin^2(2^k\theta)\cos^2(2^k\theta) \\ &= \big(2\sin(2^k\theta)\cos(2^k\theta)\big)^2 \\ &= \sin^2(2^{k+1}\theta), \end{aligned}$$

이다. 여기서 $A = 2^k\theta$로 놓고 $\sin 2A = 2\sin A\cos A$를 이용하였다. 따라서 k에 대한 결과가 $k+1$에 대한 결과를 함의하므로, 수학적 귀납법에 의해 모든 $n \geq 0$에 대하여 $u_n = \sin^2(2^n\theta)$이다.

소문항 (ii)

$\alpha \neq 0$인 $v_n = \alpha u_n + \beta$로 놓는다(v_n으로부터 u_n을 다시 구할 수 있으려면 $\alpha \neq 0$이어야 한다). v_n에 대한 점화식에 대입하면

$$\alpha u_{n+1} + \beta = -p(\alpha u_n + \beta)^2 + q(\alpha u_n + \beta) + r.$$

전개한 뒤 α로 나누면

$$u_{n+1} = -p\alpha\, u_n^2 + (q - 2p\beta)\, u_n + \frac{-p\beta^2 + (q-1)\beta + r}{\alpha}.$$

이것이 $u_{n+1} = 4u_n - 4u_n^2$이 되기를 원하므로 계수를 비교한다.

- u_n^2: $p\alpha = 4$이므로 $\alpha = \dfrac{4}{p}$이다($p \neq 0$이므로 문제없고, 이때 $\alpha \neq 0$도 성립한다).
- u_n: $q - 2p\beta = 4$이므로 $\beta = \dfrac{q-4}{2p}$이다.
- 상수항: $-p\beta^2 + (q-1)\beta + r = 0$.

처음 두 식이 α와 β를 정하고, 세 번째 식은 p, q, r에 대한 조건이 된다. $\beta = (q-4)/(2p)$를 대입하고 양변에 $4p$를 곱하면

$$\begin{aligned} & 0 = -p\cdot\frac{(q-4)^2}{4p^2} + (q-1)\frac{q-4}{2p} + r \\ \iff\quad & 0 = -(q-4)^2 + 2(q-1)(q-4) + 4pr \\ & \quad = (q-4)\big(-(q-4) + 2(q-1)\big) + 4pr \\ & \quad = (q-4)(q+2) + 4pr \\ & \quad = q^2 - 2q - 8 + 4pr. \end{aligned}$$

따라서 $4pr = 8 + 2q - q^2$이면 $\alpha = 4/p$, $\beta = (q-4)/(2p)$로 놓을 때 세 계수가 모두 일치하고, 수열 $u_n = (v_n - \beta)/\alpha$는 요구한 대로 $(*)$를 만족한다.

주어진 특정 수열. 여기서는 $p = 1, q = 2, r = 2$이다. $4pr = 8$이고 $8 + 2q - q^2 = 8 + 4 - 4 = 8$이므로 조건이 성립한다. 따라서

$$\alpha = 4, \qquad \beta = \frac{2-4}{2} = -1, \qquad \text{따라서} \qquad v_n = 4u_n - 1.$$

생각해 보기 소문항 (i)을 쓰려면 $u_0 = \sin^2\theta$이어야 한다. 여기서 알맞은 θ를 찾을 수 있을까?

$v_0 = 1$이므로 $u_0 = (1+1)/4 = \frac{1}{2}$이어야 하고, $\frac{1}{2} = \sin^2\frac{\pi}{4}$이다. 따라서 $\theta = \pi/4$로 놓으면 되고, 소문항 (i)에 의해 $u_n = \sin^2(2^n\pi/4) = \sin^2(2^{n-2}\pi)$이다. 그러므로 $2\sin^2 A = 1 - \cos 2A$를 이용하면

$$v_n = 4\sin^2\left(2^{n-2}\pi\right) - 1 = 1 - 2\cos\left(2^{n-1}\pi\right),$$

이다. 값을 계산하면 다음과 같다.

- $n = 0$: $v_0 = 4\sin^2\frac{\pi}{4} - 1 = 1$;
- $n = 1$: $v_1 = 4\sin^2\frac{\pi}{2} - 1 = 3$;
- $n \geq 2$: 2^{n-2}이 정수이므로 $\sin(2^{n-2}\pi) = 0$이고 $v_n = -1$이다.

따라서 수열은

$$1,\ 3,\ -1,\ -1,\ -1,\ \ldots$$

이다. 즉 $v_0 = 1, v_1 = 3$이고 모든 $n \geq 2$에 대하여 $v_n = -1$이다.

검산

점화식을 직접 반복해 보면 $v_1 = -1 + 2 + 2 = 3$, $v_2 = -9 + 6 + 2 = -1$, $v_3 = -1 - 2 + 2 = -1$이다. -1은 자기 자신으로 옮겨지므로, 공식이 말하는 대로 수열은 계속 -1에 머문다. 소문항 (i)에 대해서는 $\theta = \pi/6$을 넣어 보자. $u_0 = \frac{1}{4}$, $u_1 = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4} = \sin^2\frac{\pi}{3}$, $u_2 = 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = \sin^2\frac{2\pi}{3}$이므로 예측과 같다. 공식 $u_n = \sin^2(2^n\theta)$는 여러 임의의 각과 처음 몇 개의 항에 대하여 컴퓨터로도 확인하였다.

흔한 실수

- $u_n = \sin^2(2n\theta)$라고 쓰는 것: 각은 매번 두 배가 되므로 $2n$이 아니라 2^n처럼 커진다.
- 시작값 $u_0 = (v_0 - \beta)/\alpha$가 $[0,1]$에 속하는지, 그래서 정말 $\sin^2\theta$로 쓸 수 있는지 확인하는 것을 잊는 것.
- 상수항에 관한 식을 문제가 도달하라고 요구하는 조건으로 보지 않고, 풀어야 할 세 번째 미지수에 대한 식으로 다루는 것.

STEP 너머

점화식 $u_{n+1} = 4u_n(1 - u_n)$은 매개변수가 가장 극단적인 값일 때의 로지스틱 사상(logistic map)으로, 카오스(chaos)의 대표적인 예이다. $u_n = \sin^2(2^n\theta)$이므로 θ/π를 이진법으로 써 보면 각 단계가 이진 자릿수를 한 자리씩 옮기는 것에 불과함을 알 수 있고, 따라서 가까운 두 시작값은 지수적으로 빠르게 멀어진다. 소문항 (ii)의 치환은 **켤레**(*conjugacy*)로, 두 동역학계(dynamical system)가 좌표를 바꾸고 나면 실제로는 같다는 생각이다. Strogatz의 *Nonlinear Dynamics and Chaos*(비선형 동역학과 카오스)는 이러한 개념을 매우 읽기 쉽게 소개하는 입문서이다.

풀이

STEP I 2014, 문제 7

순수수학 • 삼각형에서의 벡터

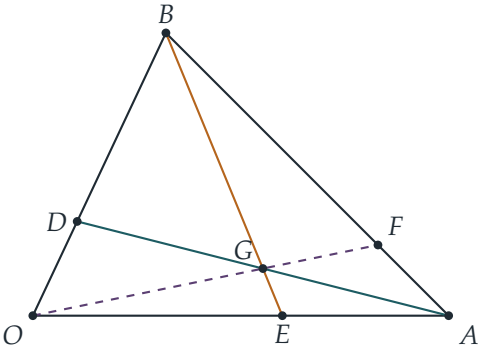
STEP I 2014, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/14-s1-q7

핵심 아이디어

모든 점을 **a**와 **b**의 결합으로 나타낸다. 이미 알고 있는 두 점을 지나는 직선 위의 점은 매개변수(parameter)가 하나인 벡터방정식(vector equation)으로 나타낼 수 있으므로, G는 두 직선 각각에서 하나씩, 두 가지 방법으로 쓸 수 있다. **a**와 **b**는 평행(parallel)하지 않으므로(삼각형이 퇴화(degenerate)하지 않으므로) 계수를 비교(comparing coefficients)할 수 있고, 그러면 두 매개변수에 대한 간단한 방정식 두 개를 얻는다.



풀이

먼저 D와 E의 위치를 구한다. $BD = r\,DO$이므로 점 D는 O에서 B까지 가는 길의 $\frac{1}{1+r}$만큼 간 지점에 있고, $OE = s\,EA$이므로 점 E는 O에서 A까지 가는 길의 $\frac{s}{1+s}$만큼 간 지점에 있다. 따라서

$$\mathbf{d} = \frac{1}{1+r}\,\mathbf{b}, \qquad \mathbf{e} = \frac{s}{1+s}\,\mathbf{a}.$$

소문항 (i)

직선 AD 위의 일반적인 점은

$$\mathbf{a}+\lambda(\mathbf{d}-\mathbf{a})=(1-\lambda)\,\mathbf{a}+\frac{\lambda}{1+r}\,\mathbf{b},$$

이고, 직선 BE 위의 일반적인 점은

$$\mathbf{b}+\mu(\mathbf{e}-\mathbf{b})=\frac{\mu s}{1+s}\,\mathbf{a}+(1-\mu)\,\mathbf{b}.$$

이다. G에서 이 두 식은 같다.

> **생각해 보기** **a**의 계수와 **b**의 계수를 각각 따로 같다고 놓아도 되는 이유는 무엇인가?

O, A, B가 진짜 삼각형을 이루므로 **a**와 **b**는 영벡터가 아니고 평행하지도 않다. 만약 $\alpha\neq\alpha'$인데 $\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}=\alpha'\mathbf{a}+\beta'\mathbf{b}$이면 **a**가 **b**의 실수배가 되는데, 이는 불가능하다. 따라서

$$1-\lambda=\frac{\mu s}{1+s},\qquad \frac{\lambda}{1+r}=1-\mu.$$

두 번째 식에서 $\lambda=(1+r)(1-\mu)$를 얻는다. 이를 첫 번째 식에 대입하면

$$\begin{aligned}1-(1+r)(1-\mu)&=\frac{\mu s}{1+s}\\ \mu\left[(1+r)-\frac{s}{1+s}\right]&=r\\ \mu\,\frac{(1+r)(1+s)-s}{1+s}&=r\\ \mu\,\frac{1+r+rs}{1+s}&=r,\end{aligned}$$

이므로

$$\mu=\frac{r(1+s)}{1+r+rs}.$$

이다. $r,s>0$이므로 $1+r+rs>0$이어서 이렇게 나누어도 된다. 이 μ의 값을 BE의 식에 대입하면 **a**의 계수는

$$\frac{\mu s}{1+s}=\frac{rs}{1+r+rs},$$

이고, **b**의 계수는

$$1-\mu=\frac{1+r+rs-r-rs}{1+r+rs}=\frac{1}{1+r+rs}.$$

이다. 그러므로

$$\mathbf{g}=\frac{rs}{1+r+rs}\,\mathbf{a}+\frac{1}{1+r+rs}\,\mathbf{b},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

소문항 (ii)

직선 OG는 원점을 지나므로, 그 위의 모든 점은 $\mathbf{g}$의 스칼라배(scalar multiple) $k\mathbf{g}$이다.

$$k\mathbf{g} = \frac{k}{1+r+rs}\left(rs\,\mathbf{a} + \mathbf{b}\right).$$

AB는 점 $(1-\nu)\mathbf{a} + \nu\mathbf{b}$들로 이루어져 있으므로, 점 $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$가 직선 AB 위에 있을 필요충분조건은 $\alpha + \beta = 1$이다. 따라서 F에서는 $k(rs+1) = 1 + r + rs$이어야 하고,

$$\mathbf{f} = \frac{rs}{1+rs}\,\mathbf{a} + \frac{1}{1+rs}\,\mathbf{b}.$$

이다. 한편 $AF = t\,FB$는 F가 A에서 B까지 가는 길의 $\frac{t}{1+t}$만큼 간 지점에 있다는 뜻이므로

$$\mathbf{f} = \frac{1}{1+t}\,\mathbf{a} + \frac{t}{1+t}\,\mathbf{b}.$$

이다. (앞에서와 같은 이유로 허용되는) $\mathbf{a}$의 계수 비교로 $1 + t = \dfrac{1+rs}{rs}$를 얻으므로

$$t = \frac{1}{rs}.$$

이다. $\mathbf{b}$의 계수도 일치한다: $\dfrac{t}{1+t} = \dfrac{1/(rs)}{(1+rs)/(rs)} = \dfrac{1}{1+rs}$.

검산

- **중선(median).** $r = s = 1$이면 D와 E는 중점이므로 G는 무게중심(centroid)이어야 한다. 공식은 $\mathbf{g} = \frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b}$를 주므로 옳고, $t = 1$이므로 F는 AB의 중점이다. 세 중선은 한 점에서 만나므로 당연히 그래야 한다.
- **체바의 정리(Ceva's theorem).** 답은 $r \cdot s \cdot t = 1$, 즉 $\dfrac{BD}{DO} \cdot \dfrac{OE}{EA} \cdot \dfrac{AF}{FB} = 1$임을 말해 주는데, 이는 한 점에서 만나는 직선 AD, BE, OF에 대한 체바의 정리 바로 그것이다.
- **수치 예.** $\mathbf{a} = (5,0)$, $\mathbf{b} = (0,5)$, $r = 2$, $s = 3$으로 놓자. 그러면 $D = (0, \frac{5}{3})$, $E = (\frac{15}{4}, 0)$이고, 공식은 $G = (\frac{30}{9}, \frac{5}{9}) = (\frac{10}{3}, \frac{5}{9})$를 준다. 이 점은 방정식이 $x + 3y = 5$인 AD 위에 있고, 방정식이 $4x + 3y = 15$인 BE 위에도 있다. 직선 OG는 $x + y = 5$와 $F = (\frac{30}{7}, \frac{5}{7})$에서 만나고, $\overrightarrow{AF} = (-\frac{5}{7}, \frac{5}{7})$, $\overrightarrow{FB} = (-\frac{30}{7}, \frac{30}{7})$이므로 $AF : FB = 1 : 6$이며, 따라서 $t = \frac{1}{6} = \frac{1}{rs}$이다. 또한 무작위로 고른 삼각형과 비 2000가지에 대해 컴퓨터로 정확한 산술을 써서 이 공식들을 확인하였다.

흔한 실수

- 비를 거꾸로 잡는 실수: $BD = r\,DO$이면 D는 O에서 B까지 가는 길의 $\frac{r}{1+r}$이 아니라 $\frac{1}{1+r}$만큼 간 지점에 있다.

- 계수 비교가 왜 타당한지 말하지 않고 계수를 비교하는 실수: 이를 위해서는 **a**와 **b**가 평행하지 않아야 한다.
- 소문항 (ii)에서 **g**의 크기를 다시 조정하는 것을 잊는 실수: G 자체는 계수의 합이 1보다 작으므로 AB 위에 있지 않다.

STEP 너머

f의 계수처럼 합이 1인 계수를 **무게중심 좌표**(*barycentric coordinates*)라고 한다. 이 좌표는 꼭짓점에 놓인 가중치로 점을 나타내며, 체바의 정리나 메넬라우스(Menelaus)의 정리 같은 결과를 거의 저절로 얻게 해 준다. 선형대수학(linear algebra)의 언어로 말하면, 계수 비교가 가능한 것은 **a**와 **b**가 일차독립(linearly independent)이어서 평면의 기저(basis)를 이루기 때문이다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 기저와 좌표를 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP I 2014, 문제 8

순수수학 • 직선족의 포락선

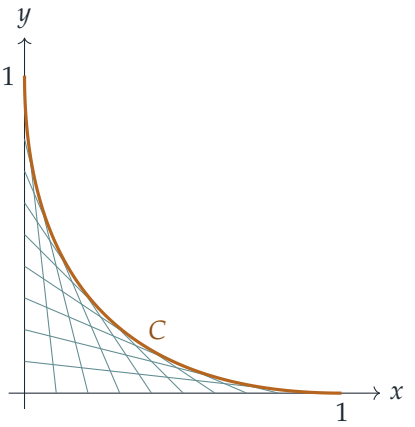
STEP I 2014, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/14-s1-q8

핵심 아이디어

각 직선을 절편 형태(intercept form) $\frac{x}{a}+\frac{y}{1-a}=1$로 쓴다. 그러면 두 직선의 교점은 일차연립방정식에서 바로 얻어지고, a와 b에 대해 대칭인 형태로 나온다. $b\to a$로 보내면 한 직선이 "이웃" 직선과 만나는 점을 얻고, 이 점들은 모든 직선 L_a가 접하는 곡선을 그린다. 곡선 C는 이 직선족의 **포락선**(*envelope*)이며, 소문항 (iii)은 이 사실을 반대 방향에서 확인한다.



풀이

$(a,0)$과 $(0,1-a)$를 지나는 직선의 절편은 a와 $1-a$이므로

$$L_a:\ \frac{x}{a}+\frac{y}{1-a}=1, \qquad \text{즉} \qquad (1-a)x+ay=a(1-a).$$

소문항 (i)

다음 연립방정식을 푼다.

$$(1-a)x + ay = a(1-a),$$
$$(1-b)x + by = b(1-b).$$

y를 소거하기 위해 첫 번째 식에 b를, 두 번째 식에 a를 곱한 뒤 빼면

$$\big[b(1-a) - a(1-b)\big]x = ab(1-a) - ab(1-b), \qquad \text{즉} \qquad (b-a)x = ab(b-a).$$

$a \neq b$이므로 $b-a$로 나눌 수 있고, $x = ab$를 얻는다. 이를 첫 번째 식에 대입하면

$$ay = a(1-a) - (1-a)ab = a(1-a)(1-b),$$

이고, $a \neq 0$이므로 $y = (1-a)(1-b)$이다. 따라서 L_a와 L_b가 만나는 점은

$$\big(ab,\ (1-a)(1-b)\big).$$

(답이 a와 b에 대해 대칭인 것은 당연하다. 이 점이 L_b 위에도 있음을 확인할 수 있다: $(1-b)ab + b(1-a)(1-b) = b(1-b)\big(a + 1 - a\big) = b(1-b)$.)

소문항 (ii)

두 좌표 모두 b에 대한 다항식이므로 연속이고, 따라서 $b \to a$일 때의 극한은 단순히 $b = a$에서의 값이다:

$$(x, y) = \big(a^2,\ (1-a)^2\big).$$

$0 < a < 1$이므로 $0 < x = a^2 < 1$이고, $a > 0$이므로 양의 제곱근을 취하면 $\sqrt{x} = a$이다. 따라서

$$y = (1-a)^2 = (1-\sqrt{x})^2,$$

이므로 극한점은 요구한 대로 C 위에 있다.

소문항 (iii)

C 위의 임의의 점을 잡자. 그 점의 x좌표는 $(0,1)$에 속하므로 $t = \sqrt{x} \in (0,1)$로 두어 t^2으로 쓸 수 있고, 그 점은 $\big(t^2, (1-t)^2\big)$이다.

연쇄법칙(chain rule)으로 $y = (1-\sqrt{x})^2$을 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2(1-\sqrt{x}) \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = -\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}},$$

이고, $x = t^2$에서 이 값은 $-\frac{1-t}{t}$이다. 그 점에서의 접선(tangent)은 다음과 같다.

$$y - (1-t)^2 = -\frac{1-t}{t}\left(x - t^2\right).$$

생각해 보기 이 직선이 L_a 가운데 하나임을 어떻게 알아볼 수 있을까?

직선 L_a는 두 절편으로 결정되며, 그 절편은 a와 $1-a$이어야 한다. 그러므로 접선의 절편을 구한다.

- $y=0$을 대입하면 $-(1-t)^2 = -\frac{1-t}{t}(x-t^2)$이다. $1-t \neq 0$이므로 약분하면 $x-t^2 = t(1-t)$, 즉 $x=t$이다.
- $x=0$을 대입하면 $y=(1-t)^2+\frac{1-t}{t}t^2 = (1-t)^2+t(1-t) = 1-t$이다.

따라서 접선은 $0<t<1$에 대해 $(t,0)$과 $(0,1-t)$를 지나므로 정확히 L_t이다. C의 모든 점은 어떤 $t\in(0,1)$로부터 나오므로, C의 모든 접선은 L_a 꼴이다(접점에서 $a=\sqrt{x}$). 이로써 증명이 끝난다.

$(a^2,(1-a)^2)$에서의 접선이 L_a이고, 이 점이 바로 소문항 (ii)에서 L_a로부터 얻은 점이라는 데 주목하자. 즉 각 직선은 자기 자신의 극한 교점에서 C에 접한다.

검산

- $a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{3}$이면 소문항 (i)에서 $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{3}\right)$을 얻는다. $L_{1/2}$ 위에서: $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$; $L_{1/3}$ 위에서: $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{9} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}$.
- $x=\frac{1}{4}$에서 곡선은 $y=\frac{1}{4}$이고 기울기는 -1이므로, 접선은 $x+y=\frac{1}{2}$이다. 이는 $(\frac{1}{2},0)$과 $(0,\frac{1}{2})$를 지나는 $L_{1/2}$이다.
- 곡선 자체는 x와 y에 대해 대칭인 포물선(parabola) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$의 일부이며, 이는 직선족의 대칭 $a\leftrightarrow 1-a$와 맞아떨어진다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)에서 $\sqrt{x}=a$의 근거를 밝히지 않는 것: 이를 위해서는 $a>0$이 필요하며, 이 조건은 주어져 있다.
- 소문항 (iii)에서 L_a가 C에 접한다는 것만 보이는 것. 문제가 묻는 것은 그 역이다: C의 임의의 접선에서 출발하여 그것이 어떤 L_a임을 보여야 한다.

STEP 너머

곡선 C는 직선족 L_a의 **포락선**, 즉 직선족의 모든 직선에 접하는 곡선이다. 일반적으로 곡선족 $F(x,y,a)=0$의 포락선은 $F=0$과 $\partial F/\partial a = 0$에서 a를 소거하여 구하는데, 이는 소문항 (ii)의 "$b\to a$로 보내는" 극한을 미적분으로 표현한 것이다. 포락선은 광학에서 화

선(caustic)으로 나타나는데, 커피잔 속에 보이는 밝은 빛의 곡선이 그 예이다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*에 이런 성격의 문제가 더 실려 있다.

풀이

STEP I 2014, 문제 9

역학 • 수평 방향의 힘을 받는 포물체

STEP I 2014, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

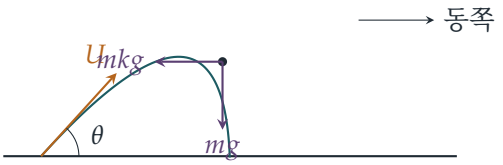
step.maths.org/questions/14-s1-q9

핵심 아이디어

두 힘이 모두 일정하므로 각 방향의 가속도도 일정하고, 따라서 보통의 포물체 운동(projectile motion)과 똑같이 수평 운동과 수직 운동을 따로 다룰 수 있다. 수직 운동은 서쪽으로 작용하는 힘의 영향을 전혀 받지 않는다. 새로운 점은 수평 속도가 꾸준히 줄어든다는 것이다. 그래서 입자는 어느 순간 동쪽으로의 이동을 멈추고, 그 뒤에는 서쪽으로 되돌아간다. 경로의 전체 모양은 그 순간이 최고점 및 착지 시각과 비교하여 **언제** 오는지에 달려 있다.

풀이

입자를 연직 평면에서 움직이는 질점(point mass)으로 모형화하고, 무게와 주어진 수평 방향의 힘 외에는 다른 힘이 작용하지 않는다고 하자. 동쪽을 x축, 연직 위쪽을 y축으로 잡고, 원점은 발사 지점으로 한다.



시각 T_H와 T_L

각 방향에 뉴턴(Newton)의 운동 제2법칙(Newton's second law)을 적용하고 m으로 나누면

$$\ddot{x} = -kg, \qquad \ddot{y} = -g.$$

이다. 처음 속도는 $(U\cos\theta,\ U\sin\theta)$이므로, 두 번 적분하면

$$\dot{x} = U\cos\theta - kgt, \qquad x = Ut\cos\theta - \tfrac{1}{2}kgt^2,$$
$$\dot{y} = U\sin\theta - gt, \qquad y = Ut\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

이다. 최고 높이에 이르는 것은 $\dot{y} = 0$일 때이고, 입자가 착지하는 것은 $t > 0$에서 $y = 0$일 때이다.

$$\boxed{T_H = \frac{U\sin\theta}{g}, \qquad T_L = \frac{2U\sin\theta}{g}.}$$

이것은 서쪽으로 작용하는 힘이 없을 때와 같은데, 그 힘에는 수직 성분이 없기 때문이다.

T의 의미

주어진 시각 $T = \dfrac{U\cos\theta}{kg}$는 정확히 $\dot{x} = 0$이 되는 때이다. T 이전에는 입자가 동쪽으로 움직이고, T 이후에는 서쪽으로 움직인다. 따라서 시각 T에 입자가 아직 공중에 있다면, 그 순간이 입자가 **가장 동쪽**에 있는 때이다. 세 시각을 비교하면

$$\frac{T_H}{T} = \frac{U\sin\theta}{g}\cdot\frac{kg}{U\cos\theta} = k\tan\theta, \qquad \frac{T_L}{T} = 2k\tan\theta.$$

이다. 입자가 어디에 착지하는지도 알아 두면 도움이 된다.

$$x(T_L) = T_L\left(U\cos\theta - \tfrac{1}{2}kgT_L\right) = \frac{2U^2\sin\theta}{g}(\cos\theta - k\sin\theta) = \frac{2U^2\sin\theta\cos\theta}{g}(1 - k\tan\theta).$$

이 값은 $k\tan\theta < 1$이면 양수(출발점의 동쪽)이고, $k\tan\theta > 1$이면 음수(서쪽)이다.

> ? **생각해 보기** 경로가 더 이상 대칭이 아니라면, 실제로는 어떤 모양일까?

가속도 $(-kg, -g)$가 일정하므로 경로는 여전히 포물선(parabola)이지만, 그 축이 기울어져 있다. 즉 아래쪽이면서 서쪽을 향하는 크기 $g\sqrt{1+k^2}$의 "중력" 아래에서 얻어지는 포물선이다. 비행의 최고점은 더 이상 포물선의 꼭짓점이 아니며, 아래의 세 경우는 가장 동쪽 지점(시각 T)이 어디에 오는지에 관한 것이다.

세 가지 경우

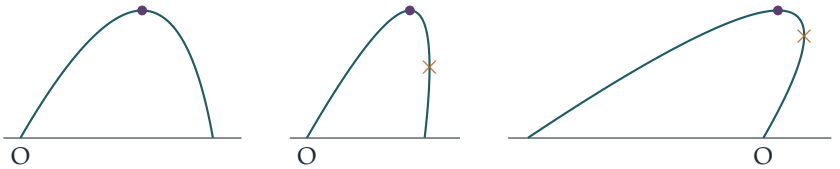
$k\tan\theta < \frac{1}{2}$인 경우. 이때 $T_H < T_L < T$이다. 입자는 동쪽 방향 속도가 다 없어지기 전에 착지하므로, 내내 동쪽으로 움직인다. 경로는 보통의 궤적처럼 보인다. 최고점까지 올라갔다가 내려오는데, 수평 속력이 계속 줄어들기 때문에 올라갈 때보다 더 가파르게 내려온다. 입자는 출발점의 동쪽에 착지한다.

$\frac{1}{2} < k\tan\theta < 1$인 경우. 이제 $T_H < T < T_L$이다. 입자는 아직 동쪽으로 움직이는 동안 최고점을 지나고, 내려오면서 시각 T까지 계속 동쪽으로 가는데, 이때 속도는 연직 아래 방향

이다. 그 뒤 서쪽으로 휘어 돌아오다가 착지한다. $k\tan\theta < 1$이므로 여전히 출발점의 동쪽에 착지하지만, 가장 동쪽 지점보다는 서쪽에 착지한다.

$k\tan\theta > 1$인 경우. 이제 $T < T_H$이다. 입자가 아직 올라가는 동안 동쪽으로의 운동이 멈추며, 그 순간 입자는 연직 위쪽으로 움직이고 있다. 이미 서쪽으로 움직이는 상태에서 최고 높이에 이르고, 내려와서 발사 지점의 **서쪽**에 착지한다.

아래 그림은 $\theta = 60°$이고 U와 g가 같을 때의 세 경우를 보여 주며, 각각 $k\tan\theta \approx 0.35, 0.6, 1.8$이다. 점은 T_H일 때의 최고점, 가위표는 T일 때의 가장 동쪽 지점을 나타내고, O는 발사 지점이다.



$k\tan\theta < \frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{2} < k\tan\theta < 1$ $\quad k\tan\theta > 1$

$k\tan\theta = 1$인 경우

이제 $T = T_H$이므로, 비행의 최고점에서 속도의 **두** 성분이 동시에 0이 되어 입자는 순간적으로 정지한다. 또 $x(T_L) = 0$이므로 입자는 발사 지점으로 돌아와 착지한다.

사실 이 운동은 직선을 따라 일어난다. $\tan\theta = 1/k$일 때 처음 속도 $U(\cos\theta, \sin\theta)$는 $(k, 1)$의 양의 실수배이고, 가속도 $(-kg, -g) = -g(k, 1)$는 정확히 반대 방향을 향한다. 가속도가 일정하고 속도와 정반대 방향인 입자는 직선 위를 움직인다. 입자는 발사 방향의 직선을 따라 $g\sqrt{1+k^2}$의 비율로 감속하며 올라가다가 시각 T_H에 멈추고, 같은 직선을 따라 곧장 미끄러져 내려와 시각 $T_L = 2T_H$에 출발한 지점에 착지한다. 이는 식으로도 확인할 수 있다. $k = \cot\theta$이면

$$x\tan\theta = Ut\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2 = y \quad \text{모든} t,$$

에 대하여 성립하므로, 입자는 직선 $y = x\tan\theta$를 결코 벗어나지 않는다.

검산

- $k \to 0$으로 두면 $T \to \infty$가 되므로 항상 첫 번째 경우에 해당하고, $x(T_L)$는 익숙한 수평 도달 거리 $U^2\sin 2\theta/g$가 된다.
- 착지 위치 $\frac{2U^2\sin\theta\cos\theta}{g}(1 - k\tan\theta)$는 정확히 $k\tan\theta = 1$에서 부호가 바뀌며, 이는 두 번째 경우와 세 번째 경우의 경계와 일치한다.
- $U = g = 1, \theta = 60°, k = 0.45$이면 입자는 $x \approx 0.191$에 착지하지만, $T_H \approx 0.87$과 $T_L \approx 1.73$ 사이인 시각 $T \approx 1.11$에 $x = \frac{\cos^2\theta}{2k} \approx 0.278$까지 이르므로, 착지하기 전에 실

제로 되돌아온다. 운동을 단계별로 수치적분(numerical integration)한 결과도 세 시각과 착지 지점 모두와 일치한다.

흔한 실수

- 서쪽으로 작용하는 힘이 수직 운동을 바꾸게 하는 것. T_H와 T_L에는 k가 전혀 들어 있지 않다.
- 최고점이 경로의 "한가운데"라고 가정하는 것. 수평 방향의 힘이 있으면 경로는 기울어진 포물선이므로, 최고점과 가장 동쪽 지점은 서로 다르다.
- 두 번째 경우를 입자가 출발점의 서쪽에 착지하는 것처럼 그리는 것. 입자가 되돌아오기는 하지만, $k\tan\theta < 1$이므로 그만큼 멀리 오지는 않는다.

STEP 너머

어느 방향이든 일정한 가속도는 언제나 포물선을 만든다. 여기서는 유효 중력이 단지 기울어져 있을 뿐이며, 좌표축을 그 방향에 맞추어 회전시키면 문제는 다시 보통의 포물체 운동이 된다. 힘에 맞추어 좌표를 고르는 이 아이디어는 대학 1학년 역학의 핵심이며, 균일한 전기장 속의 대전 입자도 꼭 이와 같이 행동하는데, 이 역시 1학년 역학의 중심 주제이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 아이디어를 꼼꼼하게 전개한다.

풀이

STEP I 2014, 문제 10

역학 • 충돌과 반발계수

STEP I 2014, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/14-s1-q10

핵심 아이디어

두 소문항 모두 자유 비행 구간에는 에너지(energy) 보존을, 각 충돌에는 뉴턴(Newton)의 실험 법칙(Newton's experimental law)을 쓰면 된다. 소문항 (ii)의 요령은 공과 공이 충돌하는 순간의 상황을 알아차리는 것이다. 큰 공은 방금 방향을 바꾸었고, 작은 공은 아직 최고 속력으로 내려오고 있다. 그래서 두 공은 큰 접근 속력으로 만나고, 무거운 아래쪽 공은 가벼운 공을 처음 높이보다 훨씬 높이 튕겨 올릴 수 있다. 그다음은 방정식 두 개로 이루어진 충돌 문제이며, 주어진 수치 덕분에 속력의 비가 깔끔하게 나온다.

풀이

두 공을 연직 방향으로만 움직이는 균일한 강체 구로 모형화하고, 공기 저항은 없으며 g를 중력 가속도로 둔다. 각 충돌은 순간적으로 일어나므로 충돌하는 동안 중력은 운동량을 바꾸지 않는다.

소문항 (i)

공은 중심의 높이가 R일 때 땅에 닿으므로, 그때까지 거리 H만큼 떨어진다. 에너지 보존(conservation of energy)에 의해 충돌 직전의 속력은

$$u = \sqrt{2gH}.$$

땅은 고정되어 있으므로 뉴턴의 실험 법칙에 의해 튀어 오르는 속력은 위쪽으로 eu이다. 그다음 공은 멈출 때까지 올라간다. 다시 에너지를 이용하면 공은 추가로

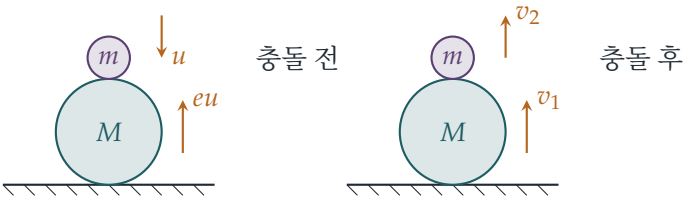
$$\frac{(eu)^2}{2g} = \frac{e^2 \cdot 2gH}{2g} = e^2 H.$$

만큼 올라간다. 이 상승은 중심이 높이 R인 곳에서 시작하므로, 공은 땅에서 높이 $R + He^2$에 이른다. 이것이 보이려던 결과이다.

소문항 (ii)

두 공은 정지 상태에서 함께 자유 낙하하므로 매 순간 같은 속력을 가진다. 아래쪽 공은 중심이 H만큼 떨어진 뒤 땅에 닿으므로, 그 순간 두 공은 모두 $u = \sqrt{2gH}$의 속력으로 아래로 움직이고 있다. 아래쪽 공은 튀어 올라 소문항 (i)에서처럼 위쪽으로 속력 eu로 땅을 떠나고, 그 직후 아직 u의 속력으로 내려오고 있는 위쪽 공과 만난다.

위쪽을 양의 방향으로 잡고, 두 공이 충돌한 직후의 속도를 v_1(질량 M인 공), v_2(질량 m인 공)라 하자.



운동량 보존(conservation of momentum)에 의해

$$Meu - mu = Mv_1 + mv_2,$$

이고, 뉴턴의 실험 법칙(분리 속력(speed of separation)은 접근 속력(speed of approach)의 e배이며, 여기서 접근 속력은 $eu + u$이다)에 의해

$$v_2 - v_1 = e(1 + e)u.$$

이다. $v_1 = v_2 - e(1 + e)u$를 운동량 방정식에 대입하면

$$\begin{aligned}(M + m)v_2 &= Meu - mu + Me(1 + e)u \\ &= \big(Me(2 + e) - m\big)u,\end{aligned}$$

이므로

$$v_2 = \frac{Me(2 + e) - m}{M + m}\,u.$$

? 생각해 보기 충돌이 일어날 때 작은 공의 중심은 어디에 있는가?

충돌은 튀어 오른 직후에 일어나므로 큰 공은 아직 땅에 닿아 있다. 큰 공의 중심은 높이 R, 꼭대기는 $2R$에 있고, 작은 공의 중심은 $2R + r$에 있다. 작은 공은 거기서 추가로 $v_2^2/(2g)$만큼 올라가므로

$$h = 2R + r + \frac{v_2^2}{2g}.$$

이다. 주어진 값을 넣으면 $2R + r = 0.45$이므로 $v_2^2/(2g) = 4.05$이고, $u^2/(2g) = H = 1.8$이다. 나누면

$$\frac{v_2^2}{u^2} = \frac{4.05}{1.8} = \frac{9}{4}, \qquad \text{따라서} \qquad v_2 = \tfrac{3}{2}u,$$

이다. 작은 공은 충돌 후 위로 움직이므로 양의 제곱근을 택했다.

$e = \frac{2}{3}$이면 $e(2+e) = \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{3} = \frac{16}{9}$이다. $k = M/m$으로 두고 분자와 분모를 m으로 나누면

$$\frac{\frac{16}{9}k - 1}{k+1} = \frac{3}{2} \implies \tfrac{32}{9}k - 2 = 3k + 3 \implies \tfrac{5}{9}k = 5,$$

이므로

$$\frac{M}{m} = 9.$$

검산

- $M/m = 9$이면 $v_2 = \frac{3}{2}u$, $v_1 = v_2 - \frac{10}{9}u = \frac{7}{18}u$이다. 충돌 전 운동량은 $9m \cdot \frac{2}{3}u - mu = 5mu$이고, 충돌 후 운동량은 $9m \cdot \frac{7}{18}u + m \cdot \frac{3}{2}u = 5mu$이다. 두 값이 일치한다.
- $v_1 < v_2$이므로 충돌 후 두 공은 멀어진다. 당연히 그래야 한다.
- 수치로 확인하면 $u = \sqrt{2 \times 9.8 \times 1.8} \approx 5.94\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $v_2 \approx 8.91\,\mathrm{m\,s^{-1}}$이고, 이 속력으로 $4.05\,\mathrm{m}$ 올라가므로 $h = 4.5$이다.
- $M \gg m$이면 $v_2 \to e(2+e)u$이다. $e = 1$이면 이는 $3u$이며, 완전 탄성 "쌓은 공" 낙하에서 높이가 아홉 배가 된다는 잘 알려진 결과와 같다.

흔한 실수

- 충돌이 작은 공의 중심이 $2R + r$에 있을 때 일어난다는 것을 잊고, 땅에서 잰 최종 높이를 $v_2^2/(2g)$만으로 계산하는 실수.
- 분리 속력으로 $e \cdot 2u$나 eu를 쓰는 실수. 두 공이 서로를 향해 움직이므로 접근 속력은 $eu + u$이다.
- 부호 실수. 위쪽을 양의 방향으로 고정하고, 충돌 전 위쪽 공의 속도를 $-u$로 두어야 한다.

STEP 너머

쌓은 공 낙하는 운동량이 가벼운 물체로 어떻게 몰릴 수 있는지를 보여 주는 멋진 실험이다. 아래 공보다 각각 가벼운 공 여러 개를 탑처럼 쌓으면, 맨 위의 공은 놓은 높이의 몇

배나 되는 높이로 튀어 오를 수 있다. 이런 충돌을 분석하는 가장 깔끔한 방법은 영운동량(zero-momentum) 좌표계, 곧 질량중심(centre-of-mass) 좌표계에서 보는 것이다. 이 좌표계에서는 각 공의 속도가 그저 반대 방향으로 바뀌고 e배가 될 뿐이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 충돌과 질량중심 좌표계를 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP I 2014, 문제 11

역학 • 연결된 도르래 계

STEP I 2014, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/14-s1-q11

핵심 아이디어

각 줄마다 장력(tension)을 하나씩 두고 각 입자에 대해 뉴턴(Newton)의 운동 제2법칙을 쓴 다음, 줄의 구속 조건(constraint)으로부터 모든 입자의 가속도(acceleration)를 구한다. 계 II에서 중요한 사실은 도르래(pulley) P_1이 **가볍다**는 것이다. 즉 P_1에 작용하는 알짜힘은 0이어야 하며(그렇지 않으면 가속도가 무한대가 된다), 따라서 위쪽 줄의 장력은 정확히 아래쪽 줄 장력의 두 배이다. 이것만 확인하면 P_1과 거기에 매달린 두 입자는 M에 대하여 질량 4μ인 입자 하나와 똑같이 작용한다.

풀이

풀이 전체에서 입자는 질점(point mass)으로, 줄은 가볍고 늘어나지 않는(inextensible) 것으로, 도르래는 매끄럽고 가벼운 것으로 모형화한다. 따라서 장력은 각 줄의 어느 곳에서나 같다.

소문항 (i)

줄의 장력을 T라 하자. 줄은 늘어나지 않으므로, M이 가속도 a_1로 아래로 가속하면 m은 가속도 a_1로 위로 가속한다. 운동 방향을 양의 방향으로 잡고 각 입자에 뉴턴의 운동 제2법칙을 적용하면

$$\begin{aligned} M: &\quad Mg - T = Ma_1, \\ m: &\quad T - mg = ma_1. \end{aligned}$$

두 식을 더하면 $(M-m)g=(M+m)a_1$이므로

$$a_1=\frac{M-m}{M+m}\,g,$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. 이를 m에 대한 식에 대입하면

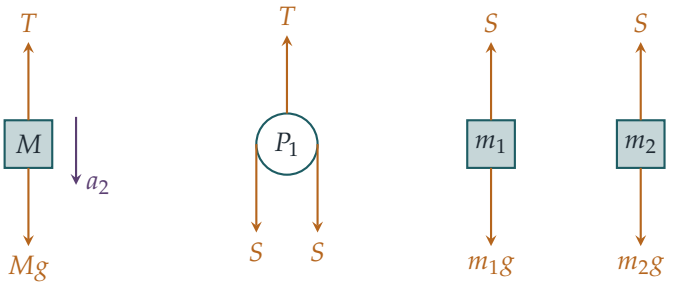
$$T=m(g+a_1)=m\cdot\frac{2M}{M+m}\,g=\frac{2Mmg}{M+m}.$$

줄의 두 직선 부분은 모두 도르래에서 연직 아래로 내려가며 각각 장력 T로 당기므로, 장력 때문에 도르래가 받는 힘은

$$2T=\frac{4Mmg}{M+m}\quad\text{연직 아래 방향.}$$

소문항 (ii)

고정 도르래 P에 걸린 줄의 장력을 T, P_1에 걸린 줄의 장력을 S라 하자.



가벼운 도르래. P_1에 작용하는 힘은 위쪽으로 T, 아래쪽으로 $2S$이다(자체 무게는 0이다). 질량이 0이므로 $T-2S=0\cdot(\text{가속도})=0$이고, 따라서

$$T=2S.$$

? **생각해 보기** m_1과 m_2의 가속도는 M의 가속도와 어떤 관계인가?

위쪽 줄은 늘어나지 않으므로, M이 가속도 a_2로 아래로 가속하면 P_1은 가속도 a_2로 **위로** 가속한다. 아래쪽 줄은 P_1**에 대한** m_1과 m_2의 상대 운동만 정해 준다. 즉 m_1이 P_1에 대하여 가속도 b로 아래로 가속하면, m_2는 P_1에 대하여 가속도 b로 위로 가속한다. 여기에 P_1의 운동을 더하면 실제 가속도는

$$m_1:\ b-a_2\ \text{아래 방향},\qquad m_2:\ b+a_2\ \text{위 방향}.$$

여기서 b는 두 번째 미지수이며, 나중에 소거할 것이다.

운동 방정식.

$$\begin{aligned} M: &\quad Mg - 2S = Ma_2, \\ m_1: &\quad m_1 g - S = m_1(b - a_2), \\ m_2: &\quad S - m_2 g = m_2(b + a_2). \end{aligned}$$

m_1에 대한 식을 m_1로, m_2에 대한 식을 m_2로 나누면

$$g - \frac{S}{m_1} + a_2 = b = \frac{S}{m_2} - g - a_2.$$

따라서

$$2(g + a_2) = S\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = S\,\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} = \frac{S}{\mu},$$

이므로 $S = 2\mu(g + a_2)$이고 $T = 2S = 4\mu(g + a_2)$이다. 이를 M에 대한 식에 대입하면

$$Mg - 4\mu g - 4\mu a_2 = Ma_2 \quad \Longrightarrow \quad (M + 4\mu)a_2 = (M - 4\mu)g,$$

이고, 그러므로

$$a_2 = \frac{M - 4\mu}{M + 4\mu}\,g,$$

이며, 이것이 구하려던 결과이다. 이를 소문항 (i)과 비교해 보자. M은 마치 질량 4μ인 입자 하나와 맞서 매달려 있는 것과 똑같이 움직인다.

a_1과 a_2는 언제 같은가? $x > 0$에 대하여 $f(x) = \dfrac{M - x}{M + x}$라 두면 $a_1 = f(m)\,g$이고 $a_2 = f(4\mu)\,g$이다.

$$f(x) = \frac{2M}{M + x} - 1$$

이고 $M > 0$이므로, f는 $x > 0$에서 순감소(strictly decreasing)하며, 따라서 일대일(one-to-one)이다. 그러므로 $a_1 = a_2$일 필요충분조건은 $m = 4\mu$이다. $m = m_1 + m_2$이므로 이 조건은

$$m_1 + m_2 = \frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2} \iff (m_1 + m_2)^2 = 4m_1 m_2 \iff (m_1 - m_2)^2 = 0 \iff m_1 = m_2,$$

가 된다. 여기서 첫 단계는 $m_1 + m_2 > 0$을 곱하는 것이므로 거꾸로도 성립한다. 이로써 양방향의 증명이 완성된다.

검산

- $m_1 = m_2$이면 계 II의 아래쪽 부분이 균형을 이루므로 $b = 0$이다. 즉 P_1과 거기 매달린 입자들은 질량 $m_1 + m_2$인 한 물체처럼 움직이고, 계 II는 계 I로 바뀐다. 이는 이 경우 $4\mu = m_1 + m_2$라는 사실과 일치한다.

- $m_2 \to 0$이면 $\mu \to 0$이고 $a_2 \to g$이다. m_1은 그냥 떨어질 뿐 장력을 받지 않으므로, M을 붙잡아 줄 무거운 것이 없다. 타당하다.
- 소문항 (ii)의 장력 $T = 4\mu(g + a_2)$는 소문항 (i)로부터도 구할 수 있다. P_1이 고정되어 있다면 그것이 받는 힘은 $4m_1m_2g/(m_1 + m_2) = 4\mu g$이다. 위로 a_2만큼 가속하는 것은 g를 $g + a_2$로 바꾸는 것일 뿐이다.
- 수치로 확인해 보면, $M = 3, m_1 = 1, m_2 = 2$일 때 $\mu = \frac{2}{3}$이고 $a_2 = \frac{1}{17}g \approx 0.576\,\mathrm{m\,s^{-2}}$이다($g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$일 때). 네 방정식을 직접 풀어도 같은 값이 나온다.

흔한 실수

- P_1이 움직인다는 사실을 잊고 m_1과 m_2의 가속도를 $b - a_2$와 $b + a_2$ 대신 $\pm b$로 쓰는 것.
- 가벼운 도르래 양쪽에서 $T = S$를 쓰는 것. P_1의 양쪽이 각각 S로 아래로 당기므로, 그 위의 줄은 $2S$를 견뎌야 한다.
- 이유를 밝히지 않고 $a_1 = a_2 \Rightarrow m = 4\mu$라고 결론짓는 것. 이를 위해서는 f가 일대일이어야 한다.

STEP 너머

이 장치는 앳우드 기계(Atwood machine) 안에 들어 있는 앳우드 기계이며, $\mu = m_1m_2/(m_1 + m_2)$는 **환산 질량**(reduced mass)이다. 이는 행성과 그 항성처럼 이체 문제(two-body problem)를 하나의 물체에 대한 문제로 환원할 때 나타나는 바로 그 양이다. 이와 같은 구속 조건이 있는 계는 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)으로 가장 깔끔하게 다룰 수 있다. 라그랑주 역학은 독립 좌표(여기서는 P_1의 높이와 그에 대한 m_1의 상대 위치)를 직접 다루며 장력은 전혀 필요로 하지 않는다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 도르래 계를 꼼꼼히 다루고, 이어서 이체 문제의 환산 질량까지 나아간다.

풀이

STEP I 2014, 문제 12

확률과 통계 • 이산확률변수

STEP I 2014, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/14-s1-q12

핵심 아이디어

제곱하면 절댓값(modulus) 기호가 사라지므로, $\mathrm{E}(X^2)$를 구하는 데에는 주사위 눈 S에 대한 $\mathrm{E}(S)$와 $\mathrm{E}(S^2)$만 있으면 되고, 이를 동전의 두 결과에 대해 평균하면 된다. 그러면 정수 조건은 $(k-1)^2$에 대한 나누어떨어짐(divisibility) 문제로 바뀌고, 한 자리 수 후보는 거의 남지 않는다. k를 알고 나면 X는 다섯 개의 값만 가지므로, 두 판짜리 게임은 순서쌍 몇 개를 나열하는 것으로 끝난다.

풀이

$\mathrm{E}(X^2)$ 구하기

주사위에 나온 수를 S라 하면

$$\mathrm{P}(S=1)=\tfrac{1}{2}, \qquad \mathrm{P}(S=2)=\tfrac{1}{3}, \qquad \mathrm{P}(S=3)=\tfrac{1}{6}.$$

이다. 따라서

$$\mathrm{E}(S)=\tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{3}+\tfrac{3}{6}=\tfrac{5}{3}, \qquad \mathrm{E}(S^2)=\tfrac{1}{2}+\tfrac{4}{3}+\tfrac{9}{6}=\tfrac{10}{3}.$$

이다. 동전은 공정하고 주사위와 독립(independent)이다. $|a|^2=a^2$이므로 앞면이 나왔을 때 $X^2=(kS-1)^2$이고, 뒷면이 나왔을 때 $X^2=(k-S)^2$이다. 따라서

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X^2) &= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{E}\left[(kS-1)^2\right]+\tfrac{1}{2}\,\mathrm{E}\left[(k-S)^2\right] \\
&= \tfrac{1}{2}\left[k^2\mathrm{E}(S^2)-2k\mathrm{E}(S)+1\right]+\tfrac{1}{2}\left[k^2-2k\mathrm{E}(S)+\mathrm{E}(S^2)\right] \\
&= \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{10}{3}k^2-\tfrac{10}{3}k+1+k^2-\tfrac{10}{3}k+\tfrac{10}{3}\right] \\
&= \frac{13k^2-20k+13}{6}.
\end{aligned}$$

이다. 한편

$$k + \frac{13(k-1)^2}{6} = \frac{6k + 13k^2 - 26k + 13}{6} = \frac{13k^2 - 20k + 13}{6},$$

이므로 요구한 대로 $\mathrm{E}(X^2) = k + \frac{13}{6}(k-1)^2$이다.

k 구하기

k가 정수이므로, $\mathrm{E}(X^2)$가 정수일 필요충분조건은 6이 $13(k-1)^2$을 나누는 것이다. 13은 6과 서로소(coprime)이므로 이는 $6 \mid (k-1)^2$, 즉 2와 3이 모두 $(k-1)^2$을 나눈다는 뜻이다. 2와 3은 소수(prime)이므로 각각 $k-1$ 자체를 나누어야 하고, 따라서 $6 \mid k-1$이다. $1 \le k \le 9$이므로 $k = 1$ 또는 $k = 7$만 남는다.

> **생각해 보기** 두 후보 모두 $\mathrm{E}(X^2)$를 정수로 만든다. 어느 조건이 하나를 배제하는가?

$\mathrm{E}(X)$에 대한 조건이 배제한다. $k = 1$이면 두 규칙 모두 $X = |S-1| = S-1$을 주므로 $\mathrm{E}(X) = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$이고, 이는 정수가 아니다.

$k = 7$이면 모든 눈에 대해 $7S - 1 > 0$이고 $7 - S > 0$이므로 절댓값 기호를 없앨 수 있다.

$$\mathrm{E}(X) = \tfrac{1}{2}\left(7 \cdot \tfrac{5}{3} - 1\right) + \tfrac{1}{2}\left(7 - \tfrac{5}{3}\right) = \tfrac{16}{3} + \tfrac{8}{3} = 8,$$

이고 $\mathrm{E}(X^2) = 7 + \frac{13}{6} \cdot 36 = 85$이다. 둘 다 양의 정수이므로 $k = 7$이다.

X의 분포

$k = 7$일 때, 앞면이면 $X = 7S - 1 \in \{6, 13, 20\}$이고 뒷면이면 $X = 7 - S \in \{6, 5, 4\}$이다. (동전, 주사위)의 각 조합의 확률은 $\frac{1}{2}\mathrm{P}(S = s)$이고, 값 6은 앞면이면서 $S = 1$인 경우와 뒷면이면서 $S = 1$인 경우 모두에서 나온다.

x	4	5	6	13	20
$\mathrm{P}(X = x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

확률의 합은 1이다.

두 판짜리 게임

두 판의 결과를 X_1, X_2라 하자. 각 판마다 주사위를 새로 굴리고 동전을 새로 던지므로 둘은 독립이고, 각각 위의 분포를 따른다. 합이 25보다 큰 순서쌍과 합이 정확히 25인 순서쌍을 구해야 한다.

> **생각해 보기** 합이 25를 넘는 순서쌍을 빠짐없이 나열하려면 어떻게 해야 하는가?

더 큰 값을 기준으로 분류한다. 어느 결과도 20이 아니면 가능한 가장 큰 합은 $13+13=26$이고, $13+6=19$는 이미 너무 작으므로 그러한 순서쌍은 $(13,13)$뿐이다. 한 결과가 20이면 다른 결과는 5보다 커야 하므로 6, 13, 20 중 하나이고, 다른 결과가 5이면 합이 정확히 25가 된다. 따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X_1+X_2>25) &= \mathrm{P}(13,13)+2\,\mathrm{P}(20,6)+2\,\mathrm{P}(20,13)+\mathrm{P}(20,20)\\ &= \tfrac{1}{36}+2\cdot\tfrac{1}{12}\cdot\tfrac{1}{2}+2\cdot\tfrac{1}{12}\cdot\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{144}\\ &= \frac{4+12+4+1}{144}=\frac{7}{48},\end{aligned}$$

이다. 여기서 인수 2는 두 가지 순서를 센 것이다. 마찬가지로

$$\mathrm{P}(X_1+X_2=25)=2\,\mathrm{P}(20,5)=2\cdot\tfrac{1}{12}\cdot\tfrac{1}{6}=\tfrac{1}{36}.$$

이다. 따라서 도박꾼이 받을 것으로 기대되는 금액은 파운드 단위로

$$\frac{7w}{48}+\frac{1}{36}.$$

이다.

이 값이 판돈 £1보다 작을 때 게임은 카지노에 유리하다.

$$\frac{7w}{48}+\frac{1}{36}<1 \iff \frac{7w}{48}<\frac{35}{36} \iff w<\frac{35\cdot 48}{36\cdot 7}=\frac{20}{3}.$$

w는 정수이므로 가능한 가장 큰 값은 $w=6$이다. $\frac{20}{3}$은 정수가 아니므로, 공정한 게임(기대 지급액이 정확히 £1)을 허용하든 허용하지 않든 답은 같다.

검산

- 표에서 $\mathrm{E}(X)=\frac{4+10+36+26+20}{12}=8$이고 $\mathrm{E}(X^2)=\frac{16+50+216+338+400}{12}=85$이므로 공식과 일치한다.
- $w=6$이면 기대 지급액은 $\frac{7}{8}+\frac{1}{36}=\frac{65}{72}\approx$ £0.90으로 판돈보다 작고, $w=7$이면 $\frac{151}{144}\approx$ £1.05로 판돈보다 크다.
- 두 판짜리 게임 2×10^5번을 컴퓨터로 모의실험한 결과, 합이 25를 넘은 경우는 약 14.5%($\frac{7}{48}\approx 14.6\%$), 정확히 25인 경우는 약 2.8%($\frac{1}{36}\approx 2.8\%$)였다.

흔한 실수

- 분포에서 $X=6$을 앞면에 대해 한 번, 뒷면에 대해 한 번, 두 번 나열하고 이를 합쳐 $\mathrm{P}(X=6)=\frac{1}{2}$로 쓰지 않는 것.

- $(20, 6)$처럼 서로 다른 값으로 이루어진 순서쌍의 두 가지 순서에 대한 인수 2를 빠뜨리는 것.
- "합이 25"인 경우를 £w를 따는 것이나 잃는 것으로 처리하는 것: 도박꾼은 판돈을 돌려받을 뿐이다.

STEP 너머

$\mathrm{E}(X^2)$의 계산은 전체 기댓값의 법칙(law of total expectation) $\mathrm{E}(Y) = \sum_i \mathrm{P}(A_i)\,\mathrm{E}(Y \mid A_i)$의 한 예로, 대학 1학년 확률론 강의에서 끊임없이 쓰인다. 두 판짜리 게임은 독립인 확률변수들의 합의 분포, 즉 합성곱(convolution)에 관한 것이며, 생성함수(generating function)를 쓰면 깔끔하게 다룰 수 있다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문서)에서 두 아이디어를 모두 다룬다.

풀이

STEP I 2014, 문제 13

확률과 통계 • 삼각분포

STEP I 2014, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

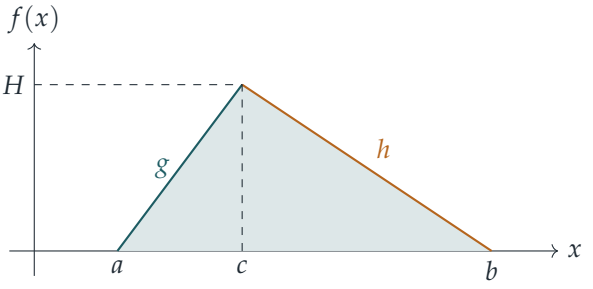
step.maths.org/questions/14-s1-q13

핵심 아이디어

밀도함수(density function)의 그래프는 밑변이 a에서 b까지이고 꼭짓점(apex)이 c 위에 있는 삼각형이며, 그 넓이는 1이어야 한다. 이 조건으로 꼭짓점의 높이가 정해지고, 그러면 각 일차함수 조각은 두 점으로 완전히 결정된다. 평균(mean)과 중앙값(median)을 구할 때에는 각 일차함수 조각이 0에서 시작하도록 변수를 평행이동하면 적분이 깔끔해진다. 중앙값의 경우 가장 먼저 물어야 할 것은 그것이 c의 어느 쪽에 있느냐이다.

풀이

풀이 내내 $a < c < b$로 두어 두 조각이 모두 실제로 존재하도록 한다(문제의 공식들이 의미를 가지려면 $c - a$와 $b - c$가 0이 아니어야 한다).



두 일차함수 조각

꼭짓점의 높이를 $H = g(c) = h(c)$라 하자. f의 그래프 아래 영역은 밑변이 $b-a$이고 높이가 H인 삼각형이며, 전체 확률(probability)은 1이므로

$$\tfrac{1}{2}(b-a)H = 1, \qquad H = \frac{2}{b-a}.$$

g는 일차함수이고 $g(a) = 0$이므로 어떤 상수 k에 대하여 $g(x) = k(x-a)$이며, $g(c) = H$로부터 $k(c-a) = \dfrac{2}{b-a}$를 얻는다. 따라서

$$g(x) = \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)},$$

이고, 이것이 구하는 식이다. 같은 방법으로 $h(c) = H$인 $h(x) = m(b-x)$로 두면

$$h(x) = \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)}.$$

$b-a, c-a, b-c$가 모두 양수이므로, 요구된 대로 g는 증가함수이고 h는 감소함수이다.

소문항 (i)

$\mathrm{E}(X) = I_1 + I_2$로 쓰자. 여기서 $I_1 = \int_a^c x\,g(x)\,\mathrm{d}x$이고 $I_2 = \int_c^b x\,h(x)\,\mathrm{d}x$이다.

I_1에서 $x = a + t$로 치환(substitution)하면 t는 0부터 $c-a$까지 변한다.

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{2}{(b-a)(c-a)} \int_0^{c-a} (a+t)\,t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{(b-a)(c-a)} \left[\frac{a(c-a)^2}{2} + \frac{(c-a)^3}{3}\right] \\ &= \frac{(c-a)\big(3a + 2(c-a)\big)}{3(b-a)} = \frac{(c-a)(a+2c)}{3(b-a)}. \end{aligned}$$

I_2에서 $x = b - s$로 치환하면 s는 0부터 $b-c$까지 변한다.

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{2}{(b-a)(b-c)} \int_0^{b-c} (b-s)\,s\,\mathrm{d}s = \frac{2}{(b-a)(b-c)} \left[\frac{b(b-c)^2}{2} - \frac{(b-c)^3}{3}\right] \\ &= \frac{(b-c)\big(3b - 2(b-c)\big)}{3(b-a)} = \frac{(b-c)(b+2c)}{3(b-a)}. \end{aligned}$$

두 식을 더하면 분자는

$$\begin{aligned} (c-a)(a+2c) + (b-c)(b+2c) &= \big(ac + 2c^2 - a^2 - 2ac\big) + \big(b^2 + 2bc - bc - 2c^2\big) \\ &= b^2 - a^2 + bc - ac \\ &= (b-a)(b+a+c). \end{aligned}$$

이를 $3(b-a)$로 나누면

$$\mathrm{E}(X) = \tfrac{1}{3}(a+b+c),$$

이고, 이것이 구하는 결과이다. (이것은 삼각형의 무게중심(centroid)의 x좌표인데, 우연이 아니다. 평균은 밀도함수 아래 영역의 균형점이기 때문이다.)

소문항 (ii)

먼저 꼭짓점의 왼쪽에 확률이 얼마나 있는지 구한다. 이것은 왼쪽 삼각형의 넓이이다.

$$\mathrm{P}(X \le c) = \tfrac{1}{2}(c-a)H = \frac{c-a}{b-a}.$$

생각해 보기 중앙값이 c의 왼쪽에 있는지 오른쪽에 있는지 어떻게 알 수 있을까?

중앙값 M은 $\mathrm{P}(X \le M) = \frac{1}{2}$를 만족한다. $\mathrm{P}(X \le c) \ge \frac{1}{2}$이면 중앙값은 c이거나 c의 왼쪽에 있고, 그렇지 않으면 오른쪽에 있다. 그런데 $\frac{c-a}{b-a} \ge \frac{1}{2}$인 것은 정확히 $c \ge \frac{1}{2}(a+b)$일 때, 즉 꼭짓점이 $[a,b]$의 중점이거나 그 오른쪽에 있을 때이다. 따라서 경우는 c와 $\frac{1}{2}(a+b)$를 비교하여 나뉜다.

경우 $c \ge \frac{1}{2}(a+b)$. 이때 $a < M \le c$이고, $a \le m \le c$에 대하여 a부터 m까지의 작은 삼각형의 넓이는

$$\mathrm{P}(X \le m) = \int_a^m g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(m-a)^2}{(b-a)(c-a)}.$$

이 값을 $\frac{1}{2}$로 놓고 양의 제곱근을 취하면($M > a$이므로)

$$M = a + \sqrt{\tfrac{1}{2}(b-a)(c-a)}.$$

경우 $c < \frac{1}{2}(a+b)$. 이번에는 중앙값이 c의 오른쪽에 있으므로, 오른쪽 끝에서부터 계산하는 편이 쉽다. $c \le m \le b$에 대하여

$$\mathrm{P}(X \ge m) = \int_m^b h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(b-m)^2}{(b-a)(b-c)}.$$

이 값을 $\frac{1}{2}$로 놓고 $M < b$를 이용하면

$$M = b - \sqrt{\tfrac{1}{2}(b-a)(b-c)}.$$

$c = \frac{1}{2}(a+b)$일 때에는 분포가 대칭이며, 두 공식 모두 $M = \frac{1}{2}(a+b)$를 준다(예를 들어 첫 번째 공식은 $a + \sqrt{\frac{1}{4}(b-a)^2} = a + \frac{1}{2}(b-a)$를 준다). 따라서 두 경우는 매끄럽게 이어진다.

검산

- $a = 0, b = 4, c = 1$일 때: $\mathrm{P}(X \le c) = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$이므로 두 번째 경우에 해당하고 $M = 4 - \sqrt{6} \approx 1.5505$이다. 평균은 $\frac{5}{3}$이다. 컴퓨터로 200 000개의 값을 모의실험(simulation)한 결과 표본 중앙값은 1.5505, 표본 평균은 1.668이었다.
- $a = 0, b = 4, c = 3$일 때: 첫 번째 경우에 해당하고 $M = \sqrt{6} \approx 2.449$이며, 이는 마땅히 그래야 하듯 앞의 예를 거울에 비춘 모습이다.

- 중앙값은 항상 최빈값(mode) c와 중점 $\frac{1}{2}(a+b)$ 사이에 있다. 예를 들어 첫 번째 경우 $M \leq c$이고, $c \geq \frac{1}{2}(a+b)$일 때 $(b-a)(c-a) \geq \frac{1}{2}(b-a)^2$이므로 $M \geq \frac{1}{2}(a+b)$이다.

흔한 실수

- 중앙값을 구할 때 밀도함수의 엉뚱한 조각을 사용하는 것: 먼저 중앙값이 c의 어느 쪽에 있는지 확인하라.
- 음의 제곱근을 취하는 것: 그러면 M이 $[a, b]$ 밖에 놓이게 된다.
- 평균의 적분을 평행이동 없이 x에 대하여 바로 전개하는 것: 답은 나오지만 계산이 훨씬 무거워지고 실수가 끼어든다.

STEP 너머

삼각분포(triangular distribution)는 c가 중점일 때 서로 독립(independent)인 두 균등(uniform) 확률변수의 합의 분포이며, 최솟값, 최댓값, 가장 가능성이 높은 값만 알려져 있을 때(프로젝트 계획에서처럼) 대략적인 모형으로 널리 쓰인다. 독립인 확률변수들의 합의 분포를 계산하다 보면 합성곱(convolution)에 이르게 되는데, 이것은 대학 1학년 확률론의 핵심 도구이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 이에 관해 읽기 좋은 책이다.

풀이

STEP II 2014, 문제 1

순수수학 • 삼각형의 기하와 이차식

STEP II 2014, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/14-s2-q1

핵심 아이디어

$A \to P \to Q \to B$의 지그재그 경로를 따라 A에서 B까지 걸어가 보자. 세 구간의 길이는 모두 x이고, 이들을 합하면 수평 방향으로 정확히 1만큼 나아가야 하며 알짜 높이 변화는 0이어야 한다. 수평 방향과 수직 방향으로 분해(resolving)하면 $x\cos\theta$와 $x\sin\theta$가 나오고, $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$을 쓰면 모르는 각이 사라진다. 그 뒤로는 모두 x에 대한 이차방정식(quadratic)과 그 판별식(discriminant)의 문제이다.

풀이

A를 원점에, B를 $(1,0)$에 두고, C는 AB 위쪽에 있게 하자. P는 A에서 C를 지나는 반직선 위에서 A로부터 거리 x인 점이고, Q는 B에서 C를 지나는 반직선 위에서 B로부터 거리 x인 점이므로

$$P = (x\cos\alpha,\ x\sin\alpha), \qquad Q = (1 - x\cos\beta,\ x\sin\beta).$$

소문항 (i)

수평 방향. $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{QB}$의 수평 성분은 각각 $x\cos\alpha$, $x\cos\theta$, $x\cos\beta$이고, 이들의 합은 $AB = 1$이다. 따라서

$$x\cos\theta = 1 - x\cos\alpha - x\cos\beta,$$

이고, 이것이 첫 번째 결과이다. (좌표로 말하면, 이는 Q와 P의 x좌표의 차이다.)

수직 방향. P의 높이는 $x\sin\alpha$이고 Q의 높이는 $x\sin\beta$이므로

$$x\sin\theta = x\sin\beta - x\sin\alpha.$$

(이 값은 결코 음수가 아니다. 삼각형의 각의 합은 180°보다 작으므로 $\alpha \le \beta < 180^\circ - \alpha$이고, 이 구간에서 $\sin\beta \ge \sin\alpha$이기 때문이다. 따라서 Q는 결코 P보다 낮지 않다.)

θ 소거하기. 두 식을 제곱하여 더하고 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$을 이용하면

$$x^2 = \big(1 - x(\cos\alpha + \cos\beta)\big)^2 + x^2(\sin\beta - \sin\alpha)^2.$$

우변을 전개하면 x^2의 계수는

$$\begin{aligned}(\cos\alpha + \cos\beta)^2 + (\sin\beta - \sin\alpha)^2 &= (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + (\cos^2\beta + \sin^2\beta) \\ &\quad + 2(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) \\ &= 2 + 2\cos(\alpha+\beta).\end{aligned}$$

따라서 $x^2 = 1 - 2(\cos\alpha + \cos\beta)x + \big(2 + 2\cos(\alpha+\beta)\big)x^2$이다. x^2을 우변으로 옮기면

$$\big(1 + 2\cos(\alpha+\beta)\big)x^2 - 2(\cos\alpha + \cos\beta)x + 1 = 0, \qquad (*)$$

이 되어, 원하는 식을 얻는다.

***P*와 *Q*가 변의 연장선 위에 있는 경우.** P가 AC의 연장선 위에 있더라도, 여전히 A에서 C를 지나는 반직선 위에 있고 A로부터 거리 x인 점이므로 좌표는 여전히 $(x\cos\alpha, x\sin\alpha)$이다. 마찬가지로 Q도 여전히 $(1 - x\cos\beta, x\sin\beta)$이다. 위의 유도에서는 이것 외에 아무것도 사용하지 않았다. P에서 Q로의 변위는

$$\big(1 - x\cos\alpha - x\cos\beta,\ x\sin\beta - x\sin\alpha\big),$$

이고, $PQ^2 = x^2$에서 정확히 같은 방정식 $(*)$를 얻는다. (이제 x는 AC와 BC보다 클 수 있고 $1 - x\cos\alpha - x\cos\beta$는 음수일 수 있으므로, θ는 둔각일 수 있다. 하지만 제곱하면 부호가 사라지므로 상관없다.)

소문항 (ii)

방정식 $(*)$가 일차식이 되는 것은 정확히 $1 + 2\cos(\alpha+\beta) = 0$, 즉 $\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{2}$일 때이다. $0 < \alpha + \beta < 180^\circ$이므로 가능한 경우는

$$\alpha + \beta = 120^\circ.$$

뿐이다.

그렇지 않으면 $(*)$는 진짜 이차방정식이고, 그 판별식의 4분의 1은

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{4}\Delta &= (\cos\alpha + \cos\beta)^2 - \big(1 + 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta\big) \\ &= \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 1 + 2\sin\alpha\sin\beta \\ &= 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta \\ &= 1 - (\sin\beta - \sin\alpha)^2,\end{aligned}$$

이다. 여기서 $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$와 $\cos^2\beta - 1 = -\sin^2\beta$를 이용했다.

> **?** **생각해 보기** $(\sin\beta - \sin\alpha)^2$이 1보다 작아야 하는 이유는 무엇인가?

두 각은 모두 $0°$보다 크고 $180°$보다 작으므로 $0 < \sin\alpha \le 1$이고 $0 < \sin\beta \le 1$이다. $(0,1]$에 속하는 두 수의 차는 -1보다 크고 1보다 작다. 따라서 $(\sin\beta - \sin\alpha)^2 < 1$이므로 $\Delta > 0$이고, $(*)$는 서로 다른 두 실근을 가진다.

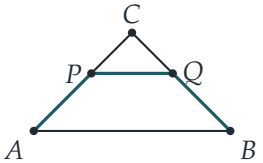
소문항 (iii)

(a) $\alpha = \beta = 45°$. 이때 $\cos(\alpha+\beta) = \cos 90° = 0$이고 $\cos\alpha + \cos\beta = \sqrt{2}$이므로 $(*)$는

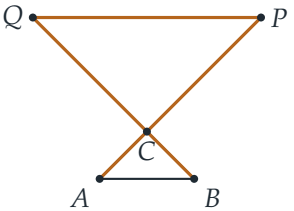
$$x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 1 = 0, \qquad x = \sqrt{2} \pm 1.$$

이다. 이 삼각형은 직각이등변삼각형이고, $C = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $AC = BC = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$이다.

- $x = \sqrt{2} - 1 \approx 0.414 < AC$: P와 Q는 변 위에 있고, $P = (1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$, $Q = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$이다. 대칭성에 의해 PQ는 AB와 평행하므로 $\theta = 0$이다. 검산: $PQ = \sqrt{2} - 1 = x$.
- $x = \sqrt{2} + 1 \approx 2.414 > AC$: P와 Q는 각각 AC의 연장선과 BC의 연장선 위에 있고, $P = (1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}})$, $Q = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}})$이다. 두 연장선은 C에서 서로 교차했으므로, 이제 P가 Q의 **오른쪽**에 있다. PQ는 이번에도 수평이고, 길이는 $1 + \sqrt{2} = x$이다.



$x = \sqrt{2} - 1$

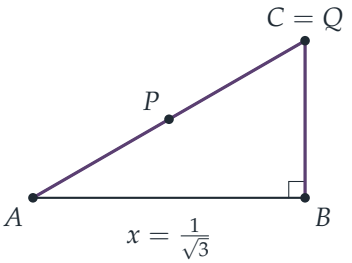


$x = \sqrt{2} + 1$

(b) $\alpha = 30°$, $\beta = 90°$. 이제 $\alpha + \beta = 120°$이므로, 이는 소문항 (ii)의 일차식인 경우이다. $\cos\alpha + \cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $(*)$는

$$-\sqrt{3}\,x + 1 = 0, \qquad x = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

가 된다. 이 삼각형은 B에서 직각이고, $BC = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $AC = \frac{2}{\sqrt{3}}$이다. 따라서 $QB = BC$는 Q가 **바로** C라는 뜻이고, $AP = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}AC$이므로 P는 AC의 중점이다. 그러면 $PQ = PC = \frac{1}{\sqrt{3}} = x$로, 마땅히 그래야 하는 대로이다. 가능한 경우는 이것뿐이다.



두 번째 근은 어디로 갔을까? $\alpha+\beta=120°$이면 직선 AC와 BC는 $60°$로 만난다. 그러면 x가 매우 클 때, 두 직선을 따라 멀리 나간 점 P와 Q 사이의 거리는 거의 정확히 x가 되어, C와 함께 거의 정삼각형을 이룬다. $\alpha+\beta\to 120°$일 때 이차방정식의 한 근은 무한대로 달아난다.

검산

- (a)에서 $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=1$이고, 이는 두 근의 곱 $1/(1+2\cos 90°)=1$과 일치한다.
- 임의의 삼각형, 예를 들어 $\alpha=40°$, $\beta=70°$에 대해 $(*)$를 풀고 P와 Q를 배치한 뒤 PQ를 재어 보면, 두 근 모두에 대해 그 값이 x와 같다. 우리는 여러 임의의 삼각형에 대해 약 10^{-10}의 정밀도로 이를 컴퓨터로 확인했다.
- (b)에서 $x=1/\sqrt{3}\approx 0.577$은 정확히 BC이고, AC의 중점은 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2\sqrt{3}})$로, $C=(1,\frac{1}{\sqrt{3}})$로부터의 거리가 $\frac{1}{\sqrt{3}}$이다.

흔한 실수

- $\cos\beta$ 항의 부호를 틀리는 것: $\overrightarrow{QB}$는 B**를 향해** 가므로, $+x\cos\beta$가 수평 성분이다. Q가 B의 왼쪽에 있더라도 마찬가지이다.
- 소문항 (ii)에서 $\alpha+\beta=240°$를 허용하는 것. 삼각형의 각의 합은 $180°$보다 작다.
- (b)에서 최고차항의 계수가 0인데 근의 공식을 쓰려 하거나, 해가 없다고 결론 내리는 것.

STEP 너머

닫힌 벡터 다각형을 성분으로 분해한 뒤 $\cos^2+\sin^2=1$로 각을 소거하는 것은 운동학(kinematics)과 링크 장치(linkage) 문제에서 쓰는 표준 기법이다. 우리의 지그재그는 간단한 3절 링크 장치이다. 이차방정식이 일차식이 될 때 "무한대로 달아나는" 근은 사영기

하학(projective geometry)을 처음 엿보게 해 준다. 사영기하학에서는 평행선이 무한원점에서 만나고, 이런 점까지 세면 이차방정식은 언제나 두 근을 가진다. 콕서터(Coxeter)와 Greitzer의 *Geometry Revisited*(기하학 다시 보기)는 이 수준에서 고전 기하학에 입문하기에 아주 좋은 책이다.

풀이

STEP II 2014, 문제 2

순수수학 • 적분 부등식

> **STEP II 2014, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/14-s2-q2

이 문제는 *Beyond STEP*의 3.7 절 $\pi^2 \leq 10$에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch03/wirtinger.html

핵심 아이디어

$(*)$의 양변은 구체적인 f가 주어지면 정확히 계산할 수 있는 적분(integral)이다. 따라서 양 끝에서 0이 되는 함수는 모두 $(*)$를 π가 들어간 수들 사이의 부등식(inequality)으로 바꾸어 준다. 실제로 정해야 할 것은 $f(0) = f(\pi) = 0$이 되도록 자유 상수를 고르는 일뿐이다. 끝점에서 0이 **되지 않는** 함수는 천천히 변하면서도 값이 클 수 있으며, 끝점 조건이 중요한 까닭이 바로 여기에 있다.

풀이

소문항 (i)

$f(x) = \sin nx$이면 $f'(x) = n\cos nx$이다. $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$와 $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$를 이용하면

$$\int_0^{\pi} \sin^2 nx\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\left[x - \tfrac{1}{2n}\sin 2nx\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2},$$
$$\int_0^{\pi} n^2\cos^2 nx\,\mathrm{d}x = \tfrac{n^2}{2}\left[x + \tfrac{1}{2n}\sin 2nx\right]_0^{\pi} = \frac{n^2\pi}{2},$$

이다. 정수 n에 대하여 $\sin 2n\pi = 0$이기 때문이다. $n \geq 1$이므로 $n^2 \geq 1$이고, 따라서 $\frac{\pi}{2} \leq \frac{n^2\pi}{2}$이 되어 $(*)$가 성립한다(등호는 정확히 $n = 1$일 때 성립한다).

반례(counterexample). $f(x) = \pi - x$를 생각하자. 이 함수는 $f(\pi) = 0$이지만 $f(0) =$

$\pi \neq 0$이다. 이때 $f'(x) = -1$이고

$$\int_0^\pi (\pi - x)^2 \,\mathrm{d}x = \left[-\tfrac{1}{3}(\pi - x)^3\right]_0^\pi = \frac{\pi^3}{3}, \qquad \int_0^\pi 1 \,\mathrm{d}x = \pi.$$

$\pi^2 > 3$이므로 $\frac{\pi^3}{3} > \pi$이고, 따라서 $(*)$는 성립하지 않는다. 마찬가지로 $f(x) = x$는 $f(0) = 0$이지만 $f(\pi) = \pi \neq 0$이며, 같은 두 적분값 $\frac{\pi^3}{3} > \pi$를 주므로 역시 $(*)$가 성립하지 않는다. 그러므로 한쪽 끝점 조건이 성립하더라도 다른 쪽 조건을 뺄 수는 없다.

소문항 (ii)

이차함수. $f(0) = c = 0$이고 $f(\pi) = a\pi^2 + b\pi = 0$이어야 하므로 $b = -a\pi$이고 $f(x) = ax(x - \pi)$이다. $a = 0$으로 잡으면 $f \equiv 0$이 되어 쓸모없는 부등식 $0 \leq 0$을 얻으므로 $a \neq 0$으로 잡는다. f에 a를 곱하면 $(*)$의 양변에 모두 a^2이 곱해지므로 $a = -1$로 잡아도 된다.

$$f(x) = x(\pi - x), \qquad f'(x) = \pi - 2x.$$

$x = \frac{\pi}{2} + u$로 치환하면 두 적분이 모두 대칭적인 꼴이 된다. 즉 $f = \frac{\pi^2}{4} - u^2$, $f' = -2u$이고 u는 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 위를 움직인다. $h = \frac{\pi}{2}$로 두면

$$\int_0^\pi f^2 \,\mathrm{d}x = \int_{-h}^{h} \left(h^2 - u^2\right)^2 \mathrm{d}u = 2\left(h^5 - \tfrac{2}{3}h^5 + \tfrac{1}{5}h^5\right) = \frac{16h^5}{15} = \frac{\pi^5}{30},$$
$$\int_0^\pi f'^2 \,\mathrm{d}x = \int_{-h}^{h} 4u^2 \,\mathrm{d}u = \frac{8h^3}{3} = \frac{\pi^3}{3}.$$

따라서 $(*)$로부터 $\dfrac{\pi^5}{30} \leq \dfrac{\pi^3}{3}$을 얻고, 양수 $\frac{\pi^3}{30}$으로 나누면

$$\pi^2 \leq 10,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

삼각함수. 이번에는 $f(0) = q + r$이고 $f(\pi) = p\sin\frac{\pi}{2} + q\cos\frac{\pi}{2} + r = p + r$이다. 두 값이 모두 0이 될 필요충분조건은 $p = q = -r$이다. 이번에도 $r = 0$이면 $f \equiv 0$이 되고, 상수배는 상관없으므로 $r = -1$로 잡는다.

$$f(x) = \sin\tfrac{1}{2}x + \cos\tfrac{1}{2}x - 1, \qquad f'(x) = \tfrac{1}{2}\left(\cos\tfrac{1}{2}x - \sin\tfrac{1}{2}x\right).$$

? **생각해 보기** 교차항이 어지럽게 늘어나지 않도록 f를 제곱하려면 어떻게 해야 할까?

$s = \sin\frac{1}{2}x$, $c = \cos\frac{1}{2}x$로 두고 f를 $(s + c) - 1$로 묶는다. 그러면 $(s + c)^2 = 1 + 2sc = 1 + \sin x$이므로

$$f^2 = (s + c)^2 - 2(s + c) + 1 = 2 + \sin x - 2\sin\tfrac{1}{2}x - 2\cos\tfrac{1}{2}x.$$

$\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = 2$, $\int_0^\pi \sin\frac{1}{2}x\,\mathrm{d}x = \left[-2\cos\frac{1}{2}x\right]_0^\pi = 2$, $\int_0^\pi \cos\frac{1}{2}x\,\mathrm{d}x = \left[2\sin\frac{1}{2}x\right]_0^\pi = 2$를 이용하면

$$\int_0^\pi f^2\,\mathrm{d}x = 2\pi + 2 - 4 - 4 = 2\pi - 6.$$

같은 방법으로 $(c-s)^2 = 1 - \sin x$이므로

$$\int_0^\pi f'^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^\pi (1-\sin x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi-2}{4}.$$

이제 $(*)$는 $2\pi - 6 \le \frac{1}{4}(\pi - 2)$, 즉 $8\pi - 24 \le \pi - 2$를 뜻하므로

$$7\pi \le 22, \qquad \text{즉} \qquad \pi \le \frac{22}{7}.$$

비교. 두 번째 부등식의 양변을 제곱하면(양변이 모두 양수이다)

$$\pi^2 \le \frac{484}{49} < \frac{490}{49} = 10.$$

따라서 삼각함수를 택한 쪽이 더 작은 상계(upper bound) $\pi^2 \le \frac{484}{49} \approx 9.878$을 주며, 그러므로 더 좋은 근삿값이다. 둘 다 상계이므로 더 작은 쪽이 참값에 더 가깝다.

검산

- 참값은 $\pi^2 \approx 9.8696$으로, 당연히 10과 $\frac{484}{49} \approx 9.8776$보다 모두 작다.
- 수치로 확인하면, 삼각함수 f에 대하여 $(*)$의 양변은 $2\pi - 6 \approx 0.2832$와 $\frac{1}{4}(\pi - 2) \approx 0.2854$로 매우 가깝다. 그래서 $\pi \le \frac{22}{7}$이라는 부등식이 이렇게 정밀한 것이다. 이차함수에 대해서는 양변이 $\frac{\pi^5}{30} \approx 10.20$과 $\frac{\pi^3}{3} \approx 10.34$이다.
- 소문항 (i)에서 $n = 1$일 때 등호가 성립하므로 $\sin x$는 $(*)$의 극단적인 경우이다. 삼각함수 f는 모양이 $\sin x$에 가깝고 $x(\pi - x)$는 그보다 조금 덜 가깝다. 이것이 어느 부등식이 더 좋은지를 설명해 준다.

흔한 실수

- $f = 1$처럼 두 끝점 조건을 모두 어기는 반례를 고르는 것. 이것도 올바른 반례이지만, $\pi - x$와 x는 각 조건이 따로따로 필요하다는 더 많은 사실을 보여 준다.
- 삼각함수의 경우 f^2을 적분할 때 $\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = 2$(0이 아니다)임을 잊는 것.
- 10이 더 "깔끔한" 수라서 더 좋은 근삿값이라고 말하는 것. 둘 다 상계이므로 더 작은 쪽이 이긴다.

STEP 너머

부등식 $(*)$는 비르팅거 부등식(Wirtinger's inequality)이며, 최선의 상수 1은 $\sin x$에서 나온다. 이 상수는 $f(0) = f(\pi) = 0$인 조건에서 $-f'' = \lambda f$의 가장 작은 고윳값(eigenvalue)이다. 골라 놓은 함수로 $(*)$를 시험해 보는 것은 레일리-리츠 방법(Rayleigh–Ritz method)으로, 이 방법은 언제나 그 고윳값의 상계를 주며 공학자들이 진동수를 추정하는 방법의 바탕이 된다. 푸리에 급수(Fourier series)를 쓰면 $(*)$ 자체를 깔끔하게 증명할 수 있다. 그 배경이 되는 해석학은 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를, 고윳값 쪽은 Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*(미분방정식 입문서)를 참고하라.

풀이

STEP II 2014, 문제 3

순수수학 • 접선과 포락선

> **STEP II 2014, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/14-s2-q3

핵심 아이디어

점 P에서의 접선(tangent)은 기울기(gradient)가 y'이고 y절편(y-intercept)이 $y - xy'$인 직선일 뿐이므로, 소문항 (i)을 이용하면 거리가 일정하다는 성질을 미분방정식(differential equation)으로 바꿀 수 있다. 이 방정식을 미분하면 인수 y''이 나타나고, 곱이 0이 되는 두 가지 경우에서 두 종류의 곡선, 즉 직선($y'' = 0$)과 원이 나온다. 소문항 (iii)은 이 조각들을 매끄럽게 이어 붙이라고 요구한다.

풀이

소문항 (i)

$m = 0$이면 직선은 $y = c$이고 거리는 분명히 c이므로, $m \neq 0$이라고 하자. 이 직선은 y축과 $A = (0, c)$에서 만나고, x축과 예각 θ를 이루며, 여기서 $\tan\theta = |m|$이다. O에서 직선에 내린 수선의 발(foot of the perpendicular)을 N이라 하자. 직각삼각형(right-angled triangle) ONA에서 직선과 y축이 A에서 이루는 각은 $\frac{\pi}{2} - \theta$이므로 각 AON은 θ이고,

$$ON = OA\cos\theta = \frac{c}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{c}{\sqrt{1+m^2}} = c(m^2+1)^{-\frac{1}{2}}.$$

(같은 값은 x에 대한 이차식(quadratic) $x^2 + (mx + c)^2$을 최소화해도 얻는다. 이 이차식은 $x = -\frac{mc}{1+m^2}$에서 최솟값 $\frac{c^2}{1+m^2}$을 가진다.)

$c < 0$이면 원점에 대하여 대칭이동(reflecting in the origin)하면 O로부터의 거리는 변하지 않은 채 직선이 $y = mx + |c|$로 바뀌므로, 일반적으로 거리는 $|c|(1+m^2)^{-\frac{1}{2}}$이다.

소문항 (ii)

$P = (x, y)$에서 접선은 기울기가 y'이고 P를 지나므로, 좌표 (X, Y)로 나타낸 방정식은

$$Y = y'X + (y - xy').$$

이것은 $m = y', c = y - xy'$인 소문항 (i) 꼴의 직선이다(가정에 의해 수직선이 아니다). 따라서 O로부터의 거리는

$$a = \frac{|y - xy'|}{\sqrt{1 + (y')^2}},$$

이고, 양변을 제곱하면

$$(y - xy')^2 = a^2(1 + (y')^2). \qquad (*)$$

미분하기. 여기서 a는 상수이고 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y - xy') = y' - y' - xy'' = -xy''$이다. 따라서 $(*)$를 미분하면

$$2(y - xy')(-xy'') = 2a^2y'y'', \qquad \text{즉,} \qquad y''\left[x(y - xy') + a^2y'\right] = 0.$$

> **생각해 보기** 곱이 0이라는 사실이 어떻게 곡선에 대한 두 개의 서로 다른 경우로 바뀌는가?

각 점에서 $y'' = 0$이거나 괄호 안이 0이다. 곡선에서 $y'' = 0$인 구간에서는 곡선이 직선이고, $y'' \neq 0$인 구간에서는 괄호 안이 0이어야 한다. 두 경우를 차례로 살펴본다. ($a > 0$이라고 가정한다. $a = 0$이면 모든 접선이 O를 지나고 C는 단순히 원점을 지나는 직선이다.)

경우 1: $y'' = 0$. 그러면 $y' = m$은 상수이고, 상수 m, k에 대하여 $y = mx + k$이다. $y - xy' = k$이므로 $(*)$에 대입하면 $k^2 = a^2(1 + m^2)$이고, 따라서

$$y = mx \pm a(1 + m^2)^{\frac{1}{2}}.$$

경우 2: 괄호 안이 0. 그러면 $xy - x^2y' + a^2y' = 0$이므로

$$(x^2 - a^2)\,y' = xy.$$

먼저 $x^2 \neq a^2$이다. $x = \pm a$이면 $xy = 0$에서 $y = 0$이어야 하고, $(*)$는 $a^2(y')^2 = a^2(1 + (y')^2)$이 되어 불가능하기 때문이다. 따라서 나눌 수 있다.

$$y' = \frac{xy}{x^2 - a^2}, \qquad y - xy' = \frac{y(x^2 - a^2) - x^2y}{x^2 - a^2} = \frac{-a^2y}{x^2 - a^2}.$$

둘 다 $(*)$에 대입하고 양변에 $(x^2 - a^2)^2/a^2$을 곱하면

$$\begin{aligned} a^2y^2 &= (x^2 - a^2)^2 + x^2y^2 \\ \iff \quad y^2(a^2 - x^2) &= (a^2 - x^2)^2 \\ \iff \quad (a^2 - x^2)\,(x^2 + y^2 - a^2) &= 0. \end{aligned}$$

$a^2 - x^2 \neq 0$이므로 $x^2 + y^2 = a^2$이다.

따라서 어떤 m에 대하여 $y = mx \pm a(1+m^2)^{\frac{1}{2}}$이거나 $x^2 + y^2 = a^2$이며, 이것이 보이려던 것이다. 두 곡선 모두 실제로 이 성질을 가진다. 직선들은 소문항 (i)에 의해 O로부터 거리가 a이고, 중심이 O이고 반지름이 a인 원의 모든 접선은 O로부터 거리가 a이다.

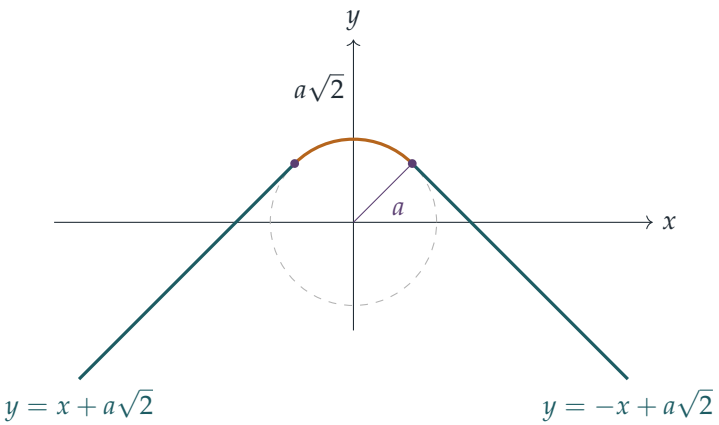
소문항 (iii)

직선 조각이 호(arc)와 만나는 점에서 C는 접선을 가져야 하므로, 그 점에서 직선의 기울기는 호의 기울기와 같아야 한다. 즉 각 직선은 호의 끝점에서 원에 그은 접선이다. 또 모든 접선은 수직선이 아니어야 하므로 호는 점 $(\pm a, 0)$에 닿으면 안 되고, C는 x에 대한 함수의 그래프이므로 원의 위쪽 절반만 또는 아래쪽 절반만 사용한다.

한 가지 예: $x^2 + y^2 = a^2$의 호 가운데 $\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$에서 위쪽을 지나 $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$까지 가는 호를 잡고, 양 끝에서의 접선으로 이어 붙인다.

$$y = \begin{cases} x + a\sqrt{2}, & x \leq -\frac{a}{\sqrt{2}}, \\ \sqrt{a^2 - x^2}, & |x| \leq \frac{a}{\sqrt{2}}, \\ -x + a\sqrt{2}, & x \geq \frac{a}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

두 직선은 경우 1의 요구대로 $m = \pm 1$이고 절편이 $a\sqrt{2} = a(1+m^2)^{\frac{1}{2}}$이다. $x = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}$에서 호의 기울기는 $-\frac{x}{y} = \mp 1$로 직선의 기울기와 일치하므로, 기울기는 모든 곳에서 연속(continuous)이고 유한하다.



$(\pm a, 0)$을 포함하지 않는 위쪽(또는 아래쪽) 반원(semicircle)의 임의의 호를 양 끝의 접선으로 이어 붙여도 같은 방식으로 성립한다.

검산

- 소문항 (i)에서 $m = 0$이면 거리는 c이고, $|m| \to \infty$이면 직선이 가팔라지면서 거리가 0으로 다가간다. $(0, c)$를 지나는 직선이므로 당연히 그래야 한다.
- 원 위에서 $y' = -x/y$이면 $y - xy' = a^2/y$이고, $(*)$의 양변은 모두 a^4/y^2이다.
- $a = 1$인 예에 대하여 $x = -5$와 $x = 5$ 사이의 1001개 점에서 O와 접선 사이의 거리를 컴퓨터로 확인했더니 매번 1이었다. 예를 들어 $x = 2$에서 접선은 $y = -x + \sqrt{2}$이고 거리는 $\sqrt{2}/\sqrt{2} = 1$이다.

흔한 실수

- 미분한 방정식을 y''으로 나누어 직선 해를 잃어버리는 것.
- a가 상수라는 것을 잊거나, xy'을 미분한 결과를 $y' + xy''$이 아니라 y'으로 쓰는 것.
- 소문항 (iii)에서 직선과 호를 꺾인 점으로 이어 붙이거나, 양 끝에서 접선이 수직인 반원 전체를 사용하는 것.

STEP 너머

여기서 원은 직선족 $y = mx \pm a\sqrt{1 + m^2}$의 **포락선**(envelope)이고, $(*)$는 클레로 방정식(Clairaut equation) $y = xy' + f(y')$이다. 이 방정식의 일반해(general solution)는 직선족이고, **특이해**(singular solution)는 그 포락선이다. $(*)$를 y'에 대한 이차방정식으로 보면 판별식(discriminant)은 $4a^2(x^2 + y^2 - a^2)$이므로, 두 가지 기울기 선택은 정확히 원 위에서 하나로 합쳐진다. 그래서 소문항 (iii)에서처럼 그곳에서 해들을 이어 붙일 수 있으며, 해의 유일성(uniqueness)이 성립하지 않는다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 1계 방정식의 해의 존재성과 유일성을 다룬다.

풀이

STEP II 2014, 문제 4

순수수학 • 치환적분

> **STEP II 2014, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/14-s2-q4

핵심 아이디어

치환(substitution) $u = 1/x$는 구간 $[1/b, b]$의 양 끝을 서로 맞바꾸므로, 적분 I를 같은 범위에서의 적분으로 다시 바꾸어 놓는다. 새로운 피적분함수(integrand)가 원래 피적분함수의 부호만 바뀐 것이라면 $I = -I$를 얻는다. 원래 것과 밀접하게 관련된 함수라면, I의 두 표현을 더했을 때 훨씬 적분하기 쉬운 피적분함수를 얻을 수 있다. 마지막 소문항에서는 $[0, \infty)$가 자기 자신으로 옮겨지도록 $u = a^2/x$로 같은 기법을 쓰면, 구하려는 적분에 대한 방정식을 얻게 되고 이를 풀면 된다.

풀이

소문항 (i)

이 적분을 I라 하자. $x = 1/u$로 놓으면 $\mathrm{d}x = -\frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u$이고 $\ln x = -\ln u$이다. $x = 1/b$일 때 $u = b$이고, $x = b$일 때 $u = 1/b$이다. 또한

$$(a^2 + x^2)(a^2x^2 + 1) = \left(a^2 + \frac{1}{u^2}\right)\left(\frac{a^2}{u^2} + 1\right) = \frac{(a^2u^2 + 1)(a^2 + u^2)}{u^4}.$$

따라서

$$\begin{aligned} I &= \int_b^{1/b} \frac{\frac{1}{u}\,(-\ln u)}{(a^2u^2 + 1)(a^2 + u^2)/u^4}\left(-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u \\ &= \int_b^{1/b} \frac{u \ln u}{(a^2 + u^2)(a^2u^2 + 1)}\,\mathrm{d}u = -\int_{1/b}^{b} \frac{u \ln u}{(a^2 + u^2)(a^2u^2 + 1)}\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

마지막 적분은 더미 변수(dummy variable)의 이름만 바꾼 I 그 자체이다. 따라서 $I = -I$이고, 이로부터 요구한 대로 $I = 0$을 얻는다. ($b > 0$이므로 피적분함수는 $[1/b, b]$에서 연속이고, 따라서 I는 유한한 값이며 이 단계는 타당하다.)

소문항 (ii)

이 적분을 I라 하자. 같은 치환을 하면 $\frac{\mathrm{d}x}{x} = u \cdot \left(-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u = -\frac{\mathrm{d}u}{u}$이고, 적분 구간의 끝은 앞에서와 마찬가지로 서로 바뀐다.

$$I = \int_b^{1/b} \arctan\left(\frac{1}{u}\right)\left(-\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u = \int_{1/b}^{b} \frac{\arctan(1/u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$

이번에는 부호가 단순히 뒤집히지 않으므로, 이 표현을 원래 표현에 더한다.

$$2I = \int_{1/b}^{b} \frac{\arctan u + \arctan(1/u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$

생각해 보기 $u > 0$일 때 $\arctan u + \arctan(1/u)$의 값은 무엇인가?

$u > 0$에 대하여 $\theta = \arctan u$라 하면 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이고 $\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cot\theta = 1/u$이다. $\frac{\pi}{2} - \theta$ 또한 $(0, \frac{\pi}{2})$에 속하므로, 이것은 $\arctan(1/u)$이다. 따라서 모든 $u > 0$에 대하여 $\arctan u + \arctan(1/u) = \frac{\pi}{2}$이다. ($u < 0$이면 합은 $-\frac{\pi}{2}$이지만, $[1/b, b]$의 모든 u는 양수이다.) 그러므로

$$2I = \frac{\pi}{2}\int_{1/b}^{b} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{\pi}{2}\big(\ln b - \ln(1/b)\big) = \pi \ln b,$$

이므로 요구한 대로 $I = \dfrac{\pi \ln b}{2}$이다. 이 결과는 $b > 1$이든 $0 < b < 1$이든 성립한다.

소문항 (iii)

$J = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(a^2 + x^2)^2}$라 하자. 피적분함수가 연속이고 x가 클 때 $1/x^4$ 이하이므로, 이 적분은 수렴(converge)한다. $(0, \infty)$를 자기 자신으로 옮기면서 $a^2 + x^2$를 $a^2 + u^2$의 상수배로 바꾸는 치환을 원하므로, $u = a^2/x$, 즉 $k = a^2$으로 잡는다. 그러면 $x = a^2/u$, $\mathrm{d}x = -\frac{a^2}{u^2}\,\mathrm{d}u$이고, $x \to 0^+$은 $u \to \infty$에 대응하며,

$$a^2 + x^2 = a^2 + \frac{a^4}{u^2} = \frac{a^2(u^2 + a^2)}{u^2}.$$

따라서

$$J = \int_{\infty}^{0} \frac{u^4}{a^4(a^2 + u^2)^2}\left(-\frac{a^2}{u^2}\right)\mathrm{d}u = \frac{1}{a^2}\int_0^{\infty} \frac{u^2}{(a^2 + u^2)^2}\,\mathrm{d}u.$$

이제 분자를 $u^2 = (a^2 + u^2) - a^2$으로 쓰면

$$\frac{u^2}{(a^2 + u^2)^2} = \frac{1}{a^2 + u^2} - \frac{a^2}{(a^2 + u^2)^2}.$$

두 부분 모두 $(0, \infty)$에서의 적분이 수렴하므로 적분을 나눌 수 있다. 주어진 결과를 이용하면

$$J = \frac{1}{a^2}\left(\frac{\pi}{2a} - a^2 J\right) = \frac{\pi}{2a^3} - J.$$

그러므로 $2J = \dfrac{\pi}{2a^3}$이고, 요구한 대로

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^2} = \frac{\pi}{4a^3},$$

이다.

검산

- (ii)에서 $b = 1$이면 길이가 0인 구간이 되며, 실제로 $\frac{\pi}{2}\ln 1 = 0$이다. b를 $1/b$로 바꾸면 적분 구간의 끝이 서로 바뀌므로 적분의 부호가 바뀌어야 하고, $\ln(1/b) = -\ln b$가 이와 일치한다.
- (iii)에서 답은 올바르게 스케일되어야 한다. $x = at$로 놓으면 $J = a^{-3}\int_0^\infty (1+t^2)^{-2}\,\mathrm{d}t$이므로, J는 a^{-3}의 상수배여야 한다. $a = 1$일 때 치환 $x = \tan\theta$를 하면 $\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4}$가 되어 결과와 일치한다.
- 수치적으로, $b = 2$일 때 (ii)의 적분은 $1.08879\ldots = \frac{\pi}{2}\ln 2$이다. (i)의 적분은 a와 b를 무작위로 여러 번 골라도 (소수점 아래 여러 자리까지) 0으로 계산된다.

흔한 실수

- $u = 1/x$가 적분 구간의 끝도 뒤바꾼다는 것을 잊는 실수. $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u/u^2$에서 나오는 음의 부호와 적분 구간의 끝이 바뀌는 것을 모두 추적해야 한다.
- $\arctan u + \arctan(1/u) = \frac{\pi}{2}$를 쓰면서 이것이 $u > 0$일 때만 성립한다는 것을 밝히지 않는 실수.
- (iii)에서 $\frac{1}{a^2}\int_0^\infty \frac{u^2}{(a^2+u^2)^2}\,\mathrm{d}u$를 얻은 뒤, 이것을 J와 주어진 적분으로 다시 쓸 수 있다는 것을 알아채지 못하고 멈추는 실수.

STEP 너머

정의역의 대칭성을 이용하여 적분을 그 자신과 연결하는 것은 흔히 쓰이는 기법이다. 이 기법은 복소 경로적분(contour integration)이나 $\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\,\mathrm{d}x$ 같은 적분에서 다시 등장한다. (iii)의 적분들은 또한 어떤 일반적인 적분족에서 나온다. $\int_0^\infty (\lambda+x^2)^{-1}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\lambda^{-1/2}$를 λ에 대하여 미분하면 같은 답을 곧바로 얻는다("적분 기호 아래에서의 미분(differentiation under the integral sign)"). 이와 같은 단계와 이상적분(improper integral)을 다루는 방법이 언제 허용되는지는 실해석학(real analysis) 강의에서 설명한다. Bartle and Sherbert, *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)를 참고하라.

풀이

STEP II 2014, 문제 5

순수수학 • 동차 미분방정식

STEP II 2014, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/14-s2-q5

핵심 아이디어

두 방정식 모두 우변이 일차식의 비이다. (i)에서는 모든 항의 차수가 1이므로 기울기가 y/x에만 의존하고, $y = xu$로 놓으면 방정식이 변수분리형(separable) 방정식으로 바뀐다. (ii)에서는 상수항 때문에 이 방법이 바로 통하지 않지만, 분자와 분모의 두 직선이 만나는 점으로 원점을 옮기면 상수항을 없앨 수 있다. 그러고 나면 (i)과 똑같은 문제가 된다.

풀이

$y = xu$이면 곱의 미분법(product rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

소문항 (i)

우변의 분자와 분모를 x로 나누면 방정식은 다음과 같이 된다.

$$u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{2u+1}{u-2}, \qquad \text{따라서} \qquad x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{2u+1-u(u-2)}{u-2} = \frac{1+4u-u^2}{u-2}.$$

변수를 분리하면

$$\int \frac{u-2}{1+4u-u^2}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

생각해 보기 부분분수(partial fractions)를 쓰지 않고 좌변을 어떻게 적분할 수 있을까?

분모를 미분해 보자. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(1+4u-u^2) = 4-2u = -2(u-2)$이다. 따라서 분자는 분모의 도함수(derivative)의 $-\frac{1}{2}$배이고,

$$-\tfrac{1}{2}\ln\left|1+4u-u^2\right| = \ln|x| + C.$$

양변에 -2를 곱하고 지수를 취하면 양의 상수 A에 대하여 $x^2\left|1+4u-u^2\right| = A$, 즉 어떤 상수 K에 대하여 $x^2(1+4u-u^2) = K$이다(곡선을 따라 부호는 일정하다). 이제 $u = y/x$를 대입하면 $x^2(1+4y/x-y^2/x^2) = x^2+4xy-y^2$이므로

$$x^2+4xy-y^2 = K.$$

$(1,1)$에서 $K = 1+4-1 = 4$이므로 해곡선(solution curve)은

$$\boxed{x^2+4xy-y^2 = 4}$$

이다. ($(1,1)$에서 $u=1$이고, 이때 $1+4u-u^2 = 4 \neq 0$, $u \neq 2$이므로 우리가 나눈 식 중 시작점에서 0이 되는 것은 없다.)

소문항 (ii)

두 직선 $x-2y-4=0$과 $2x+y-3=0$은 $y = 3-2x$이고 $x-2(3-2x)-4=0$인 곳, 즉 $(2,-1)$에서 만난다. 따라서 $a=2$, $b=-1$로 잡아 $x = X+2$, $y = Y-1$로 놓는다. 그러면 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = \mathrm{d}Y/\mathrm{d}X$이고

$$x-2y-4 = (X+2)-2(Y-1)-4 = X-2Y,$$
$$2x+y-3 = 2(X+2)+(Y-1)-3 = 2X+Y,$$

이므로 상수항이 사라진다.

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{X-2Y}{2X+Y}.$$

이는 (i)과 같은 꼴이므로 $Y = XV$로 놓는다.

$$V+X\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}X} = \frac{1-2V}{2+V} \quad\Longrightarrow\quad X\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}X} = \frac{1-2V-V(2+V)}{2+V} = \frac{1-4V-V^2}{2+V}.$$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}V}(1-4V-V^2) = -2(2+V)$이므로 이번에도 분자는 분모의 도함수의 상수배이다. 따라서

$$\int \frac{2+V}{1-4V-V^2}\,\mathrm{d}V = \int \frac{1}{X}\,\mathrm{d}X \quad\Longrightarrow\quad -\tfrac{1}{2}\ln\left|1-4V-V^2\right| = \ln|X| + C,$$

이고, 앞에서와 같이 $X^2(1-4V-V^2) = K$, 즉

$$X^2-4XY-Y^2 = K.$$

점 $(1,1)$은 $X=-1, Y=2$에 대응하므로 $K=1-4(-1)(2)-4=5$이다. x와 y로 되돌리면

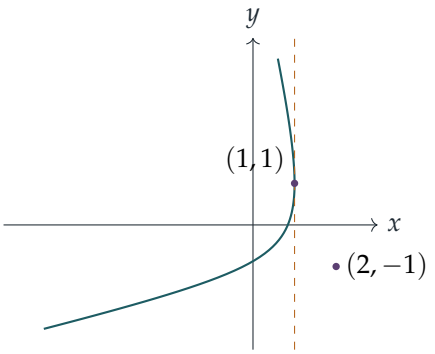
$$(x-2)^2-4(x-2)(y+1)-(y+1)^2=5,$$

이고, 전개하면

$$\begin{aligned}&(x^2-4x+4)-4(xy+x-2y-2)-(y^2+2y+1)=5\\ \iff\quad &\boxed{x^2-4xy-y^2-8x+6y+6=0}\end{aligned}$$

생각해 보기 $(1,1)$에서 분모 $2x+y-3$은 0이다. 그래도 이 해가 의미가 있을까?

그렇다. 그 점에서 기울기가 무한대이므로 곡선은 $(1,1)$에서 수직 접선(vertical tangent)을 가진다. 음함수(implicit) 방정식은 곡선을 완벽하게 잘 나타낸다. 다만 그 점을 지나는 함수 $y(x)$의 그래프가 아닐 뿐이다. 달리 말하면 x가 y의 매끄러운 함수이다. x에 대한 이차방정식을 풀면 $(1,1)$을 지나는 가지(branch)에서 $x=2y+4-\sqrt{5y^2+10y+10}$이고, $5y^2+10y+10=5(y+1)^2+5>0$이므로 이 식은 모든 y에 대하여 정의되며, $y=1$에서 최댓값 $x=1$을 가진다.



그림은 $(1,1)$을 지나는 가지(청록색)가 그 점에서 수직선 $x=1$(점선)에 접하는 모습을 보여 준다. $(2,-1)$은 쌍곡선(hyperbola)의 중심이다.

검산

- 답을 음함수 미분한다. (i)에서 $2x+4y+(4x-2y)y'=0$으로부터 $y'=\dfrac{x+2y}{y-2x}$를 얻으므로 조건에 맞는다. (ii)에서 $2x-4y-8+(6-4x-2y)y'=0$으로부터 $y'=\dfrac{x-2y-4}{2x+y-3}$을 얻는다.
- 두 곡선 모두 $(1,1)$을 지난다. $1+4-1=4$이고 $1-4-1-8+6+6=0$이다.

- 컴퓨터로 각 미분방정식(differential equation)을 $(1,1)$에서부터 수치적으로 한 걸음씩 풀어 나갔을 때, 상자 안 방정식들의 좌변은 약 10^{-13}의 오차 내에서 각각 4와 0으로 유지되었다. (i)에서 $(1,1)$에서의 기울기는 -3이다.

흔한 실수

- $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = u + x\,\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$에서 u를 빠뜨려 잘못된 변수분리형 방정식을 얻는 것.
- (ii)에서 조건을 잘못된 좌표계에서 적용하는 것. 점 $(1,1)$은 $(1,1)$이 아니라 $(X,Y) = (-1,2)$가 된다.
- u에 대해 부분분수를 쓰려고 하는 것. $1 + 4u - u^2$의 근은 $2 \pm \sqrt{5}$여서 계산이 지저분해지는 반면, 피적분함수는 이미 f'/f 꼴이다.

STEP 너머

우변이 y/x에만 의존하는 방정식을 동차(homogeneous) 방정식이라 하고, (ii)에서처럼 원점을 옮기는 것은 일차함수의 비에 대한 표준적인 기법이다. 여기 나온 두 방정식은 완전(exact) 방정식이기도 하다. (i)을 $(2y + x)\,\mathrm{d}x - (y - 2x)\,\mathrm{d}y = 0$으로 쓰면 두 계수가 교차 편미분 판정법을 만족하고, 보존량 $x^2 + 4xy - y^2$를 바로 읽어 낼 수 있다. 완전 방정식, 적분인자(integrating factor), 선형계의 상 초상(phase portrait)(쌍곡선들의 진짜 정체가 바로 이것이다)은 Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에서 다룬다.

풀이

STEP II 2014, 문제 6

순수수학 • 삼각급수

> **STEP II 2014, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/14-s2-q6

핵심 아이디어

각 $\cos rx$에 $2\sin\frac{1}{2}x$를 곱하면 두 사인의 차가 되므로, 합을 구할 때 중간 항들이 연쇄적으로 소거된다(telescope). 이 합은 정확히 $S_n'(x)$이고, 바로 그 때문에 이 항등식이 주어져 있다. 이 항등식은 S_n이 어디에서 정류점(stationary point)을 갖는지 알려 준다. 그런 점에서 새로 더해지는 항 $\frac{1}{n}\sin nx$는 음이 아님이 밝혀진다. 따라서 이 항을 더해도 음의 최솟값이 생길 수 없고, $S_1 = \sin x$에서 시작하는 귀납법(induction)으로 증명이 마무리된다.

풀이

코사인 합

곱을 합차로 바꾸는 공식(factor formula) $\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$에 $A = (r+\frac{1}{2})x$, $B = (r-\frac{1}{2})x$를 대입하면

$$\sin(r+\tfrac{1}{2})x - \sin(r-\tfrac{1}{2})x = 2\cos rx\,\sin\tfrac{1}{2}x.$$

이 식을 $r = 1$부터 n까지 더하면, 우변들의 합은 $2\sin\frac{1}{2}x\,(\cos x + \cdots + \cos nx)$가 되고, 좌변에서는 첫 항과 마지막 항을 제외한 모든 항이 소거된다.

$$2\sin\tfrac{1}{2}x\sum_{r=1}^{n}\cos rx = \sin(n+\tfrac{1}{2})x - \sin\tfrac{1}{2}x.$$

양변을 $2\sin\frac{1}{2}x \neq 0$으로 나누면 구하는 결과를 얻는다. 한편 항별로 미분하면

$$S_n'(x) = \sum_{r=1}^{n}\cos rx,$$

이므로, 이 항등식은 S_n'의 닫힌 형태(closed form)임에 주목하자.

소문항 (i)

여기서 $S_2(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$이므로

$$S_2'(x) = \cos x + \cos 2x = 2\cos^2 x + \cos x - 1 = (2\cos x - 1)(\cos x + 1).$$

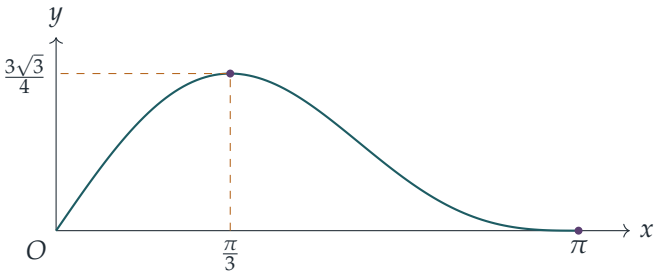
$[0, \pi]$에서 이 식의 값은 $\cos x = \frac{1}{2}$, 즉 $x = \frac{\pi}{3}$일 때와 $\cos x = -1$, 즉 $x = \pi$일 때 0이 된다. 이때의 함숫값은

$$S_2(\tfrac{\pi}{3}) = \tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2} = \tfrac{3\sqrt{3}}{4}, \qquad S_2(\pi) = 0.$$

$\cos x + 1 \geq 0$이므로 S_2'의 부호는 $2\cos x - 1$의 부호와 같다. 즉 $[0, \frac{\pi}{3})$에서 양수이고 $(\frac{\pi}{3}, \pi)$에서 음수이다. 따라서 $x = \frac{\pi}{3}$에서 최댓값(maximum)을 가지며, S_2는 그곳부터 감소하여 $x = \pi$에서 0에 도달하는데, 도달할 때의 기울기는 0이다. π 근처에서 $x = \pi - t$로 두면

$$S_2 = \sin t - \tfrac{1}{2}\sin 2t \approx \left(t - \tfrac{t^3}{6}\right) - \left(t - \tfrac{4t^3}{6}\right) = \tfrac{1}{2}t^3,$$

이므로 곡선은 축에 닿을 때 삼차함수처럼 평평해진다. 또한 $S_2(0) = 0$이고 $S_2'(0) = 2$이다.



소문항 (ii)

$0 < x_0 < \pi$에서 $S_n'(x_0) = 0$이라 하자. 그러면 $\sin\frac{1}{2}x_0 \neq 0$이므로 항등식을 적용할 수 있고, $\sin(n + \frac{1}{2})x_0 = \sin\frac{1}{2}x_0$을 얻는다. 좌변을 전개하면

$$\sin nx_0 \cos\tfrac{1}{2}x_0 + \cos nx_0 \sin\tfrac{1}{2}x_0 = \sin\tfrac{1}{2}x_0 \iff \sin nx_0 \cos\tfrac{1}{2}x_0 = (1 - \cos nx_0)\sin\tfrac{1}{2}x_0.$$

$0 < \frac{1}{2}x_0 < \frac{\pi}{2}$이므로 $\cos\frac{1}{2}x_0 > 0$이고, 양변을 이것으로 나누면

$$\sin nx_0 = (1 - \cos nx_0)\tan\tfrac{1}{2}x_0,$$

이 되어 요구된 식을 얻는다. 따라서 $n \geq 2$일 때

$$S_n(x_0) - S_{n-1}(x_0) = \frac{1}{n}\sin nx_0 = \frac{1}{n}(1 - \cos nx_0)\tan\tfrac{1}{2}x_0 \geq 0,$$

이다. $1 - \cos nx_0 \geq 0$이고 $\tan\frac{1}{2}x_0 > 0$이기 때문이다. 그러므로 $S_n(x_0) \geq S_{n-1}(x_0)$이다.

이제 모든 $x \in (0, \pi)$에 대해 $S_{n-1}(x) > 0$이라 하고, 모순을 이끌어 내기 위해 어떤 $c \in (0, \pi)$에 대해 $S_n(c) \leq 0$이라고 가정하자.

생각해 보기 사용할 정류점이 존재한다는 것을 어떻게 알 수 있을까?

S_n은 닫힌구간 $[0, \pi]$에서 연속(continuous)이므로 이 구간에서 최솟값 m을 가지며, $m \leq S_n(c) \leq 0$이다. $m < 0$이면 $S_n(0) = S_n(\pi) = 0$이므로 최솟값은 끝점에서 나타나지 않는다. $m = 0$이면 c 자체가 최솟값을 갖는 내부의 점이다. 어느 경우든 $S_n(x_0) = m \leq 0$인 $x_0 \in (0, \pi)$가 존재하고, S_n은 미분가능하므로 내부에서의 최솟점은 정류점이다. 즉 $S_n'(x_0) = 0$이다. 그러면 앞의 결과로부터

$$0 \geq S_n(x_0) \geq S_{n-1}(x_0) > 0,$$

이 되어 모순이다. 따라서 모든 $x \in (0, \pi)$에 대해 $S_n(x) > 0$이다.

소문항 (iii)

$0 < x < \pi$에서 $S_n(x) > 0$임을 귀납법으로 증명한다. $n = 1$일 때 $S_1(x) = \sin x > 0$은 $(0, \pi)$에서 성립한다. S_{n-1}에 대해 성립하면, 소문항 (ii)에 의해 S_n에 대해서도 성립한다. 따라서 모든 $n \geq 1$에 대해 성립한다. 끝점에서는 모든 항 $\frac{1}{r}\sin rx$가 0이므로 $S_n(0) = S_n(\pi) = 0$이다. 그러므로 모든 $n \geq 1$과 $0 \leq x \leq \pi$에 대해 $S_n(x) \geq 0$이다.

검산

- 코사인 합에 $n = 1$을 대입하면 $\dfrac{\sin \frac{3}{2}x - \sin \frac{1}{2}x}{2 \sin \frac{1}{2}x}$는 $\cos x$가 되어야 하는데, 곱을 합차로 바꾸는 공식에 의해 실제로 그렇다.
- 소문항 (i)은 항등식과 일치한다. $S_2' = 0$은 $\sin \frac{5}{2}x = \sin \frac{1}{2}x$를 뜻하고, $(0, \pi]$에서 이 방정식의 해는 $x = \frac{\pi}{3}$과 $x = \pi$이다.
- 최댓값 $\frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1.299$는 촘촘한 격자 위에서 S_2를 직접 계산한 값과 일치한다. 컴퓨터로 확인한 결과, $2 \leq n \leq 40$에 대해 $(0, \pi)$에서 S_n의 모든 정류점을 찾아 각 점에서 소문항 (ii)의 항등식과 $S_n(x_0) \geq S_{n-1}(x_0)$이 성립함을 확인했고, $n \leq 60$에 대해 구간 내부에서 $S_n > 0$임도 확인했다.

흔한 실수

- "모든 곳에서 $S_n \geq S_{n-1}$"이라고 논증하는 것. 이는 거짓이다(예를 들어 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$에서 $\sin 2x < 0$이다). 이 부등식은 S_n의 정류점에서만 성립하며, 그래서 최솟값을 이용한 논증이 필요하다.
- 최솟값의 위치를 찾을 때 끝점을 잊는 것. 양수가 아닌 최솟값이 구간 내부에 있음을 보이려면 반드시 $S_n(0) = S_n(\pi) = 0$을 사용해야 한다.

► $\cos \frac{1}{2}x_0$이 왜 양수인지 밝히지 않고 이것으로 나누는 것.

STEP 너머

소문항 (iii)의 결과는 페예르–잭슨–그론월 부등식(Fejér–Jackson–Gronwall inequality)이다. $n \to \infty$일 때 $S_n(x)$는 $(0, \pi]$에서 $\frac{1}{2}(\pi - x)$로 수렴한다(converge). $\sum \frac{1}{r} \sin rx$는 톱니파의 푸리에 급수(Fourier series)이며, $x = 0$ 근처에서 부분합은 목표값을 넘어선다(깁스 현상(Gibbs phenomenon)). 푸리에 급수, 그리고 그것이 언제 수렴하는가라는 미묘한 문제는 대학의 첫 해석학 과목이나 수리 방법론 과목의 핵심 주제이다. T. W. Körner의 *Fourier Analysis*(푸리에 해석)는 폭넓은 내용을 다룬 훌륭한 책이다.

풀이

STEP II 2014, 문제 7

순수수학 • 절댓값 함수의 그래프

STEP II 2014, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/14-s2-q7

핵심 아이디어

절댓값 함수(modulus function)들의 합은 구간별 일차함수(piecewise linear)이다. 즉 절댓값 기호 안의 식 중 하나가 0이 되는 점에서만 기울기(gradient)가 바뀐다. 따라서 $|x-a|+|x-b|$의 그래프는 a와 b 사이에 평평한 바닥이 있고 기울기가 ± 2인 벽이 양옆에 선 "욕조" 모양이다. 그러면 뒤에 나오는 방정식들의 해의 개수를 세는 일은 기울기를 비교하는 문제로 바뀐다. 기울기가 2인 그래프는 기울기가 1인 그래프를 언제나 따라잡고, 기울기가 같은 두 그래프는 일치하거나 결코 만나지 않는다.

풀이

이하에서는 $f(x)=|x-a|+|x-b|$로 둔다. 단, $a<b$이다.

소문항 (i)

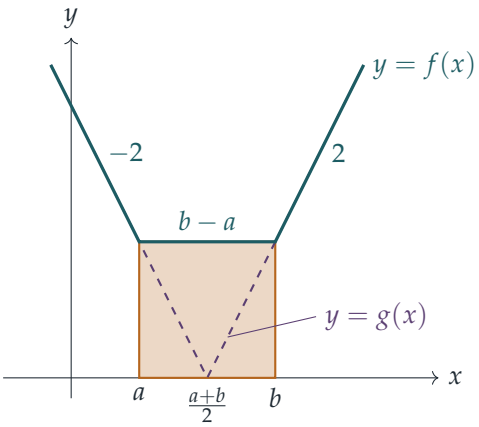
구간별로 절댓값 기호를 없애면 다음과 같다.

$$f(x)=\begin{cases} a+b-2x, & x\le a,\\ b-a, & a\le x\le b,\\ 2x-a-b, & x\ge b. \end{cases}$$

따라서 기울기는 -2 (구간 $x<a$), 0 (구간 $a<x<b$), 2 (구간 $x>b$)이다. 그래프는 연속(continuous)이며, $[a,b]$ 위에서 높이 $b-a$인 평평한 바닥을 가진다.

$g(x)=|2x-a-b|=2|x-\frac{a+b}{2}|$의 그래프는 꼭짓점(vertex)이 $\left(\frac{a+b}{2},0\right)$이고 기울기가 ± 2인 V자 모양이다. $x\ge b$이면 $2x-a-b\ge b-a>0$이므로 $g(x)=2x-a-b=f(x)$이고, 마찬가지로 $g(x)=a+b-2x=f(x)$ (단, $x\le a$)이다. 따라서 두 그래프는 (a,b)

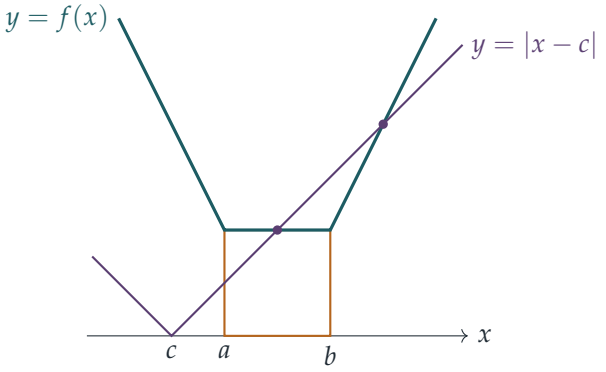
바깥에서 일치한다. 그 안쪽에서 g는 0까지 내려가지만 f는 $b-a$에 머문다. (사실 $f(x)=\max\{b-a,\, g(x)\}$이다.)



이 사각형(quadrilateral)의 꼭짓점은 $(a,0)$, $(b,0)$, $(b,b-a)$, $(a,b-a)$이다. 여기서 $f(a)=f(b)=b-a$를 이용했다. 밑변의 길이는 $b-a$이고 세로 변들의 길이도 $b-a$이며, 모든 각이 직각이다. 따라서 이것은 한 변의 길이가 $b-a$인 **정사각형**(square)이다. 또한 $g(a)=g(b)=b-a$이므로, g의 V자는 정사각형 밑변의 중점에서 출발해 위쪽 두 꼭짓점을 지난다는 점에도 주목하자.

소문항 (ii)

이제 $y=f(x)$를 $y=|x-c|$와 비교하자. 후자는 꼭짓점 $(c,0)$이 축 위에 있고 양팔의 기울기가 ±1인 V자이다. 핵심은 f가 언제나 $b-a>0$ 이상이고, 그 벽(기울기 ±2)이 V자의 팔보다 가파르다는 사실이다. 그림은 $c<a$인 경우로, V자가 욕조를 두 번 자른다.



$a<c<b$인 경우: 해가 없다. $[a,b]$에서 거리 $|x-c|$는 기껏해야 $\max\{c-a,\, b-c\}<$

$b-a=f(x)$이므로, V자는 욕조 바닥보다 엄격하게 아래에 있다. $x \geq b$이면

$$f(x)-|x-c| = (2x-a-b)-(x-c) = x-b+(c-a) \geq c-a > 0,$$

이고, $x \leq a$인 경우도 같은 논증(또는 아래의 대칭성)으로 처리된다. 따라서 V자는 완전히 욕조 안에 놓이고, 해는 없다.

$c=a$ 또는 $c=b$인 경우: 해가 하나이다. $c=a$라 하자. $[a,b]$에서 $|x-a| = x-a \leq b-a$이고, 등호는 $x=b$일 때만 성립한다. $x>b$이면 $f(x)-(x-a) = x-b > 0$이고, $x<a$이면 $f(x)-(a-x) = b-x > 0$이다. 따라서 유일한 해는 $x=b$이다. V자의 오른팔이 정사각형의 위쪽 꼭짓점 $(b, b-a)$를 정확히 지나는 것이다. 마찬가지로 $c=b$이면 유일한 해는 $x=a$이다.

$c<a$인 경우: 해가 둘이다. 왼팔 $y=c-x$는 $x \leq c < a$인 범위에 있고, 여기서 f의 기울기는 -2이다. $x=c$에서 $f(c) > 0 = c-c$이고, 왼쪽으로 갈수록 f가 팔보다 빠르게 올라가므로 모든 $x \leq c$에 대해 $f(x) > c-x$이다. 왼팔에서는 해가 생기지 않는다.

오른팔 $y=x-c$ $(x \geq c)$에 대해서는 $k(x) = f(x)-(x-c)$라 하자. f의 기울기에서 1을 빼면, k의 기울기는 (c,a)에서 -3, (a,b)에서 -1, $x>b$에서 $+1$이다. 따라서 k는 $[c,b]$에서 순감소(strictly decreasing)하고 $[b,\infty)$에서 순증가한다. 또한

$$k(c) = f(c) > 0, \qquad k(b) = (b-a)-(b-c) = c-a < 0, \qquad k(x) \to \infty, \text{ 단} x \to \infty.$$

따라서 k는 (c,b)에서 정확히 하나, (b,∞)에서 정확히 하나의 영점을 가진다. 구체적으로 이 해들은

$$x = a+b-c \quad \text{그리고} \quad x = \begin{cases} b-a+c, & 2a-b \leq c < a, \\ \frac{1}{3}(a+b+c), & c < 2a-b, \end{cases}$$

이며, 두 번째 해는 각각 욕조의 바닥 또는 왼쪽 벽과 만나는 점이다.

$c>b$인 경우: 해가 둘이다. 대칭(reflection) $x \mapsto a+b-x$는 직선 $x=\frac{a+b}{2}$에 대한 대칭으로, f를 바꾸지 않으며($|x-a|$와 $|x-b|$를 서로 맞바꾸므로) $|x-c|$를 $|x-c'|$로 보낸다. 여기서 $c' = a+b-c < a$이다. 따라서 이 경우는 앞의 경우를 거울에 비춘 것이다.

정리하면, 해의 개수는 0 ($a<c<b$일 때), 1 ($c=a$ 또는 $c=b$일 때), 2 ($c<a$ 또는 $c>b$일 때)이다.

소문항 (iii)

$F(x) = |x-c|+|x-d|$라 하자. 소문항 (i)에 의해 F는 두 번째 욕조로, $[c,d]$ 위에서 높이 $d-c$인 바닥과 기울기 ± 2인 벽을 가진다. $d-c < b-a$이므로 그 바닥은 f의 바닥보다 낮고 좁다. 두 바닥의 중점을

$$m = \tfrac{1}{2}(a+b), \qquad n = \tfrac{1}{2}(c+d)$$

로 쓰고, $h(x) = f(x) - F(x)$라 하자.

아주 왼쪽($x \le \min\{a, c\}$)에서는 두 그래프가 모두 왼쪽 벽 위에 있으므로 $h(x) = (a + b - 2x) - (c + d - 2x) = 2(m - n)$이다. 아주 오른쪽($x \ge \max\{b, d\}$)에서는 $h(x) = 2(n - m)$이다. 그 사이에서 h는 연속인 구간별 일차함수이다.

생각해 보기 두 그래프가 선분 하나를 통째로 공유해서 해가 무수히 많아질 수 있을까?

그것은 기울기가 같은 곳에서만 가능하다. 두 바닥은 모두 평평하지만 높이 $b - a \neq d - c$가 서로 다르므로 겹칠 수 없다. 그 밖에 기울기가 같은 것은 두 그래프가 모두 왼쪽 벽 위에 있을 때($x < \min\{a, c\}$)나 모두 오른쪽 벽 위에 있을 때($x > \max\{b, d\}$)뿐이고, 거기서 $h = \pm 2(m - n)$이다. 따라서 두 그래프가 선분을 공유하는 것은 정확히 $m = n$일 때이다.

$a + b = c + d$인 경우: 해가 무수히 많다. 이때 $h = 0$이 $x \le \min\{a, c\}$와 $x \ge \max\{b, d\}$에서 성립한다. $d - c < b - a$이고 중점이 같으므로 $a < c < d < b$이다. 즉 작은 욕조가 큰 욕조의 한가운데에 놓인다. $c \le x \le b$에서 F의 그래프는 바닥이나 오른쪽 벽 위에 있으므로 $F(x) \le 2b - c - d = b - a = f(x)$이고, 등호는 $x = b$일 때만 성립한다. 대칭성에 의해 $[a, d]$에서도 마찬가지이다. 따라서 해집합은 정확히 $x \le a$인 부분과 $x \ge b$인 부분을 합친 것이다.

$a + b < c + d$인 경우: 해가 정확히 하나이다. 이때 아주 왼쪽에서 $h = 2(m - n) < 0$이고 아주 오른쪽에서 $h = 2(n - m) > 0$이다. h는 어디에서 감소할 수 있을까? f의 기울기가 F의 기울기보다 작아야 한다. 가능한 경우는 두 가지이다.

- f는 왼쪽 벽 위에 있는데 F는 그렇지 않은 경우로, $c < x < a$이어야 한다. 그러면 $c < a$이고, $d - c < b - a$이므로 $d < b$이기도 하여 $c + d < a + b$가 되는데, 이는 지금의 경우에 맞지 않는다.
- f는 바닥 위에, F는 오른쪽 벽 위에 있는 경우로, $d < x < b$이어야 한다.

따라서 h는 $(-\infty, d]$에서 감소하지 않는다. $[d, \infty)$에서는, h가 $[d, b]$에서 증가하지 않고($d < b$인 경우) 그다음 $x \ge \max\{b, d\}$에서 $2(n - m)$으로 일정하다. 따라서 모든 $x \ge d$에 대해 $h(x) \ge 2(n - m) > 0$이다. $(-\infty, d]$에서 h는 값 $2(m - n) < 0$에서 $h(d) > 0$까지 감소하지 않고 올라가며, (위 상자의 논의에 의해) 값이 영인 구간에서 일정할 수 없다. 따라서 h는 거기서 정확히 하나의 영점을 가진다. 그러므로 전체적으로 해는 정확히 하나이다.

$a + b > c + d$인 경우: 해가 정확히 하나이다. 대칭 $x \mapsto -x$를 쓰면 된다. 이 변환은 a, b, c, d를 $-b, -a, -d, -c$로 바꾸고 두 합 사이의 부등식 방향을 뒤집는다.

정리하면, $a < b$, $c < d$, $d - c < b - a$일 때, $a + b = c + d$이면(두 구간의 중점이 같으면) 해가 무수히 많으며, 바로 모든 $x \le a$와 모든 $x \ge b$가 해이다. 그 밖의 경우에는 해가 정확히 하나이다.

검산

- 소문항 (ii)에서 $a = 1, b = 3, c = 0$으로 두면, 해 $x = a + b - c = 4$와 $x = b - a + c = 2$에 대해 $|3| + |1| = 4, 1 + 1 = 2$가 되어 조건을 만족한다. $c = -5$이면 두 번째 해는 $\frac{1}{3}(1 + 3 - 5) = -\frac{1}{3}$이고, 실제로 $\frac{4}{3} + \frac{10}{3} = \frac{14}{3} = |-\frac{1}{3} + 5|$이다.
- 소문항 (iii)에서 $a = 0, b = 10, c = 6, d = 7$로 두면, h는 아주 왼쪽에서 -3이고 $[6, 7]$에서 9까지 올라갔다가 다시 3으로 내려가 그대로 머문다. 유일한 영점은 $x = \frac{3}{2}$이며, 여기서 양변이 모두 10이다.
- a, b, c, d에 정수를 무작위로 수만 번 택해 컴퓨터로 확인한 결과, 모든 경우에 해의 개수가 위와 정확히 일치했다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)에서 V자가 정사각형의 꼭짓점에 딱 닿는 경계의 경우 $c = a$와 $c = b$를 빠뜨린다.
- 소문항 (iii)에서 h가 단조(monotonic)라고 가정한다. 그렇지 않다. 작은 욕조가 큰 욕조 안에서 한가운데를 벗어나 있으면 h는 (d, b)에서 감소한다. 그래도 해의 개수가 맞는 것은 h가 그곳에서 이미 양수이기 때문이다.
- 소문항 (iii)에서 중점이 일치할 때 해가 무수히 많아지는 경우를 놓친다.

STEP 너머

함수 $|x - a| + |x - b|$는 x에서 두 점까지의 거리의 합이다. 이런 거리의 합을 최소화하는 것은 통계학의 중앙값(median)과 ℓ^1 노름(norm, "택시 거리" 노름)의 바탕에 있는 아이디어이다. f와 같은 함수는 볼록(convex)하며, 여기서 쓴 '조각마다 기울기가 커진다'는 논증은 볼록 해석(convex analysis)의 출발점이다. 볼록 해석은 선형계획법(linear programming)과 최적화(optimisation)의 토대가 된다. Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석 입문)는 여기서 쓴 연속성과 단조성 논증을 엄밀하게 다룬다.

풀이

STEP II 2014, 문제 8

순수수학 • 가장 큰 이항계수

> **STEP II 2014, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/14-s2-q8

핵심 아이디어

양수 항으로 이루어진 수열(sequence)이 어디에서 최댓값을 갖는지 찾으려면 각 항을 다음 항과 비교한다. 즉 비(ratio) c_{r+1}/c_r를 살펴본다. 이항전개(binomial expansion)에서는 이 비가 r에 대한 간단한 분수이고 꾸준히 감소하므로, 비가 1보다 큰 동안에는 계수(coefficient)가 커지고 1보다 작아지면 계수가 작아진다. 가장 큰 계수는 비가 1을 지나는 곳에 있으며, 이후의 모든 소문항은 한 식의 정수 부분(integer part)을 읽어 내는 문제가 된다.

풀이

계수와 그 비

이항정리(binomial theorem)에 의해

$$c_r = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r, \qquad 0 \le r \le n.$$

$a, b > 0$이므로 이 값들은 모두 양수이다. $0 \le r \le n-1$에 대하여

$$\frac{c_{r+1}}{c_r} = \frac{\binom{n}{r+1}}{\binom{n}{r}} \cdot \frac{b}{a} = \frac{(n-r)\,b}{(r+1)\,a},$$

이다. 여기서 $\binom{n}{r+1} = \binom{n}{r}\frac{n-r}{r+1}$을 이용하였다. 이제

$$L = \frac{b(n+1)}{a+b}.$$

이라 하자. $(r+1)a > 0$이므로

$$c_{r+1} \geq c_r \iff (n-r)b \geq (r+1)a \iff nb - a \geq r(a+b)$$
$$\iff r \leq \frac{nb-a}{a+b} = \frac{b(n+1)}{a+b} - 1 = L - 1,$$

이고, 모든 단계에서 부등호 대신 $=$를 써도 같은 동치 관계가 성립한다. 따라서

$$c_{r+1} > c_r, \text{ 단} r < L-1, \qquad c_{r+1} = c_r, \text{ 단} r = L-1, \qquad c_{r+1} < c_r, \text{ 단} r > L-1. \quad (*)$$

m의 범위

상한. $m = 0$이면 $L > 0$이므로 $m \leq L$이다. $m \geq 1$이면 c_m이 가장 크므로 $c_m \geq c_{m-1}$이고, $r = m-1$로 두고 $(*)$를 적용하면 $m - 1 \leq L - 1$, 즉 $m \leq L$을 얻는다.

하한. $m = n$이면 ($\frac{b}{a+b} < 1$이므로) $L < n+1$이고, 따라서 $m \geq L-1$이다. $m \leq n-1$이면 $c_m \geq c_{m+1}$이고, $r = m$으로 두고 $(*)$를 적용하면 $m \geq L-1$이어야 한다.

그러므로 모든 경우에

$$\frac{b(n+1)}{a+b} - 1 \leq m \leq \frac{b(n+1)}{a+b},$$

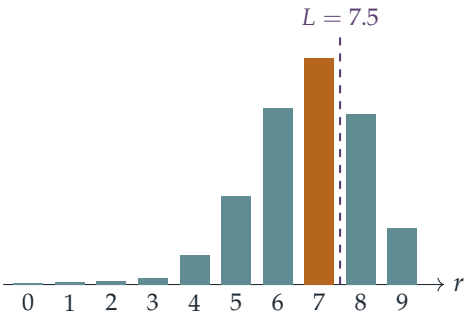
이 성립하며, 이것이 증명하려던 것이다.

> **생각해 보기** 왜 m의 값이 세 개일 수 없고, 서로 이웃하지 않은 두 값일 수도 없을까?

구간 $[L-1, L]$의 길이는 1이다. L이 정수가 아니면 이 구간에는 정수가 정확히 하나, 즉 $\lfloor L \rfloor$만 들어 있으므로 m은 유일하다. L이 정수이면 이 구간에는 연속한 두 정수 $L-1$과 L이 정확히 들어 있으므로 m은 이 둘 중 하나이다. (실제로 $r = L-1$로 두고 $(*)$를 적용하면 $c_{L-1} = c_L$이므로 두 값 모두 정말로 가장 크다.) 어느 경우든 유일한 값 또는 두 값 중 큰 값은

$$G(n,a,b) = \left\lfloor \frac{b(n+1)}{a+b} \right\rfloor.$$

이다. 이제부터는 이 공식만 있으면 된다.



$(1+3x)^9$의 계수를 비율에 맞게 그린 그림: $r < L - 1 = 6.5$인 동안 커지다가 그 뒤로 작아지며, $r = 7$에서 최대가 된다.

소문항 (i)

$(n,a,b) = (9,1,3)$이면 $L = \frac{3\times 10}{4} = 7.5$이므로 $G(9,1,3) = 7$이다.

$(n,a,b) = (9,2,3)$이면 $L = \frac{3\times 10}{5} = 6$으로 정수이므로, 가장 큰 계수가 $r = 5$와 $r = 6$ 모두에서 나타나고 $G(9,2,3) = 6$이다. (확인: $c_5 = 126 \cdot 2^4 \cdot 3^5 = 489\,888 = 84 \cdot 2^3 \cdot 3^6 = c_6$.)

소문항 (ii)

$a = b$이면 $L = \frac{n+1}{2}$이다.

- $n = 2k$: $L = k + \frac{1}{2}$이므로 $G(2k,a,a) = k$이다(가운데 계수 하나뿐이다).
- $n = 2k-1$: $L = k$로 정수이므로 가운데의 두 계수 $r = k-1$과 $r = k$가 같고, $G(2k-1,a,a) = k$이다.

이는 파스칼의 삼각형(Pascal's triangle)의 각 행이 갖는 대칭성과 일치한다.

소문항 (iii)

n과 b를 고정하면 $L = \frac{b(n+1)}{a+b}$는 a에 대한 감소함수(decreasing function)이므로 $\lfloor L \rfloor$는 a에 대하여 증가하지 않는 함수이다. 따라서 양의 정수 범위에서는 $a = 1$일 때 가장 크며, 이때 $G(n,1,b) = \left\lfloor \frac{b(n+1)}{b+1} \right\rfloor$이다. (다른 a 값이 같은 값을 줄 수는 있지만, 더 큰 값을 주지는 않는다.)

소문항 (iv)

이제

$$\frac{b(n+1)}{b+1} = (n+1) - \frac{n+1}{b+1}.$$

이다. $\frac{n+1}{b+1} > 0$이므로 이 값은 $n+1$보다 작고, 따라서 $G(n,1,b) \le n$이다. (이는 $m \le n$에서도 나온다.) 또한

$$G(n,1,b) = n \iff (n+1) - \frac{n+1}{b+1} \ge n \iff \frac{n+1}{b+1} \le 1 \iff b \ge n.$$

따라서 $G(n,1,b)$의 최댓값은 n이고, 이 값은 정확히 $b \ge n$일 때 얻어진다. $b = n$이면 $c_{n-1} = n \cdot b^{n-1} = b^n = c_n$이므로 마지막 두 계수가 같고, $b > n$이면 마지막 계수 b^n이 유일하게 가장 크다.

검산

- $(1+3x)^9$의 계수는 $1, 27, 324, 2268, 10206, 30618, 61236, 78732, 59049, 19683$이다. (i)에서 구한 대로 가장 큰 값은 $r = 7$에 있다.
- $(1+x)^4$ $(n = 2k,\ k = 2)$의 계수 $1, 4, 6, 4, 1$은 $r = 2 = k$에서 최대이다. $(1+x)^3$ $(k = 2)$의 계수는 $1, 3, 3, 1$로, $r = 1, 2$에서 같고 그중 큰 값은 $2 = k$이다.
- (iv)에서 $n = 3$일 때: $(1+2x)^3$의 계수는 $1, 6, 12, 8$로 $r = 2$에서 최대이고, $(1+3x)^3$의 계수는 $1, 9, 27, 27$이므로 $b = 3$이 되면 $G = 3$에 도달한다.
- $n < 30$, $a, b < 15$인 모든 경우에 대하여 컴퓨터로 $G(n, a, b) = \lfloor b(n+1)/(a+b) \rfloor$를 확인한 결과 모두 일치하였다.

흔한 실수

- 범위를 증명할 때 양 끝의 경우 $m = 0$과 $m = n$을 빠뜨리는 것: 비교할 c_{-1}이나 c_{n+1}이 없다.
- L이 정수일 때 같은 두 값 중 작은 쪽을 택하는 것: G는 큰 쪽으로 정의되므로 $G(9, 2, 3) = 6$이지 5가 아니다.
- (iv)에서 $b = n$만 답하는 것: $b \geq n$인 모든 b가 $G = n$을 준다.

STEP 너머

여기서 쓴 비 판정, 즉 연속한 항을 비교하는 방법은 급수(series)의 수렴(convergence)에 대한 비판정법(ratio test)과 같은 아이디어이며, $p = \frac{b}{a+b}$인 이항분포(binomial distribution) $\mathrm{B}(n, p)$의 최빈값(mode)을 찾아 준다. 최빈값은 $\lfloor (n+1)p \rfloor$이다. 이항계수처럼 항이 커지다가 작아지는 수열을 단봉(unimodal) 수열이라 하며, 이를 증명하는 데에는 보통 로그 오목성(log-concavity) $(c_r^2 \geq c_{r-1}c_{r+1})$을 이용한다. 확률 쪽 내용은 Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)을 참고하라.

풀이

STEP II 2014, 문제 9

역학 • 강체의 평형

> **STEP II 2014, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/14-s2-q9

핵심 아이디어

미지의 힘은 세 개(장력(tension), 수직항력(normal reaction), A에서의 마찰력(friction))이고, 방정식도 세 개이다. 수평 방향으로 분해하고, 수직 방향으로 분해하고, 모멘트(moment)를 잡는다. 모서리 A에 대한 모멘트를 잡는 것이 영리한 선택이다. 벽에서 작용하는 두 접촉력이 모두 그 점에 작용하므로 식에서 사라지고, 장력과 무게를 잇는 방정식 하나만 남기 때문이다. 이 식을 얻고 나면, 마찰력의 방향은 줄 혼자서 떠받치는 양이 무게보다 큰지 작은지의 문제일 뿐이다.

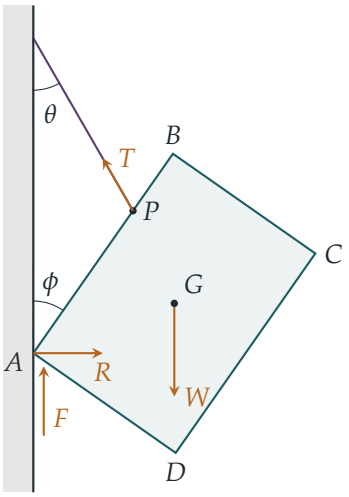
풀이

박판(lamina)을 무게가 W이고 무게중심(centre of mass) G가 직사각형의 중심에 있는 균일한 강체(rigid body)로 모형화하고, 줄은 가볍고 늘어나지 않는다고 하여 장력 T가 줄 전체에서 같다고 한다. A에서 벽은 수직항력 R(수평 방향, 벽에서 멀어지는 쪽)와 마찰력 F(수직 방향)를 작용한다. F는 위쪽을 양의 방향으로 잡으므로, F가 음수이면 실제로 마찰력이 아래쪽으로 작용한다는 뜻이다.

A를 원점으로 하고, x축은 벽에서 멀어지는 수평 방향, y축은 연직 위쪽으로 좌표축을 잡는다. 변 AB는 연직 위쪽 방향과 각 ϕ를 이루므로, AB 방향의 단위벡터는 $(\sin\phi, \cos\phi)$이다. 변 AD는 이에 수직이고 벽에서 멀어지는 쪽을 향하므로, 그 단위벡터는 $(\cos\phi, -\sin\phi)$이다. 따라서

$$G = b(\sin\phi, \cos\phi) + a(\cos\phi, -\sin\phi), \qquad P = d(\sin\phi, \cos\phi),$$

이다. 여기서 P는 줄이 붙어 있는 점이다. 줄은 P에서 위로 벽까지 연직 아래쪽 방향과 각 θ를 이루며 뻗어 있으므로, 박판에 작용하는 장력은 $T(-\sin\theta, \cos\theta)$이다.



소문항 (i)

수평 방향과 수직 방향으로 힘을 분해하면

$$R = T\sin\theta,$$
$$F + T\cos\theta = W.$$

이다. A에 대한 모멘트에서는 R과 F가 아무 기여도 하지 않는다. 점 (x, y)에 작용하는 힘 (f_x, f_y)의 반시계 방향 모멘트는 $xf_y - yf_x$이다. P에 작용하는 장력의 경우 이 값은

$$d\sin\phi \cdot T\cos\theta - d\cos\phi \cdot (-T\sin\theta) = Td\sin(\theta+\phi),$$

이고, G에 작용하는 무게 $(0, -W)$의 경우 $-W(a\cos\phi + b\sin\phi)$이다. 따라서

$$Td\sin(\theta+\phi) = W(a\cos\phi + b\sin\phi). \tag{1}$$

이다. 양 $a\cos\phi + b\sin\phi$는 바로 G와 벽 사이의 수평 거리이며, 이를 이용하면 무게의 모멘트를 빠르게 알 수 있다.

마찰력이 위쪽으로 작용하는 극한 평형(limiting equilibrium)에서는 $F = \mu R = \mu T\sin\theta$이므로, 수직 방향 방정식은

$$T(\cos\theta + \mu\sin\theta) = W.$$

가 된다. 이 W를 (1)에 대입하고 T(줄이 팽팽하므로 양수이다)로 약분하면

$$d\sin(\theta+\phi) = (\cos\theta + \mu\sin\theta)(a\cos\phi + b\sin\phi),$$

을 얻고, 이것이 바로 $(*)$이다.

소문항 (ii)

마찰력이 극한 상태이면서 아래쪽으로 작용하면 $F = -\mu R = -\mu T \sin\theta$이고, 수직 방향 방정식은 $T(\cos\theta - \mu\sin\theta) = W$이다. 다른 것은 아무것도 바뀌지 않으므로 $(*)$는

$$d\sin(\theta+\phi) = (\cos\theta - \mu\sin\theta)(a\cos\phi + b\sin\phi);$$

가 된다. 즉, μ가 $-\mu$로 바뀐다.

소문항 (iii)

이제 마찰력이 극한 상태라고 가정하지 않는다. 방정식 (1)은 어떤 평형 상태에서도 성립하며,

$$T = \frac{W(a\cos\phi + b\sin\phi)}{d\sin(\theta+\phi)},$$

를 준다. 또한 θ와 ϕ가 모두 예각이므로 $\sin(\theta+\phi) > 0$이다. 그러면 수직 방향 방정식에서

$$F = W - T\cos\theta = W\left(1 - \frac{\cos\theta\,(a\cos\phi + b\sin\phi)}{d\sin(\theta+\phi)}\right).$$

를 얻는다.

? **생각해 보기** "$F > 0$"을 탄젠트만 들어간 조건으로 어떻게 바꿀 수 있을까?

마찰력은 정확히 $F > 0$일 때 위쪽으로 작용한다. $d\sin(\theta+\phi) > 0$이므로 이는

$$d\sin(\theta+\phi) > \cos\theta\,(a\cos\phi + b\sin\phi),$$

일 때와 같다. $\sin(\theta+\phi) = \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi$로 전개하고 양변을 $\cos\theta\cos\phi$로 나눈다. 두 각이 모두 예각이므로 이 값은 양수이고, 따라서 부등식(inequality)의 방향은 바뀌지 않는다.

$$d(\tan\theta + \tan\phi) > a + b\tan\phi.$$

$\tan\theta + \tan\phi > 0$이므로, 필요충분조건(necessary and sufficient condition)은

$$d > \frac{a + b\tan\phi}{\tan\theta + \tan\phi}.$$

이다. (d가 이 값과 같으면 마찰력이 전혀 없고, d가 이보다 작으면 마찰력은 아래쪽으로 작용한다.)

물리적으로 줄은 변 AB에 붙어 있으므로 $d \le 2b$이다. 조건이 성립하면

$$\frac{a + b\tan\phi}{\tan\theta + \tan\phi} < d \le 2b,$$

이므로 $a + b\tan\phi < 2b\tan\theta + 2b\tan\phi$, 즉 $a < b(2\tan\theta + \tan\phi)$이다. 대우(contrapositive)를 취하면, $b(2\tan\theta + \tan\phi) < a$일 때 줄이 붙을 수 있는 어떤 위치에서도 마찰력이 위쪽으로 작용하지 않으므로 조건을 만족할 수 없다. 이로써 증명이 끝난다.

검산

- $\mu = 0$이면 벽이 매끄럽고, $(*)$와 그 소문항 (ii) 형태는 마땅히 그래야 하듯이 일치한다. 둘 다 소문항 (iii)의 경계 경우인 $d\sin(\theta+\phi) = \cos\theta\,(a\cos\phi + b\sin\phi)$로 귀결된다.
- AB가 연직인 박판($\phi \to 0$): 경계 조건은 $d\tan\theta = a$가 된다. 이는 줄의 작용선(line of action)이 G를 지나는 연직선, 즉 벽에서 수평 거리 a만큼 떨어진 직선을 지난다는 뜻이다. 그러면 줄과 무게만으로 균형을 이룰 수 있고, 벽은 수평 방향으로 밀기만 한다.
- 수치적으로 $a = 1, b = 1.5, \theta = 30^\circ, \phi = 40^\circ$일 때, 임계값은 $d \approx (1 + 1.259)/(0.577 + 0.839) \approx 1.595 < 3 = 2b$이다. 모멘트를 A 대신 G에 대해 잡아 세 평형 방정식을 직접 풀면, 이 값보다 조금 클 때 $F > 0$, 조금 작을 때 $F < 0$이 나온다. 수천 개의 무작위 배치를 컴퓨터로 검사하여 $(*)$, 그 소문항 (ii) 형태, 그리고 (iii)의 조건을 확인하였다.

흔한 실수

- P나 G에 대한 모멘트를 잡는 것: 풀리기는 하지만 모멘트 방정식에 R과 F가 들어와 계산이 훨씬 지저분해진다.
- G의 위치를 잘못 잡는 것: D는 벽에서 먼 쪽에 있으므로 AD는 $(\cos\phi, -\sin\phi)$ 방향을 향하고, G는 벽에서 수평 거리 $a\cos\phi + b\sin\phi$만큼 떨어져 있다.
- 마지막 소문항에서 제약 조건 $d \le 2b$를 잊는 것: AB의 길이가 들어오는 곳은 이곳뿐이다.

STEP 너머

이것은 작은 정역학적으로 결정된(statically determinate) 문제이다. 미지의 힘이 세 개이고, 평면 위 강체의 독립적인 평형 방정식도 세 개이다. 공학자들은 무엇보다 먼저 이 개수를 확인한다. 지지점이 더 많으면 정역학만으로는 힘을 구할 수 없고, 물체가 어떻게 변형되는지를 알아야 한다. 미지의 힘들이 작용하는 점에 대해 모멘트를 잡는 요령은 토크(torque)의 원점을 영리하게 고르는 방법의 평면 버전이다. 더 알고 싶다면 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 보라.

풀이

STEP II 2014, 문제 10

역학 • 궤적의 포락선

> **STEP II 2014, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/14-s2-q10

이 문제는 *Beyond STEP*의 11.9 절 **안전 포물선**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch11/safety-parabola.html

핵심 아이디어

시간을 소거하고 나면, $\sec^2\theta = 1 + \lambda^2$이므로 궤적(trajectory)의 방정식은 $\lambda = \tan\theta$에 대한 **이차식**(*quadratic*)이 된다. 점 (x, y)를 하나 고정하고, 어떤 발사각이 이 점을 지나는지 묻자. 이는 λ에 대한 이 이차방정식이 실근을 갖는지 묻는 것과 같으므로, 판별식(discriminant)이 도달 가능한 영역의 경계를 알려 준다. 마지막 부분에서는 이 경계 곡선이 O를 초점(focus)으로 하는 포물선(parabola)임이 밝혀지며, 덕분에 O로부터의 거리를 아주 쉽게 계산할 수 있다.

풀이

궤적

포사체(projectile)를 공기 저항(air resistance) 없이 중력만 받아 자유롭게 움직이는 입자로 모형화한다. 시간 t가 지난 뒤

$$x = ut\cos\theta, \qquad y = ut\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

(각이 직각보다 작으므로) $\cos\theta \neq 0$이고, 따라서 $t = x/(u\cos\theta)$이다. 이를 대입하면

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\theta}.$$

$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta = 1 + \lambda^2$을 이용하면 직교좌표 방정식(Cartesian equation)은

$$\boxed{y = \lambda x - \frac{gx^2}{2u^2}\left(1 + \lambda^2\right).}$$

주어진 x 위에서의 최대 높이 Y

u를 고정하고 $x > 0$도 고정한다. 이제 y는 λ만의 함수이며, 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\frac{gx^2}{2u^2}\lambda^2 - x\lambda + \left(\frac{gx^2}{2u^2} + y\right) = 0.$$

생각해 보기 왜 이것을 y가 아니라 λ에 대한 방정식으로 보는가?

어떤 값 y가 이 x 위에서 나타나는 것은 정확히 그 값을 만드는 발사각이 존재할 때, 즉 이 이차방정식이 실근 λ를 가질 때이다. 따라서 판별식은 음이 아니어야 한다.

$$x^2 - 4 \cdot \frac{gx^2}{2u^2}\left(\frac{gx^2}{2u^2} + y\right) \geq 0.$$

$x^2 > 0$으로 나눈 뒤 $u^2/(2g) > 0$을 곱하면(부등호의 방향은 바뀌지 않는다)

$$\frac{u^2}{2g} \geq \frac{gx^2}{2u^2} + y \iff y \leq \frac{u^2}{2g} - \frac{gx^2}{2u^2}.$$

따라서

$$\boxed{Y = \frac{u^2}{2g} - \frac{gx^2}{2u^2}}$$

이고, 어떤 궤적도 이 x 위에서 Y보다 높이 올라가지 않는다.

또한 $\lambda > 0$인 실제 발사각으로 Y **이하의** 모든 값에 도달할 수 있음도 보여야 한다. λ의 함수로서 y는 위로 볼록한(아래로 열린) 이차함수이다. 꼭짓점은 $\lambda_0 = u^2/(gx) > 0$에 있고, 여기서 $y = Y$이다(대입하여 확인해 보라). $\lambda \geq \lambda_0$에서 y는 연속이고 감소하며, $\lambda \to \infty$일 때 $y \to -\infty$이다. 따라서 연속성(continuity)에 의해 모든 값 $y \leq Y$는 어떤 $\lambda \geq \lambda_0 > 0$에서, 즉 어떤 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$에서 얻어진다. 그러므로 요구한 대로 y의 값 전체는 구간 $y \leq Y$ 전체를 이룬다. ($x = 0$에서는 수직으로 위로 던져야 한다. 이때 y는 0부터 $u^2/(2g)$까지 변하며, 이는 다시 $Y(0)$이다.)

어느 방향으로든 발사할 수 있다면 $x < 0$인 경우는 대칭인 상황이고, Y는 x^2에만 의존하므로 같은 공식이 성립한다.

그래프와 도달 가능한 영역

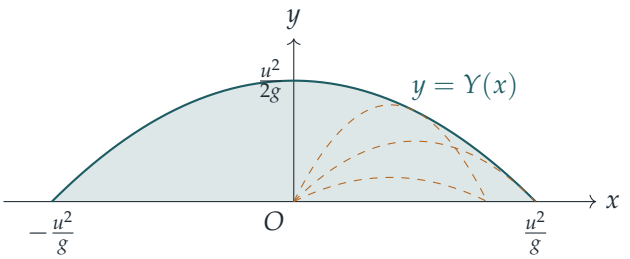
Y의 그래프는 위로 볼록한 포물선이다. 꼭짓점은 가능한 최대 높이인 $(0, u^2/2g)$에 있고, 가능한 최대 수평 도달 거리인 $x = \pm u^2/g$에서 지면과 만난다. 각각의 궤적은 모두 이 곡

선 아래에 놓이며 $\lambda = \lambda_0$에서 이 곡선에 한 번 접한다. 이 때문에 이 곡선을 흔히 **경계 포물선**(*bounding parabola*) 또는 **안전 포물선**(*parabola of safety*)이라고 부른다.

입자는 지면에 닿으면 멈춘다. $\lambda > 0$, $x > 0$인 궤적 위에서 $y \geq 0$인 점을 하나 잡자. 그 궤적은 O와 그 점 사이의 모든 x에서 지면 위에 있으므로, 입자는 착지하기 전에 실제로 그 점에 도달한다. 따라서 도달 가능한 집합은 영역

$$0 \leq y \leq \frac{u^2}{2g} - \frac{gx^2}{2u^2}, \qquad |x| \leq \frac{u^2}{g},$$

이며, 아래 그림에서 색칠된 부분이다. 그림은 u^2/g를 단위로 사용하며, 점선 곡선은 궤적의 예 세 개이다.



O로부터의 가장 먼 거리

도달 가능한 임의의 점 P는 O에서 반직선 OP가 경계와 만나는 점 Q까지의 선분 위에 있다. 이 영역은 경계 포물선과 지면으로 둘러싸여 있고, 각 반직선을 따라 O와 경계 사이의 모든 점을 포함한다. 따라서 $OP \leq OQ$이고, 경계 위에서만 거리를 최대화하면 된다. 지면 위에서 가장 먼 점은 거리 u^2/g에 있다. 곡선 부분에서는 $y = Y(x)$이므로

$$\begin{aligned} OQ^2 = x^2 + Y^2 &= x^2 + \left(\frac{u^2}{2g}\right)^2 - 2 \cdot \frac{u^2}{2g} \cdot \frac{gx^2}{2u^2} + \left(\frac{gx^2}{2u^2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{u^2}{2g}\right)^2 + \frac{x^2}{2} + \left(\frac{gx^2}{2u^2}\right)^2 = \left(\frac{u^2}{2g} + \frac{gx^2}{2u^2}\right)^2. \end{aligned}$$

따라서 $OQ = \dfrac{u^2}{2g} + \dfrac{gx^2}{2u^2} = \dfrac{u^2}{g} - Y$이다. 다시 말해, O로부터의 거리는 직선 $y = u^2/g$로부터 아래로 잰 거리와 같다. 즉 O는 경계 포물선의 초점이고 $y = u^2/g$는 그 준선(directrix)이다. 이 거리는 Y가 가장 작을 때 가장 크며, 곡선 중 도달 가능한 부분에서 최솟값은 $x = \pm u^2/g$에서의 $Y = 0$이다. 그러므로 포사체가 도달할 수 있는 O로부터의 가장 먼 거리는

$$\boxed{\frac{u^2}{g}},$$

이고, 이는 $\theta = \frac{\pi}{4}$에서 얻어지는 최대 수평 도달 거리이다. 경계 위에서 높이 $y > 0$인 모든 점은 정확히 y만큼 더 가깝다.

검산

- $x = 0$을 대입하면 $Y = u^2/(2g)$로, 수직으로 위로 던졌을 때 도달하는 높이이다($v^2 = u^2 - 2gh$에서). $Y = 0$을 대입하면 $x = u^2/g$로, $\theta = \frac{\pi}{4}$에서 익숙한 최대 도달 거리 $u^2 \sin 2\theta / g$이다.
- $u^2/g = 10$으로 두자(예를 들어 $g = 9.8$일 때 $u = \sqrt{98}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$). $x = 4$에서 공식은 $Y = 5 - 0.8 = 4.2$를 주고, 이는 $\lambda_0 = 10/4 = 2.5$에서 얻어진다. 실제로 $2.5 \cdot 4 - \frac{1}{20} \cdot 16 \cdot 7.25 = 10 - 5.8 = 4.2$이다.
- $u = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$에 대해 많은 발사각과 시간을 컴퓨터로 탐색한 결과, O로부터 가장 먼 점은 지면 위에 있었고 그 거리는 $10.204\,\mathrm{m} = u^2/g$였다.

흔한 실수

- 판별식에서 멈추는 것. 판별식은 $y \le Y$가 **필요조건**임을 보여 줄 뿐이며, 문제는 그러한 모든 값이 지면 위로 향하는 실제 발사각으로 **달성됨**도 요구한다.
- 지면 아래의 점까지 포함하여 $y = Y$ 아래의 영역 전체를 색칠하는 것. 입자는 착지하면 멈추므로 도달 가능한 집합에는 $y \ge 0$이라는 조건도 붙는다.
- 가장 먼 점이 안전 포물선의 꼭대기라고 가정하는 것. 그 점은 O로부터 $u^2/(2g)$, 즉 도달 거리의 절반밖에 떨어져 있지 않다.

STEP 너머

경계 포물선은 궤적들로 이루어진 곡선족의 **포락선**(*envelope*), 즉 곡선족의 모든 곡선에 접하는 곡선이다. 포락선을 구하는 표준적인 방법 하나는 $F(x, y, \lambda) = 0$과 $\partial F/\partial\lambda = 0$에서 매개변수를 소거하는 것인데, 이는 바로 우리가 사용한 중근 조건이다. 에너지와의 연결도 있다. 모든 궤적은 같은 준선, 즉 직선 $y = u^2/(2g)$를 가지며, 이는 운동 에너지가 모두 위치 에너지로 바뀌었을 때의 높이이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 대학 1학년 수준에서 포물체 운동과 에너지를 다룬다.

풀이

STEP II 2014, 문제 11

역학 • 원운동

> **STEP II 2014, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/14-s2-q11

핵심 아이디어

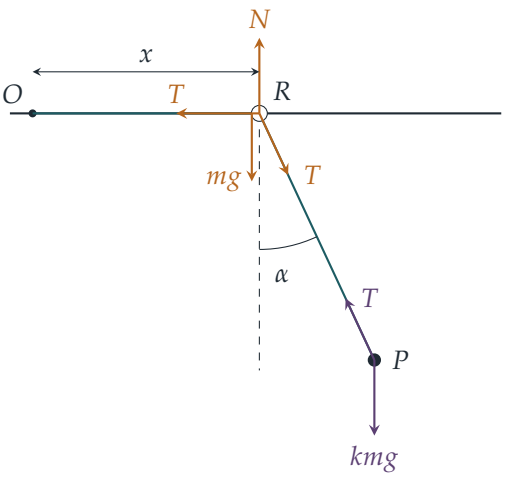
모든 것은 하나의 변수 x로 결정된다. 줄이 늘어나지 않고(inextensible) α가 고정되어 있으므로 P의 위치는 x의 간단한 함수이고, 따라서 P의 가속도의 두 성분은 모두 $\ddot{x}$의 상수배이다. 그러면 미지수는 $\ddot{x}$와 T 두 개뿐인데 운동 방정식(equations of motion)은 세 개(P에 대한 두 개, 고리에 대한 수평 방향 하나)가 나온다. 이러한 과결정계(overdetermined system)는 특별한 조건이 성립할 때에만 모순이 없고, 바로 이 양립 조건(consistency condition)이 α와 k를 묶어 준다.

풀이

모형. 고리와 P는 질점이고, 줄은 가볍고 늘어나지 않으며, 고리와 레일은 매끄럽다. 고리가 매끄러우므로 장력(tension) T는 줄의 두 부분에서 같다. O를 원점으로 하고, x축은 레일을 따라 O에서 고리 쪽을 향하는 방향으로, y축은 연직 위쪽으로 잡는다.

P의 좌표. O에서 고리까지의 줄은 레일을 따라 놓여 있고 길이가 x이므로, 고리에서 P까지의 줄의 길이는 $L - x$이다. 이 부분은 연직 아래 방향과 각 α를 이루고, P는 고리를 기준으로 O의 반대쪽에 매달려 있다(이 선택이 옳다는 것은 소문항 (i)의 끝에서 보인다). 따라서

$$P = \big(x + (L - x)\sin\alpha,\ -(L - x)\cos\alpha\big).$$



소문항 (i)

α가 상수임을 이용하여 P의 좌표를 두 번 미분하면

$$\ddot{x}_P = \ddot{x}\,(1-\sin\alpha), \qquad \ddot{y}_P = \ddot{x}\cos\alpha.$$

P에 작용하는 힘은 아래 방향의 무게 kmg와 줄을 따라 고리 쪽으로 작용하는 장력 T이며, 장력의 성분은 수평 방향으로 $-T\sin\alpha$, 연직 방향으로 $+T\cos\alpha$이다.

P, 연직 방향: $km\,\ddot{y}_P = T\cos\alpha - kmg$, 즉

$$km\ddot{x}\cos\alpha = T\cos\alpha - kmg,$$

이고, 이것이 구하려던 식이다.

P, 수평 방향:

$$km\ddot{x}\,(1-\sin\alpha) = -T\sin\alpha. \tag{1}$$

고리, 수평 방향. 고리는 양쪽에서 줄의 힘을 받는다. 레일을 따라 놓인 부분은 고리를 O 쪽으로 크기 T의 힘으로 당기고, P로 내려가는 부분은 O에서 멀어지는 방향으로 수평 성분 $T\sin\alpha$의 힘으로 당긴다. 고리의 무게와 레일의 수직항력(normal reaction)은 연직 방향이다(레일이 매끄럽기 때문이다). 따라서

$$m\ddot{x} = T\sin\alpha - T = -T(1-\sin\alpha). \tag{2}$$

? 생각해 보기 왜 P는 고리를 기준으로 O의 반대쪽에 있어야 할까?

만약 P가 O 쪽에 매달려 있다면 P의 x좌표는 $x-(L-x)\sin\alpha$가 되고, 두 수평 방향 방정식은 $km\ddot{x}(1+\sin\alpha) = T\sin\alpha$와 $m\ddot{x} = -T(1+\sin\alpha)$가 된다. 첫째 식에서 $\ddot{x} \geq 0$이고

둘째 식에서 $\ddot{x} \leq 0$이므로 $\ddot{x} = 0$이고 $T = 0$이다. 그런데 그러면 연직 방향 방정식에서 $0 = -kmg$가 되어 불가능하다. 따라서 그 배치로는 α를 일정하게 유지하며 움직일 수 없고, 위의 좌표가 올바른 것이다.

소문항 (ii)

먼저 $T \neq 0$이다. $T = 0$이면 (2)에서 $\ddot{x} = 0$이고, 연직 방향 방정식에서 $0 = -kmg$가 되어 모순이기 때문이다.

(2)에서 $m\ddot{x} = -T(1 - \sin\alpha)$이다. 이것을 (1)에 대입하면

$$k\big(-T(1-\sin\alpha)\big)(1-\sin\alpha) = -T\sin\alpha.$$

$-T \neq 0$으로 나누면

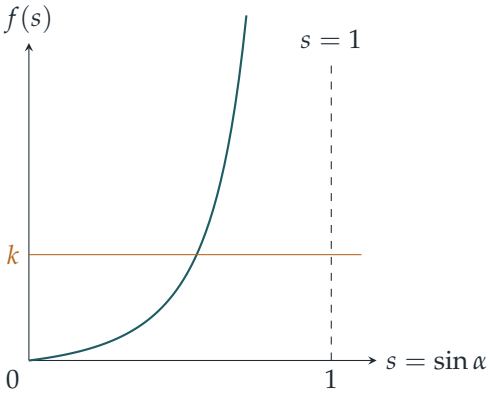
$$\frac{\sin\alpha}{(1-\sin\alpha)^2} = k,$$

이고, 이것이 구하려던 식이다. (α가 예각이므로 $0 < \sin\alpha < 1$이고, 따라서 $(1-\sin\alpha)^2$으로 나누어도 문제가 없다.)

모든 k가 가능하다. $s = \sin\alpha$로 두고 $0 < s < 1$에서 $f(s) = \dfrac{s}{(1-s)^2}$로 정의하자. 이 범위는 $\alpha \neq 0$인 예각 α 전체에 정확히 대응한다. 몫의 미분법(quotient rule)에 의해

$$f'(s) = \frac{(1-s)^2 + 2s(1-s)}{(1-s)^4} = \frac{1+s}{(1-s)^3} > 0,$$

이므로 f는 순증가한다. 또한 $s \to 0^+$일 때 $f(s) \to 0$이고 $s \to 1^-$일 때 $f(s) \to \infty$이며, f는 연속이다. 따라서 f는 모든 양수 값을 정확히 한 번씩 취하고, 각 $k > 0$에 대하여 조건을 만족하는 예각 α가 정확히 하나 존재한다.



수평선 $y = k$의 높이가 얼마이든, 이 직선은 곡선과 정확히 한 번 만난다.

소문항 (iii)

이제 (2)와 연직 방향 방정식을 이용하여 T를 소거한다. (2)에서 $T = -\dfrac{m\ddot{x}}{1-\sin\alpha}$이다. 이것을 연직 방향 방정식에 대입하고 m으로 나누면

$$k\ddot{x}\cos\alpha = -\frac{\ddot{x}\cos\alpha}{1-\sin\alpha} - kg \quad \Longrightarrow \quad \ddot{x}\cos\alpha\left(k + \frac{1}{1-\sin\alpha}\right) = -kg.$$

이제 소문항 (ii)를 이용하여 괄호 안의 k를 바꾸면

$$k + \frac{1}{1-\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha + (1-\sin\alpha)}{(1-\sin\alpha)^2} = \frac{1}{(1-\sin\alpha)^2}.$$

따라서 $k(1-\sin\alpha)^2 = \sin\alpha$를 한 번 더 이용하면

$$\ddot{x} = -\frac{kg(1-\sin\alpha)^2}{\cos\alpha} = -\frac{g\sin\alpha}{\cos\alpha} = -g\tan\alpha,$$

이다. 이것이 구하려던 결과이다.

덤으로 $T = -\dfrac{m\ddot{x}}{1-\sin\alpha} = \dfrac{mg\tan\alpha}{1-\sin\alpha} > 0$이므로, 모형에서 요구하는 대로 줄은 실제로 팽팽하다.

검산

- $k = 1$이면 조건 $s = (1-s)^2$에서 $\sin\alpha = \frac{1}{2}(3-\sqrt{5}) \approx 0.382$이므로 $\alpha \approx 22.46°$이고 $\ddot{x} \approx -0.413g$이다. 이를 (1), (2)와 연직 방향 방정식에 대입하면 세 식이 모두 성립한다.
- 두 변수(x와 줄의 각)에 대한 전체 운동을 이 각에서 고리가 움직이는 상태로 시작하여 수치적으로 시뮬레이션했다. 각은 10^{-10} rad 이내로 일정하게 유지되었고, 고리는 정확히 $g\tan\alpha$로 감속했다. 각을 조금 다르게 하여 시작하면 각이 곧바로 변하기 시작하므로, α의 이 특별한 값이 실제로 중요하다.
- 극한의 경우: $k \to 0$(매우 가벼운 입자)이면 $\alpha \to 0$이고 $\ddot{x} \to 0$이다. $k \to \infty$이면 $\alpha \to 90°$이고 감속도는 한없이 커진다. 가벼운 고리를 무거운 입자가 끌어당기고 있기 때문이다.
- 부호: $\ddot{x} < 0$이므로 고리는 항상 O 쪽으로 가속된다. 이는 고리에 작용하는 수평 방향 알짜힘 $-T(1-\sin\alpha)$가 O 쪽을 향한다는 사실과 맞아떨어진다.

흔한 실수

- 고리가 줄로부터 **양쪽에서** 힘을 받는다는 사실을 잊는 것. 레일을 따라 O 쪽으로 당기는 힘이 있어야 (2)가 성립한다.

- P의 수평 방향 가속도를 $\ddot{x}$로 쓰는 것. 매달린 부분의 길이 $L - x$도 변하므로 $-\ddot{x}\sin\alpha$가 더해진다.
- 미분할 때 α를 변수로 취급하는 것. 여기서 α는 상수이며, 바로 그 덕분에 문제를 풀 수 있다.

STEP 너머

이것은 자유도(degrees of freedom)가 두 개(고리의 위치와 줄의 각)인 계이며, 문제는 그 중 하나가 고정된 채로 유지되는 특수해를 찾는다. 이는 상대 평형(relative equilibrium)의 정신과 같다. 대학 1학년 과정에서는 x와 각에 대한 라그랑지안(Lagrangian)을 세우고, 각이 일정한 운동은 여기서 찾은 α의 단 하나의 값에서만 가능하다는 것을 확인하게 된다. 자연스러운 다음 질문은 그 운동이 안정(stable)한가 하는 것이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이런 종류의 구속계(constrained system)를 잘 다룬다.

풀이

STEP II 2014, 문제 12

확률과 통계 • 위험 함수

STEP II 2014, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/14-s2-q12

핵심 아이디어

위험 함수(hazard function)는 아직 살아 있는 개체에 대한 사망률이다. 뒤따르는 소문항은 모두 한 가지 관찰에서 나온다. $F'(t) = f(t)$이므로

$$h(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln\bigl(1 - F(t)\bigr).$$

따라서 h를 안다는 것은 $\ln(1 - F)$의 도함수를 안다는 뜻이다. 이를 적분하고, 수명이 시작되는 곳에서 $F = 0$이라는 사실을 이용한 다음, F를 미분하여 f를 얻는다.

풀이

소문항 (i)

A를 사건 $T \geq t$(파리가 시각 t에 살아 있음), B를 사건 $t \leq T \leq t + \delta t$(파리가 다음 δt 동안 죽음)라 하자. $B \cap A = B$이므로(연속확률변수(continuous random variable)에서는 $\mathrm{P}(T = t) = 0$이므로 끝점의 포함 여부는 상관없다)

$$\mathrm{P}(B \mid A) = \frac{\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{F(t + \delta t) - F(t)}{1 - F(t)}.$$

δt가 작을 때 $F(t + \delta t) - F(t) \approx F'(t)\,\delta t = f(t)\,\delta t$이므로

$$\mathrm{P}(B \mid A) \approx \frac{f(t)\,\delta t}{1 - F(t)} = h(t)\,\delta t,$$

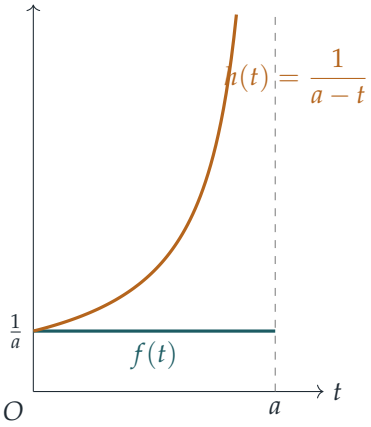
이고, 이것이 보이려던 것이다. (불가능한 사건을 조건으로 삼지 않으려면 $F(t) < 1$이어야 하며, 이것이 바로 h가 정의되는 범위이다.)

소문항 (ii)

여기서는 $0 < t < a$에서 $f(t) = F'(t) = \frac{1}{a}$이다. 즉 T는 $(0, a)$ 위의 균등분포(uniform distribution)를 따른다. 그러면

$$h(t) = \frac{1/a}{1 - t/a} = \frac{1}{a - t}, \qquad 0 < t < a.$$

밀도함수는 평평하지만, 위험 함수는 $h(0) = \frac{1}{a}$에서 시작하여 증가하고, $t \to a^-$일 때 $h(t) \to \infty$이다. 이는 자연스럽다. 거의 시각 a까지 살아남은 파리는 남은 아주 짧은 시간 안에 반드시 죽는다.



(그림은 $a = 2$로 그린 것이다.)

소문항 (iii)

핵심 아이디어에 따라 $t > a$에서 $-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln(1 - F(t)) = \frac{1}{t}$이다. a부터 t까지 적분하고, T는 a보다 큰 값만 가지므로 $F(a) = 0$임을 이용하면

$$-\ln(1 - F(t)) = \ln t - \ln a = \ln\frac{t}{a}, \qquad \text{따라서} \qquad 1 - F(t) = \frac{a}{t}.$$

그러므로 $F(t) = 1 - \frac{a}{t}$이고

$$f(t) = \frac{a}{t^2}, \qquad t > a$$

이다($t \le a$에서는 $f(t) = 0$). 검산하면 $\int_a^\infty at^{-2}\,\mathrm{d}t = 1$이고, $f/(1 - F) = (a/t^2)/(a/t) = 1/t$이다.

소문항 (iv)

"충분성". $k > 0$에 대하여 $t > b$에서 $f(t) = k\mathrm{e}^{-k(t-b)}$라 하자. $\int_b^\infty k\mathrm{e}^{-k(t-b)}\,\mathrm{d}t = 1$이므로 모든 확률이 $t > b$에 놓여 있고, 따라서 $t \le b$에서 $f(t) = 0$, $F(t) = 0$이다. 그러므로

$t \le b$에서 $h(t) = 0/1 = 0$이다. $t > b$에서는

$$F(t) = \int_b^t k\mathrm{e}^{-k(s-b)}\,\mathrm{d}s = 1 - \mathrm{e}^{-k(t-b)}, \qquad h(t) = \frac{k\mathrm{e}^{-k(t-b)}}{\mathrm{e}^{-k(t-b)}} = k,$$

이고, 이는 상수이다.

"필요성". $t \le b$에서 $h(t) = 0$이고 $t > b$에서 $h(t) = k$(상수)라 하자.

> ? **생각해 보기** $t \le b$에서 $h(t) = 0$이라는 사실은 $F(b)$에 대해 무엇을 알려 주는가?

$h(t) = 0$인 곳에서는 $f(t) = h(t)\big(1 - F(t)\big) = 0$이다. 따라서 모든 $t \le b$에서 f가 0이 되고, $t \le b$에서 $F(t) = \int_{-\infty}^t f = 0$이다. 특히 $F(b) = 0$이다. (이로써 그 범위에서 $F < 1$임도 확인되므로, h는 실제로 $t \le b$에서 정의된다.)

$t > b$에서는 $-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\big(1 - F(t)\big) = k$이다. b부터 t까지 적분하고 $F(b) = 0$을 이용하면

$$-\ln\big(1 - F(t)\big) = k(t-b), \qquad F(t) = 1 - \mathrm{e}^{-k(t-b)},$$

이고, 미분하면 $t > b$에서 $f(t) = k\mathrm{e}^{-k(t-b)}$이다. 끝으로 k는 양수여야 한다. $f \ge 0$이므로 $k \ge 0$이고, 만약 $k = 0$이면 F가 영원히 0에 머물러 $F(t) \not\to 1$이 되므로 T는 제대로 된 확률변수가 아니다. 이로써 양방향이 모두 증명되었다.

소문항 (v)

이번에도 $t > 0$에서 $-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\big(1 - F(t)\big) = \dfrac{\lambda}{\theta^\lambda}t^{\lambda-1}$이다. $T > 0$이므로 $F(0) = 0$임을 이용하여 0부터 t까지 적분하고, $\lambda > 0$이므로 $t \to 0$일 때 $t^\lambda \to 0$임에 주의하면

$$-\ln\big(1 - F(t)\big) = \frac{\lambda}{\theta^\lambda}\cdot\frac{t^\lambda}{\lambda} = \left(\frac{t}{\theta}\right)^\lambda.$$

따라서 $F(t) = 1 - \exp\big(-(t/\theta)^\lambda\big)$이고, 미분하면

$$f(t) = \frac{\lambda}{\theta^\lambda}\,t^{\lambda-1}\exp\left(-\left(\frac{t}{\theta}\right)^\lambda\right), \qquad t > 0.$$

이는 제대로 된 밀도함수이다. 양수이고, $t \to \infty$일 때 $F(t) \to 1$이기 때문이다.

검산

- 각 답은 $f/(1-F)$를 직접 계산하여 확인할 수 있다. 예를 들어 (v)에서는 지수 인자가 약분되어 $\lambda\theta^{-\lambda}t^{\lambda-1}$이 남는다.
- 소문항 (v)에서 $\lambda = 1$로 두면 상수 위험 함수 $1/\theta$와 $f(t) = \frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-t/\theta}$를 얻는데, 이는 소문항 (iv)에서 $b = 0, k = 1/\theta$인 경우이다.
- 수치적으로, $\lambda = \frac{1}{2}$, $\theta = 2$일 때 f를 $(0,\infty)$에서 적분하면 1.0000이 되고, $F(1) = 1 - \mathrm{e}^{-1/\sqrt{2}} \approx 0.5069$는 f를 0부터 1까지 직접 적분한 값과 일치한다.

흔한 실수

- 수명이 시작되는 곳에서 $F = 0$이라는 조건을 잊고, F에 임의의 적분상수(constant of integration)를 남겨 두는 실수.
- (iv)에서 "필요충분조건(if and only if)"의 한 방향만 증명하거나, $t \leq b$에서 $h = 0$임을 이용하여 $F(b) = 0$을 이끌어 내지 않는 실수.
- 음의 부호를 빠뜨리는 실수: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln(1 - F) = -f/(1 - F)$.

STEP 너머

관계식 $1 - F(t) = \exp\left(-\int_0^t h(s)\,\mathrm{d}s\right)$는 **생존 분석**(survival analysis)과 신뢰성 이론(reliability theory)의 기초이다. (v)의 분포는 와이블 분포(Weibull distribution)이다. $\lambda < 1$이면 감소하는 위험 함수(초기 고장), $\lambda = 1$이면 무기억성(memoryless)을 가진 지수분포, $\lambda > 1$이면 증가하는 위험 함수(마모)를 얻는다. 생존 분석은 의학 임상시험에서 공학에 이르기까지 어디에서나 쓰인다. 바탕이 되는 확률론에 대해서는 Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)를 참고하라.

풀이

STEP II 2014, 문제 13

확률과 통계 • 이산확률변수

STEP II 2014, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/14-s2-q13

핵심 아이디어

이 문제는 모습을 바꾼 생일 문제(birthday problem)이다. 사건 $X \geq k$는 처음 $k-1$개의 정수가 모두 다르다는 뜻일 뿐이고, $X = r$는 처음 $r-1$개가 서로 다르고 r번째가 그중 하나와 같다는 뜻이다. 두 확률(probability) 모두 간단한 인수들의 곱이다. 두 신기한 항등식은 같은 양을 두 가지 방법으로 계산하는 데서 나온다. 소문항 (i)에서는 전체 확률이 1이라는 사실을, 소문항 (iv)에서는 $\mathrm{E}(X)$에 대한 두 공식이 일치한다는 사실을 이용한다.

풀이

이 풀이 전체에서

$$Q_m = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right) \qquad (m \geq 1),$$

로 쓰고, $Q_1 = 1$(빈 곱(empty product))로 둔다. 각 정수는 앞의 정수들과 독립(independent)이고 $\{1,\ldots,n\}$ 위에서 균등(uniform)하게 분포하므로, Q_m은 $I_1,\ldots,I_m$이 모두 다를 확률이다. 처음 j개가 서로 다를 때, 다음 정수가 그 모두를 피할 확률은 $1-\frac{j}{n}$이기 때문이다.

$\mathrm{P}(X=4)$의 값

I_1, I_2, I_3이 서로 다르고, 그다음 I_4가 그 세 값 중 하나와 같아야 한다.

$$\mathrm{P}(X=4) = 1\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{3}{n} = \frac{3(n-1)(n-2)}{n^3}.$$

소문항 (i)

같은 방법으로, $X = r$는 $I_1, \ldots, I_{r-1}$이 서로 다르고(확률 Q_{r-1}) I_r이 이 $r-1$개의 값 중 하나라는(독립적으로 확률 $\frac{r-1}{n}$) 뜻이다. 따라서

$$\mathrm{P}(X = r) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{r-2}{n}\right)\frac{r-1}{n} = Q_{r-1}\,\frac{r-1}{n}, \qquad 2 \le r \le n+1.$$

? **생각해 보기** 이 확률들을 모두 더하면 왜 1이 되는가?

X는 반드시 존재하고 2와 $n+1$ 사이에 있다. 첫 번째 정수는 반복일 수 없으므로 $X \ge 2$이다. 또 $I_1, \ldots, I_{n+1}$은 $n+1$개의 정수인데 가능한 값은 n개뿐이므로, 비둘기집 원리(pigeonhole principle)에 의해 $n+1$번째까지 어떤 값은 두 번 나타나고, 따라서 $X \le n+1$이다. (수열이 끝내 반복되지 않을 확률은 0이므로 빠진 경우는 없다.) 그러므로

$$\sum_{r=2}^{n+1} \mathrm{P}(X = r) = 1.$$

$r = 2, 3, 4, \ldots$ 인 항들을 풀어 쓰면

$$\frac{1}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{2}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\frac{3}{n} + \cdots = 1,$$

이고, 이것이 바로 구하는 항등식이다. 이 급수(series)는 $r = n+1$에서 끝나며, 그 이후의 항들은 인수 $1 - \frac{n}{n}$을 포함하므로 모두 0이다. 증명 끝. $m = r - 1$로 놓으면 이 식은

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{m}{n}\,Q_m = 1. \qquad (*)$$

이 된다.

소문항 (ii)

기댓값(expectation)의 정의에 의해

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{r=2}^{n+1} r\,\frac{r-1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{r-2}{n}\right) = \sum_{m=1}^{n} \frac{m(m+1)}{n}\,Q_m.$$

소문항 (iii)

$X \ge k$는 $I_1, \ldots, I_{k-1}$ 사이에 반복이 없을 때, 즉 이 $k-1$개의 정수가 모두 다를 때 정확히 일어난다. 따라서

$$\mathrm{P}(X \ge k) = Q_{k-1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-2}{n}\right), \qquad 2 \le k \le n+2,$$

이고, $\mathrm{P}(X \ge 1) = \mathrm{P}(X \ge 2) = 1$이다. ($k = n+2$일 때 이 곱은 $1 - \frac{n}{n} = 0$을 포함하므로, 마땅히 그래야 하듯 0이 된다.)

소문항 (iv)

$p_r = \mathrm{P}(Y = r)$로 쓰자. 그러면 $r = \sum_{k=1}^{r} 1$이므로

$$\mathrm{E}(Y) = \sum_{r=1}^{N} r\,p_r = \sum_{r=1}^{N}\sum_{k=1}^{r} p_r = \sum_{k=1}^{N}\sum_{r=k}^{N} p_r = \sum_{k=1}^{N} \mathrm{P}(Y \geq k).$$

합이 유한하므로 합의 순서를 바꾸어도 문제없다. 두 이중합 모두 $1 \leq k \leq r \leq N$인 모든 순서쌍 (k, r)에 대한 합이기 때문이다. 증명 끝.

> ? **생각해 보기** $\mathrm{E}(X)$에 대한 어떤 두 식을 비교해야 하는가?

이 결과를 $Y = X$에 적용하자. X는 $N = n+1$일 때 $\{1, \ldots, N\}$에 속하는 값을 가진다(값 1은 확률이 0일 뿐이다). 소문항 (iii)을 이용하면

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{n+1} \mathrm{P}(X \geq k) = 1 + \sum_{k=2}^{n+1} Q_{k-1} = 1 + \sum_{m=1}^{n} Q_m.$$

이제 이것을 소문항 (ii)의 결과와 같다고 놓고, $\frac{m(m+1)}{n} = \frac{m^2}{n} + \frac{m}{n}$으로 나눈 뒤 $(*)$를 이용한다.

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{m(m+1)}{n} Q_m = \sum_{m=1}^{n} \frac{m^2}{n} Q_m + \underbrace{\sum_{m=1}^{n} \frac{m}{n} Q_m}_{=1 \text{ 근거: } (*)}.$$

따라서 $1 + \sum_{m=1}^{n} Q_m = \sum_{m=1}^{n} \frac{m^2}{n} Q_m + 1$, 즉

$$\sum_{m=1}^{n} Q_m \left(1 - \frac{m^2}{n}\right) = 0.$$

$m = 1, 2, 3$인 항은 $\left(1 - \frac{1^2}{n}\right)$, $\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2^2}{n}\right)$, $\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{3^2}{n}\right)$이므로, 이것이 정확히 구하는 항등식이다. 소문항 (i)에서와 마찬가지로 $m = n$ 이후의 모든 항은 인수 $1 - \frac{n}{n} = 0$을 가진다. 증명 끝.

검산

- $n = 1$이면 반드시 $X = 2$이다. 소문항 (i)은 $\frac{1}{1} = 1$을 주고, 마지막 합은 단 하나의 항 $1 - 1 = 0$이다.
- $n = 4$이면 마지막 합은 $\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\cdot 0 + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{5}{4}\right) + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot(-3) = \frac{24-15-9}{32} = 0$이고, 두 공식 모두 $\mathrm{E}(X) = \frac{103}{32}$를 준다.
- $n = 365$(생일)이면 $\mathrm{E}(X) = 1 + \sum Q_m \approx 24.62$이다. 10^5개의 수열에 대한 컴퓨터 시뮬레이션에서 평균은 24.61이었고, $n \leq 5$에 대한 정확한 전수 조사로 위의 모든 공식을 확인하였다.

흔한 실수

- $\mathrm{P}(X = r)$를 쓸 때 $1 - \frac{j}{n}$ 꼴의 인수를 $r - 2$개가 아니라 $r - 1$개로 쓰는 실수. 앞의 값들을 피해야 하는 것은 두 번째부터 $(r - 1)$번째 정수까지뿐이다.
- $\sum \mathrm{P}(X \geq k)$에서 $k = 1$인 항을 빠뜨리는 실수. 이 항은 1을 기여하며, 바로 이것이 $(*)$와 상쇄된다.

STEP 너머

꼬리합 공식(tail-sum formula) $\mathrm{E}(Y) = \sum_k \mathrm{P}(Y \geq k)$는 음이 아닌 정수 값을 가지는 모든 확률변수(random variable)에 대해 성립하며, 그 연속 버전 $\mathrm{E}(T) = \int_0^\infty \mathrm{P}(T > t)\,\mathrm{d}t$는 대학 1학년 확률론의 표준적인 도구이다. n이 클 때 $\mathrm{E}(X) \approx \sqrt{\pi n/2}$이며, 이 때문에 해시 함수(hash function)의 충돌은 고작 $\sqrt{n}$번 정도의 시도 만에 나타난다(이른바 "생일 공격(birthday attack)"). Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문서)에서 두 아이디어를 모두 다룬다.

풀이

STEP III 2014, 문제 1

순수수학 • 로그함수의 급수 전개

STEP III 2014, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/14-s3-q1

핵심 아이디어

삼차식(cubic) $1+qx^2+rx^3$은 $(1+ax)(1+bx)(1+cx)$로 인수분해(factorise)되므로, 그 로그(logarithm)는 세 개의 로그로 나뉘고, 각각은 우리가 이미 아는 급수(series)를 가진다. 이로부터 x^n의 계수(coefficient)를 a, b, c로 나타낼 수 있다. 한편 같은 로그를 $u=qx^2+rx^3$으로 두고 $\ln(1+u)$로 직접 전개(expansion)할 수도 있으며, 그러면 계수를 q와 r로 나타낼 수 있다. 두 전개를 비교하면 q와 r에 관한 사실이 S_n 사이의 항등식(identity)으로 바뀐다.

풀이

전개하면

$$(1+ax)(1+bx)(1+cx)=1+(a+b+c)x+(ab+bc+ca)x^2+abc\,x^3.$$

$a+b+c=0$이므로 x항은 사라진다. 모든 실수 x에 대하여 값이 같은 두 다항식(polynomial)은 계수가 같으므로, x^2과 x^3의 계수를 $1+qx^2+rx^3$과 비교하면

$$q=bc+ca+ab, \qquad r=abc,$$

를 얻고, 이것이 증명하려던 것이다.

소문항 (i)

$|x|$가 충분히 작으면(구체적으로 $|x|<1/\max(|a|,|b|,|c|)$일 때, 또는 $a=b=c=0$이면 모든 x에 대하여) 각 인수는 양수이고 각 로그는 수렴하는(convergent) 급수를 가진다.

$|t| < 1$에서 성립하는 $\ln(1+t) = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}t^n/n$을 이용하면

$$\begin{aligned}\ln(1+qx^2+rx^3) &= \ln(1+ax)+\ln(1+bx)+\ln(1+cx)\\ &= \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{a^nx^n}{n}+\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{b^nx^n}{n}+\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{c^nx^n}{n}\\ &= \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{a^n+b^n+c^n}{n}x^n.\end{aligned}$$

따라서 x^n의 계수는 $(-1)^{n+1}S_n$이고, 이것이 증명하려던 것이다. ($n=1$일 때 이는 $S_1 = a+b+c = 0$이며, x항이 없다는 사실과 일치한다.)

소문항 (ii)

이제 같은 함수를 두 번째 방법으로 전개한다. $u = qx^2+rx^3$으로 두면

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}+\cdots.$$

u의 모든 항은 차수(degree)가 2 이상이므로, u^k에는 x^{2k}부터 x^{3k}까지의 거듭제곱만 나타난다. x^n의 계수를 구하려면 $2k \leq n \leq 3k$인 u^k만 보면 된다.

$$\begin{aligned}u &= qx^2+rx^3,\\ u^2 &= q^2x^4+2qr\,x^5+r^2x^6.\end{aligned}$$

따라서

- x^2: u만 기여하며, q를 준다.
- x^3: u만 기여하며, r를 준다.
- x^5: $-\frac{1}{2}u^2$만 기여하며, $-\frac{1}{2}(2qr) = -qr$를 준다.

계수가 $-S_2, S_3, S_5$인 소문항 (i)과 비교하면

$$S_2 = -q, \qquad S_3 = r, \qquad S_5 = -qr.$$

그러므로 $S_2S_3 = (-q)(r) = -qr = S_5$이고, 이것이 증명하려던 것이다.

생각해 보기 같은 함수에 대한 서로 다른 두 급수의 계수를 비교해도 되는 이유는 무엇인가?

두 전개는 모두 0 주변의 어떤 구간에서 $\ln(1+qx^2+rx^3)$으로 수렴하는 x의 거듭제곱급수(power series)이다. 0 근처에서 수렴하는 거듭제곱급수의 계수는 유일하므로(매클로린 정리(Maclaurin's theorem)에서처럼 계수는 0에서의 도함수 값을 $n!$로 나눈 것이다), 두 계수는 같아야 한다.

소문항 (iii)

x^7에 대해서는 $2k \le 7 \le 3k$이어야 하므로 $k = 3$일 수밖에 없다. 이항정리(binomial theorem)로 $u^3 = (qx^2 + rx^3)^3$을 전개하면

$$u^3 = q^3x^6 + 3q^2r\,x^7 + 3qr^2x^8 + r^3x^9,$$

이므로 $\ln(1+u)$에서 x^7의 계수는 $\frac{1}{3} \cdot 3q^2r = q^2r$이다. 소문항 (i)에 따르면 이 계수는 $(-1)^8 S_7 = S_7$이므로 $S_7 = q^2r$이다. 소문항 (ii)를 이용하면

$$S_2S_5 = (-q)(-qr) = q^2r = S_7,$$

이고, 이것이 증명하려던 것이다.

소문항 (iv)

x^9에 대해서는 $2k \le 9 \le 3k$이어야 하므로 $k = 3$ 또는 $k = 4$이다.

- $\frac{1}{3}u^3$에서: u^3의 x^9항은 r^3x^9이므로 $\frac{1}{3}r^3$을 준다.
- $-\frac{1}{4}u^4$에서: $(qx^2 + rx^3)^4$에서 x^9항을 얻으려면 qx^2 인수 세 개와 rx^3 인수 한 개가 필요하므로 $\binom{4}{1}q^3r\,x^9 = 4q^3r\,x^9$를 얻는다. 이는 $-q^3r$만큼 기여한다.

따라서 x^9의 계수는 $\frac{1}{3}r^3 - q^3r$이고, 소문항 (i)에 의해 이는 $(-1)^{10}S_9 = S_9$와 같다. 한편

$$S_2S_7 = (-q)(q^2r) = -q^3r.$$

그러므로

$$S_9 - S_2S_7 = \tfrac{1}{3}r^3 = \tfrac{1}{3}(abc)^3,$$

이고, 주장 $S_2S_7 = S_9$는 정확히 $abc = 0$일 때에만 성립한다. 일반적으로는 거짓이다.

구체적인 반례(counterexample)로 $a = b = 1$, $c = -2$를 잡자($a + b + c = 0$이고 $abc = -2 \neq 0$이다). 그러면

$$S_2 = \frac{1+1+4}{2} = 3, \qquad S_7 = \frac{1+1-128}{7} = -18, \qquad S_9 = \frac{1+1-512}{9} = -\frac{170}{3},$$

이므로 $S_2S_7 = -54 \neq -\frac{170}{3} = S_9$이다. 주장은 거짓이다.

생각해 보기 소문항 (ii)와 (iii)에서는 성립했는데, 왜 x^9에서 규칙이 깨지는가?

x^5와 x^7에서는 u의 거듭제곱 하나만 기여하므로, 각 계수는 q와 r의 곱 하나이고, 이것이 마침 앞의 S들의 적절한 곱으로 인수분해된다. x^9에서는 u의 거듭제곱 두 개가 기여하며, u^3에서 나오는 여분의 r^3항이 인수분해를 망가뜨린다.

검산

- $a = b = 1$, $c = -2$이면 $q = -3$, $r = -2$이다. 그러면 $S_2 = 3 = -q$, $S_3 = (1 + 1 - 8)/3 = -2 = r$, $S_5 = (1 + 1 - 32)/5 = -6 = -qr$이므로 $S_2S_3 = S_5$이다. 또한 $S_7 = -18 = q^2r$이고, $S_9 - S_2S_7 = -\frac{170}{3} + 54 = -\frac{8}{3} = \frac{1}{3}r^3$으로, 예측한 그대로이다.
- $c = 0$이면(따라서 $b = -a$) 홀수 번째 S_n은 모두 사라지고 (iv)의 주장의 양변은 모두 0이 되므로, $abc = 0$일 때 주장이 성립한다는 결과와 일치한다.
- (ii)–(iv)의 항등식과 $S_9 - S_2S_7$에 대한 공식은 a와 b를 무작위 유리수로 200번 골라 컴퓨터로 정확한 산술 계산을 하여 확인하기도 했다.

흔한 실수

- x^9에 대한 u^4의 기여를 빠뜨리는 것: u^3에서 멈추기 쉬운데, 그러면 틀린 계수 $\frac{1}{3}r^3$을 얻는다.
- $(-1)^{n+1}$에서 생기는 부호 실수: x^2의 계수는 $-S_2$이므로 $S_2 = -q$이고, q가 아니다.
- 이항계수(binomial coefficient)를 잊는 것: u^3의 x^7항은 $3q^2r$이고, q^2r가 아니다.

STEP 너머

S_n은 ($1/n$이라는 인수를 제외하면) 삼차식의 근들의 **거듭제곱 합**(*power sums*)이고, q, r는 그 **기본 대칭 다항식**(*elementary symmetric polynomials*)이다. 로그를 취해 계수를 비교하는 것은 뉴턴 항등식(Newton's identities)의 생성함수(generating function)를 이용한 증명이다. 뉴턴 항등식은 모든 거듭제곱 합을 기본 대칭 다항식으로 나타내며, 그 배후에 있는 정리는 모든 대칭 다항식(symmetric polynomial)을 기본 대칭 다항식으로 쓸 수 있다는 것이다. 대칭 다항식과 다항식의 근에 대해서는 Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)에서 읽을 수 있고, 급수를 다루는 STEP 스타일의 연습 문제는 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제)에서 더 찾을 수 있다.

풀이

STEP III 2014, 문제 2

순수수학 • 쌍곡선 함수 적분법

> **STEP III 2014, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/14-s3-q2

핵심 아이디어

두 피적분함수(integrand) 모두 분모에 $\cosh 2x$가 있고, 배각 공식(double-angle formula)은 $\cosh^2 x$로도, $\sinh^2 x$로도 나타낼 수 있다. 분자에 맞는 형태를 고르면 각 적분은 표준적인 유리함수 적분이 된다. 마지막 소문항에서는 지수함수로 되돌아가는 것이 요령이다. $u = \mathrm{e}^x$로 놓으면 두 피적분함수는 모두 분모에 $1 + u^4$가 있는 u의 유리함수(rational function)가 되고, 이들을 적절히 조합하면 정확히 $1/(1+u^4)$를 얻는다.

풀이

소문항 (i)

$\cosh 2x = 2\cosh^2 x - 1$을 이용한다. $u = \cosh x$로 치환(substitution)하면 $\mathrm{d}u = \sinh x \,\mathrm{d}x$이므로

$$\int \frac{\sinh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}u}{2u^2 - 1}.$$

분모는 $(\sqrt{2}u - 1)(\sqrt{2}u + 1)$로 인수분해되고, 두 인수의 차는 2이므로

$$\frac{1}{2u^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}u - 1} - \frac{1}{\sqrt{2}u + 1}\right).$$

각 항을 적분하면 로그가 되며, u의 계수 때문에 $\frac{1}{\sqrt{2}}$라는 인수가 붙는다.

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}u}{2u^2-1} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\ln|\sqrt{2}u - 1| - \ln|\sqrt{2}u + 1|\Big) + C \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{2}\cosh x - 1}{\sqrt{2}\cosh x + 1}\right| + C,\end{aligned}$$

이것이 구하는 결과이다. (사실 $\cosh x \geq 1$이므로 $\sqrt{2}\cosh x - 1 > 0$이고, 따라서 실수 x에 대해서는 절댓값 기호가 필요 없다.)

소문항 (ii)

이번에는 분자가 $\cosh x$이고, 이는 $\sinh x$의 도함수이므로 비슷한 치환 $u = \sinh x$, $\mathrm{d}u = \cosh x\,\mathrm{d}x$를 쓴다. $\cosh 2x = 1 + 2\sinh^2 x$로 쓰면

$$\begin{aligned}\int \frac{\cosh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\mathrm{d}u}{1+2u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}\,u\right) + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}\sinh x\right) + C,\end{aligned}$$

여기서 $a = \sqrt{2}$로 하여 $\int \mathrm{d}u/(1+a^2u^2) = \frac{1}{a}\arctan(au)$를 이용하였다.

소문항 (iii)

언뜻 보면 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^4}$에는 cosh가 어디에도 없다.

? 생각해 보기 모든 것을 $u = \mathrm{e}^x$로 나타내면 $\cosh x / \cosh 2x$는 어떤 모양이 될까?

$\cosh x = \frac{1}{2}(u + u^{-1})$이고 $\cosh 2x = \frac{1}{2}(u^2 + u^{-2})$이므로, 분자와 분모에 u^2을 곱하면

$$\frac{\cosh x}{\cosh 2x} = \frac{u + u^{-1}}{u^2 + u^{-2}} = \frac{u(u^2+1)}{u^4+1}, \qquad \frac{\sinh x}{\cosh 2x} = \frac{u(u^2-1)}{u^4+1}.$$

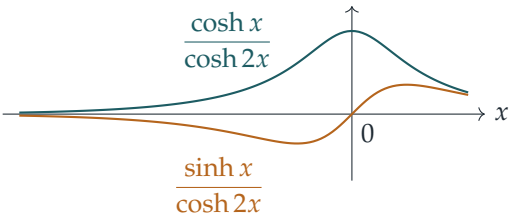
또한 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/u$이므로 남는 인수 u가 약분된다.

$$\frac{\cosh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1+u^2}{1+u^4}\,\mathrm{d}u, \qquad \frac{\sinh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x = \frac{u^2-1}{1+u^4}\,\mathrm{d}u.$$

첫째 식에서 둘째 식을 빼면 $\dfrac{2}{1+u^4}\,\mathrm{d}u$가 남는다. 끝으로, u가 0에서 1까지 변하면 $x = \ln u$는 $-\infty$에서 0까지 변한다. 따라서

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^4} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 \frac{\cosh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 \frac{\sinh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x.$$

$x \to -\infty$일 때 각 피적분함수가 $O(\mathrm{e}^x)$이므로 우변의 두 적분은 모두 수렴(converge)한다. (좌변은 보통의 적분이므로, 이것은 사실 변수를 바꾼 것일 뿐이며 무한대인 끝점은 $u \to 0$에서 나온다.)



cosh **적분.** 소문항 (ii)에 의해, $x \to -\infty$일 때 $\sinh x \to -\infty$이므로 $\arctan(\sqrt{2}\sinh x) \to -\frac{\pi}{2}$이다. 그러므로

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\cosh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\arctan 0 - \left(-\tfrac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

sinh **적분.** 소문항 (i)에 의해, $x \to -\infty$일 때 $\cosh x \to \infty$이므로 로그 안의 분수는 1로, 로그는 0으로 수렴한다. $x = 0$에서는 $\cosh 0 = 1$이므로

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\sinh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}.$$

분모를 유리화(rationalising)하면 $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = (\sqrt{2}-1)^2$이고, $\sqrt{2}-1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$이므로

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\sinh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2}-1) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2}+1).$$

이 값은 마땅히 음수이다. $x < 0$이면 $\sinh x < 0$이기 때문이다(호박색 곡선 참고).

종합하기.

$$\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^4} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}+1)\right) = \frac{\pi + 2\ln(\sqrt{2}+1)}{4\sqrt{2}},$$

이것이 구하는 결과이다.

검산

- (i)과 (ii)의 답을 미분하여 피적분함수가 다시 나오는지 확인한다. (ii)의 경우 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\sinh x) = \dfrac{\cosh x}{1+2\sinh^2 x}$이다.
- 최종 값은 ≈ 0.86697이고, 이는 $\int_0^1 \mathrm{d}u/(1+u^4)$를 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산한 값과 일치한다. 이 값은 $\frac{\pi}{4} \approx 0.785$(더 작은 함수 $1/(1+u^2)$의 적분)와 1 사이에 있으므로 타당하다.
- 별도로, 두 무한 적분의 값도 수치적으로 확인하였다. $\pi/(2\sqrt{2}) \approx 1.1107$이고 $-\ln(1+\sqrt{2})/\sqrt{2} \approx -0.6232$이다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)에서도 $\cosh 2x = 2\cosh^2 x - 1$을 쓰는 것. $u = \sinh x$로 치환할 때는 $\sinh^2$ 형태인 $1 + 2\sinh^2 x$가 필요하다.

- $u = \mathrm{e}^x$일 때 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/u$임을 잊는 것. 분자에 남는 u를 약분해 주는 것이 바로 이 인수이다.
- 적분 구간을 잘못 잡는 것. $u \in [0,1]$에 대응하는 것은 $[0,1]$이 아니라 $x \in (-\infty, 0]$이다.

STEP 너머

$1+u^4 = (u^2+\sqrt{2}u+1)(u^2-\sqrt{2}u+1)$이므로 같은 적분을 부분분수(partial fractions)로 직접 계산할 수도 있다. $\frac{1+u^2}{1+u^4}$와 $\frac{1-u^2}{1+u^4}$를 조합하는 방법은 그 복잡한 계산 대부분을 피하는 깔끔한 지름길이다. 대학에서는 $\int_0^\infty \mathrm{d}u/(1+u^4) = \pi/(2\sqrt{2})$ 같은 적분을 경로 적분(contour integration)과 유수 정리(residue theorem)를 써서 한 줄로 계산하며, 이상적분(improper integral)은 해석학(analysis)에서 완전히 엄밀하게 다룬다. 복소해석적인 측면을 살펴보기에는 Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석)가 아주 훌륭한 책이다.

풀이

STEP III 2014, 문제 3

순수수학 • 포물선까지의 거리

STEP III 2014, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/14-s3-q3

핵심 아이디어

포물선(parabola) 위의 모든 점은 $(at^2, 2at)$ 꼴로 쓸 수 있으므로, 우리가 구해야 하는 거리는 모두 하나의 변수 t의 함수가 된다. 두 소문항 모두에서 그 함수는 이차식(quadratic)이 된다(직선의 경우에는 t에 대한 이차식이고, 점의 경우에는 t^2에 대한 이차식이다). 이차식의 최솟값은 완전제곱식 만들기(completing the square)로 구하면 된다. 다만 변수가 가질 수 있는 범위에 주의해야 한다. t^2은 음수가 될 수 없고, 바로 이 제약 때문에 소문항 (ii)가 여러 경우로 나뉜다. 원의 경우는 덤으로 얻어진다. 한 점에서 원까지의 거리는 그 점에서 중심까지의 거리에서 반지름을 뺀 값이기 때문이다.

풀이

소문항 (i)

L을 $mx - y + c = 0$으로 쓰자. 포물선 위의 점 $P = (at^2, 2at)$에서 L까지의 수선의 길이(perpendicular distance)는 다음과 같다.

$$\frac{|mat^2 - 2at + c|}{\sqrt{m^2 + 1}}.$$

$f(t) = mat^2 - 2at + c$라 하자. $ma > 0$이므로 완전제곱식으로 만들면

$$f(t) = ma\left(t - \frac{1}{m}\right)^2 + c - \frac{a}{m} = ma\left(t - \frac{1}{m}\right)^2 + \frac{mc - a}{m},$$

이므로, f는 최솟값 $\dfrac{mc - a}{m}$을 가지며 이 값은 $t = 1/m$에서 얻어진다.

경우 $mc > a$. 이때 모든 t에 대해 $f(t) \geq \frac{mc-a}{m} > 0$이므로, 포물선 전체가 L의 한쪽에 놓이고 이 직선과 결코 만나지 않는다. L과 포물선 사이의 최단 거리는 포물선 위의 점에서 L까

지의 거리의 최솟값, 즉 $|f(t)|/\sqrt{m^2+1} = f(t)/\sqrt{m^2+1}$의 최솟값이며, 이는

$$\frac{mc-a}{m\sqrt{m^2+1}},$$

으로 구하려던 값이다. 가장 가까운 점은 $t = 1/m$이며, 여기서 포물선의 접선의 기울기는 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 1/t = m$이다. 즉 접선이 L과 평행하며, 이는 기하학적 직관과 일치한다.

경우 $mc \le a$. 이제 $f(1/m) \le 0$인 반면, $t \to \infty$일 때 $f(t) \to +\infty$이다. f는 연속(continuous)이므로 어떤 t에서 $f(t) = 0$이고, 따라서 L은 포물선과 만나며 최단 거리는 0이다.

소문항 (ii): 점 $(p, 0)$

$C = (p, 0)$에서 $P = (at^2, 2at)$까지의 거리의 제곱은 다음과 같다.

$$(at^2 - p)^2 + 4a^2t^2.$$

이 값은 $u = t^2$에만 의존하며, u는 $[0, \infty)$의 모든 값을 취한다. 따라서 다음을 최소화하면 된다.

$$g(u) = (au - p)^2 + 4a^2u = a^2u^2 - 2a(p-2a)u + p^2 \qquad (u \ge 0).$$

완전제곱식으로 만들면

$$g(u) = a^2\Big(u - \frac{p-2a}{a}\Big)^2 + p^2 - (p-2a)^2 = a^2\Big(u - \frac{p-2a}{a}\Big)^2 + 4a(p-a).$$

생각해 보기 범위의 제약이 없다면 g의 최솟값은 $u = (p-2a)/a$에서 나타난다. 이 값을 항상 취할 수 있는가?

그렇지 않다. $u = t^2$은 음이 아니어야 하고, $(p-2a)/a \ge 0$은 $p \ge 2a$일 때만 성립한다.

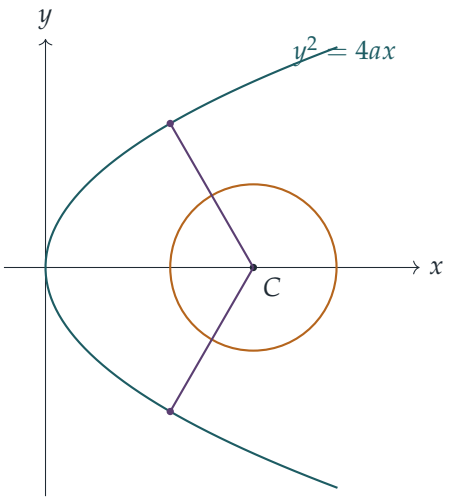
경우 $p/a > 2$. 꼭짓점 $u = p/a - 2$가 양수이므로 허용되는 값이고, g의 최솟값은 $4a(p-a)$이다. $p > 2a > a$이므로 이 값은 양수이다. 최단 거리는

$$2\sqrt{a(p-a)},$$

이고, 두 점 $\big(p-2a,\ \pm 2\sqrt{a(p-2a)}\big)$에서 얻어진다.

경우 $p/a \le 2$. 꼭짓점이 $u \le 0$에 있으므로 g는 $u \ge 0$에서 증가하고, 그 범위에서의 최솟값은 $g(0) = p^2$이다. 최단 거리는 p이며, 포물선의 꼭짓점 $(0, 0)$에서 얻어진다.

두 답은 $p = 2a$에서 일치하며, 둘 다 $2a$를 준다.



그림은 $a = 1$, $p = 5$인 경우이다. C에 가장 가까운 포물선 위의 점들(보라색)은 거리 $2\sqrt{1 \cdot 4} = 4$만큼 떨어져 있고, C를 중심으로 하는 반지름 $b = 2$인 원(호박색)은 포물선과 거리 2만큼 떨어져 있다.

소문항 (ii): 원

d를 방금 구한 $C = (p, 0)$에서 포물선까지의 거리라 하자. 즉

$$d = \begin{cases} p & \text{단, } p \leq 2a, \\ 2\sqrt{a(p-a)} & \text{단, } p > 2a. \end{cases}$$

원은 중심이 C이고 반지름이 b이다.

$d > b$인 경우. 포물선 위의 임의의 점 P와 원 위의 임의의 점 Q를 잡자. 삼각부등식(triangle inequality)에 의해

$$|PQ| \geq |PC| - |CQ| = |PC| - b \geq d - b > 0.$$

등호는 P가 C에 가장 가까운 포물선 위의 점이고 Q가 선분 CP와 원의 교점일 때 성립한다($|CP| = d > b$이므로 선분은 실제로 원과 만난다). 따라서 최단 거리는 $d - b$이다.

$d \leq b$인 경우. P가 포물선을 따라 움직일 때 $|PC|$는 최솟값 $d \leq b$에서부터 얼마든지 큰 값까지 연속적으로 변하므로, 어딘가에서 $|PC| = b$가 된다. 그 점은 두 곡선 위에 모두 있으므로 최단 거리는 0이다.

이를 종합하면, 원과 포물선 사이의 최단 거리는 다음과 같다.

$$\begin{cases} p-b & \text{단, } p \le 2a\text{이고} b < p, \\ 2\sqrt{a(p-a)}-b & \text{단, } p > 2a\text{이고} b < 2\sqrt{a(p-a)}, \\ 0 & \text{그 외의 경우(즉, } b \ge d\text{일 때).} \end{cases}$$

검산

- $m=1, c=2, a=1$로 두면 $mc=2>a$이다. 공식은 $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.7071$을 준다. 직접 계산하면 점 $t=1$은 $(1,2)$이고, 이 점에서 $x-y+2=0$까지의 거리는 $|1-2+2|/\sqrt{2} = 1/\sqrt{2}$이다. 대신 $c=\frac{1}{2}$로 두면$(mc<a)$, 직선 $y=x+\frac{1}{2}$는 $y^2=4x$와 $x^2-3x+\frac{1}{4}=0$을 만족하는 곳에서 만나는데, 이 방정식은 실근을 가지므로 거리가 0임이 확인된다.
- $a=1, p=5$일 때 점 $(3,\pm 2\sqrt{3})$은 $(5,0)$에서 거리 $\sqrt{4+12}=4=2\sqrt{1\cdot 4}$만큼 떨어져 있으며, 컴퓨터로 포물선 위를 탐색해도 더 가까운 점은 찾지 못했다.
- $p \to 0$일 때 거리 $p \to 0$인데, $(0,0)$이 포물선 위에 있으므로 옳은 결과이다. p가 클 때는 $2\sqrt{a(p-a)} < p$인데, 꼭짓점까지의 거리가 p이므로 당연히 그래야 한다.
- 모든 결과는 m, c, a, p, b를 무작위로 수백 번 골라 컴퓨터로 탐색하여 확인하였다.

흔한 실수

- 거리의 제곱을 t에 대해 미분한 도함수(derivative)를 0으로 놓고 근 $t=0$을 빠뜨리거나, $p<2a$일 때 $t^2=p/a-2$가 해를 갖지 않는다는 것을 잊는 실수. 경우 나누기가 바로 소문항 (ii)의 핵심이다.
- $mc<a$일 때 $(mc-a)/(m\sqrt{m^2+1})$을 답으로 내는 실수. 이 값은 음수이며, 실제로는 직선이 포물선을 가로지른다.
- 원에 대해 부호를 확인하지 않고 $d-b$라고 쓰는 실수. $b \ge d$이면 두 곡선이 만나므로 답은 0이다.

STEP 너머

소문항 (ii)에서 가장 가까운 점은 CP가 포물선에 수직인 곳, 즉 법선(normal) 방향인 곳이며, $p=2a$에서 경우가 바뀌는 것은 우연이 아니다. $(2a,0)$은 포물선의 꼭짓점에서의 곡률 중심(centre of curvature)이다. 그보다 더 먼 점들은 축 밖에 가장 가까운 점을 두 개 가지며, 이런 전환점들의 자취인 축폐선(evolute)은 곡선의 미분기하학(differential

geometry)에서 고전적인 대상이다. 제한된 범위에서 함수를 최소화하는 문제, 즉 답이 정류점(stationary point)이 아니라 경계에 있을 수도 있는 문제는 제약 최적화(constrained optimisation)의 출발점이다. 이런 정신의 문제를 더 풀어 보고 싶다면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*를 보라.

풀이

STEP III 2014, 문제 4

순수수학 • 적분 부등식

STEP III 2014, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/14-s3-q4

이 문제는 *Beyond STEP*의 4.7 절 **변분법**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch04/variations.html

핵심 아이디어

I_1의 제곱을 전개하여 I와 비교한다. 그 차이는 완전도함수(exact derivative) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y^2\tan x\right)$의 적분이다. $y(1) = 0$이고 $\tan 0 = 0$이므로 이 적분은 0이 된다. I를 제곱의 적분으로 쓰고 나면 I가 음이 아니라는 것은 분명하다. (ii)에서도 같은 방법이 통하는데, 이를 위해서는 $\sec^2$ 항이 정확히 a^2y^2을 만들어 내도록 b를 골라야 한다. 이때 문제가 될 수 있는 것은 $\tan bx$가 $[0,1]$ 안에서 발산하는 경우뿐이다.

풀이

문제의 의도대로, 처음부터 끝까지 y는 $[0,1]$에서 연속인 도함수를 가진다고 가정한다.

소문항 (i)

$0 \le x \le 1 < \frac{\pi}{2}$이므로 함수 $\tan x$는 $[0,1]$에서 연속이고, 따라서 I_1은 잘 정의된다. 제곱을 전개하면

$$I_1 = \int_0^1 \left((y')^2 + 2yy'\tan x + y^2\tan^2 x\right)\mathrm{d}x,$$

이므로, $1+\tan^2 x = \sec^2 x$를 이용하면

$$\begin{aligned} I - I_1 &= -\int_0^1 \left(y^2 + 2yy'\tan x + y^2\tan^2 x\right)\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^1 \left(2yy'\tan x + y^2\sec^2 x\right)\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

이다. 곱의 미분법(product rule)에 의해 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y^2\tan x\right) = 2yy'\tan x + y^2\sec^2 x$이고, 이것은 정확히 피적분함수(integrand)이다. 따라서

$$I - I_1 = -\Big[y^2\tan x\Big]_0^1 = -\left(y(1)^2\tan 1 - y(0)^2\tan 0\right) = 0,$$

이다. $y(1)=0$이고 $\tan 0 = 0$이기 때문이다. 그러므로 요구한 대로 $I = I_1$이다.

I_1은 길이가 양수인 구간에서 제곱을 적분한 것이므로 $I_1 \geq 0$이고, 따라서 $I \geq 0$이다.

이제 $I = 0$이라고 하자. 그러면 $I_1 = 0$이고, 피적분함수 $(y' + y\tan x)^2$은 연속이며 음이 아니므로 $[0,1]$의 모든 점에서 0이어야 한다(어느 한 점에서 양수라면 그 근처의 작은 구간에서도 양수가 되어 적분이 양수가 된다). 따라서 $0 \leq x \leq 1$에서 $y' + y\tan x = 0$이다.

생각해 보기 어딘가에서 0이 될 수도 있는 y로 나누지 않고 $y' + y\tan x = 0$을 어떻게 풀 수 있을까?

적분인자(integrating factor)를 이용한다. $[0,1]$에서 $\cos x > 0$이므로

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y}{\cos x}\right) = \frac{y'\cos x + y\sin x}{\cos^2 x} = \frac{y' + y\tan x}{\cos x} = 0,$$

이고, 따라서 어떤 상수 C에 대하여 $y = C\cos x$이다. 조건 $y(1)=0$에서 $C\cos 1 = 0$이고, $\cos 1 \neq 0$이므로 $C = 0$이다. 그러므로 $I = 0$이 되는 것은 $[0,1]$의 모든 x에 대하여 $y = 0$일 때뿐이다.

소문항 (ii)

$K = \int_0^1 (y' + ay\tan bx)^2\,\mathrm{d}x$라 하고, $b > 0$은 나중에 정하기로 한다. 전개하면

$$K = \int_0^1 \left((y')^2 + 2ayy'\tan bx + a^2y^2\tan^2 bx\right)\mathrm{d}x.$$

이다. 나타나기를 기대하는 도함수는

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(ay^2\tan bx\right) = 2ayy'\tan bx + aby^2\sec^2 bx = 2ayy'\tan bx + aby^2 + aby^2\tan^2 bx.$$

이다. 이것을 K의 피적분함수와 비교하면, $\tan^2$ 항은 $ab = a^2$, 곧 $b = a$일 때 정확히 일치한다. 이렇게 고르면

$$(y' + ay\tan ax)^2 = (y')^2 - a^2y^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(ay^2\tan ax\right),$$

이고, 따라서 $y(1) = 0$이고 $\tan 0 = 0$이므로

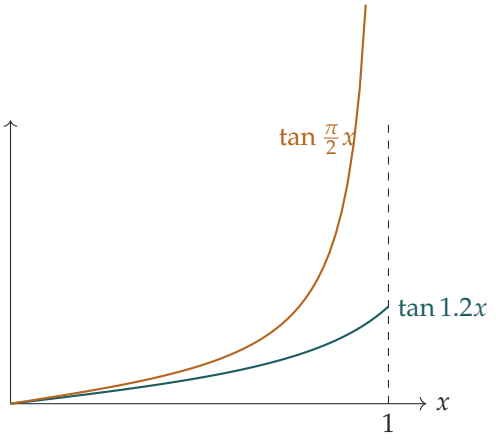
$$K = J + \left[ay^2 \tan ax\right]_0^1 = J + a\,y(1)^2 \tan a = J,$$

이다.

이 논증이 성립하려면 K가 존재하고 미적분학의 기본정리(fundamental theorem of calculus)를 적용할 수 있도록 $\tan ax$가 $[0,1]$ 전체에서 정의되고 연속이어야 한다. $a > 0$이므로 ax는 $[0,a]$ 위를 움직이고, tan가 그곳에서 연속인 것은 정확히 $a < \frac{\pi}{2}$일 때이다. 따라서 이 증명은

$$a < k = \frac{\pi}{2}.$$

에 대하여 성립한다. 이러한 a에 대하여 K는 제곱의 적분이므로 $J = K \geq 0$이다. (사실 (i)의 논증에서 $\cos x$ 대신 $\cos ax$를 쓰면, $J = 0$일 경우 $C\cos a = 0$인 $y = C\cos ax$가 되어야 하므로 $y \equiv 0$임을 알 수 있다. 즉 y가 항등적으로 0이 아니면 $J > 0$까지 얻는다.)



그림은 왜 $k = \frac{\pi}{2}$인지 보여 준다. $a < \frac{\pi}{2}$이면 가중치 $\tan ax$는 $[0,1]$에서 유계이지만, $a = \frac{\pi}{2}$이면 끝점 $x = 1$에서 점근선(asymptote)을 가진다.

$a = \frac{\pi}{2}$인 경우

증명이 어디를 살펴봐야 할지 알려 준다. $K = 0$이 되려면 $y' + ay\tan ax = 0$이어야 하고, 그 해는 $y = C\cos ax$이다. $a < \frac{\pi}{2}$이면 이 해들은 조건 $y(1) = 0$을 만족하지 못하지만, $a = \frac{\pi}{2}$이면 만족한다. 그래서

$$y = \cos\tfrac{\pi x}{2}, \qquad y' = -\tfrac{\pi}{2}\sin\tfrac{\pi x}{2},$$

로 놓아 본다. 이 함수는 모든 곳에서 0인 것은 아니며 $y(1) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$이다. 그러면

$$J = \frac{\pi^2}{4}\int_0^1 \left(\sin^2\tfrac{\pi x}{2} - \cos^2\tfrac{\pi x}{2}\right)\mathrm{d}x = -\frac{\pi^2}{4}\int_0^1 \cos\pi x\,\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{\pi^2}{4}\Big[\frac{\sin\pi x}{\pi}\Big]_0^1 = 0.$$

이다. 따라서 $a = k$일 때 $y = \cos\frac{\pi x}{2}$(또는 그것의 0이 아닌 상수배)는 $J = 0$을 준다.

검산

- (i)에서 $y = 1 - x$로 놓으면 $I = \int_0^1 (1-(1-x)^2)\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} > 0$이고, I_1을 수치적으로 계산해도 0.6667이 나온다.
- $(1-x)$에 임의의 삼차식을 곱한 여러 함수와 $(0, \frac{\pi}{2})$의 임의의 a에 대하여, 컴퓨터로 확인한 결과 높은 정확도로 $J = K > 0$이었다.
- 경계 $k = \frac{\pi}{2}$는 최선이다. $y = \cos\frac{\pi x}{2}$로 놓으면 $J = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{4} - a^2\right)$이고, 이는 모든 $a > \frac{\pi}{2}$에 대하여 음수이다(예를 들어 $a = 2$이면 $J \approx -0.766$).

흔한 실수

- $x = 0$에서의 경계항(boundary term)이 0이 되는 것은 $y(0)$에 대한 어떤 조건 때문이 아니라 $\tan 0 = 0$이기 때문이라는 점을 잊는 것. $y(0)$에 대해서는 아무것도 가정하지 않는다.
- 이유를 밝히지 않고 $I_1 = 0$에서 $y' + y\tan x = 0$을 결론짓는 것. 중요한 것은 피적분함수의 연속성이다.
- $\tan bx$가 $[0,1]$에서 유한한지 확인하지 않고 b를 고르는 것. 조건 $a < \frac{\pi}{2}$는 바로 여기에서 나온다.

STEP 너머

$y(1) = 0$일 때의 부등식 $\int_0^1 (y')^2\,\mathrm{d}x \geq \frac{\pi^2}{4}\int_0^1 y^2\,\mathrm{d}x$는 비르팅거(Wirtinger) 부등식(또는 푸앵카레(Poincaré) 부등식)의 한 형태이며, 상수 $\frac{\pi^2}{4}$는 $y'(0) = 0$, $y(1) = 0$인 $-y'' = \lambda y$의 가장 작은 고윳값(eigenvalue)이다. 극값을 주는 함수 $\cos\frac{\pi x}{2}$는 그 고유함수(eigenfunction)이다. 변분법(calculus of variations)에서, 잘 고른 도함수를 이용하여 완전제곱식을 만드는(completing the square) 방법은 정상 경로(stationary path)가 실제로 최솟값인지 판정하는 르장드르(Legendre) 판정법과 야코비(Jacobi) 판정법의 바탕이 되는 아이디어이다. 이런 성격의 문제를 더 보려면 Siklos, *Advanced Problems in*

Mathematics(수학 심화 문제)를, 그 밑바탕에 있는 고윳값 문제에 대해서는 Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)를 참고하라.

풀이

STEP III 2014, 문제 5

순수수학 • 기하에서의 복소수

STEP III 2014, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/14-s3-q5

핵심 아이디어

복소평면(complex plane)에서 "평행하고 길이가 같다"는 것은 곧 "변위 벡터(displacement vector)로서 같다"는 뜻이고, 반시계 방향으로 직각만큼 회전하는 것은 i를 곱하는 것이다. 따라서 이 문제의 모든 기하학적 조건은 꼭짓점에 대한 짧은 일차방정식이 된다. 변 위에 세운 정사각형의 중심은 변의 중점까지 간 다음, 그 변에 수직인 방향으로 변 길이의 절반만큼 바깥쪽으로 나아가서 찾는다.

풀이

평행사변형 판정 조건

먼저 $a+c=b+d$라고 가정하자. 그러면

$$b-a=c-d \qquad \text{그리고} \qquad d-a=c-b,$$

이므로 변위 $\overrightarrow{AB}$는 $\overrightarrow{DC}$와 같고 $\overrightarrow{AD}$는 $\overrightarrow{BC}$와 같다. 같은 변위는 평행하고 길이가 같으므로, 두 쌍의 대변이 모두 평행하고 길이가 같다. 즉 $ABCD$는 평행사변형(parallelogram)이다.

역으로 $ABCD$가 평행사변형이라고 가정하자. 평행하고 길이가 같은 두 선분의 변위는 서로 같거나 부호가 반대이므로

$$b-a=\varepsilon(c-d), \qquad d-a=\eta(c-b), \qquad \varepsilon,\eta\in\{1,-1\}.$$

$\varepsilon=1$이거나 $\eta=1$이면, 어느 식이든 정리하면 $a+c=b+d$가 된다. 나머지 경우는 $\varepsilon=\eta=-1$, 즉 $b-a=d-c$이고 $d-a=b-c$인 경우뿐이다. 첫째 식에서 둘째 식을 빼면 $b-d=d-b$이므로 $b=d$인데, 이는 꼭짓점이 서로 다르므로 불가능하다. 따라서 $a+c=b+d$이고, 동치가 증명되었다.

정사각형 판정 조건

$ABCD$가 평행사변형이라 하고, 두 대각선(diagonal)의 공통 중점(즉 평행사변형의 중심)을 $m = \frac{1}{2}(a+c) = \frac{1}{2}(b+d)$라 하자. 그러면

$$a-m = \tfrac{1}{2}(a-c), \qquad b-m = \tfrac{1}{2}(b-d), \qquad c-m = -(a-m), \qquad d-m = -(b-m).$$

$ABCD$가 **정사각형**(*square*)**이면**, 두 대각선은 길이가 같고 서로를 수직이등분하므로, B는 A를 m을 중심으로 직각만큼 회전하여 얻어진다. 꼭짓점에 반시계 방향으로 이름을 붙였으므로 이 회전은 반시계 방향이다. 따라서 $b-m = \mathrm{i}(a-m)$이고, 이는 $\frac{1}{2}(b-d) = \frac{1}{2}\mathrm{i}(a-c)$, 즉 $\mathrm{i}(a-c) = b-d$이다.

역으로, $\mathrm{i}(a-c) = b-d$이면 $w = a-m \neq 0$이라 하자. 그러면

$$a-m = w, \quad b-m = \mathrm{i}w, \quad c-m = -w, \quad d-m = -\mathrm{i}w,$$

이므로 네 꼭짓점은 w를 m을 중심으로 차례로 90°씩 회전한 것이다. 이들은 정사각형의 꼭짓점이다(네 변의 길이가 모두 $|w|\sqrt{2}$이고, 각 변은 앞의 변에 i를 곱한 것이다). 이로써 두 번째 동치가 증명되었다.

소문항 (i)

꼭짓점 P, Q, R, S는 반시계 방향으로 놓여 있으므로, P에서 Q로 걸어갈 때 $PQRS$의 내부는 왼쪽에 있다. 따라서 PQ 위에 바깥쪽으로 세운 정사각형은 오른쪽에 있다.

중심 X는 PQ의 중점 $\frac{1}{2}(p+q)$에서 PQ에 수직인 방향으로 오른쪽으로 $\frac{1}{2}|q-p|$(변 길이의 절반)만큼 이동하여 도달한다. $q-p$에 $-\mathrm{i}$를 곱하면 시계 방향으로, 즉 오른쪽으로 90° 회전하므로, 이 이동은 $-\frac{1}{2}\mathrm{i}(q-p)$이다. 따라서

$$x = \tfrac{1}{2}(p+q) - \tfrac{1}{2}\mathrm{i}(q-p) = \tfrac{1}{2}\big(p(1+\mathrm{i}) + q(1-\mathrm{i})\big),$$

이고, 이것이 구하려던 식이다.

> ? **생각해 보기** 왜 $+\mathrm{i}$가 아니라 $-\mathrm{i}$인가?

$+\mathrm{i}$를 곱하면 $\overrightarrow{PQ}$가 왼쪽으로 회전하여 사각형 안쪽을 향하게 되므로, 안쪽에 세운 정사각형의 중심을 얻게 된다. 모든 내각이 180°보다 작으므로 내부는 각 변의 왼쪽에 완전히 놓이고, 따라서 오른쪽은 확실히 바깥쪽이다.

소문항 (ii)

소문항 (i)을 각 변에 차례로 적용하면(모든 변을 내부가 왼쪽에 오도록 지나가므로 같은 논리가 모든 변에 성립한다)

$$2x = p(1+\mathrm{i}) + q(1-\mathrm{i}), \qquad 2y = q(1+\mathrm{i}) + r(1-\mathrm{i}),$$
$$2z = r(1+\mathrm{i}) + s(1-\mathrm{i}), \qquad 2t = s(1+\mathrm{i}) + p(1-\mathrm{i}).$$

판정 조건에 나오는 두 식을 비교해 보자.

마주 보는 꼭짓점의 합.

$$\begin{aligned} 2(x+z) - 2(y+t) &= (p+r)(1+\mathrm{i}) + (q+s)(1-\mathrm{i}) - (q+s)(1+\mathrm{i}) - (p+r)(1-\mathrm{i}) \\ &= 2\mathrm{i}\,(p+r-q-s), \end{aligned}$$

이므로

$$x + z - (y+t) = \mathrm{i}\big(p+r-(q+s)\big). \tag{1}$$

대각선.

$$2\mathrm{i}(x-z) = \mathrm{i}(p-r)(1+\mathrm{i}) + \mathrm{i}(q-s)(1-\mathrm{i}) = (p-r)(\mathrm{i}-1) + (q-s)(1+\mathrm{i}),$$
$$2(y-t) = (q-s)(1+\mathrm{i}) + (r-p)(1-\mathrm{i}) = (q-s)(1+\mathrm{i}) + (p-r)(\mathrm{i}-1).$$

두 식이 똑같으므로, 이러한 **모든** 사각형 $PQRS$에 대하여

$$\mathrm{i}(x-z) = y - t \tag{2}$$

가 성립한다. 즉 선분 XZ와 YT는 항상 길이가 같고 서로 수직이다.

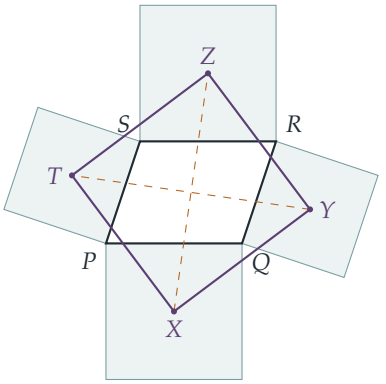
> **생각해 보기** (2)가 항상 성립한다면, $XYZT$가 정사각형인지 아닌지는 무엇이 결정하는가?

평행사변형 조건뿐이다. 이제 조각들을 맞추어 보자.

$PQRS$**가 평행사변형이면**, $p+r = q+s$이므로 (1)에 의해 $x+z = y+t$이고, 첫 번째 결과에 의해 $XYZT$는 평행사변형이다. 여기에 (2)를 더하면, 정사각형 판정 조건에 의해 $XYZT$는 정사각형이다. (그 판정 조건의 역 방향은 꼭짓점 이름 붙이는 방향에 대한 가정이 필요 없다. 또 $X \neq Z$인데, $x = z$이면 $r - p = \mathrm{i}(s-q)$가 되어 $\overrightarrow{PR}$가 $\overrightarrow{QS}$를 **반시계 방향**으로 직각만큼 회전한 것이 되기 때문이다. 그러나 반시계 방향으로 이름 붙인 볼록 사각형(convex quadrilateral)에서 $\overrightarrow{PR}$는 항상 $\overrightarrow{QS}$를 **시계 방향**으로 0°와 180° 사이의 각만큼 회전하고 길이를 조정한 것이다.)

$XYZT$**가 정사각형이면**, 특히 평행사변형이므로 첫 번째 결과에 의해 $x+z = y+t$이다. (1)에 의해 $\mathrm{i}(p+r-q-s) = 0$이므로 $p+r = q+s$이고, $PQRS$는 평행사변형이다.

따라서 $XYZT$가 정사각형일 필요충분조건(if and only if)은 $PQRS$가 평행사변형인 것이다.



검산

평행사변형 $p = 0$, $q = 4$, $r = 5 + 3\mathrm{i}$, $s = 1 + 3\mathrm{i}$(위 그림)를 생각하자. 공식에 의해 $x = 2 - 2\mathrm{i}$, $y = 6 + \mathrm{i}$, $z = 3 + 5\mathrm{i}$, $t = -1 + 2\mathrm{i}$이다. $XYZT$의 변은 $4 + 3\mathrm{i}$, $-3 + 4\mathrm{i}$, $-4 - 3\mathrm{i}$, $3 - 4\mathrm{i}$이고, 각각 앞의 변에 i를 곱한 것이므로 한 변의 길이가 5인 정사각형이다. 소문항 (i)의 검산으로, $x = 2 - 2\mathrm{i}$는 실제로 PQ 아래에 있는 꼭짓점 0, 4, $4 - 4\mathrm{i}$, $-4\mathrm{i}$인 정사각형의 중심이다. 무작위로 만든 수천 개의 볼록 사각형에 대해 컴퓨터로 확인한 결과, 항등식 (2)는 매번 성립했고 $XYZT$는 $PQRS$가 평행사변형일 때에만 정확히 정사각형이었다.

흔한 실수

- 소문항 (i)에서 $+\mathrm{i}$를 사용하여 정사각형을 사각형 안쪽에 놓는 것.
- 평행사변형 판정 조건에서 "평행하고 길이가 같다"는 조건이 $b - a = -(c - d)$도 허용하므로 이 경우를 배제해야 한다는 것을 잊는 것.
- "필요충분조건"의 한 방향만 증명하는 것. 소문항 (ii)에서 "정사각형 $\Rightarrow$ 평행사변형" 방향은 (1)만 있으면 된다.

STEP 너머

항등식 (2)는 반 오벨 정리(van Aubel's theorem)이다. 임의의 사각형에서 마주 보는 바깥쪽 정사각형의 중심을 잇는 두 선분은 길이가 같고 서로 수직이다. 이는 일반적인 원리의 작은 예이다. 회전과 중점으로 이루어진 기하학적 작도는 꼭짓점에 대한 선형 사상(linear map)이므로, 그에 관한 정리는 대수적 항등식으로 환원된다(정삼각형에 관한 나폴레옹 정

리(Napoleon's theorem)도 또 하나의 예이다). Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 복소수 곱셈에 대한 이러한 기하학적 관점을 아름답게 전개한다.

풀이

STEP III 2014, 문제 6

순수수학 • 볼록성을 이용한 부등식

> **STEP III 2014, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/14-s3-q6

핵심 아이디어

값이 0에서 출발하고 기울기(slope)도 0에서 출발하며 그래프가 위로 휘어지는 함수는 0보다 커질 수밖에 없다. 주어진 사실을 두 번 적분하면 이 그림이 그대로 증명(proof)이 된다. 그러면 문제의 각 부등식(inequality)은 모든 항을 한쪽으로 옮겨 $f(0) = f'(0) = 0$인 함수 f를 만들고, f''이 양수임을 확인하는 문제가 된다. 진짜 일은 f''이 간단하게 나오도록 알맞은 꼴을 고르는 것이다.

풀이

첫 번째 결과

$0 < t < x_0$에서 $f''(t) > 0$이고 $f(0) = f'(0) = 0$이라고 하자. $0 < x < x_0$인 x를 하나 고정한다.

$h = f''$으로 두자. $0 < t < x$에서 $f''(t) > 0$이므로, 주어진 결과에 의해

$$f'(x) = f'(x) - f'(0) = \int_0^x f''(t)\,\mathrm{d}t > 0.$$

이것은 $(0, x_0)$의 모든 x에 대해 성립하므로 $0 < t < x_0$에서 $f'(t) > 0$이다.

이제 이번에는 $h = f'$으로 두고 주어진 결과를 다시 적용한다. $0 < x < x_0$이면 $0 < t < x$에서 $f'(t) > 0$이므로

$$f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t > 0.$$

따라서 요구한 대로 $0 < t < x_0$에서 $f(t) > 0$이다. 앞으로는 줄곧 $x_0 = \frac{1}{2}\pi$로 두고 이 결과를 쓴다.

소문항 (i)

$f(x) = 1 - \cos x \cosh x$라 하자. 그러면 $f(0) = 1 - 1 = 0$이고, 곱의 미분법(product rule)에 의해

$$f'(x) = \sin x \cosh x - \cos x \sinh x, \qquad f'(0) = 0 - 0 = 0.$$

한 번 더 미분하면

$$\begin{aligned} f''(x) &= (\cos x \cosh x + \sin x \sinh x) - (-\sin x \sinh x + \cos x \cosh x) \\ &= 2 \sin x \sinh x. \end{aligned}$$

$0 < x < \frac{1}{2}\pi$에서 $\sin x > 0$이고 $\sinh x > 0$이므로 $f''(x) > 0$이다. 첫 번째 결과에 의해 $f(x) > 0$, 즉

$$\cos x \cosh x < 1 \qquad \text{단, } 0 < x < \tfrac{1}{2}\pi.$$

소문항 (ii)

> **생각해 보기** 첫 번째 결과를 어떤 함수에 적용해야 할까? $\frac{\sin x}{x} - \frac{1}{\cosh x}$를 그대로 쓰면 복잡해 보인다.

먼저 분수를 없앤다. $0 < x < \frac{1}{2}\pi$에서는 x, $\sin x$, $\sinh x$, $\cosh x$가 모두 양수이므로, 양수를 곱해도 부등호의 방향은 바뀌지 않는다. 그러면

$$\frac{1}{\cosh x} < \frac{\sin x}{x} \iff x < \sin x \cosh x, \qquad \frac{\sin x}{x} < \frac{x}{\sinh x} \iff \sin x \sinh x < x^2.$$

(첫 번째 식에는 $x \cosh x > 0$을, 두 번째 식에는 $x \sinh x > 0$을 곱한다.) 곱 $\sin x \cosh x$와 $\sin x \sinh x$는 깔끔하게 미분되므로 이 꼴이 알맞은 꼴이다.

왼쪽 부등식. $g(x) = \sin x \cosh x - x$라 하자. 그러면 $g(0) = 0$이고

$$g'(x) = \cos x \cosh x + \sin x \sinh x - 1, \qquad g'(0) = 1 + 0 - 1 = 0.$$

한 번 더 미분하면 $\sin x \cosh x$ 항들이 소거된다.

$$\begin{aligned} g''(x) &= (-\sin x \cosh x + \cos x \sinh x) + (\cos x \sinh x + \sin x \cosh x) \\ &= 2 \cos x \sinh x, \end{aligned}$$

$0 < x < \frac{1}{2}\pi$에서는 $\cos x > 0$이고 $\sinh x > 0$이므로 이 값은 양수이다. (상한 $\frac{1}{2}\pi$가 중요한 곳이 바로 여기이다.) 첫 번째 결과에 의해 $g(x) > 0$이므로 $x < \sin x \cosh x$이고, 따라서 $\frac{1}{\cosh x} < \frac{\sin x}{x}$이다.

오른쪽 부등식. $k(x) = x^2 - \sin x \sinh x$라 하자. 그러면 $k(0) = 0$이고

$$k'(x) = 2x - \cos x \sinh x - \sin x \cosh x, \qquad k'(0) = 0.$$

한 번 더 미분하면 $\sin x \sinh x$ 항들이 소거된다.

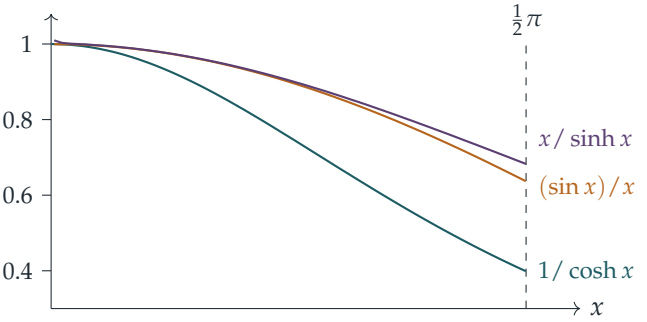
$$\begin{aligned} k''(x) &= 2 - (-\sin x \sinh x + \cos x \cosh x) - (\cos x \cosh x + \sin x \sinh x) \\ &= 2 - 2\cos x \cosh x. \end{aligned}$$

소문항 (i)에 의해 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$에서 $\cos x \cosh x < 1$이므로 그 범위에서 $k''(x) > 0$이다. 첫 번째 결과에 의해 $k(x) > 0$이므로 $\sin x \sinh x < x^2$이고, 따라서 $\frac{\sin x}{x} < \frac{x}{\sinh x}$이다.

두 결과를 합치면 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$에서

$$\frac{1}{\cosh x} < \frac{\sin x}{x} < \frac{x}{\sinh x},$$

이 되어 요구한 결과가 성립한다.



검산

- 급수 전개(series): $\cos x \cosh x = 1 - \frac{1}{6}x^4 + \cdots$이므로 작은 x에서 실제로 1보다 살짝 작아지며, 이는 (i)과 일치한다. 마찬가지로 $\frac{1}{\cosh x} \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$, $\frac{\sin x}{x} \approx 1 - \frac{1}{6}x^2$, $\frac{x}{\sinh x} \approx 1 - \frac{1}{6}x^2$이므로, 작은 x에서 왼쪽 부등식은 분명하고 오른쪽 부등식은 그다음 항들이 결정한다(x^4의 계수는 $\frac{\sin x}{x}$에서 $\frac{1}{120}$, $\frac{x}{\sinh x}$에서 그보다 큰 $\frac{7}{360}$이다).
- $x = 1$에서: $\cos 1 \cosh 1 \approx 0.834 < 1$이고, $\frac{1}{\cosh 1} \approx 0.648 < \sin 1 \approx 0.841 < \frac{1}{\sinh 1} \approx 0.851$이다.
- $x = \frac{1}{2}\pi$ 근처인 $x = 1.57$에서: 세 값은 각각 약 0.399, 0.637, 0.683이고, $\cos x \cosh x \approx 0.002$이다.

흔한 실수

- 첫 번째 결과를 $\frac{\sin x}{x} - \frac{1}{\cosh x}$ 자체에 적용하는 것: 이 함수는 0에서 정의조차 되지 않고, 도함수도 다루기 불편하다. 먼저 분모를 없애되, 곱하는 모든 인수가 양수인지 확인한다.

- $f(0) = 0$뿐 아니라 $f'(0) = 0$도 확인해야 한다는 것을 잊는 것: 이것이 없으면 첫 번째 결과를 적용할 수 없다.
- 두 번째 부등식에 소문항 (i)이 필요하다는 것을 알아차리지 못하는 것: $k'' = 2 - 2\cos x \cosh x$가 양수인 이유가 바로 (i)이다.

STEP 너머

첫 번째 결과는 평균값 정리(mean value theorem)를 이용한 논증의 한 형태로, 도함수가 양수인 함수는 증가한다는 사실을 두 번 적용한 것이다. 이 결과는 볼록함수(convex function)가 접선(tangent line), 여기서는 원점에서의 접선 $y = 0$보다 위에 있다는 것을 말해 주며, 이런 "이계도함수(second derivative) 비교" 기법은 초등함수 사이의 부등식을 증명하는 표준적인 방법이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 평균값 정리와 그 결과들을 꼼꼼하게 전개한다.

풀이

STEP III 2014, 문제 7

순수수학 • 벡터와 원에 내접하는 사각형

STEP III 2014, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

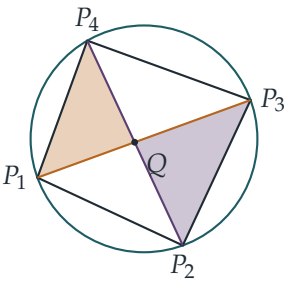
step.maths.org/questions/14-s3-q7

핵심 아이디어

(i)번은 교차하는 현의 정리(intersecting chords theorem)이며, 같은 활꼴에 대한 원주각(angles in the same segment)에서 나온다. 벡터 문항들은 같은 사실을 한 번 더 보여 준다. 평면 위의 네 점은 "아핀 종속(affinely dependent)"이고, 그 종속 관계의 계수가 두 대각선(diagonal)의 교점의 위치를 알려 주므로, 계수들이 각 대각선을 알려진 비율로 나눈다. 이 비율들을 (i)에 대입하면 마지막 관계식을 얻는다.

풀이

이 도형에 관한 두 가지 사실을 풀이 내내 사용한다. 첫째, 직선은 원과 많아야 두 점에서 만나므로 P_i 가운데 어느 세 점도 한 직선 위에 있지(collinear) 않다. 둘째, 꼭짓점들이 원을 따라 차례로 이름 붙어 있으므로 P_1과 P_3은 현(chord) P_2P_4가 잘라 내는 서로 다른 두 호(arc) 위에 있다. 따라서 두 점은 직선 P_2P_4의 서로 반대쪽에 있고, 두 대각선은 선분 P_1P_3과 P_2P_4의 내부에 엄밀히 놓인 점 Q에서 교차한다.



소문항 (i)

삼각형 P_1QP_4와 P_2QP_3에서

- $\angle P_1QP_4 = \angle P_2QP_3$이다. 두 각은 Q에서의 맞꼭지각(vertically opposite angles)이기 때문이다.
- $\angle QP_1P_4 = \angle P_3P_1P_4$이고 $\angle QP_2P_3 = \angle P_4P_2P_3$이다. 이 두 각은 모두 같은 호($P_1$과 P_2를 지나 P_4에서 P_3까지 가는 호) 위의 점 P_1, P_2에서 현 P_3P_4를 바라보는 각이므로 서로 같다.

따라서 두 삼각형은 $P_1 \leftrightarrow P_2$, $Q \leftrightarrow Q$, $P_4 \leftrightarrow P_3$의 대응으로 닮음(similar)이다. 대응하는 변의 길이는 비례하므로

$$\frac{P_1Q}{P_2Q} = \frac{QP_4}{QP_3}, \qquad \text{이므로} \qquad (P_1Q)(QP_3) = (P_2Q)(QP_4),$$

이고, 이것이 보이려던 것이다.

소문항 (ii)

원에 내접하는 사각형(cyclic quadrilateral)은 한 평면 위에 있으므로, 세 벡터 $\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_1$은 모두 2차원 공간 안에 있다. 2차원에서 세 벡터는 선형 종속(linearly dependent)이므로, 모두 0은 아닌 수 b_2, b_3, b_4가 존재하여

$$b_2(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) + b_3(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1) + b_4(\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_1) = \mathbf{0}.$$

이 성립한다. (구체적으로 말하면, P_1, P_2, P_3이 한 직선 위에 있지 않으므로 $\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$과 $\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1$은 평행하지 않고, 따라서 이 두 벡터는 평면을 생성(span)하며 $\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_1$은 이들의 일차결합이다. 이때 $b_4 = -1$로 잡을 수 있다.) 이제 $a_1 = -(b_2 + b_3 + b_4)$, 그리고 $i = 2, 3, 4$에 대하여 $a_i = b_i$로 두자. 그러면 $\sum a_i = 0$이고, a_i가 모두 0은 아니며

$$\sum_{i=1}^{4} a_i\mathbf{p}_i = a_1\mathbf{p}_1 + b_2\mathbf{p}_2 + b_3\mathbf{p}_3 + b_4\mathbf{p}_4 = b_2(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) + b_3(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1) + b_4(\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_1) = \mathbf{0},$$

이므로 $(*)$가 성립한다.

소문항 (iii)

$a_1 + a_3 \neq 0$. 그렇지 않다고, 즉 $a_1 + a_3 = 0$이라고 가정하자. 그러면 $(*)$의 첫째 식에 의하여 $a_2 + a_4 = 0$이기도 하므로 $a_3 = -a_1$, $a_4 = -a_2$이다. 둘째 식은

$$a_1(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3) + a_2(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_4) = \mathbf{0}.$$

이 된다. 직선 P_1P_3과 P_2P_4는 서로 다르고(그렇지 않으면 네 점이 모두 한 직선 위에 있게 된다) Q에서 만나므로 평행하지 않다. 따라서 $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3$과 $\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_4$는 영벡터가 아니고 평행하

지도 않으므로 $a_1 = a_2 = 0$일 수밖에 없다. 그러면 네 a_i가 모두 0이 되어 모순이다. 따라서 $a_1 + a_3 \neq 0$이고, 마찬가지로 $a_2 + a_4 = -(a_1 + a_3) \neq 0$이다.

교점. $(*)$로부터 $a_1\mathbf{p}_1 + a_3\mathbf{p}_3 = -(a_2\mathbf{p}_2 + a_4\mathbf{p}_4)$이고 $a_1 + a_3 = -(a_2 + a_4)$이다. 앞의 식을 뒤의 식으로 나누면

$$\mathbf{r} = \frac{a_1\mathbf{p}_1 + a_3\mathbf{p}_3}{a_1 + a_3} = \frac{a_2\mathbf{p}_2 + a_4\mathbf{p}_4}{a_2 + a_4}.$$

이다. 첫째 꼴은 $\mathbf{r} = \mathbf{p}_1 + \dfrac{a_3}{a_1 + a_3}(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1)$임을 보여 주므로, 이 점은 직선 P_1P_3 위의 점이다. 같은 방법으로 둘째 꼴은 이 점이 직선 P_2P_4 위의 점임을 보여 준다. 평행하지 않은 두 직선은 오직 한 점에서만 만나므로, $\mathbf{r}$은 Q의 위치 벡터(position vector)이다.

? **생각해 보기** Q에 대한 이 공식을 어떻게 길이 P_1Q와 QP_3으로 바꿀 수 있을까?

빼 보면 된다. $\mathbf{q} = \mathbf{r}$을 이용하면

$$\mathbf{q} - \mathbf{p}_1 = \frac{a_3(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1)}{a_1 + a_3}, \qquad \mathbf{p}_3 - \mathbf{q} = \frac{a_1(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1)}{a_1 + a_3}.$$

이다. 길이를 취하면 $P_1Q = \dfrac{|a_3|}{|a_1 + a_3|}P_1P_3$, $QP_3 = \dfrac{|a_1|}{|a_1 + a_3|}P_1P_3$이다. 같은 방법으로 $\mathbf{r}$의 둘째 꼴로부터 $P_2Q = \dfrac{|a_4|}{|a_2 + a_4|}P_2P_4$, $QP_4 = \dfrac{|a_2|}{|a_2 + a_4|}P_2P_4$이다.

부호. Q는 P_1과 P_3 사이에 엄밀히 놓여 있으므로, 분수 $\frac{a_3}{a_1+a_3}$은 0과 1 사이에 엄밀히 놓인다. 그러면 $\frac{a_1}{a_1+a_3} = 1 - \frac{a_3}{a_1+a_3}$도 0과 1 사이에 엄밀히 놓인다. 두 양수의 곱은 양수이므로

$$\frac{a_1a_3}{(a_1 + a_3)^2} > 0, \qquad \text{즉, } a_1a_3 > 0.$$

이다. P_2P_4에 대하여 같은 논증을 하면 $a_2a_4 > 0$이다. 따라서 $|a_1a_3| = a_1a_3$이고 $|a_2a_4| = a_2a_4$이다.

결론 이끌어 내기. (i)에 대입하면

$$\frac{a_1a_3}{(a_1 + a_3)^2}(P_1P_3)^2 = (P_1Q)(QP_3) = (P_2Q)(QP_4) = \frac{a_2a_4}{(a_2 + a_4)^2}(P_2P_4)^2.$$

이다. $(a_2 + a_4)^2 = (a_1 + a_3)^2 \neq 0$이므로 양변에 이를 곱하면

$$a_1a_3(P_1P_3)^2 = a_2a_4(P_2P_4)^2,$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

검산

- 꼭짓점이 $(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)$인 정사각형을 생각하자. 그러면 $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_3 = \mathbf{0} = \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_4$이므로 $a = (1,-1,1,-1)$은 $(*)$를 만족한다. 공식에 따르면 Q는 원점이고, $a_1a_3(P_1P_3)^2 = 4 = a_2a_4(P_2P_4)^2$이다.

- 대칭이 아닌 경우로, 그림에서처럼 단위원 위에서 각 $200°, 290°, 20°, 120°$에 있는 점 $P_1, \ldots, P_4$를 잡자. $a_1a_3 > 0$과 $a_2a_4 > 0$을 포함한 (iii)의 세 주장이 모두, 이 경우와 수천 개의 무작위 원에 내접하는 사각형에 대하여 컴퓨터로 10^{-10} 이내의 오차로 확인되었다.
- 모든 a_i에 같은 인수 λ를 곱해도 답은 그대로 유지되며, 마땅히 그래야 한다. 마지막 관계식의 양변이 모두 λ^2배가 되기 때문이다.

흔한 실수

- (i)에서 엉뚱한 각끼리 짝짓는 것. P_1과 P_2에서의 같은 두 각은 현 P_3P_4 위에 서 있으며, 이것이 어느 변끼리 대응하는지를 정해 준다.
- (iii)에서 아무 설명 없이 절댓값 기호를 떼어 버리는 것. 절댓값이 붙은 관계식은 쉽다. 정작 해야 할 일은 $a_1a_3 > 0$과 $a_2a_4 > 0$을 보이는 것이며, 여기에는 Q가 두 대각선의 내부에 있다는 사실이 쓰인다.
- $a_1 + a_3 \neq 0$을 증명할 때 두 대각선이 왜 평행하지 않은지를 잊는 것.

STEP 너머

양 $(P_1Q)(QP_3)$은 원에 대한 점 Q의 **방멱**(power)이며, Q를 지나는 모든 현에 대하여 같다. (ii)번은 평면 위의 네 점이 아핀 종속이라는 명제이다. 수 a_i는 무게중심 좌표(barycentric coordinates)와 비슷한 좌표이고, Q에 대한 공식은 아핀 기하(affine geometry)가 좌표 없이 점, 직선, 비율을 어떻게 다루는지를 처음으로 엿보게 해 준다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 선형 종속과 (ii)의 바탕에 있는 차원(dimension) 세기를 다룬다.

풀이

STEP III 2014, 문제 8

순수수학 • 급수의 수렴

STEP III 2014, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/14-s3-q8

이 문제는 *Beyond STEP*의 2.3 절 **발산하는 급수와 수렴하는 그 사촌**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch02/kempner.html

핵심 아이디어

양의 정수를 블록(block) $[k^n, k^{n+1})$으로 잘게 나눈다. 한 블록에 속한 모든 항은 그 블록이 시작하는 곳에서의 값과 다음 블록이 시작하는 곳에서의 값 사이에 있으므로, 각 블록의 합은 항의 개수에 이 두 값을 각각 곱한 것 사이에 끼인다. 블록들을 모두 더하면 다루기 까다로운 급수(series)가 기하급수(geometric series)로, 또는 블록마다 일정한 항을 갖는 급수로 바뀌고, 그것이 발산(diverge)하는지 곧바로 알 수 있다. 숫자 2가 들어 있지 않은 정수들에 대해서도, 각 블록에 그러한 정수가 몇 개 있는지만 세면 똑같은 방법이 통한다.

풀이

블록 부등식

블록 $k^n \le r \le k^{n+1} - 1$에는

$$(k^{n+1} - 1) - k^n + 1 = k^{n+1} - k^n = k^n(k-1)$$

개의 정수가 들어 있다. f는 순감소(strictly decreasing)하므로, 블록에 속한 모든 r에 대하여

$$\mathrm{f}(k^{n+1}) < \mathrm{f}(r) \le \mathrm{f}(k^n),$$

이다. 첫 번째 부등식은 $r < k^{n+1}$이기 때문이고, 두 번째 부등식은 $r \geq k^n$이기 때문이다(등호는 $r = k^n$일 때만 성립한다). 이를 r의 $k^n(k-1)$개의 값에 대하여 모두 더하면

$$k^n(k-1)\,\mathrm{f}(k^{n+1}) \leq \sum_{r=k^n}^{k^{n+1}-1} \mathrm{f}(r) \leq k^n(k-1)\,\mathrm{f}(k^n),$$

을 얻으며, 이것이 보이려던 것이다. (사실 왼쪽 부등식은 등호 없이 성립한다.)



$k = 2$일 때의 블록들과 각 블록에 속한 항의 개수.

소문항 (i)

$k = 2, \mathrm{f}(r) = \frac{1}{r}$로 잡자. 이 함수는 순감소한다. 블록 부등식은

$$\frac{2^n}{2^{n+1}} \leq \sum_{r=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{r} \leq \frac{2^n}{2^n}, \qquad \text{즉} \qquad \tfrac{1}{2} \leq \sum_{r=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{r} \leq 1.$$

이 된다. 각 블록은 다음 블록이 시작하기 바로 앞에서 끝나므로, $n = 0, 1, \ldots, N$에 대한 블록들은 빈틈없이 이어져 정확히 $1 \leq r \leq 2^{N+1} - 1$을 덮는다. $N+1$개의 부등식을 모두 더하면

$$\frac{N+1}{2} \leq \sum_{r=1}^{2^{N+1}-1} \frac{1}{r} \leq N+1.$$

이제 결론을 이끌어 내자. 부분합(partial sum) $H_m = \sum_{r=1}^{m} \frac{1}{r}$은 m에 대하여 증가하고, $H_{2^{N+1}-1} \geq \frac{N+1}{2}$이며, 이 값은 N을 충분히 크게 잡으면 원하는 어떤 수보다도 크게 만들 수 있다. 따라서 부분합은 유계(bounded)가 아니고, $\sum \frac{1}{r}$은 수렴(converge)하지 않는다.

소문항 (ii)

$k = 2, \mathrm{f}(r) = \frac{1}{r^3}$로 잡자. 이 함수도 순감소한다. 이번에는 오른쪽 부등식만 있으면 된다.

$$\sum_{r=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{r^3} \leq \frac{2^n}{2^{3n}} = \frac{1}{4^n}.$$

앞에서처럼 $n = 0, 1, \ldots, N$에 대하여 더하면

$$\sum_{r=1}^{2^{N+1}-1} \frac{1}{r^3} \leq \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{4^n} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

생각해 보기 이것은 부분합 가운데 일부만을 위로 누른다. 그런데 왜 무한급수의 합까지 위로 눌리는가?

모든 항이 양수이므로 부분합은 증가한다. 임의의 부분합 $\sum_{r=1}^{m} r^{-3}$은 $2^{N+1}-1 \geq m$인 부분합 이하이므로 $\frac{4}{3}$보다 작다. 위로 유계인 증가수열은 수렴하고, 그 극한은 그 상계 이하이다. 따라서

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^3} \leq \frac{4}{3} = 1\tfrac{1}{3}.$$

소문항 (iii)

$S(1000)$ **세기.** 0부터 999까지의 각 정수를 앞에 0을 채워 세 자리 숫자열로 쓴다(예를 들어 7은 007이 된다). 앞에 채운 0은 결코 2를 만들지 않으므로, 정수에 2가 없는 것과 그 숫자열에 2가 없는 것은 정확히 같다. 세 자리 각각에는 $0, 1, 3, 4, \ldots, 9$의 아홉 숫자 중 어느 것이든 올 수 있으므로 숫자열은 9^3개이고, 이들은 모두 서로 다른 정수에 대응한다. 그중 하나는 000인데 이는 양수가 아니므로, $S(1000)$에는 9^3-1개의 수가 들어 있다.

블록별로 세기. 자릿수를 $n+1$개로 하여 같은 논증을 하면 $S(10^{n+1})$에 $9^{n+1}-1$개의 정수가 있음을 알 수 있다. 따라서 $(n+1)$자리 수들의 블록 $10^n \leq r \leq 10^{n+1}-1$에는

$$(9^{n+1}-1)-(9^n-1) = 8\cdot 9^n$$

개의 2가 없는 정수가 들어 있다. (같은 말이지만, 맨 앞자리는 0도 2도 될 수 없으므로 8가지, 나머지 n자리는 각각 9가지씩 선택할 수 있다.)

$\sigma(n)$**을 위로 누르기.** 이것은 $k=10$인 블록 논증인데, 다만 2가 없는 정수만 센다는 점이 다르다. 블록에 속한 모든 r에 대하여 $\frac{1}{r} \leq \frac{1}{10^n}$이므로, 그 블록이 합에 기여하는 양은 많아야

$$8\cdot 9^n \cdot \frac{1}{10^n} = 8\left(\tfrac{9}{10}\right)^n.$$

이다. 이제 n을 고정하고 $n \leq 10^{M+1}$인 M을 택한다. $S(n)$의 모든 원소는 $m=0,1,\ldots,M$에 대한 블록 중 하나에 속하고, 역수들은 모두 양수이다. 따라서

$$\sigma(n) \leq \sum_{m=0}^{M} 8\left(\tfrac{9}{10}\right)^m < \sum_{m=0}^{\infty} 8\left(\tfrac{9}{10}\right)^m = \frac{8}{1-\frac{9}{10}} = 80.$$

두 번째 부등식에서 등호가 성립하지 않는 것은 $m > M$인 양의 항들을 빼놓았기 때문이다. 그러므로 모든 n에 대하여 $\sigma(n) < 80$이다.

검산

- 소문항 (ii): $\sum r^{-3} = 1.2020\ldots$(아페리 상수(Apéry's constant))이고, 이는 $1\frac{1}{3}$보다 넉넉히 작다.

- $N = 2$일 때의 소문항 (i): $\sum_{r=1}^{7} \frac{1}{r} \approx 2.593$이고, 이는 1.5와 3 사이에 있다.
- 소문항 (iii): 직접 세어 보면 1000 미만에 $728 = 9^3 - 1$개의 수가 있고 각 블록에 $8 \cdot 9^n$개가 있음이 확인된다. 컴퓨터로 직접 더하면 $\sigma(10^7) \approx 10.28$로, 80보다 훨씬 작다. 이 상계는 넉넉하지만, 문제에서 요구한 것은 이것뿐이다.

흔한 실수

- 블록의 항 개수를 잘못 세는 것. 블록은 k^n부터 $k^{n+1} - 1$까지이므로 항은 $k^{n+1} - k^n - 1$개가 아니라 $k^{n+1} - k^n$개이다.
- (iii)에서 n번째 블록에 2가 없는 숫자열 9^n개를 모두 세는 것. 맨 앞자리는 0이 될 수 없으므로 $8 \cdot 9^n$개뿐이다. 9^{n+1}을 쓰면 상계가 90이 되어 충분하지 않다.
- (ii)에서 $2^{N+1} - 1$까지의 부분합에 대한 상계를 구하는 데서 멈추고, 왜 무한급수 전체의 합이 유계인지 설명하지 않는 것.

STEP 너머

이것은 코시(Cauchy)의 응축 판정법(condensation test)이다. 감소하는 양수 수열에 대하여 $\sum a_r$은 $\sum 2^n a_{2^n}$이 수렴할 때, 그리고 그때에만 수렴한다. 이 판정법을 쓰면 $\sum r^{-p}$가 $p > 1$일 때, 그리고 그때에만 수렴한다는 것을 곧바로 알 수 있다. 소문항 (iii)은 Kempner 급수(Kempner series)이다. 발산하는 조화급수(harmonic series)에서 주어진 숫자가 들어 있는 정수를 모두 지우면 수렴하는 급수가 되는데, 큰 정수는 거의 모두 모든 숫자를 포함하고 있기 때문이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해하기)는 응축 판정법과 비교 판정법(comparison test)을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP III 2014, 문제 9

역학 • 저항을 받는 포물체

STEP III 2014, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/14-s3-q9

핵심 아이디어

위치가 주어져 있으므로 속도(velocity)는 한 번 미분하면 얻어지고, 운동 방정식(equation of motion)을 확인하는 일은 $\mathbf{v}$와 $\dot{\mathbf{v}}$를 $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{g} - k\mathbf{v}$에 대입하기만 하면 된다. 그다음부터는 모두 성분(component)의 문제이다. $\mathbf{r}$의 $\mathbf{j}$-성분이 T를 결정하고, 시각 T에서 $\mathbf{v}$의 두 성분의 비가 $\tan\beta$를 준다. 마지막 부등식은 복잡해 보이지만, $x = kT$로 놓고 분모를 없애면 정확히 힌트로 주어진 $\sinh x > x$로 정리된다.

풀이

속도 구하기와 운동 확인

물체를 입자(particle)로 모형화한다. 뉴턴(Newton)의 제2법칙(Newton's second law)에 의해 $m\dot{\mathbf{v}} = m\mathbf{g} - mk\mathbf{v}$이므로 운동 방정식은

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{g} - k\mathbf{v},$$

이고, 초기 조건(initial conditions)은 $t = 0$일 때 $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, $\mathbf{v} = \mathbf{u}$이다.

여기서 $\mathbf{g}$와 $\mathbf{u}$는 상수 벡터이므로, 주어진 $\mathbf{r}$를 계수별로 미분하면

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{k - k\mathrm{e}^{-kt}}{k^2}\,\mathbf{g} + \frac{k\mathrm{e}^{-kt}}{k}\,\mathbf{u} = \frac{1 - \mathrm{e}^{-kt}}{k}\,\mathbf{g} + \mathrm{e}^{-kt}\,\mathbf{u}.$$

한 번 더 미분하면 $\dot{\mathbf{v}} = \mathrm{e}^{-kt}\mathbf{g} - k\mathrm{e}^{-kt}\mathbf{u}$이다. 한편

$$\mathbf{g} - k\mathbf{v} = \mathbf{g} - \left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right)\mathbf{g} - k\mathrm{e}^{-kt}\mathbf{u} = \mathrm{e}^{-kt}\mathbf{g} - k\mathrm{e}^{-kt}\mathbf{u},$$

이고 이는 같은 식이므로 운동 방정식이 성립한다. $t = 0$에서 $\mathrm{e}^0 = 1$이므로 $\mathbf{r} = \frac{0-1+1}{k^2}\mathbf{g} + 0\,\mathbf{u} = \mathbf{0}$이고 $\mathbf{v} = 0\,\mathbf{g} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$이다. 두 초기 조건이 모두 성립한다.

비행 시간

이제 $\mathbf{u} = u\cos\alpha\,\mathbf{i} + u\sin\alpha\,\mathbf{j}$, $\mathbf{g} = -g\,\mathbf{j}$로 놓는다. $\mathbf{r}$의 $\mathbf{j}$-성분은

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{j} = -\frac{kt - 1 + \mathrm{e}^{-kt}}{k^2}\,g + \frac{1-\mathrm{e}^{-kt}}{k}\,u\sin\alpha.$$

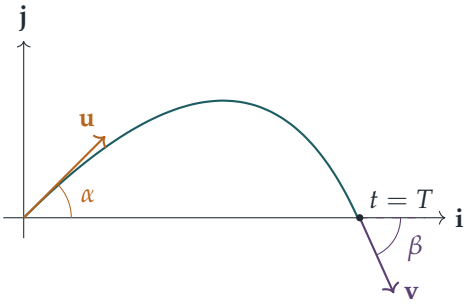
이다. $t = T$에서 이 값을 0으로 놓고 k^2을 곱하면

$$uk\sin\alpha\left(1-\mathrm{e}^{-kT}\right) = \left(kT - 1 + \mathrm{e}^{-kT}\right)g.$$

$T > 0$이고 $k > 0$이므로 $1-\mathrm{e}^{-kT} > 0$이고, 따라서 이것으로 나눌 수 있다. $kT - 1 + \mathrm{e}^{-kT} = kT - \left(1-\mathrm{e}^{-kT}\right)$로 쓰면

$$uk\sin\alpha = \left(\frac{kT}{1-\mathrm{e}^{-kT}} - 1\right)g,$$

이고, 이것이 구하려던 식이다.



시각 T에서의 각

$t = T$에서 $\mathbf{v} = \frac{1-\mathrm{e}^{-kT}}{k}\mathbf{g} + \mathrm{e}^{-kT}\mathbf{u}$의 성분은

$$v_x = \mathrm{e}^{-kT}u\cos\alpha, \qquad v_y = -\frac{1-\mathrm{e}^{-kT}}{k}\,g + \mathrm{e}^{-kT}u\sin\alpha.$$

이다. $0 < \alpha < 90°$이므로 $v_x > 0$이다. 입자가 다시 내려오는 중이므로 $v_y < 0$일 것으로 예상되며, 이는 아래에서 증명한다. 따라서 $\mathbf{v}$와 $\mathbf{i}$ 사이의 예각(acute angle)은 $\tan\beta = -v_y/v_x$를 만족한다. 전체를 v_x로 나누면

$$\tan\beta = \frac{\left(1-\mathrm{e}^{-kT}\right)g}{k\,\mathrm{e}^{-kT}u\cos\alpha} - \frac{\mathrm{e}^{-kT}u\sin\alpha}{\mathrm{e}^{-kT}u\cos\alpha} = \frac{\left(\mathrm{e}^{kT}-1\right)g}{uk\cos\alpha} - \tan\alpha,$$

이다. 여기서 $\left(1-\mathrm{e}^{-kT}\right)/\mathrm{e}^{-kT} = \mathrm{e}^{kT} - 1$을 이용하였다.

$\tan\beta > \tan\alpha$ 보이기

앞의 결과로부터, $uk\cos\alpha > 0$을 곱하면 $\tan\beta > \tan\alpha$는

$$\frac{\left(\mathrm{e}^{kT}-1\right)g}{uk\cos\alpha} > 2\tan\alpha \iff \left(\mathrm{e}^{kT}-1\right)g > 2uk\sin\alpha,$$

와 같다. 이제 비행 시간(time of flight)에 대한 결과를 써서 $uk\sin\alpha$를 바꾸면 u와 α가 완전히 사라진다.

생각해 보기 이것을 어떻게 $\sinh kT$가 들어간 식으로 바꿀 수 있을까?

$x = kT > 0$으로 놓는다. 그러면 $\frac{x}{1-\mathrm{e}^{-x}} = \frac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}$이고, $g > 0$으로 나누면 보여야 할 부등식은

$$\mathrm{e}^x - 1 > \frac{2x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1} - 2.$$

이 된다. $\mathrm{e}^x - 1 > 0$을 곱하고(따라서 부등호 방향은 유지된다) 전개하면

$$\begin{aligned}
&\iff \mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x + 1 > 2x\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x + 2 \\
&\iff \mathrm{e}^{2x} - 1 > 2x\mathrm{e}^x \\
&\iff \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} > 2x \qquad (\text{양변을} \mathrm{e}^x > 0\text{으로 나눔}) \\
&\iff \sinh x > x.
\end{aligned}$$

모든 단계는 역으로도 성립하고, $kT > 0$일 때 $\sinh kT > kT$이다(이 사실은 가정해도 된다). 따라서 $\tan\beta > \tan\alpha$이다.

이로써 v_y의 부호도 확정된다. $-v_y/v_x > \tan\alpha > 0$이고 $v_x > 0$임을 보였으므로 $v_y < 0$이다. 입자는 시각 T에서 실제로 내려오고 있으며, $\tan\beta$에 대한 공식이 정당화된다.

마지막으로 α와 β는 모두 $(0°, 90°)$에 속하고, 이 구간에서 tan은 순증가(strictly increasing)한다. 따라서 $\tan\beta > \tan\alpha$로부터 $\beta > \alpha$를 얻는다. 저항(resistance)이 있으면 입자는 올라갈 때보다 더 가파르게 내려온다.

검산

- $\mathrm{e}^{-kt} \approx 1 - kt + \frac{1}{2}k^2t^2$을 이용하면 $k \to 0$일 때 $\mathbf{r} \to \frac{1}{2}t^2\mathbf{g} + t\mathbf{u}$이다. 이는 익숙한 포물체(projectile) 운동이다. 또한 작은 x에 대하여 $\frac{x}{1-\mathrm{e}^{-x}} - 1 \approx \frac{x}{2}$이므로, 비행 시간 식에서 $T \to 2u\sin\alpha/g$를 얻는다. 마찬가지로 $\tan\beta \to \frac{gT}{u\cos\alpha} - \tan\alpha = \tan\alpha$이고, 이는 대칭인 포물선이다.
- $k = 1\,\mathrm{s}^{-1}$, $g = 10\,\mathrm{m\,s}^{-2}$, $u = 10\,\mathrm{m\,s}^{-1}$, $\alpha = 45°$로 놓자. $\mathbf{r}\cdot\mathbf{j} = 0$을 수치적으로 풀면 $T \approx 1.185\,\mathrm{s}$이고, 이는 저항이 없을 때의 $1.414\,\mathrm{s}$보다 짧다. 착지 각은 $\beta \approx 65.7° > 45°$이며, 두 공식 모두 소수점 아래 여러 자리까지 맞는다. 컴퓨터로 $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{g} - k\mathbf{v}$를 단계별로 수치 적분(numerical integration)하면 주어진 $\mathbf{r}$와 $\mathbf{v}$가 그대로 재현된다.

흔한 실수

- 음의 부호 없이 $\tan\beta = v_y/v_x$로 놓는 것. 착지할 때 v_y는 음수이고 β는 예각이다.

- $1 - e^{-kT}$나 $e^{kT} - 1$이 양수라는 것을 밝히지 않고 이것으로 나누거나 곱하는 것. 바로 이 사실이 부등호의 방향을 지켜 준다.
- $\tan\beta > \tan\alpha$에서 멈추는 것. $\beta > \alpha$를 이끌어 내려면 예각에서 tan이 증가한다는 사실이 필요하다.

STEP 너머

주어진 $\mathbf{r}$는 선형 미분방정식(linear differential equation) $\ddot{\mathbf{r}} + k\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{g}$의 해이며, 이 방정식은 적분인자(integrating factor) e^{kt}를 써서 직접 풀 수 있다. 선형 저항(linear drag)은 $\mathbf{i}$-방향 운동과 $\mathbf{j}$-방향 운동이 분리되는 유일한 저항 법칙이다. 더 현실적인 이차 저항(quadratic drag) $-mk|\mathbf{v}|\mathbf{v}$에서는 두 운동이 서로 얽히고, 닫힌 형태(closed form)의 해가 존재하지 않는다. 내려올 때 더 가파른 비대칭 궤적은 두 경우 모두에서 나타난다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 저항력이 있는 운동을 이러한 관점에서 다룬다.

풀이

STEP III 2014, 문제 10

역학 • 연성 진동

> **STEP III 2014, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/14-s3-q10

이 문제는 *Beyond STEP*의 11.2 절 **기준 진동**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch11/normal-modes.html

핵심 아이디어

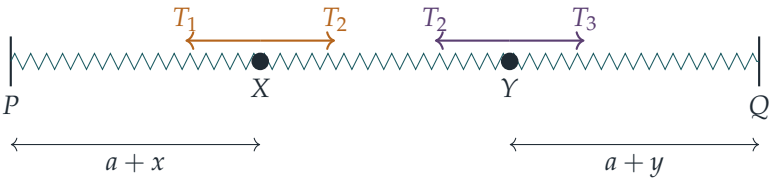
모든 것을 하나의 좌표를 갖는 한 직선 위에 놓고, 각 용수철의 늘어난 길이(extension)를 x와 y로 나타내면 뉴턴의 제2법칙(Newton's second law)으로부터 서로 얽힌 두 방정식, 즉 연립 방정식(coupled equations)을 얻는다. 이런 대칭성을 가진 연립 방정식은 두 식을 더하고 빼면 분리된다. $x-y$와 $x+y$는 각각 진동수가 서로 다른 자신만의 단진동(simple harmonic motion) 방정식을 따른다. 그러면 Y가 언젠가 제자리로 돌아오는지는 두 진동수의 비가 유리수(rational)인지에 달려 있다.

풀이

운동 방정식

X와 Y를 입자로, 용수철을 훅의 법칙(Hooke's law)을 따르는 가벼운 용수철로 모형화한다. 탁자는 매끄러우므로 수평 방향의 힘은 용수철의 장력(tension)뿐이다. 모든 힘은 직선 PQ를 따라 작용하므로 운동은 이 직선 위에서만 일어난다.

위치를 P에서부터 Q 방향으로 직선을 따라 재면 P는 0에, Q는 $3a$에 있다. 그러면 X는 $a+x$에, Y는 $3a-(a+y)=2a-y$에 있다.



세 용수철의 길이와 장력은 다음과 같다(훅의 법칙에 따라 장력 $= \lambda \times$ extension$/a$이고, 음수이면 미는 힘, 즉 압축력(thrust)을 뜻한다).

$$PX:\ \text{길이} a+x, \qquad T_1 = \frac{\lambda x}{a},$$

$$XY:\ \text{길이} (2a-y)-(a+x) = a-x-y, \qquad T_2 = -\frac{\lambda(x+y)}{a},$$

$$YQ:\ \text{길이} a+y, \qquad T_3 = \frac{\lambda y}{a}.$$

장력을 받는 용수철은 양 끝을 서로를 향해 당긴다. 따라서 X는 P 쪽으로 T_1을, Y 쪽으로 T_2를 받는다. $P \to Q$ 방향을 양의 방향으로 잡으면

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -T_1 + T_2 = -\frac{\lambda}{a}x - \frac{\lambda}{a}(x+y) = -\frac{\lambda}{a}(2x+y),$$

이고, 이것이 구하려던 식이다. (부호는 저절로 맞춰진다. $T_2 < 0$이면 용수철 XY가 압축되어 X를 P 쪽으로 민다.)

Y의 위치는 $2a-y$이므로 양의 방향으로의 가속도는 $-\ddot{y}$이다. Y는 X 쪽(음의 방향)으로 T_2를, Q 쪽(양의 방향)으로 T_3을 받는다.

$$-m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -T_2 + T_3 = \frac{\lambda}{a}(x+y) + \frac{\lambda}{a}y, \qquad \text{따라서} \qquad m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\lambda}{a}(x+2y).$$

이것은 첫 번째 식에서 x와 y를 맞바꾼 것으로, 장치의 대칭성(PQ의 중점에 대한 반사)으로 보아 당연히 그래야 한다.

결합 $x-y$

두 식을 빼면

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x-y) = -\frac{\lambda}{a}\left[(2x+y)-(x+2y)\right] = -\frac{\lambda}{a}(x-y).$$

$\omega^2 = \lambda/(ma)$로 놓으면 이 식은 $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x-y) = -\omega^2(x-y)$, 곧 단진동이므로

$$x-y = A\cos\omega t + B\sin\omega t.$$

처음에 $XP = a$이고 $YQ = \frac{1}{2}a$이므로 $t=0$에서 $x=0, y=-\frac{1}{2}a$이다. 따라서 $x-y = \frac{1}{2}a$이고, $A = \frac{1}{2}a$이다. 입자들은 정지 상태에서 놓이므로 $t=0$에서 $\dot{x} = \dot{y} = 0$이다. 미분하면 $\omega B = 0$이므로 $B = 0$이다. 그러므로

$$x-y = \tfrac{1}{2}a\cos\omega t.$$

결합 $x+y$

이번에는 두 식을 더하면

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x+y) = -\frac{\lambda}{a}(3x+3y), \qquad \text{따라서} \qquad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x+y) = -3\omega^2(x+y).$$

이것은 각진동수(angular frequency)가 $\sqrt{3}\,\omega$인 단진동이므로 $x+y = C\cos\sqrt{3}\,\omega t + D\sin\sqrt{3}\,\omega t$이다. $t=0$에서 $x+y=-\frac{1}{2}a$이고 그 도함수는 0이므로 $C=-\frac{1}{2}a$, $D=0$이다.

$$x+y = -\tfrac{1}{2}a\cos\sqrt{3}\,\omega t.$$

Y는 결코 돌아오지 않는다

두 결과의 차를 반으로 나누면

$$y = \tfrac{1}{2}\big[(x+y)-(x-y)\big] = -\tfrac{1}{4}a\big(\cos\omega t + \cos\sqrt{3}\,\omega t\big).$$

(마찬가지로 $x = \frac{1}{4}a(\cos\omega t - \cos\sqrt{3}\,\omega t)$이다.) Y가 처음 위치로 돌아오는 것은 정확히 $y=-\frac{1}{2}a$일 때, 즉

$$\cos\omega t + \cos\sqrt{3}\,\omega t = 2.$$

일 때이다.

? **생각해 보기** 두 코사인 모두 주기함수이니, 언젠가는 다시 맞아떨어지지 않을까?

각 코사인은 많아야 1이므로, 합이 2가 되려면 어떤 같은 시각 $t>0$에서 둘 다 1이어야 한다. 이를 위해서는 정수 n, k에 대하여

$$\omega t = 2\pi n \quad \text{이고} \quad \sqrt{3}\,\omega t = 2\pi k$$

이어야 하며, $t>0$이므로 $n\geq 1$이다. 나누면 $\sqrt{3}=k/n$이 유리수가 되는데, 그렇지 않다. 따라서 그러한 $t>0$은 존재하지 않으며, Y는 결코 처음 위치로 돌아오지 않는다. 두 주기 $2\pi/\omega$와 $2\pi/(\sqrt{3}\,\omega)$는 통약 불가능(incommensurable)하므로, 두 진동은 얼마든지 가까이 맞아떨어질 수는 있지만 결코 다시 정확히 발맞추지 않는다.

검산

- $t=0$에서 공식은 $x=\frac{1}{4}a(1-1)=0$, $y=-\frac{1}{4}a(1+1)=-\frac{1}{2}a$를 주어 처음 위치와 일치하고, 이때 두 도함수 모두 0이 된다.
- 용수철 XY의 길이는 $a-x-y = a+\frac{1}{2}a\cos\sqrt{3}\,\omega t$이고, 이는 $\frac{1}{2}a$와 $\frac{3}{2}a$ 사이에 머무르므로 두 입자는 결코 충돌하지 않는다. 마찬가지로 $PX = a+x \geq \frac{1}{2}a$이고 $YQ = a+y \geq \frac{1}{2}a$이다. 모형은 처음부터 끝까지 물리적으로 타당하다.

- $m = a = 1, \lambda = 2$로 두고 운동을 수치적으로 한 단계씩 계산하면 $t = 20$까지 x와 y의 공식을 10^{-10}보다 작은 오차로 재현한다. $0 < \omega t \leq 20\,000$ 범위를 컴퓨터로 탐색하면 $\cos \omega t + \cos \sqrt{3}\,\omega t$는 2에 1.999995까지 가까워지지만, 결코 2에 이르지는 않는다.

흔한 실수

- Y에 대한 식의 부호를 틀리는 것: y는 Q에서부터 재므로, y가 커지면 Y는 **음의** 방향으로 움직인다.
- XY의 길이를 $a - x - y$ 대신 $a + x + y$로 쓰는 것: x와 y가 모두 커지면 가운데 용수철은 짧아진다.
- 두 주기가 다르다는 것만으로 논증하는 것: 주기가 다르다는 것만으로는 충분하지 않다(주기가 1과 2이면 $t = 2$에서 다시 맞아떨어진다). 중요한 것은 두 주기의 비 $\sqrt{3}$이 무리수(irrational)라는 점이다.

STEP 너머

결합 $x - y$와 $x + y$는 이 계의 **정규 모드**(*normal modes*)이다. 즉 이들은 행렬 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$의 고유벡터(eigenvectors)이며, 고유값(eigenvalues) 1과 3이 진동수의 제곱 ω^2과 $3\omega^2$을 준다. 연성계의 모든 미소 진동은 이처럼 정규 모드로 분해되며, 진동수의 비가 모두 유리수일 때에만 운동이 주기적이다. 그렇지 않으면 운동은 준주기적(quasi-periodic)이어서, 결코 반복되지 않지만 처음 상태에 얼마든지 가까이 되돌아온다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 연성 진동자(coupled oscillators)를 다루고, Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 그 바탕에 있는 고유벡터 방법을 설명한다.

풀이

STEP III 2014, 문제 11

역학 • 원운동

> **STEP III 2014, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/14-s3-q11

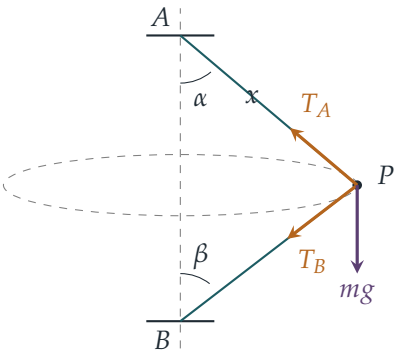
핵심 아이디어

입자에는 세 힘(두 장력(tension)과 무게)이 작용하고, 이 힘들이 합쳐져 원운동에 필요한 구심력(centripetal force)을 정확히 공급해야 한다. 연직 방향과 수평 방향으로 힘을 분해하면 두 장력에 대한 두 개의 일차방정식을 얻는다. 줄은 당기기만 할 수 있으므로 $T_B \geq 0$이고, 이로부터 부등식이 나온다. 경계인 경우에는 아래쪽 줄이 느슨해지며, 삼각형 ABP에 코사인 법칙(cosine rule)을 적용하면 어떤 각 α가 가능한지 알 수 있다.

풀이

상황 설정

P를 입자로, 줄을 가볍고 늘어나지 않는 것으로 모형화한다. P는 직선 AB 위에 중심이 있고 반지름이 $r = x\sin\alpha$인 수평 원을 따라 움직이므로, 그 가속도는 축을 향하는 수평 방향으로 $\omega^2 x\sin\alpha$이다. 장력 T_A는 PA 방향으로 작용하며 위쪽 연직 방향과 각 α를 이룬다. 장력 T_B는 PB 방향으로 작용하며 아래쪽 연직 방향과 각 β를 이룬다.



장력 구하기

연직 방향(연직 가속도는 없다)과 축을 향하는 수평 방향으로 힘을 분해하면 다음과 같다.

$$T_A \cos\alpha - T_B \cos\beta = mg, \tag{1}$$

$$T_A \sin\alpha + T_B \sin\beta = m\omega^2 x \sin\alpha. \tag{2}$$

이 방정식들은 β가 둔각일 때, 즉 P가 B보다 아래에 있을 때에도 성립한다. 그 경우 $\cos\beta < 0$이므로 T_B의 연직 성분이 마땅히 그래야 하듯 위쪽을 향하기 때문이다.

T_B를 소거하려면 (1)에 $\sin\beta$를, (2)에 $\cos\beta$를 곱하여 더한다. $\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta)$를 이용하면

$$T_A = \frac{m\left(g\sin\beta + \omega^2 x \sin\alpha\cos\beta\right)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

T_A를 소거하려면 (2)에 $\cos\alpha$를, (1)에 $\sin\alpha$를 곱하여 뺀다.

$$T_B = \frac{m\sin\alpha\left(\omega^2 x\cos\alpha - g\right)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

여기서 α와 β는 삼각형 ABP의 두 각이므로 $0 < \alpha+\beta < \pi$이고 $\sin(\alpha+\beta) > 0$이다. 또 $\sin\alpha > 0$이다. 팽팽한 줄에서는 $T_B \geq 0$이므로

$$\omega^2 x\cos\alpha \geq g,$$

이고, 이것이 보이려던 것이다.

$\omega^2 x\cos\alpha = g$인 경우

이제 $T_B = 0$이다. 즉 아래쪽 줄은 겨우 팽팽할 뿐 장력은 걸리지 않는다. 그러면 식 (1)에서

$$T_A = \frac{mg}{\cos\alpha},$$

를 얻고, 이 경우 $T_A = m\omega^2 x$이므로 (2)와도 일치한다. 또 $\cos\alpha = g/(\omega^2 x) > 0$이므로 α는 예각임에 주목하자.

생각해 보기 h, d, α만을 포함하는 부등식은 어디에서 나오는가?

이 부등식은 역학이 아니라 기하에서 나온다. 삼각형 ABP의 꼭짓점 A에서 코사인 법칙을 적용하면

$$d^2 = h^2 + x^2 - 2hx\cos\alpha \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - (2h\cos\alpha)\,x + (h^2 - d^2) = 0.$$

길이 x는 이 이차방정식의 실근이므로 판별식(discriminant)은 음이 아니다.

$$4h^2\cos^2\alpha - 4(h^2 - d^2) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad h^2\cos^2\alpha \geq h^2 - d^2.$$

$h\cos\alpha$와 $\sqrt{h^2 - d^2}$는 모두 양수이므로(α가 예각이고 $h > d$이므로) 양변의 제곱근을 취하여

$$h\cos\alpha \geq \sqrt{h^2 - d^2}.$$

를 얻는다.

T_A의 범위

입자는 실제로 축 위에 있지 않으므로 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$이고 $0 < \cos\alpha < 1$이다. 따라서 $T_A = mg/\cos\alpha > mg$이다. 다른 쪽 한계는 앞의 결과에서 $\cos\alpha \geq \sqrt{h^2 - d^2}/h$이므로

$$mg < T_A = \frac{mg}{\cos\alpha} \leq \frac{mgh}{\sqrt{h^2 - d^2}}.$$

상한에 도달하는 경우

등호가 성립하려면 $h\cos\alpha = \sqrt{h^2 - d^2}$이어야 하므로 판별식이 0이고, 이차방정식은 중근(repeated root)

$$x = h\cos\alpha = \sqrt{h^2 - d^2}.$$

을 갖는다. 그러면 $x^2 + d^2 = h^2$, 즉 $AP^2 + BP^2 = AB^2$이다. 피타고라스(Pythagoras) 정리의 역(converse)에 의해 각 APB는 직각이다. 즉 두 줄은 수직이고, P는 AB를 지름으로 하는 원 위에 있다. 이는 AP가 B를 중심으로 하는 반지름 d인 원의 접선(tangent)이라는 것과 같고, 바로 이 때문에 여기서 α가 가능한 가장 큰 값이 된다. 이 위치에서 $\sin\alpha = d/h$이고, P는 B보다 d^2/h만큼 높은 곳에 있다. 부등식이 허용하는 다른 예각 α에 대해서는 가능한 삼각형이 두 개(즉 x의 값이 두 개) 있으며, 이 두 삼각형이 이 위치에서 하나로 합쳐진다.

검산

- ω가 매우 크면 $T_B \approx m\omega^2 x\sin\alpha/\sin(\alpha+\beta)$는 ω^2에 비례하여 커진다. 이때는 두 줄이 모두 큰 구심력을 공급해야 하기 때문이다.

- 극단적인 위치에서 $h = 3, d = 2$로 두자. 그러면 $\cos\alpha = \sqrt{5}/3$, $x = \sqrt{5}$이고 $x^2 + d^2 = 5 + 4 = 9 = h^2$이다. 이때 $T_A/(mg) = 3/\sqrt{5} \approx 1.342$이며, 이는 $h/\sqrt{h^2 - d^2}$과 같다.
- T_A와 T_B의 공식을 벡터 운동 방정식에 다시 대입하여 여러 무작위 배치에 대해 컴퓨터로 확인하면 잔차가 0이 된다.

흔한 실수

- 원의 반지름을 $x\sin\alpha$가 아니라 x로 잡는 것.
- T_B의 연직 방향을 반대로 잡는 것. β를 BA로부터 잴 때, (β가 예각이면) 줄 PB는 P를 아래쪽으로 당긴다.
- 양변이 양수인지 확인하지 않고 부등식의 양변을 제곱하거나 제곱근을 취하는 것.

STEP 너머

경계인 경우 $T_B = 0$은 제약 조건이 **비활성**(*inactive*)이 되는 상황이다. 줄은 한쪽 방향으로만 작용하는 제약 조건(당길 수는 있지만 밀 수는 없다)이다. 이처럼 부등식 제약 조건이 있는 문제는 역학과 최적화에서 부호 조건이 붙은 라그랑주(Lagrange) 승수(Lagrange multipliers)로 이어진다. 원뿔 진자(conical pendulum)와 그 변형들은 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)에 잘 다루어져 있다.

풀이

STEP III 2014, 문제 12

확률과 통계 • 로그정규분포

> **STEP III 2014, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/14-s3-q12

핵심 아이디어

$y = \mathrm{e}^x$는 순증가(strictly increasing) 함수이므로, Y에 관한 명제는 로그를 취하기만 하면 X에 관한 명제로 바뀐다. 즉 $Y \leq y$일 필요충분조건은 $X \leq \ln y$이다. 이로부터 Y의 중앙값(median)과 밀도(density)를 곧바로 얻는다. 평균(mean)을 구할 때의 요령은 지수에서 완전제곱식을 만들어(complete the square) 피적분함수를 또 다른 정규분포의 밀도로 바꾸는 것이다. 그 적분값이 1이라는 것은 이미 알고 있다.

풀이

소문항 (i)

e^x는 순증가하므로 사건 $\{Y \leq \mathrm{e}^{x_m}\}$과 $\{X \leq x_m\}$은 같은 사건이다. 따라서

$$\mathrm{P}\left(Y \leq \mathrm{e}^{x_m}\right) = \mathrm{P}(X \leq x_m) = \tfrac{1}{2},$$

이므로 Y의 중앙값은

$$y_m = \mathrm{e}^{x_m}.$$

이다. (중앙값은 이처럼 임의의 증가함수를 그대로 통과하지만, 소문항 (iv)에서 보듯이 평균은 그렇지 않다.)

소문항 (ii)

Y는 양수 값만 가진다. $y > 0$에 대하여 G를 Y의 누적분포함수(cumulative distribution function)라 하자. 앞과 같은 동치 관계를 이용하면

$$G(y) = \mathrm{P}(Y \leq y) = \mathrm{P}(X \leq \ln y) = F(\ln y).$$

연쇄법칙(chain rule)으로 미분하고 $F' = f$를 이용하면

$$g(y) = G'(y) = f(\ln y) \cdot \frac{1}{y} = \frac{f(\ln y)}{y}, \qquad y > 0,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. ($y \le 0$이면 $g(y) = 0$이다.)

최빈값(mode) λ는 g가 최댓값을 갖는 점이다. 이 점은 g가 미분가능한 열린구간 $(0, \infty)$ 안에 있으므로 $g'(\lambda) = 0$이다. 몫의 미분법(quotient rule)에 의해

$$g'(y) = \frac{f'(\ln y) \cdot \frac{1}{y} \cdot y - f(\ln y)}{y^2} = \frac{f'(\ln y) - f(\ln y)}{y^2}.$$

$y^2 \neq 0$이므로 $g'(\lambda) = 0$으로 두면

$$f'(\ln \lambda) = f(\ln \lambda),$$

을 얻고, 이것이 구하는 조건이다.

소문항 (iii)

함수

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-(x-\mu-\sigma^2)^2/(2\sigma^2)}$$

는 정확히 $\mathrm{N}(\mu + \sigma^2, \sigma^2)$ 확률변수(random variable)의 확률밀도함수(probability density function)이다. 즉 주어진 정규분포(normal distribution)의 밀도에서 μ를 $\mu + \sigma^2$로 바꾼 것이다. 모든 확률밀도함수는 실수 전체에서 적분하면 1이므로, 주어진 적분값이 설명된다.

이제

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}\big(\mathrm{e}^X\big) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^x\, \mathrm{e}^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}\, \mathrm{d}x.$$

합쳐진 지수에서 완전제곱식을 만든다. $(x-\mu-\sigma^2)^2 = (x-\mu)^2 - 2\sigma^2 x + 2\mu\sigma^2 + \sigma^4$로 전개하면

$$\begin{aligned} x - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} &= -\frac{(x-\mu)^2 - 2\sigma^2 x}{2\sigma^2} \\ &= -\frac{(x-\mu-\sigma^2)^2 - 2\mu\sigma^2 - \sigma^4}{2\sigma^2} \\ &= -\frac{(x-\mu-\sigma^2)^2}{2\sigma^2} + \mu + \tfrac{1}{2}\sigma^2. \end{aligned}$$

을 얻는다. 상수 $\mathrm{e}^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}$를 적분 밖으로 꺼내면

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{e}^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(x-\mu-\sigma^2)^2/(2\sigma^2)}\, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2},$$

이다. 여기서 위에서 설명한 적분을 이용하였다. 이것이 구하는 결과이다.

소문항 (iv)

세 값을 모두 명시적으로 구한다.

중앙값. 정규분포의 밀도는 μ에 대하여 대칭이므로 $x_m = \mu$이고, 소문항 (i)에 의해 $y_m = \mathrm{e}^{\mu}$이다.

최빈값. 정규분포의 밀도를 미분하면

$$f'(x) = -\frac{x-\mu}{\sigma^2} f(x).$$

> **생각해 보기** f가 결코 0이 되지 않을 때 소문항 (ii)의 조건을 어떻게 이용할 수 있을까?

모든 x에 대하여 $f(x) > 0$이므로, 조건 $f'(\ln\lambda) = f(\ln\lambda)$의 양변을 $f(\ln\lambda)$로 나누면

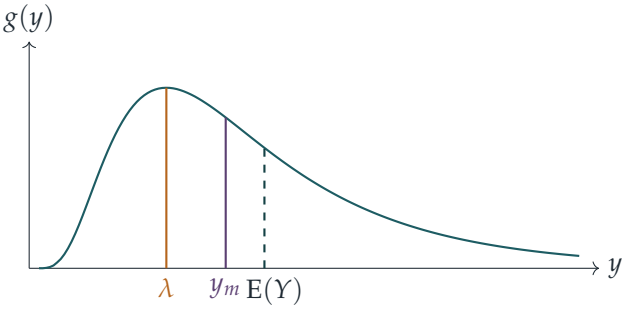
$$-\frac{\ln\lambda - \mu}{\sigma^2} = 1 \quad\Longrightarrow\quad \ln\lambda = \mu - \sigma^2 \quad\Longrightarrow\quad \lambda = \mathrm{e}^{\mu-\sigma^2}.$$

을 얻는다. 이것은 g의 유일한 정상점(stationary point)이고, Y의 최빈값이 유일하다고 주어졌으므로 이것이 최빈값이다.

비교. $\sigma > 0$이므로 $\mu - \sigma^2 < \mu < \mu + \frac{1}{2}\sigma^2$이고, e^t는 순증가하므로

$$\lambda = \mathrm{e}^{\mu-\sigma^2} \;<\; y_m = \mathrm{e}^{\mu} \;<\; \mathrm{E}(Y) = \mathrm{e}^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. 엄격한 부등식은 $\sigma^2 > 0$에 의존하는데, 이는 진정한 정규분포라면 언제나 성립한다.



그림은 $\mu = 0, \sigma = 0.6$일 때 Y의 밀도를 나타낸다. 오른쪽으로 길게 뻗은 꼬리가 평균을 가장 오른쪽으로 끌어당기고, 중앙값은 그 가운데에 있으며, 봉우리는 둘보다 왼쪽에 있다.

검산

▶ $\sigma \to 0$이면 Y는 e^{μ}에 집중되고, 세 값 모두 e^{μ}로 수렴한다. 당연히 그래야 한다.

- $\mu = 0, \sigma = 1$이면 $\lambda = \mathrm{e}^{-1} \approx 0.368$, $y_m = 1$, $\mathrm{E}(Y) = \mathrm{e}^{1/2} \approx 1.649$이다. $\mathrm{e}^x f(x)$의 수치 적분과 g의 최댓값에 대한 수치 탐색 결과가 이 값들과 일치한다.
- 비 $\mathrm{E}(Y)/\lambda = \mathrm{e}^{3\sigma^2/2}$는 σ에만 의존한다. 이는 타당하다. μ를 바꾸는 것은 Y를 e^{μ}배로 다시 스케일링할 뿐이기 때문이다.

흔한 실수

- 연쇄법칙에서 나오는 인수 $1/y$를 빠뜨리고 Y의 밀도를 $f(\ln y)$로 쓰는 것. 이 인수가 없으면 최빈값이 중앙값과 같은 e^{μ}로 나오게 된다.
- $\mathrm{E}(\mathrm{e}^X) = \mathrm{e}^{\mathrm{E}(X)}$라고 가정하는 것. 이는 중앙값에 대해서는 참이지만 평균에 대해서는 그렇지 않다.
- 완전제곱식을 만들 때의 부호 실수. $(x - \mu - \sigma^2)^2$를 주의 깊게 전개하고 남는 상수를 확인하라.

STEP 너머

여기서 Y는 **로그정규분포**(*lognormal distribution*)를 따르며, 이 분포는 소득, 주가, 입자 크기를 모형화하는 데 쓰인다. 부등식 $\mathrm{E}(\mathrm{e}^X) \geq \mathrm{e}^{\mathrm{E}(X)}$는 볼록함수(convex function)에 대한 젠센 부등식(Jensen's inequality)의 한 경우이고, 소문항 (iii)의 계산은 정규분포의 적률생성함수(moment generating function) $\mathrm{E}(\mathrm{e}^{tX}) = \mathrm{e}^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$에 $t = 1$을 대입한 것이다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)는 확률변수의 변환, 적률생성함수, 로그정규분포를 다룬다.

풀이

STEP III 2014, 문제 13

확률과 통계 • 확률생성함수

> **STEP III 2014, 13번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/14-s3-q13

핵심 아이디어

첫 번째 라운드에서 일어나는 일로 조건부(conditioning)를 걸어 생각한다. 이 게임에는 기억이 없다. 게임이 계속되는 라운드가 끝난 뒤에 이어지는 것은 같은 게임의 완전히 새로운 복사본이므로, 그 시점부터 **추가로** 얻는 점수는 N 자체와 같은 분포(distribution)를 가진다. 이로부터 G를 자기 자신으로 나타내는 방정식을 얻고, 이를 풀어 기하급수(geometric series)로 전개한다.

풀이

$p_n = P(N = n)$이라 하면 $G(t) = \sum_{n \geq 0} p_n t^n$이다. 첫 번째 라운드의 결과가 각각 1, 2, 3인 사건을 E_1, E_2, E_3이라 하자. 그러면 $P(E_1) = a$, $P(E_2) = b$, $P(E_3) = c$이다.

소문항 (i)

E_1이 주어지면 게임은 점수 0으로 끝나므로 $P(N = 0 \mid E_1) = 1$이고, $n \geq 1$에 대하여 $P(N = n \mid E_1) = 0$이다. 따라서 조건부 생성함수(generating function)는

$$\sum_{n \geq 0} P(N = n \mid E_1)\, t^n = 1 \cdot t^0 = 1.$$

소문항 (ii)

E_2가 주어지면 첫 라운드가 끝난 뒤에도 점수는 여전히 0이고 게임은 계속된다. 각 라운드의 확률은 모두 같고 이전에 일어난 일과 무관하므로, 두 번째 라운드부터의 라운드들은 점수 0에서 시작하는 새로운 게임을 이룬다. 이 새 게임에서 얻는 점수를 N'이라 하면, N'은

N과 같은 분포를 가진다. 최종 점수는 $0 + N' = N'$이므로

$$P(N = n \mid E_2) = P(N' = n) = p_n \quad \text{모든} n \geq 0,$$

이고, 조건부 생성함수는 $\sum p_n t^n = G(t)$이다.

소문항 (iii)

같은 방식으로, E_3이 주어지면 첫 라운드가 끝난 뒤 점수는 1이고 나머지는 점수 N'을 내는 새로운 게임이므로 최종 점수는 $1 + N'$이다. 따라서 $P(N = 0 \mid E_3) = 0$이고 $n \geq 1$에 대하여 $P(N = n \mid E_3) = p_{n-1}$이다. 조건부 생성함수는 $\sum_{n\geq 1} p_{n-1} t^n = tG(t)$이다.

전확률 법칙(law of total probability)에 의하여

$$p_n = a\,P(N = n \mid E_1) + b\,P(N = n \mid E_2) + c\,P(N = n \mid E_3).$$

$G(t)$에서 t^n의 계수는 p_n이다. 우변에서 1, $G(t)$, $tG(t)$의 t^n의 계수는 정확히 소문항 (i)–(iii)에서 구한 $P(N = n \mid E_1)$, $P(N = n \mid E_2)$, $P(N = n \mid E_3)$이다. 그러므로 모든 $n \geq 0$에 대하여 $G(t)$와 $a + bG(t) + ctG(t)$의 t^n의 계수가 일치하고, 따라서 다음이 증명된다.

$$G(t) = a + bG(t) + ctG(t).$$

> **생각해 보기** $1 - b - ct$로 나눌 수 있는가? 그리고 기하급수로 전개하는 것이 정당한가?

식을 정리하면 $G(t)(1 - b - ct) = a$이다. $1 - b = a + c > c > 0$이므로 $|t| < (1 - b)/c$일 때마다 $1 - b - ct \neq 0$이고, $(1 - b)/c = 1 + a/c > 1$이므로 이 범위는 $|t| \leq 1$을 포함한다. 이러한 t에 대하여 $|ct/(1 - b)| < 1$이므로

$$G(t) = \frac{a}{1 - b - ct} = \frac{a}{1 - b} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{ct}{1 - b}} = \frac{a}{1 - b} \sum_{n\geq 0} \left(\frac{c}{1 - b}\right)^n t^n,$$

이다. t^n의 계수를 읽으면

$$P(N = n) = \frac{ac^n}{(1 - b)^{n+1}}, \qquad n \geq 0.$$

(같은 이야기로, 계수를 비교하면 $p_0 = a + bp_0$이고 $n \geq 1$에 대하여 $p_n = bp_n + cp_{n-1}$이다. 즉 $p_0 = a/(1 - b)$이고 $p_n = \frac{c}{1-b} p_{n-1}$이며, 이로부터 같은 공식을 얻는다.)

소문항 (iv)

평균(mean)은 $\mu = G'(1)$이다. $G(t) = a(1 - b - ct)^{-1}$을 미분하고 $1 - b - c = a$를 이용하면

$$G'(t) = \frac{ac}{(1 - b - ct)^2}, \qquad \text{따라서} \qquad \mu = G'(1) = \frac{ac}{(1 - b - c)^2} = \frac{ac}{a^2} = \frac{c}{a},$$

이다. 그러면 $1+\mu = \dfrac{a+c}{a} = \dfrac{1-b}{a}$이므로

$$\frac{\mu^n}{(1+\mu)^{n+1}} = \frac{c^n}{a^n} \cdot \frac{a^{n+1}}{(1-b)^{n+1}} = \frac{ac^n}{(1-b)^{n+1}} = P(N=n),$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

검산

- 확률의 합은 1이다: $\sum_n p_n = G(1) = a/(1-b-c) = a/a = 1$.
- 직접적인 논증: 결과가 2인 "낭비된" 라운드는 무시하자. 남은 각 라운드는 확률 $a/(a+c)$로 멈춤이고 확률 $c/(a+c)$로 1점이다. 따라서 N은 처음 멈추기 전까지 얻은 점수의 개수이고, $P(N=n) = \left(\frac{c}{a+c}\right)^n \frac{a}{a+c}$이다. $a+c = 1-b$이므로 이는 같은 공식이다.
- $a = \frac{1}{5}, b = \frac{3}{10}, c = \frac{1}{2}$이면 $\mu = \frac{5}{2}$이고 $P(N=0) = \frac{2}{7} \approx 0.2857$, $P(N=1) = \frac{10}{49} \approx 0.2041$이다. 2×10^5번의 게임을 컴퓨터로 시뮬레이션한 결과 0.2855, 0.2038, 그리고 평균 점수 2.498을 얻었다.

흔한 실수

- 경우 3의 조건부 생성함수를 $tG(t)$가 아니라 $G(t)$로 쓰는 실수. 이미 얻은 1점 때문에 t의 모든 거듭제곱이 하나씩 올라간다.
- 첫 라운드 이후의 게임이 원래 게임의 복사본인 **이유**를 말하지 않는 실수. 이는 각 라운드가 과거와 독립(independent)으로 같은 확률을 가진다는 사실에 근거한다.

STEP 너머

첫 단계로 조건부를 거는 것은 마르코프 연쇄(Markov chain) 이론의 기본 도구로, 그곳에서는 **첫걸음 분석**(*first-step analysis*)이라 부른다. 그리고 여기서 얻은 답은 모습을 바꾼 기하분포(geometric distribution)이다. 소문항 (iv)는 $\{0,1,2,\dots\}$ 위의 기하분포가 평균만으로 결정된다는 것을 보여 준다. G에 대한 방정식을 세우는 같은 기법으로 분기 과정(branching process)도 다룰 수 있으며, 이는 가문의 성(姓)이 사라질 확률에 관한 유명한 결과로 이어진다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 생성함수와 분기 과정을 매우 읽기 쉽게 다룬다.

Beyond STEP

STEP은 대부분의 학생이 학창 시절에 치르는 수학 시험 가운데 가장 어려운 시험이다. 또한 가장 훌륭한 시험 가운데 하나이기도 하다. 문제는 짧고 낯설며 깊이가 있고, 그중 가장 뛰어난 문제들은 대학 수학의 작은 조각이 모습을 감추고 있는 것이다.

이 책은 1987년 첫 시험에 앞서 나온 예시 시험지(specimen papers)부터 2025년 시험지까지 가운데 가장 흥미로운 STEP 문제들을 골라, 각 문제를 하나의 문으로 삼는다. 모든 문제는 뛰어난 학생이 풀어 가면서 던질 법한 질문들과 함께 꼼꼼하게 풀이하고, 그런 다음 책은 그 문을 지나 한 걸음 더 나아간다. 그 아이디어가 어디에서 왔는지, 대학에서는 무엇으로 발전하는지, 그리고 다음에는 무엇을 읽으면 좋은지를 살펴본다.

이 책은 STEP을 준비하면서 기출 문제 연습 이상의 것을 원하는 재능 있는 예비 수학자를 위해 쓰였다. 수학과 학부생처럼 생각하기 시작하고, 앞으로 무엇이 자신을 기다리고 있는지 알아보고 싶은 학생들을 위한 책이다.

- 순수수학(pure mathematics), 역학(mechanics), 확률(probability)과 통계(statistics)를 아우르는 13개의 장
- 이 36개의 STEP 기출 문제와 각 문제의 안내식 풀이
- 모든 문제 뒤에 숨은 대학 수학
- 답이 실린 후속 연습 문제와 더 읽을거리

2014년 풀이. 책 전체와 모든 장,
모든 풀이를 다음 주소에서 무료로 읽고, 내려받고, 공유할 수 있다.

beyondstep.keithmcnulty.org

본문은 퍼블릭 도메인(CC0 1.0)으로 공개한다. STEP 문제 © Cambridge University Press & Assessment.

