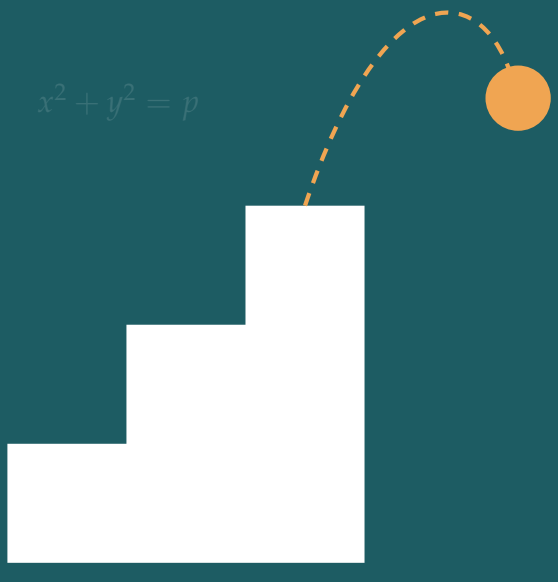
STEP 대비 · 대학 수학

Beyond STEP

STEP I, II 및 III

2013년 풀이



KEITH McNULTY

Beyond STEP

STEP 기출문제로 여는
대학 수학의 세계

STEP I, II 및 III

2013년 풀이

Keith McNulty

Beyond STEP: STEP 기출문제로 여는 대학 수학의 세계

2013년 풀이

2013년 STEP 문제지(STEP I, II 및 III)의 39개 문제 전체에 대한 풀이. 견본 문제지 이후 모든 STEP 문제의 풀이와 *Beyond STEP* 책 전체, 그리고 각 장을 `beyondstep.keithmcnulty.org`에서 무료로 읽고 내려받을 수 있다.

풀이를 읽기 전에 먼저 문제를 제대로 풀어 보자. 모든 답은 수치적으로 검증하였지만, 풀이가 이렇게 많으면 실수가 어느 정도 있을 수밖에 없다. 무언가 잘못된 것처럼 보이면 자신의 풀이를 믿고 꼼꼼히 확인해 보자.

영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.

2026년 11월 온라인 초판 발행.

이 PDF에서 지은이가 직접 만든 모든 것, 곧 본문, 풀이, 그림, 연습문제와 해답은 크리에이티브 커먼즈 CC0 1.0 Universal 라이선스에 따라 퍼블릭 도메인(public domain)으로 공개한다. 누구든 허락을 구하지 않고 어떤 목적으로든 복사하고, 고쳐 쓰고, 공유할 수 있다. 자세한 내용은 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`을 보라.

여기에서 다루는 STEP 문제의 저작권은 Cambridge University Press & Assessment에 있다. 문제는 이 책에 싣지 않았으며, 각 문제마다 공식 출처인 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스나 OCR의 기출 시험지로 가는 링크를 달았다.

오류 제보는 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty에 이슈로 남겨 주기 바란다.

차례

STEP I

Q1 제곱근이 있는 방정식 순수수학 3

Q2 바닥 함수 방정식 순수수학 7

Q3 벡터 대수 순수수학 12

Q4 치환적분 순수수학 16

Q5 이차곡선과 회전 순수수학 20

Q6 이항계수와 피보나치 수열 순수수학 25

Q7 일계 미분방정식 순수수학 29

Q8 합성함수 순수수학 33

Q9 포물체와 충돌 역학 38

Q10 반발 계수와 마찰 역학 42

Q11 마찰과 평형 역학 46

Q12 비복원추출 확률과 통계 50

Q13 경우의 수와 기댓값 확률과 통계 54

STEP II

Q1 로그 함수의 현 순수수학 57

Q2 점화 공식 순수수학 62

Q3 삼차식의 근 순수수학 66

Q4 현의 중점의 자취 순수수학 71

Q5 대칭성과 곡선의 개형 순수수학 76

Q6 수열의 수렴 순수수학 81

Q7 펠 방정식의 해 순수수학 86

Q8 미적분과 부등식 순수수학 90

Q9 평형 상태의 마찰 역학 94

Q10 포물체 운동 역학 99
Q11 연속 충돌 역학 103
Q12 푸아송 분포의 적률 확률과 통계 107
Q13 동전 던지기에서의 연속된 결과 확률과 통계 110

STEP III

Q1 반각 치환 순수수학 114
Q2 매클로린 급수 순수수학 118
Q3 벡터와 구 순수수학 122
Q4 1의 거듭제곱근의 곱 순수수학 127
Q5 유리성과 서로소 순수수학 131
Q6 복소수 절댓값 부등식 순수수학 134
Q7 상미분방정식의 에너지 방법 순수수학 139
Q8 이차곡선의 극방정식 순수수학 143
Q9 부력과 단진동 역학 147
Q10 회전 충격 역학 151
Q11 탄성 용수철과 에너지 역학 155
Q12 지시 확률변수 확률과 통계 159
Q13 적률과 분포함수 확률과 통계 163

풀이

STEP I 2013, 문제 1

순수수학 • 제곱근이 있는 방정식

> **STEP I 2013, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/13-s1-q1

핵심 아이디어

각 방정식은 겉모습만 다를 뿐 사실 이차방정식(quadratic equation)이다. 제곱근을 y라 하고 나머지를 모두 y로 나타내면 y에 대한 평범한 이차방정식을 얻는다. 단 하나 조심할 점은 제곱근이 절대 음수가 될 수 없으므로 $y \geq 0$이라는 것이다. 매번 가짜 근을 걸러 내는 것이 바로 이 조건이다.

풀이

소문항 (i)

$y = \sqrt{x}, y \geq 0$으로 두면 $x = y^2$이고, 방정식은 다음과 같이 된다.

$$y^2 + 3y - \tfrac{1}{2} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2y^2 + 6y - 1 = 0.$$

근의 공식(quadratic formula)에 의해

$$y = \frac{-6 \pm \sqrt{36+8}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{11}}{2}.$$

음의 부호를 택하면 음수가 나오는데, 이는 제곱근의 값으로 불가능하다. $\sqrt{11} > 3$이므로 양의 부호를 택하면 $y = \frac{1}{2}(\sqrt{11} - 3) > 0$이고, 따라서 이것이 유일한 경우이다. 그러면

$$x = y^2 = \frac{11 - 6\sqrt{11} + 9}{4} = \frac{10 - 3\sqrt{11}}{2}.$$

$y \geq 0$임을 알고 나면 모든 단계를 거꾸로 되돌릴 수 있으므로, 이것이 실제로 (유일한) 실근이다.

소문항 (ii)(a)

여기서는 $x+2$의 제곱근이 있으므로 $y=\sqrt{x+2}, y\geq 0$으로 두면 $x=y^2-2$이다. 방정식은 다음과 같이 된다.

$$y^2-2+10y-22=0 \quad\Longleftrightarrow\quad y^2+10y-24=0 \quad\Longleftrightarrow\quad (y+12)(y-2)=0.$$

$y\geq 0$이므로 $y=-12$는 버린다. 따라서 $y=2$이고 $x=2^2-2=2$이다.

확인: $2+10\sqrt{4}-22=0$. 유일한 실근은 $x=2$이다.

> **생각해 보기** $y=-12$를 버리지 않았다면 어떻게 되었을까?

그러면 $x=144-2=142$가 되는데, $142+10\sqrt{144}-22=240\neq 0$이다. $y=-12$라는 값은 관련된 방정식 $x-10\sqrt{x+2}-22=0$의 근이며, 부주의하게 양변을 제곱하면 결국 이 방정식을 풀게 된다. 두 방정식을 정확히 구별해 주는 것이 바로 조건 $y\geq 0$이다.

소문항 (ii)(b)

이번에는 치환(substitution)이 주어지지 않았으므로 직접 찾아야 한다. 근호 안의 식은

$$2x^2-8x-3=2(x^2-4x)-3,$$

이고, x^2-4x는 근호 밖에도 나타난다. 이것이 연결 고리이다.

> **생각해 보기** 여기서 y를 무엇으로 두어야 할까? x^2-4x일까, 아니면 제곱근 전체일까?

y를 제곱근으로 두면 방정식이 근호가 전혀 없는 이차방정식이 된다. $y=\sqrt{2x^2-8x-3}$, $y\geq 0$으로 두자. 그러면 $y^2=2(x^2-4x)-3$이므로

$$x^2-4x=\frac{y^2+3}{2}.$$

이를 방정식에 대입하면

$$\begin{aligned}\frac{y^2+3}{2}+y-9=0 \quad&\Longleftrightarrow\quad y^2+2y-15=0\\ &\Longleftrightarrow\quad (y+5)(y-3)=0.\end{aligned}$$

$y\geq 0$이므로 $y=3$이어야 한다. 그러면

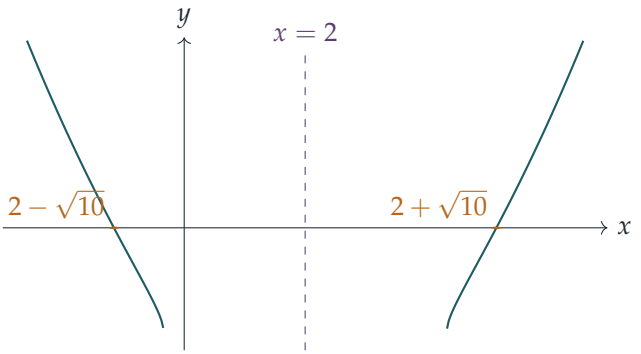
$$2x^2-8x-3=9 \quad\Longleftrightarrow\quad x^2-4x-6=0 \quad\Longleftrightarrow\quad x=2\pm\sqrt{10}.$$

두 값 모두 $2x^2-8x-3$을 양수인 9로 만들므로, 제곱근이 정의되고 그 값은 3이다. 따라서 둘 다 진짜 근이며, 실근은 다음과 같다.

$$x=2+\sqrt{10} \quad\text{그리고}\quad x=2-\sqrt{10}.$$

방정식이 $x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$를 통해서만 x에 의존하므로, 두 근이 $x = 2$에 대하여 대칭(symmetric)인 것은 당연하다.

좌변의 그래프를 보면 이를 확인할 수 있다. 좌변은 $2x^2 - 8x - 3 \geq 0$인 곳, 즉 $x \leq 2 - \sqrt{5.5}$ 또는 $x \geq 2 + \sqrt{5.5}$에서만 정의되며, 각 갈래에서 한 번씩 0을 지난다.



검산

- 소문항 (i): $x = \frac{1}{2}(10 - 3\sqrt{11}) \approx 0.02506$이므로 $\sqrt{x} \approx 0.1583$이고 $x + 3\sqrt{x} \approx 0.02506 + 0.47494 = 0.5$이다.
- 소문항 (ii)(b): $x = 2 + \sqrt{10} \approx 5.1623$이면 $x^2 - 4x = 6$이고 $2x^2 - 8x - 3 = 9$이므로 좌변은 $6 + 3 - 9 = 0$이다. 버린 값 $y = -5$가 되려면 $x^2 - 4x = 14$여야 하는데, 그러면 좌변은 $14 + 5 - 9 = 10 \neq 0$이다.
- 각 좌변을 정의역(domain) 전체에서 수치적으로 훑어보면 위의 근들만 정확히 나오고 다른 근은 없다.

흔한 실수

- y에 대한 이차방정식의 음의 근을 그대로 두는 것. 제곱근은 절대 음수가 아니므로 그 근은 해를 주지 않는다.
- (ii)(b)에서 곧바로 양변을 제곱하는 것. 그러면 훨씬 어려운 사차방정식(quartic equation)이 나오고, 일일이 확인해야 하는 여분의 근까지 생긴다.
- (ii)(a)에서 x가 y^2이 아니라 $x = y^2 - 2$라는 것을 잊는 것.

STEP 너머

새로운 변수를 도입해 어려운 방정식을 익숙한 방정식으로 바꾸는 것은 수학에서 가장 유용한 습관 가운데 하나이다. (ii)(b)에서 방정식은 $x^2 - 4x$에만 의존하므로 $(x-2)^2$의 함수이다. 이런 대칭을 알아차리고 그 대칭에 의해 변하지 않는 양을 가지고 작업하는 방법은 갈루아(Galois) 이론(Galois theory)에서 다시 등장한다. 갈루아 이론에서는 대칭에 의해 고정되는, 근들로 이루어진 식을 찾아 다항방정식(polynomial equation)을 푼다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 이런 개념으로 들어가는 부드러운 입문서이다. 이런 종류의 문제를 더 원한다면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)가 훌륭하다(게다가 무료이다).

풀이

STEP I 2013, 문제 2

순수수학 • 바닥 함수 방정식

> **STEP I 2013, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/13-s1-q2

핵심 아이디어

함수 $\lfloor x \rfloor$는 각 구간(interval) $[k, k+1)$에서 상수이므로, 그 구간에서 $f(x) = k/x$는 직각쌍곡선(rectangular hyperbola)의 한 조각일 뿐이다. 전체 그래프는 정수 k마다 하나씩 있는 이러한 조각들이 이어진 것이다. 따라서 $f(x) = c$를 푸는 일은 어느 조각이 높이 c에 도달하는지를 묻는 일로 귀결된다. k에 해당하는 조각에서 가능한 후보는 $x = k/c$ 하나뿐이며, 이것이 $[k, k+1)$에 들어갈 때에만 정확히 근(root)이 된다.

풀이

소문항 (i)

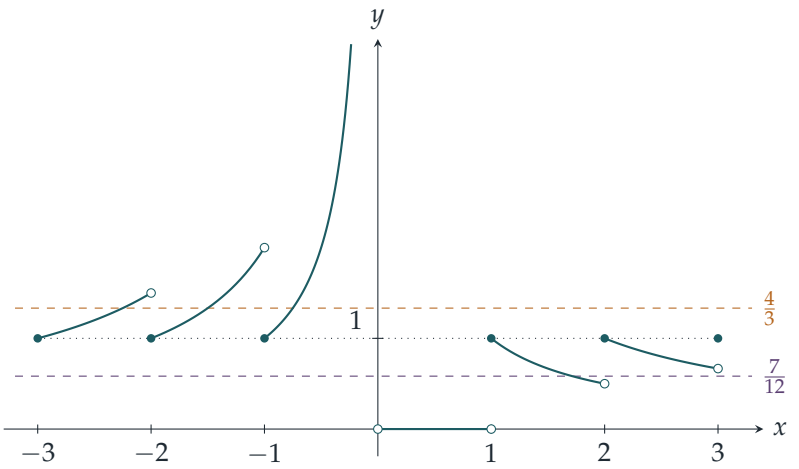
정수 k를 하나 고정하고 $k \le x < k+1$ (단, $x \neq 0$)인 범위를 살펴보자. 여기서 $f(x) = k/x$이다.

- $k = 0$, 즉 $0 < x < 1$인 경우: 이때 $f(x) = 0$이다.
- $k \ge 1$인 경우: $f(x) = k/x$는 $f(k) = 1$에서부터 $k/(k+1)$을 향해 감소하며, 이 값에는 결코 도달하지 않는다. 따라서 이 조각이 갖는 값은 정확히 $\left(\frac{k}{k+1}, 1\right]$이다.
- $k \le -1$인 경우: $m \ge 1$에 대하여 $k = -m$으로 쓰자. 그러면 x와 k가 모두 음수이므로 $f(x) = m/|x| > 0$이다. x가 $-m$에서 $-m+1$을 향해 증가하면 $|x|$는 감소하므로, f는 $f(-m) = 1$에서부터 증가한다. $m \ge 2$이면 f는 $\frac{m}{m-1}$에 가까워지지만 이 값에는 결코 도달하지 않으므로, 이 조각이 갖는 값은 정확히 $\left[1, \frac{m}{m-1}\right)$이다. $m = 1$이면 $x \to 0^-$일 때 $f(x) = -1/x \to +\infty$이므로, 이 조각이 갖는 값은 $[1, \infty)$이다.

$-3 \le x \le 3$에서 각 조각은 다음과 같다.

x	$[-3,-2)$	$[-2,-1)$	$[-1,0)$	$(0,1)$	$[1,2)$	$[2,3)$
$f(x)$	$-3/x$	$-2/x$	$-1/x$	0	$1/x$	$2/x$
값	$[1,\frac{3}{2})$	$[1,2)$	$[1,\infty)$	0	$(\frac{1}{2},1]$	$(\frac{2}{3},1]$

그리고 마지막으로 $f(3)=1$이다. 모든 조각은 왼쪽 (정수) 끝점에서 높이 1로 시작하며 그 점을 포함하고, 오른쪽 끝은 열려 있다.



소문항 (ii)

$\lfloor x \rfloor = k$인 조각에서 방정식 $f(x)=c$ (단, $c \neq 0$)는 $k/x = c$를 뜻하므로 $x = k/c$이다. 이것은 $k \le k/c < k+1$일 때 정확히 실제 근이 된다. 따라서 각 c에 대해, 소문항 (i)에서 구한 범위를 이용하여 어느 조각이 높이 c에 도달하는지만 판단하면 된다.

$f(x)=\frac{7}{12}$. $0 < \frac{7}{12} < 1$이므로 $k \ge 1$인 조각만 가능하며, $\frac{k}{k+1} < \frac{7}{12}$, 즉 $12k < 7k+7$, 즉 $k < \frac{7}{5}$이어야 한다. 따라서 $k=1$만 가능하고, $x = 1/\frac{7}{12}$로부터

$$x = \tfrac{12}{7}.$$

그래프에서 직선 $y=\frac{7}{12}$는 $[1,2)$ 위의 조각과만 만난다. $[2,3)$ 위의 조각은 $\frac{2}{3}$보다 위에 있기 때문이다.

$f(x)=\frac{17}{24}$. 이번에는 $\frac{k}{k+1} < \frac{17}{24}$, 즉 $24k < 17k+17$, 즉 $k < \frac{17}{7}$이어야 하므로 $k=1$ 또는 $k=2$이다. 근은 $x = k/\frac{17}{24}$이므로

$$x = \tfrac{24}{17} \quad \text{그리고} \quad x = \tfrac{48}{17}.$$

(실제로 $2 \le \frac{48}{17} \approx 2.82 < 3$이다.)

$f(x) = \frac{4}{3}$. $\frac{4}{3} > 1$이므로 음수 쪽 조각만 가능하다. $k = -m$인 조각은 $\frac{4}{3} < \frac{m}{m-1}$일 때 (또는 $m = 1$일 때) $\frac{4}{3}$에 도달하며, 이는 $4m - 4 < 3m$, 즉 $m < 4$와 같다. 따라서 $m = 1, 2, 3$이고, 근은 $x = -m/\frac{4}{3} = -\frac{3m}{4}$이므로

$$x = -\frac{3}{4}, \quad x = -\frac{3}{2}, \quad x = -\frac{9}{4}.$$

$m = 4$인 경우는 아슬아슬하게 실패한다. $[-4, -3)$ 위의 조각은 $\frac{4}{3}$보다 작은 값까지만 올라가기 때문이다.

소문항 (iii)

여기서는 $0 < \frac{9}{10} < 1$이므로, 근은 $k \geq 1$이고 $\frac{k}{k+1} < \frac{9}{10}$, 즉 $10k < 9k + 9$, 즉 $k < 9$인 조각에서 나온다. 따라서 $k = 1, 2, \ldots, 8$이 각각 근 $x = \frac{10k}{9}$를 하나씩 준다. 가장 큰 근은 $k = 8$일 때의 근인

$$x = \frac{80}{9} \approx 8.89,$$

이며, 이 값은 실제로 $[8, 9)$에 속한다.

마지막 소문항

먼저 근이 없거나 무수히 많은 c의 값을 살펴보자.

- $c < 0$: $x > 0$에서 $f(x) \geq 0$이고 $x < 0$에서 $f(x) > 0$이므로 근이 없다.
- $c = 0$: 모든 $x \in (0, 1)$이 근이므로 근이 무수히 많다.
- $c = 1$: 0이 아닌 모든 정수가 근이므로 역시 근이 무수히 많다.

> **생각해 보기** 그래프를 그리지 않고 일반적인 c에 대해 근의 개수를 어떻게 셀 수 있을까?

소문항 (i)에서 구한 범위를 이용한다. 각 조각은 근을 많아야 하나 주므로, 값의 범위가 c를 포함하는 조각의 개수만 세면 된다.

$0 < c < 1$인 경우. c에 도달하는 조각은 $k \geq 1$이고 $\frac{k}{k+1} < c$인 조각이다. $\frac{k}{k+1}$은 k에 대해 증가하므로, 이러한 조각은 $k = 1, 2, \ldots$부터 $\frac{k}{k+1} < c$를 만족하는 마지막 k까지이다. 따라서 근이 정확히 n개인 것은 n번째 조각은 c에 도달하지만 $(n+1)$번째 조각은 도달하지 않을 때, 즉

$$\frac{n}{n+1} < c \leq \frac{n+1}{n+2}.$$

일 때와 정확히 같다. ($0 < c \leq \frac{1}{2}$이면 어떤 조각도 c에 도달하지 않으므로 근이 없다.)

$c > 1$인 경우. c에 도달하는 조각은 $k = -m$이고, $m = 1$이거나 $\frac{m}{m-1} > c$인 조각이다. $\frac{m}{m-1} = 1 + \frac{1}{m-1}$은 m이 커질수록 감소하므로, 이러한 조각은 $m = 1, 2, \ldots$부터 $\frac{m}{m-1} > c$를 만족하는 마지막 m까지이다. 따라서 근이 정확히 n개인 것은 $m = n$인 조각은 c에 도달하지만 $m = n+1$인 조각은 도달하지 않을 때, 즉

$$\frac{n+1}{n} \le c < \frac{n}{n-1} \qquad (n \ge 2),$$

일 때와 정확히 같고, $n = 1$이면 단순히 $c \ge 2$일 때이다 ($[-1, 0)$ 위의 조각은 항상 c에 도달하고, $c \ge 2$이면 $[-2, -1)$ 위의 조각은 도달하지 않는다).

답. $n \ge 1$에 대하여, 방정식 $f(x) = c$가 정확히 n개의 근을 가질 필요충분조건은

$$\frac{n}{n+1} < c \le \frac{n+1}{n+2} \qquad \text{또는} \qquad \frac{n+1}{n} \le c < \frac{n}{n-1},$$

이다. 단, $n = 1$일 때 두 번째 조건은 $c \ge 2$로 읽는다. 등호가 어디에 들어가는지 주목하자. 두 등호 모두 조각의 열린 끝에서 나온다. $c = \frac{n+1}{n+2}$는 $[n+1, n+2)$ 위의 조각이 도달하지 않는 값이고, $c = \frac{n+1}{n}$은 $[-(n+1), -n)$ 위의 조각이 도달하지 않는 값이다. 따라서 이 두 경계값에서도 근은 여전히 정확히 n개이다.

검산

- 다시 대입해 보자. $\lfloor \frac{12}{7} \rfloor = 1$이고 $1/\frac{12}{7} = \frac{7}{12}$; $\lfloor \frac{48}{17} \rfloor = 2$이고 $2/\frac{48}{17} = \frac{17}{24}$; $\lfloor -\frac{9}{4} \rfloor = -3$이고 $-3/(-\frac{9}{4}) = \frac{4}{3}$; $\lfloor \frac{80}{9} \rfloor = 8$이고 $8/\frac{80}{9} = \frac{9}{10}$이다.
- 일반적인 답은 구체적인 경우들과 일치한다. $\frac{2}{3} < \frac{17}{24} \le \frac{3}{4}$이므로 $n = 2$; $\frac{4}{3} \le \frac{4}{3} < \frac{3}{2}$이므로 $n = 3$; $\frac{8}{9} < \frac{9}{10} \le \frac{9}{10}$이므로 $n = 8$이다. 마지막 두 경우는 범위의 끝점에 정확히 놓이므로, $\le$와 $<$의 위치를 확인하는 시험이 된다.
- 경계값 하나: $c = 2$는 근을 하나 주어야 한다. 실제로 $x = -\frac{1}{2}$는 근이지만, ($k = -2$에서 나오는) $x = -1$은 $\lfloor -1 \rfloor = -1 \ne -2$이므로 근이 아니다.
- $c = \frac{1}{2}$를 시도해 보자. 조건을 만족하는 n이 없으며, 실제로 $k \ne 0$일 때 $x = k/c = 2k$는 결코 $\lfloor 2k \rfloor = k$를 만족하지 않는다.

흔한 실수

- 음수 x에 대해 $\lfloor x \rfloor$는 **내림**을 한다는 것을 잊는 실수. 즉 $\lfloor -2.25 \rfloor = -3$이지 -2가 아니다. 이것을 잊으면 $c > 1$에 대한 음수 쪽 가지를 통째로 놓치게 된다.
- 끝점을 잘못 처리하는 실수. 각 조각은 높이 1인 왼쪽 (정수) 끝점은 포함하지만 오른쪽 끝점은 포함하지 않는다. 이것이 최종 조건에 $\le$가 들어가는지 $<$가 들어가는지를 결정한다.

▶ 근이 무수히 많은 $c = 0$과 $c = 1$, 또는 근이 없는 $c < 0$과 $0 < c \leq \frac{1}{2}$를 빠뜨리는 실수.

STEP 너머

$\lfloor x \rfloor / x$와 같은 함수는 각 조각에서는 연속(continuous)이지만 고립된 점에서 값이 뛰는 함수의 가장 간단한 예이다. 어느 끝점에서 값이 실제로 얻어지는지 주의 깊게 따지는 것은 바로 대학 첫 해석학(analysis) 강의에서 상한(supremum)과 하한(infimum)을 다룰 때 필요한 습관이다. 여기서 $x > 0$에서의 sup f는 1이고 이 값은 실제로 얻어지지만, $x \geq 1$에서의 하한은 $\frac{1}{2}$이고 이 값은 얻어지지 않는다. 같은 함수는 또한 $x \to \infty$일 때 $\lfloor x \rfloor / x \to 1$임을 보여 주는데, 이는 해석적 정수론(analytic number theory)에서 쓰이는 어림 계산을 처음 맛보는 것이다. 상한, 극한(limit), 연속성에 대해 더 읽고 싶다면 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)가 좋은 출발점이다.

풀이

STEP I 2013, 문제 3

순수수학 • 벡터 대수

STEP I 2013, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/13-s1-q3

핵심 아이디어

여기서 다루는 것은 모두 선형(linear)이므로, 매번 가장 깔끔한 방법은 각 점을 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$의 결합으로 나타낸 다음 빼는 것이다. 두 점은 위치벡터(position vector)의 차가 영벡터가 아닐 때, 그리고 오직 그때에만 서로 다르며, 그 차는 언제나 간단한 인수와 $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ 같은 벡터의 곱으로 나타난다. 기하적으로 $X*Y$는 직선 XY 위의 점이고, $0<\lambda<1$일 때는 두 점 사이의 선분(segment) 위에 놓인다.

풀이

이 풀이 전체에서 두 점이 같다는 것은 두 점의 위치벡터가 같다는 것과 동치이다.

소문항 (i)

정의에 따라 $Y*X$의 위치벡터는 $\lambda\mathbf{y}+(1-\lambda)\mathbf{x}$이므로

$$\begin{aligned}\big(\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y}\big)-\big(\lambda\mathbf{y}+(1-\lambda)\mathbf{x}\big) &= (2\lambda-1)\mathbf{x}-(2\lambda-1)\mathbf{y}\\ &= (2\lambda-1)(\mathbf{x}-\mathbf{y}).\end{aligned}$$

X와 Y는 서로 다른 점이므로 $\mathbf{x}-\mathbf{y}\neq\mathbf{0}$이고, 따라서 이 차가 영벡터일 필요충분조건은 $2\lambda-1=0$이다. 그러므로 $X*Y$와 $Y*X$는 서로 다른 점이며, 예외는 $\lambda=\frac{1}{2}$일 때뿐인데, 이때 두 점은 모두 XY의 중점(midpoint)이다.

소문항 (ii)

양변을 각각 전개하면

$$\begin{aligned}(X*Y)*Z: &\quad \lambda\big(\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y}\big)+(1-\lambda)\mathbf{z} = \lambda^2\mathbf{x}+\lambda(1-\lambda)\mathbf{y}+(1-\lambda)\mathbf{z},\\ X*(Y*Z): &\quad \lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\big(\lambda\mathbf{y}+(1-\lambda)\mathbf{z}\big) = \lambda\mathbf{x}+\lambda(1-\lambda)\mathbf{y}+(1-\lambda)^2\mathbf{z}.\end{aligned}$$

$\mathbf{y}$ 항은 서로 같고, 빼면

$$\begin{aligned}\text{차} &= (\lambda^2-\lambda)\mathbf{x}+\big((1-\lambda)-(1-\lambda)^2\big)\mathbf{z}\\ &= -\lambda(1-\lambda)\mathbf{x}+\lambda(1-\lambda)\mathbf{z}\\ &= \lambda(1-\lambda)(\mathbf{z}-\mathbf{x}).\end{aligned}$$

이것은 각 인수가 모두 o이 아닐 때, 그리고 오직 그때에만 영벡터가 아니다. 따라서 $(X*Y)*Z$와 $X*(Y*Z)$가 서로 다를 필요충분조건은

$$\lambda \neq 0, \qquad \lambda \neq 1 \qquad \text{그리고} \qquad Z \neq X.$$

Y는 아무 역할도 하지 않는다는 점에 주목하자. 제외되는 값들도 이치에 맞는다. $\lambda = 1$이면 이 연산은 항상 첫 번째 점을 내놓고, $\lambda = 0$이면 항상 두 번째 점을 내놓으므로, 두 가지 괄호 묶기 모두 각각 X 또는 Z를 준다.

소문항 (iii)

식을 깔끔하게 하기 위해 $\mu = 1-\lambda$로 놓자. 우변은

$$\begin{aligned}(X*Z)*(Y*Z): &\quad \lambda(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{z})+\mu(\lambda\mathbf{y}+\mu\mathbf{z})\\ &= \lambda^2\mathbf{x}+\lambda\mu\,\mathbf{y}+\mu(\lambda+\mu)\mathbf{z}\\ &= \lambda^2\mathbf{x}+\lambda\mu\,\mathbf{y}+\mu\,\mathbf{z},\end{aligned}$$

인데, 이는 $\lambda+\mu = 1$이기 때문이다. 이것은 소문항 (ii)에서 구한 $(X*Y)*Z$의 전개식과 정확히 같으므로, 모든 점 X, Y, Z에 대하여

$$(X*Y)*Z = (X*Z)*(Y*Z)$$

가 성립하고, 이것이 증명하려던 것이다.

생각해 보기 $X*(Y*Z)$에 대한 "대응하는 결과"는 어떤 모양이어야 할까?

소문항 (iii)에서는 바깥쪽의 $*Z$를 왼쪽 괄호에 분배(distribute)했다. 이를 거울에 비춘 모습은 $X*$를 오른쪽 괄호에 분배하는 것이므로, $(X*Y)*(X*Z)$를 시도해 볼 만하다. 실제

로

$$\begin{aligned}(X*Y)*(X*Z): \quad & \lambda(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y})+\mu(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{z}) \\ &= \lambda(\lambda+\mu)\mathbf{x}+\lambda\mu\,\mathbf{y}+\mu^2\mathbf{z} \\ &= \lambda\mathbf{x}+\lambda\mu\,\mathbf{y}+\mu^2\mathbf{z},\end{aligned}$$

이고, 이것은 소문항 (ii)에서 구한 $X*(Y*Z)$의 전개식이다. 따라서 임의의 점 X, Y, Z에 대하여

$$X*(Y*Z)=(X*Y)*(X*Z).$$

소문항 (iv)

P_n의 위치벡터가

$$\mathbf{p}_n=\lambda^n\mathbf{x}+(1-\lambda^n)\mathbf{y}.$$

임을 보이자. $n=1$일 때 이것은 $X*Y$의 정의 그 자체이다. $n-1$일 때 성립한다고 가정하면

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_n=\lambda\mathbf{p}_{n-1}+(1-\lambda)\mathbf{y} &= \lambda^n\mathbf{x}+\big(\lambda-\lambda^n+1-\lambda\big)\mathbf{y} \\ &= \lambda^n\mathbf{x}+(1-\lambda^n)\mathbf{y},\end{aligned}$$

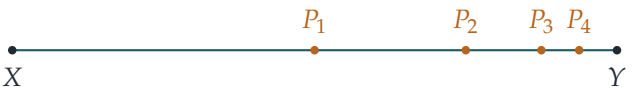
이므로, 수학적 귀납법(induction)에 의해 이 식은 모든 $n\geq 1$에 대하여 성립한다.

이제 선분을 따라 거리를 재어 보자.

$$\mathbf{p}_n-\mathbf{x}=(1-\lambda^n)(\mathbf{y}-\mathbf{x}), \qquad \mathbf{y}-\mathbf{p}_n=\lambda^n(\mathbf{y}-\mathbf{x}).$$

$0<\lambda<1$이면 $0<\lambda^n<1$이므로, 두 벡터는 모두 같은 영이 아닌 벡터 $\mathbf{y}-\mathbf{x}$의 양수배이다. 따라서 P_n은 X와 Y 사이에 (양 끝점을 제외하고) 놓이며

$$XP_n : P_nY = (1-\lambda^n) : \lambda^n.$$



$\lambda=\frac{1}{2}$: 한 단계마다 Y까지의 간격이 절반이 된다

한 단계마다 Y까지 남은 거리에 λ가 곱해지므로, 점들은 Y를 향해 나아가고, $n\to\infty$일 때 $P_n\to Y$이다.

검산

- 소문항 (i)에서 한 직선 위에 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$, $\mathbf{y}=\mathbf{1}$로 잡고 $\lambda=\frac{1}{3}$이라 하자. 그러면 $X*Y$는 $\frac{2}{3}$에, $Y*X$는 $\frac{1}{3}$에 있고, 둘의 차는 $\frac{1}{3}=|2\lambda-1|$이다.

- 소문항 (ii)에서 $Z = X$이면 어떤 λ에 대해서도 두 괄호 묶기의 결과가 같아야 한다. 실제로 이때 우리가 구한 차 $\lambda(1-\lambda)(\mathbf{z}-\mathbf{x})$는 영벡터가 되므로 예상과 맞는다.
- 소문항 (iv)에서 $\lambda = \frac{1}{2}$, $n = 3$이면 비는 $\frac{7}{8} : \frac{1}{8} = 7:1$이고, 실제로 P_3은 X에서 Y까지 가는 길의 $\frac{7}{8}$ 지점에 있다(간격을 세 번 절반으로 줄인 것). $n = 1$이면 비 $(1-\lambda) : \lambda$는 바로 $X * Y$의 정의이다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)에서 $Z \neq X$를 빠뜨리는 것. 답은 λ에 대한 조건만이 아니다.
- 소문항 (iv)에서 비를 거꾸로 쓰는 것. $\mathbf{p}_n$은 $\mathbf{x}$에 가중치 λ^n을 두므로 λ^n이 클 때 X에 가깝고, 따라서 더 짧은 조각 XP_n이 $1-\lambda^n$에 대응한다.

STEP 너머

점 $\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}$는 볼록 결합(convex combination, 또는 아핀 결합(affine combination))으로, 볼록 집합, 무게중심 좌표(barycentric coordinates), 그리고 컴퓨터 그래픽스의 선형 보간(linear interpolation)의 기본 구성 요소이다. 소문항 (ii)는 $*$가 결합법칙(associative law)을 만족하지 않음을 말해 주고, 소문항 (iii)은 $*$가 자기분배적(self-distributive)임을 말해 준다. 이런 성질을 가진 연산은 대수학에서 랙(rack), 퀀들(quandle), 메디얼 대수(medial algebra) 같은 이름으로 연구된다. 선형대수의 관점에서 보려면 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수 입문)를 참고하라.

풀이

STEP I 2013, 문제 4

순수수학 • 치환적분

STEP I 2013, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/13-s1-q4

핵심 아이디어

소문항 (i)에서 각 피적분함수(integrand)는 "어떤 것의 함수에 그것의 도함수(derivative)를 곱한 꼴"이다. $\sec^2 x$는 $\tan x$의 도함수이고, $\sec x \tan x$는 $\sec x$의 도함수이다. 소문항 (ii)에서는 x 또는 x^2이라는 추가 인수가 있으므로 부분적분(integration by parts)을 써야 한다. 이때 적분하는 쪽은 삼각함수 인수이고, 그 방법은 소문항 (i)에서 방금 보았다.

풀이

소문항 (i)

첫 번째 적분에서는 $u = \tan x$로 치환(substitution)하면 $\mathrm{d}u = \sec^2 x \, \mathrm{d}x$이다. $x = 0$일 때 $u = 0$이고, $x = \frac{1}{4}\pi$일 때 $u = 1$이다. 따라서

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \tan^n x \sec^2 x \, \mathrm{d}x = \int_0^1 u^n \, \mathrm{d}u = \left[\frac{u^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1},$$

이다. 여기서 $0^{n+1} = 0$이 되도록 $n > 0$임을 이용했다.

생각해 보기 두 번째 적분에서, $\sec^n x \tan x$ 안에는 어떤 함수의 도함수가 숨어 있는가?

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sec x = \sec x \tan x$이므로 $\sec x$ 인수 하나를 떼어 낸다.

$$\sec^n x \tan x = \sec^{n-1} x \, (\sec x \tan x).$$

이제 $u = \sec x$로 치환하면 $\mathrm{d}u = \sec x \tan x \, \mathrm{d}x$이고, $x = 0$에서 $u = 1$, $x = \frac{1}{4}\pi$에서

$u = \sqrt{2}$이다. $n > 0$이므로 n으로 나눌 수 있고,

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sec^n x \tan x \,\mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{2}} u^{n-1} \,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^n}{n}\right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2})^n - 1}{n},$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

소문항 (ii)

첫 번째 적분. 이를 I_1이라 하자. x를 미분하고 $\sec^4 x \tan x$를 적분하는 방식으로 부분적분한다. 소문항 (i)의 치환 $u = \sec x$를 쓰면 원시함수(antiderivative)

$$\int \sec^4 x \tan x \,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{4} \sec^4 x + C.$$

를 얻는다. ($[0, \frac{1}{4}\pi]$에서의 정적분(definite integral)은 $\frac{1}{4}(4-1) = \frac{3}{4}$이며, 이는 소문항 (i)에서 $n = 4$인 경우이다.) 그러므로

$$I_1 = \left[\tfrac{1}{4} x \sec^4 x\right]_0^{\frac{1}{4}\pi} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sec^4 x \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{4}{4} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sec^4 x \,\mathrm{d}x,$$

이다. $\sec^4 \frac{1}{4}\pi = (\sqrt{2})^4 = 4$이기 때문이다. 남은 적분은 $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$로 고쳐 쓰면

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sec^4 x \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sec^2 x \,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \tan^2 x \sec^2 x \,\mathrm{d}x = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3},$$

이다. 여기서 첫 번째 적분은 $[\tan x]_0^{\frac{1}{4}\pi} = 1$이고, 두 번째 적분은 소문항 (i)에서 $n = 2$인 경우이다. 따라서

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} x \sec^4 x \tan x \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}.$$

두 번째 적분. 이를 I_2라 하자. 이번에도 x의 거듭제곱을 미분하고 $\sec^2 x \tan x$를 적분한다. 원시함수 하나는 $\frac{1}{2}\sec^2 x$이지만, $\frac{1}{2}\tan^2 x$도 똑같이 쓸 수 있으며(둘은 상수 $\frac{1}{2}$만큼 차이 난다), 이쪽이 더 좋은 선택이다.

> ? **생각해 보기** 왜 $\frac{1}{2}\sec^2 x$보다 $\frac{1}{2}\tan^2 x$를 택하는가?

부분적분을 하고 나면 $x\tan^2 x$가 남는데, $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$은 적분할 수 있는 조각들로 나뉜다. 또한 $\tan^2 x$는 0에서 값이 0이 되므로 경계항(boundary term)이 깔끔해진다. ($\frac{1}{2}\sec^2 x$를 써도 결국 같은 답이 나온다.)

따라서 $\tan \frac{1}{4}\pi = 1$을 이용하면

$$I_2 = \left[\tfrac{1}{2} x^2 \tan^2 x\right]_0^{\frac{1}{4}\pi} - \int_0^{\frac{1}{4}\pi} x \tan^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{32} - \int_0^{\frac{1}{4}\pi} x \tan^2 x \,\mathrm{d}x.$$

이제

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} x\tan^2 x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} x\sec^2 x\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{1}{4}\pi} x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} x\sec^2 x\,\mathrm{d}x - \frac{\pi^2}{32}.$$

$\sec^2 x$의 원시함수로 $\tan x$를 택하여 한 번 더 부분적분하고, $\int \tan x\,\mathrm{d}x = \ln\sec x$(이 구간에서 $\sec x > 0$이므로 성립한다)를 이용하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{4}\pi} x\sec^2 x\,\mathrm{d}x &= \Big[x\tan x\Big]_0^{\frac{1}{4}\pi} - \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \tan x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{4} - \Big[\ln\sec x\Big]_0^{\frac{1}{4}\pi} = \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.\end{aligned}$$

이 조각들을 모으면

$$I_2 = \frac{\pi^2}{32} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi^2}{32}\right),$$

즉,

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} x^2\sec^2 x\tan x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2.$$

검산

- 소문항 (i)에서 $n = 1$일 때: 두 공식은 각각 $\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \tan x\sec^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$와 $\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sec x\tan x\,\mathrm{d}x = \sqrt{2} - 1$을 주며, 이는 $\left[\frac{1}{2}\tan^2 x\right]$와 $[\sec x]$로부터 직접 확인할 수 있다.
- 부호와 크기: 소문항 (ii)의 두 피적분함수는 모두 $(0, \frac{1}{4}\pi)$에서 양수이고, 답 $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \approx 0.4521$과 $\frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2 \approx 0.1780$도 양수이다. 두 번째 값이 더 작은 것도 당연한데, 그 구간에서 $x^2\sec^2 x \le x\sec^4 x$이기 때문이다($x < 1 < \sec^2 x$이므로).
- 대략적인 상계: $x\sec^4 x\tan x \le \frac{\pi}{4}\sec^4 x\tan x$이므로 $I_1 \le \frac{\pi}{4}\cdot\frac{3}{4} \approx 0.589$이다. 우리가 얻은 0.452는 이와 모순되지 않는다. 계산기로 구간을 몇 개만 나누어 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용해도 두 값에 가까운 결과가 나온다.

흔한 실수

- 소문항 (i)의 두 번째 적분에서 $\sec x\tan x$를 먼저 떼어 내지 않고 $u = \sec x$로 치환하여, 거듭제곱이 $n - 1$이 아니라 n으로 남는 실수.
- $\sec\frac{1}{4}\pi = \sqrt{2}$, 따라서 $\sec^4\frac{1}{4}\pi = 4$이고 $\sec^2\frac{1}{4}\pi = 2$임을 잊는 실수.
- 경계항 $\left[\frac{1}{2}x^2\tan^2 x\right]$를 빠뜨리거나, $\int \tan x\,\mathrm{d}x$의 부호를 틀리는 실수(이 값은 $\ln\sec x = -\ln\cos x$이다).

STEP 너머

소문항 (i)의 적분들은 $\sec^m x \tan^n x$를 적분하는 표준 이론의 첫 단계로, 이 이론에서는 점화 공식(reduction formulae)을 이용해 거듭제곱을 한 단계씩 낮춘다. 소문항 (ii)처럼 다항식 인수가 있는 부분적분은 "표 방법(tabular method)"으로 일반화되며, 훨씬 뒤에는 한 함수의 도함수를 다른 함수로 옮기는 아이디어로 이어지는데, 이것이 미분방정식(differential equations)의 약해(weak solutions)의 바탕이 된다. 치환적분과 부분적분이 왜 성립하는지에 대한 엄밀한 설명은 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 보라. 이런 유형의 문제를 더 많이 풀어 보고 싶다면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(STEP 대비 문제집)에 도전해 보라.

풀이

STEP I 2013, 문제 5

순수수학 • 이차곡선과 회전

STEP I 2013, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/13-s1-q5

핵심 아이디어

k에 따라 달라지는 항은 xy항 하나뿐이며, 이 항이 어떤 종류의 곡선이 나오는지를 결정한다. xy항이 없으면 x와 y 각각에 대해 따로 완전제곱식 만들기(completing the square)를 할 수 있다. 이차 부분이 인수분해(factorise)되면 방정식 전체가 두 직선으로 인수분해될 수도 있다. 그리고 이차 부분이 완전제곱식(perfect square) $(x+y)^2$이면, 좌표축을 45° 회전(rotation)하여 $x+y$를 하나의 좌표로 바꿀 수 있고, 그러면 익숙한 포물선(parabola)이 남는다.

또한 $x=0$ 또는 $y=0$으로 놓으면 xy항이 사라지므로, 좌표축과 만나는 절편(intercept)은 모든 k에 대해 같다는 점에 주목하자. $x^2+3x=0$에서 $x=0$ 또는 $x=-3$이고, $y^2+y=0$에서 $y=0$ 또는 $y=-1$이다. 따라서 모든 궤적(locus)은 $(0,0)$, $(-3,0)$, $(0,-1)$을 지난다.

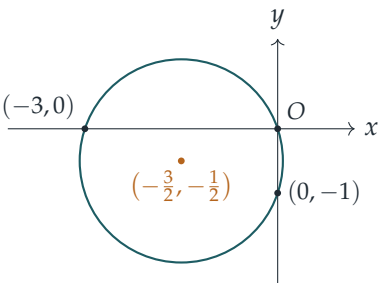
풀이

소문항 (i)

$k=0$일 때 각 변수에 대해 완전제곱식을 만들면

$$\left(x+\tfrac{3}{2}\right)^2+\left(y+\tfrac{1}{2}\right)^2=\tfrac{9}{4}+\tfrac{1}{4}=\tfrac{5}{2}.$$

따라서 궤적은 중심이 $\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$이고 반지름이 $\sqrt{5/2}\approx 1.58$인 원이다. 이 원은 x-축과 $(0,0)$, $(-3,0)$에서 만나고, y-축과 $(0,0)$, $(0,-1)$에서 만난다. (원점과 $(-3,0)$은 한 현(chord)의 양 끝점이므로, 중심은 그 수직이등분선(perpendicular bisector) $x=-\frac{3}{2}$ 위에 있어야 하고, 실제로 그렇다.)



소문항 (ii)

$k = \frac{10}{3}$일 때 양변에 3을 곱하면

$$3x^2 + 3y^2 + 10xy + 9x + 3y = 0.$$

이차 부분은

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 = (3x + y)(x + 3y),$$

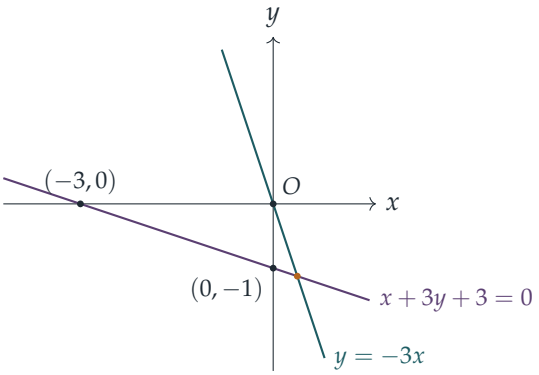
으로 인수분해되고, 일차 부분은 $9x + 3y = 3(3x + y)$이므로 공통인수 $3x + y$를 가진다. 따라서

$$(3x + y)(x + 3y) + 3(3x + y) = (3x + y)(x + 3y + 3) = 0.$$

곱이 0이 되는 것은 인수 중 하나가 0일 때뿐이므로, 궤적은 두 직선

$$y = -3x \qquad \text{그리고} \qquad x + 3y + 3 = 0.$$

이다. 첫 번째 직선은 원점을 지난다(원점이 두 좌표축과 만나는 유일한 점이다). 두 번째 직선은 x-축과 $(-3, 0)$에서, y-축과 $(0, -1)$에서 만난다. 두 식을 연립하면 $x - 9x + 3 = 0$이므로, 두 직선은 $\left(\frac{3}{8}, -\frac{9}{8}\right)$에서 만난다.



소문항 (iii)

$k = 2$일 때 방정식은

$$(x+y)^2 + 3x + y = 0.$$

이다. $\theta = 45°$이면 $\cos\theta = \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$이므로

$$X = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \qquad Y = \frac{y-x}{\sqrt{2}}.$$

따라서 $x + y = \sqrt{2}\,X$이고 $y - x = \sqrt{2}\,Y$이며, 두 식을 더하고 빼면

$$x = \frac{X-Y}{\sqrt{2}}, \qquad y = \frac{X+Y}{\sqrt{2}}.$$

? **생각해 보기** 왜 그 반대가 아니라 x와 y를 X와 Y로 나타내야 할까?

우리는 P가 곡선 위에 있다는 것을 알고 있고, Q가 만족하는 방정식을 구하려 한다. 따라서 P의 궤적의 방정식에 x와 y를 대입해야 하며, 이를 위해서는 x와 y를 X와 Y로 나타내야 한다. (이 변환은 회전이므로 역변환(inverse)은 반대 방향으로의 회전일 뿐이어서 쉽게 구할 수 있다.)

일차 부분은

$$3x + y = \frac{3X - 3Y + X + Y}{\sqrt{2}} = \frac{4X - 2Y}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\,X - \sqrt{2}\,Y,$$

이 되고, $(x+y)^2 = 2X^2$이다. 따라서 Q의 궤적은

$$2X^2 + 2\sqrt{2}\,X - \sqrt{2}\,Y = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \sqrt{2}\,Y = 2X^2 + 2\sqrt{2}\,X = \left(\sqrt{2}\,X + 1\right)^2 - 1,$$

이고, 이것이 증명하려던 식이다. 모든 단계가 거꾸로도 성립하므로, 이것이 정확히 Q의 궤적이다.

이것은 (X, Y) 평면에서 Y가 증가하는 방향으로 열린 포물선이다. 이 포물선은 $\sqrt{2}\,X + 1 = 0$인 직선, 즉 $X = -\frac{1}{\sqrt{2}}$에 대해 대칭이고, 꼭짓점(vertex)은 $X = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $Y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$에 있다.
이제 회전을 되돌린다. Q는 P를 시계 방향으로 45° 회전하여 얻은 점이므로, P의 궤적은 이 포물선을 **반시계 방향**으로 45° 회전한 것이다. x와 y로 나타내면 다음과 같다.

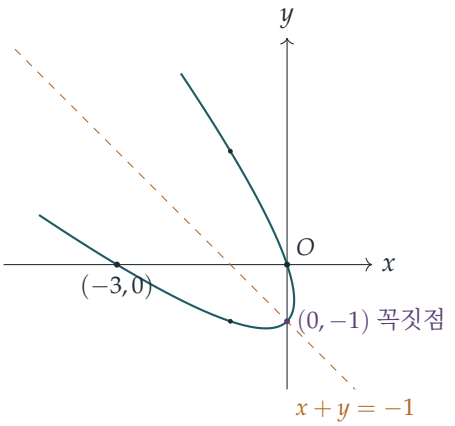
- 대칭축(line of symmetry) $X = -\frac{1}{\sqrt{2}}$는 $\frac{x+y}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, 즉 다음 직선이다.

$$x + y = -1;$$

- 꼭짓점은 $x = \frac{X-Y}{\sqrt{2}} = 0$, $y = \frac{X+Y}{\sqrt{2}} = -1$, 즉 $(0, -1)$에 있다.
- 포물선은 $Y = \frac{y-x}{\sqrt{2}}$가 증가하는 방향, 즉 $(-1, 1)$ 방향인 왼쪽 위로 열려 있다.

처음에 살펴본 것처럼 절편은 $(0,0)$, $(-3,0)$, $(0,-1)$이며, $(0,-1)$이 꼭짓점이다. 꼭짓점에서의 접선(tangent)은 대칭축에 수직이므로 기울기(gradient)가 1이다. 따라서 곡선은 꼭짓점에서 y-축에 접하는 것이 아니라 y-축을 가로지른다. 대칭성을 검산해 보면, $x+y=-1$에 대한 대칭이동은 (a,b)를 $(-1-b,-1-a)$로 보내므로 원점은 $(-1,-1)$로, $(-3,0)$은 $(-1,2)$로 옮겨진다. 두 점 모두 $(x+y)^2+3x+y=0$을 만족한다.

그래프를 그릴 때는 $u=x+y$로 놓으면 편리하다. 그러면 $3x+y=-u^2$이고, 이를 풀면 $x=-\frac{1}{2}(u^2+u)$, $y=\frac{1}{2}(u^2+3u)$이다.



P의 궤적은 꼭짓점이 $(0,-1)$이고 대칭축이 $x+y=-1$인 포물선이다.

검산

- 절편 $(0,0)$, $(-3,0)$, $(0,-1)$을 세 방정식에 모두 대입해 보면, k의 값에 관계없이 각각 0이 된다.
- (ii)에서 $(3x+y)(x+3y+3)$을 전개하고 3으로 나누면 $k=\frac{10}{3}$일 때의 원래 방정식이 나온다. 교점 $\left(\frac{3}{8},-\frac{9}{8}\right)$은 $3x+y=0$과 $x+3y+3=0$을 모두 만족한다.
- (iii)에서 $u=1$로 놓으면 점 $(-1,2)$는 P의 궤적 위에 있다. 이때 $X=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $Y=\frac{3}{\sqrt{2}}$이고, $\sqrt{2}\,Y=3=(1+1)^2-1$이다.

흔한 실수

- (iii)에서 x,y를 X,Y로 나타내지 않고, X,Y에 대한 식을 방정식에 대입하는 것.
- 포물선을 잘못된 방향으로 되돌려 회전하여, 대칭축을 $x+y=-1$이 아니라 $y-x=-1$로 구하는 것.

- (ii)에서 일차항들이 공통인수 $3x + y$를 가진다는 것을 놓치고, 궤적을 다른 종류의 이차곡선으로 취급하는 것.

STEP 너머

모든 방정식 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$은 이차곡선(conic)이며, 그 종류는 이차 부분의 판별식(discriminant) $b^2 - 4ac$로 결정된다. 판별식이 음수이면 타원(ellipse)(여기서는 원, $k = 0$), 0이면 포물선($k = 2$), 양수이면 쌍곡선(hyperbola)이고, 쌍곡선은 두 직선으로 퇴화(degenerate)할 수 있다($k = \frac{10}{3}$). 대학 1학년 선형대수학(linear algebra) 강의에서는 이차형식(quadratic form)의 대칭행렬(symmetric matrix)의 고유벡터(eigenvector) 방향으로 좌표축을 회전하여 xy항을 체계적으로 없애는 방법을 배운다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)에 이 내용이 명쾌하게 설명되어 있다.

풀이

STEP I 2013, 문제 6

순수수학 • 이항계수와 피보나치 수열

STEP I 2013, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/13-s1-q6

핵심 아이디어

파스칼(Pascal)의 법칙(Pascal's rule)이 전체를 움직이는 원동력이다. 각 B_n은 이항계수(binomial coefficient)들의 합이며, B_{n+2}의 모든 항을 파스칼의 법칙으로 쪼개면 그 조각들이 정확히 B_{n+1}과 B_n의 항들로 다시 묶인다. 유일하게 주의할 곳은 합의 양 끝으로, 여기서는 파스칼의 법칙을 쓸 수 없으므로 홀로 남은 1을 손으로 짝지어 주어야 한다. B_n은 n이 짝수일 때와 홀수일 때 다르게 정의되므로, 두 경우를 따로 다룬다.

풀이

파스칼의 법칙

$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n$이므로 양변에서 x^r의 계수는 같다. 좌변에서 그 계수는 $\binom{n+1}{r}$이다. 우변에서는

$$(1+x)\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}x^s = \sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}x^s + \sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}x^{s+1},$$

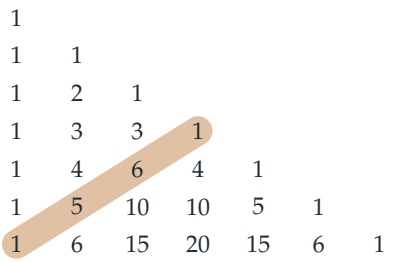
이고, $1 \le r \le n$일 때 첫 번째 합에서는 ($s = r$인 항에서) $\binom{n}{r}$이, 두 번째 합에서는 ($s = r-1$인 항에서) $\binom{n}{r-1}$이 나온다. 따라서

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r} \qquad (1 \le r \le n).$$

점화식

B_n이 무엇인지 보는 것이 도움이 된다. B_n은 파스칼의 삼각형의 "완만한 대각선" $\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots$를 더한 것으로, 위의 수가 아래의 수 이상인 마지막 항에서 멈춘다. 삼

각형을 왼쪽으로 정렬하면 $B_6 = 1+5+6+1 = 13$을 이루는 항들이 한 직선 위에 놓인다.



(호박색 띠가 $\binom{6}{0}, \binom{5}{1}, \binom{4}{2}, \binom{3}{3}$을 골라 보여 준다.)

짝수인 경우, $n = 2m$ $(m \geq 0)$. $B_{2m+2} = B_{2m+1} + B_{2m}$임을 보여야 한다. 정의에 의하여

$$B_{2m+2} = \sum_{j=0}^{m+1} \binom{2m+2-j}{j}.$$

양 끝 항은 $\binom{2m+2}{0} = 1$을 주는 $j = 0$과 $\binom{m+1}{m+1} = 1$을 주는 $j = m+1$이다. $1 \leq j \leq m$에 대해서는 위의 수가 $2m+1-j$, 아래의 수가 j인 파스칼의 법칙을 쓴다. $j \leq m$이면 $j \leq 2m+1-j$이므로 이렇게 해도 된다. 그러므로

$$B_{2m+2} = \underbrace{1 + \sum_{j=1}^{m} \binom{2m+1-j}{j}}_{\text{(a)}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \binom{2m+1-j}{j-1} + 1}_{\text{(b)}}.$$

(a)에서 1은 빠져 있던 $k = 0$인 항 $\binom{2m+1}{0}$이므로, (a)는 $\sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1-k}{k} = B_{2m+1}$이다.

? **생각해 보기** 두 번째 합은 무엇이 되어야 하며, 남는 1은 어디로 가는가?

(b)에서 $i = j-1$로 놓으면 합은 $\sum_{i=0}^{m-1} \binom{2m-i}{i}$가 되는데, 이것은 마지막 항 $i = m$이 빠진 B_{2m}이다. 그 마지막 항은 $\binom{m}{m} = 1$로, 바로 남는 1이다. 따라서 (b) $= B_{2m}$이고 $B_{2m+2} = B_{2m+1} + B_{2m}$이다. ($m = 0$일 때는 합들이 비어 있으며 이 식은 $2 = 1+1$이 된다.)

홀수인 경우, $n = 2m+1$ $(m \geq 0)$. $B_{2m+3} = B_{2m+2} + B_{2m+1}$임을 보여야 한다. 이제

$$B_{2m+3} = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{2m+3-k}{k}.$$

$k = 0$인 항 $1 = \binom{2m+2}{0}$만 그대로 둔다. $1 \leq k \leq m+1$에 대해서는 $k \leq m+1$이면 $k \leq 2m+2-k$이므로, 위의 수가 $2m+2-k$, 아래의 수가 k인 파스칼의 법칙을 쓸 수 있다.

따라서

$$\begin{aligned} B_{2m+3} &= \binom{2m+2}{0} + \sum_{k=1}^{m+1} \binom{2m+2-k}{k} + \sum_{k=1}^{m+1} \binom{2m+2-k}{k-1} \\ &= \sum_{j=0}^{m+1} \binom{2m+2-j}{j} + \sum_{i=0}^{m} \binom{2m+1-i}{i} \qquad (i = k-1) \\ &= B_{2m+2} + B_{2m+1}. \end{aligned}$$

이번에는 남는 끝 항이 없다.

모든 $n \geq 0$은 $2m$ 또는 $2m+1$ 꼴이므로, 요구한 대로 모든 $n = 0, 1, 2, \ldots$에 대하여 $B_{n+2} - B_{n+1} = B_n$이다.

피보나치 수와의 관계

직접 계산하면 $B_0 = \binom{0}{0} = 1$, $B_1 = \binom{1}{0} = 1$이다. 피보나치(Fibonacci) 수(Fibonacci numbers)는 $F_1 = 1$, $F_2 = 1$로 시작한다. 따라서 $B_0 = F_1$, $B_1 = F_2$이고, 두 수열은 "각 항은 앞의 두 항의 합이다"라는 같은 점화식을 따른다. 수학적 귀납법(induction)에 의하여 ($B_n = F_{n+1}$이고 $B_{n+1} = F_{n+2}$이면 $B_{n+2} = F_{n+2} + F_{n+1} = F_{n+3}$이므로)

$$B_n = F_{n+1} \qquad \text{모든} n \geq 0.$$

B 수열은 피보나치 수열을 한 자리 민 것으로, $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$이다.

검산

- 정의로부터 몇 항을 바로 계산해 보자. $B_2 = 1+1 = 2$, $B_3 = 1+2 = 3$, $B_4 = 1+3+1 = 5$, $B_5 = 1+4+3 = 8$이다. 이들은 $F_3, \ldots, F_6$이다.
- 더 큰 경우: $B_9 = \binom{9}{0} + \binom{8}{1} + \binom{7}{2} + \binom{6}{3} + \binom{5}{4} = 1+8+21+20+5 = 55 = F_{10}$.
- 파스칼의 법칙 확인: $\binom{5}{2} + \binom{5}{1} = 10+5 = 15 = \binom{6}{2}$.

흔한 실수

- $\binom{m+1}{m+1}$ 같은 끝 항에 파스칼의 법칙을 적용하는 것. 그러면 $\binom{m}{m+1}$이 나오는데, 이는 법칙을 증명한 범위 $1 \leq r \leq n$을 벗어난다. 끝 항을 먼저 떼어 내야 한다.
- 한쪽 홀짝성(parity)만 다루는 것. B_{2m}과 B_{2m+1}의 정의가 다르고, 점화식은 짝수 번째 항을 홀수 번째 항들과 연결하므로 두 경우가 모두 필요하다.
- 첨자의 이동을 잘못 처리하는 것. 답은 $B_n = F_n$이 아니라 $B_n = F_{n+1}$이다($B_0 = 1 \neq F_0$을 확인하라).

STEP 너머

항등식 $F_{n+1} = \sum_k \binom{n-k}{k}$에는 깔끔한 세 기 증명이 있다. 양변 모두 $1 \times n$ 띠를 정사각형과 도미노로 덮는 방법의 수를 센다(k는 도미노의 개수이며, $n-k$개의 타일 가운데 도미노의 위치를 고르는 방법이 $\binom{n-k}{k}$가지이다). 같은 집합을 두 가지 방법으로 세어 항등식을 증명하는 것은 대학 조합론(combinatorics)의 핵심 기법이며, $\sum F_n x^n = x/(1-x-x^2)$이 되는 생성함수(generating function)의 관점도 마찬가지이다. 더 알고 싶다면 Wilf, *generatingfunctionology*(생성함수론), 또는 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)를 읽어 보라.

풀이

STEP I 2013, 문제 7

순수수학 • 일계 미분방정식

STEP I 2013, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/13-s1-q7

핵심 아이디어

(i)과 (ii)에서는 우변이 비 y/x에만 의존하므로, $y = ux$로 두면 방정식이 변수분리(separation of variables)가 되는 꼴로 바뀐다. (iii)은 이 패턴에서 벗어나는데, x^2/y는 y/x만의 함수가 아니기 때문이다. 해결책은 해가 x의 몇 제곱처럼 행동"해야" 하는지를 묻는 것이다. 두 항의 크기를 맞추어 보면 $y = u\,x^{3/2}$라는 치환(substitution)이 떠오르고, 그러면 다시 모든 것이 분리된다.

풀이

소문항 (i)

$y = ux$로 두면 곱의 법칙(product rule)에 의해 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$이다. $x/y = 1/u$이고 $y/x = u$이므로 방정식은 다음과 같이 된다.

$$u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{u} + u \quad \Longrightarrow \quad x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{u}.$$

u항이 소거되는데, 바로 이 덕분에 치환이 통한다. 변수를 분리하면($x > 0$이므로 x로 나눌 수 있다)

$$\int u\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \tfrac{1}{2}u^2 = \ln x + C,$$

이고, $x > 0$이므로 $\ln|x|$ 대신 $\ln x$를 쓴다. $x = 1$일 때 $y = 2$이므로 $u = y/x = 2$이고, $2 = 0 + C$를 얻는다. 따라서

$$u^2 = 4 + 2\ln x.$$

이제 $y > 0$이고 $x > 0$이므로 $u > 0$이어야 한다. 따라서 양의 제곱근 $u = \sqrt{4 + 2\ln x}$를 택하면

$$y = x\sqrt{4 + 2\ln x}.$$

이를 위해서는 $4 + 2\ln x > 0$이어야 하고($y \geq 0$이 아니라 $y > 0$이 필요하다), 이는 $\ln x > -2$, 즉 $x > \mathrm{e}^{-2}$이다. 이것이 구하는 결과이다.

소문항 (ii)

우변이 다시 y/x의 함수이므로 같은 치환 $y = ux$를 쓴다.

$$u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{u} + 2u \quad \Longrightarrow \quad x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{u} + u = \frac{1+u^2}{u}.$$

이번에는 u항이 소거되지 않지만, 변수는 여전히 분리된다.

$$\int \frac{u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \tfrac{1}{2}\ln(1+u^2) = \ln x + C,$$

여기서 좌변의 적분은 $\frac{1}{2}\int f'/f$ 꼴이고, $1 + u^2 > 0$이므로 절댓값이 필요 없다. $x = 1$에서 $u = 2$이므로 $C = \frac{1}{2}\ln 5$이다. 양변에 2를 곱하고 지수를 취하면

$$1 + u^2 = 5x^2, \qquad \text{따라서} \qquad u = \sqrt{5x^2 - 1}$$

이다($u > 0$이므로 양의 제곱근). 그러므로

$$y = x\sqrt{5x^2 - 1} \qquad \left(x > \tfrac{1}{\sqrt{5}}\right),$$

이고, 이 제한은 $x > 0$에서 $5x^2 - 1 > 0$이어야 한다는 데서 나온다.

소문항 (iii)

이번에는 $y = ux$로 두면 $x^2/y = x/u$가 되어 여전히 x가 단독으로 남으므로, 방정식이 분리되지 않는다. 우변의 두 항이 같은 방식으로 스케일링되도록 하는 치환이 필요하다.

> **생각해 보기** y가 거듭제곱 x^k처럼 행동한다면, k가 어떤 값일 때 $\dfrac{x^2}{y}$와 $\dfrac{2y}{x}$의 크기가 같아지는가?

x^{2-k}와 x^{k-1}이 일치해야 하므로 $2 - k = k - 1$이고, $k = \frac{3}{2}$를 얻는다. (그러면 좌변 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$도 $x^{1/2}$처럼 행동하므로 세 항이 모두 일치한다.) 이로부터 치환 $y = u\,x^{3/2}$를 생각할 수 있고, 이때

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^{3/2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \tfrac{3}{2}u\,x^{1/2}, \qquad \frac{x^2}{y} = \frac{x^{1/2}}{u}, \qquad \frac{2y}{x} = 2u\,x^{1/2}.$$

방정식 전체를 (양수인) $x^{1/2}$로 나누면

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \tfrac{3}{2}u = \frac{1}{u} + 2u \quad \Longrightarrow \quad x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{u} + \frac{u}{2} = \frac{2+u^2}{2u}.$$

변수를 분리하면

$$\int \frac{2u}{2+u^2}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \ln(2+u^2) = \ln x + C.$$

$x = 1$에서 $u = y/x^{3/2} = 2$이므로 $C = \ln 6$이고, 따라서 $2 + u^2 = 6x$이다. 양의 제곱근을 택하면 $u = \sqrt{6x-2}$이므로

$$y = x^{3/2}\sqrt{6x-2} = \sqrt{6x^4 - 2x^3} \qquad \left(x > \tfrac{1}{3}\right),$$

이고, $6x - 2 > 0$이려면 $x > \frac{1}{3}$이어야 한다.

(iii)의 다른 풀이. 방정식에 $2y$를 곱하고 $z = y^2$로 두면

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - \frac{4}{x}z = 2x^2,$$

을 얻는데, 이는 적분인자(integrating factor)가 x^{-4}인 선형(linear) 방정식이다. 그러면 $\left(x^{-4}z\right)' = 2x^{-2}$이므로, $z(1) = 4$를 이용하면 $x^{-4}z = -2/x + 6$이고, 앞에서와 같이 $y^2 = 6x^4 - 2x^3$을 얻는다. 같은 방법($z = y^2$)으로 (i)과 (ii)도 풀 수 있다.

검산

- 각 답은 $x = 1$에서 $y = 2$를 준다: $1 \cdot \sqrt{4}$, $1 \cdot \sqrt{4}$, $\sqrt{6-2}$.
- (ii)의 답을 미분하여 다시 대입해 보자. $y^2 = 5x^4 - x^2$에서 $2yy' = 20x^3 - 2x$이므로 $y' = (10x^3 - x)/y$이다. 한편 $\dfrac{x}{y} + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{x^2 + 2y^2}{xy} = \dfrac{10x^4 - x^2}{xy}$이고, 이는 같은 값이다.
- $x = 2$에서 세 해는 $2\sqrt{4 + 2\ln 2} \approx 4.642$, $2\sqrt{19} \approx 8.718$, $4\sqrt{5} \approx 8.944$를 준다. 예상대로 (ii)에서 y/x의 계수가 더 크기 때문에 y가 (i)에서보다 빠르게 증가한다.

흔한 실수

- $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$에서 u를 빠뜨려, u에 대한 방정식이 틀리게 나오는 경우.
- 초기 조건(initial condition)을 u 대신 y에 적용하는 경우: 여기서는 $x = 1$에서 둘이 일치하지만, (iii)에서는 일반적으로 $u = y/x^{3/2}$가 필요하다.
- 정의역(domain)을 빠뜨리는 경우. 제곱근은 실수이고 양수여야 하므로 $x > \mathrm{e}^{-2}$, $x > 1/\sqrt{5}$, $x > \frac{1}{3}$을 얻는다.

STEP 너머

우변이 y/x에만 의존하는 방정식을 **동차**(homogeneous) 방정식이라 하며, 치환 $y = ux$는 언제나 이를 변수분리형으로 만든다. (iii)은 모습을 바꾼 스케일링 대칭(scaling symmetry)이다. 방정식은 $x \mapsto \lambda x, y \mapsto \lambda^{3/2} y$에 대해 변하지 않으며, 이러한 스케일링 대칭은 언제나 방정식을 변수분리형으로 만드는 치환을 알려 준다. $z = y^{1-n}$으로 두면 선형이 되는 $y' + P(x)y = Q(x)y^n$ 꼴의 방정식을 베르누이 방정식(Bernoulli equations)이라 하며, 여기의 세 소문항은 모두 $n = -1$인 이 유형에 속한다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 일계(first-order) 방정식을 다루는 장에서 이 두 부류를 모두 설명한다.

풀이

STEP I 2013, 문제 8

순수수학 • 합성함수

STEP I 2013, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/13-s1-q8

핵심 아이디어

합성함수(composite) pq는 "먼저 q를 적용하고, 그다음 p를 적용한다"는 뜻이며, q의 출력값이 p의 정의역(domain) 안에 들어가는 곳에서만 정의된다. 따라서 정의역은 q에서 오고(필요하면 일부를 잘라 낸다), 치역(range)은 p가 실제로 어떤 값들을 입력받는지 물어서 구한다. 계산 자체는 가볍다. 점수는 $\sqrt{x^2} = |x|$와 정의역을 얼마나 신중하게 다루느냐에 달려 있다. 소문항 (iii)에서는 항등식(identity) $(x + \sqrt{x^2-1})(x - \sqrt{x^2-1}) = 1$이 대부분의 일을 해 준다.

풀이

소문항 (i)

- $\mathrm{cb}(x) = \mathrm{c}(\ln x) = 2\ln x$이다. 정의역은 b의 정의역, 즉 $x > 0$이고, c는 모든 실수를 입력으로 받는다. $\ln x$가 모든 실숫값을 가지므로 $2\ln x$도 그렇다. 따라서 치역은 $\mathbb{R}$이다.
- $\mathrm{ab}(x) = (\ln x)^2$이고, 정의역은 $x > 0$이다. $\ln x$가 모든 실숫값을 가지므로 그 제곱은 $[0, \infty)$의 모든 값을 가진다($x = 1$에서 0). 따라서 치역은 $y \geq 0$이다.
- $\mathrm{da}(x) = \sqrt{x^2} = |x|$이며, x가 아니다. 근호는 음이 아닌 제곱근을 뜻하기 때문이다. 여기서 항상 $x^2 \geq 0$이므로 정의역은 $\mathbb{R}$ 전체이고, 치역은 $y \geq 0$이다.
- $\mathrm{ad}(x) = (\sqrt{x})^2 = x$이지만, d가 먼저 작용해야 하므로 $x \geq 0$일 때만 성립한다. 따라서 정의역은 $x \geq 0$이고 치역은 $y \geq 0$이다.

da와 ad는 치역은 같지만 정의역과 식이 다르다는 점에 주목하자. 즉 둘은 서로 다른 함수이다.

소문항 (ii)

fg의 경우: 모든 실수 x에 대해 $g(x) = \sqrt{x^2+1} \geq 1$이므로, $g(x)$는 항상 f의 정의역 안에 있다. 그러면

$$fg(x) = \sqrt{(x^2+1)-1} = \sqrt{x^2} = |x|, \qquad \text{정의역}\mathbb{R}, \quad \text{치역}y \geq 0.$$

gf의 경우: f가 먼저 작용하므로 $|x| \geq 1$이어야 하고, g는 어떤 입력이든 받는다. 그러면

$$gf(x) = \sqrt{(x^2-1)+1} = |x|, \qquad \text{정의역}|x| \geq 1, \quad \text{치역}y \geq 1.$$

이번에도 두 식은 일치하지만 함수는 다르다. gf의 정의역은 $-1 < x < 1$을 제외하므로, 치역은 1에서 시작한다.

소문항 (iii)

기본이 되는 사실은

$$\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\left(x - \sqrt{x^2-1}\right) = x^2 - (x^2-1) = 1,$$

이므로 $x \geq 1$에서 $h(x)\,k(x) = 1$이라는 것이다.

h의 그래프 ($x \geq 1$).

- $h(1) = 1$이다.
- $x > 1$에서 $h'(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} > 0$이므로 h는 증가한다(increasing). 또 $x \to 1^+$일 때 $h'(x) \to \infty$이므로, 곡선은 수직 접선(vertical tangent)을 가지며 $(1,1)$에서 출발한다.
- $x \to \infty$일 때 $h(x) \to \infty$이다. 점근선(asymptote)을 구하면

  $$h(x) - 2x = \sqrt{x^2-1} - x = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x} \to 0^-,$$

  이므로 $y = 2x$가 점근선이고, 곡선은 아래쪽에서 이에 다가간다.

따라서 h는 1에서부터 연속적으로 한없이 증가한다. 그 치역은 $[1, \infty)$이다.

k의 그래프, $x \geq 1$인 가지.

- $k(1) = 1$이고, 기본 사실에 의해 $k(x) = 1/h(x)$이다.
- h는 양수이고 무한대로 증가하므로, k는 양수이고 감소하며(decreasing) $k(x) \to 0^+$이다. 따라서 $y = 0$이 점근선이고, 곡선은 위쪽에서 이에 다가간다.

- $x \to 1^+$일 때 $\mathrm{k}'(x) = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} \to -\infty$이다. 즉 $(1,1)$에서 다시 수직 접선을 가지며, 이 점에서 이 가지가 h의 그래프와 만난다.

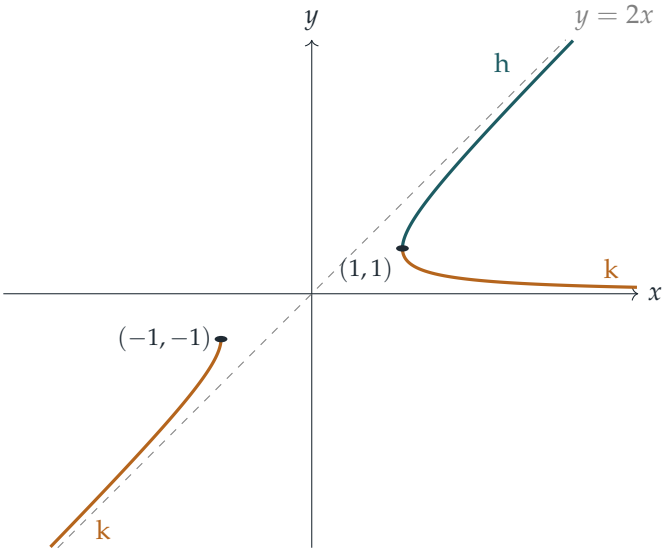
k의 그래프, $x \le -1$인 가지.

- $\mathrm{k}(-1) = -1$이다.
- $x < -1$이면 $x < 0$이므로 $\mathrm{k}'(x) = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} > 1 > 0$이다. 따라서 k는 증가한다. $x \to -1^-$일 때 $\mathrm{k}'(x) \to +\infty$이므로 $(-1,-1)$에서 수직 접선을 가진다.
- x와 $-\sqrt{x^2-1}$이 모두 음수이므로, $x \to -\infty$일 때 $\mathrm{k}(x) \to -\infty$이다. $u \ge 1$로 두고 $x = -u$라 쓰면

$$\mathrm{k}(x) - 2x = u - \sqrt{u^2-1} = \frac{1}{u + \sqrt{u^2-1}} \to 0^+,$$

  이므로 $y = 2x$는 이 가지의 점근선이기도 하며, 곡선은 위쪽에서 이에 다가간다.

이 가지는 $(-\infty, -1]$의 모든 값을 가진다.



(이 모든 것을 한눈에 보는 깔끔한 방법이 있다. $t \ge 0$에 대해 $x = \cosh t$로 놓자. 그러면 $\sqrt{x^2-1} = \sinh t$이므로 $\mathrm{h}(x) = e^t$, $\mathrm{k}(x) = e^{-t}$이다. 또 $x = -\cosh t$이면 $\mathrm{k}(x) = -e^t$이다.)

합성함수 kh. h의 정의역은 $x \ge 1$이고, 모든 값 $\mathrm{h}(x)$는 $\mathrm{h}(x) \ge 1$을 만족하므로 k의 정의역 안에 있다. 따라서 kh는 $x \ge 1$ 전체에서 정의된다.

? 생각해 보기 kh는 실제로 k의 그래프 중 어느 부분을 사용하는가?

h는 1보다 작은 값을 결코 출력하지 않으므로, $x \geq 1$인 가지만 사용한다. 더욱이 h는 $[1,\infty)$의 **모든** 값을 가지므로, kh는 $[1,\infty)$에서 k가 갖는 값들을 정확히 가진다. 이 가지에서 k는 $\mathrm{k}(1) = 1$에서 0을 향해 연속적으로 감소하며, 0에는 결코 도달하지 않는다($\mathrm{k} = 1/\mathrm{h} > 0$이므로). 따라서

$$\mathrm{kh}: \quad \text{정의역} x \geq 1, \qquad \text{치역} 0 < y \leq 1.$$

쌍곡선함수(hyperbolic function)를 이용한 관점에서는 $\mathrm{kh}(\cosh t) = \mathrm{k}(e^t)$이며, 이는 $t = 0$일 때 1에서 시작하는 t의 감소함수이다.

검산

- 특정값 대입: $\mathrm{h}(2) = 2 + \sqrt{3} \approx 3.732$이고 $\mathrm{k}(2) = 2 - \sqrt{3} \approx 0.268$이며, 두 값의 곱은 1이다. 또 $\mathrm{k}(-2) = -2 - \sqrt{3} \approx -3.732$로, 점근선 분석이 예측한 대로 $2x = -4$보다 조금 위에 있다.
- $\mathrm{kh}(1) = \mathrm{k}(1) = 1$이고, $\mathrm{kh}(2) = \mathrm{k}(3.732\ldots) = 3.732 - \sqrt{3.732^2 - 1} \approx 0.136$으로 $(0,1]$ 안에 있다.
- $x = 1000$에서 $\mathrm{h}(x) - 2x \approx -0.0005$, $\mathrm{k}(x) \approx 0.0005$로, 각각 $-1/(2x)$와 $1/(2x)$에 들어맞는다.

흔한 실수

- $\sqrt{x^2} = x$라고 쓰는 것. 이것은 $|x|$이며, 바로 이 때문에 da, fg, gf는 항등함수가 아니다.
- 최종 식 $|x|$가 어디서나 의미가 있다는 이유로 gf의 정의역을 $\mathbb{R}$이라고 하는 것. 합성함수의 정의역은 처음 적용되는 함수가 결정한다.
- $x \leq -1$에서 k의 두 번째 가지나 그 점근선 $y = 2x$를 놓치는 것.

STEP 너머

대학에서 함수는 정의역, 공역(codomain), 그리고 대응 규칙의 세 가지로 이루어진 것이다. 여기서의 fg와 gf처럼 규칙은 같지만 정의역이 다른 두 함수는 진정으로 서로 다른 함수이며, 이러한 엄밀함은 역함수(inverse), 단사(injectivity), 전사(surjectivity)를 논의하자마자 중요해진다. 함수 h는 $e^{\operatorname{arcosh} x}$이며, $\ln \mathrm{h}(x)$는 $\operatorname{arcosh} x$의 표준 공식이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 함수, 연속성(continuity), 단조성(monotonicity)을

이와 같은 세심함으로 다룬다.

풀이

STEP I 2013, 문제 9

역학 • 포물체와 충돌

STEP I 2013, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

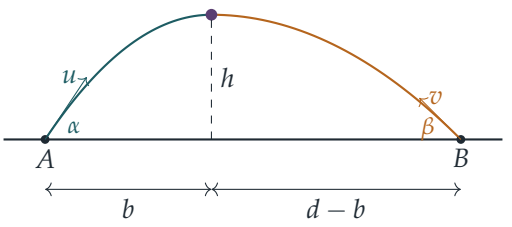
step.maths.org/questions/13-s1-q9

핵심 아이디어

포물체(projectile)가 최고점에 있을 때는 수직 속도가 0이다. 따라서 그 지점에서 충돌한 뒤 다시 떨어지는 데 걸리는 시간은 올라가는 데 걸린 시간과 같다. 그러므로 각 입자가 출발점으로 되돌아오려면 같은 시간 안에 수평 이동을 거꾸로 되짚어야 하고, 이는 수평 속도가 단순히 반대 방향으로 바뀌어야 함을 뜻한다. 이를 운동량 보존(conservation of momentum)에 대입하고, 두 입자가 같은 순간에 최고점에 도달한다는 사실을 이용하면 나머지는 모두 따라 나온다.

풀이

A와 B를 공기 저항 없이 중력만 받으며 자유롭게 움직이는 입자로 모형화하고, 충돌에서의 충격량(impulse)은 중심선(line of centres)을 따라 작용한다고 하자. 충돌이 정면충돌(direct collision)이고 그 순간 두 입자 모두 수평으로 움직이고 있으므로, 이 충격량은 수평 방향이다. x축을 평면을 따라 A의 출발점에서 B의 출발점 쪽으로 잡으면, B는 $x = d$에서 출발한다.



최고점에서의 만남

A의 수직 속도는 $u\sin\alpha - gt$이므로, 시각 $t = u\sin\alpha/g$에 최고 높이에 도달한다. 마찬가지로 B는 $t = v\sin\beta/g$에 가장 높다. 두 입자는 동시에 발사되었고 각각 최고점에 있을 때 충돌하므로, 이 두 시각은 같다:

$$T = \frac{u\sin\alpha}{g} = \frac{v\sin\beta}{g}, \qquad \text{따라서} \qquad u\sin\alpha = v\sin\beta. \tag{1}$$

충돌 직전 A의 속도는 $u\cos\alpha$로 양의 x 방향이고, B의 속도는 $v\cos\beta$로 음의 x 방향이다. 둘 다 수직 속도는 없다.

충돌 이후

> **생각해 보기** 반발 계수(coefficient of restitution)에 대해 아무것도 모르는데, 어떻게 충돌 후의 속도에 대해 무언가를 말할 수 있을까?

되돌아온다는 조건이 핵심 역할을 한다. 충격량이 수평이므로, 충돌 직후에도 A의 수직 속도는 여전히 0이며 평면 위 높이 h에 있다. 정지 상태에서 (수직으로) h만큼 떨어지는 데 걸리는 시간은 h만큼 올라가는 데 걸린 시간, 곧 T와 정확히 같다. 그 시간 동안 A는 수평으로 $x = b$에서 $x = 0$으로 되돌아와야 하는데, 여기서 $b = u\cos\alpha\, T$는 올라가는 동안 이동한 거리이다. 따라서 새로운 수평 속도는

$$-\frac{b}{T} = -u\cos\alpha :$$

A의 수평 속도는 정확히 반대가 되며, 같은 방식으로 B의 수평 속도도 그렇다. (사실 각 입자는 자신의 경로를 거꾸로 되짚어 간다.)

이제 x 방향의 운동량 보존으로부터

$$mu\cos\alpha - Mv\cos\beta = -mu\cos\alpha + Mv\cos\beta, \qquad \text{따라서} \qquad mu\cos\alpha = Mv\cos\beta. \tag{2}$$

다시 말해, 전체 운동량은 충돌 전과 후 모두 0이다. (2)를 (1)로 나누면(이는 α와 β가 0과 $\frac{1}{2}\pi$ 사이에 엄밀하게 놓여 있어 (1)의 양변이 0이 아니므로 허용된다)

$$m\cot\alpha = M\cot\beta,$$

을 얻고, 이것이 증명하려던 식이다.

충돌이 일어나는 위치

시간 T 동안 A는 수평 거리 $b = u\cos\alpha\, T$를 이동하고 B는 $v\cos\beta\, T$를 이동한다. 둘이 합쳐 두 입자 사이의 간격을 메우므로

$$u\cos\alpha\, T + v\cos\beta\, T = d.$$

(2)에 의해 $v\cos\beta = \dfrac{m}{M}u\cos\alpha$이므로

$$b\left(1+\frac{m}{M}\right) = d \qquad \Longrightarrow \qquad b = \frac{Md}{m+M},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. (B가 무거울수록 수평으로 더 느리게 움직이고, 만나는 지점은 A의 출발점에서 더 멀어진다.)

충돌 높이

A의 수직 방향 운동에 $v^2 = u^2 + 2as$를 적용하면 최고 높이는

$$h = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}, \qquad \text{한편} \qquad b = u\cos\alpha\cdot\frac{u\sin\alpha}{g} = \frac{u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}.$$

두 식을 나누면

$$\frac{h}{b} = \frac{\sin\alpha}{2\cos\alpha} = \tfrac{1}{2}\tan\alpha, \qquad \text{따라서} \qquad h = \tfrac{1}{2}b\tan\alpha.$$

검산

- 대칭성: $m = M$이면 $\alpha = \beta$이고 $b = \frac{1}{2}d$이므로, 두 입자는 당연히 한가운데에서 만난다.
- 높이 공식은 A의 출발점에서 경로의 최고점까지 잇는 직선의 기울기가 $\frac{1}{2}\tan\alpha$, 곧 발사 기울기의 절반임을 말해 준다. 이는 포물선(parabola)의 출발점에서의 접선(tangent)이 꼭짓점 높이의 두 배인 곳에서 대칭축과 만난다는 잘 알려진 사실이다. B에 대해 같은 계산을 하면 $h = \frac{1}{2}(d-b)\tan\beta$를 얻는데, 이것이 $\frac{1}{2}b\tan\alpha$와 일치하는 것은 바로 $m\cot\alpha = M\cot\beta$이기 때문이다.
- 수치로 확인해 보자. $m = 1$, $M = 2$, $\alpha = 45°$, $u = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$로 두면 $\cot\beta = \frac{1}{2}$, $v = \sqrt{50}/\sin\beta \approx 7.91\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $d \approx 7.65\,\mathrm{m}$이고, 따라서 $b = \frac{2}{3}d \approx 5.10\,\mathrm{m}$, $h = \frac{1}{2}b \approx 2.55\,\mathrm{m}$이다. 충돌 순간에 수평 속도를 반대로 바꾸면서 두 운동을 컴퓨터로 시간에 따라 단계적으로 계산해 보면, 두 입자가 이 지점에서 각자의 최고점에 있을 때 만나고 둘 다 출발점으로 되돌아와 착지함을 확인할 수 있다.

흔한 실수

- 반발 계수를 사용하려는 것: 반발 계수는 주어지지 않았고 필요하지도 않다. 되돌아온다는 조건이 충돌 후의 속도를 결정하기 때문이다.
- 두 입자가 같은 시각에 최고점에 도달해야 한다는 사실을 잊는 것: 이 사실에서 (1)이 나오며, 이것 없이는 코탄젠트를 만들어 낼 수 없다.
- 운동량 방정식에서의 부호 오류: 충돌 전 B는 음의 방향으로 움직이고 있다.

STEP 너머

되돌아온다는 조건은 결국 시간 역전(time reversal)에 해당한다. 중력 아래에서의 뉴턴(Newton) 운동 방정식은 시계를 거꾸로 돌려도 같은 모양이므로, 입자의 속도를 반대로 바꾸면 입자는 자신의 경로를 따라 되돌아간다. 여기서는 전체 운동량이 0이므로 질량중심계(centre-of-mass frame)에서 계산하고 있는 셈이며, 이 기준계에서 탄성 충돌(elastic collision)은 두 속도를 그대로 반대로 바꿀 뿐이다. 바로 여기서 일어나는 일이 그것이다(따라서 이 충돌은 완전 탄성 충돌이다). 질량중심계와 보존 법칙은 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)에 아름답게 설명되어 있다.

풀이

STEP I 2013, 문제 10

역학 • 반발 계수와 마찰

> **STEP I 2013, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/13-s1-q10

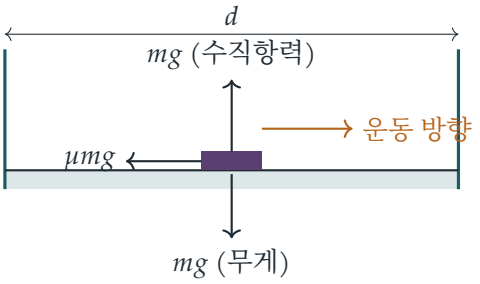
핵심 아이디어

충돌과 충돌 사이에 작용하는 수평 방향의 힘은 마찰력(friction)뿐이므로 퍽은 일정한 감속도(deceleration) μg를 가지고, 등가속도 공식(constant-acceleration formula) $v^2 = u^2 + 2as$가 한 벽을 떠날 때의 속력과 다음 벽에 도달할 때의 속력을 이어 준다. 그다음 뉴턴(Newton)의 반발 법칙(law of restitution)에 따라 도달 속력에 r이 곱해진다. 그 결과 v_i^2에 대한 선형 점화식(linear recurrence)을 얻는데, 선형 점화식 $w_{i+1} = aw_i + b$는 고정점(fixed point)만큼 평행이동하면 풀 수 있고, 그러고 나면 단순한 등비수열(geometric sequence)이 된다.

풀이

점화식

퍽을 벽에 수직인 직선 위를 움직이는 입자로 모형화한다. 충돌과 충돌 사이에 퍽이 얼음 위에 있는 동안 수직항력(normal reaction)은 mg이고(연직 방향 가속도가 없으므로), 퍽이 미끄러지고 있으므로 마찰력은 한계값(limiting value) μmg를 가지며 운동을 방해하는 방향으로 작용한다.



뉴턴의 제2법칙에 의해 감속도는 일정한 값 μg이므로, (i번째 충돌 직후) 속력 v_i로 출발하여 길이 d를 한 번 가로지를 때 반대쪽 벽에 도달하는 속력 u는 다음을 만족한다.

$$u^2 = v_i^2 - 2\mu g d.$$

벽은 고정되어 있으므로, 뉴턴의 반발 법칙에 따르면 퍽은 접근 속력의 r배의 속력으로 튕겨 나간다. 즉 $v_{i+1} = ru$이다. 양변을 제곱하면

$$v_{i+1}^2 = r^2u^2 = r^2v_i^2 - 2r^2\mu g d, \qquad \text{따라서} \qquad v_{i+1}^2 - r^2v_i^2 = -2r^2\mu g d,$$

이므로 요구된 식이 성립한다. 출발 속력을 $v_0 = v$로 쓰면 첫 번째 가로지르기에도 같은 논증이 적용되므로, 이 점화식은 모든 $i \geq 0$에 대해 성립한다.

가로지르는 횟수

양변을 $2\mu g d$로 나누고 $w_i = \dfrac{v_i^2}{2\mu g d}$로 두면 $w_0 = k$이고

$$w_{i+1} = r^2(w_i - 1).$$

이다. "n번 가로지른 뒤 벽에 닿아 정지한다"는 것은 n번째 가로지르기가 끝날 때 퍽이 속력 0으로 벽에 도달한다는 뜻이다. 그러면 퍽은 속력 0으로 벽을 떠나므로 $v_n = 0$, 즉 $w_n = 0$이다(그리고 $i < n$이면 $w_i > 0$이다).

> **?** **생각해 보기** $w_{i+1} = r^2(w_i - 1)$은 어떻게 풀까?

상수해 $w_i = c$를 찾아보자. $c = r^2(c-1)$이어야 하므로 $c = -\dfrac{r^2}{1-r^2}$이고, $r \neq 1$이므로 이 값은 잘 정의된다. 점화식에서 $c = r^2(c-1)$을 빼면

$$w_{i+1} - c = r^2(w_i - c),$$

이므로 $w_i - c$는 공비가 r^2인 등비수열이다.

$$w_i = c + r^{2i}(k - c).$$

$w_n = 0$으로 놓으면 $r^{2n}(k-c) = -c$, 즉

$$r^{2n}\left(k + \frac{r^2}{1-r^2}\right) = \frac{r^2}{1-r^2} \quad \Longrightarrow \quad r^{2n-2}\left(k(1-r^2)+r^2\right) = 1.$$

이다. 양변에 r^{-2n}을 곱하여 정리하면

$$r^{-2n} = 1 + k\left(r^{-2}-1\right), \qquad \text{따라서} \qquad \boxed{n = \frac{\ln\left(1+k(r^{-2}-1)\right)}{2\ln(1/r)}}$$

이다($0 < r < 1$이면 $\ln(1/r) > 0$이고, $k > 0$이며 $r^{-2} > 1$이므로 로그의 진수는 1보다 크다. 따라서 마땅히 그래야 하듯 $n > 0$이다).

$r = \mathrm{e}^{-1}$인 경우

이때 $r^{-2} = \mathrm{e}^2$이고 $\ln(1/r) = 1$이므로 공식은

$$n = \tfrac{1}{2}\ln\left(1 + k(\mathrm{e}^2 - 1)\right),$$

가 되고, 이것이 요구된 결과이다.

$r = 1$인 경우

점화식은 $w_{i+1} = w_i - 1$이 된다. 벽에서 손실이 없으므로 한 번 가로지를 때마다 v^2이 정확히 $2\mu g d$만큼 줄어든다. 따라서 $w_i = k - i$이고, $w_n = 0$에서

$$n = k = \frac{v^2}{2\mu g d}.$$

를 얻는다. 이것은 바로 에너지 관계이다. 처음 운동 에너지 $\frac{1}{2}mv^2$이 전체 거리 nd에 걸쳐 마찰에 의해 모두 소산되므로 $\frac{1}{2}mv^2 = \mu m g\, nd$이다.

검산

- $r = \mathrm{e}^{-1}$일 때 $w_3 = 0$에서 출발하여 점화식을 거꾸로 적용하면 $w_2 = 1$, $w_1 = \mathrm{e}^2 + 1$, $w_0 = \mathrm{e}^4 + \mathrm{e}^2 + 1 \approx 62.99$이다. 공식에 넣으면 $\frac{1}{2}\ln\left(1 + (\mathrm{e}^4 + \mathrm{e}^2 + 1)(\mathrm{e}^2 - 1)\right) = \frac{1}{2}\ln \mathrm{e}^6 = 3$이 되어 마땅히 나와야 할 값이 나온다.
- $r \to 1$일 때 $r^{-2} - 1 \approx 2(1-r)$이고 $\ln(1/r) \approx 1 - r$이므로, 일반 공식은 $\dfrac{2k(1-r)}{2(1-r)} = k$에 가까워지며 $r = 1$일 때의 답과 일치한다.
- k는 무차원(dimensionless)량이다(v^2과 gd 모두 속력의 제곱이다). n도 당연히 무차원이어야 한다.
- 임의의 μ, d, r, v에 대해 운동을 수치적으로 한 단계씩 계산해 보면 점화식이 높은 정확도로 확인된다.

흔한 실수

- v_i^2에 반발 법칙을 적용하면서 r^2 대신 r을 곱하는 것. 반발 법칙은 속력에 관한 것이므로 속력의 제곱에는 r^2이 곱해지고, 마찰 항에도 마찬가지로 곱해진다.
- n이 0이 아닌 속력으로 튕겨 나오는 충돌의 횟수가 아니라 가로지른 횟수라는 점을 잊는 것. 조건은 $v_0 = v$일 때 $v_n = 0$이다.

STEP 너머

점화식 $w_{i+1} = aw_i + b$는 가장 간단한 선형 차분방정식(difference equation)이며, 고정점을 빼는 요령은 선형 미분방정식에서 만나게 될 "여함수(complementary function)와 특수해(particular solution)의 합" 방법과 정확히 같다. 이와 같이 튕기는 문제들(바닥에서 튀는 공이 고전적인 예이다)은 에너지 소산(energy dissipation)의 좋은 예이기도 하고, 마찰이 없을 때 유한한 시간 안에 무한히 많은 사건이 일어나는 현상의 좋은 예이기도 하다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 충돌과 마찰을 더 깊이 다룬다.

풀이

STEP I 2013, 문제 11

역학 • 마찰과 평형

STEP I 2013, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/13-s1-q11

핵심 아이디어

두 줄은 수평선과 서로 반대쪽에서 각각 $\frac{1}{2}\pi - \alpha$와 α의 각을 이루므로 서로 수직(perpendicular)이다. 서로 수직인 두 힘 $T\cos\beta$와 $T\sin\beta$는 크기가 T이고 첫 번째 힘에서 β만큼 회전한 방향의 한 힘으로 합쳐진다. 두 줄을 수평선과 $\alpha + \beta$의 각을 이루는 크기 T의 당기는 힘 하나로 바꾸고 나면 두 소문항 모두 짧은 연습 문제가 된다. (i)은 최대 정지 마찰(limiting friction) 문제이고, (ii)는 물체가 면에서 완전히 들어 올려진다는 사실을 알아차리는 문제이다.

풀이

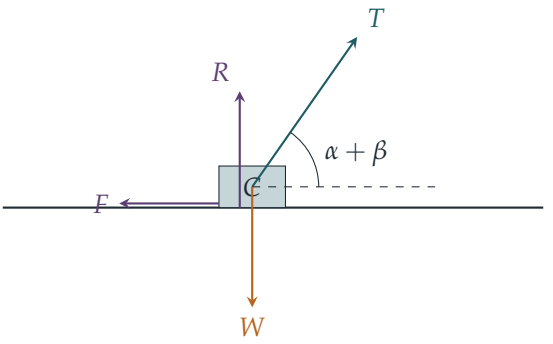
C를 질점(particle)으로, 줄을 가벼운 줄로 모형화한다. x축은 B를 향하는 수평 방향으로, y축은 연직 위쪽으로 잡는다.

장력의 합력

줄 BC는 양의 x축에서 위로 α의 각을 이루는 방향을 가리키므로, 그 단위벡터(unit vector)는 $(\cos\alpha, \sin\alpha)$이다. 줄 AC는 음의 x축과 $\frac{1}{2}\pi - \alpha$의 각을 이루므로 양의 x축과 $\pi - (\frac{1}{2}\pi - \alpha) = \frac{1}{2}\pi + \alpha$의 각을 이루는 방향을 가리키고, 단위벡터는 $(-\sin\alpha, \cos\alpha)$이다. 이 두 벡터는 서로 수직이다. 따라서 줄들이 당기는 힘의 합은

$$\begin{aligned} T\cos\beta\,(\cos\alpha, \sin\alpha) + T\sin\beta\,(-\sin\alpha, \cos\alpha) &= T\big(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \\ &\qquad \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\big) \\ &= T\big(\cos(\alpha+\beta),\ \sin(\alpha+\beta)\big). \end{aligned}$$

이다. 그러므로 두 줄은 수평선 위로 $\alpha+\beta$의 각을 이루며 B 쪽으로 당기는 크기 T의 한 힘과 정확히 같은 작용을 한다. $0<\alpha+\beta<\frac{1}{2}\pi$이므로 두 성분은 모두 양수이다.



소문항 (i)

R를 수직항력(normal reaction), F를 마찰력(friction force)이라 하자. 물체가 정지해 있다면 마찰력은 B에서 멀어지는 수평 방향으로 작용한다. 평형(equilibrium) 조건은

$$\begin{aligned}&\text{연직 방향:}\quad R+T\sin(\alpha+\beta)=W, \qquad \text{따라서} R=W-T\sin(\alpha+\beta),\\ &\text{수평 방향:}\quad F=T\cos(\alpha+\beta).\end{aligned}$$

이다. 조건 $W>T\sin(\alpha+\beta)$에 의해 $R>0$이므로, 물체는 실제로 면에 눌려 있고 마찰력이 작용할 수 있다. 필요한 마찰력이 그 최댓값을 넘지 않으면, 즉 $F\le\mu R$이면 물체는 정지 상태를 유지한다.

$$T\cos(\alpha+\beta)\le\mu\big(W-T\sin(\alpha+\beta)\big).$$

이제 $\mu=\tan\lambda=\sin\lambda/\cos\lambda$를 대입하고 양변에 $\cos\lambda$를 곱한다. λ가 예각이므로 이 값은 양수이다.

$$T\cos(\alpha+\beta)\cos\lambda\le W\sin\lambda-T\sin(\alpha+\beta)\sin\lambda.$$

이항하고 $\cos(P-Q)=\cos P\cos Q+\sin P\sin Q$를 이용하면

$$W\sin\lambda\ge T\big(\cos(\alpha+\beta)\cos\lambda+\sin(\alpha+\beta)\sin\lambda\big)=T\cos(\alpha+\beta-\lambda),$$

을 얻는데, 이것이 구하는 조건이다. (모든 단계를 거꾸로 되짚을 수 있으므로, 사실 물체는 이 조건이 성립할 때, 그리고 그때에만 정지 상태를 유지한다.)

> ? **생각해 보기** 애초에 조건 $W>T\sin(\alpha+\beta)$가 왜 필요할까?

이 조건이 없으면 연직 방향의 식에서 $R\le0$이 나온다. 면은 밀 수는 있어도 당길 수는 없으므로 음수인 R는 불가능하다. 물체는 들어 올려지거나(또는 겨우 닿아 있을 뿐이고), 물체를 붙잡아 둘 마찰력도 없다. 이것이 바로 소문항 (ii)의 상황이다.

소문항 (ii)

이제 $\alpha+\beta=2\phi$일 때 $W=T\tan\phi$이므로 $0<\phi<\frac{1}{4}\pi$이다. 무게와 줄이 위로 당기는 힘을 비교하자.

$$\begin{aligned} T\sin(\alpha+\beta)-W &= T\big(2\sin\phi\cos\phi-\tan\phi\big)\\ &= T\tan\phi\left(2\cos^2\phi-1\right)\\ &= T\tan\phi\cos 2\phi>0, \end{aligned}$$

이다. $0<\phi<\frac{1}{4}\pi$이면 $\tan\phi$와 $\cos 2\phi$가 모두 양수이기 때문이다. 따라서 줄이 위로 당기는 힘이 중력이 아래로 당기는 힘보다 크다. 물체가 면 위에 머문다면 $R=W-T\sin(\alpha+\beta)<0$이어야 하는데, 이는 불가능하다. 그러므로 물체는 곧바로 면에서 떨어진다. 즉 $R=0$이고, 접촉이 없으므로 마찰력도 없다.

그러면 작용하는 힘은 각 2ϕ 방향으로 당기는 힘 T와 무게뿐이다. 합력(resultant force)은

$$\big(T\cos 2\phi,\ T\sin 2\phi-T\tan\phi\big)=\big(T\cos 2\phi,\ T\tan\phi\cos 2\phi\big)=\frac{T\cos 2\phi}{\cos\phi}\left(\cos\phi,\ \sin\phi\right),$$

이다. 여기서 연직 성분에는 위의 계산을 이용했다. 합력의 크기 $T\cos 2\phi/\cos\phi$는 양수이므로 0이 아니다. 물체는 정지 상태에서 출발하므로, 처음 가속도, 따라서 물체가 움직이기 시작하는 방향은 합력의 방향이다. 그 방향은 $(\cos\phi,\sin\phi)$로, 수평선 위로 (B 쪽으로) ϕ의 각을 이루며, 이것이 보여야 할 결과이다.

검산

- $T=10\,\mathrm{N}$, $\alpha=20^\circ$, $\beta=40^\circ$로 잡으면 $\phi=30^\circ$이고 $W=10\tan 30^\circ\approx 5.77\,\mathrm{N}$이다. 위로 당기는 힘은 $10\sin 60^\circ\approx 8.66\,\mathrm{N}>W$이고, 합력은 $(10\cos 60^\circ,\ 8.66-5.77)=(5,\ 2.89)$이며, 그 각은 $\arctan(2.89/5)=30^\circ=\phi$이다.
- (i)에서 $\lambda=\frac{1}{2}\pi$(무한히 거친 면)이면 $W\geq T\sin(\alpha+\beta)$가 되는데, 이는 이미 성립하므로 물체는 결코 미끄러지지 않는다. $\lambda\to 0$(매끄러운 면)이면 $0\geq T\cos(\alpha+\beta)$가 되는데, 이는 성립하지 않으므로 매끄러운 면은 물체를 붙잡아 둘 수 없다. 두 경우 모두 예상과 일치한다.
- (i)의 조건은 α,β,T,W,μ를 무작위로 여러 번 골라 직접 판정 $F\leq\mu R$와 비교하는 방식으로 컴퓨터로도 확인했다.

흔한 실수

- 두 줄이 서로 수직임을 알아차리고 먼저 합치는 대신, 각 줄을 따로 분해하다가 계산 속에서 길을 잃는다.

- 소문항 (ii)에서 $R = W - T\sin(\alpha + \beta)$라고 쓰고 R가 음수가 된다는 사실을 알아차리지 못한 채 마찰력 계산을 계속한다.
- 정지 상태에서 출발한 질점이 처음에 합력의 방향으로 움직인다는 사실을 정당화하는 것을 잊는다.

STEP 너머

마찰각(angle of friction) λ의 핵심은, 수직항력과 최대 정지 마찰력이 합쳐져 법선과 λ의 각을 이루는 하나의 전체 반력(total reaction)이 된다는 것이다. 평형은 전체 반력이 이 "마찰 원뿔(cone of friction)" 안에 놓일 수 있을 때, 그리고 그때에만 가능하다. 소문항 (i)은 바로 이 명제를 다른 모습으로 나타낸 것이며, 같은 그림으로 3차원에서의 마찰과 강체(rigid body) 문제에서의 마찰도 다룰 수 있다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 마찰, 구속 조건, 접촉력을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP I 2013, 문제 12

확률과 통계 • 비복원추출

STEP I 2013, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/13-s1-q12

핵심 아이디어

알약 k개를 "무작위로" 고른다는 것은 용기에 남아 있는 알약 k개짜리 집합이 모두 같은 가능성으로 뽑힌다는 뜻이다. 따라서 각 날의 확률(probability)은 개수의 비, 곧 조건에 맞는 선택의 수를 $\binom{\text{남은 알약 수}}{k}$로 나눈 값이다. 마지막 날에 관한 질문의 요령은 대칭성(symmetry)이다. 마지막 날을 위해 남는 알약들은 첫째 날에 고른 알약들과 똑같이 무작위이다. (iii)에서는 날들이 깔끔하게 이어지는데, 좋은 날을 보내고 나면 용기의 상태가 더 짧은 휴가의 처음 상태와 정확히 같아지기 때문이다.

풀이

알약들은 겉보기에 똑같지만, 풀이 내내 서로 구별할 수 있다고(예를 들어 번호가 매겨져 있다고) 생각한다. 이렇게 해도 어떤 확률도 바뀌지 않으며, N개에서 k개를 고르는 $\binom{N}{k}$가지 선택이 모두 같은 가능성을 갖게 된다.

소문항 (i)

$k = 3$, $n = 3$이면 알약은 9개이고 종류마다 3개씩 있다. 이 중 3개를 고르는 방법의 수는 $\binom{9}{3} = 84$이다. 종류마다 하나씩 얻으려면 종류 1의 알약 3개 중 하나, 종류 2의 3개 중 하나, 종류 3의 3개 중 하나를 골라야 하므로 그 방법은 $3^3 = 27$가지이다. 따라서

$$\mathrm{P}(\text{첫째 날 종류별로 하나씩}) = \frac{27}{84} = \frac{9}{28},$$

이고, 이것이 구하려던 값이다.

생각해 보기 마지막 날의 확률을 구할 때 왜 첫째 날과 둘째 날에 일어나는 일을 따져 볼 필요가 없을까?

휴가 동안 아홉 개의 알약은 세 개씩 세 묶음, 곧 첫째 날 묶음, 둘째 날 묶음, 셋째 날 묶음(남은 것)으로 무작위로 나뉜다. 묶음을 1, 2, 3의 순서로 고르든 3, 2, 1의 순서로 고르든 분포는 같다. 알약들을 이름 붙은 세 묶음으로 나누는 각각의 방법이 모두 같은 가능성을 갖기 때문이다. 특히 셋째 날을 위해 남는 집합은 첫째 날에 고른 집합과 똑같이, 알약 세 개로 이루어진 균등하게 무작위인(uniformly random) 집합이다. 따라서 마지막 날에 종류별로 하나씩 남을 확률도

$$\frac{9}{28}.$$

이다.

소문항 (ii)

이제 알약은 $3n$개이고 종류마다 n개씩 있다. 같은 가능성의 선택이 $\binom{3n}{3}$가지 있고, 그중 n^3가지가 종류별로 하나씩을 포함한다. 따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\text{첫째 날 종류별로 하나씩}) &= \frac{n^3}{\binom{3n}{3}} = \frac{6n^3}{3n(3n-1)(3n-2)} \\ &= \frac{2n^2}{(3n-1)(3n-2)}.\end{aligned}$$

$n = 3$이면 이 값은 $\frac{18}{8\cdot 7} = \frac{9}{28}$로, (i)과 일치한다.

소문항 (iii)

이제 $k = 2$이고 알약은 $2n$개이며, 두 종류가 각각 n개씩 있다. $m = n, n-1, \ldots, 1$에 대하여, 하루를 시작할 때 용기에 종류마다 m개씩 알약이 있는 날에 내가 종류별로 하나씩 고르는 사건을 G_m이라 하자(따라서 첫째 날에는 $m = n$이다).

용기에 종류마다 m개씩 있으면 알약 두 개를 고르는 방법은 $\binom{2m}{2} = m(2m-1)$가지이고, 그중 $m \cdot m$가지가 종류별로 하나씩이다. 따라서

$$\mathrm{P}(\text{종류별로 하나씩} \mid m\text{개씩 남음}) = \frac{m^2}{m(2m-1)} = \frac{m}{2m-1}.$$

지금까지의 모든 날이 좋은 날이었다면, 매일 종류마다 정확히 하나씩 빠졌으므로 다음 날은 종류마다 $m-1$개씩으로 시작한다. 조건부 확률(conditional probability)을 날마다 곱하면

$$\mathrm{P}(\text{매일 종류별로 하나씩}) = \prod_{m=1}^{n} \frac{m}{2m-1} = \frac{n!}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}.$$

홀수들의 곱을 정리하기 위해 분자와 분모에 짝수들의 곱 $2\times 4\times\cdots\times(2n)=2^n\,n!$을 곱하면

$$1\times 3\times\cdots\times(2n-1)=\frac{(2n)!}{2^n\,n!}.$$

따라서

$$\boxed{\mathrm{P}(\text{매일 종류별로 하나씩})=\frac{2^n\,(n!)^2}{(2n)!}}$$

(검산으로, $n=1$이면 1이 나오는데 이는 옳다. 종류마다 알약이 하나씩뿐이면 둘 다 먹을 수밖에 없다.)

이제 $n!$과 $(2n)!$에 스털링(Stirling) 근사(Stirling's approximation)를 사용한다.

$$(n!)^2\approx 2n\pi\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n},$$

$$(2n)!\approx\sqrt{4n\pi}\left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}=2\sqrt{n\pi}\,2^{2n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}.$$

인수 $(n/\mathrm{e})^{2n}$이 약분되어

$$\frac{2^n\,(n!)^2}{(2n)!}\approx\frac{2^n\cdot 2n\pi}{2\sqrt{n\pi}\,2^{2n}}=2^{-n}\,\frac{n\pi}{\sqrt{n\pi}}=2^{-n}\sqrt{n\pi},$$

가 남고, 이것이 구하려던 근사식이다.

검산

- 알약을 뽑는 모든 방법을 컴퓨터로 빠짐없이 세어 보면, (i)에서 첫째 날과 셋째 날 모두 $\frac{9}{28}$임이 확인되고, $n\le 7$에 대하여 (ii)의 공식이, $n\le 4$에 대하여 (iii)의 공식이 확인된다.
- $n=10$일 때 (iii)의 정확한 확률은 $\frac{2^{10}(10!)^2}{20!}\approx 0.005542$이고, $2^{-10}\sqrt{10\pi}\approx 0.005474$이므로 근삿값이 약 1.3% 작다. 스털링 근사에서 예상되듯이 n이 커지면 이 비는 1로 다가간다($n=50$에서 약 1.0025이다).
- (iii)을 다르게 세는 방법: $2n$개의 알약을 n개의 쌍으로 이루어진 순서 있는 목록으로 나누는 방법은 $(2n)!/2^n$가지이고 모두 같은 가능성을 갖는다. 좋은 분할은 날마다 종류 1의 알약과 종류 2의 알약을 짝짓는 것으로 $n!\times n!$가지이다. 그 비는 역시 $2^n(n!)^2/(2n)!$이다.

흔한 실수

- 알약을 하나씩 뽑는다고 보고 $\frac{3}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{3}{7}$이라고 쓰는 것. 이는 종류 1, 2, 3이 그 순서대로 나올 확률이다. 종류들은 3!가지 순서로 나올 수 있으므로 $6\times\frac{27}{504}=\frac{9}{28}$이 된다. (또는 첫 알약은 아무것이나 될 수 있으므로 $1\times\frac{6}{8}\times\frac{3}{7}=\frac{9}{28}$이다.)

- 마지막 날의 확률을 구하려고 첫째 날에 일어나는 모든 일에 대해 조건을 걸어 따지는 것. 그렇게 해도 답은 나오지만 길고, 대칭성을 쓰면 답이 곧바로 나온다.
- $(2n)!$에 스털링 근사를 쓸 때 제곱근 안을 포함하여 모든 곳의 n을 $2n$으로 바꾸어야 한다. $\sqrt{2(2n)\pi} = 2\sqrt{n\pi}$이지 $\sqrt{2n\pi}$가 아니다.

STEP 너머

(iii)의 답은 $2^n/\binom{2n}{n}$이고, 근사식 $\binom{2n}{n} \approx 4^n/\sqrt{n\pi}$는 확률론 곳곳에 등장한다. 이 근사식은 단순 확률보행(simple random walk)이 $2n$걸음 뒤에 출발점으로 돌아와 있을 확률을 주며, 1차원이나 2차원에서 그러한 보행이 확률 1로 출발점에 돌아온다는 증명(proof)의 원동력이 된다. (i)의 대칭성 논증은 **교환가능성**(exchangeability)이라는 개념이다. 즉 무작위 추출을 하는 순서는 그 결합분포(joint distribution)를 바꾸지 않는다. 두 개념 모두 Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문), 그리고 Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)에서 전개된다.

풀이

STEP I 2013, 문제 13

확률과 통계 • 경우의 수와 기댓값

STEP I 2013, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/13-s1-q13

핵심 아이디어

수 $1, \ldots, 52$는 서로소(disjoint)인 26개의 "짝 쌍" $\{k, 53-k\}$로 나뉘고, 버려지는 쌍이란 두 원소를 모두 선택한 짝 쌍일 뿐이다. 따라서 완전한 쌍이 정확히 k개인 선택의 수를 세려면, 어느 쌍이 완전한지를 먼저 고른 다음 나머지 자리를 **서로 다른** 쌍에서 온 수로 채우되, 매번 짝 중 어느 쪽을 택할지는 자유롭게 고르면 된다. 기댓값(expectation)에 대해서는 26개의 쌍에 대한 선형성(linearity)을 이용하면 빠르게 확인할 수 있다.

풀이

선택의 수 세기

정수들을 26개의 쌍 $\{1,52\}, \{2,51\}, \ldots, \{26,27\}$로 나누어 쓰자. 1부터 52까지의 두 정수의 합이 53이 되는 것은 정확히 두 수가 이 쌍들 중 하나를 이룰 때이고, 각 정수는 정확히 한 쌍에 속한다. 따라서 X는 두 원소가 모두 선택된 일곱 개의 수 안에 들어 있는 쌍의 개수이다. $2X \leq 7$이므로 X는 $0, 1, 2, 3$의 값을 가진다.

$\binom{52}{7}$가지 선택은 모두 같은 확률로 일어나므로, $X = k$인 선택의 수를 센다.

- 완전한 쌍 k개를 고른다: $\binom{26}{k}$가지. 이들은 일곱 개의 수 중 $2k$개를 차지한다.
- 나머지 $7-2k$개의 수는 남은 $26-k$개의 쌍 가운데 **서로 다른** $7-2k$개의 쌍에서 와야 한다(같은 쌍에서 두 수를 고르면 완전한 쌍이 하나 더 생긴다): $\binom{26-k}{7-2k}$가지.
- 그 각각의 쌍에서 두 원소 중 하나를 택한다: 2^{7-2k}가지.

$X = k$인 각 선택은 이 방법으로 정확히 한 번씩 나타나므로

$$\mathrm{P}(X = k) = \frac{\binom{26}{k}\binom{26-k}{7-2k}\,2^{7-2k}}{\binom{52}{7}}, \qquad k = 0, 1, 2, 3.$$

수치 계산

$$\begin{aligned}
X = 0: &\quad \tbinom{26}{7}\,2^7 = 657\,800 \times 128 = 84\,198\,400,\\
X = 1: &\quad 26\tbinom{25}{5}\,2^5 = 26 \times 53\,130 \times 32 = 44\,204\,160,\\
X = 2: &\quad \tbinom{26}{2}\tbinom{24}{3}\,2^3 = 325 \times 2024 \times 8 = 5\,262\,400,\\
X = 3: &\quad \tbinom{26}{3}\tbinom{23}{1}\,2 = 2600 \times 23 \times 2 = 119\,600,
\end{aligned}$$

이고 $\binom{52}{7} = 133\,784\,560$이다. 이 네 개의 수를 더하면 실제로 $\binom{52}{7}$가 되는데, 이는 빠뜨리거나 중복해서 센 것이 없다는 좋은 검산이다.

? 생각해 보기 아홉 자리 수가 들어 있는 분수는 어떻게 약분할까?

문제에 있는 주석이 힌트이다. $5593 = 7 \times 17 \times 47$이 분모가 되어야 한다. 실제로 $\binom{52}{7} = 23\,920 \times 5593$이고, 네 개의 수는 모두 23 920의 배수이다.

$$\begin{aligned}
84\,198\,400 &= 3520 \times 23\,920, & 44\,204\,160 &= 1848 \times 23\,920,\\
5\,262\,400 &= 220 \times 23\,920, & 119\,600 &= 5 \times 23\,920.
\end{aligned}$$

따라서 X의 분포(distribution)는 다음과 같다.

k	0	1	2	3
$\mathrm{P}(X = k)$	$\frac{3520}{5593}$	$\frac{1848}{5593}$	$\frac{220}{5593}$	$\frac{5}{5593}$

(두 번째 값을 기약분수로 나타내면 $\frac{264}{799}$이다.) 그리고 마땅히 그래야 하듯이 $3520 + 1848 + 220 + 5 = 5593$이다.

기댓값

$$\mathrm{E}(X) = \frac{0 \times 3520 + 1 \times 1848 + 2 \times 220 + 3 \times 5}{5593} = \frac{2303}{5593}.$$

이제 $2303 = 7^2 \times 47$이고 $5593 = 7 \times 17 \times 47$이므로

$$\mathrm{E}(X) = \frac{7^2 \times 47}{7 \times 17 \times 47} = \frac{7}{17},$$

이 되어 요구한 결과를 얻는다.

기댓값을 구하는 더 빠른 방법

$j = 1, \ldots, 26$에 대하여 j번째 쌍의 두 원소가 모두 선택되면 $I_j = 1$, 그렇지 않으면 0이라 하자. 그러면 $X = I_1 + \cdots + I_{26}$이다. 주어진 한 쌍의 두 원소를 모두 고르면 나머지 50개에서 5개를 더 고르게 되므로

$$\mathrm{P}(I_j = 1) = \frac{\binom{50}{5}}{\binom{52}{7}} = \frac{7 \times 6}{52 \times 51} = \frac{7}{442}.$$

기댓값의 선형성에 의하여(이는 독립성을 필요로 하지 않는다. 실제로 I_j들은 서로 종속이다)

$$\mathrm{E}(X) = 26 \times \frac{7}{442} = \frac{7}{17}.$$

검산

- 네 확률의 합은 1이고, 두 방법 모두 같은 값 $\mathrm{E}(X) = \frac{7}{17} \approx 0.412$를 준다.
- 300 000번의 무작위 선택을 컴퓨터로 모의실험한 결과, $X = 0, 1, 2, 3$의 상대도수는 각각 약 0.630, 0.329, 0.039, 0.001로, 정확한 값 0.6294, 0.3304, 0.0393, 0.0009와 잘 맞았다.
- 상식적인 확인: 일곱 개의 수만으로 완전한 쌍을 세 개 만드는 일은 드물어야 하므로, $\mathrm{P}(X = 3)$이 매우 작은 것은 당연하다.

흔한 실수

- $X = 0$인 선택의 수를 $\binom{52}{7}$에서 대충 무언가를 뺀 값으로 세거나, 각 쌍에서 어느 원소를 택하는지에 대한 인수 2^7을 잊고 $\binom{26}{7}$만으로 세는 것.
- $X = 1$일 때 나머지 다섯 수를 고르는 방법을 $\binom{50}{5}$로 세는 것: 이렇게 하면 두 번째 완전한 쌍이 생길 수 있어 과다하게 세게 된다.

STEP 너머

개수를 지시확률변수(indicator variable)의 합으로 쓰고 기댓값의 선형성을 이용하는 것은 대학 1학년 확률론에서 가장 유용한 기법 중 하나이다. 이 방법을 쓰면 분포를 구하는 것이 절망적일 때에도 기댓값을 얻을 수 있다. 이 문제에서는 전체 분포를 구할 수 있었지만, 예를 들어 무작위 순열(permutation)의 고정점(fixed point) 개수의 기댓값을 구할 때에는 지시확률변수가 자연스러운 출발점이다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)에서는 이 아이디어를 거듭해서 사용한다.

풀이

STEP II 2013, 문제 1

순수수학 • 로그 함수의 현

STEP II 2013, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/13-s2-q1

이 문제는 *Beyond STEP*의 3.5 절 π^e인가, e^π인가?에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch03/pi-e-or-e-pi.html

핵심 아이디어

여기 나오는 부등식은 모두 p^q와 q^p의 비교이다. 로그를 취하고 pq로 나누면 이는 $\frac{\ln p}{p}$와 $\frac{\ln q}{q}$의 비교가 되는데, $\frac{\ln x}{x}$는 원점에서 곡선 위의 점 $(x, \ln x)$까지 그은 직선의 기울기이다. 따라서 모든 것은 $y = \ln x$와 만나는 직선과 현(chord)에 관한 문제이다. 필요한 사실은 이 곡선이 위로 볼록(concave)하다는 것(아래쪽으로 휘어진다는 것)과, 원점에서 그은 접선(tangent)이 $x = \mathrm{e}$에서 곡선에 접한다는 것이다.

풀이

소문항 (i)

$y = mx$가 $x = x_0$에서 $y = \ln x$에 접한다고 하자. 기울기가 같고 두 곡선이 만나므로

$$m = \frac{1}{x_0}, \qquad mx_0 = \ln x_0.$$

첫 번째 식에서 $mx_0 = 1$이므로 $\ln x_0 = 1$, $x_0 = \mathrm{e}$이고

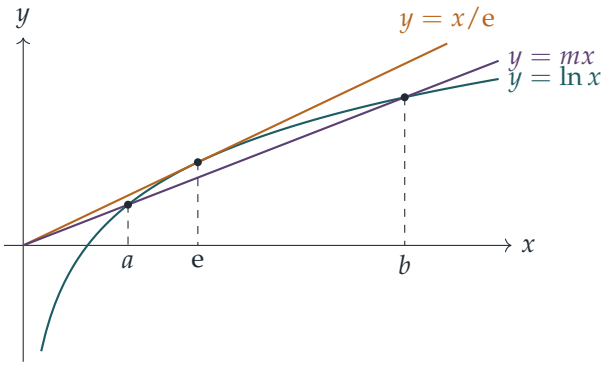
$$m = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

이제 $y = mx$가 곡선과 $x = a$와 $x = b$에서 만난다고 하자. 그러면 $\ln a = ma$, $\ln b = mb$이

므로 ($a, b > 0$이므로)

$$\frac{\ln a}{a} = m = \frac{\ln b}{b} \implies b\ln a = a\ln b \implies \ln\left(a^b\right) = \ln(b^a)\,,$$

이고, ln은 일대일(one-to-one)이므로 $a^b = b^a$이다. 이것이 증명하려던 것이다.



그림에 대하여: $m \le 0$이면 $\ln x - mx$가 순증가하므로 직선은 곡선과 많아야 한 번 만난다. $m \ge \frac{1}{\mathrm{e}}$이면 $x > 0$에서 직선은 접선이거나 접선보다 위에 있고, 위로 볼록한 곡선은 접선 $y = x/\mathrm{e}$의 아래에 있으면서 e에서만 접하므로 이번에도 교점이 두 개일 수 없다. 따라서 $0 < m < \frac{1}{\mathrm{e}}$이고, 그림과 같이 직선 $y = mx$는 접선 아래에 있다. $x = \mathrm{e}$에서 곡선의 높이는 1이고 직선의 높이는 $m\mathrm{e} < 1$이므로, 그곳에서 곡선은 직선보다 위에 있다. 곡선은 위로 볼록하고 직선은 곧으므로 $\ln x - mx$는 위로 볼록하다. 따라서 이 함수가 양수인 집합은 하나의 구간이고, 그 양 끝점은 두 교점 a와 b이다. 이 구간은 e를 포함하므로 $a < \mathrm{e} < b$이다.

소문항 (ii)

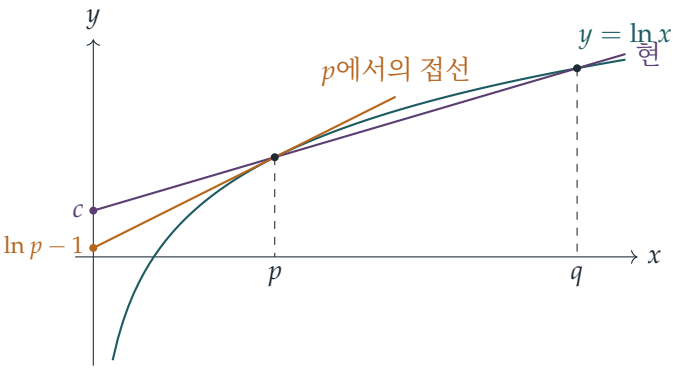
여기서 $0 < p < q$이고 $\ln p = mp + c$, $\ln q = mq + c$이다. 각각 p와 q로 나누면

$$\frac{\ln p}{p} = m + \frac{c}{p}, \qquad \frac{\ln q}{q} = m + \frac{c}{q}.$$

$c > 0$이고 $\frac{1}{p} > \frac{1}{q}$이므로 $\frac{c}{p} > \frac{c}{q}$이고, 따라서 $\frac{\ln p}{p} > \frac{\ln q}{q}$이다. 양변에 $pq > 0$을 곱하면 $q\ln p > p\ln q$, 즉 $\ln(p^q) > \ln(q^p)$이므로 $p^q > q^p$이다.

그림으로 보면, 원점에서 $(p, \ln p)$와 $(q, \ln q)$까지 그은 직선의 기울기는 각각 $\frac{\ln p}{p}$와 $\frac{\ln q}{q}$이다. 현이 원점보다 위에서 y축과 만나면, 더 가까운 점이 O에서 더 가파른 직선을 만든다. (c의 부호가 부등식의 방향을 결정한다. 이 사실은 소문항 (iv)에서 다시 쓴다.)

소문항 (iii)



$P = (p, \ln p)$와 $Q = (q, \ln q)$를 지나는 현의 기울기를 s, y절편을 c라 하면 $c = \ln p - sp$이다. 곡선이 위로 볼록하므로, P에서 더 오른쪽의 점까지 그은 현은 P에서의 접선보다 덜 가파르다. 따라서

$$s < \frac{1}{p}.$$

(또는 평균값 정리(mean value theorem)에 의해 어떤 $\xi \in (p, q)$에 대하여 $s = \frac{1}{\xi}$이고 $\frac{1}{\xi} < \frac{1}{p}$이다.) P에서의 접선은 $y = \ln p + \frac{1}{p}(x - p)$이고, 이 접선은 y축과 $\ln p - 1$에서 만난다. 현과 접선은 모두 P를 지나고 현이 덜 가파르다. 따라서 P에서 왼쪽으로 $x = 0$까지 이동하는 동안 현은 접선보다 위에 있다.

$$c = \ln p - sp > \ln p - 1 \geq 0,$$

마지막 단계에서 $p \geq \mathrm{e}$를 사용했다. 따라서 현은 y가 양수인 점에서 y축과 만난다.

생각해 보기 이것으로 π^{e}와 e^{π}의 대소는 어떻게 결정되는가?

$p = \mathrm{e}$, $q = \pi$로 두면 $\mathrm{e} \leq p < q$를 만족한다. 이 현은 $c > 0$이므로 소문항 (ii)를 적용할 수 있고, $p^q > q^p$를 얻는다.

$$\mathrm{e}^{\pi} > \pi^{\mathrm{e}}.$$

소문항 (iv)

이번에는 $(p, \ln p)$와 $(q, \ln q)$를 지나는 현의 기울기가 $\frac{1}{\mathrm{e}}$이므로, 현은 $y = \frac{x}{\mathrm{e}} + c$이고

$$c = \ln p - \frac{p}{\mathrm{e}}.$$

직선 $y = \frac{x}{\mathrm{e}}$는 소문항 (i)에서 구한 $x = \mathrm{e}$에서의 접선이고, 위로 볼록한 곡선은 이 접선 위에 있거나 아래에 있다. 즉 $\ln x \leq \frac{x}{\mathrm{e}}$이고, 등호는 $x = \mathrm{e}$일 때만 성립한다. 따라서 $c \leq 0$이고, $c = 0$인 것은 $p = \mathrm{e}$일 때뿐이다. 그런데 $c = 0$이면 현이 접선 자체가 되는데, 접선은 곡선과

e에서만 만나므로 두 점 $p < q$에서 만날 수 없다. 그러므로

$$c < 0.$$

현은 접선과 평행하고 접선 아래에 있다. 이제 부호를 바꾸어 소문항 (ii)의 논증을 반복한다.

$$\frac{\ln p}{p} = \frac{1}{\mathrm{e}} + \frac{c}{p}, \qquad \frac{\ln q}{q} = \frac{1}{\mathrm{e}} + \frac{c}{q}.$$

$c < 0$이고 $\frac{1}{p} > \frac{1}{q}$이므로 $\frac{c}{p} < \frac{c}{q}$이고, 따라서 $\frac{\ln p}{p} < \frac{\ln q}{q}$이다. 양변에 $pq > 0$을 곱하면 $q \ln p < p \ln q$이므로

$$q^p > p^q.$$

(소문항 (i)에서처럼 여기서도 볼록성에 의해 $p < \mathrm{e} < q$가 되지만, 논증에는 이 사실이 필요하지 않다.)

검산

- $\mathrm{e}^\pi \approx 23.14$이고 $\pi^\mathrm{e} \approx 22.46$이므로 소문항 (iii)과 일치한다.
- 소문항 (i): $a = 2, b = 4$는 $2^4 = 4^2$을 만족하고, 실제로 $\frac{\ln 2}{2} = \frac{\ln 4}{4}$이며 $2 < \mathrm{e} < 4$이다.
- 소문항 (iv): $p = 1$일 때 현의 기울기 $\frac{\ln q}{q-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}$에서 $q \approx 5.76$을 얻는다. 그러면 $q^p \approx 5.76 > 1 = p^q$이다.
- 소문항 (ii)와 (iii)은 무작위로 고른 많은 현에 대한 컴퓨터 검사로도 확인했다.

흔한 실수

- $q \ln p > p \ln q$의 방향을 거꾸로 쓰는 것. pq를 곱하기 전에 $\frac{\ln p}{p} > \frac{\ln q}{q}$를 명시적으로 적어 두자.
- 소문항 (iii)에서 "곡선이 위로 볼록하다"에서 멈추고 절편이 왜 양수인지 설명하지 않는 것. p에서의 접선은 축과 $\ln p - 1 \geq 0$에서 만나고, 현은 그보다 위에서 축을 지난다.
- 소문항 (iv)에서 $c = 0$인 경우를 배제하는 것을 잊는 것. 이는 엄격한 부등식을 얻기 위해 필요하다.

STEP 너머

함수 $\frac{\ln x}{x}$는 e에서 최댓값을 가지며, 이것이 유명한 쌍 $2^4 = 4^2$을 설명해 준다. $x \neq y$인 $x^y = y^x$의 양의 해들은 하나의 곡선을 이루는데, 이 곡선은 $x = t^{1/(t-1)}, y = t^{t/(t-1)}$로

매개변수화할 수 있다. 더 일반적으로, "위로 볼록한 함수의 현은 곡선 아래에, 그리고 접선들 위에 있다"는 것은 볼록성(convexity)의 기본 부등식이다. 이는 옌센 부등식(Jensen's inequality)과 산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)의 바탕이 된다. Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)는 평균값 정리와 볼록함수를 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP II 2013, 문제 2

순수수학 • 점화 공식

> **STEP II 2013, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/13-s2-q2

핵심 아이디어

피적분함수(integrand) $x^n(1-x)^n$은 반사 변환 $x \mapsto 1-x$에 대하여 대칭(symmetric)이고, 이 대칭성 덕분에 x와 $1-x$의 역할을 공짜로 맞바꿀 수 있다. 그다음 부분적분(integration by parts)으로 x의 거듭제곱을 $1-x$의 거듭제곱으로 바꾸고, 항등식 $x+(1-x)=1$을 이용하면 곱을 이미 알고 있는 적분들로 다시 쪼갤 수 있다. 이 둘을 합치면 축소 공식(reduction formula)을 얻는데, 이 공식을 풀어 나가면 자연수 n에 대해서는 계승(factorial)이 나오고, 반정수(half-integer)에 대해서도 그대로 성립한다.

풀이

소문항 (i)

$n \geq 1$에 대하여 $J_n = \int_0^1 x^{n-1}(1-x)^n \,\mathrm{d}x$라 하자. $u = 1-x$로 치환(substitution)하면 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$이고 적분 구간의 끝 $0, 1$은 $1, 0$이 된다:

$$J_n = \int_1^0 (1-u)^{n-1}u^n\,(-\mathrm{d}u) = \int_0^1 u^n(1-u)^{n-1}\,\mathrm{d}u,$$

이것이 바로 구하는 등식이다(적분 변수(dummy variable)의 이름은 상관없다).

J_n의 서로 같은 두 표현을 더하면

$$\begin{aligned} 2J_n &= \int_0^1 \left[x^{n-1}(1-x)^n + x^n(1-x)^{n-1}\right]\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{n-1}\left[(1-x)+x\right]\mathrm{d}x = I_{n-1}. \end{aligned}$$

다음으로 $u = x^n$, $\mathrm{d}v = (1-x)^n\,\mathrm{d}x$로 두고 I_n을 부분적분한다. 이때 $v = -\dfrac{(1-x)^{n+1}}{n+1}$이

므로

$$I_n = \Big[-\frac{x^n(1-x)^{n+1}}{n+1}\Big]_0^1 + \frac{n}{n+1}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{n+1}\,\mathrm{d}x.$$

경계항(boundary term)은 양 끝에서 모두 0이 된다. $x=1$에서는 $(1-x)^{n+1}$ 때문이고, $x=0$에서는 $n\geq 1$이므로 x^n 때문이다. 따라서 문제에 주어진 공식

$$I_n = \frac{n}{n+1}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{n+1}\,\mathrm{d}x$$

를 얻는다.

생각해 보기 이 적분에서 어떻게 다시 I_n과 I_{n-1}로 돌아갈 수 있을까?

$1-x$ 인수 하나를 떼어 내고 그것을 글자 그대로 $1-x$로 쓴다:

$$x^{n-1}(1-x)^{n+1} = x^{n-1}(1-x)^n(1-x) = x^{n-1}(1-x)^n - x^n(1-x)^n.$$

적분하면 앞의 결과에 의해 우변은 $J_n - I_n = \frac{1}{2}I_{n-1} - I_n$이 된다. 그러므로

$$I_n = \frac{n}{n+1}\Big(\tfrac{1}{2}I_{n-1} - I_n\Big) \quad\Longrightarrow\quad I_n\cdot\frac{2n+1}{n+1} = \frac{n}{2(n+1)}I_{n-1},$$

이고, 양변에 $\dfrac{n+1}{2n+1}$을 곱하면

$$I_n = \frac{n}{2(2n+1)}\,I_{n-1}$$

이 되어 증명이 끝난다. 이 논증 어디에서도 n이 정수라는 사실을 쓰지 않았음에 주목하자. 필요한 것은 $n\geq 1$뿐이었다(경계항을 위해서, 그리고 모든 피적분함수가 $[0,1]$에서 연속이 되도록 하기 위해서). 이 사실을 소문항 (iii)에서 사용한다.

소문항 (ii)

$I_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}$을 수학적 귀납법(induction)으로 증명한다. $n=0$에서 시작하면 $I_0 = \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = 1 = \dfrac{(0!)^2}{1!}$이다. $n\geq 1$일 때 $n-1$에 대하여 공식이 성립한다고 가정하자. 그러면 소문항 (i)에 의해

$$\begin{aligned} I_n = \frac{n}{2(2n+1)}\cdot\frac{\big((n-1)!\big)^2}{(2n-1)!} &= \frac{n^2\big((n-1)!\big)^2}{2n(2n+1)(2n-1)!} \\ &= \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}, \end{aligned}$$

이다. 여기서 분자와 분모에 n을 곱하고 $2n(2n+1)(2n-1)! = (2n+1)!$을 이용하였다. 이로써 귀납법이 완성되므로, 공식은 모든 양의 정수 n에 대하여(그리고 $n=0$에 대해서도) 성립한다.

소문항 (iii)

$x = \sin^2\theta$로 두면 $\mathrm{d}x = 2\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$이고, θ는 0부터 $\frac{\pi}{2}$까지 움직인다. 이 구간에서 $\sin\theta$와 $\cos\theta$는 음이 아니므로

$$\big(x(1-x)\big)^{1/2} = \big(\sin^2\theta\cos^2\theta\big)^{1/2} = \sin\theta\cos\theta.$$

? **생각해 보기** 여기서 왜 $\sin\theta\cos\theta \geq 0$이 필요할까?

$\sqrt{t^2} = |t|$이지 t가 아니기 때문이다. $[0, \frac{\pi}{2}]$에서는 절댓값 기호를 그냥 떼어 내도 된다. 따라서

$$\begin{aligned} I_{\frac{1}{2}} &= \int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta \cdot 2\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{2}\sin^2 2\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{4}(1-\cos 4\theta)\,\mathrm{d}\theta = \tfrac{1}{4}\Big[\theta - \tfrac{1}{4}\sin 4\theta\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

$I_{\frac{3}{2}}$를 구하기 위해 소문항 (i)의 축소 공식에 $n = \frac{3}{2}$를 대입한다. $\frac{3}{2} \geq 1$이고 유도 과정에서 n이 정수일 필요가 전혀 없었으므로 이렇게 해도 된다:

$$I_{\frac{3}{2}} = \frac{3/2}{2\cdot 4} I_{\frac{1}{2}} = \frac{3}{16}\cdot\frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{128}.$$

검증을 위해 같은 치환으로 직접 계산하면

$$I_{\frac{3}{2}} = \int_0^{\pi/2} 2\sin^4\theta\cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} \sin^4 2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{8}\cdot\frac{3\pi}{16} = \frac{3\pi}{128},$$

이다. 여기서 $\sin^4\phi = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2\phi + \frac{1}{8}\cos 4\phi$를 이용하였다.

검산

- $I_1 = \int_0^1 (x - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}$이고, 공식으로는 $\frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$이다. 마찬가지로 $I_2 = \int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{1}{30} = \frac{4}{5!}$이다.
- $I_{\frac{1}{2}}$는 반지름이 $\frac{1}{2}$인 반원 $y = \sqrt{\frac{1}{4} - (x-\frac{1}{2})^2}$ 아래의 넓이이므로 $\frac{1}{2}\pi\big(\frac{1}{2}\big)^2 = \frac{\pi}{8}$이다.
- 수치적으로 $I_{\frac{3}{2}} \approx 0.073631$로 $3\pi/128$과 일치한다. 또한 $n = 2.7$과 같은 정수가 아닌 n에 대해서도 축소 공식이 성립함을 컴퓨터로 확인하였다.

흔한 실수

- 부분적분에서 경계항이 0이 되는지, 특히 $x = 0$에서 그런지 확인하는 것을 잊는다.
- $[0, \frac{\pi}{2}]$에서의 부호를 언급하지 않고 $\sqrt{\sin^2\theta\cos^2\theta} = \sin\theta\cos\theta$라고 쓴다.

- 정수에 대해서만 증명된 소문항 (ii)의 계승 공식으로 $I_{\frac{3}{2}}$를 계산한다. 축소 공식을 쓰는 것이 안전한 방법이다.

STEP 너머

I_n은 베타 함수(beta function) $B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$의 특수한 경우로, $I_n = B(n+1, n+1)$이다. 소문항 (ii)는 $B(p,q) = \Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$의 정수인 경우이다. 이 항등식에 $n = \frac{1}{2}$를 넣으면 $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$를 다시 얻는데, 이것이 소문항 (iii)에 π가 나타나는 더 깊은 이유이다. 이런 적분들은 통계학의 베타 분포(beta distribution)와 π에 대한 월리스(Wallis)의 곱 공식의 바탕에 깔려 있다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)에 이런 흐름의 축소 공식 문제가 더 실려 있다.

풀이

STEP II 2013, 문제 3

순수수학 • 삼차식의 근

STEP II 2013, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/13-s2-q3

핵심 아이디어

모든 것은 최고차항의 계수가 양수이고 서로 다른 세 실근을 갖는 삼차함수(cubic)의 모양에서 나온다. 그래프는 $-\infty$에서 올라오며 축을 아래에서 위로 지나고, 다시 내려왔다가, 또 한 번 아래에서 위로 축을 지난다. 값 $f(0) = c$는 0이 근들에 대해 어디에 있는지를 알려 주고, 극점(turning point)(이차방정식 $f'(x) = 0$의 근)은 두 근의 합과 곱으로 위치를 정할 수 있다. 마지막 소문항은 극점에 대한 조건만으로는 곡선이 실제로 축과 세 번 만난다는 것을 보장할 수 없음을 일깨워 준다.

풀이

이 풀이 전체에서

$$f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3bx + c, \qquad f'(x) = 3\big(x^2 + 2ax + b\big).$$

라 하자. $f(x) = 0$이 서로 다른 세 실근 $\alpha < \beta < \gamma$를 가지면 $f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$로 쓸 수 있으므로, 세 인수의 부호를 살펴보면

$$f(x) < 0 \text{ 구간: } (-\infty, \alpha) \cup (\beta, \gamma), \qquad f(x) > 0 \text{ 구간: } (\alpha, \beta) \cup (\gamma, \infty).$$

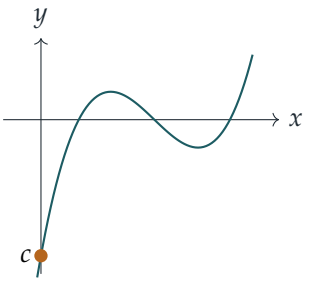
이다. 또한 롤의 정리(Rolle's theorem)에 의해 f'은 (α, β)에 영점을 하나, (β, γ)에 또 하나 갖는다. f'은 이차식이므로 다른 영점은 없고, 따라서 극점은

$$\alpha < p < \beta < q < \gamma.$$

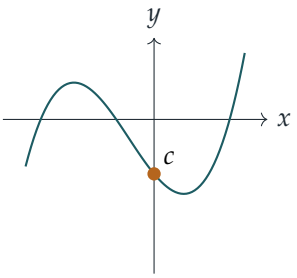
를 만족하는 $p < q$에 있다.

소문항 (i)

곡선 $y = f(x)$는 y축과 $(0, c)$에서 만나고, $c < 0$이므로 이 점은 x축 아래에 있다. 위의 부호 패턴에서 $f(0) < 0$이라는 것은 $0 < \alpha$이거나 $\beta < 0 < \gamma$라는 뜻이다. 이것이 아래의 두 그림이다.



세 근이 모두 양수



양수인 근이 정확히 하나

$0 < \alpha$이면 세 근이 모두 양수이다. $\beta < 0 < \gamma$이면 $\alpha < \beta < 0$이므로 양수인 근은 정확히 하나(γ)이다. $f(0) = c \neq 0$이므로 0인 근은 없다. 따라서 양수인 근이 정확히 하나이거나 세 근이 모두 양수이며, 이것이 증명하려던 것이다.

소문항 (ii)

이제 $0 < \alpha < \beta < \gamma$라 하자.

c의 부호. $0 < \alpha$이므로 점 0은 $f < 0$인 구간 $(-\infty, \alpha)$에 있다. 따라서 $c = f(0) < 0$이다.

극점. 방정식 $x^2 + 2ax + b = 0$은 서로 다른 두 실근 p, q를 가지므로 판별식(discriminant)이 양수이다.

$$4a^2 - 4b > 0 \quad \Longrightarrow \quad a^2 > b.$$

$p > \alpha > 0$이고 $q > p$이므로 두 극점은 모두 양수이다. 이차식 $x^2 + 2ax + b$에서 두 근의 합과 곱은

$$p + q = -2a, \qquad pq = b.$$

이다. $p, q > 0$이므로 $-2a > 0$, 즉 $a < 0$이고, $b = pq > 0$이다. 이를 종합하면

$$a^2 > b > 0, \qquad a < 0, \qquad c < 0,$$

이고, 이것이 바로 $(*)$이다.

(근으로부터 곧바로 $a < 0, b > 0, c < 0$을 얻을 수도 있다. $\alpha + \beta + \gamma = -3a$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3b$, $\alpha\beta\gamma = -c$가 모두 양수이기 때문이다. 하지만 $a^2 > b$는 정말로 극점이 필요하다.)

소문항 (iii)

이제 $c = f(0) > 0$이므로 0은 $f > 0$인 두 구간 (α, β) 또는 (γ, ∞)에 있다. 그러면 가능한 그림은 두 가지이다. $\alpha < 0 < \beta < \gamma$(음수인 근 하나, 양수인 근 둘)이거나 $\alpha < \beta < \gamma < 0$(세 근 모두 음수)이다.

? **생각해 보기** 조건 $ab < 0$으로 이 중 하나를 어떻게 배제할 수 있을까?

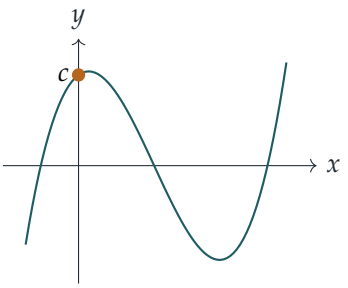
극점을 다시 살펴보자. 세 근이 모두 음수라면 $p < q < \gamma < 0$이므로 두 극점은 모두 음수이다. 그러면

$$-2a = p + q < 0 \quad \text{이고} \quad b = pq > 0,$$

이므로 $a > 0, b > 0$이 되어 $ab > 0$이다. 이것은 $ab < 0$에 모순이다. 따라서 두 번째 그림은 불가능하고,

$$\alpha < 0 < \beta < \gamma :$$

한 근은 음수이고 나머지 두 근은 양수이다.



이 경우는 실제로 일어날 수 있다. 예를 들어 근 $-1, 2, 5$로부터 $x^3 - 6x^2 + 3x + 10$을 얻으므로 $a = -2, b = 1, c = 10$이고, $ab = -2 < 0, c > 0$이다. 위에 그린 곡선이 바로 이것이다.

소문항 (iv)

? **생각해 보기** 삼차방정식이 세 실근을 가지려면 $(*)$ 외에 어떤 조건이 더 필요할까?

조건 $(*)$는 극점과 $f(0)$의 부호만을 제어한다. 세 실근을 가지려면 극댓값(local maximum)도 축보다 위에 있어야 한다. 따라서 a와 b를 두 극점이 양수가 되도록 고른 다음, c를 충분히 작은 음수로 잡아 극댓값을 축 아래로 끌어내리면 된다.

$a = -1, b = \frac{3}{4}$로 잡으면

$$f'(x) = 3\left(x^2 - 2x + \tfrac{3}{4}\right) = 3\left(x - \tfrac{1}{2}\right)\left(x - \tfrac{3}{2}\right).$$

이다. 극대는 $x = \frac{1}{2}$에서 일어나고, 그 값은

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{8} - \tfrac{3}{4} + \tfrac{9}{8} + c = \tfrac{1}{2} + c.$$

이다. $c = -1$로 고르자. 그러면 방정식은

$$x^3 - 3x^2 + \tfrac{9}{4}x - 1 = 0 \qquad \left(a = -1,\ b = \tfrac{3}{4},\ c = -1\right),$$

이고, $a^2 = 1 > \frac{3}{4} = b > 0$, $a < 0$, $c < 0$이므로 $(*)$가 성립한다.

이제 근의 개수를 세어 보자. f는 $(-\infty, \frac{1}{2}]$에서 증가하므로 이 구간에서 $f(x) \le f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} < 0$이다. $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$에서 f는 감소하므로 계속 $-\frac{1}{2}$보다 작다. $[\frac{3}{2}, \infty)$에서 f는 $f(\frac{3}{2}) = -1$에서 $+\infty$까지 증가하므로 축을 정확히 한 번 지난다. 따라서 실근은 정확히 하나이다($f(2) = -\frac{1}{2}$, $f(3) = \frac{23}{4}$이므로 이 근은 2와 3 사이에 있다).

검산

- 삼차식 $(x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$은 $a = -2$, $b = \frac{11}{3}$, $c = -6$이고, 소문항 (ii)의 예측대로 실제로 $a^2 = 4 > \frac{11}{3} > 0$이다.
- 곡선을 $x \mapsto -x$로 대칭이동하면 근 α, β, γ가 $-\alpha, -\beta, -\gamma$로 바뀌고, a와 c의 부호는 바뀌지만 b의 부호는 바뀌지 않는다. 따라서 ab와 c의 부호가 모두 바뀌며, 소문항 (i)을 대칭이동한 결과는 $c > 0$일 때 음수인 근이 정확히 하나이거나 세 근이 모두 음수라는 것이다. 이것이 바로 소문항 (iii)에서 출발한 두 그림이다.
- 소문항 (iv)에서 유일한 실근은 $x \approx 2.178$이다. 서로 다른 세 실근을 갖는 무작위 삼차식 수천 개를 컴퓨터로 확인한 결과도 소문항 (i)–(iii)과 일치했다.

흔한 실수

- 근의 부호만으로 $a^2 > b$를 증명하려는 것. 이 부등식은 극점이 서로 다른 실수라는 사실에서 나온다.
- $(*)$가 세 양수 근과 **동치**라고 가정하는 것. 소문항 (iv)는 이것이 필요조건(necessary)일 뿐 충분조건(sufficient)이 아님을 보여 준다.
- 소문항 (iv)에서 극솟값은 음수이지만 극댓값은 여전히 양수가 되도록 c를 고르는 것. 그러면 근이 하나가 아니라 셋이 된다.

STEP 너머

여기서 쓴 부호 논증은 일반 이론의 출발점이다. 데카르트(Descartes)의 부호 규칙(rule of signs)은 양수인 근의 개수를 계수의 부호 변화 횟수로 위에서 제한하고, 슈투름(Sturm)의 정리는 구간 안의 실근 개수를 정확히 센다. 삼차식의 경우 소문항 (iv)에서 놓친 조건은 판별식의 부호이며, 판별식은 (양의 상수배를 무시하면) 극점에서의 값의 곱 $-f(p)f(q)$이다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 대학 1학년 수준에서 다항식과 그 근을 다룬다.

풀이

STEP II 2013, 문제 4

순수수학 • 현의 중점의 자취

> **STEP II 2013, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/13-s2-q4

핵심 아이디어

현(chord)의 중점(midpoint)은 현의 양 끝점을 구하지 않고도 찾을 수 있다. P와 Q의 x좌표는 어떤 이차방정식(quadratic)의 근이고, 그 평균은 처음 두 계수의 비의 절반에 음의 부호를 붙인 값이다. 그다음에는 각 자취(locus)를 구하는 일이 매개변수(parameter)를 소거하는 문제가 된다. 모든 답은 기하학으로 설명된다. 원의 중심에서 현의 중점으로 그은 직선은 그 현에 수직(perpendicular)이다.

풀이

M의 좌표

직선은 $y = b(x-a)$이다. 이를 $x^2 + y^2 = 1$에 대입하면

$$(1+b^2)x^2 - 2ab^2x + a^2b^2 - 1 = 0.$$

이 방정식의 근은 P와 Q의 x좌표 x_P, x_Q이므로, 근의 합(sum of the roots)에 의해

$$x_M = \tfrac{1}{2}(x_P + x_Q) = \frac{ab^2}{1+b^2}.$$

M은 직선 위에 있으므로 $y_M = b(x_M - a) = b \cdot \dfrac{ab^2 - a - ab^2}{1+b^2}$이고, 따라서

$$M = \left(\frac{ab^2}{1+b^2},\ -\frac{ab}{1+b^2} \right).$$

P와 Q가 존재하고 서로 다르려면 판별식(discriminant)이 양수여야 한다.

$$4a^2b^4 - 4(1+b^2)(a^2b^2 - 1) = 4\big(1 + b^2 - a^2b^2\big) > 0 \iff a^2b^2 < 1 + b^2.$$

(이는 O에서 직선까지의 거리 $|ab|/\sqrt{1+b^2}$가 1보다 작다는 뜻이다.) 각 소문항에서 이 조건이 필요하다.

소문항 (i)

$b > 0$을 고정하면

$$-by_M = -b \cdot \left(-\frac{ab}{1+b^2}\right) = \frac{ab^2}{1+b^2} = x_M,$$

따라서 자취 위의 모든 점에서 $x = -by$이며, 이것이 보여야 할 식이다. 이는 O를 지나고 기울기(gradient)가 $-1/b$인 직선으로, 핵심 아이디어에서 예측한 대로 현에 수직이다.

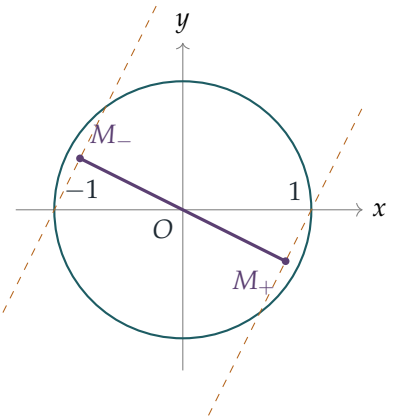
$-1 \le a \le 1$이면 $a^2b^2 \le b^2 < 1+b^2$이므로, 직선은 항상 원과 두 점에서 만나고 그러한 모든 a에 대해 M이 정의된다. M의 두 좌표는 모두 a에 상수를 곱한 것이므로, a가 $[-1,1]$ 위를 움직일 때 점 M은 직선 $x = -by$를 따라 $a = -1$에 해당하는 점에서 $a = 1$에 해당하는 점까지 고르게 움직인다. 따라서 자취는 다음 두 점을 잇는 선분(line segment)이다.

$$M_\pm = \pm\left(\frac{b^2}{1+b^2}, -\frac{b}{1+b^2}\right),$$

그 길이는

$$2\,\frac{\sqrt{b^4+b^2}}{1+b^2} = \frac{2b\sqrt{1+b^2}}{1+b^2} = \frac{2b}{(1+b^2)^{1/2}},$$

이다. 여기서 b^2의 제곱근을 구할 때 $b > 0$을 이용했다. 이것이 구하는 길이이다. 선분의 중심은 O이다. 끝점 M_+는 $(1,0)$을 지나는 현의 중점이고, M_-는 $(-1,0)$을 지나는 현의 중점이다. 그림은 $b = 2$인 경우로, 이때 양 끝점은 $\pm(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5})$이다.



점선은 $(\pm1,0)$을 지나고 기울기가 2인 양 끝의 현이다.

소문항 (ii)(a)

이제 a를 $0 < a < 1$인 값으로 고정한다. 그러면 $a^2b^2 < b^2 < 1 + b^2$이므로, $A = (a, 0)$을 지나는 모든 직선은 원과 두 점에서 만난다. M의 공식으로부터

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2b^4 + a^2b^2}{(1+b^2)^2} = \frac{a^2b^2}{1+b^2} = a \cdot \frac{ab^2}{1+b^2} = ax.$$

따라서 M은 다음 원 위에 있다.

$$x^2 + y^2 - ax = 0, \quad \text{즉} \quad \left(x - \tfrac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\tfrac{a}{2}\right)^2,$$

이것은 중심이 $(\frac{a}{2}, 0)$이고 반지름이 $\frac{a}{2}$인 원으로, OA를 지름(diameter)으로 한다.

? 생각해 보기 이 원 전체가 그려지는가?

꼭 그렇지는 않다. $x = ab^2/(1+b^2) = a - a/(1+b^2)$이므로 항상 $0 \le x < a$이고, 따라서 점 $A = (a, 0)$ 자체에는 결코 도달하지 않는다. 그 점에 도달하려면 A를 지나는 수직선이 필요한데, 수직선에는 기울기가 없다. 나머지 점에는 모두 도달한다. $b = \tan\theta$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$로 두면

$$M = \left(a\sin^2\theta,\ -a\sin\theta\cos\theta\right) = \left(\tfrac{a}{2} - \tfrac{a}{2}\cos 2\theta,\ -\tfrac{a}{2}\sin 2\theta\right),$$

이고, 2θ가 $(-\pi, \pi)$ 위를 움직일 때 이 점은 원을 한 바퀴 돌되, $2\theta = \pm\pi$에 해당하는 점, 곧 A만 빠진다. 따라서 자취는 OA를 지름으로 하는 원에서 한 점 A를 제외한 것이다. 기하학적으로 보면, OM은 현 AM에 수직이므로 $\angle OMA$는 직각이고 M은 OA를 지름으로 하는 원 위에 있다($b = 0$일 때는 $M = O$이다). 이 원은 단위원(unit circle) 안에 놓인다.

소문항 (ii)(b)

이제 $a = 1/b$이고 $0 < b \le 1$이다. 조건 $a^2b^2 < 1 + b^2$는 $1 < 1 + b^2$가 되며, 이는 성립한다. 직선은 $y = b(x - 1/b) = bx - 1$이므로 항상 단위원 위의 점 $B = (0, -1)$을 지난다. 따라서 B는 항상 P, Q 중 하나이다. 공식으로부터

$$M = \left(\frac{b}{1+b^2},\ -\frac{1}{1+b^2}\right), \qquad x^2 + y^2 = \frac{b^2+1}{(1+b^2)^2} = \frac{1}{1+b^2} = -y.$$

따라서 M은 다음 원 위에 있다.

$$x^2 + y^2 + y = 0, \quad \text{즉} \quad x^2 + \left(y + \tfrac{1}{2}\right)^2 = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2,$$

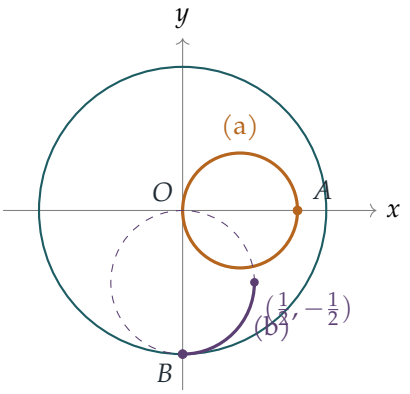
이것은 중심이 $(0, -\frac{1}{2})$이고 반지름이 $\frac{1}{2}$인 원으로, ((a)에서와 같은 직각 논리에 의해) OB를 지름으로 한다.

이번에는 원의 일부만 그려진다. $b = \tan\theta, 0 < \theta \le \frac{\pi}{4}$로 두면

$$M = \left(\tfrac{1}{2}\sin 2\theta,\ -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2\theta\right),$$

이고 2θ는 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 위를 움직인다. 따라서 자취는 원의 4분의 1이다. 곧 포함되지 않는 점(그 점에 도달하려면 $b = 0$이어야 한다) $B = (0, -1)$에서 시계 반대 방향으로, 포함되는 점($b = 1$, $a = 1$일 때) $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$까지의 호이다. 이 호 위에서 $0 < x \leq \frac{1}{2}$이고 $-1 < y \leq -\frac{1}{2}$이다.

그림은 (a)에서 $a = 0.8$로 두고 두 자취를 단위원과 함께 나타낸 것이다. 속이 빈 동그라미는 (a)에서 빠진 점 A와 (b)에서 빠진 끝점 B를 나타낸다.



(b)에서 실선으로 그린 호가 자취이고, 작은 원의 나머지 점선 부분에는 도달하지 않는다.

검산

- $a = 0$이면 직선이 O를 지나므로 현은 지름이 되고 M은 O여야 한다. 실제로 공식은 $(0, 0)$을 준다.
- (i)에서 $b = 1$이면, $(1, 0)$을 지나고 기울기가 1인 현은 $(1, 0)$과 $(0, -1)$을 잇고, 그 중점은 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$로 M_+와 일치한다. 이때 선분의 길이는 공식대로 $\sqrt{2} = 2/\sqrt{2}$이다.
- 같은 현이 (ii)(b)에서 호의 $b = 1$ 쪽 끝을 주며, $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$는 $x^2 + y^2 + y = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 0$을 만족한다.
- (ii)(a)에서 $b = 1$이면 $M = (\frac{a}{2}, -\frac{a}{2})$으로, OA를 지름으로 하는 원의 가장 낮은 점이다. 45° 기울어진 현이라면 마땅히 그래야 한다.

흔한 실수

- 근의 공식(quadratic formula)으로 P와 Q를 직접 구하는 것. 이 방법도 통하지만, 근의 합을 쓰면 한 줄 만에 M을 얻는다.
- (ii)(a)나 (ii)(b)에서 원 전체가 자취라고 주장하는 것. 매개변수가 실제로 어떤 값을 가지는지, 그 값들이 어떤 점을 주는지 항상 확인해야 한다.

- 직선이 실제로 원과 만나는지 확인하지 않는 것. (i)과 (ii)의 두 경우 모두 항상 만나지만, 이를 밝혀 두어야 한다.

STEP 너머

평행한 현들의 중점이 중심을 지나는 한 직선 위에 있다는 사실은 모든 원뿔곡선(conic)에서 성립한다. 타원에서는 그 직선을 **켤레지름**(conjugate diameter)이라 하며, 이는 사영기하학의 극과 극선(poles and polars) 개념을 처음 엿보는 것이다. 소문항 (ii)의 원들은 반원에 대한 원주각은 직각이라는 고전적인 정리를 거꾸로 적용한 것이다. 자취와 매개변수화를 문제 해결 도구로 더 공부하고 싶다면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*가 좋은 다음 단계이다.

풀이

STEP II 2013, 문제 5

순수수학 • 대칭성과 곡선의 개형

STEP II 2013, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/13-s2-q5

핵심 아이디어

함수가 $x \mapsto 1-x$나 $x \mapsto 1/x$ 같은 치환(substitution)에 대해 변하지 않으면, 그 항등식을 연쇄법칙(chain rule)으로 미분하여 x에서의 기울기(gradient)와 상(image)이 되는 점에서의 기울기 사이의 관계를 얻을 수 있다. 치환에 의해 움직이지 않는 점, 즉 고정점(fixed point)에서는 기울기가 자기 자신의 음수와 같아야 하므로 0이다. (iii)의 방정식에서는 이 대칭성을 보고, 그 자체로 $x \mapsto 1-x$에 대해 변하지 않는 $u = x^2 - x$를 써서 모든 것을 나타내 볼 수 있다. 그러면 x에 대한 육차식(sextic)보다 훨씬 다루기 쉬운 u에 대한 삼차식(cubic)을 얻는다.

풀이

소문항 (i)

$\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(1-x)$를 x에 대해 미분(differentiate)하면, 우변에 연쇄법칙을 적용하여

$$\mathrm{f}'(x) = -\mathrm{f}'(1-x) \qquad \text{모든} x.$$

를 얻는다. $x = \frac{1}{2}$를 대입하면 $\mathrm{f}'(\frac{1}{2}) = -\mathrm{f}'(\frac{1}{2})$이므로 $\mathrm{f}'(\frac{1}{2}) = 0$이다.

이제 $x \neq 0$에 대해 $\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(1/x)$도 성립한다고 하자. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{1}{x}) = -\frac{1}{x^2}$이므로 미분하면

$$\mathrm{f}'(x) = -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{f}'\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x \neq 0).$$

이다. 자기 자신의 역수(reciprocal)인 $x = -1$에서 이 식은 $\mathrm{f}'(-1) = -\mathrm{f}'(-1)$이 되므로 $\mathrm{f}'(-1) = 0$이다.

$x = 2$에서는 첫 번째 결과에 의해 $\mathrm{f}'(2) = -\frac{1}{4}\mathrm{f}'(\frac{1}{2}) = 0$이다. (마찬가지로, 첫 번째 항등식에 $x = 2$를 대입해도 $\mathrm{f}'(2) = -\mathrm{f}'(-1) = 0$을 얻는다.)

소문항 (ii)

x를 $1/x$로 바꾸자. 분자는

$$\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+1\right)^3=\frac{(1-x+x^2)^3}{x^6},$$

이 되고, 분모는

$$\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)^2=\frac{(1-x)^2}{x^4}.$$

이 된다. 나누고 $x^2(1-x)^2=(x^2-x)^2$을 이용하면

$$\mathrm{f}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{(x^2-x+1)^3}{x^6}\cdot\frac{x^4}{(1-x)^2}=\frac{(x^2-x+1)^3}{x^2(x-1)^2}=\mathrm{f}(x).$$

이다. x를 $1-x$로 바꾸면 $(1-x)^2-(1-x)=(1-x)(-x)=x^2-x$이므로 x^2-x는 변하지 않고, 따라서 x^2-x+1도 변하지 않는다. 그러므로 $\mathrm{f}(1-x)=\mathrm{f}(x)$이다.

그래프 개형. (i)에 의해 $x=-1,\frac{1}{2},2$는 정류점(stationary point)이다. 정류점은 정확히 세 개이므로 이것이 전부이다. 각 점에서의 함숫값은

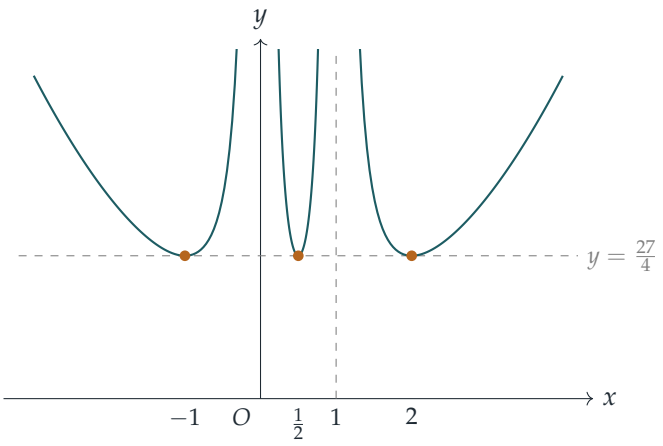
$$\mathrm{f}(-1)=\frac{3^3}{2^2}=\frac{27}{4},\qquad \mathrm{f}(\tfrac{1}{2})=\frac{(3/4)^3}{(1/4)^2}=\frac{27}{4},\qquad \mathrm{f}(2)=\frac{3^3}{2^2}=\frac{27}{4}.$$

이다. 세 값은 모두 같으며, 당연히 그래야 한다. $\mathrm{f}(2)=\mathrm{f}(\frac{1}{2})$이고 $\mathrm{f}(2)=\mathrm{f}(1-2)=\mathrm{f}(-1)$이기 때문이다.

그 밖의 특징은 다음과 같다.

- $x^2-x+1=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$이므로 모든 곳에서 $\mathrm{f}(x)>0$이다. 곡선은 x축과 만나지 않는다.
- $x\to 0$ 또는 $x\to 1$일 때 분자는 1로, 분모는 0^+로 가므로 양쪽에서 모두 $\mathrm{f}(x)\to+\infty$이다. 즉 $x=0$과 $x=1$은 수직 점근선(vertical asymptote)이다.
- $|x|$가 클 때 $\mathrm{f}(x)\approx x^6/x^4=x^2$이므로, $x\to\pm\infty$일 때 대략 포물선처럼 $\mathrm{f}(x)\to+\infty$이다.

따라서 세 구간 $(-\infty,0)$, $(0,1)$, $(1,\infty)$ 각각에서 함수는 연속(continuous)이고 양 끝에서 $+\infty$로 간다. 그러므로 각 구간에는 최솟값이 존재하며, 그 점은 정류점이다. 각 구간에는 $-1,\frac{1}{2},2$ 중 정확히 하나가 들어 있으므로 그 점이 최솟점이고, 다른 극점(turning point)은 없다. 각 가지는 U자 모양이며 가장 낮은 값은 $\frac{27}{4}$이다.



소문항 (iii)

방정식 $f(x) = \frac{27}{4}$**.** 그래프 개형에서 $\frac{27}{4}$는 모든 가지에서의 최솟값이며, 세 정류점에서만 그 값을 가진다. 따라서 근은

$$x = -1, \qquad x = \tfrac{1}{2}, \qquad x = 2,$$

이고, 정의역의 다른 모든 x, 즉

$$x < -1, \quad -1 < x < 0, \quad 0 < x < \tfrac{1}{2}, \quad \tfrac{1}{2} < x < 1, \quad 1 < x < 2, \quad x > 2.$$

에 대해 $f(x) > \frac{27}{4}$이다. 이것을 대수적으로 확인할 수 있다. $u = x^2 - x$로 놓자(정의역에서 $u \neq 0$이다). 그러면 $f(x) = \dfrac{(u+1)^3}{u^2}$이고

$$f(x) - \frac{27}{4} = \frac{4u^3 - 15u^2 + 12u + 4}{4u^2} = \frac{(u-2)^2(4u+1)}{4u^2}.$$

이다. $4u + 1 = 4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2 \geq 0$이므로 이 값은 결코 음수가 아니며, $u = 2$일 때(즉 $x^2 - x - 2 = 0$이므로 $x = 2$ 또는 -1) 또는 $x = \frac{1}{2}$일 때에만 0이다.

> ? **생각해 보기** 육차방정식을 풀지 않고 $f(x) = \frac{343}{36}$의 근을 어떻게 추측할 수 있을까?

방정식 $f(x) = \frac{343}{36}$**.** $\frac{343}{36} = \frac{7^3}{6^2}$임에 주목하여, $x^2 - x + 1 = 7$이고 $x^2 - x = 6$인 x를 찾아본다. $x = 3$이면 둘 다 성립하므로 $f(3) = \frac{343}{36}$이다. 이제 대칭성 덕분에 다른 근들을 공짜로 얻는다. 3에 $x \mapsto 1 - x$와 $x \mapsto 1/x$를 반복하여 적용하면

$$3, \quad 1 - 3 = -2, \quad \tfrac{1}{3}, \quad 1 - \tfrac{1}{3} = \tfrac{2}{3}, \quad \tfrac{3}{2}, \quad 1 - \tfrac{3}{2} = -\tfrac{1}{2}.$$

을 얻는다. 이들은 서로 다른 여섯 개의 수이고, 분모를 없애면 $f(x) = \frac{343}{36}$은 육차 다항방정

식이 되므로 이것이 근의 전부이다.

$$x = -2,\ -\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{3}{2},\ 3.$$

(u로 나타내면 방정식은 $36u^3 - 235u^2 + 108u + 36 = 0$이며, 이는 $(u-6)(9u+2)(4u-3) = 0$으로 인수분해(factorise)되어 쌍 $\{3,-2\}$, $\{\frac{1}{3},\frac{2}{3}\}$, $\{\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\}$를 준다.)

$\frac{343}{36} > \frac{27}{4}$이므로 수평선 $y = \frac{343}{36}$은 각 U자 모양 가지를 최솟점의 양쪽에서 한 번씩, 모두 두 번 자르며, 두 교점의 바깥쪽에서 가지는 직선보다 위에 있다. $(-\infty, 0)$ 위의 가지는 -2와 $-\frac{1}{2}$에서, $(0,1)$ 위의 가지는 $\frac{1}{3}$과 $\frac{2}{3}$에서, $(1,\infty)$ 위의 가지는 $\frac{3}{2}$와 3에서 잘린다. 따라서 $\mathrm{f}(x) > \frac{343}{36}$일 필요충분조건은

$$x < -2, \quad -\tfrac{1}{2} < x < 0, \quad 0 < x < \tfrac{1}{3}, \quad \tfrac{2}{3} < x < 1, \quad 1 < x < \tfrac{3}{2}, \quad x > 3.$$

이다.

검산

- 값을 하나 대입해 보자. $\mathrm{f}(-\frac{1}{2}) = \dfrac{(7/4)^3}{(3/4)^2} = \dfrac{343/64}{9/16} = \dfrac{343}{36}$으로 주장한 대로이다.
- 주장한 구간 안의 점: $\mathrm{f}(4) = \frac{13^3}{12^2} \approx 15.3 > \frac{343}{36} \approx 9.53$이고, $\mathrm{f}(2) = 6.75$는 그 아래에 있으므로 $(\frac{3}{2}, 3)$이 제외된다는 것과 일치한다.
- 여섯 근은 합이 1인 쌍과 서로 역수인 쌍을 이루며, 이는 정확히 두 대칭성이 요구하는 바이다. 컴퓨터로 10^5개의 무작위 점에서 부등식을 확인하였다.

흔한 실수

- $\mathrm{f}(1/x)$를 미분할 때 연쇄법칙에서 나오는 인수 $-1/x^2$을 빠뜨리는 것. $x = -1$에서는 상관없지만, 2에서 기울기가 0이 되는 이유를 알려면 꼭 필요하다.
- 범위를 $x < -2$ 또는 $x > 3$처럼 하나의 구간으로 쓰고, $x = 0$과 $x = 1$의 점근선이 해집합을 나눈다는 것을 잊는 것. $x = 0$과 $x = 1$은 반드시 제외해야 한다.
- 정류점을 극댓점으로 착각하는 것. 모든 가지가 양 끝에서 $+\infty$로 가므로 이들은 극솟점이다.

STEP 너머

$x \mapsto 1 - x$와 $x \mapsto 1/x$로 생성되는 여섯 개의 사상은 군(group)을 이루며(삼각형의 대칭군과 동형(isomorphic)이다), f는 상수배를 제외하면 교차비(cross-ratio)의 고전적인 j-불

변량(j-invariant), 즉 여섯 사상 모두에 대해 변하지 않는 함수이다. 치환들의 군에 대해 불변인 함수는 갈루아 이론(Galois theory)과 타원곡선(elliptic curve) 이론의 핵심 주제이다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 이와 같은 변환군을 처음 만나기에 좋은 책이다.

풀이

STEP II 2013, 문제 6

순수수학 • 수열의 수렴

> **STEP II 2013, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/13-s2-q6

이 문제는 *Beyond STEP*의 2.2 절 극한으로서의 황금비에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch02/golden-limit.html

핵심 아이디어

항 $1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \ldots$는 결국 다가가는 극한(limit)의 위아래를 번갈아 오가므로, 수열(sequence) 전체는 단조(monotonic)가 아니고 정리(theorem)를 수열에 곧바로 적용할 수 없다. 그러나 한 항씩 건너뛰어 항을 뽑으면 두 개의 단조수열을 얻는다. 소문항 (i)이 이것을 보여 주는 도구이다. 분모가 양수이므로 차이 $u_{n+2} - u_n$의 부호가 바로 앞의 차이 $u_n - u_{n-2}$의 부호와 같다는 것이다.

풀이

먼저 모든 u_n이 양수임에 주목한다. $u_1 = 1 > 0$이고, $u_n > 0$이면 $u_{n+1} = 1 + 1/u_n > 1 > 0$이다. 따라서 0으로 나누는 일은 결코 없고, $1 + u_n$과 같은 인수는 모두 양수이다.

소문항 (i)

$(*)$를 두 번 쓰면

$$u_{n+2} - u_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_{n-1}} = \frac{u_{n-1} - u_{n+1}}{u_{n+1}u_{n-1}}, \qquad u_{n+1} - u_{n-1} = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n-2}} = \frac{u_{n-2} - u_n}{u_n u_{n-2}}.$$

이다. (두 번째 식에는 u_{n-2}가 존재해야 하며, 이 때문에 $n \geq 3$이다.) 두 번째 식을 첫 번째 식에 대입하면 두 음의 부호가 상쇄되어

$$u_{n+2} - u_n = \frac{u_n - u_{n-2}}{(u_n u_{n+1})(u_{n-2} u_{n-1})}.$$

을 얻는다. 끝으로 $(*)$에 u_n을 곱하면 $u_n u_{n+1} = u_n + 1$이고, 마찬가지로 $u_{n-2} u_{n-1} = u_{n-2} + 1$이다. 따라서

$$u_{n+2} - u_n = \frac{u_n - u_{n-2}}{(1 + u_n)(1 + u_{n-2})},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

소문항 (ii)

수학적 귀납법(induction)을 쓴다. $u_1 = 1$이므로 $1 \leq u_1 \leq 2$는 참이다. $1 \leq u_n \leq 2$라고 가정하자. 양수의 역수를 취하면 부등호의 방향이 바뀌므로 $\frac{1}{2} \leq 1/u_n \leq 1$이고, 따라서

$$\frac{3}{2} \leq u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} \leq 2,$$

이며, 이로부터 당연히 $1 \leq u_{n+1} \leq 2$이다. 귀납법에 의하여 모든 n에 대해 $1 \leq u_n \leq 2$이다.

소문항 (iii)

홀수 번째 항. $u_1 = 1, u_3 = \frac{3}{2}$이므로 $u_3 - u_1 > 0$이다. 홀수 $n \geq 3$에 대하여, 소문항 (i)에 따르면 $u_{n+2} - u_n$은 $u_n - u_{n-2}$에 양수 $1/\big((1 + u_n)(1 + u_{n-2})\big)$를 곱한 것이므로 부호가 같다. 귀납법에 의하여 모든 차이 $u_{n+2} - u_n$ (n은 홀수)은 양수이다. 즉 수열 $u_1, u_3, u_5, \ldots$는 증가한다. (ii)에 의하여 이 수열은 위로 2에 의해 유계(bounded)이므로, 정리에 의하여 어떤 극한 L로 수렴(converge)하며, 모든 항이 $[1, 2]$에 있으므로 $1 \leq L \leq 2$이다.

짝수 번째 항. 이번에는 $u_2 = 2, u_4 = \frac{5}{3}$이므로 $u_4 - u_2 < 0$이고, 같은 논증으로 $u_2, u_4, u_6, \ldots$가 감소함을 보일 수 있다. 이 수열은 아래로 1에 의해 유계이다.

> ? **생각해 보기** 정리는 위로 유계인 증가수열에 관한 것이다. 감소수열에는 이 정리를 어떻게 쓸 수 있을까?

부호를 바꾼 수열에 적용한다. $-u_2, -u_4, -u_6, \ldots$는 증가하고 위로 -1에 의해 유계이므로 극한으로 수렴하고, 따라서 $u_2, u_4, \ldots$도 수렴한다. 그 극한을 M이라 하자. 이번에도 $1 \leq M \leq 2$이다.

극한 구하기. $(*)$를 두 번 적용하면 홀짝이 같은 항끼리 잇는 점화식(recurrence)을 얻는다.

$$u_{n+2} = 1 + \frac{1}{1 + \dfrac{1}{u_n}} = 1 + \frac{u_n}{u_n + 1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 1}.$$

생각해 보기 왜 u_{n+2}와 u_n을 그냥 L로 바꾸어도 될까?

홀수 n을 따라가면 u_n과 u_{n+2}가 모두 L로 수렴한다. 우변은 u_n의 연속함수(continuous function)이므로(분모는 적어도 2이다) $(2L+1)/(L+1)$로 수렴한다. 극한은 유일하므로

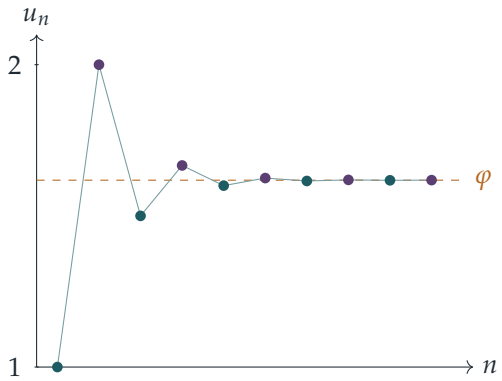
$$L = \frac{2L+1}{L+1} \quad \Longrightarrow \quad L^2 + L = 2L + 1 \quad \Longrightarrow \quad L^2 - L - 1 = 0,$$

이고, 따라서 $L = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$이다. $L \geq 1$이므로 $L = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$일 수밖에 없다. M에 대해서도 똑같은 방정식이 성립하고 $M \geq 1$이므로

$$\lim_{k\to\infty} u_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} u_{2k} = \tfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right).$$

이다. 두 극한이 서로 다를 수도 있었지만(그렇다면 수열 전체는 진동할 것이다), 이 방정식의 근 가운데 1 이상인 것은 하나뿐이다.

수열 전체. $\varphi = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$라 쓰고 $\varepsilon > 0$이라 하자. 홀수 $n > K_1$이면 항상 $|u_n - \varphi| < \varepsilon$이 되는 K_1이 있고, 짝수 $n > K_2$이면 항상 같은 부등식이 성립하는 K_2가 있다. 그러면 모든 $n > \max(K_1, K_2)$에 대하여 $|u_n - \varphi| < \varepsilon$이므로 $u_n \to \varphi$이다.



홀수 번째 항(청록색)은 φ를 향해 올라가고, 짝수 번째 항(자주색)은 같은 값을 향해 내려온다.

$u_1 = 3$에서 시작하는 경우

결론은 달라지지 않는다. 이제 $u_1 = 3$, $u_2 = \frac{4}{3}$, $u_3 = \frac{7}{4}$, $u_4 = \frac{11}{7}$이다. 논증은 조금만 고치면 된다.

- 소문항 (i)은 $(*)$와 항들이 양수라는 사실만 썼고, 이 사실은 여전히 성립하므로 항등식도 여전히 참이다.

- 소문항 (ii)는 $n = 1$에서 성립하지 않지만, $1 \leq u_2 = \frac{4}{3} \leq 2$이고 귀납 단계는 그대로이므로 모든 $n \geq 2$에 대하여 $1 \leq u_n \leq 2$이다. 또 $u_1 = 3 \geq 1$이므로 모든 항은 적어도 1이다.
- 이번에는 $u_3 - u_1 = -\frac{5}{4} < 0$이고 $u_4 - u_2 = \frac{5}{21} > 0$이다. 따라서 홀수 번째 항은 감소하며 아래로 1에 의해 유계이고, 짝수 번째 항은 증가하며 위로 2에 의해 유계이다. 역할은 바뀌었지만 둘 다 여전히 수렴한다.
- 점화식 $u_{n+2} = (2u_n + 1)/(u_n + 1)$은 여전히 성립하고 두 극한 모두 적어도 1이므로, 둘 다 이번에도 φ이다.

따라서 수열은 여전히 $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$로 수렴한다.

검산

$u_1 = 1$이면 항은 $1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \ldots$로 연속한 피보나치 수(Fibonacci numbers)의 비이며, $u_{10} = \frac{89}{55} \approx 1.61818$은 이미 $\varphi \approx 1.61803$에 매우 가깝다. $u_1 = 3$이면 항은 $3, \frac{4}{3}, \frac{7}{4}, \frac{11}{7}, \frac{18}{11}, \ldots$ (뤼카 수(Lucas numbers)의 비)이고, 이 역시 1.61803에 다가간다. (i)의 항등식은 $n = 3$으로도 확인할 수 있다. $u_5 - u_3 = \frac{1}{10}$이고, $\dfrac{u_3 - u_1}{(1 + u_3)(1 + u_1)} = \dfrac{1/2}{5} = \frac{1}{10}$이다.

흔한 실수

- 수열 전체가 수렴한다고 가정하고 곧바로 $L = 1 + 1/L$을 푸는 것. 그렇게 해도 올바른 값이 나오지만, 그것은 수렴성이 증명된 다음에야 의미가 있으며, 바로 그 증명이 이 문제의 요점이다.
- 근 $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$를 잊는 것. 이 근은 반드시 배제해야 하며, 여기서는 $L \geq 1$로 배제한다.
- 감소하는 짝수 번째 부분수열(subsequence)에 어떻게 적용하는지(예를 들어 $-u_{2k}$를 통해) 밝히지 않고 정리를 적용하는 것.

STEP 너머

이 문제는 대학 1학년 해석학(analysis)의 전형적인 논증, 즉 단조 수렴 정리(monotone convergence theorem), 부분수열, 그리고 홀수 번째 부분수열과 짝수 번째 부분수열이 같은 극한으로 수렴하면 수열 전체도 그 극한으로 수렴한다는 사실을 보여 주는 본보기이다.

사실 u_n은 연분수(continued fraction) $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}$의 n번째 근사분수(convergent)이고, 사상 $x \mapsto 1+1/x$는 φ 근처에서 축소사상(contraction)이다. 그래서 어떤 양수에서 시작하든 φ에 이르게 된다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)는 단조수열과 부분수열을 꼼꼼하게 다루고, Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 연분수를 다룬다.

풀이

STEP II 2013, 문제 7

순수수학 • 펠 방정식의 해

STEP II 2013, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/13-s2-q7

핵심 아이디어

$x^2 - 2y^2 = 1$ 꼴의 방정식을 펠 방정식(Pell equation)이라 한다. 해를 하나만 찾으면, 고정된 선형 사상(linear map)을 적용하여 해를 무수히 많이 만들어 낼 수 있다. 소문항 (i)과 (ii)는 이 해들을 제곱수이기도 한 삼각수(triangular number)와 연결한다. 소문항 (iii)의 요령은 a^2을 이항한 뒤 $c^4 - a^2$을 두 제곱의 차로 인수분해(factorise)하는 것이다. b가 소수(prime)이므로 b^3을 두 인수의 곱으로 나누는 방법은 매우 적다. 그리고 소문항 (ii)는 마지막 부분에서 쓸 소수가 아닌 b를 제공한다.

풀이

소문항 (i)

$1^2 - 2 \cdot 0^2 = 1$이므로 자명한 해는 $x = 1, y = 0$이다.

이제 $p^2 - 2q^2 = 1$이라 하자. 그러면

$$\begin{aligned}(3p + 4q)^2 - 2(2p + 3q)^2 &= (9p^2 + 24pq + 16q^2) - 2(4p^2 + 12pq + 9q^2) \\ &= p^2 - 2q^2 = 1,\end{aligned}$$

이다. pq항이 소거되기 때문이다. 따라서 $x = 3p + 4q, y = 2p + 3q$ 역시 해이며, 이것이 보여야 할 내용이다.

이를 $(p, q) = (1, 0)$에 적용하면 $(3, 2)$를 얻고, $(3, 2)$에 다시 적용하면 $(3 \cdot 3 + 4 \cdot 2,\ 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2) = (17, 12)$를 얻는다. 검산: $9 - 8 = 1$이고 $289 - 288 = 1$이다. 따라서 x가 양의 홀수이고 y가 양의 짝수인 두 해는

$$(x, y) = (3, 2) \quad \text{그리고} \quad (x, y) = (17, 12).$$

이다. (실제로 $3p+4q \equiv p \pmod 2$이므로 이 사상은 x가 홀수임을 항상 유지하고, $2p+3q \equiv q \pmod 2$이므로 y가 한 번 짝수가 되면 계속 짝수로 유지한다. 따라서 이 사슬에서 이후에 나오는 모든 해도 올바른 홀짝성(parity)을 가진다: $(99,70)$, $(577,408)$ 등.)

소문항 (ii)

x가 홀수이고 y가 짝수라 하고, 정수 m, n에 대하여 $x=2m+1$, $y=2n$으로 쓰자. 그러면 $(*)$는

$$(2m+1)^2-2(2n)^2=1 \iff 4m^2+4m=8n^2 \iff n^2=\tfrac{1}{2}m(m+1),$$

이 된다. 마지막 단계에서는 8로 나누었다. 이것이 요구된 꼴이다. (모든 단계가 거꾸로도 성립하므로, 이러한 x와 y에 대하여 두 방정식은 동치이다.)

따라서 n^2은 삼각수 $1+2+\cdots+m$이다. 소문항 (i)에서 $(3,2)$는 $m=1$, $n=1$을 주고 (즉 $1=1$), $(17,12)$는 $m=8$, $n=6$을 준다 (즉 $36=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 9$). 이 중 두 번째를 소문항 (iii)에서 사용한다.

소문항 (iii)

식을 정리하고 두 제곱의 차로 인수분해하면

$$b^3=c^4-a^2=(c^2-a)(c^2+a).$$

이다. $b^3>0$이고 $c^2+a>0$이므로 인수 c^2-a도 양의 정수이다. 또한 $a>0$이므로 $c^2-a<c^2+a$이다.

? **생각해 보기** b^3을 두 양의 정수의 곱으로 나타내는 방법은 몇 가지인가?

b가 소수이므로 b^3의 양의 약수는 1, b, b^2, b^3뿐이다. 따라서 b^3을 작은 인수와 큰 인수의 곱으로 분해하는 방법은 $1\times b^3$과 $b\times b^2$뿐이다. 다른 방법은 없으며, b^3은 완전제곱수(perfect square)가 아니므로 두 인수가 같을 수도 없다.

경우 1: $c^2-a=1$이고 $c^2+a=b^3$. 두 식을 더하고 빼면

$$c^2=\tfrac{1}{2}(b^3+1), \qquad a=\tfrac{1}{2}(b^3-1).$$

경우 2: $c^2-a=b$이고 $c^2+a=b^2$. 두 식을 더하고 빼면

$$c^2=\tfrac{1}{2}b(b+1), \qquad a=\tfrac{1}{2}b(b-1).$$

(문제는 이 공식들만 묻지만, 실제로 어느 경우가 일어나는지 알아 둘 가치가 있다. 경우 2는 결코 일어나지 않는다. $b=2$이면 $c^2=3$이어야 한다. b가 홀수인 소수이면

$1 \leq \frac{1}{2}(b+1) < b$이므로 b와 $\frac{1}{2}(b+1)$은 서로소(coprime)이고, 그 곱이 제곱수 c^2이므로 각각이 제곱수여야 한다. 그런데 소수는 결코 제곱수가 아니다. 경우 1은 실제로 일어난다: $b = 23$이면 $\frac{1}{2}(23^3+1) = 6084 = 78^2$이므로 $a = 6083$, $b = 23$, $c = 78$은 해이다.)

마지막 부분

경우 2는 소수에 대해서는 성립하지 않지만, b가 소수라는 조건을 없애면 그 공식들은 여전히 해를 준다. $\frac{1}{2}b(b+1)$이 완전제곱수 c^2일 때마다 $a = \frac{1}{2}b(b-1)$로 두자. 그러면 $2c^2 = b(b+1)$을 이용하여

$$a^2 + b^3 = (c^2 - b)^2 + b^3 = c^4 - 2bc^2 + b^2 + b^3 = c^4 - b^2(b+1) + b^2 + b^3 = c^4,$$

을 얻는다. 소문항 (ii)는 $\frac{1}{2}b(b+1)$이 정확히 언제 제곱수인지 알려 준다: $n^2 = \frac{1}{2}m(m+1)$인 $b = m$일 때이다. 해 $m = 1$은 $a = 0$을 주므로 허용되지 않지만, $m = 8$, $n = 6$은 성립한다. $b = 8$, $c = 6$, $a = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 7 = 28$로 두면

$$28^2 + 8^3 = 784 + 512 = 1296 = 6^4.$$

이다. 따라서 $a = 28$, $b = 8$, $c = 6$은 $b = 2^3$이 소수가 아닌 해이다.

검산

- 사슬의 다음 해 $(99, 70)$은 $9801 - 2 \cdot 4900 = 1$을 만족하고, $m = 49$, $n = 35$를 주며 $\frac{1}{2} \cdot 49 \cdot 50 = 1225 = 35^2$이다.
- $6^4 = 1296$이고 $28^2 + 8^3 = 784 + 512 = 1296$이다.
- 모든 $c < 400$에 대하여 컴퓨터로 탐색한 결과, b가 소수인 해는 $a = 6083$, $b = 23$, $c = 78$뿐이었다. 이것은 경우 1의 해이다: $78^4 - 6083^2 = (78^2 - 6083)(78^2 + 6083) = 1 \times 12167 = 23^3$.

흔한 실수

- $c^2 - a$가 **작은** 인수여야 한다는 것을 잊어서, a가 음수인 불필요한 "경우"가 생긴다.
- 인수분해 $1 \times b^3$을 놓치고 $b \times b^2$인 경우만 찾거나, 그 반대로 한다.
- 마지막 부분에서 $(3, 2)$로부터 얻은 $m = 1$을 사용하여 $a = 0$을 얻는다. 문제는 a가 양수일 것을 요구한다.

STEP 너머

방정식 $x^2 - 2y^2 = 1$은 펠 방정식이다. 그 해는 정확히 거듭제곱 $(3+2\sqrt{2})^k = x + y\sqrt{2}$들이며, 소문항 (i)의 사상은 단순히 $3+2\sqrt{2}$를 곱하는 것이다. 이것은 $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$와 같은 환에서의 단원(unit) 이론과 연분수(continued fraction) 이론의 출발점이다. $a^2 + b^3 = c^4$과 같은 방정식은 일반화된 페르마 방정식(generalised Fermat equation) 연구에 속한다. 이 모든 것에 대한 아름다운 입문서로 Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)을 읽어 보라.

풀이

STEP II 2013, 문제 8

순수수학 • 미적분과 부등식

STEP II 2013, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/13-s2-q8

핵심 아이디어

f가 감소함수(decreasing function)이므로 이 영역은 오른쪽으로 갈수록 낮아지기만 하는 "계단" 모양이다. 따라서 가장 좋은 직사각형은 왼쪽 아래 구석, 즉 직선 $y = \mathrm{f}(t)$ 위에 놓이고 y축에 붙어 있으며 오른쪽 위 꼭짓점이 곡선 위에 있는 것이다. 이로써 소문항 (i)은 일변수 함수를 최대화하는 문제로 바뀐다. 소문항 (ii)는 두 넓이, 즉 영역 전체의 넓이와 그 안에 놓인 직사각형의 넓이를 비교하고, 소문항 (iii)은 $\mathrm{f}(x) = 1/(1+x)$에 대하여 모든 것을 구체적으로 계산할 뿐이다.

풀이

소문항 (i)

영역은 $\{(x, y) : 0 \le x \le t,\ \mathrm{f}(t) \le y \le \mathrm{f}(x)\}$이다. f가 감소하므로 $x < t$에서 곡선은 직선 $y = \mathrm{f}(t)$보다 위에 있다.

영역 안에 놓인 임의의 직사각형 $[a, b] \times [c, d]$를 생각하자. 아랫변은 $c \ge \mathrm{f}(t)$, 왼쪽 변은 $a \ge 0$을 만족해야 하고, 오른쪽 위 꼭짓점 (b, d)는 영역 안에 있어야 하므로 $b \le t$이고 $d \le \mathrm{f}(b)$이다. 따라서 그 넓이는 많아야

$$b\big(\mathrm{f}(b) - \mathrm{f}(t)\big),$$

이고, 이 값은 직사각형 $[0, b] \times [\mathrm{f}(t), \mathrm{f}(b)]$로 실제로 얻어진다. 이 직사각형은 영역 안에 들어간다. $0 \le x \le b$에서 $\mathrm{f}(x) \ge \mathrm{f}(b)$이므로 직사각형이 곡선 아래에 놓이기 때문이다. 그러므로

$$A_0(t) = \max_{0 \le x \le t} R(x), \qquad R(x) = x\big(\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(t)\big).$$

이제 $R(0) = R(t) = 0$이고 $0 < x < t$에서 $R(x) > 0$이므로, $t > 0$이면 최댓값은 내부의 점 $x_0 \in (0, t)$에서 얻어지고, 그 점에서 $R'(x_0) = 0$이다.

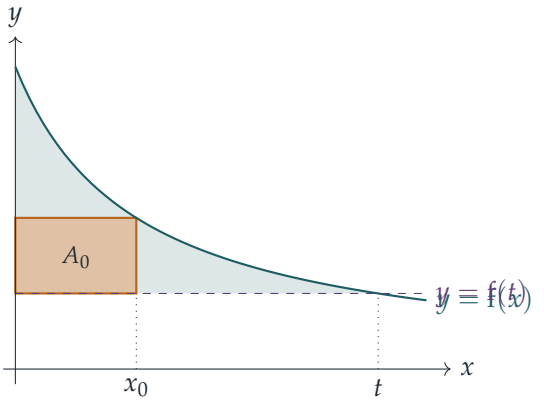
$$R'(x) = \mathrm{f}(x) + x\mathrm{f}'(x) - \mathrm{f}(t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0\mathrm{f}'(x_0) + \mathrm{f}(x_0) = \mathrm{f}(t).$$

따라서 요구한 대로, 이 조건을 만족하는 x_0에 대하여 $A_0(t) = x_0\big(\mathrm{f}(x_0) - \mathrm{f}(t)\big)$이다. ($t = 0$이면 영역의 폭이 없으므로 $A_0(0) = 0$이고, $x_0 = 0$이 조건을 자명하게 만족한다.)

소문항 (ii)

$t\,\mathrm{g}(t) = \displaystyle\int_0^t \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$라 하자. 양변을 미분하되, 왼쪽에는 곱의 미분법(product rule)을, 오른쪽에는 미적분학의 기본정리(fundamental theorem of calculus)를 쓰면

$$\mathrm{g}(t) + t\,\mathrm{g}'(t) = \mathrm{f}(t) \quad \Longrightarrow \quad t\,\mathrm{g}'(t) = \mathrm{f}(t) - \mathrm{g}(t).$$



적분 $\int_0^t \big(\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(t)\big)\,\mathrm{d}x$는 정확히 색칠한 영역, 즉 $0 \le x \le t$에서 곡선과 직선 $y = \mathrm{f}(t)$ 사이 영역의 넓이이다. 소문항 (i)의 최적 직사각형은 이 영역 안에 놓이지만 영역을 다 채우지는 못한다. $x_0 < x < t$에서 직사각형은 아무것도 차지하지 않지만, f가 순감소하므로 그곳에서 영역의 높이는 $\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(t) > 0$이다. 따라서 그 가느다란 조각의 넓이는 양수이고,

$$\int_0^t \big(\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(t)\big)\,\mathrm{d}x > A_0(t).$$

? **생각해 보기** 좌변을 g′이 들어간 식으로 어떻게 바꿀 수 있을까?

적분을 나누고 g의 정의를 쓴 다음, 방금 증명한 결과를 쓰면

$$\begin{aligned}\int_0^t \big(\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(t)\big)\,\mathrm{d}x &= t\,\mathrm{g}(t) - t\,\mathrm{f}(t)\\ &= -t\big(\mathrm{f}(t) - \mathrm{g}(t)\big)\\ &= -t\cdot t\,\mathrm{g}'(t) = -t^2\mathrm{g}'(t).\end{aligned}$$

따라서 $-t^2 g'(t) > A_0(t)$이다.

소문항 (iii)

여기서 $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$는 $x \geq 0$에서 양수이고 순감소하므로, 위의 모든 내용이 적용된다.

좌변. 소문항 (ii) 끝의 계산으로부터

$$-t^2 g'(t) = \int_0^t \frac{dx}{1+x} - \frac{t}{1+t} = \ln(1+t) - \frac{t}{1+t}.$$

직사각형. $f'(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$이므로

$$xf'(x) + f(x) = \frac{-x + (1+x)}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2},$$

따라서 x_0에 대한 조건은 $(1+x_0)^2 = 1+t$이다. $s = \sqrt{1+t}$라 하면 $s > 1$이고 $x_0 = s-1$이다(양의 근이며, $0 < x_0 < t$임에 주목하자). 그러면 $1+t = s^2$이고

$$A_0(t) = (s-1)\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}\right) = \frac{(s-1)^2}{s^2} = \left(1 - \frac{1}{s}\right)^2.$$

생각해 보기 양변이 복잡해 보인다. 자연스러운 변수는 무엇일까?

s로 나타내면 모든 것이 깔끔해진다. $\ln(1+t) = 2\ln s$이고 $\dfrac{t}{1+t} = 1 - \dfrac{1}{s^2}$이므로, $-t^2 g'(t) > A_0(t)$는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} 2\ln s - 1 + \frac{1}{s^2} &> 1 - \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} \\ \iff \quad 2\ln s &> 2 - \frac{2}{s} \\ \iff \quad \ln s &> 1 - \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

$s = \sqrt{1+t}$이고 $\ln s = \ln\sqrt{1+t}$이므로 이는

$$\ln\sqrt{1+t} > 1 - \frac{1}{\sqrt{1+t}} \qquad (t > 0),$$

이고, 이것이 증명하려던 것이다.

검산

- $t = 3$이면 $s = 2$, $x_0 = 1$, $A_0 = \frac{1}{4}$이고, 영역의 넓이는 $\ln 4 - \frac{3}{4} \approx 0.636 > 0.25$이다. 최종 부등식은 $\ln 2 \approx 0.693 > 0.5$가 된다.

- 여러 t 값에 대하여 직사각형 $x\big(\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}(t)\big)$를 컴퓨터로 직접 탐색하여, 최댓값이 $(1-1/\sqrt{1+t})^2$이고 $x=\sqrt{1+t}-1$에서 얻어짐을 확인하였다.
- $t\to 0^+$일 때 최종 부등식의 양변은 모두 0으로 간다. 전개하면 $\ln s \approx (s-1)-\frac{1}{2}(s-1)^2$이고 $1-\frac{1}{s}\approx (s-1)-(s-1)^2$이므로, 마땅히 그래야 하듯 좌변이 약 $\frac{1}{2}(s-1)^2$만큼 더 크다.

흔한 실수

- 최적 직사각형의 꼭짓점이 곡선 위에 있다고 설명 없이 가정하는 것. 소문항 (i)에서처럼 감소한다는 성질이 필요하다.
- 넓이 부등식이 왜 순부등식인지 말하지 않는 것. 직사각형은 영역 중 $x_0<x<t$인 부분을 덮지 못한다.
- 음의 근 $1+x_0=-\sqrt{1+t}$를 택하는 것. 이 경우 $x_0<0$이 된다.

STEP 너머

최종 부등식 $s>1$일 때 $\ln s > 1-1/s$는 고전적인 부등식 $1-\frac{1}{s}<\ln s<s-1$의 절반으로, 보통은 $\int_1^s \mathrm{d}u/u$를 직사각형과 비교하여 얻는다. 이 문제는 더 영리한 기하적 경로로 그 결과에 도달한다. 적분을 직사각형의 넓이와 비교하는 것은 리만 적분(Riemann integral)의 핵심이며, 대학 1학년 해석학(analysis) 강의에서는 이를 상합과 하합(upper and lower sums)으로부터 신중하게 구성한다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 이를 매우 읽기 쉽게 설명한다.

풀이

STEP II 2013, 문제 9

역학 • 평형 상태의 마찰

STEP II 2013, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/13-s2-q9

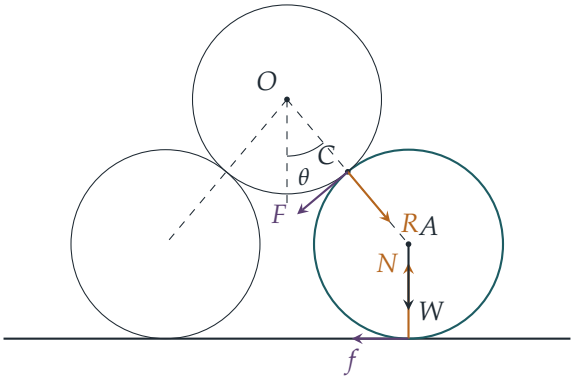
핵심 아이디어

대칭성(symmetry)이 일의 대부분을 해 준다. 세 원판을 하나의 계로 보면 지면의 반작용을 곧바로 얻는다. 그다음 아래 원판의 중심에 대한 모멘트(moment)를 구한다. 지면에서의 마찰력과 위 원판에서 오는 마찰력은 모두 접선 방향으로 작용하므로 팔의 길이(lever arm), 곧 반지름이 같고, 따라서 크기가 같아야 한다. 이것을 알고 나면 아래 원판과 위 원판에 작용하는 힘을 분해하여 두 미지수에 대한 두 방정식을 얻는다.

풀이

원판들을 반지름이 r이고 무게가 각각 W인 똑같은 균일한 강체(rigid body) 원판으로 모형화하고, 모두 하나의 연직 평면 위에 있다고 하자. 위 원판의 중심을 O, 오른쪽 아래 원판의 중심을 A라 하면 $OA = 2r$이고, OA는 아래 방향의 연직선과 각 θ를 이룬다. 두 원판의 접점 C는 OA의 중점이다.

좌우 대칭에 의해 왼쪽 아래 원판에 작용하는 힘은 오른쪽 원판에 작용하는 힘과 거울상이므로, 오른쪽 원판만 다루면 된다. 점 C에서 오른쪽 원판은 OA 방향으로 (O에서 멀어지는 쪽으로 미는) 수직항력(normal reaction) R과 공통접선 방향의 마찰력(friction force) F를 받는다. 지면에서는 수직항력 N과 마찰력 f를 받는다.



그림은 오른쪽 아래 원판에 작용하는 힘을 나타낸다. 뉴턴(Newton)의 제3법칙(third law)에 의해 위 원판은 C에서 R과 F를 반대 방향으로 받으므로, 마찰력은 위 원판을 접선을 따라 위쪽과 바깥쪽으로 민다.

소문항 (i)

세 원판을 함께 하나의 계로 보자. 원판 사이의 힘은 내력이므로 서로 상쇄되고, 외력은 세 무게와 지면에서 오는 힘뿐이다. 두 지면 반작용은 대칭에 의해 같고 지면에서의 마찰력은 수평이므로, 연직 방향으로 분해하면

$$2N = 3W \quad \Longrightarrow \quad N = \tfrac{3}{2}W,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

소문항 (ii)

> ? **생각해 보기** 아래 원판에는 미지수가 R, F, f의 세 개인 것처럼 보인다. 세 번째 방정식은 어디에서 오는가?

모멘트에서 온다. 오른쪽 아래 원판에 대하여 A에 대한 모멘트를 구하자. 무게 W, 수직항력 N, 수직항력 R은 모두 A를 지나므로 모멘트가 없다. 마찰력 f는 가장 낮은 점에서의 접선을 따라, F는 C에서의 접선을 따라 작용하므로 각각의 팔의 길이는 r이다. 두 힘은 원판을 서로 반대 방향으로 돌려야 하므로

$$fr = Fr \quad \Longrightarrow \quad f = F.$$

(이로써 그림 속 방향도 정해진다. 원판은 바깥쪽으로 밀리므로 f는 안쪽을 향하고, 그러면 아래 원판에 작용하는 F는 그 모멘트를 상쇄하기 위해 접선을 따라 아래쪽과 안쪽을 향해야 한다.)

O에서 A로 향하는 단위벡터는 $(\sin\theta, -\cos\theta)$이고, 아래 원판에 작용하는 F의 접선 방향은 $(-\cos\theta, -\sin\theta)$이다. 아래 원판에 대하여 수평 방향으로 분해하면

$$R\sin\theta - F\cos\theta - f = 0 \quad \Longrightarrow \quad R\sin\theta = F(1+\cos\theta),$$

이다. 여기서 $f = F$를 이용하였다.

위 원판에서는 두 접점이 각각 $R\cos\theta + F\sin\theta$로 같은 위쪽 성분을 준다. 연직 방향으로 분해하면

$$2(R\cos\theta + F\sin\theta) = W.$$

$F = \dfrac{R\sin\theta}{1+\cos\theta}$를 대입하면

$$W = 2R\left(\cos\theta + \frac{\sin^2\theta}{1+\cos\theta}\right) = 2R\cdot\frac{\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}{1+\cos\theta} = 2R\cdot\frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta} = 2R.$$

따라서 맞닿은 두 원판 사이의 수직항력은

$$R = \tfrac{1}{2}W,$$

이고 이는 θ에 의존하지 않는다. 그러면

$$F = \frac{R\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{W\sin\theta}{2(1+\cos\theta)},$$

이고, 이것이 구하는 마찰력이다.

일관성을 확인하기 위해 아래 원판에 대하여 연직 방향으로 분해하면 $N = W + R\cos\theta + F\sin\theta = W + \frac{1}{2}W = \frac{3}{2}W$이고, 이는 소문항 (i)과 일치한다.

소문항 (iii)

반각 공식(half-angle formulae) $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$와 $1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$를 이용하면

$$\frac{F}{R} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \tan\tfrac{\theta}{2}.$$

평형(equilibrium)이 되려면 모든 접점에서 마찰력이 한계값(limiting value)을 넘지 않아야 한다. 원판 사이에서 이는 $F \le \mu R$, 즉

$$\tan\tfrac{\theta}{2} \le \mu.$$

를 뜻한다. (지면에서는 $f \le \mu N$, 즉 $\frac{1}{2}W\tan\frac{\theta}{2} \le \frac{3}{2}\mu W$이어야 한다. 이 조건이 더 약하므로, 중요한 것은 원판 사이의 접촉이다.)

생각해 보기 θ를 원하는 만큼 작게 하여 $\tan\frac{\theta}{2}$를 아주 작게 만드는 것을 막는 것은 무엇인가?

아래 원판들은 서로 닿지 않는다. 두 원판의 중심 사이 거리는 $2\cdot 2r\sin\theta = 4r\sin\theta$이고, 이 값이 $2r$보다 커야 하므로 $\sin\theta > \frac{1}{2}$이다. $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이므로 이는 $\theta > \frac{\pi}{6}$, 따라서 $\frac{\theta}{2} > \frac{\pi}{12}$를 뜻한다. tan는 $(0, \frac{\pi}{2})$에서 증가하므로

$$\tan\tfrac{\theta}{2} > \tan\tfrac{\pi}{12} = \tan(45^\circ - 30^\circ) = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2} = 2-\sqrt{3}.$$

따라서 평형이 되려면 $\mu \geq \tan\frac{\theta}{2} > 2-\sqrt{3}$이어야 한다. $\mu < 2-\sqrt{3}$이면 허용되는 어떤 θ 값도 이 조건을 만족하지 않으므로 평형은 불가능하다.

검산

- $\theta \to 0$일 때 위 원판은 다른 원판들 바로 위에 놓이고 $F \to 0$이다. 예상대로 마찰력이 필요 없다.
- $\theta = 1$ 라디안과 같은 임의의 표본 각에 대하여 $R = \frac{1}{2}W$, $F = f = \frac{1}{2}W\tan\frac{1}{2}$, $N = \frac{3}{2}W$를 대입하면 각 원판에서 두 힘 성분과 모멘트가 모두 평형을 이룬다.
- $2-\sqrt{3} \approx 0.2679$이고, 이는 $\tan 15^\circ \approx 0.2679$와 일치한다. 30°보다 약간 큰 θ에 대해 수치적으로 훑어보면 $\mu = 0.2679$일 때는 평형이 불가능하고 $\mu = 0.268$일 때는 가능함을 확인할 수 있다.

흔한 실수

- 원판 사이의 마찰력을 0으로 가정하거나 아예 잊어버리는 것. 그러면 아래 원판의 모멘트 방정식에서 $f = 0$이 되어, 아래 원판들이 미끄러져 벌어지는 것을 막을 것이 아무것도 없게 된다.
- 아래 원판들이 서로 닿지 않는다는 조건을 놓치는 것. 이 조건이 θ의 하한을 주는 유일한 조건이며, 따라서 $2-\sqrt{3}$이 나오는 곳이다.
- F의 방향을 잘못 잡는 것. 추측하지 말고 A에 대한 모멘트 방정식을 이용하여 방향을 정하라.

STEP 너머

이 문제가 정역학적으로 결정되는(statically determinate) 것은 오로지 대칭성과 모멘트 방정식 덕분이다. 거친 물체들이 쌓여 있는 많은 경우에는 평형 조건만으로 마찰력을 구할 수 없으며, 공학자들은 물체가 어떻게 변형되는지를 모형화해야 한다. 깔끔한 결과 $F/R = \tan\frac{\theta}{2}$는 마찰각(friction angle)이라는 개념의 한 예이다. 평형은 전체 접촉력이 법선으로부터 $\arctan\mu$의 각 이내에 놓일 때, 그리고 오직 그때에만 가능하다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 대학 1학년 수준에서 마찰과 강체 정역학을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP II 2013, 문제 10

역학 • 포물체 운동

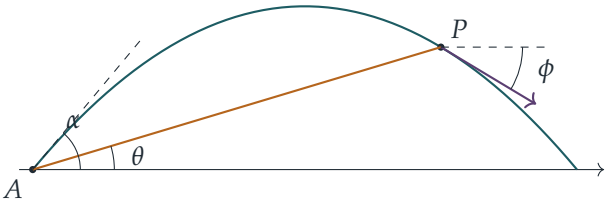
STEP II 2013, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/13-s2-q10

핵심 아이디어

시각 t에서의 위치와 속도(velocity)를 적어 보면 $\tan\theta$와 $\tan\phi$가 모두 t에 대한 일차식(*linear*)이라는 것을 알 수 있다. 그러면 (i)의 항등식(identity)이 곧바로 나오고, 이 항등식 덕분에 B와 C에 대한 조건이 모두 각의 탄젠트에 대한 명제로 바뀐다. 두 각은 시간이 지남에 따라 꾸준히 감소하므로 "어느 쪽이 먼저인가"는 두 수의 비교일 뿐이며, (i)을 이용하면 이 비교를 한 점 B에서만 하면 된다.



일반적인 점 P에서 θ는 A에서 바라본 P의 앙각(angle of elevation)이고, ϕ는 속도가 수평선과 이루는 각이다(그림에서는 입자가 떨어지고 있으므로 음수이다).

풀이

입자는 공기 저항(air resistance) 없이 중력 g만 받으며 자유롭게 운동한다고 모형화한다. 시각 $t = 0$에 속력 u로 던져졌다고 하고, $0 < \alpha < 90°$라 하자. A를 원점으로 잡으면 시각 t에서

$$x = ut\cos\alpha, \qquad y = ut\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2, \qquad \dot{x} = u\cos\alpha, \qquad \dot{y} = u\sin\alpha - gt.$$

입자는 다시 $y = 0$이 될 때, 즉 $t = 2u\sin\alpha/g$에 착지한다.

소문항 (i)

$t > 0$일 때 A에서 바라본 입자의 앙각은

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{ut\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2}{ut\cos\alpha} = \tan\alpha - \frac{gt}{2u\cos\alpha},$$

를 만족하고, 운동 방향은

$$\tan\phi = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{u\sin\alpha - gt}{u\cos\alpha} = \tan\alpha - \frac{gt}{u\cos\alpha}.$$

를 만족한다. 첫 번째 식을 두 배 하고 두 번째 식을 이용하면

$$2\tan\theta = 2\tan\alpha - \frac{gt}{u\cos\alpha} = \tan\alpha + \left(\tan\alpha - \frac{gt}{u\cos\alpha}\right) = \tan\alpha + \tan\phi,$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

나중에 쓸 내용을 적어 두면 좋다. $k = \dfrac{g}{u\cos\alpha} > 0$이라 두면

$$\tan\theta = \tan\alpha - \tfrac{1}{2}kt, \qquad \tan\phi = \tan\alpha - kt, \tag{$*$}$$

이므로 시간이 지남에 따라 $\tan\theta$와 $\tan\phi$는 모두 순감소한다. 비행하는 동안 θ는 α에서 0까지, ϕ는 α에서 $-\alpha$까지 감소하므로 $\theta = \frac{1}{2}\alpha$와 $\phi = -\frac{1}{2}\alpha$는 각각 정확히 한 번씩 일어난다. 따라서 B와 C는 잘 정의된다.

소문항 (ii)

$T = \tan\frac{1}{2}\alpha$라 하자. $0 < \frac{1}{2}\alpha < 45^\circ$이므로 $0 < T < 1$이다. B에서는 $\tan\theta = T$이다. C에서는 $\tan\phi = \tan(-\frac{1}{2}\alpha) = -T$이다. B와 C가 같은 점이면 그 점에서 두 식이 모두 성립하므로 (i)에 의해

$$2T = \tan\alpha - T, \qquad \text{즉} \qquad \tan\alpha = 3T.$$

배각 공식(double-angle formula)에 의해 $\tan\alpha = \dfrac{2T}{1-T^2}$이므로

$$\frac{2T}{1-T^2} = 3T \implies 2 = 3(1-T^2) \implies T^2 = \tfrac{1}{3},$$

이다. 여기서 T로 나누었는데, $T > 0$이므로 이는 허용된다. 양의 근을 택하면 $\tan\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$이므로 $\frac{1}{2}\alpha = 30^\circ$이고

$$\alpha = 60^\circ.$$

소문항 (iii)

> **생각해 보기** 두 시각을 직접 계산하지 않고 어느 점에 먼저 도달하는지 어떻게 알 수 있을까?

$(*)$에 의해 ϕ는 비행하는 내내 감소한다. 따라서 C가 B보다 **나중에** 오는 것은 입자가 B에 있는 순간 ϕ가 아직 $-\frac{1}{2}\alpha$까지 떨어지지 않았을 때, 즉 B에서의 운동 방향을 ϕ_B라 할 때 $\tan\phi_B > -T$일 때와 정확히 같다.

B에서 소문항 (i)에 의해 $\tan\phi_B = 2\tan\theta - \tan\alpha = 2T - \tan\alpha$이다. 따라서

$$B\text{에 먼저 도달한다} \iff 2T - \tan\alpha > -T \iff \tan\alpha < 3T.$$

다시 $\tan\alpha = \dfrac{2T}{1-T^2}$를 이용하고, $T > 0$으로 나누고 $1 - T^2 > 0$을 곱하면(부등호의 방향은 그대로이다)

$$\frac{2T}{1-T^2} < 3T \iff 2 < 3 - 3T^2 \iff T^2 < \tfrac{1}{3} \iff \tfrac{1}{2}\alpha < 30^\circ,$$

이다. 마지막 단계는 tan가 $(0^\circ, 45^\circ)$에서 증가하기 때문이다. 모든 단계가 역으로도 성립하므로

$$\alpha < 60^\circ \iff C\text{보다 } B\text{에 먼저 도달한다.}$$

따라서 $\alpha < 60^\circ$이면 입자는 B에 먼저 도달한다.

시각을 직접 구하고 싶다면 $(*)$로부터 $kt_B = 2(\tan\alpha - T)$, $kt_C = \tan\alpha + T$이고, $t_B < t_C$는 역시 $\tan\alpha < 3T$와 동치이다.

검산

- $t = 0$에서 $(*)$의 두 식은 모두 $\tan\alpha$가 되는데, 이는 당연하다. 발사 직후 입자는 발사선을 따라 움직이기 때문이다. 착지할 때는 $kt = 2\tan\alpha$이므로 $\tan\theta = 0$, $\tan\phi = -\tan\alpha$가 되어, 익숙한 궤적의 대칭성이 나타난다.
- $\alpha = 60^\circ$일 때 $\tan\alpha = \sqrt{3} = 3\tan 30^\circ$이므로 (ii)와 일치한다.
- $u = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $\alpha = 45^\circ$일 때 공식에서 $t_B \approx 0.845\,\mathrm{s}$, $t_C \approx 1.020\,\mathrm{s}$를 얻으므로 B가 먼저이다. 컴퓨터로 운동을 수치적으로 한 단계씩 계산해 보아도 같은 시각이 나오며, $\alpha = 61^\circ, 75^\circ, 85^\circ$에서는 C가 먼저라는 것도 확인된다.

흔한 실수

- θ(A**에서 본** 입자의 방향)를 ϕ(입자의 **속도**의 방향)인 것처럼 다루는 것. 두 각은 발사하는 순간에만 같다.

- C에서 부호를 틀리는 것. 그곳에서는 $\tan\phi = -\tan\frac{1}{2}\alpha$이지 $+\tan\frac{1}{2}\alpha$가 아니다.
- (iii)에서 "$\tan\phi_B > -T$"가 왜 B가 먼저라는 뜻인지 설명하지 않고 답만 주장하는 것. 이를 정당화하는 것은 ϕ의 단조감소(monotonic decrease)이다.

STEP 너머

(i)의 항등식은 A에서 포물선(parabola) 위의 임의의 점까지 그은 현(chord)의 기울기가 양 끝점에서의 접선의 기울기의 평균과 같다는 뜻이며, 이는 이차함수의 특별한 성질이다(평균값 정리(mean value theorem)에서 그 점이 정확히 중점으로 정해지는 경우이다). 대학 1학년 역학 강의에서는 경사면(inclined plane) 위의 포물체(projectile) 운동을 공부할 때 같은 아이디어를 만나게 되는데, 그때 발사점에서 그은 직선의 각이 여기서의 θ와 정확히 같은 역할을 한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 포물체 문제를 이처럼 꼼꼼하게 다루는 모습을 보기에 좋은 책이다.

풀이

STEP II 2013, 문제 11

역학 • 연속 충돌

STEP II 2013, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

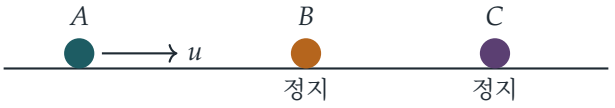
step.maths.org/questions/13-s2-q11

핵심 아이디어

이 문제의 모든 충돌(collision)은 질량이 같은 두 입자 사이에서 일어나므로, 각각은 똑같은 작은 계산이다. 즉 운동량 보존(conservation of momentum)과 뉴턴의 반발 법칙(Newton's law of restitution)이다. 일반적인 경우를 한 번 계산해 두고 그것을 다시 사용하면 된다. 다음 충돌이 일어나는지는 결국 뒤에 있는 입자가 앞에 있는 입자보다 빠르게 움직이는지의 문제이므로, 문제 전체가 속도를 비교하는 일로 귀결된다.

풀이

입자들을 매끄러운 면 위에 놓인 질량 m의 동일한 입자로 모형화한다. 그러면 충돌과 충돌 사이에는 수평 방향의 힘이 작용하지 않으므로 각 입자는 등속도로 움직인다. 직선을 따라 순서대로 입자를 A, B, C라 하고, A를 B와 C 쪽으로 쏘아 보낸 입자로 둔다. A의 처음 운동 방향을 양의 방향으로 잡는다.



일반적인 충돌

속도가 p인 입자가 자기 앞에서 속도 $q < p$로 움직이는 동일한 입자를 따라잡아 충돌하고, 충돌 후 두 입자의 속도가 각각 p'과 q'이 된다고 하자. 운동량 보존(m을 약분한다)과 반발 법칙에 의해

$$p' + q' = p + q, \qquad q' - p' = e(p - q).$$

두 식을 더하고 빼면

$$p' = \tfrac{1}{2}\big[(p+q) - e(p-q)\big], \qquad q' = \tfrac{1}{2}\big[(p+q) + e(p-q)\big]. \qquad (*)$$

$e > 0$이고 $p > q$이므로 항상 $q' > p'$이다. 즉 충돌 후에는 앞의 입자가 뒤의 입자보다 빠르게 움직이므로, 다른 무언가가 둘 중 하나의 속도를 바꾸지 않는 한 그 두 입자는 다시 만날 수 없다.

소문항 (i)

첫 번째 충돌 (A가 B와 충돌): $(*)$에 $p = u, q = 0$을 대입하면

$$v_A = \tfrac{1}{2}u(1-e), \qquad v_B = \tfrac{1}{2}u(1+e).$$

이제 $v_B > v_A$이므로 A는 B를 따라잡을 수 없다. 그러나 B는 정지해 있는 C를 향해 움직이므로, 두 번째 충돌은 B와 C 사이에서 일어난다.

두 번째 충돌 (B가 C와 충돌): $p = \tfrac{1}{2}u(1+e), q = 0$을 대입하면

$$v_B = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}u(1+e)(1-e) = \tfrac{1}{4}u(1-e^2), \qquad v_C = \tfrac{1}{4}u(1+e)^2.$$

A는 아무 영향도 받지 않았으므로 여전히 $v_A = \tfrac{1}{2}u(1-e)$이다. ($0 < e < 1$이므로) 세 속도가 모두 양수이고, 따라서 속력은 요구한 대로 $\tfrac{1}{2}u(1-e)$, $\tfrac{1}{4}u(1-e^2)$, $\tfrac{1}{4}u(1+e)^2$이다.

세 번째 충돌. ($(*)$에 의해) C가 B보다 빠르므로 B와 C는 멀어진다. 다음으로 가능한 충돌은 A가 B를 따라잡는 것뿐이며, 이는 정확히 $v_A > v_B$일 때 일어난다.

$$v_A - v_B = \tfrac{1}{4}u(1-e)\big[2-(1+e)\big] = \tfrac{1}{4}u(1-e)^2 > 0,$$

$e \neq 1$이기 때문이다. 따라서 A는 B 뒤에서 B보다 빠르게 움직이므로, $0 < e < 1$인 모든 e에 대하여 세 번째 충돌(A와 B)이 일어난다.

소문항 (ii)

세 번째 충돌 (A가 B와 충돌): 이때 $p = \tfrac{1}{2}u(1-e)$이고 $q = \tfrac{1}{4}u(1-e^2)$이므로

$$p+q = \tfrac{1}{4}u(1-e)\big[2+(1+e)\big] = \tfrac{1}{4}u(1-e)(3+e), \qquad p-q = \tfrac{1}{4}u(1-e)^2.$$

$(*)$에 의해 B의 새로운 속도는

$$\begin{aligned} v_B &= \tfrac{1}{2}\Big[\tfrac{1}{4}u(1-e)(3+e) + \tfrac{1}{4}eu(1-e)^2\Big] \\ &= \tfrac{1}{8}u(1-e)\big[3+e+e-e^2\big] \\ &= \tfrac{1}{8}u(1-e)(3+2e-e^2) = \tfrac{1}{8}u(1-e)(1+e)(3-e), \end{aligned}$$

이고, (완전성을 위해 덧붙이면) $v_A = \tfrac{1}{8}u(1-e)\big[3+e-e(1-e)\big] = \tfrac{1}{8}u(1-e)(3+e^2)$이며, 이는 v_B보다 작다.

생각해 보기 세 번째 충돌 후에 다시 충돌할 가능성이 있는 쌍은 어느 것인가?

A와 B는 방금 충돌했으므로 $(*)$에 의해 B가 A보다 빠르고, 두 입자는 멀어지고 있다. C는 여전히 $\frac{1}{4}u(1+e)^2$로 움직이고 있으며, C 너머에는 아무것도 없다. 따라서 네 번째 충돌은 B가 C를 따라잡을 때, 그리고 그때에만 일어난다. 즉 $v_B > v_C$일 필요충분조건이다. $\frac{1}{8}u(1+e) > 0$으로 나누면

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{8}u(1-e)(1+e)(3-e) > \tfrac{1}{4}u(1+e)^2 &\iff (1-e)(3-e) > 2(1+e)\\ &\iff e^2 - 6e + 1 > 0.\end{aligned}$$

이차식 e^2-6e+1의 근은 $e = 3 \pm 2\sqrt{2}$이고, 두 근의 바깥에서 양수이다. 큰 근 $3+2\sqrt{2}$는 1보다 크고, $3-2\sqrt{2} \approx 0.172$는 $(0,1)$에 속한다. 따라서 $0 < e < 1$일 때

$$\text{네 번째 충돌이 일어난다} \iff e < 3-2\sqrt{2}.$$

정확히 $e = 3-2\sqrt{2}$이면 B와 C가 같은 속도로 움직여 결코 만나지 않으므로, 부등호는 등호를 포함하지 않는다.

검산

- 운동량: 두 번째 충돌 후 운동량의 합은 $\frac{1}{4}u\left[2(1-e)+(1-e^2)+(1+e)^2\right] = \frac{1}{4}u \cdot 4 = u$로, 마땅히 그래야 하는 값이다.
- 극한의 경우: $e \to 1$이면 두 번의 충돌 후 속도는 $0, 0, u$로 다가가고(익숙한 "뉴턴의 요람(Newton's cradle)" 식의 교환이다) $v_A - v_B \to 0$이므로, 세 번째 충돌은 가까스로 일어난다. 임계값 $3-2\sqrt{2}$가 1보다 훨씬 작다는 것은 이와 들어맞는다.
- 수치로 확인하면, $e = 0.1$일 때 세 번째 충돌 후 속도는 $v_B \approx 0.3589u$, $v_C = 0.3025u$이므로 B는 C를 따라잡는다. $e = 0.2$이면 $v_B = 0.336u < v_C = 0.36u$이므로 따라잡지 못한다. 운동을 컴퓨터로 시뮬레이션해 보니 $e > 0.1716$인 모든 경우에는 정확히 세 번, 그보다 작은 경우에는 적어도 네 번 충돌이 일어남이 확인되었다.

흔한 실수

- 다음에 어느 쌍이 충돌하는지 정당화하는 것을 잊는다. 매번 방금 충돌한 두 입자가 멀어지고 있는지, 그리고 나머지 쌍이 가까워지고 있는지 확인해야 한다.
- 반발 법칙에서 부호를 틀린다. 법칙은 (멀어지는 속력) $= e \times$ (가까워지는 속력)이므로, 좌변에 앞 입자의 속도를 먼저 써서 $q' - p' = e(p-q)$이다.
- 허용 범위 $0 < e < 1$을 벗어나는 근 $3+2\sqrt{2}$를 그대로 남겨 둔다.

STEP 너머

규칙 $(*)$는 충돌 전 속도의 쌍을 충돌 후 속도의 쌍으로 보내는 선형 사상(linear map)이므로, 연속된 충돌은 행렬(matrix)의 곱이 된다. 충돌이 모두 몇 번 일어나는지 묻는 것은 고전적인 문제로, 탄성(elastic) 당구공 계에 대해서는 운동을 쐐기 모양 영역 안의 직선으로 "펼쳐서" 얻는 아름다운 기하학적 답이 있다. 충돌, 운동량, 기준틀을 대학 수준의 엄밀함으로 다룬 책으로는 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 보라.

풀이

STEP II 2013, 문제 12

확률과 통계 • 푸아송 분포의 적률

> **STEP II 2013, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/13-s2-q12

핵심 아이디어

X는 U의 홀수 값만, Y는 짝수 값만 취하므로, 모든 기댓값은 홀수 항만 또는 짝수 항만 더한 푸아송(Poisson) 합이 된다. $\mathrm{E}(U)$와 $\mathrm{E}(U(U-1))$을 구할 때 쓰는 요령은 여기서도 그대로 통한다. 즉 k나 $k(k-1)$을 $k!$과 약분하고 λ나 λ^2을 밖으로 꺼낸다. k가 하나 줄어들 때마다 홀짝이 바뀌며, 이 때문에 α와 β가 서로 자리를 바꾼다. 또한 $\alpha+\beta=\mathrm{e}^{\lambda}$이므로 인수 $\mathrm{e}^{-\lambda}$는 $1/(\alpha+\beta)$임에 주목하자.

풀이

이하에서 $k=0,1,2,\ldots$에 대하여 $\mathrm{P}(U=k)=\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k/k!$이고, $\lambda>0$이다. 두 급수(series)를 항별로 더하면 다음을 얻는다.

$$\alpha+\beta=\sum_{k\geq 0}\frac{\lambda^k}{k!}=\mathrm{e}^{\lambda},\qquad \text{따라서}\qquad \mathrm{e}^{-\lambda}=\frac{1}{\alpha+\beta}.$$

(사실 $\alpha=\cosh\lambda$이고 $\beta=\sinh\lambda$이다.)

소문항 (i)

U가 홀수가 아니면 X는 0이므로, 홀수 k만 기여한다.

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{k\text{ 홀수}}k\,\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!}=\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda\sum_{k\text{ 홀수}}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda\left(1+\frac{\lambda^2}{2!}+\frac{\lambda^4}{4!}+\cdots\right),$$

여기서 $k-1$은 $0,2,4,\ldots$를 차례로 지나기 때문이다. 따라서

$$\mathrm{E}(X)=\frac{\lambda\alpha}{\alpha+\beta}.$$

마찬가지로 Y는 $k \geq 2$인 짝수 k를 취하고($k = 0$인 항은 어차피 0이다), 이때 $k-1$은 $1, 3, 5, \ldots$를 지난다.

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda \sum_{k \text{ 짝수}, k \geq 2} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{\lambda\beta}{\alpha+\beta}.$$

검산해 보면 $\mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y) = \lambda = \mathrm{E}(U)$이다. $X + Y = U$이므로 당연히 그래야 한다.

소문항 (ii)

> **생각해 보기** k^2이 $k!$과 깔끔하게 약분되지 않을 때 $k^2\lambda^k/k!$은 어떻게 더할까?

$k^2 = k(k-1) + k$로 쓴다. $k(k-1)$ 부분은 $k!$의 인수 두 개와 약분되고, k 부분은 인수 하나와 약분된다. 홀수 k에 대하여 $k(k-1)$의 합은 $k = 3$부터 시작하고($k = 1$에서는 0이 된다), $k-2$는 $1, 3, 5, \ldots$를 지난다.

$$\sum_{k \text{ 홀수}} k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda^2 \sum_{k \text{ 홀수}, k \geq 3} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = \lambda^2\beta, \qquad \sum_{k \text{ 홀수}} k\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda\alpha$$

(두 번째 합은 소문항 (i)에서 구한 것이다.) 그러므로

$$\mathrm{E}(X^2) = \mathrm{e}^{-\lambda}\left(\lambda\alpha + \lambda^2\beta\right) = \frac{\lambda\alpha + \lambda^2\beta}{\alpha+\beta},$$

이고, 여기서 $\mathrm{E}(X)^2$을 빼면

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{\lambda\alpha + \lambda^2\beta}{\alpha+\beta} - \frac{\lambda^2\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2},$$

가 되어 요구한 결과를 얻는다.

Y의 경우에는 홀짝이 뒤바뀐다. 짝수 k에 대하여 $k(k-1)$의 합은 $k = 2$부터 시작하고 $k-2$는 $0, 2, 4, \ldots$를 지나므로 $\lambda^2\alpha$가 된다. k의 합은 소문항 (i)에서처럼 $\lambda\beta$가 된다. 따라서

$$\mathrm{Var}(Y) = \frac{\lambda\beta + \lambda^2\alpha}{\alpha+\beta} - \frac{\lambda^2\beta^2}{(\alpha+\beta)^2}.$$

마지막 질문. $X + Y = U$이므로 $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(U) = \lambda$이다. 두 분산(variance)을 더하면

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) &= \frac{\lambda(\alpha+\beta) + \lambda^2(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta} - \frac{\lambda^2(\alpha^2+\beta^2)}{(\alpha+\beta)^2} \\ &= \lambda + \lambda^2\frac{(\alpha+\beta)^2 - \alpha^2 - \beta^2}{(\alpha+\beta)^2} = \lambda + \frac{2\lambda^2\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}.\end{aligned}$$

> **생각해 보기** 두 값이 다를 것이라고 예상해야 하는 이유는 무엇일까?

일반적으로 $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y)$이다. 여기서는 X, Y 중 많아야 하나만 0이 아니므로 항상 $XY = 0$이다. 따라서 $\mathrm{Cov}(X,Y) = -\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) = -\lambda^2\alpha\beta/(\alpha+\beta)^2$이고, 이는 위의 계산과 일치한다. 등호가 성립하려면 $\lambda^2\alpha\beta = 0$이어야 한다. 그런데 $\lambda > 0$이면 $\alpha \geq 1$이고 $\beta \geq \lambda > 0$이므로 $\lambda^2\alpha\beta > 0$이다. 그러므로 $\mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(X+Y)$를 만족하는 **0이 아닌 λ의 값은 존재하지 않는다**. 좌변이 항상 엄격히 더 크다. 실제로 $\alpha = \cosh\lambda$, $\beta = \sinh\lambda$이므로 초과분은 $\lambda^2 \sinh 2\lambda / \mathrm{e}^{2\lambda} = \frac{1}{2}\lambda^2\left(1 - \mathrm{e}^{-4\lambda}\right)$이다.

검산

- $\lambda \to 0$이면 U는 거의 항상 0 또는 1이므로 Y는 거의 항상 0이다. 실제로 $\mathrm{E}(Y) \approx \lambda^2 \to 0$이고 $\mathrm{E}(X) \approx \lambda$이다.
- λ가 클 때는 $\alpha \approx \beta \approx \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\lambda}$이므로 $\mathrm{E}(X) \approx \mathrm{E}(Y) \approx \frac{1}{2}\lambda$이다. 즉 홀수 값과 짝수 값이 나올 가능성이 같아진다.
- $\lambda = 1$일 때 푸아송 확률을 직접 더하면 $\mathrm{Var}(X) \approx 0.6778$, $\mathrm{Var}(Y) \approx 0.8131$이므로, 그 합은 $\mathrm{Var}(U) = 1$보다 약 $0.4908 = \frac{1}{2}(1 - \mathrm{e}^{-4})$만큼 크다. 두 공식 모두 들어맞는다.

흔한 실수

- 약분한 뒤 홀짝을 잘못 판단하는 것: k가 홀수이면 $k-1$은 짝수(α가 나옴)이고 $k-2$는 홀수(β가 나옴)이다.
- $\mathrm{e}^{-\lambda} = 1/(\alpha+\beta)$임을 잊어서 답을 요구한 꼴로 나타내지 못하는 것.
- 분산이 그냥 더해진다고 가정하는 것. X와 Y는 독립(independent)과는 거리가 멀다. $X \neq 0$임을 알면 반드시 $Y = 0$이다.

STEP 너머

급수를 짝수 부분과 홀수 부분으로 나누는 것은 $\mathrm{e}^{\lambda} = \cosh\lambda + \sinh\lambda$라는 분해에 해당한다. 확률생성함수(probability generating function)를 이용하면 이는 일상적인 계산이 된다. $G(s)$의 짝수 부분은 $\frac{1}{2}\big(G(s) + G(-s)\big)$이다. 마지막에 사용한 공분산(covariance) 항등식은 대학 확률론 강의에서 가장 먼저 배우는 도구 중 하나이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)에서 생성함수와 공분산을 모두 다룬다.

풀이

STEP II 2013, 문제 13

확률과 통계 • 동전 던지기에서의 연속된 결과

> **STEP II 2013, 13번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/13-s2-q13

핵심 아이디어

사건(event) $S = n$은 처음 $n+1$번의 던지기 결과가 무엇인지 정확히 말해 준다. 즉 같은 결과가 n번 나온 뒤, 그 연속(run)을 끊는 결과가 한 번 나온다. $A = n$도 마찬가지이다. 번갈아 나오는 결과가 n번 이어진 뒤, 같은 결과가 반복된다. 따라서 각 확률(probability)은 가능한 첫 번째 결과마다 하나씩, 두 곱의 합이다. 그러면 S와 A를 비교하는 일은 네 항으로 된 차를 인수분해(factorisation)하는 문제로 귀결되며, q를 $1-p$로 바꾸지 않고 p와 q를 독립된 문자로 그대로 두면 인수분해가 더 잘 보인다.

풀이

전체에 걸쳐 각 던지기는 독립(independent)이고, 앞면이 나올 확률은 p, 뒷면이 나올 확률은 q이며, $p, q > 0$이고 $p \neq q$이다.

일반 공식

$S = n$은 정확히 $1, \ldots, n$번째 결과가 모두 첫 번째 결과와 같고 $n+1$번째 결과가 다를 때 일어난다. 첫 번째가 앞면이면 이는 $\mathrm{H}^n\mathrm{T}$이고 확률은 $p^n q$이다. 첫 번째가 뒷면이면 $\mathrm{T}^n\mathrm{H}$이고 확률은 $q^n p$이다. 두 경우는 서로 배반(disjoint)이므로

$$\mathrm{P}(S = n) = p^n q + q^n p = pq\left(p^{n-1} + q^{n-1}\right).$$

$A = n$은 정확히 $1, \ldots, n$번째 결과가 번갈아 나오고 $n+1$번째 결과가 n번째 결과와 **같아서** 교대가 끝날 때 일어난다.

- $n = 2m$(짝수)일 때: 연속 $\mathrm{HTHT}\cdots\mathrm{HT}$에는 앞면이 m번, 뒷면이 m번 있고 T로 끝나므로, 다음 결과는 반드시 T여야 하며 확률은 $p^m q^m \cdot q$이다. 뒷면으로 시작하면 $q^m p^m \cdot p$이

다. 따라서

$$\mathrm{P}(A = 2m) = p^m q^m (p + q).$$

- $n = 2m + 1$(홀수)일 때: 연속 HTH$\cdots$H에는 앞면이 $m + 1$번, 뒷면이 m번 있고 H로 끝나므로, 다음 결과는 반드시 H여야 하며 확률은 $p^{m+2}q^m$이다. 뒷면으로 시작하면 $q^{m+2}p^m$이다. 따라서

$$\mathrm{P}(A = 2m + 1) = p^m q^m \left(p^2 + q^2\right).$$

소문항 (i)

$A = 1$은 두 번째 결과가 첫 번째 결과를 반복한다는 뜻, 즉 HH 또는 TT이다. 따라서 $\mathrm{P}(A = 1) = p^2 + q^2$이다(위에서 $m = 0$인 경우). $S = 1$은 두 번째 결과가 첫 번째 결과와 다르다는 뜻, 즉 HT 또는 TH이므로

$$\mathrm{P}(S = 1) = pq + qp = 2pq.$$

그러면

$$\mathrm{P}(A = 1) - \mathrm{P}(S = 1) = p^2 - 2pq + q^2 = (p - q)^2 > 0,$$

이며, $p \neq q$이므로 부등호는 엄격하다. 따라서 $\mathrm{P}(S = 1) < \mathrm{P}(A = 1)$이다.

소문항 (ii)

공식으로부터

$$\mathrm{P}(S = 2) = p^2 q + q^2 p = pq(p + q) = \mathrm{P}(A = 2),$$

이므로 요구된 결과가 성립한다. 길이가 3일 때는

$$\mathrm{P}(S = 3) = p^3 q + q^3 p = pq\left(p^2 + q^2\right) = \mathrm{P}(A = 3),$$

이므로 이 두 확률도 같다.

소문항 (iii)

짝수 길이. $n > 1$이라 하자. 두 확률을 모두 $pq > 0$으로 나누면

$$\frac{\mathrm{P}(S = 2n)}{pq} = p^{2n-1} + q^{2n-1}, \qquad \frac{\mathrm{P}(A = 2n)}{pq} = p^{n-1}q^{n-1}(p + q) = p^n q^{n-1} + p^{n-1}q^n.$$

? **생각해 보기** $p^{2n-1} + q^{2n-1} - p^n q^{n-1} - p^{n-1}q^n$의 부호를 어떻게 알 수 있을까?

각 순수한 거듭제곱을, 같은 문자의 가장 높은 거듭제곱을 공유하는 교차항과 짝지어 보자.

$$\begin{aligned} p^{2n-1} + q^{2n-1} - p^n q^{n-1} - p^{n-1} q^n &= p^n \left(p^{n-1} - q^{n-1} \right) - q^n \left(p^{n-1} - q^{n-1} \right) \\ &= \left(p^n - q^n \right) \left(p^{n-1} - q^{n-1} \right). \end{aligned}$$

$p, q > 0$이고 $p \neq q$이므로, 임의의 $k \geq 1$에 대하여 수 $p^k - q^k$는 0이 아니고 $p - q$와 부호가 같다($x \mapsto x^k$가 $x > 0$에서 순증가(strictly increasing)하기 때문이다). 여기서 $n \geq 2$이므로 n과 $n-1$이 모두 1 이상이고, 두 괄호는 0이 아니며 부호가 같다. 따라서 그 곱은 양수이고, 다시 $pq > 0$을 곱하면

$$\mathrm{P}(S = 2n) > \mathrm{P}(A = 2n) \qquad (n > 1).$$

($n = 1$이면 두 번째 괄호는 $p^0 - q^0 = 0$이 되며, 이것이 소문항 (ii)의 등식이다.)

홀수 길이. 같은 방법으로, 역시 $n > 1$일 때

$$\frac{\mathrm{P}(S = 2n+1)}{pq} = p^{2n} + q^{2n},$$

$$\frac{\mathrm{P}(A = 2n+1)}{pq} = p^{n-1} q^{n-1} \left(p^2 + q^2 \right) = p^{n+1} q^{n-1} + p^{n-1} q^{n+1},$$

이고

$$\begin{aligned} p^{2n} + q^{2n} - p^{n+1} q^{n-1} - p^{n-1} q^{n+1} &= p^{n+1} \left(p^{n-1} - q^{n-1} \right) - q^{n+1} \left(p^{n-1} - q^{n-1} \right) \\ &= \left(p^{n+1} - q^{n+1} \right) \left(p^{n-1} - q^{n-1} \right). \end{aligned}$$

같은 논증에 의해 두 괄호는 모두 0이 아니며 $p - q$와 부호가 같으므로

$$\mathrm{P}(S = 2n+1) > \mathrm{P}(A = 2n+1) \qquad (n > 1).$$

이번에도 인수 $p^{n-1} - q^{n-1}$은 $n = 1$에서 0이 되며, 이는 $\mathrm{P}(S = 3) = \mathrm{P}(A = 3)$과 일치한다.

정리하면, 길이가 1인 같은 면의 연속은 교대 연속보다 일어날 가능성이 작고, 길이 2와 3에서는 가능성이 같으며, 4 이상의 모든 길이에서는 같은 면의 연속이 더 일어나기 쉽다.

검산

- $p = \frac{1}{3}, q = \frac{2}{3}$이라 하자. 그러면 $\mathrm{P}(S = 4) = pq(p^3 + q^3) = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{27} \approx 0.074$이고 $\mathrm{P}(A = 4) = p^2 q^2 = \frac{4}{81} \approx 0.049$이므로, 실제로 $S = 4$가 더 일어나기 쉽다.
- 모든 $n \geq 1$에 대하여 $\mathrm{P}(S = n)$을 더하면 $q \cdot \frac{p}{1-p} + p \cdot \frac{q}{1-q} = p + q = 1$이 되어, 마땅히 그래야 하는 대로 나온다.
- 각 공식은 여러 p 값에 대해 14번 던지기의 모든 수열을 정확한 분수로 열거하여, 길이 13까지 컴퓨터로 확인하였다.

흔한 실수

- 연속을 **끝내는** 던지기를 잊는 것. $S = n$이 되려면 $n + 1$번째 결과가 달라야 한다. 이것이 없으면 $\mathrm{P}(S \geq n)$을 계산하게 된다.
- 교대 연속을 엉뚱한 문자로 끝내는 것. 홀수 길이의 연속은 시작한 문자와 같은 문자로 끝나고, 짝수 길이의 연속은 다른 문자로 끝난다.
- 소문항 (iii)에서 $q = 1 - p$를 대입하는 것. 그러면 식이 p에 대한 다항식이 되어 인수분해를 알아보기가 훨씬 어려워진다.

STEP 너머

S는 기하분포형 확률변수(geometric-type random variable)이다. 첫 번째 결과가 주어지면, 연속의 길이는 첫 번째 변화가 일어날 때까지의 대기 시간(waiting time)이다. 이와 같은 연속은 통계학의 런 검정(runs test)의 바탕이 되는데, 이 검정은 결과의 수열이 무작위로 보이는지 판단하는 데 쓰인다. 또한 생성함수(generating function)를 이용하면 가장 긴 연속의 전체 분포(distribution)를 깔끔하게 구할 수 있다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 생성함수와 대기 시간을 알맞은 수준에서 다룬다.

풀이

STEP III 2013, 문제 1

순수수학 • 반각 치환

STEP III 2013, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/13-s3-q1

핵심 아이디어

반각 치환(half-angle substitution) $t = \tan\frac{1}{2}x$를 쓰면 $\sin x$의 유리함수(rational function)는 모두 t의 유리함수로 바뀐다. 따라서 첫 번째 적분은 $\int \mathrm{d}t/(\text{이차식})$ 꼴이 되고, 완전제곱식(completing the square)을 만들어 마무리한다. 답을 요구된 꼴로 정리하려면 $\tan(A-B)$ 공식이 필요하다. I_n에 대해서는 힌트가 다루기 까다로운 분모가 약분되도록 설계되어 있다: $\sin^{n+1}x + 2\sin^n x = \sin^n x\,(2+\sin x)$. 이로부터 I_0에서 출발해 올라가는 점화식(recurrence)을 얻는데, 첫 번째 부분이 정말로 필요한 적분은 I_0뿐이다.

풀이

치환

$t = \tan\frac{1}{2}x$로 두면 연쇄 법칙(chain rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \tfrac{1}{2}\sec^2\tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{2}\left(1+\tan^2\tfrac{1}{2}x\right) = \tfrac{1}{2}(1+t^2).$$

사인에 대해서는 배각 공식(double-angle formula)을 쓴 다음 $\cos^2\frac{1}{2}x = 1/\sec^2\frac{1}{2}x$로 쓴다:

$$\sin x = 2\sin\tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}x = 2\tan\tfrac{1}{2}x\cos^2\tfrac{1}{2}x = \frac{2\tan\frac{1}{2}x}{\sec^2\frac{1}{2}x} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

이로써 두 결과가 모두 증명되었다.

첫 번째 적분

x가 0에서 $\frac{1}{2}\pi$까지 변할 때 t는 $\tan 0 = 0$에서 $\tan\frac{1}{4}\pi = 1$까지 변하고, $\mathrm{d}x = \dfrac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$이다. 또한

$$1 + a\sin x = \frac{1 + t^2 + 2at}{1+t^2},$$

이므로 인수 $1+t^2$이 약분되어

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+a\sin x} = \int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+2at+1} = \int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}t}{(t+a)^2+(1-a^2)}.$$

$0 < a < 1$이므로 상수 $1-a^2$은 양수이다. $r = \sqrt{1-a^2}$으로 두자. $\int \mathrm{d}u/(u^2+r^2) = \frac{1}{r}\arctan\frac{u}{r}$를 이용하면

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+a\sin x} = \frac{2}{r}\Big[\arctan\frac{t+a}{r}\Big]_0^1 = \frac{2}{r}(\alpha-\beta),$$

이고, 여기서

$$\tan\alpha = \frac{1+a}{r} = \frac{1+a}{\sqrt{1-a}\sqrt{1+a}} = \frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}}, \qquad \tan\beta = \frac{a}{r},$$

이며 $\alpha, \beta \in (0, \frac{1}{2}\pi)$이다.

> **생각해 보기** 이것은 우리가 원하는 답처럼 보이지 않는다. 두 아크탄젠트의 차를 어떻게 하나의 아크탄젠트로 바꿀 수 있을까?

차의 탄젠트를 구한다.

$$\tan\alpha - \tan\beta = \frac{(1+a)-a}{r} = \frac{1}{r}, \qquad 1+\tan\alpha\tan\beta = 1+\frac{a(1+a)}{1-a^2} = 1+\frac{a}{1-a} = \frac{1}{1-a},$$

이므로

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \frac{1-a}{r} = \frac{1-a}{\sqrt{1-a}\sqrt{1+a}} = \frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}}.$$

역함수를 취하기 전에 $\alpha-\beta$가 arctan의 치역인 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$에 속하는지 확인해야 한다. 실제로 그렇다: 두 각은 모두 $(0, \frac{1}{2}\pi)$에 있고, $\tan\alpha > \tan\beta$(그 차가 $1/r > 0$)이므로 $0 < \alpha-\beta < \frac{1}{2}\pi$이다. 따라서 $\alpha-\beta = \arctan\dfrac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}}$이고

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+a\sin x} = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\arctan\frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

I_3의 계산

힌트를 따르면

$$I_{n+1} + 2I_n = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^n x\,(\sin x + 2)}{2 + \sin x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^n x\,\mathrm{d}x.$$

$n = 0, 1, 2$일 때의 우변이 필요하다:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} 1\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\pi, \qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = 1, \qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{4}\pi.$$

생각해 보기 점화식은 각 I_n을 다음 항과 연결해 주지만, 어디에서 출발하는가?

I_0은 따로 구해야 하며, 바로 여기서 첫 번째 부분이 쓰인다. 인수 2를 묶어 내고 $a = \frac{1}{2}$를 대입하면

$$\begin{aligned} I_0 = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2 + \sin x} &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1 + \frac{1}{2}\sin x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3/4}} \arctan \frac{\sqrt{1/2}}{\sqrt{3/2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

이제 점화식 $I_{n+1} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^n x\,\mathrm{d}x - 2I_n$을 따라 올라간다:

$$\begin{aligned} I_1 &= \tfrac{1}{2}\pi - 2I_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}, \\ I_2 &= 1 - 2I_1 = 1 - \pi + \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}, \\ I_3 &= \tfrac{1}{4}\pi - 2I_2 = \frac{\pi}{4} - 2 + 2\pi - \frac{8\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

따라서

$$I_3 = \frac{9\pi}{4} - \frac{8\sqrt{3}\,\pi}{9} - 2.$$

검산

- $a \to 0$일 때 첫 번째 결과는 $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} 1\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\pi$가 되어야 한다. 실제로 $2\arctan 1 = \frac{1}{2}\pi$로 수렴(converge)한다.
- $[0, \frac{1}{2}\pi]$에서 $0 \le \sin^3 x/(2 + \sin x) \le \frac{1}{3}$이므로 $0 < I_3 < \frac{1}{6}\pi \approx 0.52$여야 한다. 우리의 답은 $I_3 \approx 0.2318$이고, I_3의 수치 적분(numerical integration) 결과와 소수점 아래 여러 자리까지 일치한다. 마찬가지로 $I_0 = \pi/(3\sqrt{3}) \approx 0.6046$은 당연히 그래야 하듯 $\frac{\pi}{6}$과 $\frac{\pi}{4}$ 사이에 있다.
- 구간에서 $0 \le \sin x \le 1$이므로 값들은 마땅히 $I_0 > I_1 > I_2 > I_3 > 0$으로 감소한다.

흔한 실수

- 적분 구간(limits)을 $t = 0$과 $t = 1$로 바꾸는 것을 잊거나, $\mathrm{d}x$에서 나오는 인수 $2/(1 + t^2)$를 빠뜨리는 것.
- $\alpha - \beta$가 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$에 속하는지 확인하지 않고 $\tan(\alpha - \beta)$로부터 $\alpha - \beta = \arctan(\dots)$라고 결론 내리는 것.
- I_0에 $a = 2$로 첫 번째 결과를 적용하는 것: 이 결과는 $0 < a < 1$일 때만 성립하므로 먼저 인수 2를 묶어 내야 한다.

STEP 너머

$t = \tan\frac{1}{2}x$ 치환(흔히 바이어슈트라스 치환(Weierstrass substitution)이라고 부른다)을 쓰면 $\sin x$와 $\cos x$의 모든 유리함수가 초등함수인 원시함수(antiderivative)를 가진다는 것을 알 수 있다. t의 유리함수는 모두 부분분수(partial fractions)로 처리할 수 있기 때문이다. 기하학적으로 이것은 단위원의 입체 사영(stereographic projection) 매개화 $(\cos x, \sin x) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$이며, 유리수 t로부터 모든 피타고라스 세 수(Pythagorean triple)를 만들어 내기도 한다. $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}x/(1 + a\sin x)$ 같은 적분은 복소해석학(complex analysis)에서 경로 적분(contour integration)을 처음 적용해 보는 고전적인 예이기도 하다. 그 이유를 보려면 Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)가 훌륭한 출발점이다.

풀이

STEP III 2013, 문제 2

순수수학 • 매클로린 급수

> **STEP III 2013, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/13-s3-q2

핵심 아이디어

먼저 $y\sqrt{1-x^2} = \arcsin x$로 써서 제곱근을 없애 두면 1계 도함수(first derivative)를 구하는 일이 수월해진다. 고계 관계식은 이 1계 방정식을 라이프니츠(Leibniz) 규칙(Leibniz's rule)으로 거듭 미분하여 얻는다. $x = 0$에서는 대부분의 항이 사라지고 도함수들 사이의 두 단계 점화식(recurrence)만 남는데, 이 점화식으로 매클로린(Maclaurin) 계수를 하나씩 쌓아 올린다. 마지막 합은 잘 고른 x값에서 이 급수를 계산한 것처럼 보인다.

풀이

1계 방정식

양변에 곱하여 $y\sqrt{1-x^2} = \arcsin x$를 얻고, 좌변에는 곱의 미분법(product rule)을 써서 양변을 x에 대하여 미분한다.

$$\sqrt{1-x^2}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{xy}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

양변에 $\sqrt{1-x^2}$($|x| < 1$에서 0이 아니다)를 곱하면

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - xy - 1 = 0,$$

이 되어 요구된 식을 얻는다.

고계 관계식

$\dfrac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}x^k}$를 $y^{(k)}$로 쓴다. 1계 방정식을 $n+1$번 미분한다. 상수 1은 사라지고, 두 곱은 라이프니츠 규칙으로 처리한다. $1-x^2$의 도함수는 차례로 $-2x$, -2, 그다음부터 0이고, x의 도함수

는 1, 그다음부터 0이므로

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\Big[(1-x^2)y'\Big] = (1-x^2)y^{(n+2)} + \binom{n+1}{1}(-2x)\,y^{(n+1)} + \binom{n+1}{2}(-2)\,y^{(n)}$$
$$= (1-x^2)y^{(n+2)} - 2(n+1)x\,y^{(n+1)} - n(n+1)\,y^{(n)},$$

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\Big[xy\Big] = x\,y^{(n+1)} + (n+1)\,y^{(n)}.$$

첫째 식에서 둘째 식을 빼고 항을 정리하면

$$(1-x^2)y^{(n+2)} - \big(2(n+1)+1\big)x\,y^{(n+1)} - \big(n(n+1)+(n+1)\big)y^{(n)} = 0,$$

즉

$$(1-x^2)y^{(n+2)} - (2n+3)x\,y^{(n+1)} - (n+1)^2 y^{(n)} = 0.$$

여기서는 $n \geq 1$이라는 조건이 전혀 필요하지 않았다. 한 번 미분한 경우($n=0$)에도 같은 꼴 $(1-x^2)y'' - 3xy' - y = 0$을 얻으며, 이 경우도 뒤에서 사용한다.

매클로린 급수

$x = 0$을 대입한다. 가운데 항에는 인수 x가 있으므로 사라지고

$$y^{(n+2)}(0) = (n+1)^2\,y^{(n)}(0) \qquad (n \geq 0).$$

이 점화식은 두 칸씩 나아가므로 초깃값이 두 개 필요하다. 정의에서 $y(0) = \arcsin 0 = 0$이고, $x=0$에서 1계 방정식은 $y'(0) - 0 - 1 = 0$이 되므로 $y'(0) = 1$이다.

? 생각해 보기 이 두 값만으로 어떻게 모든 도함수를 얻을 수 있을까?

점화식은 $y^{(n)}(0)$을 $y^{(n+2)}(0)$에만 연결하므로, 짝수 계 도함수들은 $y(0)$에서 시작하는 하나의 사슬을 이루고, 홀수 계 도함수들은 $y'(0)$에서 시작하는 또 다른 사슬을 이룬다.

짝수 거듭제곱. $y(0) = 0$이므로 점화식에서 $y''(0) = 1^2 \cdot 0 = 0$, 이어서 $y^{(4)}(0) = 0$ 등을 얻는다. 즉 모든 k에 대하여 $y^{(2k)}(0) = 0$이다. 따라서 x의 모든 짝수 거듭제곱의 계수는 0이다. (이는 y가 기함수(odd function) $\arcsin x$를 우함수(even function) $\sqrt{1-x^2}$로 나눈 몫이므로 기함수라는 사실과 들어맞는다.)

홀수 거듭제곱. $n = 1, 3, \ldots, 2k-1$에 대하여 점화식을 쓰면

$$y^{(2k+1)}(0) = (2k)^2(2k-2)^2 \cdots 4^2 \cdot 2^2 \cdot y'(0) = \big(2 \cdot 4 \cdots 2k\big)^2 = \big(2^k\,k!\big)^2,$$

이고, 이 식은 $k = 0$일 때에도 성립한다. $(2k+1)!$로 나누면 매클로린 계수를 얻는다.

$$\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}\,x^{2k+1} = x + \frac{2^2}{3!}x^3 + \frac{2^2 \cdot 4^2}{5!}x^5 + \cdots,$$

따라서 홀수 차 일반항은 $\dfrac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}x^{2k+1}$이고, 짝수 차 일반항은 $0 \cdot x^{2k}$이다.

무한합

합의 제n항은 $\dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}$이며, $n=0$일 때 맨 앞의 1이 된다. 급수와 비교하면 인수 2^{2n}을 없애야 하므로, $2^{2n}x^{2n+1}$이 1의 상수배가 되도록 x를 고른다. $x=\frac{1}{2}$로 두면 $2^{2n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}=\frac{1}{2}$이다. 그러므로

$$\frac{\arcsin\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

좌변은 $\dfrac{\pi/6}{\sqrt{3}/2}=\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$이므로

$$1+\frac{1}{3!}+\frac{2^2}{5!}+\frac{2^2\times 3^2}{7!}+\cdots=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}\,\pi}{9}.$$

검산

- 이미 알려진 급수 $\arcsin x=x+\frac{1}{6}x^3+\cdots$에 $(1-x^2)^{-1/2}=1+\frac{1}{2}x^2+\cdots$를 곱하면 $x+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)x^3+\cdots=x+\frac{2}{3}x^3+\cdots$이고, 실제로 $\frac{2^2}{3!}=\frac{2}{3}$이다.
- 합의 처음 다섯 항은 $1+0.16667+0.03333+0.00714+0.00159\approx 1.2087$로, 이미 $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\approx 1.20920$에 가깝다. 항이 매번 약 4배씩 작아지므로 나머지는 작다.

흔한 실수

- 라이프니츠 규칙에서 $y^{(n)}$ 항에 붙는 이항계수(binomial coefficient) $\binom{n+1}{2}$를 빠뜨려 $(n+1)^2$이 틀어지는 경우.
- 점화식을 $n\geq 1$일 때에만 사용하여 $y''(0)=0$을 끝내 보이지 못하는 경우. 짝수 사슬에는 $n=0$인 경우(한 번 미분)가 필요하다.
- 마지막 부분에서 $x=1$이나 $x=\frac{1}{4}$를 대입하는 경우. 인수 2^{2n}은 x^{2n}으로 상쇄되어야 하므로 $x=\frac{1}{2}$일 수밖에 없다.

STEP 너머

여기서는 "수렴 문제는 무시하였지만", 대학의 첫 해석학(analysis) 강의에서는 이를 엄밀하게 다룬다. 비판정법(ratio test)에 의하여 이 급수의 수렴반지름(radius of convergence)은 1이고, 나머지항이 있는 테일러 정리(Taylor's theorem)를 쓰면 그 구간 안에서 급수가 실제로 함수와 같음을 보일 수 있다. 계수 $\frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}$은 중심 이항계수(central binomial coefficients)와 밀접한 관련이 있으며, 같은 함수를 한 번 적분하면 $(\arcsin x)^2$의 급수를

얻는다. 멱급수(power series)의 바탕이 되는 해석학에 대해서는 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 참고하라.

풀이

STEP III 2013, 문제 3

순수수학 • 벡터와 구

STEP III 2013, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/13-s3-q3

핵심 아이디어

모든 것은 두 가지 사실에서 나온다. 각 $\mathbf{p}_i$는 단위벡터(unit vector)이고, 네 벡터를 더하면 $\mathbf{0}$이 된다. 길이의 제곱을 내적(dot product)으로 전개하면 $(XP_i)^2$은 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i$에 대한 **일차식**이 되고, $\sum \mathbf{p}_i = \mathbf{0}$이므로 일차항들의 합은 사라진다. 네제곱의 경우에는 이차항이 남으므로 실제 좌표가 필요하며, 소문항 (ii)가 바로 그것을 제공한다.

풀이

내적 $\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j$

사면체가 정사면체(regular tetrahedron)이므로 여섯 모서리의 길이는 모두 같다. $i \neq j$일 때

$$(P_iP_j)^2 = (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j)\cdot(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) = |\mathbf{p}_i|^2 + |\mathbf{p}_j|^2 - 2\,\mathbf{p}_i\cdot\mathbf{p}_j = 2 - 2\,\mathbf{p}_i\cdot\mathbf{p}_j,$$

이다. 여기서 $|\mathbf{p}_i| = 1$(각 꼭짓점은 단위구(unit sphere) 위에 있다)을 이용하였다. 따라서 모서리의 길이가 모두 같으므로 모든 $\mathbf{p}_i\cdot\mathbf{p}_j$ $(i \neq j)$는 같은 값을 가져야 한다. 이 값을 c라 하자.

이제 $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4 = \mathbf{0}$과 $\mathbf{p}_1$의 내적을 구하면

$$\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_1\cdot\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_1\cdot\mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_1\cdot\mathbf{p}_4 = 0 \quad\Longrightarrow\quad 1 + 3c = 0,$$

이므로 $c = -\frac{1}{3}$이다. 즉, 요구한 대로 모든 $i \neq j$에 대하여 $\mathbf{p}_i\cdot\mathbf{p}_j = -\frac{1}{3}$이다.

소문항 (i)

$|\mathbf{x}| = 1$이기도 하므로

$$(XP_i)^2 = (\mathbf{p}_i - \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{p}_i - \mathbf{x}) = |\mathbf{p}_i|^2 - 2\,\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}_i + |\mathbf{x}|^2 = 2 - 2\,\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}_i.$$

i에 대하여 더하고 내적의 분배법칙(distributive law)을 이용하면

$$\sum_{i=1}^{4} (XP_i)^2 = 8 - 2\,\mathbf{x} \cdot \left(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4\right) = 8 - 2\,\mathbf{x} \cdot \mathbf{0} = 8,$$

이 되어 요구한 결과를 얻는다.

소문항 (ii)

$\mathbf{p}_1 = (0, 0, 1)$, $\mathbf{p}_2 = (a, 0, b)$일 때, 조건 $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = -\frac{1}{3}$에서 곧바로 $b = -\frac{1}{3}$을 얻는다. 그러면 $|\mathbf{p}_2| = 1$에서

$$a^2 = 1 - b^2 = \tfrac{8}{9}, \qquad \text{따라서} \qquad a = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

이다. $a > 0$이므로 양의 제곱근을 택하였다.

$\mathbf{p}_3 = (u, v, w)$라 하자. 세 조건으로 이 벡터가 결정된다.

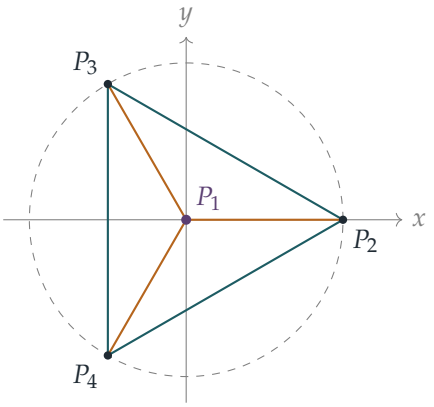
$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3 = -\tfrac{1}{3} &\implies w = -\tfrac{1}{3}, \\
\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_3 = -\tfrac{1}{3} &\implies \tfrac{2\sqrt{2}}{3}u + \tfrac{1}{9} = -\tfrac{1}{3} \implies u = -\tfrac{4}{9} \cdot \tfrac{3}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{3}, \\
|\mathbf{p}_3| = 1 &\implies v^2 = 1 - \tfrac{2}{9} - \tfrac{1}{9} = \tfrac{6}{9} \implies v = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}.
\end{aligned}$$

$\mathbf{p}_4$에 대해서도 정확히 같은 방정식이 성립하므로, P_3과 P_4는 이로부터 얻는 두 점이다(두 점은 서로 달라야 하므로 각각 한 부호씩 택한다). 한 가지 방식으로 이름을 붙이면

$$P_3 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{1}{3}\right), \qquad P_4 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

이다(P_3과 P_4의 이름은 서로 바꾸어도 된다). 검산으로, 네 위치벡터(position vector)의 합은 실제로 $\mathbf{0}$이고, $\mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{p}_4 = \frac{2}{9} - \frac{6}{9} + \frac{1}{9} = -\frac{1}{3}$이다.

위에서 내려다보면 P_2, P_3, P_4는 평면 $z = -\frac{1}{3}$ 위에서 정삼각형(equilateral triangle)을 이루고, P_1은 그 중심의 바로 위에 있다.



소문항 (iii)

소문항 (i)에서 $(XP_i)^2 = 2(1 - \mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i)$이므로, 제곱하면

$$(XP_i)^4 = 4(1-\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{i=1}^{4}(XP_i)^4 = 4\sum_{i=1}^{4}(1-\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i)^2,$$

이 되어 요구한 결과를 얻는다. 괄호를 전개하고 다시 한 번 $\sum \mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i = 0$을 이용하면

$$\sum_{i=1}^{4}(XP_i)^4 = 4\Big(4 - 2\sum_{i=1}^{4}\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i + \sum_{i=1}^{4}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i)^2\Big) = 16 + 4\sum_{i=1}^{4}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i)^2.$$

? **생각해 보기** 일차항은 또다시 사라졌다. 왜 같은 방법으로 $\sum(\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i)^2$을 처리할 수는 없을까?

제곱의 합은 $\mathbf{p}_i$에 대한 일차식이 아니므로, $\sum \mathbf{p}_i = \mathbf{0}$을 안다고 해서 이에 대해 직접 알 수 있는 것은 없다. 여기서 좌표가 필요해진다. $\mathbf{x} = (x, y, z)$로 두고 소문항 (ii)의 꼭짓점을 쓰면

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_1 = z, \qquad \mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_2 = \tfrac{1}{3}(2\sqrt{2}\,x - z),$$
$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_3 = \tfrac{1}{3}(-\sqrt{2}\,x + \sqrt{6}\,y - z), \qquad \mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_4 = \tfrac{1}{3}(-\sqrt{2}\,x - \sqrt{6}\,y - z).$$

이다. 제곱하여 더한 뒤 항을 정리하면 다음과 같다.

- x^2: $\tfrac{1}{9}(8+2+2) = \tfrac{4}{3}$; y^2: $\tfrac{1}{9}(6+6) = \tfrac{4}{3}$; z^2: $1 + \tfrac{1}{9}(1+1+1) = \tfrac{4}{3}$.
- xy와 yz: 이 항들은 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_3$과 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_4$에만 나타나는데, 두 식은 y항의 부호만 다르므로 서로 상쇄된다.
- xz: $\tfrac{1}{9}(-4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}) = 0$.

그러므로

$$\sum_{i=1}^{4}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i)^2 = \tfrac{4}{3}(x^2+y^2+z^2) = \tfrac{4}{3},$$

이다. X가 단위구 위에 있기 때문이다. 따라서

$$\sum_{i=1}^{4}(XP_i)^4 = 16 + 4\cdot\tfrac{4}{3} = \frac{64}{3},$$

이고, 이 값은 요구한 대로 X의 위치에 의존하지 않는다.

> ? **생각해 보기** 우리는 특정한 좌표를 사용하였다. 이 결론은 구에 내접하는 모든 정사면체에 대해 성립할까?

그렇다. 그러한 정사면체는 어느 것이든 O를 중심으로 회전(rotation)시켜 P_1이 $(0,0,1)$로, P_2가 반평면 $y=0, x>0$ 위로 가게 할 수 있다. 회전은 길이를 보존하며, X가 구 전체를 움직일 때 회전된 상도 구 전체를 움직인다. 따라서 소문항 (ii)의 좌표를 써도 일반성을 잃지 않는다.

검산

- $X = P_1$로 잡자. 거리는 0과 세 모서리의 길이이며, 각 모서리의 길이는 $\sqrt{2-2(-\frac{1}{3})} = \sqrt{8/3}$이다. 그러면 $\sum(XP_i)^2 = 3\cdot\frac{8}{3} = 8$이고 $\sum(XP_i)^4 = 3\cdot\frac{64}{9} = \frac{64}{3}$이므로 두 결과와 모두 일치한다.
- P_1의 반대편 점인 $X=(0,0,-1)$로 잡자. 그러면 $XP_1 = 2$이고, 나머지 세 점에 대해서는 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i = \frac{1}{3}$이므로 $(XP_i)^2 = \frac{4}{3}$이다. 이로부터 $4+3\cdot\frac{4}{3} = 8$과 $16+3\cdot\frac{16}{9} = \frac{64}{3} \approx 21.33$을 얻는다.
- 구 위의 무작위 점 수천 개에서 컴퓨터로 확인한 결과, 매번 8과 21.333…이 나왔다.

흔한 실수

- 모든 $\mathbf{p}_i\cdot\mathbf{p}_j$가 같다고 이유 없이 주장하는 것. 그 이유는 $(P_iP_j)^2 = 2-2\,\mathbf{p}_i\cdot\mathbf{p}_j$를 통해 모서리의 길이가 모두 같다는 데 있다.
- $|\mathbf{x}| = 1$임을 잊는 것. 이 사실은 $(XP_i)^2 = 2-2\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i$에도, 마지막 단계의 $x^2+y^2+z^2 = 1$에도 필요하다.
- 소문항 (iii)의 교차항(cross term)에서 계산 실수를 하는 것. 여기서 부호를 잘못 쓰면 X에 대한 거짓 의존성이 남는다.

STEP 너머

소문항 (iii)의 핵심은 **모든** 벡터 $\mathbf{x}$에 대하여 성립하는 항등식 $\sum_i (\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}_i)^2 = \frac{4}{3}|\mathbf{x}|^2$이다. 행렬의 언어로 말하면 $\sum_i \mathbf{p}_i\mathbf{p}_i^{\mathsf{T}} = \frac{4}{3}I$이다. 즉, 네 꼭짓점 벡터는 과잉완비(over-complete) 정규직교기저(orthonormal basis)처럼 행동하며, 이를 **타이트 프레임**(tight frame)이라 한다. 이는 대칭성에 의해 반드시 성립해야 한다. 이 행렬은 정사면체의 모든 회전과 교환 가능하므로 I의 상수배여야 하고, 그 대각합(trace)은 4이기 때문이다. 낮은 차수의 평균이 구 자체의 평균과 일치하는 구 위의 점 집합을 **구면 디자인**(spherical design)이라 하며, 수치적분(numerical integration)과 부호 이론(coding theory)에 쓰인다. 이 배경이 되는 선형대수(외적(outer product), 대칭행렬(symmetric matrix), 고윳값(eigenvalue))에 대해서는 Strang, *Introduction to Linear Algebra*(선형대수 입문)를 참고하라.

풀이

STEP III 2013, 문제 4

순수수학 • 1의 거듭제곱근의 곱

> **STEP III 2013, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/13-s3-q4

이 문제는 *Beyond STEP*의 5.3 절 $z^{2n}+1$의 인수분해에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch05/z2n-plus-one.html

핵심 아이디어

$z^{2n}=-1$의 근은 켤레(conjugate) 쌍 $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\theta}$로 나타나고, 각 쌍을 곱하면 실수 계수 이차식이 되므로 이로부터 인수분해(factorisation)를 얻는다. 그다음 z의 값 하나를 잘 고르면 인수분해가 코사인에 관한 명제로 바뀐다. $z=\mathrm{i}$에서는 모든 이차식의 z^2+1 부분이 0이 되어 $-2z\cos\theta$ 항만 남는다. 소문항 (ii)에서는 같은 대입을 하면 양변이 모두 0이 되므로, 먼저 $z=\mathrm{i}$에서 0이 되는 인수 하나를 약분한다.

풀이

인수분해

전개하면

$$\begin{aligned}(z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})(z-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}) &= z^2 - z\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \\ &= z^2 - 2z\cos\theta + 1,\end{aligned}$$

이다. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}=2\cos\theta$이기 때문이다.

이제 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$가 $z^{2n}=-1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$를 만족할 필요충분조건은 $2n\theta$가 π의 홀수 배인 것, 즉 어떤 정수 k에 대하여 $\theta=\frac{(2k-1)\pi}{2n}$인 것이다. $(-\pi,\pi]$에 속하는 값은

$$\theta = \pm\frac{\pi}{2n},\ \pm\frac{3\pi}{2n},\ \ldots,\ \pm\frac{(2n-1)\pi}{2n},$$

이다. $\frac{(2n-1)\pi}{2n} < \pi$이고 $\frac{(2n+1)\pi}{2n} > \pi$이기 때문이다. 이들은 서로 다른 $2n$개의 근이므로 -1의 $(2n)$제곱근 전부이다.

$$e^{\pm i\theta_k}, \qquad \theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

$z^{2n}+1$은 최고차항의 계수가 1인(monic) $2n$차 다항식(polynomial)이고 서로 다른 이 $2n$개의 근을 가지므로, 각 켤레 쌍에 첫 번째 결과를 적용하면

$$z^{2n}+1 = \prod_{k=1}^{n}(z-e^{i\theta_k})(z-e^{-i\theta_k}) = \prod_{k=1}^{n}(z^2-2z\cos\theta_k+1),$$

이다. 이것이 구하는 항등식이다.

소문항 (i)

$z = i$를 대입한다. 각 인수는

$$i^2 - 2i\cos\theta_k + 1 = -2i\cos\theta_k,$$

가 되고, n이 짝수이므로 좌변은 $i^{2n}+1 = (-1)^n+1 = 2$이다. 따라서

$$2 = (-2i)^n \prod_{k=1}^{n}\cos\theta_k.$$

n이 짝수이면 $(-2)^n = 2^n$이고 $i^n = (i^2)^{n/2} = (-1)^{\frac{1}{2}n}$이므로 $(-2i)^n = 2^n(-1)^{\frac{1}{2}n}$이다. 그러므로 $1/(-1)^{\frac{1}{2}n} = (-1)^{\frac{1}{2}n}$을 이용하면

$$\prod_{k=1}^{n}\cos\theta_k = \frac{2}{2^n(-1)^{\frac{1}{2}n}} = (-1)^{\frac{1}{2}n}2^{1-n},$$

이다. 좌변의 곱은 정확히 $\cos\frac{\pi}{2n}\cos\frac{3\pi}{2n}\cdots\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}$이므로 증명이 끝난다.

소문항 (ii)

? **생각해 보기** 인수분해에 다시 $z = i$를 대입하면 왜 안 될까?

n이 홀수이면 $i^{2n}+1 = (-1)^n+1 = 0$이므로 좌변이 0이 된다. 우변에서는 $m = \frac{1}{2}(n+1)$일 때 가운데 값 $k = m$이 $\theta_m = \frac{n\pi}{2n} = \frac{\pi}{2}$를 주므로, 그 인수는 z^2+1이고 이것 역시 $z = i$에서 0이다. $0 = 0$을 얻을 뿐 아무것도 알 수 없다. 해결책은 먼저 양변에서 인수 z^2+1을 제거하는 것이다.

주어진 사실과 인수분해를 이용하면

$$(1+z^2)(1-z^2+z^4-\cdots+z^{2n-2}) = (z^2+1)\prod_{k\neq m}(z^2-2z\cos\theta_k+1).$$

이들은 다항식이고 z^2+1은 영다항식이 아니므로 약분할 수 있다(다항식의 나눗셈은 유일하다).

$$1-z^2+z^4-\cdots+z^{2n-2}=\prod_{k\neq m}\left(z^2-2z\cos\theta_k+1\right),$$

이것은 다항식의 항등식이므로 $z=\mathrm{i}$를 포함한 모든 z에 대하여 성립한다.

이제 $z=\mathrm{i}$를 대입한다. 좌변에서 항 $(-1)^j z^{2j}$는 $(-1)^j(-1)^j=1$이 되고, 항이 n개($j=0,1,\ldots,n-1$) 있으므로 좌변은 n이다. 우변에는 $n-1$개의 인수가 있고 각각 $-2\mathrm{i}\cos\theta_k$와 같다.

$$n=(-2\mathrm{i})^{n-1}\prod_{k\neq m}\cos\theta_k.$$

$n-1$이 짝수이므로 소문항 (i)에서와 똑같이 $(-2\mathrm{i})^{n-1}=2^{n-1}(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}$이다.

곱을 제곱의 꼴로 바꾸기 위해 k와 $n+1-k$를 짝짓는다.

$$\theta_{n+1-k}=\frac{(2n+1-2k)\pi}{2n}=\pi-\theta_k,$$

이므로 $\cos\theta_{n+1-k}=-\cos\theta_k$이다. $k\neq m$인 값들은 $1\le k\le\frac{1}{2}(n-1)$인 $\frac{1}{2}(n-1)$개의 쌍 $\{k,\,n+1-k\}$로 나뉘므로

$$\prod_{k\neq m}\cos\theta_k=\prod_{k=1}^{(n-1)/2}\left(-\cos^2\theta_k\right)=(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}\,P,\qquad P=\prod_{k=1}^{(n-1)/2}\cos^2\theta_k.$$

이를 종합하면 두 부호 $(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}$의 곱은 $+1$이 된다.

$$n=2^{n-1}(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}P=2^{n-1}P,$$

따라서 $P=n\,2^{1-n}$이다. P의 마지막 인수는 $k=\frac{1}{2}(n-1)$, 즉 $\theta_k=\frac{(n-2)\pi}{2n}$에 해당하므로 P는 정확히

$$\cos^2\frac{\pi}{2n}\cos^2\frac{3\pi}{2n}\cdots\cos^2\frac{(n-2)\pi}{2n}=n\,2^{1-n},$$

이고, 이로써 증명이 끝난다. ($n=1$이면 곱은 빈 곱으로 $1=1\cdot 2^0$과 같으므로 모순이 없다.)

검산

- 소문항 (i)에서 $n=2$: $\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{1}{2}=(-1)^1 2^{-1}$. $n=4$이면 곱은 $\frac{1}{8}$로 $(-1)^2 2^{-3}$과 일치한다.
- 소문항 (ii)에서 $n=3$: $\cos^2\frac{\pi}{6}=\frac{3}{4}=3\cdot 2^{-2}$. $n=5$이면 $\cos^2\frac{\pi}{10}\cos^2\frac{3\pi}{10}=0.3125=\frac{5}{16}$.
- 두 항등식 모두 39 이하의 모든 n에 대하여 컴퓨터로도 확인하였고, 인수분해는 임의의 복소수 z에서 검증하였다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)에서 인수분해에 $z = \mathrm{i}$를 바로 대입하여 $0 = 0$만 얻는 것.
- 부호를 놓치는 것: 소문항 (i)에서 $n \equiv 2 \pmod 4$이면 답은 실제로 음수이다. $\frac{\pi}{2}$보다 큰 $\frac{1}{2}n$개의 각에 대하여 $\cos\theta_k < 0$이기 때문이다.
- $\cos\theta_{n+1-k} = -\cos\theta_k$임을 잊어 제곱을 만들 때 부호를 틀리는 것.

STEP 너머

같은 요령, 즉 $z^N \pm 1$을 단위근(roots of unity)으로 인수분해한 다음 영리하게 고른 점에서 값을 구하는 방법으로 $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$과 같은 곱 공식 전체를 얻을 수 있다($\frac{z^n-1}{z-1}$에 $z = 1$을 대입해 보라). 이러한 유한 곱에서 $n \to \infty$로 보내면 오일러(Euler)의 무한 곱(infinite product) $\sin\pi x = \pi x \prod_{k\geq 1}\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$에 이르는데, 이것은 복소해석학(complex analysis)이 함수를 그 영점들로부터 어떻게 만들어 내는지 처음으로 맛보게 해 준다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 단위근과 이러한 아이디어를 기하적으로 살펴보기에 아주 좋은 책이다.

풀이

STEP III 2013, 문제 5

순수수학 • 유리성과 서로소

> **STEP III 2013, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/13-s3-q5

핵심 아이디어

모든 단계는 단 하나의 도구로 움직인다. 어떤 수가 곱을 나누고 한 인수와 서로소이면, 그 수는 다른 인수를 나눈다. 유리수를 기약분수로 나타내고 분모를 없앤 다음, 각 인수가 어느 쪽에 들어가야 하는지 살펴본다. 소문항 (ii)에서는 이 방법으로 분모 b를 두 사실 사이에 가두는데, b가 아주 작지 않은 한 두 사실은 동시에 성립할 수 없다.

작은 사실 하나를 반복해서 사용할 것이다. 임의의 양의 정수 s, t에 대하여 **p와 q가 서로소**(*coprime*)**이면 p^s와 q^t도 서로소이다.** 실제로 p^s와 q^t를 모두 나누는 소수(prime)가 있다면 그 소수는 p와 q를 나누게 되어(곱을 나누는 소수는 인수 중 하나를 나누는데, 이는 주어진 결과에서 a가 소수인 경우이다) 서로소라는 데 모순이다.

풀이

소문항 (i)

$q^n N = p^n$에서 p^n이 $q^n N$을 나눈다는 것을 알 수 있다. p와 q가 서로소이므로 p^n과 q^n도 서로소이고, 주어진 결과($a = p^n, b = q^n, c = N$)에 의하여 p^n이 N을 나눈다. 따라서 어떤 양의 정수 k에 대하여 $N = kp^n$이고, 이것이 보이려던 것이다.

이를 다시 대입하면 $q^n k p^n = p^n$이므로 $q^n k = 1$이다. 둘 다 양의 정수이므로 $k = 1$이고 $q^n = 1$이며, 따라서

$$q = 1 \quad (\text{그리고} N = p^n).$$

이제 임의의 양의 정수 n과 N을 잡고 $\sqrt[n]{N}$이 유리수라고 가정하자. 이 수는 양수이므로 p, q를 양의 정수로 하여 $\sqrt[n]{N} = p/q$를 기약분수로, 즉 p와 q가 서로소가 되도록 쓸 수 있다. 양변을 n제곱하면 $q^n N = p^n$이고, 위의 논의에 의하여 $q = 1$이다. 그러므로 $\sqrt[n]{N} = p$는 양의

정수이다. 따라서 $\sqrt[n]{N}$은 양의 정수이거나 무리수이다.

소문항 (ii)

$\gcd(a,b) = \gcd(c,d) = 1$일 때 $a^a d^b = b^a c^b$이다.

$d^b = b^a$임을 보이기. 우변을 보면 b^a가 $a^a d^b$를 나눈다. a와 b가 서로소이므로 b^a와 a^a는 서로소이고, 따라서 b^a는 d^b를 나눈다. 대칭적으로 d^b는 $b^a c^b$를 나누고, d^b는 c^b와 서로소이므로 d^b는 b^a를 나눈다. 서로를 나누는 두 양의 정수는 같으므로

$$d^b = b^a,$$

이고, 이를 원래 식에서 약분하면 $a^a = c^b$도 얻는다.

p가 d의 소인수이면 p는 $d^b = b^a$를 나누고, b의 거듭제곱을 나누는 소수는 b를 나눈다. 따라서 p는 b의 소인수이다.

p의 거듭제곱. d와 b를 나누는 p의 가장 높은 거듭제곱을 각각 p^m, p^n이라 하자. 앞 문단에 의하여 $m, n \geq 1$이다. 소인수분해의 유일성(unique factorisation)에 의하여 d^b를 나누는 p의 가장 높은 거듭제곱은 p^{mb}이고, b^a를 나누는 것은 p^{na}이다. $d^b = b^a$이므로 이 둘은 같고, 따라서 $mb = na$이며

$$b = \frac{na}{m}.$$

> **생각해 보기** $b = na/m$에서 어떻게 p^n의 한계를 얻을 수 있을까?

이 식을 $mb = na$로 고쳐 쓰면 b가 na를 나눈다. 그런데 b는 a와 서로소이므로 주어진 결과에 의하여 b는 n을 나누고, 특히 $b \leq n$이다. 또 p^n이 b를 나누므로 $p^n \leq b$이다. 둘을 합치면

$$p^n \leq b \leq n.$$

그런데 $p \geq 2$이고 $n > 0$이므로 주어진 사실 $y^x > x (y = p, x = n)$에 의하여 $p^n > n$이다. 이 모순은 우리의 가정이 불가능했음을 보여 준다. 즉 d는 소인수를 **하나도** 갖지 않는다. 따라서 $d = 1$이므로 $b^a = d^b = 1$이고, 그러므로

$$b = 1.$$

마지막 부분

r를 r^r가 유리수인 양의 유리수라 하자. $r = a/b$를 기약분수로 쓰고(a, b는 양수이고 서로소), $r^r = c/d$도 기약분수로 쓰자($r^r > 0$이므로 c, d는 양수이고, 서로소이다). 그러면

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{a/b} = \frac{c}{d} \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{a}{b}\right)^a = \left(\frac{c}{d}\right)^b \quad \Longrightarrow \quad a^a d^b = b^a c^b,$$

이다. 여기서 양변을 b제곱하고 분모를 없앴다. 이는 정확히 소문항 (ii)의 상황이므로 $b = 1$이고 $r = a$는 양의 정수이다.

검산

- 정수 r는 실제로 조건을 만족한다. $r = 2$이면 $r^r = 4$이다. 또 $b = 1$일 때 결론 $c^b = a^a$는 단지 $c = a^a$를 뜻하므로 마땅히 그래야 하는 결과이다.
- 반례가 아닌 예: $r = \frac{1}{2}$이면 $r^r = 1/\sqrt{2}$로 무리수이며, 이는 결과와 일치한다. 소문항 (i)에서 $\sqrt[3]{27} = 3$이고 $\sqrt[3]{24}$는 무리수이므로 두 경우가 모두 실제로 일어난다.
- 서로소인 모든 $a, b \leq 24, c < 200, d < 60$에 대하여 컴퓨터로 탐색한 결과, $a^a d^b = b^a c^b$의 해는 $b = d = 1$인 것(즉 $c = a^a$이고 $a = 1, 2, 3$인 경우)뿐이었다.

흔한 실수

- p^n과 q^n이 왜 서로소인지 말하지 않는 것. 주어진 결과는 a와 b가 서로소인 경우에 관한 것이므로 거듭제곱들이 서로소임이 필요하다.
- $b \mid n$이라는 단계 없이 $b = na/m$에서 곧바로 $p^n \leq n$을 결론짓는 것. $mb = na$를 $b \mid n$으로 바꿔 주는 것은 a와 b가 서로소라는 사실이다.
- $(a/b)^{a/b} = c/d$라고 쓰면서 c/d가 기약분수임을 명시하지 않는 것. $\gcd(c, d) = 1$이 없으면 $d^b \mid b^a$라는 단계가 성립하지 않는다.

STEP 너머

주어진 "서로소 약수" 결과는 유클리드(Euclid)의 보조정리(Euclid's lemma)로, 보통 베주(Bézout) 항등식으로부터 증명하며, 소인수분해의 유일성을 떠받치는 원동력이다. 첫 번째 부분은 $\sqrt{2}$가 무리수라는 사실의 일반화이고, 두 번째 부분은 초월수론(transcendence theory)을 처음 맛보는 것이다. 초월수론에서는 겔폰트–슈나이더 정리(Gelfond–Schneider theorem)를 이용하여 예컨대 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$가 대수적 수(algebraic number)조차 아님을 보인다. 대븐포트(Davenport)의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 이러한 기초를 아름답게 전개한다.

풀이

STEP III 2013, 문제 6

순수수학 • 복소수 절댓값 부등식

STEP III 2013, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/13-s3-q6

이 문제는 *Beyond STEP*의 5.8 절 **원판에 숨은 거리**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch05/poincare-disc.html

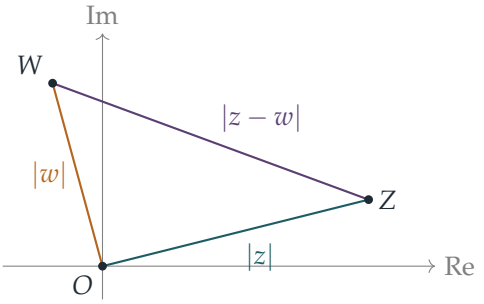
핵심 아이디어

모든 것은 절댓값(modulus)의 제곱을 어떤 수와 그 켤레복소수(conjugate)의 곱, 즉 $|u|^2 = uu^*$로 쓰는 데서 출발한다. 이 방법으로 $|z-w|^2$과 $|1-zw^*|^2$을 전개하면 두 식 모두에서 같은 교차항 $zw^* + z^*w$가 나오며, 바로 이 때문에 하나의 양 E가 두 식에 모두 나타난다. 두 절댓값을 모두 "어떤 것의 제곱에서 E를 뺀 것"의 꼴로 쓰고 나면, 마지막 부등식은 $\frac{A-E}{B-E}$와 $\frac{A}{B}$ 꼴의 두 분수를 비교하는 문제가 되고, 이는 결국 $B-A$의 부호 문제로 귀결된다.

풀이

삼각부등식

아르강 도표(Argand diagram)에 원점 O와, z와 w를 나타내는 점 Z와 W를 표시하자. 거리 OZ와 OW는 각각 $|z|$와 $|w|$이고, 거리 WZ는 $|z-w|$이다.



선분 WZ는 W에서 Z로 가는 가장 짧은 경로이므로, 경로 $W \to O \to Z$보다 길지 않다.

$$|z-w| = WZ \leq WO + OZ = |w| + |z|.$$

등호는 O가 선분 WZ 위에 있을 때, 즉 z와 w가 서로 반대 방향을 가리킬 때(또는 둘 중 하나가 0일 때) 그리고 그때에만 성립한다. O, Z, W가 한 직선 위에 있지만 O가 그 사이에 있지 않으면 "삼각형"은 납작해지지만, 최단 경로 논증은 여전히 적용된다.

소문항 (i)

$|u|^2 = uu^*$와 $(z-w)^* = z^* - w^*$를 이용하면

$$\begin{aligned} |z-w|^2 &= (z-w)(z^*-w^*) \\ &= zz^* + ww^* - zw^* - z^*w \\ &= |z|^2 + |w|^2 - (zw^* + z^*w). \end{aligned}$$

$|zw| = |z||w|$이므로 $(|z|+|w|)^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2|zw|$이고, 따라서

$$(|z|+|w|)^2 - E = |z|^2 + |w|^2 + 2|zw| - zw^* - z^*w - 2|zw| = |z-w|^2$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. 이를 정리하면

$$E = (|z|+|w|)^2 - |z-w|^2.$$

우변은 실수의 제곱의 차이므로 E는 실수이다. 삼각부등식(triangle inequality)에 의해 $0 \leq |z-w| \leq |z|+|w|$이고, 음이 아닌 양을 제곱해도 부등식은 유지되므로 $E \geq 0$이다.

(직접 보일 수도 있다: z^*w는 zw^*의 켤레복소수이므로 $E = 2\,\mathrm{Re}(zw^*) + 2|zw^*|$이고, $\mathrm{Re}\,u \geq -|u|$이므로 이는 실수이며 0 이상이다.)

소문항 (ii)

같은 방법으로 $(zw^*)^* = z^*w$를 이용하면

$$\begin{aligned}|1 - zw^*|^2 &= (1 - zw^*)(1 - z^*w)\\ &= 1 - zw^* - z^*w + zz^*ww^*\\ &= 1 + |zw|^2 - (zw^* + z^*w)\\ &= \left(1 + 2|zw| + |zw|^2\right) - (zw^* + z^*w + 2|zw|)\\ &= (1 + |zw|)^2 - E,\end{aligned}$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

마지막 부등식

다음과 같이 놓자.

$$A = (|z| + |w|)^2, \qquad B = (1 + |zw|)^2,$$

그러면 소문항 (i)과 (ii)의 결과는 $|z - w|^2 = A - E$와 $|1 - zw^*|^2 = B - E$가 된다.

먼저 좌변이 정의된다는 것을 확인하자. $|z| > 1$이고 $|w| > 1$이면 $|zw^*| = |z||w| > 1$이므로 $zw^* \neq 1$이고 $B - E = |1 - zw^*|^2 > 0$이다. 또한 $B > 0$이다.

증명할 부등식의 양변은 모두 음이 아니므로, 이 부등식은 양변을 제곱한 부등식

$$\frac{A - E}{B - E} \leq \frac{A}{B}.$$

와 동치이다. 양변에 양수 $B(B - E)$를 곱하면 이는 다음과 동치이다.

$$(A - E)B \leq A(B - E) \iff -EB \leq -EA \iff E(B - A) \geq 0.$$

> **생각해 보기** $B - A$의 부호는 무엇이며, $|z|$와 $|w|$에 대한 조건은 어디에서 쓰이는가?

$a = |z|, b = |w|$로 놓으면

$$B - A = (1 + ab)^2 - (a + b)^2 = 1 + a^2b^2 - a^2 - b^2 = (1 - a^2)(1 - b^2).$$

$a > 1$이고 $b > 1$이면 두 괄호가 모두 음수이므로 $B - A > 0$이다. 소문항 (i)에 의해 $E \geq 0$이므로 $E(B - A) \geq 0$이다. 위의 모든 단계가 동치였으므로

$$\frac{|z - w|}{|1 - zw^*|} \leq \frac{|z| + |w|}{1 + |zw|}.$$

등호는 $E = 0$일 때, 즉 z와 w가 서로 반대 방향을 가리킬 때 그리고 그때에만 성립한다.

$|z| < 1$이고 $|w| < 1$일 때

그렇다. 이 부등식은 여전히 성립한다. 이제 $|zw^*| = ab < 1$이므로 이번에도 $zw^* \neq 1$이고 $B - E > 0$이며, 동치 관계의 사슬은 그대로 성립한다. 이번에는 $(1-a^2)(1-b^2)$의 두 괄호가 모두 양수이므로 역시 $B - A > 0$이고, 따라서 $E(B-A) \geq 0$이 되어 부등식이 성립한다.

중요한 것은 오직 $1-a^2$과 $1-b^2$의 부호가 같다는 점이다. 한 절댓값은 1보다 크고 다른 하나는 작으면 $B - A < 0$이 되어 부등식이 성립하지 않을 수 있다. 예를 들어 $z = 2$, $w = 0.4$이면 좌변은 $1.6/0.2 = 8$이지만 우변은 $2.4/1.8 = \frac{4}{3}$이다.

검산

- $z = 2$, $w = 2\mathrm{i}$로 놓자. 그러면 $|z - w| = 2\sqrt{2}$이고 $1 - zw^* = 1 - 2(-2\mathrm{i}) = 1 + 4\mathrm{i}$이므로, 좌변은 $2\sqrt{2}/\sqrt{17} \approx 0.686$이고 우변은 $4/5 = 0.8$이다. 두 값을 모두 $\frac{1}{4}$배로 줄이면($z = \frac{1}{2}$, $w = \frac{1}{2}\mathrm{i}$) 같은 두 수 $0.686 \leq 0.8$을 얻으며, 이는 $|z|, |w| < 1$인 경우를 보여 준다.
- 등호인 경우: $z = 2 + \mathrm{i}$, $w = -1.5z$로 놓으면 $E = 0$이고, 양변은 소수점 아래 넷째 자리까지 모두 0.6577로 같다.
- 수십만 쌍의 무작위 쌍에 대한 컴퓨터 검사로 두 항등식, $E \geq 0$, 그리고 두 경우의 부등식을 모두 확인하였다.

흔한 실수

- $|z - w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2zw^*$로 쓰는 것: 교차항은 $zw^* + z^*w$이며, 이 둘은 서로의 켤레복소수이지만 일반적으로 같지 않다.
- $|1 - zw^*| \neq 0$임을 확인하지 않고 분모를 양변에 곱하는 것. 여기서는 $|zw| \neq 1$이 이를 보장한다.
- 유도 과정에서 $|z|, |w| > 1$을 사용했다는 이유로 마지막 질문에 "아니다"라고 답하는 것: 인수분해 $(1-a^2)(1-b^2)$를 보면 부호가 일치하는지만 중요하다는 것을 알 수 있다.

STEP 너머

$|1 - zw^*| = |1 - z^*w|$이므로 좌변은 $\dfrac{z-w}{1-z^*w}$의 절댓값이다. $|z| < 1$인 z를 고정하면, 사상 $w \mapsto \dfrac{z-w}{1-z^*w}$는 단위원판을 자기 자신으로 보내는 뫼비우스 변환(Möbius transformation)이고, $\left|\frac{z-w}{1-z^*w}\right|$는 z와 w 사이의 의사쌍곡 거리(pseudo-hyperbolic distance)이다. 이

문제의 부등식은 이 거리가 z와 w 각각에서 0까지의 거리의 "쌍곡적 합" 이하라는 것을 말해 준다. 이는 삼각부등식의 강한 형태이며, 쌍곡기하학(hyperbolic geometry)의 토대 가운데 하나이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*는 뫼비우스 변환과 쌍곡 원판을 아름다운 그림으로 설명한다.

풀이

STEP III 2013, 문제 7

순수수학 • 상미분방정식의 에너지 방법

STEP III 2013, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/13-s3-q7

이 문제는 *Beyond STEP*의 8.2 절 **풀지 않고 범위 구하기**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch08/bounding-without-solving.html

핵심 아이디어

각 방정식은 용수철에 매달린 입자의 운동처럼 보인다. 미지함수에만 의존하는 "힘" 항이 있고, (ii)와 (iii)에서는 여기에 도함수(derivative)에 비례하는 마찰 항이 더해진다. 방정식에 도함수를 곱하면 방정식은 어떤 "에너지(energy)"의 도함수가 된다. 마찰이 없으면 에너지는 보존되고, 마찰이 결코 반대 방향으로 밀지 않는다면 에너지는 감소할 수밖에 없으므로 처음 값을 넘지 않는다. 소문항 (iii)에서는 에너지를 직접 구성하고, 마찰 계수가 결코 음수가 아님을 보여야 한다.

풀이

소문항 (i)

$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$라 하자. 연쇄법칙(chain rule)에 의해

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x} &= 2y'y'' + 2y^3y' \\ &= 2y'\left(y'' + y^3\right) = 0,\end{aligned}$$

이다. 여기서 미분방정식(differential equation)을 이용하였다. 따라서 E는 상수이고, 그 값은 $\mathrm{E}(0) = 0^2 + \frac{1}{2}\cdot 1^4 = \frac{1}{2}$이다. 그러므로 모든 x에 대하여

$$\tfrac{1}{2}y^4 = \tfrac{1}{2} - (y')^2 \leq \tfrac{1}{2},$$

이다. $(y')^2 \geq 0$이기 때문이다. 따라서 $y^4 \leq 1$이고, 이로부터 모든 x에 대하여 $|y(x)| \leq 1$이다.

소문항 (ii)

같은 방법으로 미분한 다음, 방정식을 $v'' + \sinh v = -xv'$의 꼴로 이용하면

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x} &= 2v'v'' + 2\sinh v\, v' \\ &= 2v'\left(v'' + \sinh v\right) \\ &= -2x\,(v')^2.\end{aligned}$$

이다. $x \geq 0$이면 x와 $(v')^2$이 모두 음이 아니므로 $\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x} \leq 0$이고, 이것이 보이려던 것이다.

따라서 E는 $x \geq 0$에서 증가하지 않으며, 그 범위에서 $\mathrm{E}(x) \leq \mathrm{E}(0)$이다. $x = 0$에서 $\cosh(\ln 3) = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3}$이므로 $\mathrm{E}(0) = 0 + 2 \cdot \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$이다. 그러므로 $x \geq 0$에 대하여

$$2\cosh v(x) = \mathrm{E}(x) - (v')^2 \leq \mathrm{E}(x) \leq \tfrac{10}{3},$$

이고, 따라서 $\cosh v(x) \leq \frac{5}{3}$이다.

소문항 (iii)

(ii)에서처럼 $\mathrm{E} = (w')^2 + F(w)$ 꼴의 에너지를 찾아보자. 그러면

$$\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x} = 2w'w'' + F'(w)\,w' = w'\left(2w'' + F'(w)\right),$$

이고, 방정식을 이용하여 괄호 안이 w'의 상수배가 되게 하고 싶다. 이는 $F'(w) = 2(w\cosh w + 2\sinh w)$일 때 일어난다.

> **생각해 보기** 도함수가 $w\cosh w + 2\sinh w$인 w의 함수는 무엇인가?

부분적분(integration by parts)에 의해 $\int w\cosh w\,\mathrm{d}w = w\sinh w - \cosh w$이고, $\int 2\sinh w\,\mathrm{d}w = 2\cosh w$이다. 두 식을 더하면

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\left(w\sinh w + \cosh w\right) = \sinh w + w\cosh w + \sinh w = w\cosh w + 2\sinh w.$$

이다. 따라서

$$\mathrm{E}(x) = \left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)^2 + 2\left(w\sinh w + \cosh w\right).$$

로 잡는다. $g(x) = 5\cosh x - 4\sinh x - 3$이라 하면, 방정식은 $w'' + (w\cosh w + 2\sinh w) = -g(x)\,w'$를 뜻하므로

$$\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x} = 2w'\left(w'' + w\cosh w + 2\sinh w\right) = -2g(x)\,(w')^2.$$

이다.

? 생각해 보기 $g(x)$가 음수가 되는 경우가 있는가?

지수함수로 나타내면

$$\begin{aligned} g(x) &= \tfrac{5}{2}\left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}\right)-2\left(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}\right)-3 \\ &= \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x}-3+\tfrac{9}{2}\mathrm{e}^{-x} \\ &= \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{2x}-6\mathrm{e}^{x}+9\right)=\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{x}-3\right)^{2} \ \geq\ 0 \end{aligned}$$

이고, 이는 모든 x에 대하여 성립한다($x=\ln 3$에서만 0이 된다). 따라서 $\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x}\leq 0$이고, $x\geq 0$에 대하여 $\mathrm{E}(x)\leq \mathrm{E}(0)$이다. $x=0$에서 $w=0$이고 $w'=\frac{1}{\sqrt{2}}$이므로 $\mathrm{E}(0)=\frac{1}{2}+2(0+1)=\frac{5}{2}$이다. 그러므로 $x\geq 0$에 대하여

$$2\left(w\sinh w+\cosh w\right)\leq \mathrm{E}(x)\leq \tfrac{5}{2}, \qquad \text{이므로} \qquad w\sinh w+\cosh w\leq \tfrac{5}{4}.$$

이다. 마지막으로, w와 $\sinh w$는 항상 부호가 같으므로 모든 실수 w에 대하여 $w\sinh w\geq 0$이다. 이 항을 버리면 $x\geq 0$에 대하여 $\cosh w(x)\leq \frac{5}{4}$를 얻고, 이것이 보이려던 것이다.

검산

- (ii)에서 이 상계는 처음 순간에 등호가 성립한다: $\cosh v(0)=\cosh(\ln 3)=\frac{5}{3}$.
- (iii)에서 $g(0)=5-0-3=2$이고, 이는 인수분해한 꼴에서 얻은 $\frac{1}{2}(1-3)^2=2$와 일치한다.
- 각 방정식의 수치해를 구해 보면 이 그림이 확인된다: (i)에서는 E가 0.5로 유지되고, (ii)에서는 E가 $\frac{10}{3}$에서 감소하며, (iii)에서는 E가 2.5에서 감소하고 $\cosh w$는 약 1.03 이상으로 올라가지 않아 상계 1.25보다 충분히 작다.

흔한 실수

- $F(w)$를 x에 대하여 미분할 때 연쇄법칙에서 나오는 인수 w'을 빠뜨린다.
- (iii)에서 $w\sinh w\geq 0$이기 때문에 그 항을 버릴 수 있다는 설명 없이 $w\sinh w+\cosh w\leq\frac{5}{4}$에서 멈춘다.
- $g(x)>0$이라고 주장한다: g는 $x=\ln 3$에서 0이 되므로 $\leq$만 성립한다(그리고 필요한 것은 이것뿐이다).

STEP 너머

이러한 에너지 함수는 **랴푸노프 함수**(*Lyapunov function*)이다. 해를 따라가면서 결코 증가하지 않는 양으로, 계를 직접 풀지 않고도 그 계가 유계로 머물거나 안정된 상태로 수렴함을 증명하는 데 쓰인다. 에너지 보존에 감쇠(damping)에 의한 소산(dissipation)을 더한 이 아이디어는 비선형 진동자의 안정성 이론의 기초이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 비선형 계와 안정성을 다루는 장에서 랴푸노프의 방법을 설명한다.

풀이

STEP III 2013, 문제 8

순수수학 • 이차곡선의 극방정식

> **STEP III 2013, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/13-s3-q8

핵심 아이디어

$k < 1$인 관계식 $r = ks$는 E가 O를 초점(focus)으로, D를 준선(directrix)으로 하는 타원(ellipse)임을 뜻하며, O를 중심으로 하는 극좌표(polar coordinates)에서는 r를 θ로 나타내는 매우 간단한 방정식이 된다. O를 지나는 현(chord)은 서로 반대 방향을 향하는 두 동경일 뿐이므로, $1/l$은 $\cos^2\theta$에 대한 간단한 식으로 나온다. 그러면 같은 간격으로 놓인 n개의 직선에 대한 합은 $\cos 2\theta$ 항들의 합으로 바뀌는데, 이것이 바로 처음의 합이 처리해 주는 것이다.

풀이

처음의 합

각 항은 첫째항이 $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}$이고 공비(common ratio)가 $w = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/n}$인 등비수열(geometric progression)을 이룬다. $n \geq 2$이므로 각 $2\pi/n$은 $(0, \pi]$에 속하고, 따라서 $w \neq 1$이어서 일반적인 공식을 쓸 수 있다.

$$\sum_{r=0}^{n-1} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}(\alpha + r\pi/n)} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\,\frac{1-w^n}{1-w} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\,\frac{1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}}{1-w} = 0.$$

실수부(real part)를 취하면 $\sum_{r=0}^{n-1} \cos\left(2\alpha + 2r\pi/n\right) = 0$이고, 앞으로 쓸 것은 이 형태이다.

거리 s

그림과 같이 θ를 O에서 D에 내린 수선으로부터 잰다. 그 수선의 발은 O에서 거리 d만큼 떨어져 있고, P는 같은 방향으로 O에서 거리 $r\cos\theta$만큼 떨어져 있으므로, P가 D에 대하여

O와 같은 쪽에 있을 때

$$s = d - r\cos\theta.$$

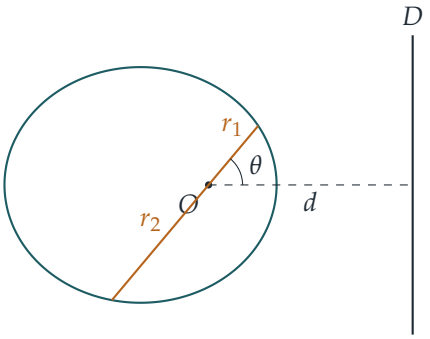
(이 식은 모든 θ에 대하여 성립한다. $\cos\theta < 0$일 때 P는 O보다 D에서 더 멀리 있고, 식도 올바르게 $s > d$를 준다.)

E의 극방정식

E의 모든 점은 D에 대하여 O와 같은 쪽에 있다. 실제로 P가 반대쪽에 있다면 $s = r\cos\theta - d$가 되고, $r = ks$로부터 $r(1 - k\cos\theta) = -kd < 0$을 얻는데, $0 < k < 1$이면 $1 - k\cos\theta > 0$이므로 이는 불가능하다. 따라서 $s = d - r\cos\theta$를 쓸 수 있고, $r = ks$는 다음과 같이 된다.

$$r = k(d - r\cos\theta) \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{kd}{1 + k\cos\theta}.$$

$k < 1$이므로 분모는 모든 θ에 대하여 양수이고, 따라서 O에서 나가는 각 반직선은 E와 정확히 한 번 만난다.



O를 지나는 현의 길이

O를 지나고 수선과 각 θ를 이루는 직선은 θ 방향과 $\theta + \pi$ 방향의 점에서 E와 만나며, 이 두 점은 O에 대하여 서로 반대쪽에 있다. $\cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$이므로 현의 길이는

$$l = \frac{kd}{1 + k\cos\theta} + \frac{kd}{1 - k\cos\theta} = \frac{2kd}{1 - k^2\cos^2\theta}, \qquad \text{따라서} \qquad \frac{1}{l} = \frac{1 - k^2\cos^2\theta}{2kd}.$$

이 값은 직선에만 의존하고, 직선의 두 방향 중 어느 쪽을 θ로 부르는지와는 무관하다는 점에 주목한다.

? **생각해 보기** n개의 직선에 대하여 $\cos^2\theta$를 어떻게 더할까?

배각 공식(double-angle formula) $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$를 쓴다. $\cos 2\theta$ 항들은 정확히 처음의 합의 실수부이다.

n개의 직선에 대한 합

이웃한 직선끼리 이루는 각이 π/n이므로, 어떤 고정된 α에 대하여 n개의 직선은 각 $\theta_j = \alpha + j\pi/n$ $(j = 1, \ldots, n)$을 이룬다. $2\theta_j$의 이 n개의 값은 $2\alpha + 2j\pi/n$이고, $j = n$을 $j = 0$으로 바꾸면($2\theta_j$가 2π만큼 바뀐다) 처음의 합에 나오는 각들이 된다. 따라서

$$\sum_{j=1}^{n} \cos^2\theta_j = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \cos 2\theta_j = \frac{n}{2} + 0 = \frac{n}{2},$$

이고, 그러므로

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{l_j} = \frac{1}{2kd}\left(n - k^2 \cdot \frac{n}{2}\right) = \frac{(2-k^2)n}{4kd},$$

이것이 구하는 결과이다. 조건 $n \geq 2$는 처음의 합에서 $w \neq 1$을 보장하기 위해 정확히 한 번 쓰였다.

검산

- $n = 2, k = \frac{1}{2}, d = 1$로 두고, 직선을 OD 방향과 그에 수직인 방향으로 잡는다. OD 방향의 현은 장축(major axis)이며 길이는 $\frac{1/2}{3/2} + \frac{1/2}{1/2} = \frac{4}{3}$이다. 그에 수직인 현(통경(latus rectum))의 길이는 $2kd = 1$이다. 따라서 $\frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4}$이고, 공식도 $\frac{(7/4)\cdot 2}{2} = \frac{7}{4}$를 준다.
- $n = 1$이면 결과는 당연히 성립하지 않는다. 직선 하나의 $1/l$은 그 방향에 의존하기 때문이다. $n = 1$인 경우가 바로 $w = 1$인 경우이다.
- 임의의 d, k, n, α에 대하여 $r = ks$로부터 각 현을 직접 구하는 컴퓨터 검산 결과도 공식과 일치했다. 예를 들어 $d = 1, k = \frac{1}{2}, n = 3$이면 어떤 α에 대해서도 $2.625 = \frac{21}{8}$을 얻는다.

흔한 실수

- $s = d + r\cos\theta$로 쓰는 것. 그림에서 θ는 D 쪽으로 재므로, OP를 따라 바깥으로 나아가면 D에 더 가까워진다.
- 반대 방향의 각이 $\theta + \pi$임을 잊고 현의 나머지 절반을 다시 $kd/(1 + k\cos\theta)$로 잡는 것.
- $2\theta_j$ 대신 각 $\alpha + j\pi/n$을 그대로 더하는 것. 원을 고르게 한 바퀴 도는 것은 두 배 한 각들이며, 처음의 합에 인수 2가 있는 것도 그 때문이다.

STEP 너머

초점–준선 정의에 따르면 모든 이차곡선(conic)은 극방정식 $r = \ell/(1 + e\cos\theta)$를 가지며, $e < 1$, $e = 1$, $e > 1$이 각각 타원, 포물선(parabola), 쌍곡선(hyperbola)에 해당한다. 행

성의 운동에 대한 뉴턴(Newton)의 방정식을 풀면 케플러(Kepler)의 궤도가 바로 이 형태로 나타난다. 서로 수직인 임의의 두 초점현(focal chord)에 대하여 $1/l_1 + 1/l_2$가 일정하다는 사실은 고전적인 성질이며, 여기서의 결과는 이를 일반화한 것이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 궤도 방정식을 이 방법으로 유도한다.

풀이

STEP III 2013, 문제 9

역학 • 부력과 단진동

STEP III 2013, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/13-s3-q9

핵심 아이디어

구의 잠긴 부분은 구관(spherical cap)이고, 그 부피는 이를 원판으로 잘라서 구한다. 이는 회전체의 부피(volume of revolution)이다. 그다음부터 이 문제는 무게 외에는 부력(buoyancy)만이 작용하는 상황에서의 뉴턴(Newton)의 제2법칙이다. 작은 진동(small oscillations)을 다루기 위해 $x = x_0 + y$로 놓고, 우변의 삼차식을 평형점 근처에서 선형화(linearise)한 다음, $\ddot{y} = -\omega^2 y$ 꼴의 방정식에서 ω^2을 읽어 낸다.

풀이

밀려난 부피

구의 중심을 원점으로 잡고 z를 위쪽 방향으로 잰다. 그러면 액체의 수면은 평면 $z = -x$이고, 잠긴 부분은 공에서 $-R \le z \le -x$인 부분이다. 이는 $-R < x < R$일 때 의미가 있으므로 문제의 경우를 포함한다. 높이 z에서의 단면은 반지름이 $\sqrt{R^2 - z^2}$인 원판이므로

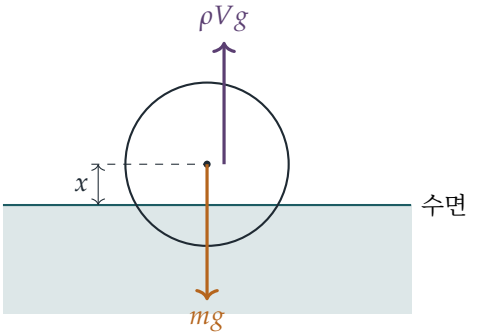
$$\begin{aligned} V &= \int_{-R}^{-x} \pi \left(R^2 - z^2\right) \mathrm{d}z = \pi \left[R^2 z - \tfrac{1}{3} z^3\right]_{-R}^{-x} \\ &= \pi \left(-R^2 x + \tfrac{1}{3} x^3 + R^3 - \tfrac{1}{3} R^3\right) = \frac{\pi}{3} \left(2R^3 - 3R^2 x + x^3\right), \end{aligned}$$

이고, 이것이 구하는 부피이다.

운동 방정식

구를 연직 방향으로 움직이는 강체(rigid body)로 모형화한다. 수조가 크므로 구가 위아래로 흔들려도 수면의 높이는 변하지 않고, 따라서 $\ddot{x}$는 구의 위쪽 방향 가속도이다. 구의 질량은 $m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_s$이다. 구에는 두 힘이 작용한다. 아래쪽으로 작용하는 무게 mg와 위쪽으로

작용하는 부력 $\rho V g$이다.



위쪽을 양의 방향으로 하여 연직 방향으로 힘을 분해하면

$$m\ddot{x} = \rho V g - mg \quad \Longrightarrow \quad m\left(g + \ddot{x}\right) = \rho g V.$$

m과 V를 대입하면

$$\tfrac{4}{3}\pi R^3 \rho_\mathrm{s}\left(g + \ddot{x}\right) = \tfrac{\pi}{3}\left(2R^3 - 3R^2 x + x^3\right)\rho g,$$

이고, 양변에 $3/\pi$를 곱하면

$$4R^3 \rho_\mathrm{s}\left(g + \ddot{x}\right) = \left(2R^3 - 3R^2 x + x^3\right)\rho g,$$

를 얻으므로 증명이 끝난다.

평형 상태의 밀도

평형 상태에서는 $\ddot{x} = 0$이다. $x = \frac{1}{2}R$을 대입하면

$$4R^3 \rho_\mathrm{s} g = \left(2R^3 - \tfrac{3}{2}R^3 + \tfrac{1}{8}R^3\right)\rho g = \tfrac{5}{8}R^3 \rho g,$$

이므로

$$\rho_\mathrm{s} = \frac{5}{32}\rho.$$

이 값은 마땅히 그래야 하듯이 $\frac{1}{2}\rho$보다 작다. 중심이 수면 위에 있으므로 구의 절반보다 적은 부분이 물에 잠기기 때문이다.

작은 진동

$f(x) = 2R^3 - 3R^2 x + x^3$이라 하고, y가 작을 때 $x = \frac{1}{2}R + y$로 놓는다. 그러면 $\ddot{x} = \ddot{y}$이다.

? **생각해 보기** 삼차식을 어떻게 y에 대한 일차식으로 바꿀 수 있을까?

f를 평형점 근처에서 전개하고 일차항까지만 남긴다. 즉 $f(\frac{1}{2}R+y) = f(\frac{1}{2}R) + f'(\frac{1}{2}R)\,y + O(y^2)$이다. 여기서

$$f'(x) = -3R^2 + 3x^2, \qquad f'(\tfrac{1}{2}R) = -3R^2 + \tfrac{3}{4}R^2 = -\tfrac{9}{4}R^2,$$

이고, 앞에서 $f(\frac{1}{2}R) = \frac{5}{8}R^3$이었다. $\rho_s = \frac{5}{32}\rho$를 이용하면 운동 방정식의 좌변은 $4R^3 \cdot \frac{5}{32}\rho\,(g+\ddot{y}) = \frac{5}{8}R^3\rho\,(g+\ddot{y})$이다. 따라서 일차 근사로

$$\tfrac{5}{8}R^3\rho\,(g+\ddot{y}) = \left(\tfrac{5}{8}R^3 - \tfrac{9}{4}R^2 y\right)\rho g.$$

$\frac{5}{8}R^3\rho g$ 항들은 서로 소거되고(이는 바로 평형 조건이다), 남는 것은

$$\tfrac{5}{8}R^3\ddot{y} = -\tfrac{9}{4}R^2 g\,y \quad\Longrightarrow\quad \ddot{y} = -\frac{18g}{5R}\,y.$$

이는 $\omega^2 = \dfrac{18g}{5R}$인 단진동(simple harmonic motion)이므로, 작은 진동의 주기(period)는

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{5R}{18g}}.$$

검산

- 부피: $x = R$이면 공식의 값은 0이고(수면에 막 닿는 경우), $x = 0$이면 $\frac{2}{3}\pi R^3$이며(구의 절반), $x = -R$이면 $\frac{4}{3}\pi R^3$이다(완전히 잠긴 경우).
- 차원(dimensions): $\omega^2 = 18g/(5R)$의 단위는 마땅히 그래야 하듯이 s^{-2}이다.
- 수치: $R = 1\,\mathrm{m}$, $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$이면 주기는 약 $1.06\,\mathrm{s}$이다. 작은 변위에서 출발하여 선형화하지 않은 원래 방정식을 컴퓨터로 단계별로 풀어 나가면, 10^4분의 1보다 더 작은 오차로 같은 주기를 얻는다.

흔한 실수

- 잠긴 구관의 높이를 $R - x$가 아니라 x로 잡는 것. x는 중심이 액체 **위로** 떨어진 높이이다.
- 복원력이 음수인 $f'(\frac{1}{2}R)$에서 나온다는 것을 잊는 것. 여기서 부호를 틀리면 $\ddot{y} = +\omega^2 y$가 되는데, 이는 전혀 진동이 아니다.
- 좌변에서 구 자체의 질량을 빠뜨리는 것. $\ddot{x}$에 곱해지는 것은 ρ가 아니라 ρ_s이다. (실제로 떠 있는 물체는 주변 액체의 일부를 함께 끌고 움직이는데, 이를 "부가 질량(added mass)"이라 한다. 이 문제에서는 이를 무시하라고 한다.)

STEP 너머

여기서 사용한 방법, 즉 힘을 평형점 근처에서 전개하여 일차항을 남기는 방법은 어떤 계든 작은 진동을 구하는 표준적인 방법이다. 일차항의 부호는 안정성(stability)을 알려 주고, 그 크기는 진동수를 알려 준다. 대학 1학년 과정에서 이는 $\ddot{x} = F(x)$의 선형화가 되고, 이어서 자유도가 여러 개일 때의 기준 진동(normal modes)에 대한 공부로 이어진다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 평형점 근처의 작은 진동과 유체의 부력을 이 수준에서 다룬다.

풀이

STEP III 2013, 문제 10

역학 • 회전 충격

STEP III 2013, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

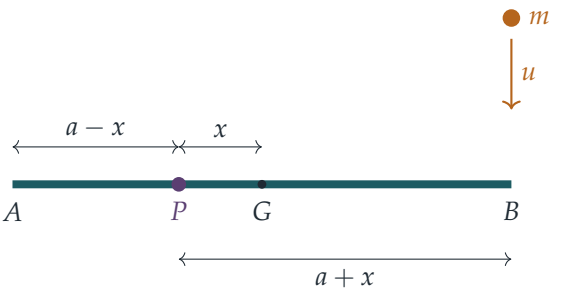
step.maths.org/questions/13-s3-q10

핵심 아이디어

막대의 중심이 P에서 얼마나 떨어져 있는지만 알아차리면 관성 모멘트(moment of inertia)는 평행축 정리(parallel axis theorem)에서 바로 나온다. 충돌 순간 회전축은 막대에 크기를 알 수 없는 충격량(impulse)을 가하므로 선운동량(linear momentum)은 보존되지 않는다. 그러나 이 충격량은 P를 지나 작용하므로 P에 대한 모멘트(moment)가 없다. P에 대한 각운동량 보존(conservation of angular momentum)과 B에서의 뉴턴(Newton)의 실험 법칙(Newton's experimental law)을 함께 쓰면 두 미지수에 대한 두 방정식을 얻는다.

풀이

막대는 균일한 강체 막대(uniform rigid rod)로, 입자는 질점으로, 충돌은 순간적인 것으로 모형화한다. 그러면 수평 방향의 충격량은 B에서의 충격량과 회전축에서의 충격량뿐이다(중력처럼 크기가 유한한 힘은 충돌 순간 동안 충격량을 주지 않는다).



관성 모멘트

막대의 중점이자 질량중심(centre of mass)을 G라 하자. $AG = a$이고 $AP = a - x$이므로 거리 PG는 x이다($x > 0$이면 G는 P보다 B 쪽에 있다). 균일한 막대의 중심을 지나고 막대에 수직인 축에 대한 관성 모멘트는 $\frac{1}{3}Ma^2$이다(길이가 $2a$인 막대의 경우). 평행축 정리에 의해

$$I_P = \tfrac{1}{3}Ma^2 + Mx^2 = \tfrac{1}{3}M(a^2 + 3x^2),$$

이므로 요구된 결과가 성립한다.

정의로부터 직접 계산하고 싶다면 다음과 같이 하면 된다. 선밀도(line density)를 $M/(2a)$라 하고 s를 P에서부터 막대를 따라 잰 위치라 하면, 막대는 $s = -(a - x)$부터 $s = a + x$까지 놓여 있고

$$I_P = \frac{M}{2a}\int_{-(a-x)}^{a+x} s^2\,\mathrm{d}s = \frac{M}{6a}\left[(a+x)^3 + (a-x)^3\right] = \frac{M}{6a}(2a^3 + 6ax^2),$$

이므로 같은 결과를 얻는다.

충돌

P에서 B까지의 거리는 $2a - (a - x) = a + x$이다. 충돌 직후 입자의 속도(처음 운동 방향을 양으로 한다)를 v, 막대의 각속도(angular velocity)를 ω라 하자. 그러면 그 순간 B는 같은 방향으로 속력 $(a + x)\omega$로 움직인다.

? 생각해 보기 여기서 왜 선운동량 보존을 쓸 수 없을까?

회전축이 고정되어 있으므로, 충돌하는 동안 회전축은 막대에 크기를 알 수 없는 충격량을 가한다. 이 충격량은 P에서 작용하므로 P에 대한 모멘트는 0이다. 입자와 막대 사이의 충격량은 막대와 입자로 이루어진 계의 내부 충격량이다. 따라서 P에 대한 계의 전체 각운동량은 보존된다.

$$mu(a + x) = mv(a + x) + I_P\,\omega. \tag{1}$$

B에서 뉴턴의 실험 법칙(분리 속력은 접근 속력의 e배이다)을 적용하면

$$(a + x)\omega - v = eu. \tag{2}$$

(2)에서 $v = (a + x)\omega - eu$이다. 이를 (1)에 대입하면

$$\begin{aligned} mu(a + x) &= m(a + x)\left[(a + x)\omega - eu\right] + I_P\,\omega \\ mu(1 + e)(a + x) &= \left[m(a + x)^2 + \tfrac{1}{3}M(a^2 + 3x^2)\right]\omega. \end{aligned}$$

양변에 3을 곱하면

$$\omega = \frac{3mu(1 + e)(a + x)}{M(a^2 + 3x^2) + 3m(a + x)^2},$$

이고, 이것이 주어진 결과이다.

$m = 2M$인 경우

$m = 2M$을 대입하고 M을 약분하면

$$\omega = \frac{6u(1+e)(a+x)}{a^2+3x^2+6(a+x)^2}.$$

여기서 자연스럽게 나타나는 변수는 지렛대 팔(lever arm) $s = a + x$, 즉 거리 PB이며, 이 값은 $[0, 2a]$에 속한다. $x = s - a$로 놓으면 분모는

$$a^2 + 3(s-a)^2 + 6s^2 = 9s^2 - 6as + 4a^2,$$

이므로

$$\omega = \frac{6u(1+e)\,s}{9s^2 - 6as + 4a^2}.$$

$s = 0$(회전축이 B에 있는 경우)이면 $\omega = 0$이므로 최댓값은 $s > 0$에서 나타나고, 이때는 분자와 분모를 s로 나눌 수 있다.

$$\omega = \frac{6u(1+e)}{9s + \dfrac{4a^2}{s} - 6a}.$$

분모를 가능한 한 작게 만들어야 한다. $s > 0$이므로 산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)에 의해

$$9s + \frac{4a^2}{s} \;\geq\; 2\sqrt{9s \cdot \frac{4a^2}{s}} = 12a,$$

이고, 등호는 정확히 $9s = 4a^2/s$, 즉 $s = \frac{2}{3}a$일 때 성립하며 이 값은 실제로 $(0, 2a]$에 속한다. 따라서 분모는 적어도 $12a - 6a = 6a$이고 등호는 $s = \frac{2}{3}a$일 때만 성립하므로

$$\omega \leq \frac{6u(1+e)}{6a} = \frac{u(1+e)}{a}.$$

그러므로 각속도의 최댓값은 $u(1+e)/a$이고, 이는 $a + x = \frac{2}{3}a$일 때, 즉

$$x = -\tfrac{1}{3}a.$$

일 때 얻어진다. 음의 부호는 단지 P가 중심보다 B 쪽에 있다는 뜻이다. P는 A에서 $\frac{4}{3}a$, B에서 $\frac{2}{3}a$만큼 떨어져 있다.

검산

- $x = a$(회전축이 A에 있는 경우)이고 $e = 1$이면 공식은 $\omega = 3mu/\big(a(M+3m)\big)$를 준다. $M \to 0$이라 하면 $\omega = u/a$이므로 B는 $2u$로 움직이는데, 이는 매우 가벼운 "표적"이 탄성 충돌로 맞았을 때의 익숙한 결과이다.
- 최적인 경우에서 $a = 1$, $u = 1$, $e = \frac{1}{2}$로 두면 막대는 $\omega = 1.5$로 회전하므로 B는 1로 움직이고, 충돌 후 입자의 속도는 $v = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$이다. 이때 P에 대한 각운동량은 $2M \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3}M\big(1 + \frac{1}{3}\big) \cdot 1.5 = \frac{4}{3}M$이며, 충돌 전의 값 $2M \cdot 1 \cdot \frac{2}{3}$과 일치한다.

- 컴퓨터로 $x \in [-a, a]$에서 촘촘하게 탐색해 보면 최댓값이 $x = -a/3$에서 나타남을 확인할 수 있다.

흔한 실수

- 선운동량을 보존시키는 것: 고정된 회전축이 충격량을 주므로 P에 대한 각운동량만 보존된다.
- 거리 PB를 $a + x$가 아니라 $a - x$나 $2a - x$로 잡는 것.
- $x = -\frac{1}{3}a$가 음수라는 이유로 버리는 것: x는 부호가 있는 위치이며, $[-a, a]$에 속하는 어떤 x든 P를 막대 위에 놓는다.

STEP 너머

미지의 반작용이 사라지도록 모멘트를 잡을 점을 고르는 것은 강체 역학(rigid-body dynamics)에서 가장 유용한 기법 중 하나이다. 이 기법은 "타격 중심(centre of percussion)", 즉 배트나 막대에서 타격을 가해도 회전축에 충격량이 생기지 않는 점에서 다시 등장한다. 대학 1학년 역학에서는 이를 각운동량과 관성 텐서(inertia tensor)의 일반 이론으로 발전시킨다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 충격에 의한 회전과 타격 중심을 매우 명쾌하게 다룬다.

풀이

STEP III 2013, 문제 11

역학 • 탄성 용수철과 에너지

STEP III 2013, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/13-s3-q11

핵심 아이디어

모든 것은 대칭(symmetry)으로 정해진다. 삼각형은 수평을 유지하고, 그 중심은 매달린 점의 바로 아래에 머물며, 위아래로만 움직일 수 있다. 따라서 입자 하나와 용수철 하나만 보면 전체 상황을 알 수 있다. 용수철 하나를 지나는 연직 평면의 기하를 이용하면 용수철의 길이를 θ로 나타낼 수 있다. 연직 방향으로 힘을 분해하면 평형(equilibrium) 조건을 얻고, 에너지 보존(conservation of energy)(탄성 에너지, 중력 퍼텐셜 에너지, 운동 에너지)으로 속력을 구한다.

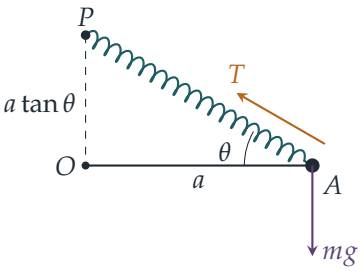
풀이

모형과 기하

질량들은 입자로, 막대는 가볍고 강체인 것으로, 용수철은 가볍고 훅의 법칙(Hooke's law)을 따르는 것으로 본다. 매달린 점을 P, 삼각형의 중심을 O라 하면 O는 P의 바로 아래에 있다. 한 변의 길이가 s인 정삼각형의 중심에서 꼭짓점까지의 거리는 $s/\sqrt{3}$이므로, 각 꼭짓점은 O로부터 수평 거리

$$OA = \frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{3}} = a$$

만큼 떨어져 있다. 꼭짓점 A 하나를 잡고 P, O, A를 지나는 연직 평면을 보자.



용수철 PA는 수평선 OA와 각 θ를 이루므로, 용수철의 길이는 $a/\cos\theta$이고 A는 P보다 $a\tan\theta$만큼 아래에 있다.

장력

각 용수철의 늘어난 길이(extension)는

$$x = \frac{a}{\cos\theta} - a = \frac{a(1-\cos\theta)}{\cos\theta},$$

이다. 따라서 탄성 계수(modulus)가 kmg이고 자연 길이(natural length)가 a이므로 훅의 법칙에 의해

$$T = \frac{kmg}{a}\,x = \frac{kmg(1-\cos\theta)}{\cos\theta},$$

이고, 이것이 보이려던 결과이다.

$\theta = \frac{1}{6}\pi$에서의 평형

A에 있는 입자에 작용하는 힘은 무게, AP 방향의 용수철 장력(tension), 그리고 두 막대가 주는 힘이다. 막대는 수평면 위에 있으므로 막대가 주는 힘은 수평 방향이다.

? **생각해 보기** 막대가 주는 힘을 왜 무시할 수 있을까?

연직 방향으로 힘을 분해하는데, 막대가 주는 힘에는 연직 성분이 없기 때문이다. (수평 방향으로는 장력의 성분 $T\cos\theta$가 막대에 의해 상쇄되며, 그래서 막대가 필요하다. 하지만 그 식은 필요하지 않다.) A에서 연직 방향으로 분해하면

$$T\sin\theta = mg \quad\Longrightarrow\quad k(1-\cos\theta)\tan\theta = 1.$$

$\theta = \frac{1}{6}\pi$에서 $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$이므로

$$k\cdot\frac{2-\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = 1 \quad\Longrightarrow\quad k = \frac{2\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = 4\sqrt{3}+6,$$

이다. 여기서 $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 1$을 썼다. 이것이 구하려던 값이다.

평형 위치에서의 속력

대칭에 의해 삼각형은 중심이 P 아래에 있는 채로 수평을 유지하므로, 세 입자는 모두 같은 속력으로 연직 방향으로 움직인다. 중력과 용수철 외에는 일을 하는 외력이 없으므로 에너지가 보존된다. 늘어난 길이가 x인 용수철의 탄성 에너지는 $kmg\,x^2/(2a)$이다.

처음 상태($\theta = \frac{1}{3}\pi$, **정지**). 이때 $\cos\theta = \frac{1}{2}$이므로 늘어난 길이는 $x_1 = a$이고, P 아래로의 깊이는 $a\tan\frac{1}{3}\pi = \sqrt{3}a$이다.

평형 상태($\theta = \frac{1}{6}\pi$). 늘어난 길이는

$$x_2 = a\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right) = \frac{a(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}}, \qquad x_2^2 = \frac{a^2(7-4\sqrt{3})}{3},$$

이고, 깊이는 $a\tan\frac{1}{6}\pi = \frac{a}{\sqrt{3}}$이다. 따라서 각 입자가 올라가는 높이는

$$\sqrt{3}a - \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{2a}{\sqrt{3}}.$$

세 용수철에서 **방출되는 탄성 에너지**는

$$\begin{aligned} 3\cdot\frac{kmg}{2a}\left(x_1^2 - x_2^2\right) &= \frac{3kmg}{2a}\cdot\frac{a^2(3-7+4\sqrt{3})}{3} \\ &= 2kmga(\sqrt{3}-1). \end{aligned}$$

$k = 4\sqrt{3}+6$이면 $k(\sqrt{3}-1) = 12-4\sqrt{3}+6\sqrt{3}-6 = 6+2\sqrt{3}$이므로, 방출되는 탄성 에너지는 $4mga(3+\sqrt{3})$이다.

세 입자가 **얻는 중력 퍼텐셜 에너지**는 $3mg\cdot\dfrac{2a}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}\,mga$이다.

그 차이가 각각 속력 V로 움직이는 세 입자의 운동 에너지가 된다.

$$\begin{aligned} \tfrac{3}{2}mV^2 &= 4mga(3+\sqrt{3}) - 2\sqrt{3}\,mga = mga\left(12+2\sqrt{3}\right), \\ V^2 &= \frac{2ag}{3}\left(12+2\sqrt{3}\right) = \frac{4ag}{3}\left(6+\sqrt{3}\right), \end{aligned}$$

이고, 이것이 보이려던 결과이다.

검산

- 부호: $\theta = \frac{1}{3}\pi$에서 각 용수철이 연직 방향으로 당기는 힘은 $T\sin\theta = kmg\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 11.2\,mg > mg$이므로, 에너지 식에서 가정한 대로 삼각형은 실제로 평형 위치를 향해 위로 움직이기 시작한다.
- 답은 양수이고 속력의 제곱의 단위(ag)를 가진다.

- $a = 1.3\,\mathrm{m}$, $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$로 두고 $\theta = \frac{1}{3}\pi$에서 정지한 상태부터 운동 방정식(equation of motion) $\ddot{y} = g - \frac{T}{m}\sin\theta$를 수치적으로 한 걸음씩 풀어 나가면, $\theta = \frac{1}{6}\pi$에서 $V^2 \approx 131.48\,\mathrm{m^2\,s^{-2}}$를 얻으며 이는 $\frac{4ag}{3}(6+\sqrt{3})$과 일치한다.

흔한 실수

- 중심에서 꼭짓점까지의 거리를 a가 아니라 $\sqrt{3}a$나 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$로 잡는 실수.
- 용수철이 세 개, 입자가 세 개라는 사실을 잊는 실수. 인수 3은 탄성 에너지, 중력 퍼텐셜 에너지, 운동 에너지 항에 모두 나타난다.
- 운동 방향을 잘못 잡는 실수. 두 위치 사이에서 입자는 **올라가므로**, 중력 퍼텐셜 에너지는 잃는 것이 아니라 얻는 것이다.

STEP 너머

여기서 삼각형의 자유도(degree of freedom)가 하나뿐인 것은 대칭이 다른 모든 운동을 배제하기 때문이다. 좌표 하나(여기서는 θ 또는 깊이 y)를 골라 에너지를 그 좌표로 나타내는 것이 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)의 출발점이다. 또 평형점 근처에서 퍼텐셜 에너지(potential energy)를 전개하면 작은 연직 진동의 주기(period)도 얻을 수 있다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 관점에서 에너지 방법과 작은 진동을 전개한다.

풀이

STEP III 2013, 문제 12

확률과 통계 • 지시 확률변수

STEP III 2013, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/13-s3-q12

핵심 아이디어

각 X_k는 위치 k에서 A들의 새로운 블록이 시작될 때에만 정확히 1이 되므로, S는 줄에 있는 A들의 블록(연, runs)의 개수를 센다. 이 변수들은 지시변수(indicator variable)이므로, 모든 기댓값(expectation)은 단지 몇몇 지정된 위치에 지정된 문자가 놓일 확률일 뿐이며, 이 확률은 관여하는 위치가 어디인지가 아니라 몇 개인지에만 의존한다. 분산(variance)을 구하기 위해서는 S^2을 전개하고 곱 X_iX_j를 유형별로 분류한다. 첨자가 같은 경우, 첨자가 이웃한 경우(이 경우는 불가능함이 밝혀진다), 그리고 나머지 경우이다.

풀이

전체에 걸쳐 $\binom{n}{a}$가지 배열은 모두 같은 확률로 나타난다. 이로부터 유용한 사실을 얻는다. 임의의 m개의 **서로 다른** 위치에 대해, 이 위치들이 p개의 A와 q개의 B($p+q=m$)로 이루어진 지정된 패턴을 가질 확률은 위치를 하나씩 채워 나가며 구할 수 있다. 예를 들어

$$\Pr(\text{위치} r, s\text{에 각각} B, A) = \frac{b}{n} \cdot \frac{a}{n-1},$$

이고, 이는 서로 다른 위치 r와 s가 무엇이든 성립한다. 각 X_k는 0과 1의 값만 가지므로 $\mathrm{E}(X_k) = \Pr(X_k = 1)$이고, 마찬가지로 $\mathrm{E}(X_iX_j) = \Pr(X_i = 1\text{이고}X_j = 1)$이다.

소문항 (i)

$i = 1$일 때는 첫 문자가 A이어야 하므로

$$\mathrm{E}(X_1) = \frac{a}{n}.$$

$2 \le i \le n$일 때는 위치 $i-1$에 B가, 위치 i에 A가 있어야 하므로

$$\mathrm{E}(X_i) = \frac{b}{n} \cdot \frac{a}{n-1} = \frac{ab}{n(n-1)}.$$

기댓값의 선형성(linearity of expectation)에 의해, $i \ge 2$인 $n-1$개의 첨자에 대해 더하면

$$\mathrm{E}(S) = \frac{a}{n} + (n-1) \cdot \frac{ab}{n(n-1)} = \frac{a}{n} + \frac{ab}{n} = \frac{a(b+1)}{n},$$

이므로 요구된 결과를 얻는다.

소문항 (ii)

(a) $j \ge 3$이라 하자. 그러면 $X_1 X_j = 1$인 것은 위치 1에 A, 위치 $j-1$에 B, 위치 j에 A가 있을 때와 정확히 같다. $j-1 \ge 2$이므로 이들은 서로 다른 세 위치이고, 두 개의 A와 한 개의 B를 담는다. 차례로 채우면

$$\mathrm{E}(X_1 X_j) = \frac{a}{n} \cdot \frac{b}{n-1} \cdot \frac{a-1}{n-2} = \frac{a(a-1)b}{n(n-1)(n-2)}.$$

(b) 이제 $2 \le i$이고 $j \ge i+2$라 하자. 그러면 $X_i X_j = 1$인 것은 위치 $i-1$, i, $j-1$, j에 각각 B, A, B, A가 있을 때와 정확히 같다. $j-1 \ge i+1 > i$이므로 이 네 위치는 서로 다르고, 두 개의 A와 두 개의 B를 담으므로

$$\mathrm{E}(X_i X_j) = \frac{b}{n} \cdot \frac{a}{n-1} \cdot \frac{b-1}{n-2} \cdot \frac{a-1}{n-3} = \frac{a(a-1)b(b-1)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}.$$

(여기서 $a, b \ge 2$이므로 $n \ge 4$이고, 따라서 분모가 0이 되는 일은 없다.) 이 값은 이중합의 모든 쌍에 대해 같으므로 쌍의 개수만 세면 된다. 주어진 i에 대해 j는 $i+2$부터 n까지, 즉 $n-i-1$개의 값을 가진다. i가 2부터 $n-2$까지 변하면 이 값은 $n-3$, $n-4$, …, 1이 된다. 따라서 쌍의 개수는

$$1 + 2 + \cdots + (n-3) = \tfrac{1}{2}(n-3)(n-2),$$

이고

$$\sum_{i=2}^{n-2} \left(\sum_{j=i+2}^{n} \mathrm{E}(X_i X_j) \right) = \frac{(n-2)(n-3)}{2} \cdot \frac{a(a-1)b(b-1)}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = \frac{a(a-1)b(b-1)}{2n(n-1)}.$$

(c) $\mathrm{Var}(S) = \mathrm{E}(S^2) - \big(\mathrm{E}(S)\big)^2$을 이용하고 다음과 같이 전개한다.

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 + 2 \sum_{i<j} X_i X_j.$$

X_i는 0 또는 1이므로 $X_i^2 = X_i$이고, 따라서 첫 번째 합의 기댓값은 $\mathrm{E}(S)$이다.

? 생각해 보기 (b)에서 빠진, $j = i+1$인 쌍들은 어떻게 되는가?

이 쌍들은 아무것도 기여하지 않는다. 항상 $X_iX_{i+1} = 0$이기 때문이다. $i = 1$일 때, $X_1 = 1$이려면 위치 1에 A가 있어야 하지만 $X_2 = 1$이려면 그 자리에 B가 있어야 한다. $i \geq 2$일 때, $X_i = 1$이려면 위치 i에 A가 있어야 하지만 $X_{i+1} = 1$이려면 그 자리에 B가 있어야 한다. (A들의 두 블록이 이웃한 위치에서 시작할 수는 없다.)

따라서 의미 있는 쌍 $i < j$는 $j \geq i+2$인 것들이다. 그중 $i = 1$인 것은 $j = 3, \ldots, n$으로 $n-2$개의 쌍이며, 각각은 (a)에서 구한 값을 가진다. $i \geq 2$인 것들은 정확히 (b)의 이중합이다. 그러므로

$$\begin{aligned}\sum_{i<j} \mathrm{E}(X_iX_j) &= (n-2)\cdot\frac{a(a-1)b}{n(n-1)(n-2)} + \frac{a(a-1)b(b-1)}{2n(n-1)} \\ &= \frac{a(a-1)b}{n(n-1)}\left(1+\frac{b-1}{2}\right) = \frac{a(a-1)b(b+1)}{2n(n-1)},\end{aligned}$$

이고, 따라서

$$\mathrm{E}(S^2) = \frac{a(b+1)}{n} + \frac{a(a-1)b(b+1)}{n(n-1)}.$$

$\big(\mathrm{E}(S)\big)^2 = a^2(b+1)^2/n^2$을 빼고 공통인수 $\dfrac{a(b+1)}{n^2(n-1)}$로 묶으면

$$\mathrm{Var}(S) = \frac{a(b+1)}{n^2(n-1)}\Big[n(n-1) + n(a-1)b - a(b+1)(n-1)\Big].$$

괄호를 전개하면 nab와 $-nab$가 소거되어 다음이 남는다.

$$\begin{aligned}n^2 - n - nb - na + ab + a &= n(n-a-b) - n + ab + a \\ &= -n + ab + a \qquad \text{왜냐하면} n = a+b \\ &= ab - b = b(a-1).\end{aligned}$$

따라서

$$\mathrm{Var}(S) = \frac{a(b+1)}{n^2(n-1)}\cdot b(a-1) = \frac{a(a-1)b(b+1)}{n^2(n-1)},$$

이므로 요구된 결과를 얻는다.

검산

$a = 3, b = 2$로 두면 $n = 5$이고 배열은 10가지이다. A들의 블록을 세어 보면, 배열 $AAABB$, $BAAAB$, $BBAAA$는 $S = 1$을, $ABABA$는 $S = 3$을, 나머지 여섯 개는 $S = 2$를 준다. 따라서 $\mathrm{E}(S) = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}$이고 $\mathrm{E}(S^2) = \frac{36}{10}$이므로 $\mathrm{Var}(S) = \frac{18}{5} - \frac{81}{25} = \frac{9}{25}$이다. 공식은 $\frac{3\cdot3}{5} = \frac{9}{5}$와 $\frac{3\cdot2\cdot2\cdot3}{25\cdot4} = \frac{9}{25}$를 준다. 컴퓨터로 모든 경우를 나열하여, 모든 $2 \leq a, b \leq 6$에 대해 문제의 모든 공식이 정확히 성립함을 확인하였다.

이 공식들은 주어진 범위 밖에서도 타당하게 작동한다. $a = 2, b = 1$일 때 배열 AAB, ABA, BAA는 $S = 1, 2, 1$을 주므로 $\mathrm{E}(S) = \frac{4}{3}$이고 $\mathrm{Var}(S) = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}$이며, 이는 $\frac{2\cdot 2}{3}$ 및 $\frac{2\cdot 1\cdot 1\cdot 2}{9\cdot 2}$와 일치한다. 또 $a = 1$이면 분산 공식은 0을 주는데, 이때는 블록이 항상 정확히 하나이므로 마땅히 그래야 한다.

흔한 실수

- X_1을 다른 변수들과 똑같이 취급하는 것. 위치 0은 없으므로 X_1은 문자 하나만 필요하고, $\mathrm{E}(X_1) = a/n$이지 $ab/(n(n-1))$이 아니다.
- X_i와 X_{i+1}이 동시에 1일 수 없다는 것을 잊거나, $\mathrm{E}(X_i X_{i+1})$을 0이 아닌 식으로 계산하는 것.
- (b)에서 쌍의 개수를 잘못 세는 것. 쌍은 $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$개이지 $\frac{1}{2}n(n-1)$개가 아니다.

STEP 너머

어떤 개수를 지시변수들의 합으로 쓴 다음, 평균은 선형성으로, 분산은 쌍별 곱으로 구하는 방법은 대학 확률론에서 가장 유용한 기법 중 하나이다. 연, 짝짓기(matching), 무작위 순열(random permutation)의 고정점(fixed point), 무작위 그래프(random graph)를 분석하는 방법이 바로 이것이다. 여기서 S는 본질적으로 수열의 비무작위성을 탐지하는 데 쓰이는 왈드–울포위츠 연 검정(Wald–Wolfowitz runs test)의 통계량이다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)에는 지시변수 방법의 예가 많이 실려 있다.

풀이

STEP III 2013, 문제 13

확률과 통계 • 적률과 분포함수

STEP III 2013, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/13-s3-q13

핵심 아이디어

$\mathrm{F}' = \mathrm{f}$이므로 식 $2\mathrm{F}(x)\mathrm{f}(x)$는 $\big(\mathrm{F}(x)\big)^2$의 도함수(derivative)이다. 그래서 소문항 (i)(b)는 한 번의 부분적분(integration by parts)으로 끝나며, g를 알맞게 고르면 Y에 관한 모든 질문을 X에 관한 질문으로 바꿀 수 있다. 부등식들은 f나 F를 소문항 (i)(a)에서 얻은 더 큰 양 M 또는 Mx로 바꾸어 얻는데, 매번 적분이 커지는 방향으로 바꾼다.

풀이

이 풀이 전체에서 $\mathrm{F}(x) = \int_0^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t$이므로 $\mathrm{F}'(x) = \mathrm{f}(x)$이고, X가 $[0,1]$에 놓이므로 $\mathrm{F}(0) = 0, \mathrm{F}(1) = 1$이다.

소문항 (i)

(a) $0 \le x \le 1$일 때, 모든 t에 대하여 $0 \le \mathrm{f}(t) \le M$이므로

$$0 \le \int_0^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t \le \int_0^x M\,\mathrm{d}t = Mx,$$

이고, 이것이 곧 $0 \le \mathrm{F}(x) \le Mx$이다.

(b) 연쇄법칙(chain rule)에 의해 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\mathrm{F}(x)\big)^2 = 2\mathrm{F}(x)\mathrm{f}(x)$이다. $u = \mathrm{g}(x)$, $\mathrm{d}v = 2\mathrm{F}(x)\mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$, 즉 $v = \big(\mathrm{F}(x)\big)^2$으로 두고 부분적분하면

$$\begin{aligned}\int_0^1 2\mathrm{g}(x)\mathrm{F}(x)\mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x &= \Big[\mathrm{g}(x)\big(\mathrm{F}(x)\big)^2\Big]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{g}'(x)\big(\mathrm{F}(x)\big)^2\,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{g}(1) - \int_0^1 \mathrm{g}'(x)\big(\mathrm{F}(x)\big)^2\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

이다. 여기서 $\mathrm{F}(1) = 1, \mathrm{F}(0) = 0$을 썼다. (g가 미분가능(differentiable)해야 하는데, 문제에서 이를 암묵적으로 가정하고 있다.)

소문항 (ii)

(a) Y의 밀도함수(density)를 적분하면 1이 되어야 한다. (i)(b)에서 $\mathrm{g}(x) = 1$로 두면 $\mathrm{g}' = 0$이므로

$$\int_0^1 2\mathrm{F}(y)\mathrm{f}(y)\,\mathrm{d}y = 1,$$

이고, 따라서 $k = 2$이다. (같은 방법으로 $\int_0^1 k\mathrm{F}\mathrm{f}\,\mathrm{d}y = \frac{k}{2}\big[\mathrm{F}^2\big]_0^1 = \frac{k}{2}$로 보아도 된다.) 또한 $k\mathrm{F}\mathrm{f} \geq 0$이므로 이것은 실제로 밀도함수이다.

(b) 다음이 성립한다.

$$\mathrm{E}(Y^n) = \int_0^1 2y^n\,\mathrm{F}(y)\mathrm{f}(y)\,\mathrm{d}y.$$

상한(*upper bound*). (i)(a)에 의해 $\mathrm{F}(y) \leq My$이고, 나머지 인수 $2y^n\mathrm{f}(y)$는 음이 아니므로

$$\mathrm{E}(Y^n) \leq \int_0^1 2y^n \cdot My \cdot \mathrm{f}(y)\,\mathrm{d}y = 2M\int_0^1 y^{n+1}\mathrm{f}(y)\,\mathrm{d}y = 2M\mu_{n+1}.$$

하한(*lower bound*). 이번에는 (i)(b)를 $\mathrm{g}(y) = y^n$으로 두고 쓴다. 그러면 $\mathrm{g}(1) = 1$, $\mathrm{g}'(y) = ny^{n-1}$이므로

$$\mathrm{E}(Y^n) = 1 - \int_0^1 ny^{n-1}\big(\mathrm{F}(y)\big)^2\,\mathrm{d}y.$$

($n = 0$이면 이 적분은 그냥 0이다.) $\mathrm{E}(Y^n)$의 하한을 구하려면 이 적분의 **상한**을 구해야 한다.

> **생각해 보기** $\big(\mathrm{F}(y)\big)^2$의 두 인수 중 어느 것을 My로 바꾸어야 할까?

하나만 바꾸면 된다. $0 \leq \mathrm{F}(y) \leq My$이므로 $\big(\mathrm{F}(y)\big)^2 \leq My\,\mathrm{F}(y)$이고, $ny^{n-1} \geq 0$이므로

$$\int_0^1 ny^{n-1}\big(\mathrm{F}(y)\big)^2\,\mathrm{d}y \leq nM\int_0^1 y^n\mathrm{F}(y)\,\mathrm{d}y.$$

두 인수를 모두 바꾸면 $\int y^{n+1}\,\mathrm{d}y$만 남는데, 이것은 X에 대해 아무것도 말해 주지 않는다. F 하나를 남겨 두면 한 번 더 부분적분하여 X의 적률(moment)을 만들 수 있다. $u = \mathrm{F}(y)$, $\mathrm{d}v = y^n\,\mathrm{d}y$로 두고 부분적분하면

$$\int_0^1 y^n \mathrm{F}(y)\,\mathrm{d}y = \Big[\frac{y^{n+1}}{n+1}\mathrm{F}(y)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{y^{n+1}}{n+1}\mathrm{f}(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1-\mu_{n+1}}{n+1}.$$

이를 종합하면

$$\mathrm{E}(Y^n) \geq 1 - \frac{nM}{n+1}\big(1-\mu_{n+1}\big) = 1 + \frac{nM}{n+1}\mu_{n+1} - \frac{nM}{n+1},$$

이고, 앞의 상한과 함께 이것이 구하려던 한 쌍의 부등식이다.

(c) (b)의 양 끝을 합치면 $n \geq 0$에 대하여

$$1 + \frac{nM}{n+1}\mu_{n+1} - \frac{nM}{n+1} \leq 2M\mu_{n+1},$$

이고, μ_{n+1}이 들어 있는 항을 오른쪽으로 모으면

$$1 - \frac{nM}{n+1} \leq \Big(2M - \frac{nM}{n+1}\Big)\mu_{n+1} = \frac{(n+2)M}{n+1}\,\mu_{n+1}.$$

f를 적분하면 1이므로 $M > 0$이고, 따라서 계수 $\frac{(n+2)M}{n+1}$은 양수이다. 그러므로 부등호 방향을 바꾸지 않고 이 계수로 나눌 수 있다.

$$\mu_{n+1} \geq \frac{n+1}{(n+2)M} - \frac{n}{n+2}.$$

이 부등식은 모든 $n \geq 0$에 대하여 성립한다. $m = n+1$로 두면 $m \geq 1$이고, 부등식은

$$\mu_m \geq \frac{m}{(m+1)M} - \frac{m-1}{m+1} \qquad (m \geq 1),$$

이 된다. m을 n으로 다시 쓰면 이것이 구하려던 결과이다.

검산

- 균등분포(uniform distribution)를 따르는 X: $\mathrm{f} = 1$, $M = 1$, $\mu_n = \frac{1}{n+1}$이다. (c)의 하한은 $\frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n+1} = \frac{1}{n+1}$이므로 등호가 성립한다. 이때 Y의 밀도함수는 $2y$이고 $\mathrm{E}(Y^n) = \frac{2}{n+2}$이며, (b)의 두 부등식의 양 끝도 모두 $\frac{2}{n+2}$이다. 이는 자연스러운 결과이다. 우리가 사용한 부등식 $\mathrm{F}(y) \leq My$는 균등분포에서 모두 등식이 되기 때문이다.
- $\mathrm{f}(x) = 3x^2$, $M = 3$, $n = 2$: $\mu_2 = \frac{3}{5}$이고 하한은 $\frac{2}{9} - \frac{1}{3} < 0$이므로 넉넉히 성립한다. 이 밀도함수에 대하여 $\mathrm{E}(Y^2) = \frac{3}{4}$, $\mu_3 = \frac{1}{2}$이므로 (b)의 양 끝은 $1 + 2\cdot\frac{1}{2} - 2 = 0$과 $2\cdot 3\cdot\frac{1}{2} = 3$이고, $\frac{3}{4}$는 그 사이에 있다.
- (i) (b)의 항등식과 모든 부등식은 여러 밀도함수와 여러 가지 g에 대하여 수치적분(numerical integration)으로도 확인하였다.

흔한 실수

- $\left(\mathrm{F}\right)^2$을 M^2y^2으로 누르는 것: 참이기는 하지만 X에 관한 정보를 모두 잃어버리므로 아무 데도 이르지 못한다.
- $\mathrm{E}(Y^n)$의 식에서 적분 앞에 빼기 부호가 붙어 있다는 것을 잊는 것. $\mathrm{E}(Y^n)$의 하한을 얻으려면 적분의 **상한**이 필요하다.
- μ_{n+1}에 대한 부등식에서 멈추고, 첨자를 옮겨 $n \geq 1$에 대한 주어진 꼴로 바꾸지 않는 것.

STEP 너머

밀도함수 $2\mathrm{F}(y)\mathrm{f}(y)$는 우연히 나온 것이 아니다. $\mathrm{P}(\max \leq y) = \left(\mathrm{F}(y)\right)^2$이므로, 이것은 X와 같은 분포를 따르는 서로 독립(independent)인 두 확률변수에 대한 $\max(X_1, X_2)$의 밀도함수이다. 더 일반적으로, n개의 독립인 관측값 중 r번째로 작은 값의 밀도함수는 F와 $1 - \mathrm{F}$의 거듭제곱으로 이루어진다. 이러한 **순서통계량**(order statistics)은 비모수 통계학(non-parametric statistics)의 핵심이다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)에 순서통계량이 명료하게 설명되어 있다.

Beyond STEP

STEP은 대부분의 학생이 학창 시절에 치르는 수학 시험 가운데 가장 어려운 시험이다. 또한 가장 훌륭한 시험 가운데 하나이기도 하다. 문제는 짧고 낯설며 깊이가 있고, 그중 가장 뛰어난 문제들은 대학 수학의 작은 조각이 모습을 감추고 있는 것이다.

이 책은 1987년 첫 시험에 앞서 나온 예시 시험지(specimen papers)부터 2025년 시험지까지 가운데 가장 흥미로운 STEP 문제들을 골라, 각 문제를 하나의 문으로 삼는다. 모든 문제는 뛰어난 학생이 풀어 가면서 던질 법한 질문들과 함께 꼼꼼하게 풀이하고, 그런 다음 책은 그 문을 지나 한 걸음 더 나아간다. 그 아이디어가 어디에서 왔는지, 대학에서는 무엇으로 발전하는지, 그리고 다음에는 무엇을 읽으면 좋은지를 살펴본다.

이 책은 STEP을 준비하면서 기출 문제 연습 이상의 것을 원하는 재능 있는 예비 수학자를 위해 쓰였다. 수학과 학부생처럼 생각하기 시작하고, 앞으로 무엇이 자신을 기다리고 있는지 알아보고 싶은 학생들을 위한 책이다.

- 순수 수학(pure mathematics), 역학(mechanics), 확률(probability)과 통계(statistics)를 아우르는 13개의 장
- 이 36개의 STEP 기출 문제와 각 문제의 안내식 풀이
- 모든 문제 뒤에 숨은 대학 수학
- 답이 실린 후속 연습 문제와 더 읽을거리

2013년 풀이. 책 전체와 모든 장,
모든 풀이를 다음 주소에서 무료로 읽고, 내려받고, 공유할 수 있다.

beyondstep.keithmcnulty.org

본문은 퍼블릭 도메인(CC0 1.0)으로 공개한다. STEP 문제 © Cambridge University Press & Assessment.

