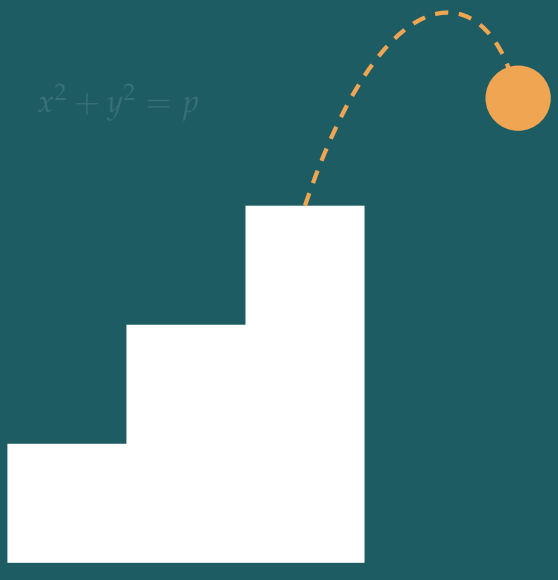
STEP 대비 · 대학 수학

Beyond STEP

STEP I, II 및 III

2012년 풀이



KEITH McNULTY

Beyond STEP

STEP 기출문제로 여는
대학 수학의 세계

STEP I, II 및 III

2012년 풀이

Keith McNulty

Beyond STEP: STEP 기출문제로 여는 대학 수학의 세계

2012년 풀이

2012년 STEP 문제지(STEP I, II 및 III)의 39개 문제 전체에 대한 풀이. 견본 문제지 이후 모든 STEP 문제의 풀이와 *Beyond STEP* 책 전체, 그리고 각 장을 `beyondstep.keithmcnulty.org`에서 무료로 읽고 내려받을 수 있다.

풀이를 읽기 전에 먼저 문제를 제대로 풀어 보자. 모든 답은 수치적으로 검증하였지만, 풀이가 이렇게 많으면 실수가 어느 정도 있을 수밖에 없다. 무언가 잘못된 것처럼 보이면 자신의 풀이를 믿고 꼼꼼히 확인해 보자.

영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.

2026년 11월 온라인 초판 발행.

이 PDF에서 지은이가 직접 만든 모든 것, 곧 본문, 풀이, 그림, 연습문제와 해답은 크리에이티브 커먼즈 CC0 1.0 Universal 라이선스에 따라 퍼블릭 도메인(public domain)으로 공개한다. 누구든 허락을 구하지 않고 어떤 목적으로든 복사하고, 고쳐 쓰고, 공유할 수 있다. 자세한 내용은 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`을 보라.

여기에서 다루는 STEP 문제의 저작권은 Cambridge University Press & Assessment에 있다. 문제는 이 책에 싣지 않았으며, 각 문제마다 공식 출처인 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스나 OCR의 기출 시험지로 가는 링크를 달았다.

오류 제보는 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty에 이슈로 남겨 주기 바란다.

차례

STEP I

Q1 미적분을 이용한 최적화 순수수학 3

Q2 곡선 그리기와 근 순수수학 7

Q3 넓이에서 얻는 부등식 순수수학 12

Q4 접선과 법선 순수수학 16

Q5 치환적분 순수수학 20

Q6 삼각부등식(삼각함수) 순수수학 23

Q7 주기적인 점화식 순수수학 27

Q8 동차 미분방정식 순수수학 32

Q9 포물체 운동 역학 36

Q10 자유 낙하와 소리 역학 40

Q11 도르래와 마찰 역학 44

Q12 조건부 확률 확률과 통계 48

Q13 지시변수를 통한 기댓값 확률과 통계 52

STEP II

Q1 이항급수의 계수 순수수학 56

Q2 다항식의 합성 순수수학 60

Q3 치환적분 순수수학 64

Q4 로그 급수 부등식 순수수학 67

Q5 역수 함수의 그래프 그리기 순수수학 71

Q6 원에 내접하는 사각형의 넓이 순수수학 76

Q7 벡터와 원 순수수학 80

Q8 비선형 점화식 순수수학 84

Q9 포물체 운동 역학 88

Q10 마찰과 모멘트 역학 92
Q11 비탄성 충돌 역학 96
Q12 조건부 확률 확률과 통계 100
Q13 푸아송 과정과 최근접 거리 확률과 통계 104

STEP III

Q1 비선형 미분방정식 순수수학 108
Q2 무한곱과 급수 순수수학 112
Q3 접하는 곡선과 사차식 순수수학 116
Q4 무한급수의 합 순수수학 122
Q5 이차곡선 위의 유리점 순수수학 126
Q6 복소근의 자취 순수수학 130
Q7 연립 미분방정식 순수수학 135
Q8 피보나치 망원급수 순수수학 139
Q9 회전하는 도르래의 역학 역학 143
Q10 원운동 역학 147
Q11 접힌 채 떨어지는 밧줄 역학 151
Q12 기하학적 확률 확률과 통계 155
Q13 절단정규분포 확률과 통계 159

풀이

STEP I 2012, 문제 1

순수수학 • 미적분을 이용한 최적화

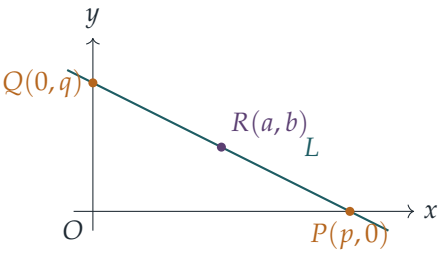
> **STEP I 2012, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/12-s1-q1

핵심 아이디어

모든 것은 단 하나의 수, 곧 기울기(gradient)가 결정한다. L이 R를 지나도록 고정하면 절편(intercept) p와 q는 m의 간단한 함수가 되고, 최소화해야 할 두 거리는 모두 오직 m만의 함수가 된다. 합 $p+q$는 상수와 $am+b/m$ 꼴의 항으로 나뉘는데, 이는 산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)(또는 한 번의 미분)으로 처리하는 교과서적인 문제이다. 길이 PQ에 대해서는 $q=mp$임을 알아차리는 것이 유리하다. 그러면 미분하기 전에 PQ^2가 깔끔하게 인수분해된다.

풀이

p와 q 구하기



$R(a,b)$가 $y=c-mx$ 위에 있으므로 $b=c-ma$이고, 따라서 $c=b+ma$이다. 직선은 $x=0$인 곳에서 y축과 만나므로 $q=c$이고, $y=0$인 곳에서 x축과 만나므로 $p=c/m$이다($m>0$이므로 나눌 수 있다). 그러므로

$$p=a+\frac{b}{m}, \qquad q=b+ma.$$

요구된 대로 모든 $m > 0$에 대해 두 값은 모두 양수이다. 또한

$$q = b + ma = m\left(a + \frac{b}{m}\right) = mp,$$

임에 주목하자. 이는 L의 기울기가 $-q/p$라는 사실을 다르게 표현한 것일 뿐이다. 이 사실을 아래에서 사용한다.

$OP + OQ$의 최소화

$p, q > 0$이므로 O로부터 P와 Q까지의 거리는 각각 p와 q 자신이다. 따라서 R를 고정하고 m을 $m > 0$ 범위에서 변화시킬 때 최소화해야 할 것은

$$S(m) = p + q = a + b + \left(am + \frac{b}{m}\right).$$

이다. 괄호 안은 두 양수의 합이고, 그 곱 ab는 m에 의존하지 않는다. 산술-기하 평균 부등식에 의해

$$am + \frac{b}{m} \geq 2\sqrt{am \cdot \frac{b}{m}} = 2\sqrt{ab},$$

이고, 등호는 정확히 $am = b/m$일 때, 곧 $m = \sqrt{b/a}$일 때 성립한다(이 값은 양수이므로 이 직선은 허용된다). 그러므로

$$S(m) \geq a + b + 2\sqrt{ab} = (a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})^2,$$

이고 이 하한은 실제로 도달된다. 따라서 요구된 대로 두 거리의 합의 최솟값은 $(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})^2$이다.

(미적분을 선호한다면: $S'(m) = a - b/m^2$이고, 이는 $m = \sqrt{b/a}$에서만 0이 되며, 대입하면 같은 값을 얻는다.)

PQ의 최소화

피타고라스(Pythagoras) 정리와 $q = mp$를 이용하면

$$PQ^2 = p^2 + q^2 = p^2(1 + m^2) = \left(a + \frac{b}{m}\right)^2 (1 + m^2).$$

$PQ > 0$이므로 PQ를 최소화하는 것은 $f(m) = PQ^2$을 최소화하는 것과 같다. 곱의 미분법(product rule)과 연쇄법칙(chain rule)으로 미분하면

$$\begin{aligned} f'(m) &= 2\left(a + \frac{b}{m}\right)\left(-\frac{b}{m^2}\right)(1 + m^2) + 2m\left(a + \frac{b}{m}\right)^2 \\ &= 2\left(a + \frac{b}{m}\right)\left[-\frac{b}{m^2} - b + am + b\right] \\ &= 2\left(a + \frac{b}{m}\right)\left(am - \frac{b}{m^2}\right). \end{aligned}$$

? 생각해 보기 $-b$는 어디에서 소거되는가?

대괄호 안에서 $-\frac{b}{m^2}(1+m^2) = -\frac{b}{m^2} - b$이고, $m(a+\frac{b}{m}) = am+b$이므로 두 b가 소거된다. 바로 이 소거 때문에 p^2+q^2를 직접 전개하지 않고 PQ^2을 $p^2(1+m^2)$으로 쓴 것이다.

첫째 인수는 양수이므로 $f'(m)=0$이 되는 것은 정확히 $am = b/m^2$, 곧 $m^3 = b/a$일 때이며, 따라서 유일한 정류점(stationary point)은

$$m = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}.$$

이다. (문제에서 이것이 최솟값이라고 가정해도 된다고 했지만, 실제로 이보다 작은 m에서는 $f' < 0$이고 큰 m에서는 $f' > 0$이므로, 이는 $m > 0$에서의 전역 최솟값(global minimum)이다.)

이제 대입한다. 이 m에 대하여

$$a + \frac{b}{m} = a + b\cdot\frac{a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}} = a + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3}}(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}), \qquad 1+m^2 = 1 + \frac{b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}} = \frac{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}.$$

그러므로

$$PQ^2 = a^{\frac{2}{3}}(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^2 \cdot \frac{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}} = (a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^3,$$

이고, 따라서 P와 Q 사이의 최소 거리는

$$PQ_{\min} = (a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

이다. 이것이 문제에서 요구한 "비슷한 꼴"이다. 첫째 답은 안쪽 지수가 $\frac{1}{2}$, 바깥 지수가 2이고, 이 답은 안쪽 지수가 $\frac{2}{3}$, 바깥 지수가 $\frac{3}{2}$이다.

검산

- 대칭성(symmetry): a와 b를 맞바꾸어도($y=x$에 대한 대칭이동) 두 최솟값은 변하지 않아야 하며, 실제로 그렇다.
- 수치 예: $a=1, b=8$로 두자. 둘째 결과에 따르면 $m=2$이고, 이때 $p=5, q=10$, $PQ = \sqrt{125} = 5\sqrt{5} \approx 11.180$이며, 실제로 $(1+4)^{3/2} = 5\sqrt{5}$이다. 합의 경우 $m=\sqrt{8}$이면 $p+q = 9+4\sqrt{2} \approx 14.657 = (1+2\sqrt{2})^2$이다.
- 무작위로 고른 2000개의 쌍 (a,b)에 대해 m에 관한 전수 탐색과 두 최솟값을 비교해 보았고, 약 10^{-8} 이내로 일치했다.

흔한 실수

- $p^2 + q^2$를 모두 전개한 뒤 미분하는 것: 틀리지는 않지만 복잡하고, 인수 $am - b/m^2$을 놓치기 쉽다. 먼저 $q = mp$를 알아차리면 많은 수고를 덜 수 있다.
- PQ의 최소화와 PQ^2의 최소화가 동치인 것은 오직 $PQ > 0$이기 때문이라는 점을 잊는 것, 그리고 $a + b/m$을 간단히 할 때 분수 지수를 놓치는 것.

STEP 너머

둘째 결과는 고전적인 "모퉁이를 도는 사다리" 문제가 모습을 바꾼 것이다. $(a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$는 폭이 a와 b인 두 복도가 만나는 모퉁이를 수평으로 들고 돌아갈 수 있는 가장 긴 사다리의 길이이다. 길이가 일정한 선분 PQ들의 모임은 아스테로이드(astroid) $x^{2/3} + y^{2/3} = \ell^{2/3}$을 포락선(envelope)으로 가지며, R가 이 포락선 위에 놓이는 것은 정확히 ℓ이 이 최솟값일 때이다. 포락선과 제약 조건이 있는 최적화(constrained optimisation)(나중에는 라그랑주 승수(Lagrange multipliers))는 대학 1학년 미적분학 강좌에서 등장한다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)에 이런 취지의 문제가 더 실려 있다.

풀이

STEP I 2012, 문제 2

순수수학 • 곡선 그리기와 근

> **STEP I 2012, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/12-s1-q2

핵심 아이디어

$p(x) = 0$의 실근(real roots)의 개수를 세는 것은 $y = p(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수를 세는 것과 같고, 상수항을 반대쪽으로 옮기면 고정된 곡선이 수평선과 만나는 점의 개수를 세는 것과 같다. 따라서 이 문제는 결국 사차함수(quartic)의 개형을 아는 문제이다. 즉 어디에서 방향이 바뀌는지, 그리고 그때 얼마나 높거나 낮은지를 알아야 한다. 소문항 (i)에서는 사차식이 완전제곱식이고, 소문항 (ii)에서는 도함수(derivative)에 대한 조건 때문에 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$가 중근(repeated root)을 갖도록 인수분해되어 극점(turning point)이 하나만 남는다.

풀이

소문항 (i)

먼저 다음을 관찰한다.

$$y = x^4 - 6x^2 + 9 = (x^2 - 3)^2,$$

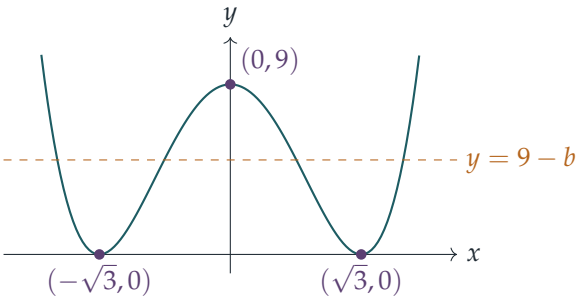
따라서 모든 곳에서 $y \geq 0$이고, $y = 0$이 되는 것은 정확히 $x = \pm\sqrt{3}$일 때이다. 이 곡선은 우함수(even)의 그래프이고(y축에 대하여 대칭), y축과 $(0, 9)$에서 만난다. 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4x^3 - 12x = 4x(x^2 - 3),$$

이고, 이는 $x = 0$과 $x = \pm\sqrt{3}$에서 0이 된다. 따라서 정류점(stationary point)은 다음과 같다.

$$(0,\, 9)\ \text{(극대점)}, \qquad (\sqrt{3},\, 0)\ \text{과}\ (-\sqrt{3},\, 0)\ \text{(극소점)}.$$

$y \geq 0$이고 그 점들에서 $y = 0$이므로 극소점(minima)임은 분명하다. 또 이계도함수(second derivative) $\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 - 12$는 $x = 0$에서 $-12 < 0$이므로 그 점은 극대점(local maximum)이다. $x \to \pm\infty$일 때 $y \to +\infty$이다. 이 곡선은 $x = \pm\sqrt{3}$에서 x축에 접하는 "W" 모양이다.



근의 개수를 세기 위해 양변에 9를 더한다.

$$x^4 - 6x^2 + b = 0 \iff (x^2 - 3)^2 = 9 - b.$$

따라서 n은 수평선 $y = 9 - b$가 방금 그린 곡선과 만나는 횟수이다. 이 직선을 위에서 아래로 움직이면서 그림을 읽으면 다음과 같다.

- $9 - b > 9$, 즉 $b < 0$: 직선이 극댓값보다 위에 있어 바깥쪽 두 갈래하고만 만나므로 $n = 2$이다.
- $9 - b = 9$, 즉 $b = 0$: 직선이 극대점을 지나므로 $x = 0$과 바깥쪽 두 점이 생긴다. 실제로 $x^2(x^2 - 6) = 0$에서 $x = 0, \pm\sqrt{6}$이다. 따라서 $n = 3$이다.
- $0 < 9 - b < 9$, 즉 $0 < b < 9$: 직선이 네 개의 단조(monotonic) 구간을 각각 한 번씩 자르므로 $n = 4$이다.
- $9 - b = 0$, 즉 $b = 9$: 직선이 두 극소점 $x = \pm\sqrt{3}$에서만 접하므로 $n = 2$이다.
- $9 - b < 0$, 즉 $b > 9$: 직선이 곡선 아래에 있으므로 $n = 0$이다.

이를 정리하면 다음과 같다.

(a) $n = 0 \iff b > 9$; (b) $n = 1$ 은 불가능, 어떤b; (c) $n = 2 \iff b < 0$ 또는$b = 9$;

(d) $n = 3 \iff b = 0$; (e) $n = 4 \iff 0 < b < 9$.

$n = 1$이 불가능하다는 것은 대칭성(symmetry)으로도 알 수 있다. x가 근이면 $-x$도 근이므로, 근이 하나뿐이라면 그것은 $x = 0$이어야 하고, 그러면 $b = 0$이 되어 근이 세 개가 된다.

소문항 (ii)

이제 $y = x^4 - 6x^2 + ax + b$이므로

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4x^3 - 12x + a, \qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 12x^2 - 12.$$

이계도함수는 $x = \pm 1$에서만 0이 된다. $x = 1$에서 도함수의 값은 $a - 8$이고, $x = -1$에서는 $a + 8$이다. 따라서 두 도함수가 같은 점에서 동시에 0이 되는 것은 정확히 다음의 경우이다.

$$a = 8 \text{ (위치: } x = 1) \qquad \text{또는} \qquad a = -8 \text{ (위치: } x = -1).$$

$a = 8$인 경우. 이때

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4(x^3 - 3x + 2) = 4(x-1)^2(x+2),$$

이다. 여기서 인수 $(x-1)^2$를 찾을 수 있었던 것은 $x = 1$이 y'과 y''의 공통근, 즉 y'의 중근이 되도록 만들었기 때문이다.

생각해 보기 이 곡선에는 실제로 극점이 몇 개 있는가?

$(x-1)^2 \geq 0$이므로 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$의 부호는 $x + 2$의 부호와 같다. 따라서 y는 $x < -2$에서 순감소하고 $x > -2$에서 순증가한다($x = 1$에서 기울기가 0이지만 부호가 바뀌지 않으므로, 그 점은 극점이 아니라 정류 변곡점(stationary point of inflection)이다). 극점은 $x = -2$에서의 최솟값(global minimum) 하나뿐이고, 그 값은

$$y(-2) = 16 - 24 - 16 + b = b - 24.$$

하나의 최솟값까지 내려갔다가 다시 올라가는 곡선은 최솟값이 축 아래에 있으면 x축과 두 번 만나고, 축 위에 있으면 한 번 (접하며) 만나고, 축보다 위에 있으면 만나지 않는다. 따라서 서로 다른 실근의 개수는

$$\begin{cases} 2 & \text{만약} b < 24, \\ 1 & \text{만약} b = 24, \\ 0 & \text{만약} b > 24. \end{cases}$$

($b = 24$일 때 중근을 직접 확인할 수 있다. $x^4 - 6x^2 + 8x + 24 = (x+2)^2(x^2 - 4x + 6)$이고, 이차식의 판별식(discriminant)은 $16 - 24 < 0$이다.)

$a = -8$인 경우. x를 $-x$로 바꾸면 $x^4 - 6x^2 - 8x + b$가 $x^4 - 6x^2 + 8x + b$로 바뀌므로, 이 곡선은 앞의 곡선을 y축에 대하여 대칭이동(reflection)한 것이다. 유일한 최솟값은 이제 $x = 2$에서 나타나고 그 값은 $b - 24$이며, 근의 개수도 같다. 즉 $b < 24$이면 2, $b = 24$이면 1, $b > 24$이면 0이다.

소문항 (iii)

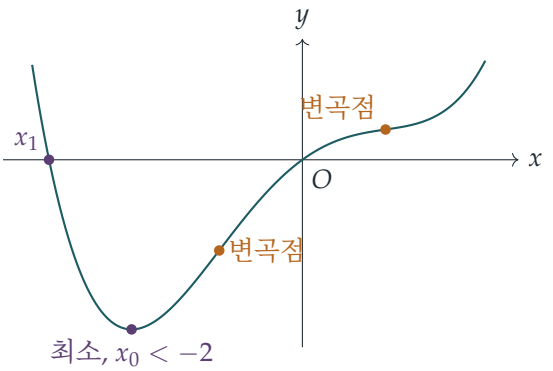
$a > 8$일 때 $y = x^4 - 6x^2 + ax$를 생각한다.

정류점. $\frac{dy}{dx} = 0$은 $x^3 - 3x = -\frac{a}{4}$를 뜻한다. 삼차함수 $g(x) = x^3 - 3x$는 극댓값 $g(-1) = 2$와 극솟값 $g(1) = -2$를 가지며, $g(-2) = -2$이다. $-\frac{a}{4} < -2$이므로 높이 $-\frac{a}{4}$의 수평선은 g의 극솟값보다 아래에 있고, 따라서 g와 정확히 한 번, $x < -2$인 왼쪽 갈래에서 만난다. 그러므로 정류점은 어떤 $x_0 < -2$에서 정확히 하나 존재한다. 그 왼쪽에서는 기울기가 음수이고 오른쪽에서는 양수이므로, 이 점은 최솟값을 준다.

x축과의 교점. $y = x(x^3 - 6x + a)$이므로 $x = 0$이 교점 하나이고, 나머지는 $h(x) = x^3 - 6x + a$의 근이다. 이 삼차함수는 $x = \sqrt{2}$에서 극솟값을 가지며, $a > 8 > 4\sqrt{2}$이므로 $h(\sqrt{2}) = a - 4\sqrt{2} > 0$이다. 따라서 h의 실근은 하나뿐이고, $h(0) = a > 0$이므로 그 근은 음수이다. 사실 $h(-2) = a + 4 > 0$이고 h는 $x < -\sqrt{2}$에서 증가하므로, 이 근 x_1은 $x_1 < -2$를 만족한다. 곡선은 x_1과 원점에서 축을 지나고, 그 사이에서는 음수이며, 최솟점은 이 구간 안에 있다.

그 밖의 특징. 원점에서의 기울기는 $a > 0$이다. 이계도함수 $12(x^2 - 1)$은 $x = \pm 1$에서 부호가 바뀌므로 $(-1, -a - 5)$와 $(1, a - 5)$에서 변곡점(point of inflection)을 갖는다. 그 점들에서의 기울기는 $a + 8$과 $a - 8$로 모두 양수이므로, 곡선은 그 점들을 지나면서도 계속 올라간다. 곡선은 $-1 < x < 1$에서 위로 볼록(concave down)이고 그 바깥에서는 아래로 볼록(concave up)이다. $x \to \pm\infty$일 때 $y \to +\infty$이다.

아래 그림은 $a = 10$인 경우로, $x_0 \approx -2.05$, 최솟값은 약 -28, $x_1 \approx -3.05$이다.



검산

- 소문항 (i)에서 $b = 5$이면 근이 네 개여야 한다. $x^2 = 3 \pm 2$이므로 $x = \pm 1, \pm\sqrt{5}$이다. 실제로 그렇다.
- 소문항 (ii)에서 $b = 24$이면 인수분해 $(x + 2)^2(x^2 - 4x + 6)$이 나오므로, 최솟점에서 근

이 하나(중근)임이 확인된다.

- 수치적으로, 0, 9, 24의 양쪽에 있는 여러 b의 값에 대해 사차식의 모든 복소근을 구하고 서로 다른 실근의 개수를 세었더니 모두 일치했다. 8과 200 사이의 무작위 a에 대해, (iii)의 곡선은 항상 정류점이 하나, 축과의 교점이 두 개였고 $x_1 < x_0 < -2$였다. $a = 10$일 때 $x_0 \approx -2.054$, $y(x_0) \approx -28.05$이다.

흔한 실수

- ($b = 9$일 때) $x = \pm\sqrt{3}$에서의 중근을 근 네 개로 세는 것. 문제는 **서로 다른** x의 값을 묻고 있다.
- 소문항 (ii)에서 $y' = y'' = 0$인 점을 극점으로 여기는 것. 그 점에서 y'은 제곱 인수를 가지므로 부호가 바뀌지 않으며, 따라서 정류 변곡점이다.
- $a = -8$을 빠뜨리는 것. $y'' = 0$의 해는 두 개이고, 각각이 a의 값 하나를 준다.

STEP 너머

b가 0, 9 또는 24를 지날 때 실근의 개수가 갑자기 바뀌는 현상은 **분기**(bifurcation)의 작은 예이다. 답은 수평선이 정류값을 지날 때에만 바뀐다. 소문항 (ii)의 특수한 경우 $y' = y'' = 0$은 두 정류점이 합쳐져 사라지는 지점으로, 가장 단순한 "파국"(catastrophe), 즉 접힘(fold)이며, $a > 8$이 되면 (iii)의 사차함수가 극점을 하나만 갖는 이유이기도 하다. 같은 추론을 중간값 정리(intermediate value theorem)와 단조성(monotonicity)으로 엄밀하게 만드는 것이 실해석학(real analysis)의 출발점이다. 이를 신중하게 다루는 과정을 보려면 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)가 좋은 출발점이다.

풀이

STEP I 2012, 문제 3

순수수학 • 넓이에서 얻는 부등식

STEP I 2012, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/12-s1-q3

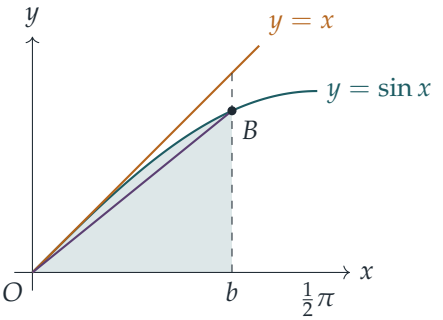
핵심 아이디어

한 방향으로만 계속 휘는 곡선은 각 접선(tangent)의 한쪽에 놓이고, 각 현(chord)의 반대쪽에 놓인다. 따라서 곡선 아래의 넓이는 접선 아래의 넓이와 현 아래의 넓이 사이에 끼이게 되며, 이 두 넓이는 모두 삼각형이나 사다리꼴(trapezium)의 넓이일 뿐이다. 각 넓이를 정확히 적으면 부등식이 저절로 나온다. 실제로 해야 할 일은 어느 접선과 어느 현을 쓸지 정하는 것뿐이다.

풀이

소문항 (i)

$0 < x < \frac{1}{2}\pi$에서 $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\sin x = -\sin x < 0$이므로, 이 구간에서 곡선 $y = \sin x$는 오목(concave)하다. 즉 아래쪽으로 휜다. 원점에서의 접선은 기울기가 $\cos 0 = 1$이므로 직선 $y = x$이다. O에서 $B = (b, \sin b)$까지의 현은 직선 $y = \dfrac{\sin b}{b}\,x$이다.



오목하다는 것은 O와 B 사이에서 곡선이 현보다 엄격히 **위**에 있고, $x > 0$에서는 O에서의 접선보다 엄격히 **아래**에 있다는 뜻이다. 따라서 $0 < x < b$에 대하여

$$\frac{\sin b}{b}\, x \;<\; \sin x \;<\; x.$$

이제 $0 \le x \le b$에서 세 넓이를 비교한다.

- 곡선 아래(색칠한 부분): $\displaystyle\int_0^b \sin x \,\mathrm{d}x = 1 - \cos b$.
- 접선 아래: 밑변이 b이고 높이가 b인 직각삼각형으로, 넓이는 $\frac{1}{2}b^2$이다.
- 현 아래: 밑변이 b이고 높이가 $\sin b$인 삼각형으로, 넓이는 $\frac{1}{2}b\sin b$이다.

$0 < x < b$에서 곡선이 두 직선 사이에 엄격히 놓여 있으므로(그리고 세 함수 모두 연속이므로), 넓이는 엄격한 부등식을 만족한다.

$$\tfrac{1}{2}b\sin b \;<\; 1-\cos b \;<\; \tfrac{1}{2}b^2.$$

오른쪽 부등식을 정리하면 $\cos b > 1 - \frac{1}{2}b^2$이고, 왼쪽 부등식을 정리하면 $\cos b < 1 - \frac{1}{2}b\sin b$이다. 이를 합치면

$$1 - \tfrac{1}{2}b^2 < \cos b < 1 - \tfrac{1}{2}b\sin b,$$

이므로 증명하려던 식이 성립한다.

소문항 (ii)

$k = \ln a$라 하자. $a > 1$이므로 $k > 0$이고, $a^x = \mathrm{e}^{kx}$이다. 그러면

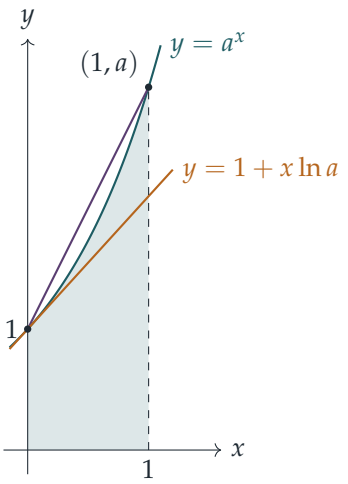
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a^x = k\,\mathrm{e}^{kx}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}a^x = k^2\mathrm{e}^{kx} > 0,$$

이므로 이 곡선은 볼록(convex)하다. 즉 위쪽으로 휜다. 이제 역할이 바뀐다. 곡선은 현보다 엄격히 **아래**에 있고, (접점을 제외하면) 접선보다 엄격히 **위**에 있다.

> ? **생각해 보기** 어느 구간에서 넓이를 비교해야 할까?

답에는 $\ln a$와 a만 들어가야 하고 다른 것은 들어가면 안 된다. 구간 $0 \le x \le 1$이 정확히 이 조건을 만족한다. 곡선의 양 끝점은 $(0,1)$과 $(1,a)$이고, 곡선 아래의 넓이는

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{kx}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^k - 1}{k} = \frac{a-1}{\ln a}.$$



하계(현). $(0,1)$에서 $(1,a)$까지의 현은 $0<x<1$에서 곡선보다 위에 있고, 그 아래 영역은 폭이 1이고 평행한 두 변의 길이가 1과 a인 사다리꼴로, 넓이는 $\frac{1}{2}(1+a)$이다. 따라서

$$\frac{a-1}{\ln a} < \frac{a+1}{2} \quad\Longrightarrow\quad \ln a > \frac{2(a-1)}{a+1},$$

이다. 여기서 양변에 양수 $2\ln a/(a+1)$을 곱했으므로 부등호의 방향은 그대로 유지된다.

상계(접선). $(0,1)$에서의 접선은 기울기가 $k=\ln a$이므로 $y=1+kx$이다. 이 접선은 $x>0$에서 곡선보다 아래에 있고, $[0,1]$에서 그 아래 영역은 평행한 두 변의 길이가 1과 $1+k$인 사다리꼴로, 넓이는 $1+\frac{1}{2}k$이다. 따라서

$$1+\tfrac{1}{2}k < \frac{a-1}{k}.$$

양변에 $2k>0$을 곱하면

$$2k+k^2 < 2a-2 \quad\Longleftrightarrow\quad k^2+2k+1 < 2a-1 \quad\Longleftrightarrow\quad (k+1)^2 < 2a-1.$$

? **생각해 보기** 그냥 제곱근을 취해도 될까?

그렇다. 다만 양변이 모두 양수이기 때문에 가능하다. $2a-1>1>0$이고, $k>0$이므로 $k+1>0$이다. 양수에 대해서는 $u^2<v^2$이면 $u<v$이므로 $k+1<\sqrt{2a-1}$, 즉

$$\frac{2(a-1)}{a+1} < \ln a < -1+\sqrt{2a-1},$$

이고, 이것으로 증명이 끝난다.

검산

- 소문항 (i)에서 $b=1$일 때: $1-\frac{1}{2}=0.5$, $\cos 1\approx 0.5403$, $1-\frac{1}{2}\sin 1\approx 0.5793$이다. 주장한 대로 크기 순서가 맞다.

- 소문항 (ii)에서 $a = 2$일 때: $\frac{2}{3} \approx 0.6667$, $\ln 2 \approx 0.6931$, $\sqrt{3} - 1 \approx 0.7321$이다. 역시 크기 순서가 맞다.
- $a \to 1$일 때 소문항 (ii)의 세 식은 모두 0으로 수렴하며, 서로 바짝 붙는다. $a = 1.01$에서는 소수점 아래 다섯째 자리까지 일치한다. 짧은 구간에서 매끄러운 곡선은 거의 직선이므로 이는 당연하다.
- 두 부등식 사슬을 수천 개의 무작위 값에서 확인했고, 넓이 공식은 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 확인했다.

흔한 실수

- 위아래를 거꾸로 생각하는 것: 사인 곡선은 오목하고(접선보다 아래, 현보다 위), a^x는 볼록하다(그 반대). 그림에 의존하지 말고 이계도함수(second derivative)로 이를 정당화해야 한다.
- 부등식에 $\ln a$를 곱하거나 나눌 때 $\ln a > 0$임을 잊는 것.
- $k + 1 > 0$임을 확인하지 않고 $(k+1)^2 < 2a - 1$의 양변에 제곱근을 취하는 것.

STEP 너머

현을 이용한 부등식은 일반적인 원리의 한 예이다. 볼록함수에 대하여, 구간에서의 평균값은 중점에서의 함숫값과 양 끝점에서의 함숫값의 평균 사이에 있다(에르미트–아다마르 부등식(Hermite–Hadamard inequality). 끝점 대신 중점에서의 접선을 쓰면 더 정밀한 하계를 얻는다). 소문항 (ii)의 하계는 a와 1의 로그 평균(logarithmic mean) $(a-1)/\ln a$가 두 수의 산술평균(arithmetic mean)보다 작다는 것을 말해 준다. 이 사실은 해석학 전반과 물리학에서 두루 등장한다. Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)는 볼록함수와 적분을 이용한 어림을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP I 2012, 문제 4

순수수학 • 접선과 법선

> **STEP I 2012, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/12-s1-q4

핵심 아이디어

모든 것은 $y = \frac{1}{2x}$의 기울기(gradient)와 신중한 소거(elimination)에서 나온다. p와 q를 서로 바꾼 것만 다른 두 직선의 교점을 구할 때, 두 방정식을 빼면 언제나 인수 $p - q$가 생기며, 두 점이 서로 다르므로 이 인수로 약분할 수 있다. 특수한 경우에는 조건이 Q에 무엇을 하는지 알아차리는 것이 도움이 된다. 그 조건은 Q를 직선 $y = x$에 대한 P의 대칭점(mirror image)으로 만들며, 바로 이 대칭성 때문에 T와 N이 그 직선 위에 놓이게 된다.

풀이

점 T

C 위에서 $y = \dfrac{1}{2x}$이므로 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{1}{2x^2}$이다. 따라서 P에서의 접선(tangent)은 기울기가 $-\frac{1}{2p^2}$이고 방정식은

$$y - \frac{1}{2p} = -\frac{1}{2p^2}(x - p).$$

이다. 양변에 $2p^2$을 곱하면 $2p^2y - p = -x + p$, 즉

$$x + 2p^2y = 2p. \tag{1}$$

이다. 같은 방법으로 Q에서의 접선은

$$x + 2q^2y = 2q. \tag{2}$$

이다. (1)에서 (2)를 빼면

$$2(p^2 - q^2)\,y = 2(p - q).$$

이다. 두 점이 서로 다르므로 $p \neq q$이고, 따라서 $2(p-q)$로 나누어 $(p+q)y = 1$을 얻는다. $p, q > 0$이므로 $p+q \neq 0$이고, 따라서

$$y = \frac{1}{p+q}.$$

이다. 이를 (1)에 대입하면

$$x = 2p - \frac{2p^2}{p+q} = \frac{2p(p+q) - 2p^2}{p+q} = \frac{2pq}{p+q}.$$

이다. 그러므로 T는 점 $\left(\frac{2pq}{p+q}, \frac{1}{p+q}\right)$이고, 이것이 증명하려던 것이다.

$pq = \frac{1}{2}$일 때의 점 N

P에서의 법선(normal)은 접선에 수직이므로 기울기가 $2p^2$이고, 방정식은

$$y = 2p^2 x - 2p^3 + \frac{1}{2p}. \tag{3}$$

이다. 마찬가지로 Q에서의 법선은 $y = 2q^2 x - 2q^3 + \frac{1}{2q}$이다. y에 대한 두 식을 같다고 놓으면

$$2(p^2 - q^2)\, x = 2(p^3 - q^3) - \left(\frac{1}{2q} - \frac{1}{2p}\right) = 2(p^3 - q^3) + \frac{p-q}{2pq}.$$

이다. $2(p-q) \neq 0$으로 나누면

$$(p+q)\, x = p^2 + pq + q^2 + \frac{1}{4pq}.$$

이다. 이 식은 서로 다른 임의의 p와 q에 대해 성립한다. 이제 $pq = \frac{1}{2}$를 이용하면 $\frac{1}{4pq} = \frac{1}{2} = pq$이므로 우변은

$$p^2 + 2pq + q^2 = (p+q)^2.$$

이 된다. 따라서 $x = p+q$이다. 이를 (3)에 대입하면

$$y = 2p^2(p+q) - 2p^3 + \frac{1}{2p} = 2p^2 q + \frac{1}{2p} = p\,(2pq) + q = p + q,$$

이다. 여기서 $2pq = 1$을 두 번 사용했다. 즉 $2p^2 q = p(2pq) = p$이고 $\frac{1}{2p} = q$이다. 그러므로

$$N = (p+q,\ p+q).$$

이다. ($p \neq q$와 $pq = \frac{1}{2}$를 함께 생각하면 $p \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$이며, 이것이 p에 대한 유일한 제약이다.)

생각해 보기 도대체 왜 T와 N이 $y = x$ 위에 놓여야 할까?

$pq = \frac{1}{2}$이면 $\frac{1}{2q} = p$이고 $\frac{1}{2p} = q$이므로 $P = (p, q)$, $Q = (q, p)$이다. 곡선 $xy = \frac{1}{2}$는 $y = x$에 대한 반사(reflection)에 대해 대칭이고, 이 반사는 P와 Q를 서로 바꾼다. 따라서 이 반사는 두 접선을 서로 바꾸고 두 법선도 서로 바꾸므로, 각 교점은 자기 자신으로 옮겨진다. 그리고 이 반사에 의해 고정되는 점은 $y = x$ 위에 있다. 대수적 계산이 이를 확인해 준다.

$y = x$ 위의 T와 N, 그리고 거리의 곱

$2pq = 1$이면 T에 대한 결과로부터

$$T = \left(\frac{1}{p+q}, \frac{1}{p+q} \right),$$

을 얻는데, 이 점은 $y = x$ 위에 있다. 또한 앞에서 구한 $N = (p+q,\ p+q)$도 $y = x$ 위에 있다.

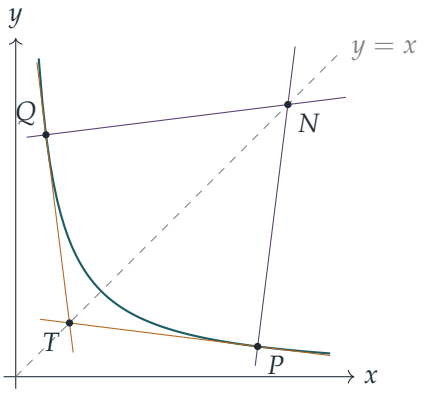
$a > 0$인 점 (a, a)는 원점으로부터 거리가 $\sqrt{2}\,a$이다. $p + q > 0$이므로

$$OT = \frac{\sqrt{2}}{p+q}, \qquad ON = \sqrt{2}\,(p+q),$$

이고, 따라서

$$OT \cdot ON = 2,$$

이다. 이 값은 (p와 무관한) 상수이므로 증명이 끝난다.



그림은 $p = 2, q = \frac{1}{4}$인 경우를 나타낸다. 접선은 호박색, 법선은 자두색으로 그렸다.

검산

$p = 2, q = \frac{1}{4}$로 두면 $pq = \frac{1}{2}$이다. 접선은 $x + 8y = 4$와 $8x + y = 4$이고, 두 직선은 $\left(\frac{4}{9}, \frac{4}{9}\right)$에서 만나며, 이는 $\frac{1}{p+q} = \frac{4}{9}$와 일치한다. 법선은 $y = 8x - \frac{63}{4}$와 $y = \frac{x}{8} + \frac{63}{32}$이고, 두 직선은 $\left(\frac{9}{4}, \frac{9}{4}\right)$에서 만나며, 이는 $p + q = \frac{9}{4}$와 일치한다. 그러면 $OT \cdot ON = \frac{4\sqrt{2}}{9} \cdot \frac{9\sqrt{2}}{4} = 2$이다. 또한 T에 대한 일반 공식과 특수한 경우의 두 결과를, p와 q를 무작위로 2000번 골라 정확한 유리수 연산으로 확인하였다.

흔한 실수

- 왜 허용되는지 밝히지 않고 $p-q$로 나누는 것. 바로 이 지점에서 "서로 다른 두 점"이라는 조건이 쓰인다.
- N을 구할 때 $\frac{1}{2q}-\frac{1}{2p}=\frac{p-q}{2pq}$에서 부호를 틀리는 것.
- T가 $y=x$ 위에 있다고 주장하기 전에 $pq=\frac{1}{2}$를 이용해 T를 간단히 하는 것을 잊는 것.

STEP 너머

직각쌍곡선(rectangular hyperbola) $xy=c^2$은 원뿔곡선(conic)이며, $OT\cdot ON$이 상수라는 사실은 T와 N이 원 $x^2+y^2=2$에 대한 **반전점**(*inverse points*)이라는 뜻이다. 원에 대한 반전(inversion)은 기하학과 복소해석학(complex analysis)에서 강력한 변환이며, 복소해석학에서는 사상 $z\mapsto 1/\bar{z}$로 나타난다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)에는 반전과 그 기하학적 성질에 대한 아름다운 설명이 담겨 있다.

풀이

STEP I 2012, 문제 5

순수수학 • 치환적분

STEP I 2012, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/12-s1-q5

핵심 아이디어

처음 두 적분은 모두 표준적인 도구로 해결된다. $\sin 2x = 2\sin x\cos x$로 쓰면 $\sin x$가 $\cos x$의 도함수(derivative)에 음의 부호를 붙인 것임을 알 수 있으므로, 치환(substitution) $u = \cos x$가 통한다. 두 번째 적분에서는 로그(logarithm)가 다루기 까다로운 인수이므로, 부분적분(integration by parts)을 하여 로그를 미분해 없앤다. 마지막 적분에서 $\cos x + \sin x$는 모습을 바꾼 코사인, 즉 $\sqrt{2}\cos(x - \frac{1}{4}\pi)$이다. 변수를 $\frac{1}{4}\pi$만큼 평행이동하면 적분 구간은 $[0, \frac{1}{4}\pi]$가 되고, 피적분함수(integrand)는 방금 구한 두 적분의 결합이 된다.

풀이

첫 번째 적분

첫 번째 적분을 I_1이라 하자. $\sin 2x = 2\sin x\cos x$이므로 $u = \cos x$로 치환하면 $\mathrm{d}u = -\sin x\,\mathrm{d}x$이다. $x = 0$일 때 $u = 1$이고, $x = \frac{1}{4}\pi$일 때 $u = \frac{1}{\sqrt{2}}$이다. 따라서

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} 2\cos x \ln(\cos x)\,\sin x\,\mathrm{d}x = \int_{1/\sqrt{2}}^{1} 2u\ln u\,\mathrm{d}u,$$

이다. 여기서 $\mathrm{d}u$에서 나온 음의 부호는 적분 구간의 위끝과 아래끝을 바꾸는 데 사용하였다. 부분적분을 하면($\ln u$를 미분하고 $2u$를 적분한다)

$$\int 2u\ln u\,\mathrm{d}u = u^2\ln u - \int u^2\cdot\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = u^2\ln u - \tfrac{1}{2}u^2.$$

$u = 1$에서 이 값은 $-\frac{1}{2}$이다. $u = \frac{1}{\sqrt{2}}$에서는 $u^2 = \frac{1}{2}$이고 $\ln u = -\frac{1}{2}\ln 2$이므로 그 값은 $-\frac{1}{4}\ln 2 - \frac{1}{4}$이다. 그러므로

$$I_1 = -\tfrac{1}{2} - \left(-\tfrac{1}{4}\ln 2 - \tfrac{1}{4}\right) = \tfrac{1}{4}\ln 2 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4}(\ln 2 - 1),$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

두 번째 적분

두 번째 적분을 I_2라 하자. $\ln(\cos x)$를 미분하고 $\cos 2x$를 적분하는 방식으로 부분적분을 한다. $\cos 2x$의 편리한 원시함수(antiderivative)는 $\frac{1}{2}\sin 2x = \sin x \cos x$이고, $\ln(\cos x)$의 도함수는 $-\sin x / \cos x$이다. 따라서

$$\begin{aligned} I_2 &= \Big[\sin x \cos x \, \ln(\cos x)\Big]_0^{\frac{1}{4}\pi} - \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sin x \cos x \cdot \left(-\frac{\sin x}{\cos x}\right) \mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{2}\ln\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) - 0 + \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sin^2 x \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

? **생각해 보기** 왜 그냥 $\frac{1}{2}\sin 2x$로 쓰지 않고 $\sin x \cos x$를 택하는가?

둘은 같은 함수이지만, $\sin x \cos x$의 꼴로 쓰면 인수 $\cos x$가 $\ln(\cos x)$의 도함수의 분모에 있는 $\cos x$와 약분되어 $\sin^2 x$의 쉬운 적분만 남는다.

경계항은 $\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}\ln 2) = -\frac{1}{4}\ln 2$이다. $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$를 이용하면

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{1}{4}\pi} = \tfrac{\pi}{8} - \tfrac{1}{4}.$$

따라서

$$I_2 = -\tfrac{1}{4}\ln 2 + \tfrac{\pi}{8} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{8}\left(\pi - 2\ln 2 - 2\right) = \tfrac{1}{8}(\pi - \ln 4 - 2),$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

마지막 적분

마지막 적분을 I라 하자. 삼각함수의 덧셈정리(compound-angle formula)에 의해

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2}\left(\cos x \cos \tfrac{1}{4}\pi + \sin x \sin \tfrac{1}{4}\pi\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \tfrac{1}{4}\pi\right).$$

이로부터 치환 $t = x - \frac{1}{4}\pi$를 떠올릴 수 있다. 이 치환은 구간 $[\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi]$를 I_1과 I_2의 적분 구간인 $[0, \frac{1}{4}\pi]$로 옮긴다. $2x = 2t + \frac{1}{2}\pi$이므로

$$\cos 2x = \cos\left(2t + \tfrac{1}{2}\pi\right) = -\sin 2t, \qquad \sin 2x = \sin\left(2t + \tfrac{1}{2}\pi\right) = \cos 2t,$$

이고

$$\ln(\cos x + \sin x) = \ln\left(\sqrt{2}\cos t\right) = \tfrac{1}{2}\ln 2 + \ln(\cos t),$$

이다. $[0, \frac{1}{4}\pi]$에서 $\cos t > 0$이므로 이 식은 성립한다. 그러므로

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{1}{4}\pi} (\cos 2t - \sin 2t)\left(\tfrac{1}{2}\ln 2 + \ln(\cos t)\right) \mathrm{d}t \\ &= \tfrac{1}{2}\ln 2 \int_0^{\frac{1}{4}\pi} (\cos 2t - \sin 2t) \, \mathrm{d}t + I_2 - I_1. \end{aligned}$$

남은 적분은 0이 된다.

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} (\cos 2t - \sin 2t)\,\mathrm{d}t = \left[\tfrac{1}{2}\sin 2t + \tfrac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{1}{4}\pi} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} = 0.$$

따라서 앞의 두 결과를 이용하면

$$I = I_2 - I_1 = \tfrac{1}{8}(\pi - 2\ln 2 - 2) - \tfrac{1}{8}(2\ln 2 - 2) = \frac{\pi - 4\ln 2}{8} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

검산

심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 $I_1 \approx -0.076713$, $I_2 \approx -0.030588$, $I \approx 0.046125$이며, 이는 각각 $\frac{1}{4}(\ln 2 - 1)$, $\frac{1}{8}(\pi - \ln 4 - 2)$, $\frac{1}{8}(\pi - 4\ln 2)$와 소수점 아래 열 자리까지 일치한다. 첫 번째 적분의 부호도 간단히 확인해 보자. $(0, \frac{1}{4}\pi)$에서 $\sin 2x > 0$이고 $\ln(\cos x) < 0$이므로 I_1은 음수여야 하며, 실제로 $\ln 2 - 1 < 0$이다.

흔한 실수

- I_2의 부분적분에서 경계항을 빠뜨리는 실수. 경계항은 $x = \frac{1}{4}\pi$에서 0이 아니다.
- $\cos(2t + \frac{1}{2}\pi)$와 $\sin(2t + \frac{1}{2}\pi)$의 부호를 뒤바꾸어 $I_2 - I_1$ 대신 $I_1 - I_2$나 $I_1 + I_2$를 얻는 실수.
- 상수 $\ln\sqrt{2}$에서 나온 $\frac{1}{2}\ln 2$의 계수를 적분하면 0이 된다는 것을 확인하지 않고 이 상수를 버리는 실수.

STEP 너머

$\ln(\cos x)$와 $\ln(\sin x)$의 적분은 고전적인 주제이다. 같은 대칭성 기법을 쓰면 유명한 결과 $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\pi\ln 2$를 얻으며, 일반적인 구간에서는 클라우센 함수(Clausen function)와 카탈랑 상수(Catalan's constant)로 이어진다. 대학 1학년 해석학(analysis) 강의에서는 로그가 적분 구간의 끝점에서 발산할 때 이러한 적분이 잘 정의되는지도 확인하는데, 이 경우 이 적분들은 이상적분(improper integral)이 된다. 이런 유형의 문제를 더 많이 연습하려면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)를 참고하라.

풀이

STEP I 2012, 문제 6

순수수학 • 삼각부등식(삼각함수)

> **STEP I 2012, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/12-s1-q6

핵심 아이디어

여기서 모든 앙각(angle of elevation)은 같은 대변, 즉 깃대를 공유하므로 각 코탄젠트(cotangent)는 수평 거리를 높이로 나눈 값에 불과하다. 그러면 첫 번째 결과는 원 안의 길이에 관한 사실이 된다. 반원(semicircle)에 대한 원주각은 직각이므로 $DC^2 = AD \cdot DB$이다. 삼각함수 항등식(identity)은 $\cot p \cot q - \cot^2 \frac{1}{2}(p+q)$를 부호를 바로 읽을 수 있는 꼴로 바꾸어 준다. 이 부등식을 얻고 나면 기하가 마지막 결과를 거의 공짜로 건네준다.

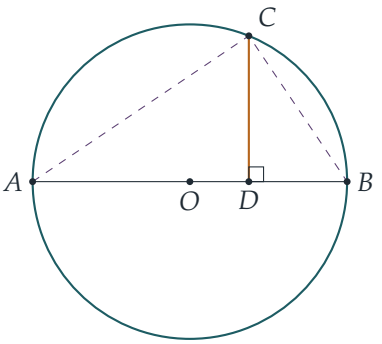
풀이

기하학적 결과

깃대의 높이를 $h > 0$, 꼭대기를 T라 하자. 그러면 DT는 수직이다. A, B, C는 모두 지면 위에 있으므로 삼각형 TDA, TDB, TDC는 D에서 직각이다. 따라서

$$\cot\alpha = \frac{AD}{h}, \qquad \cot\beta = \frac{DB}{h}, \qquad \cot\phi = \frac{DC}{h}.$$

α와 β가 예각이므로 D는 A도 B도 아니다(그 두 점에서는 앙각이 직각이 될 것이다). 따라서 D는 A와 B 사이에 엄밀하게 놓이고 $DC > 0$이다.



이제 지면의 평면도를 보자. 중심을 O, 반지름을 r, $x = OD$라 하자(B 쪽으로 잰 값이므로 $-r < x < r$이다). 그러면 $AD = r + x$, $DB = r - x$이고, 삼각형 ODC에서 피타고라스(Pythagoras) 정리에 의해 $DC^2 = OC^2 - OD^2 = r^2 - x^2$이다. 그러므로

$$AD \cdot DB = (r + x)(r - x) = r^2 - x^2 = DC^2.$$

(같은 말로, $\angle ACB$는 반원에 대한 원주각이므로 직각이고, CD는 직각삼각형 ACB의 높이(altitude)이다.) h^2으로 나누면

$$\cot\alpha \cot\beta = \frac{AD \cdot DB}{h^2} = \frac{DC^2}{h^2} = \cot^2\phi,$$

이므로 증명이 끝난다.

항등식

$s = \frac{1}{2}(p + q)$라 두고 배각 공식(double-angle formula)의 꼴 $\sin^2 s = \frac{1}{2}\big(1 - \cos(p + q)\big)$와 $\cos^2 s = \frac{1}{2}\big(1 + \cos(p + q)\big)$를 이용하자. 좌변은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\cos p \cos q\big(1 - \cos(p + q)\big) - \tfrac{1}{2}\sin p \sin q\big(1 + \cos(p + q)\big) \\
&\quad = \tfrac{1}{2}\big(\cos p \cos q - \sin p \sin q\big) - \tfrac{1}{2}\cos(p + q)\big(\cos p \cos q + \sin p \sin q\big) \\
&\quad = \tfrac{1}{2}\cos(p + q) - \tfrac{1}{2}\cos(p + q)\cos(p - q),
\end{aligned}$$

여기서 $\cos(p + q)$와 $\cos(p - q)$에 대한 덧셈정리(compound-angle formulae)를 사용하였다. 이 식은 모든 p와 q에 대하여 성립한다.

부등식

항등식의 우변을 인수분해하자.

$$\cos p \cos q \sin^2 s - \sin p \sin q \cos^2 s = \tfrac{1}{2}\cos(p + q)\big(1 - \cos(p - q)\big).$$

이제 $p, q > 0$이고 $p + q \le \frac{1}{2}\pi$라 하자. 그러면 $0 < p + q \le \frac{1}{2}\pi$이므로 $\cos(p + q) \ge 0$이고, $1 - \cos(p - q) \ge 0$은 항상 성립한다. 따라서 우변은 음이 아니고,

$$\cos p \cos q \sin^2 s \;\ge\; \sin p \sin q \cos^2 s.$$

? **생각해 보기** 양변을 $\sin p \sin q \sin^2 s$로 안심하고 나눌 수 있는가?

그렇다. p와 q는 양수이고 그 합이 많아야 $\frac{1}{2}\pi$이므로 p, q, s는 모두 $(0, \frac{1}{2}\pi)$에 속하고, 따라서 $\sin p, \sin q, \sin s$는 모두 엄밀하게 양수이다. 양수 $\sin p \sin q \sin^2 s$로 나누어도 부등호의 방향은 바뀌지 않는다.

$$\cot p \cot q \ \geq \ \cot^2 s = \cot^2 \tfrac{1}{2}(p+q).$$

등호는 $p = q$이거나 $p + q = \frac{1}{2}\pi$일 때, 그리고 그때에만 성립한다.

마지막 결과

$p = \alpha, q = \beta$로 놓자. 둘 다 양수이고(높이가 양수인 깃대의 앙각이므로) $\alpha + \beta \leq \frac{1}{2}\pi$이므로 위 부등식을 적용할 수 있다. 첫 번째 결과와 합치면

$$\cot^2 \phi = \cot \alpha \cot \beta \ \geq \ \cot^2 \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta).$$

ϕ와 $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$는 모두 $(0, \frac{1}{2}\pi)$에 속하므로(ϕ는 $DC > 0$이고 $h > 0$이기 때문이다) 두 코탄젠트는 모두 양수이고, 양변의 제곱근을 취할 수 있다. 즉 $\cot\phi \geq \cot\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$이다.

? **생각해 보기** 왜 이로부터 $\geq$가 아니라 $\phi \leq \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$가 나오는가?

cot은 $(0, \frac{1}{2}\pi)$에서 순감소(*decreasing*)하기 때문이다. 즉 코탄젠트가 클수록 각은 작다. 따라서

$$\phi \leq \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) \qquad \alpha+\beta \leq \tfrac{1}{2}\pi\text{일 때마다} \alpha+\beta \leq \tfrac{1}{2}\pi.$$

검산

- $D = O$이면 $AD = DB = DC = r$이므로 $\alpha = \beta = \phi$이다. 첫 번째 결과의 양변이 같고, 마지막 부등식은 등식이 되어 $p = q$인 경우와 일치한다.
- 수치 검증: $r = 1, OD = \frac{1}{2}, h = 1$이면 $\cot\alpha = 1.5, \cot\beta = 0.5, \cot^2\phi = 0.75$로 예측과 같다. 이때 $\alpha + \beta \approx 0.588 + 1.107 = 1.695 > \frac{1}{2}\pi$이므로 마지막 결과가 성립할 필요가 없다. 실제로 $\phi \approx 0.857 > \frac{1}{2}(\alpha+\beta) \approx 0.848$이므로 조건이 중요함을 알 수 있다.
- 무작위로 고른 10^5개의 (p, q)에서 항등식을, 허용 범위 안의 무작위 쌍 2×10^5개에서 부등식을, 그리고 $\alpha + \beta \leq \frac{1}{2}\pi$인 무작위 배치 약 8×10^4개에서 $\phi \leq \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$를 확인하였으며, 실패한 경우는 없었다.

흔한 실수

- cot이 감소함수임을 잊고 $\phi \geq \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$라고 결론짓는 것.
- $\sin p \sin q \sin^2 s$가 왜 양수인지 밝히지 않고 부등식을 그것으로 나누는 것.
- 조건 $p + q \leq \frac{1}{2}\pi$를 무시하는 것. 이 조건이 바로 $\cos(p+q) \geq 0$을 보장하며, 이 조건이 없으면 부등식이 성립하지 않을 수 있다.

STEP 너머

이 부등식은 $\ln\cot p$와 $\ln\cot q$의 평균이 평균의 $\ln\cot$ 값 이상임을 말하므로, $\ln\cot t$가 $(0, \frac{1}{4}\pi]$에서 볼록 함수(convex function)임을 뜻한다. 볼록성과 옌센 부등식(Jensen's inequality)은 대학 1학년 해석학에서 부등식을 얻는 강력한 원천이다. 관계식 $DC^2 = AD \cdot DB$는 유클리드(Euclid)의 기하평균(geometric mean) 작도이다. 즉 $\cot\phi$는 $\cot\alpha$와 $\cot\beta$의 기하평균이다. Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석 입문)는 볼록 함수를 다루고, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에는 이런 유형의 문제가 더 있다.

풀이

STEP I 2012, 문제 7

순수수학 • 주기적인 점화식

> **STEP I 2012, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/12-s1-q7

핵심 아이디어

주기(period)가 1, 2 또는 3으로 반복되는 수열(sequence)은 처음 몇 항으로 완전히 결정되므로, 점화식(recurrence)은 한 주기 안에 있는 몇 개의 연속한 세 항(그리고 주기의 끝에서 처음으로 되돌아가는 부분)에 대해서만 성립하면 된다. 이를 모두 적으면 x, y, z에 대한 작은 연립일차방정식(simultaneous linear equations)을 얻는다. 이 방정식들은 모두 0은 아닌 해를 가지며, 바로 이것이 p와 q에 대한 조건을 강제한다. 풀이 전체에서 약분을 가능하게 하는 것은 $x \neq 0$이라는 사실이다.

풀이

소문항 (i)

모든 n에 대해 $t_n = x$이면 점화식에 의해 $x = px + qx$, 즉 $(p + q - 1)x = 0$이다. $x \neq 0$이므로 $p + q = 1$을 얻는다.

역으로 $p + q = 1$이고 $t_0 = t_1 = x$이면 $t_2 = (p + q)x = x$이고, 수학적 귀납법(induction)에 의해 모든 항이 x와 같다. x를 제한하는 조건은 없으므로 x는 0이 아닌 임의의 실수일 수 있다.

소문항 (ii)

패턴 $x, y, x, y, \ldots$가 점화식을 만족하는 것은 연속한 두 세 항 (x, y, x)와 (y, x, y)가 점화식을 만족하는 것과 정확히 같다.

$$x = py + qx, \qquad \text{즉} \quad (1-q)x = py, \tag{1}$$

$$y = px + qy, \qquad \text{즉} \quad (1-q)y = px. \tag{2}$$

(1)과 (2)를 더하고 빼면

$$(1-q-p)(x+y) = 0, \qquad (1-q+p)(x-y) = 0.$$

을 얻는다. 수 $x+y$와 $x-y$가 둘 다 0일 수는 없는데, 그렇다면 $x = 0$이 되기 때문이다. $x+y \neq 0$이면 $p+q = 1$이고, $x-y \neq 0$이면 $q-p = 1$이다. 따라서 요구된 대로 $q+p = 1$과 $q-p = 1$ 중 적어도 하나가 성립한다.

이제 x와 y 사이의 관계를 이끌어 낸다.

- $q+p = 1$이면 $1-q = p$이므로 (1)은 $px = py$가 된다. 따라서 $p \neq 0$**이기만 하면** $x = y$이다.
- $q-p = 1$이면 $1-q = -p$이므로 (1)은 $-px = py$가 된다. 따라서 마찬가지로 $p \neq 0$이면 $x = -y$이다.

유일한 예외는 $p = 0$인 경우이며, 이때 어느 경우든 $q = 1$이 된다. $p = 0$이고 $q = 1$이면 점화식은 $t_{n+2} = t_n$이고, 모든 패턴 $x, y, x, y, \ldots$가 이를 만족하므로 x와 y 사이에는 아무 관계도 없다. 그러므로 $p = 0$이고 $q = 1$인 경우를 제외하면 $x = y$ 또는 $x = -y$이다.

소문항 (iii)

이번에는 패턴이 $x, y, z, x, y, z, \ldots$이고, 연속한 세 개의 세 항 (x, y, z), (y, z, x), (z, x, y)가 필요하다.

$$z = py + qx, \tag{3}$$

$$x = pz + qy, \tag{4}$$

$$y = px + qz. \tag{5}$$

(3)을 이용하여 나머지 두 식에서 z를 소거한다.

$$(4): \quad x = p(py + qx) + qy \qquad \Longrightarrow \quad (pq-1)x + (p^2+q)y = 0,$$

$$(5): \quad y = px + q(py + qx) \qquad \Longrightarrow \quad (p+q^2)x + (pq-1)y = 0.$$

첫 번째 식에 $pq-1$을, 두 번째 식에 p^2+q를 곱한 다음 빼자. y항이 소거되어

$$\left[(pq-1)^2 - (p^2+q)(p+q^2)\right]x = 0.$$

이 남는다.

생각해 보기 왜 괄호 안이 반드시 0이어야 할까? 방정식에 해가 아예 없을 수도 있지 않을까?

해는 존재한다. 수열이 존재하므로 x와 y는 두 방정식을 모두 만족한다. 그리고 $x \neq 0$이므로 x로 나눌 수 있다. 괄호를 전개하면

$$\begin{aligned}(pq-1)^2-(p^2+q)(p+q^2) &= p^2q^2-2pq+1-\left(p^3+p^2q^2+pq+q^3\right)\\ &= 1-3pq-p^3-q^3,\end{aligned}$$

이므로 요구된 대로 $p^3+q^3+3pq-1=0$이다.

인수분해(factorising). 이 식은 $a=p, b=q, c=-1$일 때의 $a^3+b^3+c^3-3abc$이고, 잘 알려진 항등식(identity)

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\cdot\tfrac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$$

에 의해

$$p^3+q^3+3pq-1=\tfrac{1}{2}(p+q-1)\left[(p-q)^2+(q+1)^2+(p+1)^2\right].$$

를 얻는다. (이 항등식이 기억나지 않는다면 전개하여 확인하면 된다. 대괄호 안은 $2(p^2+q^2+1-pq+p+q)$이고, 여기에 $p+q-1$을 곱하면 원래의 삼차식이 나온다.) 이 곱은 0이므로 $p+q=1$이거나 $(p-q)^2+(p+1)^2+(q+1)^2=0$이다.

경우 $(p-q)^2+(p+1)^2+(q+1)^2=0$**.** 실수의 제곱의 합이 0이 되는 것은 각 제곱이 모두 0일 때뿐이므로 $p=q=-1$이다. 이때 (3)은 $z=-y-x$, 즉 $x+y+z=0$이 된다.

경우 $p+q=1$**.** (3), (4), (5)에 $q=1-p$를 대입하고 각각을 차의 꼴로 정리하면

$$z-x=p(y-x), \qquad x-y=p(z-y), \qquad y-z=p(x-z).$$

이다. $a=y-x, b=z-y, c=x-z$로 놓으면 $a+b+c=0$이다. 첫 번째와 세 번째 식에서 $c=-pa$이고 $b=-pc=p^2a$이다. 그러면

$$0=a+b+c=a(1-p+p^2).$$

이다.

생각해 보기 $1-p+p^2$이 0이 될 수 있을까?

그럴 수 없다. 모든 실수 p에 대해 $1-p+p^2=\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$이다. 따라서 $a=0$이고, 이로부터 $c=-pa=0$, 그리고 $b=0$을 얻는다. 즉 $x=y=z$이다.

$p = q = -1$이면 $p + q = -2 \neq 1$이므로 두 경우는 겹치지 않는다. 따라서 $x = y = z$이거나($p + q = 1$일 때) $x + y + z = 0$이다($p = q = -1$일 때). 두 경우 모두 실제로 일어난다. 두 번째 경우 점화식 $t_{n+2} = -t_{n+1} - t_n$은 임의의 초깃값에 대해 $x,\ y,\ -x - y,\ x,\ y,\ \ldots$를 준다.

검산

- $p = q = -1, t_0 = 2, t_1 = 5$이면 수열은 $2, 5, -7, 2, 5, -7, \ldots$이고, $2 + 5 - 7 = 0$이다.
- $p = 3, q = 4$일 때($q - p = 1$이므로) $1, -1$로 시작하면 $t_2 = -3 + 4 = 1, t_3 = 3 - 4 = -1$이 되어, 소문항 (ii)에서 예측한 대로 번갈아 나타난다.
- $p = 2, q = -1$에서 삼차식은 $8 - 1 - 6 - 1 = 0$이 되어 $p + q = 1$과 일치한다. 또한 임의로 고른 1000개의 (p, q)에서 전개, 인수분해, 그리고 삼차식이 (3)–(5)의 3×3 행렬식(determinant)과 일치함을 확인하였다. 점화식을 시뮬레이션하여 위의 모든 경우를 확인하였다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)에서 $p + q = 1$ 이고 $q - p = 1$이라고 결론짓는 것. 논증이 보여 주는 것은 적어도 하나가 성립한다는 것뿐이며, 둘 다 성립하는 것은 예외적인 경우 $p = 0, q = 1$뿐이다.
- 소문항 (ii)에서 $p = 0$이 바로 문제가 묻고 있는 예외임을 알아차리지 못하고 p로 나누는 것.
- 순환하는 방정식 (4)와 (5)를 잊는 것. 한 주기당 방정식 하나로는 조건을 강제하기에 충분하지 않다.

STEP 너머

$t_{n+2} = pt_{n+1} + qt_n$을 다루는 표준적인 방법은 **특성방정식**(*characteristic equation*) $\lambda^2 = p\lambda + q$를 이용하는 것이다. 일반적으로 $t_n = A\alpha^n + B\beta^n$이며, 여기서 α와 β는 특성방정식의 근이다. 수열이 k단계마다 반복되는 것은 그 수열이 사용하는 근들이 $\lambda^k = 1$을 만족하는 것과 정확히 같다. 상수 수열에는 근 1이 필요하고(따라서 $p + q = 1$), 번갈아 나타나는 수열에는 -1이 필요하다(따라서 $q - p = 1$). $p = q = -1$인 경우는 $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$을 주는데, 그 근은 1의 복소 세제곱근(complex cube roots of unity)이며, 이것이 바로 그 합 $1 + \omega + \omega^2 = 0$이 $x + y + z = 0$으로 다시 나타나는 이유이다. 이것은 모습을 바꾼 선형대수학(linear algebra)(수열에 작용하는 이동 사상(shift map))이며, 스

트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 바로 이런 방식으로 고유값(eigenvalue)을 통해 점화식을 다룬다.

풀이

STEP I 2012, 문제 8

순수수학 • 동차 미분방정식

STEP I 2012, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/12-s1-q8

핵심 아이디어

두 방정식은 모두 **동차**(*homogeneous*)이다. 전체에 곱해진 x의 거듭제곱을 빼면, 모든 항의 x와 y에 대한 전체 차수가 같다. $y = xv$로 놓으면 그 x의 거듭제곱이 약분되고, 방정식은 v 부분과 x 부분으로 분리된다. 소문항 (i)은 이 과정을 차례대로 안내한다. 소문항 (ii)는 이를 스스로 하도록 남겨 둔다. 양변을 x로 나누어 보면 같은 종류의 방정식임을 알 수 있고, 이때 v에 대한 적분에는 부분분수(partial fractions)가 필요하다.

풀이

소문항 (i)

$y = xv$이면 곱의 미분법(product rule)에 의해 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = v + x\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$이다. 이를 대입하면

$$x(xv)\left(v + x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right) + x^2v^2 - 2x^2 = x^3v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + 2x^2v^2 - 2x^2 = 0.$$

$x \neq 0$이므로 x^2으로 나눌 수 있고, 그러면

$$xv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + 2v^2 - 2 = 0,$$

이 되어 요구된 식을 얻는다.

이제 변수를 분리(separation of variables)한다. 방정식은 $xv\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 2(1 - v^2)$을 뜻한다. $v^2 \neq 1$이면

$$\int \frac{v}{1 - v^2}\,\mathrm{d}v = \int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad -\tfrac{1}{2}\ln|1 - v^2| = 2\ln|x| + c.$$

양변에 -2를 곱하고 지수를 취하면 어떤 상수 $A > 0$에 대하여 $|1 - v^2| = Ax^{-4}$이므로

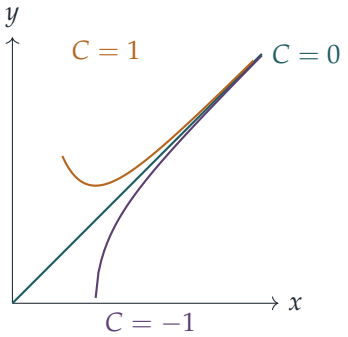
$$x^4(v^2 - 1) = C,$$

이다. 여기서 $C = \pm A$는 0이 아닌 상수이다. 앞에서 제외해 둔 경우인 $v = \pm 1$(즉 $y = \pm x$)도 해이다. 이때 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}x = 0$이고 $2v^2 - 2 = 0$이기 때문이다. 이 경우는 정확히 $C = 0$인 경우이므로, C는 임의의 상수가 될 수 있다.

마지막으로 $v = y/x$를 대입하면

$$x^4\left(\frac{y^2}{x^2} - 1\right) = x^2(y^2 - x^2) = C,$$

이고, 이것이 요구된 꼴이다.



그림은 제1사분면에서 몇 개의 해곡선을 보여 준다. $y^2 = x^2 + C/x^2$에서 짐작할 수 있듯이, 이 곡선들은 $x \to \infty$일 때 직선 $y = x$에 가까워진다.

소문항 (ii)

$6x + 5y$의 모든 항은 차수가 1이고, $y\,\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$도 마찬가지이다. 따라서 같은 치환 $y = xv$를 시도해 볼 만하다.

$$xv\left(v + x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right) + 6x + 5xv = 0.$$

$x \neq 0$으로 나누고 항을 정리하면

$$xv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -(v^2 + 5v + 6) = -(v + 2)(v + 3).$$

? **생각해 보기** $\dfrac{v}{(v+2)(v+3)}$는 어떻게 적분할까?

부분분수를 이용한다. $v = P(v + 3) + Q(v + 2)$로 놓는다. $v = -2$를 대입하면 $P = -2$이고, $v = -3$을 대입하면 $Q = 3$이다. 따라서

$$\frac{v}{(v+2)(v+3)} = \frac{3}{v+3} - \frac{2}{v+2}.$$

$v \neq -2, -3$이면 변수를 분리하여

$$\int \Big(\frac{3}{v+3} - \frac{2}{v+2}\Big)\mathrm{d}v = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x} \quad \Longrightarrow \quad 3\ln|v+3| - 2\ln|v+2| = -\ln|x| + c.$$

따라서 $|x|\,|v+3|^3/(v+2)^2$은 상수이다. 절댓값 기호를 없애면($v \neq -3$인 해곡선을 따라서는 $x(v+3)^3$의 부호가 바뀔 수 없다)

$$\frac{x(v+3)^3}{(v+2)^2} = K.$$

이제 $v = y/x$를 대입한다. 분자는 $x(y+3x)^3/x^3$이고 분모는 $(y+2x)^2/x^2$이므로, x의 거듭제곱이 완전히 약분된다.

$$\boxed{(y+3x)^3 = K(y+2x)^2},$$

여기서 K는 상수이다.

제외했던 직선들도 해이다. $y = -3x$이면 $y\,\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 9x$이고 $6x + 5y = -9x$이므로 방정식이 성립한다. 이 직선은 상자 안 식에서 $K = 0$인 경우이다. $y = -2x$이면 $y\,\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 4x$이고 $6x + 5y = -4x$이므로 이 직선도 해이다. 이 직선은 어떤 유한한 K로도 나타나지 않으며, $K \to \infty$에 해당한다. 해를 $(y+2x)^2 = k(y+3x)^3$으로 쓰면 대신 $k = 0$으로 이 직선을 포함할 수 있다.

검산

- 소문항 (i): $x^2y^2 - x^4 = C$를 음함수 미분(implicit differentiation)하면 $2xy^2 + 2x^2y\,y' - 4x^3 = 0$이다. $2x$로 나누면 원래 방정식이 다시 나온다.
- 소문항 (ii): 무작위로 고른 여러 시작점에서 방정식을 수치적으로(룽게–쿠타 방법(Runge–Kutta method)으로) 풀어 나갔다. 각 해를 따라 $(y+3x)^3/(y+2x)^2$의 값은 약 10^{-14} 범위 안에서 일정하게 유지되었다. 예를 들어 $(1,1)$을 지나는 곡선은 $K = 64/9$이다.
- 각 방정식을 만족하는 원점을 지나는 직선 $y = \pm x$와 $y = -2x, -3x$는 $2v^2 - 2 = 0$과 $v^2 + 5v + 6 = 0$의 근에서 나온다. 이는 v에 대한 방정식이 올바르다는 좋은 신호이다.

흔한 실수

- 곱의 미분법을 잊는 것: $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$는 $x\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$가 아니라 $v + x\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$이다.
- 부분분수를 잘못 구하는 것(예를 들어 $2/(v+2) - 3/(v+3)$으로). $v = 0$과 같은 값을 넣어 분해가 맞는지 확인하라.
- $1 - v^2$이나 $(v+2)(v+3)$으로 나누면서 이 때문에 일부 직선 해를 잃는다는 점을 언급하지 않는 것.

STEP 너머

$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = F(y/x)$ 꼴의 방정식을 동차라고 한다. 이 방정식의 해곡선들은 확대·축소 $(x,y) \mapsto (\lambda x, \lambda y)$에 의해 서로 옮겨지며, 바로 이 때문에 $v = y/x$가 효과가 있다. 이것은 소푸스 리(Sophus Lie)에게서 비롯된 깊은 아이디어의 가장 간단한 경우이다. 즉, 미분방정식(differential equation)의 대칭(symmetry)을 이용하여 방정식의 계수(order)를 낮출 수 있다. 직선 해 $y = mx$는 확대·축소로 변하지 않는 곡선들이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 동차 방정식과 그 밖의 1계 방정식을 다룬다.

풀이

STEP I 2012, 문제 9

역학 • 포물체 운동

STEP I 2012, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

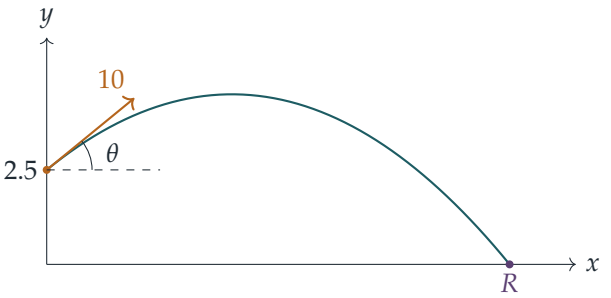
step.maths.org/questions/12-s1-q9

핵심 아이디어

이 문제는 높은 곳에서 발사된 포물체(projectile)에 관한 것이므로, 비행 시간은 t에 대한 이차방정식(quadratic)에서 나오고, 문제의 핵심은 그 근을 $c = \cos 2\theta$로 다시 쓰는 데 있다. 배각 공식(double-angle formulae) $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-c)$와 $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+c)$가 모든 일을 해 준다. 수평 도달 거리(range)를 하나의 변수 c의 함수로 나타내고 나면, 그 최댓값을 구하는 것은 제곱할 때 약간 주의하기만 하면 되는 평범한 미적분 문제이다.

풀이

포환을 공기 저항 없이 중력만 받으며 자유롭게 운동하는 입자로 모형화한다. 원점을 발사 지점 바로 아래의 지면에 잡고, x축은 수평 방향, y축은 연직 위 방향으로 잡는다. 또 $0 \le \theta < 90°$(포환을 앞쪽 위로 던진다)라고 가정하면 $\sin\theta \ge 0$이고 $\cos\theta > 0$이다.



비행 시간

수평 방향 속도는 $10\cos\theta$로 일정하고, 연직 방향 운동은 초기 속도가 $10\sin\theta$, 가속도가 -10이므로 시각 t에서

$$x = 10t\cos\theta, \qquad y = 2.5 + 10t\sin\theta - 5t^2.$$

포환은 $y = 0$일 때, 즉

$$5t^2 - 10t\sin\theta - 2.5 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t^2 - 2t\sin\theta - \tfrac{1}{2} = 0.$$

일 때 땅에 떨어진다. 두 근의 곱이 $-\frac{1}{2} < 0$이므로 양의 근은 정확히 하나이고, 그것은 더하기 부호를 택한 근이다.

$$T = \sin\theta + \sqrt{\sin^2\theta + \tfrac{1}{2}}.$$

이제 $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta) = \frac{1}{2}(1 - c)$를 이용한다. $\sin\theta \geq 0$이므로 $\sin\theta = \sqrt{\frac{1}{2}(1-c)}$로 쓸 수 있고, $\sin^2\theta + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(2 - c)$이다. 따라서

$$T = \sqrt{\frac{1-c}{2}} + \sqrt{\frac{2-c}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1-c} + \sqrt{2-c}\right),$$

이고, 이것이 구하는 시간(초 단위)이다.

수평 도달 거리

마찬가지로 $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + c)$이고 $\cos\theta > 0$이므로 $\cos\theta = \sqrt{\frac{1}{2}(1+c)}$이다. 수평 도달 거리는

$$\begin{aligned} R = 10T\cos\theta &= 10\sqrt{\frac{1+c}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1-c} + \sqrt{2-c}\right) \\ &= 5\left(\sqrt{1-c^2} + \sqrt{(1+c)(2-c)}\right) = 5\left(\sqrt{1-c^2} + \sqrt{2+c-c^2}\right) \text{ m}. \end{aligned}$$

이다. θ가 $[0°, 90°)$에서 변할 때 $c = \cos 2\theta$는 $(-1, 1]$에서 변하므로, 이 구간에서 R의 최댓값을 구한다.

수평 도달 거리의 최대화

$-1 < c < 1$에서 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}c} = 5\left(\frac{-c}{\sqrt{1-c^2}} + \frac{1-2c}{2\sqrt{2+c-c^2}}\right).$$

이다. 정류점(stationary point)이 되려면

$$\frac{c}{\sqrt{1-c^2}} = \frac{1-2c}{2\sqrt{2+c-c^2}}. \qquad (*)$$

이어야 한다.

? 생각해 보기 $(*)$를 그냥 제곱해도 될까? 무엇이 잘못될 수 있을까?

제곱하면 부호 정보가 사라지므로 가짜 근이 생길 수 있다. 두 분모는 모두 양수이므로, $(*)$에서 c와 $1-2c$는 같은 부호여야 한다(둘 다 0인 경우는 불가능하다). 따라서 $0 < c < \frac{1}{2}$이어야 하며, 이 사실을 기억해 둔다. 제곱하고 분모를 없애면

$$\begin{aligned} 4c^2(2+c-c^2) &= (1-2c)^2(1-c^2) \\ 8c^2+4c^3-4c^4 &= 1-4c+3c^2+4c^3-4c^4 \\ 5c^2+4c-1 &= 0 \\ (5c-1)(c+1) &= 0. \end{aligned}$$

근 $c=-1$은 $0<c<\frac{1}{2}$ 밖에 있으므로(이것은 연직으로 던지는 경우이다), 유일한 정류점은 $c=\frac{1}{5}$이다. 이 값은 실제로 $(*)$를 만족한다. $\sqrt{1-\frac{1}{25}}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$이고 $\sqrt{2+\frac{1}{5}-\frac{1}{25}}=\frac{3\sqrt{6}}{5}$이므로 양변이 모두 $\frac{1}{2\sqrt{6}}$이기 때문이다.

이 점에서

$$R\left(\tfrac{1}{5}\right)=5\left(\frac{2\sqrt{6}}{5}+\frac{3\sqrt{6}}{5}\right)=5\sqrt{6}\approx 12.25.$$

이다. 이것이 최댓값임을 확인하기 위해 구간의 양 끝값과 비교한다. $c\to -1$일 때 $R\to 0$이고, $R(1)=5\sqrt{2}\approx 7.07$이다. R은 $[-1,1]$에서 연속이고 내부에서 미분가능하므로, 최댓값은 구간의 끝점이나 정류점에서 나타난다. 유일한 정류점에서의 값이 이들 가운데 가장 크다. 그러므로 수평 도달 거리는 $c=\frac{1}{5}$일 때 최대가 되며, 이것이 보이려던 것이다. (이는 $\theta=\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{5}\approx 39.2^\circ$로, 45°보다 약간 작다.)

추가로 얻는 거리

45°에서는 $c=\cos 90^\circ=0$이므로

$$R(0)=5\left(1+\sqrt{2}\right).$$

이다. 따라서 추가로 얻는 거리는

$$5\sqrt{6}-5\left(1+\sqrt{2}\right)=5\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}-1\right)\ \text{m},$$

이고, 이것이 보이려던 것이다.

검산

- $\theta=0$ $(c=1)$일 때 시간은 $\frac{1}{\sqrt{2}}$이며, 이는 높이 2.5 m인 턱에서 굴러 떨어지는 공에 대한 $2.5=5t^2$과 일치한다.

- $c \to -1$ (연직으로 던지는 경우)일 때 수평 도달 거리는 당연히 0으로 수렴한다.
- 수치로 계산하면 추가로 얻는 거리는 $5(2.4495 - 1.4142 - 1) \approx 0.176\,\mathrm{m}$, 즉 약 $18\,\mathrm{cm}$에 불과하다. 최적점 근처가 매우 평평하다는 뜻이다. 비행을 단계별로 수치 시뮬레이션한 결과와 $R(c)$를 촘촘한 격자에서 탐색한 결과 모두 공식과 일치하며, 최댓값이 $c = 0.2$에서 나타난다.

흔한 실수

- 근의 공식에서 빼기 부호를 택하여 음의 시간을 얻는 것.
- $(*)$를 제곱한 뒤 $c = -1$을 확인하지 않고 그대로 두거나, $c = \frac{1}{5}$가 최솟값이 아니라 최댓값임을 정당화하는 것을 잊는 것.
- 최적의 각도가 45°라고 가정하는 것. 이는 발사 지점과 착지 지점의 높이가 같을 때에만 성립한다.

STEP 너머

높은 곳에서 발사하면 최적의 각도는 항상 45°보다 작아진다. 일반적으로 최적의 각도는 $\tan\theta = u/\sqrt{u^2 + 2gh}$를 만족하며, 이 문제에서는 $\tan\theta = \sqrt{2/3}$이 되어 $\cos 2\theta = \frac{1}{5}$와 같다. 매개변수에 대한 함수를 최적화하고 그 최댓값 근처가 얼마나 평평한지 살펴보는 것은 민감도 분석(sensitivity analysis)을 처음 맛보는 일이다. 최댓값 근처에서는 매개변수의 작은 오차가 이차 정도의 손실만 일으킨다. 공기 저항이 있을 때와 없을 때의 포물체 운동에 대해 더 알고 싶다면 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 참고하라.

풀이

STEP I 2012, 문제 10

역학 • 자유 낙하와 소리

> **STEP I 2012, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/12-s1-q10

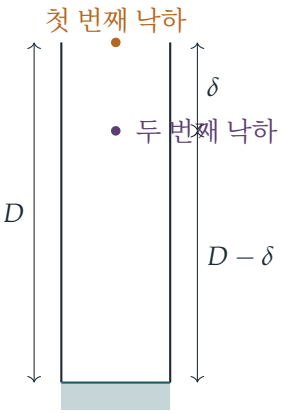
핵심 아이디어

측정한 각 시간은 두 부분으로 이루어진다. 하나는 돌이 정지 상태에서 자유낙하하는 시간이고, 다른 하나는 물에 떨어지는 소리가 일정한 속력으로 다시 올라오는 시간이다. 두 시간을 모두 식으로 쓰고 빼면 곧바로 t를 얻는다. "hence"(이를 이용하여) 부분에서는 두 제곱근이 바로 두 낙하 시간이다. 그 차를 알고 있고 제곱의 차도 간단하므로, 인수분해(factorisation) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$를 이용하면 그 합도 얻게 되고, 따라서 각각의 값도 구할 수 있다.

풀이

t에 대한 식

돌을 중력만 받으며(공기 저항(air resistance)은 무시) 정지 상태에서 떨어지는 질점(particle)으로 모형화하고, 소리는 우물을 따라 일정한 속력 u로 똑바로 올라온다고 가정한다.



정지 상태에서 떨어뜨린 돌은 시간 τ 동안 거리 h를 떨어지며 $h = \frac{1}{2}g\tau^2$이므로 $\tau = \sqrt{2h/g}$이다. 그다음 소리가 같은 거리 h를 거슬러 나에게까지 올라오는 데 h/u가 걸린다. 따라서 수면에서 높이 h인 곳에서 돌을 떨어뜨릴 때 내가 측정하는 시간은

$$\sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{u}.$$

이다. 꼭대기에서는 $h = D$이다. 아래로 내려간 뒤에는 나(그리고 돌의 출발점)는 수면에서 높이 $D - \delta$인 곳에 있고, 소리는 그곳까지만 오면 된다. 그러므로

$$\begin{aligned} t &= \left(\sqrt{\frac{2D}{g}} + \frac{D}{u}\right) - \left(\sqrt{\frac{2(D-\delta)}{g}} + \frac{D-\delta}{u}\right) \\ &= \sqrt{\frac{2D}{g}} - \sqrt{\frac{2(D-\delta)}{g}} + \frac{\delta}{u}, \end{aligned}$$

이고, 이것이 구하려던 식이다.

D에 대한 식

두 낙하 시간을 $a = \sqrt{2D/g}$, $b = \sqrt{2(D-\delta)/g}$로 놓자. 방금 보인 결과에 따르면

$$a - b = t - \frac{\delta}{u} = \beta.$$

이다. $\delta > 0$이므로 $a > b$이고, 따라서 $\beta > 0$이다. 특히 $\beta \neq 0$이다. 또한

$$a^2 - b^2 = \frac{2D}{g} - \frac{2(D-\delta)}{g} = \frac{2\delta}{g}.$$

이다.

? **생각해 보기** $a - b$를 알고 있다. a만 따로 구하려면 어떻게 해야 할까?

인수분해하면 $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = \beta(a+b)$이고, β는 양수이므로 β로 나눌 수 있다. 따라서

$$a + b = \frac{2\delta}{\beta g}.$$

이다. 이것을 $a - b = \beta$와 더하고 2로 나누면

$$a = \tfrac{1}{2}\beta + \frac{\delta}{\beta g} = T.$$

이다. 마지막으로 $a = \sqrt{2D/g}$이면 $D = \frac{1}{2}ga^2$이므로

$$D = \tfrac{1}{2}gT^2,$$

이고, 이것이 구하려던 식이다. (즉 T는 돌이 꼭대기에서 우물의 전체 깊이만큼 떨어지는 데 걸리는 시간일 뿐이다.)

수치 계산

$u = 300\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $t = \frac{1}{5}\,\mathrm{s}$, $\delta = 10\,\mathrm{m}$이면

$$\begin{aligned}
\beta &= \frac{1}{5} - \frac{10}{300} = \frac{1}{5} - \frac{1}{30} = \frac{1}{6}\,\mathrm{s},\\
T &= \frac{1}{12} + \frac{10}{\frac{1}{6}\cdot 10} = \frac{1}{12} + 6 = \frac{73}{12}\,\mathrm{s},\\
D &= \tfrac{1}{2}\cdot 10 \cdot \left(\frac{73}{12}\right)^2 = \frac{5\times 5329}{144} = \frac{26645}{144} \approx 185.03\,\mathrm{m}.
\end{aligned}$$

이다. 따라서 우물의 깊이는 약 185 m이다.

검산

- $D = 26645/144$를 $\delta = 10$과 함께 t에 대한 식에 다시 대입하자. 두 낙하 시간은 $73/12 \approx 6.083\,\mathrm{s}$와 $\sqrt{2(175.03)/10} \approx 5.917\,\mathrm{s}$로, 그 차는 $1/6\,\mathrm{s}$이다. 여기에 $\delta/u = 1/30\,\mathrm{s}$를 더하면 정확히 $t = 0.2\,\mathrm{s}$가 된다.
- 소리가 순간적으로 전달된다면($u \to \infty$) $\beta = t$가 되는데, 당연히 그래야 한다. 이때는 낙하 시간만 의미가 있기 때문이다.
- 떨어지는 돌을 작은 시간 간격으로 수치 계산하고 소리의 지연을 더하면 t에 대한 식이 $10^{-4}\,\mathrm{s}$ 이내로 재현되며, 역으로 구한 식 $D = \frac{1}{2}gT^2$는 무작위로 고른 10^4가지 경우에서 D를 정확히 되찾는다.

흔한 실수

- 내가 아래로 내려간 뒤에는 소리가 $D - \delta$만 이동한다는 사실을 잊어서 δ/u 항을 빠뜨리는 것.
- 방정식 $a - b = \beta$를 곧바로 제곱하려는 것. 이렇게 하면 계산이 지저분해지지만, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$를 쓰면 한 줄 만에 $a + b$를 얻는다.
- 소리를 아예 무시하는 것. $\beta = t = 0.2$로 놓고 같은 방법을 쓰면 $T = 5.1\,\text{s}$, $D \approx 130\,\text{m}$가 되어 크게 틀린다.

STEP 너머

여기서 쓴 방법은 **차분 측정**(*differential measurement*)이다. 한 번의 시간 측정을 그대로 믿는 대신, 알려진 양만큼 차이가 나는 두 실험을 비교하여 미지의 양이 상쇄되도록 하는 것이다. 마지막 실수는 자료의 작은 변화에 답이 얼마나 민감한지를 보여 준다. t는 큰 두 시간의 작은 차이기 때문이다. 물리학자와 공학자는 이를 오차 전파(error propagation)와 조건수(condition number)로 정량화하며, 이는 대학 1학년의 실험 방법론과 수치해석(numerical analysis)에서 배운다. 간단한 운동을 신중하게 모형화하는 방법에 대해 더 알고 싶다면 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 읽어 보라.

풀이

STEP I 2012, 문제 11

역학 • 도르래와 마찰

STEP I 2012, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/12-s1-q11

핵심 아이디어

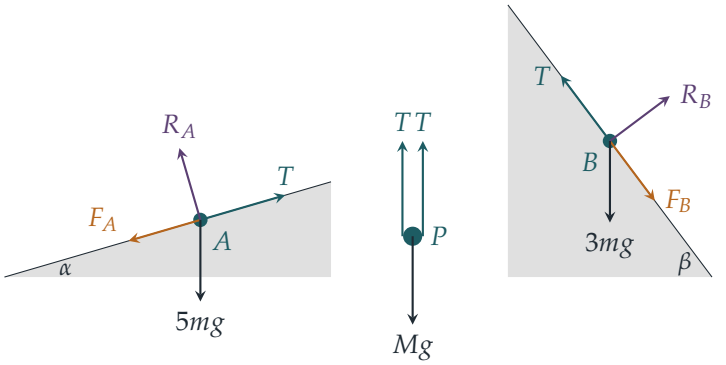
모든 도르래(pulley)가 매끄럽고(smooth) 줄이 가벼우므로(light), 장력(tension)은 줄 전체에서 같다. 따라서 각 질점(particle)마다 장력과 마찰력(friction)을 잇는 방정식이 하나씩 나오고, 도르래 P에서 세 번째 방정식이 나온다. 각은 $7, 24, 25$ 삼각형과 $3, 4, 5$ 삼각형에서 골랐으므로 사인과 코사인 값이 모두 정확한 분수이다. 움직이는 경우에는 한 가지가 더 필요하다. 줄의 길이가 일정하다는 사실 때문에 A, B, P의 가속도(acceleration)가 서로 어떻게 묶이는지 알아야 한다.

풀이

A, B를 질점으로, 줄을 가볍고 늘어나지 않는(inextensible) 것으로 모형화한다. 도르래 Q와 R는 매끄럽고 가벼우며 고정되어 있고, P는 매끄러우며 질량이 M이다. $\alpha = \arctan\frac{7}{24}$, $\beta = \arctan\frac{4}{3}$이라 하자. 세 변이 $7, 24, 25$와 $3, 4, 5$인 직각삼각형에서

$$\sin\alpha = \frac{7}{25}, \quad \cos\alpha = \frac{24}{25}, \qquad \sin\beta = \frac{4}{5}, \quad \cos\beta = \frac{3}{5}.$$

장력을 T라 하자. 모든 도르래가 매끄러우므로 T는 줄의 모든 부분에서 같다.



두 소문항 모두에서 질점들은 각자의 경사면을 따라 **위로** 움직이기 직전이거나 움직이고 있으므로, 그림처럼 마찰력은 각 경사면을 따라 **아래로** 작용한다. 경사면에 수직인 방향으로 힘을 분해하면

$$R_A = 5mg\cos\alpha = \tfrac{24}{5}mg, \qquad R_B = 3mg\cos\beta = \tfrac{9}{5}mg.$$

소문항 (i)

두 질점 모두 미끄러지기 직전이므로 마찰력은 최대 정지 마찰력(limiting friction)이다. 즉 $F_A = \mu R_A$, $F_B = \mu R_B$이다. 각 경사면을 따라 힘을 분해하면 (평형 상태):

$$\begin{aligned} A: &\quad T = 5mg\sin\alpha + \mu R_A = \tfrac{mg}{5}(7 + 24\mu), \\ B: &\quad T = 3mg\sin\beta + \mu R_B = \tfrac{mg}{5}(12 + 9\mu). \end{aligned}$$

두 식을 같게 놓으면 $7 + 24\mu = 12 + 9\mu$이므로

$$\mu = \tfrac{1}{3},$$

이고, 따라서 $T = \frac{mg}{5}(7 + 8) = 3mg$이다.

도르래 P는 위로 당기는 연직 방향의 두 줄과 아래로 당기는 무게에 의해 평형을 이루므로

$$2T = Mg \quad \Longrightarrow \quad M = \frac{2 \cdot 3mg}{g} = 6m,$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

소문항 (ii)

이제 $M = 9m$이다. 이는 한계 평형(limiting equilibrium)에서 겨우 지탱할 수 있는 $6m$보다 무거우므로, P가 내려가면서 두 질점을 각자의 경사면 위로 끌어올릴 것으로 예상된다.

? **생각해 보기** 세 가속도는 서로 어떤 관계에 있을까?

A와 B의 경사면 위쪽 방향 가속도를 각각 a와 b라 하고, P의 아래쪽 방향 가속도를 p라 하자. 줄의 길이 $AQ + QP + PR + RB$는 일정하다. A가 경사면을 따라 위로 x만큼, B가 경사면을 따라 위로 y만큼 움직이면 AQ와 RB는 각각 x와 y만큼 짧아진다. P가 z만큼 내려가면 QP와 PR는 각각 z만큼 길어진다. 따라서 언제나 $2z = x + y$이고, 이를 두 번 미분하면

$$2p = a + b.$$

$\mu = \frac{1}{3}$이므로 위로 미끄러지는 동안의 마찰력은 A에서 $\frac{1}{3}R_A = \frac{8}{5}mg$, B에서 $\frac{1}{3}R_B = \frac{3}{5}mg$이다. 각 경사면 방향과 P의 연직 방향으로 뉴턴의 제2법칙(Newton's second law)을 적용하면

$$\begin{aligned} A: &\quad T - \tfrac{7}{5}mg - \tfrac{8}{5}mg = 5ma, && \text{따라서} T - 3mg = 5ma, \\ B: &\quad T - \tfrac{12}{5}mg - \tfrac{3}{5}mg = 3mb, && \text{따라서} T - 3mg = 3mb, \\ P: &\quad 9mg - 2T = 9mp. \end{aligned}$$

$T = 3mg + X$로 놓자. 그러면 $a = \dfrac{X}{5m}$, $b = \dfrac{X}{3m}$이고, 줄의 조건에서

$$p = \tfrac{1}{2}(a + b) = \frac{4X}{15m}.$$

이를 P의 방정식에 대입하면

$$3mg - 2X = \frac{12X}{5} \quad \Longrightarrow \quad X = \frac{15mg}{22}.$$

따라서

$a = \dfrac{3g}{22}$ 경사면 위쪽 방향, $\quad b = \dfrac{5g}{22}$ 경사면 위쪽 방향, $\quad p = \dfrac{2g}{11}$ 연직 아래쪽 방향,

이고, 장력은 $T = \frac{81}{22}mg$이다.

생각해 보기 한 질점이 제자리에 머물지 않고 두 질점이 정말로 모두 위로 움직인다는 것을 어떻게 알 수 있을까?

위의 방정식에서, 질점이 경사면 위로 미끄러지는 것은 $T > 3mg$일 때뿐이고, 정지해 있는 (또는 아래로 미끄러지려는) 것은 $T \leq 3mg$일 때뿐이다. 값 $3mg$는 두 질점에서 같으므로, 둘 다 위로 움직이거나 둘 다 움직이지 않는다. 만약 둘 다 위로 움직이지 않는다면 $a + b \leq 0$이므로 $p \leq 0$이다. 그런데 $T \leq 3mg$이면 $9mg - 2T \geq 3mg > 0$이므로 $p > 0$이어야 한다. 이는 모순이므로 두 질점은 모두 위로 움직이고, ($a, b > 0$인) 앞의 풀이는 모순이 없다.

검산

▶ 소문항 (i)에서 $\mu = \frac{1}{3}$을 두 질점의 방정식에 대입하면 같은 장력 $3mg$가 나온다.

- 소문항 (ii)에서 줄의 조건대로 $2p = \frac{4g}{11} = \frac{3g}{22} + \frac{5g}{22} = a + b$이고, $T = \frac{81}{22}mg \approx 3.68mg$는 $3mg$(미끄러지기 시작하는 경계값)와 $4.5mg$(P의 가속도가 0이 되는 값) 사이에 있다.
- 세 운동 방정식을 단계별로 계산하는 수치 시뮬레이션에서 줄의 길이는 반올림 오차 범위 안에서 일정하게 유지되고, $p \approx 0.182g$이다.
- M이 다시 $6m$이라면 같은 방법으로 $X = 0$을 얻으므로 모든 가속도가 0이 되어 소문항 (i)과 일치한다.

흔한 실수

- $a = b = p$로 놓는 것: 두 줄 부분이 도르래 P의 운동을 나누어 가지므로, P는 두 질점이 움직이는 속도를 합한 것의 절반으로 움직인다.
- 마찰력을 경사면 위쪽 방향으로 두는 것: 두 질점은 모두 **위로** 끌려가고 있으므로, 마찰력은 이에 저항하여 경사면 아래쪽 방향으로 작용한다.
- P에 걸린 두 줄이 모두 장력 T를 가지므로 P에 작용하는 위쪽 힘이 $2T$라는 것을 잊는 것.

STEP 너머

관계식 $2p = a + b$는 **구속 조건**(*constraint*)이다. 이 조건은 독립 좌표의 개수를 셋에서 둘로 줄인다. 대학 1학년이나 2학년에서 배우는 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)에서는 구속 조건을 자동으로 만족하는 좌표를 골라서 장력을 아예 구할 필요가 없게 한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)에는 구속 방정식을 통해 꼼꼼하게 다룬 도르래 계가 많이 실려 있어, 그러한 관점으로 넘어가는 좋은 다리가 된다.

풀이

STEP I 2012, 문제 12

확률과 통계 • 조건부 확률

STEP I 2012, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/12-s1-q12

핵심 아이디어

모든 것은 소화기가 몇 번째 해에 결함이 생기는지에 달려 있으므로, 먼저 확률밀도함수(density)를 누적분포함수(cumulative distribution function)로 바꾸고, 결함이 첫째 해, 둘째 해, 셋째 해에 생길 확률을 읽어 낸다. 결함이 생긴 해를 알고 나면 검사는 독립(independent)인 통과가 몇 번 이어진 뒤 불합격이 한 번 나오는 과정일 뿐이다. 마지막 부분은 조건부확률(conditional probability)이며, "18개월 시점에 결함이 있다"는 사건 역시 T가 어느 구간에 놓이는지에 대한 진술이다.

풀이

T의 분포

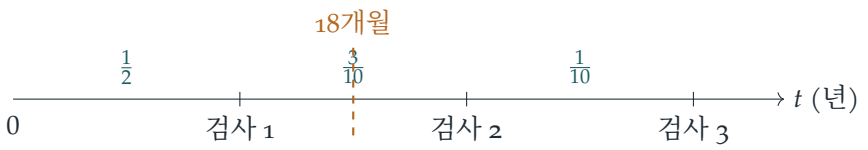
$t \geq 0$에 대하여 $u = 1 + s^2$으로 치환하면 ($\mathrm{d}u = 2s\,\mathrm{d}s$이므로)

$$F(t) = \mathrm{P}(T \leq t) = \int_0^t \frac{2s}{(1+s^2)^2}\,\mathrm{d}s = \left[-\frac{1}{1+s^2}\right]_0^t = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

따라서 $F(1) = \frac{1}{2}$, $F(2) = \frac{4}{5}$, $F(3) = \frac{9}{10}$이고

$$\mathrm{P}(0 < T < 1) = \tfrac{1}{2}, \qquad \mathrm{P}(1 < T < 2) = \tfrac{4}{5} - \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{10}, \qquad \mathrm{P}(2 < T < 3) = \tfrac{9}{10} - \tfrac{4}{5} = \tfrac{1}{10}.$$

T는 연속(continuous)이므로 결함이 정확히 검사일에 생길 확률은 0이다. 따라서 끝점에서 $<$를 쓰는지 $\leq$를 쓰는지는 신경 쓸 필요가 없다.



제조 후 정확히 3년 만에 폐기될 확률

소화기가 제조 3년 후의 검사에서 폐기되는 사건을 D라 하자. 이 사건이 일어나려면 셋째 검사 전에 결함이 생겨야 하고 (즉 $T < 3$), 그 전까지 결함이 있는 상태에서 받은 모든 검사를 통과해야 하며, 셋째 검사에서 불합격해야 한다. 결함이 없는 소화기는 항상 통과하므로 시각 T 이후의 검사만 중요하며, 이 검사들은 서로 독립이고 불합격 확률이 p이다.

- $0 < T < 1$인 경우: 검사 1, 2, 3에서 모두 결함이 있으므로 통과, 통과, 불합격이어야 한다. 확률은 $(1-p)^2 p$이다.
- $1 < T < 2$인 경우: 검사 1은 자동으로 통과하고, 검사 2를 통과한 뒤 검사 3에서 불합격해야 한다. 확률은 $(1-p)p$이다.
- $2 < T < 3$인 경우: 검사 1과 2는 자동으로 통과하고, 검사 3에서 불합격해야 한다. 확률은 p이다.

$T > 3$이면 검사 3에서 결함이 없으므로 그때 폐기될 수 없다. 전확률 법칙(law of total probability)에 의하여

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(D) &= \tfrac{1}{2}(1-p)^2 p + \tfrac{3}{10}(1-p)p + \tfrac{1}{10}p \\ &= \frac{p}{10}\Big(5(1-2p+p^2) + 3(1-p) + 1\Big) \\ &= \frac{p\,(5p^2 - 13p + 9)}{10}, \end{aligned}$$

이므로 원하는 식을 얻는다.

3년 만에 폐기되었을 때 18개월 시점에 결함이 있었을 확률

소화기가 제조 18개월 후에 결함이 있었던 사건, 즉 $T < \frac{3}{2}$인 사건을 E라 하자. 구하려는 것은

$$\mathrm{P}(E \mid D) = \frac{\mathrm{P}(E \cap D)}{\mathrm{P}(D)}.$$

생각해 보기 구간 $(0, \frac{3}{2})$는 검사 하나를 사이에 걸치고 있다. 이 구간을 어떻게 나눌까?

검사에서 중요한 것은 결함이 생긴 해이므로, E를 $0 < T < 1$과 $1 < T < \frac{3}{2}$로 나눈다.

$F(\frac{3}{2}) = \dfrac{9/4}{13/4} = \dfrac{9}{13}$이므로

$$\mathrm{P}\left(1 < T < \tfrac{3}{2}\right) = \tfrac{9}{13} - \tfrac{1}{2} = \tfrac{5}{26}.$$

$0 < T < 1$일 때 D의 확률은 앞에서와 같이 $(1-p)^2 p$이고, $1 < T < \frac{3}{2}$일 때에도 결함은 여전히 둘째 해에 생기므로 D의 확률은 $(1-p)p$이다. 따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(E \cap D) &= \tfrac{1}{2}(1-p)^2 p + \tfrac{5}{26}(1-p)p \\ &= \frac{p(1-p)}{26}\big(13(1-p)+5\big) = \frac{p(1-p)(18-13p)}{26}.\end{aligned}$$

$\mathrm{P}(D)$로 나누면 (이 값은 $0 < p \le 1$에서 양수이다. $5p^2 - 13p + 9$의 판별식(discriminant)이 $169 - 180 < 0$이므로 이 식은 항상 양수이기 때문이다) 인수 p가 약분되어

$$\mathrm{P}(E \mid D) = \frac{10(1-p)(18-13p)}{26(5p^2-13p+9)} = \frac{5(1-p)(18-13p)}{13(5p^2-13p+9)}.$$

검산

- $p = 1$이면 결함이 있는 소화기는 모두 결함이 생긴 뒤 첫 검사에서 폐기되므로, 3년째에 폐기되었다는 것은 결함이 $(2,3)$에서 생겼다는 뜻이다. 즉 $\mathrm{P}(D) = \frac{1}{10}$이고 $\mathrm{P}(E \mid D) = 0$이다. 두 공식 모두 이와 일치한다.
- $p \to 0$이면 $\mathrm{P}(E \mid D) \to \dfrac{5 \cdot 18}{13 \cdot 9} = \dfrac{10}{13}$이고, 이는 $\mathrm{P}(T < \frac{3}{2} \mid T < 3) = \dfrac{9/13}{9/10}$이다. 검사가 결함을 거의 잡아내지 못할 때에는 폐기되었다는 사실이 $T < 3$ 이상의 정보를 거의 주지 않는다.
- $p = 0.4$로 소화기 10^6개를 모의실험한 결과 $\mathrm{P}(D) \approx 0.1838$ (정확한 값 0.184), $\mathrm{P}(E \mid D) \approx 0.642$ (정확한 값 $\frac{192}{299} \approx 0.642$)를 얻었다.

흔한 실수

- 결함이 있는 소화기가 셋째 검사에서 불합격하기 전에 앞선 검사들을 **통과**해야 한다는 점을 잊는다.
- 마지막 부분에서 $\mathrm{P}(T < \frac{3}{2}) = \frac{9}{13}$을 한 덩어리로 사용한다. 첫째 해에 생긴 결함과 둘째 해 전반기에 생긴 결함은 받게 되는 검사 횟수가 다르다.

STEP 너머

여기서 T는 연속적인 수명이지만, 우리는 이를 이산적이고 불완전한 검사를 통해서만 관찰한다. 이는 생존 분석(survival analysis)과 신뢰성 이론(reliability theory)에서 다루는 **구**

간 중도절단(*interval-censored*) 자료의 상황이며, 마지막 부분은 작은 베이즈 갱신(Bayesian update)이다. 즉 관찰된 불합격에 비추어 T의 사전분포(prior distribution)를 수정하는 것이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문서)은 연속분포와 이런 종류의 조건부 확률을 다룬다.

풀이

STEP I 2012, 문제 13

확률과 통계 • 지시변수를 통한 기댓값

STEP I 2012, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/12-s1-q13

핵심 아이디어

먼저 조건부 표본공간(conditional sample space)을 정확히 파악한다. 어떤 숫자가 제외되는지 알고 나면, 그 수는 각 자리가 $\{1,2,3,4,5\}$에서 선택된 다섯 자리 숫자열일 뿐이고, 이러한 숫자열은 모두 같은 확률로 나타난다. 그다음 서로 다른 숫자의 개수의 분포 전체를 구하는 대신, 그 개수를 가능한 숫자마다 하나씩 대응하는 지시확률변수(indicator variable)들의 합으로 나타낸다. 기댓값의 선형성(linearity of expectation)을 이용하면 문제는 하나의 확률을 구하는 것으로 바뀌고, 이 확률은 여사건(complement)을 생각하면 쉽게 구할 수 있다.

풀이

조건부 표본공간

10000부터 99999까지의 모든 정수는 $d_1 \neq 0$인 다섯 자리 숫자열 $d_1d_2d_3d_4d_5$이고, 이러한 숫자열은 각각 정확히 한 번씩 나타난다. 조건은 모든 자리의 숫자가 $\{1,2,3,4,5\}$에 속한다는 것이다. 0은 어차피 제외되므로 $d_1 \neq 0$이라는 제한은 아무것도 더하지 않는다. 따라서 조건을 만족하는 정수는 $\{1,2,3,4,5\}$의 숫자로 이루어진

$$5^5 = 3125$$

개의 다섯 자리 숫자열과 정확히 일대일로 대응한다.

원래의 선택은 균등(uniform)했다. 어떤 사건으로 조건을 주어도 그 사건 안의 결과들은 여전히 같은 확률을 가지므로, 조건이 주어졌을 때 이 3125개의 숫자열은 각각 확률 $\frac{1}{3125}$를 가진다. 달리 말하면, 다섯 자리의 숫자는 서로 독립(independent)이고 각각 $\{1,2,3,4,5\}$에서 균등분포를 따른다. 즉 3125개의 결과 각각의 확률은 $\frac{1}{5}$ 다섯 개의 곱이다.

지시확률변수

선택된 수에 나타나는 서로 다른 숫자의 개수를 N이라 하자. $j = 1, 2, 3, 4, 5$에 대하여

$$I_j = \begin{cases} 1 & \text{숫자}j\text{가 적어도 한 번 나타나면,} \\ 0 & \text{그 외의 경우.} \end{cases}$$

로 정의한다. 나타나는 각 숫자는 합에 정확히 1씩 기여하므로

$$N = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5.$$

이다.

> **생각해 보기** I_j들은 독립이 아니다. 그래도 기댓값을 더할 수 있을까?

그렇다. 기댓값의 선형성 $\mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)$는 독립이든 아니든 모든 확률변수에 대하여 성립한다. 따라서

$$\mathrm{E}(N) = \sum_{j=1}^{5} \mathrm{E}(I_j) = \sum_{j=1}^{5} \mathrm{P}(\text{숫자}j\text{가 나타남}).$$

이다.

숫자 j가 나타나지 않는 것은 서로 독립인 다섯 자리의 숫자가 모두 나머지 네 값 중 하나일 때이고, 그 확률은 각 자리마다 $\frac{4}{5}$이다. 그러므로

$$\mathrm{P}(\text{숫자}j\text{가 나타남}) = 1 - \left(\tfrac{4}{5}\right)^5 = 1 - \frac{1024}{3125} = \frac{2101}{3125}.$$

이다. 대칭성에 의해 이 값은 다섯 개의 j 값에 대하여 모두 같으므로

$$\mathrm{E}(N) = 5 \cdot \frac{2101}{3125} = \frac{2101}{625} = 3.3616,$$

이고, 이것이 증명하려던 결과이다.

다른 방법: 분포 전체 구하기

직접 세는 것을 선호한다면, 정확히 k개의 서로 다른 숫자를 사용하는 숫자열의 개수는 $\binom{5}{k}$(숫자를 고르는 방법의 수)에, 선택한 k개의 숫자가 모두 나타나도록 다섯 자리를 채우는 방법의 수를 곱한 것이다. 두 번째 개수는 포함배제의 원리(inclusion–exclusion)로 구한다. 예를 들어 $k = 3$이면 그 값은 $3^5 - 3 \cdot 2^5 + 3 \cdot 1^5 = 150$이다.

k	1	2	3	4	5	합계
숫자열 수	$5 \cdot 1$	$10 \cdot 30$	$10 \cdot 150$	$5 \cdot 240$	$1 \cdot 120$	
	5	300	1500	1200	120	3125

그러면

$$\mathrm{E}(N) = \frac{1\cdot 5 + 2\cdot 300 + 3\cdot 1500 + 4\cdot 1200 + 5\cdot 120}{3125} = \frac{10505}{3125} = 3.3616.$$

이다. 이 방법도 통하지만 더 길고 틀릴 수 있는 곳이 더 많다. 지시확률변수를 이용하는 방법은 확률 하나만 구하면 된다.

검산

- 표의 개수를 모두 더하면 $3125 = 5^5$이므로, 모든 숫자열이 정확히 한 번씩 세어졌음을 확인할 수 있다.
- 답이 타당하다. N은 1과 5 사이에 있고, 다섯 개의 값에서 다섯 번 뽑으면 중복이 꽤 생길 것으로 예상되므로 3보다 약간 큰 값은 그럴듯하다. 일반적인 검산으로, m개의 값에서 n번 뽑으면 같은 논리로 $m\left(1-\left(1-\frac{1}{m}\right)^n\right)$을 얻는데, 이 값은 $n=1$일 때 마땅히 그래야 하듯 1이다.
- 컴퓨터로 10000부터 99999까지의 모든 정수를 나열하고, 숫자 1–5만 사용하는 3125개를 골라 서로 다른 숫자의 개수를 평균 내면 정확히 $\frac{2101}{625} = 3.3616$을 얻는다.

흔한 실수

- 표본공간을 90000개의 정수 전체로 보는 것. 조건에 의해 표본공간은 같은 확률을 가지는 5^5개의 숫자열로 줄어든다.
- 기댓값의 선형성에 독립성이 필요하다고 생각하는 것. 독립성은 필요하지 않으며, 바로 그 때문에 지시확률변수가 그토록 유용하다.
- P(숫자j가 나타남)을 다섯 자리 각각에 대해 $\frac{1}{5}$씩 더해서 구하는 것. 이렇게 하면 j가 두 번 이상 나타나는 숫자열을 여러 번 세게 되어 1이 나온다. 여사건을 이용해야 한다.

STEP 너머

이것은 고전적인 "점유 문제(occupancy problem)" 또는 쿠폰 수집가 문제(coupon-collector problem)이다. n개의 공을 m개의 상자에 무작위로 던지고, N은 결국 공이 들어 있는 상자의 개수이다. 지시확률변수를 이용한 기법 $\mathrm{E}(N) = m\left(1-\left(1-\frac{1}{m}\right)^n\right)$은 대학 1학년 확률론과 해싱(hashing) 같은 알고리즘 분석에서 가장 유용한 도구 중 하나이다. 정확한 분포에는 제2종 스털링 수(Stirling numbers of the second kind)가 등장하는데, 이는 위의 포함배제 계산에서 이미 나타났다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)는 책 전체에서 지시확률변수를 사용하며, 다음 단계로 읽기에 훌

륭한 책이다.

풀이

STEP II 2012, 문제 1

순수수학 • 이항급수의 계수

STEP II 2012, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/12-s2-q1

핵심 아이디어

각 인수 $(1-x^k)^{-1}$은 x^k에 대한 등비급수(geometric series)이다. 따라서 이런 인수들을 곱한 뒤 x^n의 계수(coefficient)를 읽어 내는 것은 n을 허용된 조각들의 합으로 나타내는 방법의 수를 세는 일과 같다. 계수를 개수로 보기 시작하면 경우 나누기가 저절로 정리되고, $(1-x)^{-1}$을 곱하는 것은 계수의 목록을 누적합(running total)의 목록으로 바꾸는 일일 뿐이다.

풀이

일반항

이항전개(binomial expansion)에 의해 $|y|<1$일 때 $(1-y)^{-2}=\sum_{r\geq 0}(r+1)y^r$이다(계수는 $\binom{-2}{r}(-1)^r=r+1$). $y=x^6$을 대입하면

$$(1-x^6)^{-2}=\sum_{r=0}^{\infty}(r+1)\,x^{6r},$$

이므로 일반항(general term)은 $(r+1)x^{6r}$이고, 지수가 6의 배수가 아닌 x의 거듭제곱은 모두 계수가 0이다.

소문항 (i)

또한 $(1-x^3)^{-1}=\sum_{s\geq 0}x^{3s}$이다. 두 급수를 곱하면, 항 x^n은 $6r+3s=n$을 만족하는 음이 아닌 정수의 쌍 (r,s) 하나하나로부터 생기고, 각 쌍은 $(r+1)\cdot 1$만큼 기여한다. 따라서

$$\text{계수}x^n=\sum_{\substack{r,s\geq 0\\ 6r+3s=n}}(r+1).$$

$n = 24$일 때는 $2r + s = 8$이어야 하므로 r는 $0, 1, 2, 3, 4$가 될 수 있다(각각에 대해 $s = 8 - 2r \geq 0$이 정확히 하나씩 있다). 따라서 x^{24}의 계수는

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15.$$

일반적인 n. $6r + 3s$는 항상 3의 배수이므로 $3 \mid n$이 아니면 계수는 0이다. $n = 3m$이면 $2r + s = m$이어야 하고, $0 \leq 2r \leq m$인 각 r에 대해 조건을 만족하는 s가 정확히 하나 있다. 따라서 r는 0부터 $\lfloor m/2 \rfloor$까지 움직이고, 계수는

$$1 + 2 + \cdots + (\lfloor m/2 \rfloor + 1).$$

n을 6으로 나눈 나머지에 따라 나누어 쓰면 다음과 같다.

- $n = 6k (m = 2k, \lfloor m/2 \rfloor = k)$: 계수는 $\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$이다.
- $n = 6k + 3 (m = 2k + 1, \lfloor m/2 \rfloor = k)$: 계수는 역시 $\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$이다.
- $n \not\equiv 0 \pmod 3$: 계수는 0이다.

확인해 보면, $n = 24 = 6 \times 4$일 때 $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 = 15$로 앞에서 구한 값과 같다.

소문항 (ii)

소문항 (i)에서 구한 x^n의 계수를 b_n, 이제 구하려는 계수를 c_n이라 하자. $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \cdots$이므로

$$\Big(\sum_j b_j x^j\Big)(1 + x + x^2 + \cdots) = \sum_n \Big(\sum_{j=0}^{n} b_j\Big) x^n,$$

따라서 $c_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_n$, 즉 소문항 (i)의 계수들의 누적합이다.

> **?** **생각해 보기** 왜 $(1-x)^{-1}$을 곱하면 누적합이 나올까?

곱에서 x^n을 얻으려면 첫 번째 급수에서 x^j를, $1 + x + x^2 + \cdots$에서 x^{n-j}를 골라야 하는데, 뒤쪽의 계수는 항상 1이다. 따라서 $0 \leq j \leq n$인 모든 b_j가 c_n에 가중치 1로 정확히 한 번씩 나타난다.

$3 \mid j$인 b_j만 0이 아니며, 소문항 (i)에 의해 이들은 같은 값끼리 짝을 이룬다. 즉 $b_{6k} = b_{6k+3} = T_{k+1}$이고, 여기서 $T_p = \frac{1}{2}p(p+1)$은 p번째 삼각수(triangular number)이다. 따라서 $n = 24$일 때

$$\begin{aligned} c_{24} &= (b_0 + b_3) + (b_6 + b_9) + (b_{12} + b_{15}) + (b_{18} + b_{21}) + b_{24} \\ &= 2(1 + 3 + 6 + 10) + 15 = 40 + 15 = 55, \end{aligned}$$

이므로 요구된 결과를 얻는다.

$n = 25$일 때는 $3 \nmid 25$이므로 추가되는 항 b_{25}가 0이고, 따라서 $c_{25} = c_{24} = 55$이다.

$n = 66 = 6 \times 11$일 때는 같은 규칙에 의해

$$c_{66} = 2\,(T_1 + T_2 + \cdots + T_{11}) + T_{12}.$$

처음 p개의 삼각수의 합은 사면체수(tetrahedral number) $\frac{1}{6}p(p+1)(p+2)$이다(수학적 귀납법(induction)으로 보이거나, 하키 스틱 항등식(hockey-stick identity)에 의해 $T_1 + \cdots + T_p = \binom{p+2}{3}$임을 이용하면 된다). 따라서 $T_1 + \cdots + T_{11} = \frac{1}{6} \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 = 286$이고 $T_{12} = 78$이다. 그러므로

$$c_{66} = 2 \times 286 + 78 = 650.$$

같은 논증으로 일반 공식을 얻을 수 있다. $n = 6K + r$이고 $0 \le r \le 2$이면 $c_n = 2\binom{K+2}{3} + \binom{K+2}{2}$이고, $3 \le r \le 5$이면 $c_n = 2\binom{K+3}{3}$이다. $K = 4$일 때 첫 번째 공식은 $40 + 15 = 55$를, $K = 11$일 때는 $572 + 78 = 650$을 준다.

검산

소문항 (ii)에서 x^n의 계수는 $6a + 6b + 3c + d = n$의 음이 아닌 정수해의 개수를 센다(각 인수마다 등비급수가 하나씩이며, $(1 - x^6)^{-2}$는 두 개로 센다). 이 해들을 컴퓨터로 직접 세어 보면 $n = 24, 25, 66$에 대해 55, 55, 650이 나온다. 급수를 x^{80}까지 항별로 곱해 보아도 두 소문항의 공식이 모두 확인된다. 손으로는 작은 경우를 빠르게 확인할 수 있다. 소문항 (ii)에서 $c_0 = c_1 = c_2 = 1$이고 $c_3 = c_4 = c_5 = 2$인데, 이는 $K = 0$일 때의 일반 공식과 일치한다.

흔한 실수

- 소문항 (i)에서 $n = 6k + 3$인 경우를 빠뜨리는 실수: 3의 홀수 배도 x^3 인수를 홀수 개 곱하면 나타난다.
- $(1 - x^6)^{-2}$의 일반항을 $(r+1)x^{6r}$ 대신 $r\,x^{6r}$로 쓰는 실수: 상수항은 0이 아니라 1이다.
- x^{25}를 새로 계산해야 하는 것으로 여기는 실수: 소문항 (i)의 급수에는 지수가 25인 항이 없으므로 이 계수는 x^{24}의 계수와 같다.

STEP 너머

이처럼 개수를 세는 도구로 쓰이는 멱급수를 **생성함수**(generating functions)라 한다. 여기서의 곱은 6짜리 동전, (디자인이 다른) 또 하나의 6짜리 동전, 3짜리 동전, 1짜리 동전으로 n펜스를 지불하는 방법의 수를 센다. 분할(partitions) 이론은 바로 이 아이디어에서 자라났으며, 답이 n을 6으로 나눈 나머지에 따라 달라지는 구간별 다항식이라는 사실은 일반적인

현상이다(“준다항식(quasi-polynomials)”). 이 방법에 대한 생동감 있는 입문서로 Wilf의 *generatingfunctionology*를 읽어 보라.

풀이

STEP II 2012, 문제 2

순수수학 • 다항식의 합성

> **STEP II 2012, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/12-s2-q2

핵심 아이디어

합성(composition)하면 차수(degree)가 곱해지므로, p를 몇 번만 반복(iteration)해도 차수가 금세 너무 커져서 우변과 맞출 수 없게 된다. 차수를 비교하면 p의 차수가 정해지고, 그 다음에는 p를 미지의 계수(coefficient)로 써 놓으면 각 문항이 짧은 대수 계산으로 바뀐다. (ii)에는 깔끔한 지름길이 있다. $\mathrm{p}(\mathrm{p}(x))$ 자체가 $\mathrm{p}(x)$에 대한 이차식(quadratic)이므로 좌변 전체가 $\mathrm{p}(x)$에 대한 이차식이 되고, 완전제곱식을 만들면(completing the square) 문제가 해결된다.

풀이

합성함수의 차수

$a_m, b_n \neq 0$이라 하고 $\mathrm{p}(x) = a_m x^m + \ldots$, $\mathrm{q}(x) = b_n x^n + \ldots$로 쓰자. $\mathrm{p}(\mathrm{q}(x)) = a_m[\mathrm{q}(x)]^m + a_{m-1}[\mathrm{q}(x)]^{m-1} + \ldots$에서 항 $a_m[\mathrm{q}(x)]^m$의 차수는 mn이고 최고차항의 계수(leading coefficient)는 $a_m b_n^m \neq 0$이며, 나머지 항의 차수는 모두 $(m-1)n < mn$ 이하이다($n \geq 1$일 때). 따라서 최고차항을 상쇄하는 항은 없고,

$$\deg \mathrm{p}(\mathrm{q}(x)) = mn.$$

($n = 0$이면 $\mathrm{p}(\mathrm{q}(x))$는 상수(constant)이고, 이때도 $mn = 0$이다.)

소문항 (i)

p의 차수를 m이라 하자.

$m \geq 2$이면 위의 결과에 의해 $\mathrm{p}(\mathrm{p}(\mathrm{p}(x)))$의 차수는 m^3이고, $3\mathrm{p}(x)$의 차수는 $m < m^3$이다.

따라서 좌변의 차수는 $m^3 \geq 8$인데, 우변 $-2x$의 차수는 1이다. 불가능하다.

$m = 0$이면 어떤 상수 c에 대해 $\mathrm{p}(x) = c$이고, 좌변은 상수 $c - 3c = -2c$가 되어 모든 x에 대해 $-2x$와 같을 수 없다. 불가능하다.

따라서 $m = 1$이다. $a \neq 0$인 $\mathrm{p}(x) = ax + b$로 쓰자. 그러면

$$\mathrm{p}(\mathrm{p}(x)) = a(ax + b) + b = a^2x + (a + 1)b,$$
$$\mathrm{p}(\mathrm{p}(\mathrm{p}(x))) = a^3x + (a^2 + a + 1)b,$$

이고, 방정식은 다음과 같이 된다.

$$(a^3 - 3a)x + (a^2 + a + 1 - 3)b = -2x \quad \text{모든} x.$$

두 다항식(polynomial)이 모든 x에 대해 같으려면 계수가 모두 같아야 하므로

$$a^3 - 3a + 2 = 0 \qquad \text{그리고} \qquad (a^2 + a - 2)\, b = 0.$$

$a = 1$이 첫 번째 식의 근이므로 첫 번째 식은 $(a - 1)^2(a + 2) = 0$으로 인수분해(factorise)되고, $a = 1$ 또는 $a = -2$를 얻는다. 두 번째 조건은 $(a - 1)(a + 2)b = 0$인데, 이 두 값에 대해서는 b가 무엇이든 자동으로 성립한다. 따라서 해는 정확히 다음과 같다.

$$\mathrm{p}(x) = x + b \qquad \text{그리고} \qquad \mathrm{p}(x) = -2x + b, \qquad b\text{는 임의의 상수.}$$

두 번째 해의 모임을 확인해 보자. $\mathrm{p}(\mathrm{p}(x)) = 4x - b$이고 $\mathrm{p}(\mathrm{p}(\mathrm{p}(x))) = -8x + 3b$이므로, 좌변은 $-8x + 3b + 6x - 3b = -2x$이다.

소문항 (ii)

p의 차수를 m이라 하자. 좌변의 세 항의 차수는 각각 m^2, $2m$, m이다.

- $m \geq 3$이면 $m^2 > 2m > m$이므로 좌변의 차수는 $m^2 \geq 9 \neq 4$이다.
- $m = 1$이면 좌변의 차수는 2 이하이고, $m = 0$이면 좌변은 상수이다. 어느 쪽도 x^4과 같을 수 없다.

따라서 $m = 2$이다. (이때 $m^2 = 2m = 4$이므로 $2\mathrm{p}(\mathrm{p}(x))$와 $3[\mathrm{p}(x)]^2$의 최고차항(leading term)은 차수가 같고, 그 계수를 확인해야 한다.)

$a \neq 0$인 $\mathrm{p}(x) = ax^2 + bx + c$로 쓰고, 쓰는 수고를 덜기 위해 P로 $\mathrm{p}(x)$를 나타내자.

> **?** **생각해 보기** $\mathrm{p}(\mathrm{p}(x))$를 정말 끝까지 전개해야 할까?

그럴 필요 없다. 정의에 의해 $\mathrm{p}(\mathrm{p}(x)) = aP^2 + bP + c$이므로 좌변은

$$2(aP^2 + bP + c) + 3P^2 - 4P = (2a + 3)P^2 + (2b - 4)P + 2c,$$

로서 P에 대한 이차식이다. P^2의 최고차항은 a^2x^4이고 P의 차수는 2뿐이므로, 이 식의 x^4의 계수는 $(2a+3)a^2$이다. 이를 x^4과 비교하면

$$2a^3+3a^2-1=0, \qquad \text{즉,} \qquad (a+1)^2(2a-1)=0,$$

(근 $a=-1$을 찾아내어 나누면 된다) 따라서 $a=-1$ 또는 $a=\frac{1}{2}$이다.

이제 간단한 사실 하나를 이용한다. $S(x)$가 다항식이고 상수 K에 대해 $S(x)^2=x^4+K$이면 $(S-x^2)(S+x^2)=K$이다. S의 최고차항이 $\pm x^2$일 때 두 인수가 모두 영다항식(zero polynomial)이 아니라면, 적어도 하나는 차수가 2이므로 곱이 상수가 될 수 없다. 따라서 최고차항이 $\pm x^2$인 S에 대해서는 한 인수가 영이 되고, 정확히 $S=\pm x^2$이다.

$a=-1$인 경우. 이때 $2a+3=1$이고, 완전제곱식을 만들면

$$P^2+(2b-4)P+2c=\big(P+b-2\big)^2-(b-2)^2+2c=x^4.$$

따라서 $S=P+b-2=-x^2+bx+(c+b-2)$는 상수 K에 대해 $S^2=x^4+K$를 만족하고, 최고차항이 $-x^2$이다. 그러면 $S+x^2=bx+(c+b-2)$는 차수가 2보다 작고 $S-x^2$는 차수가 2이므로, 위의 사실에 의해 $S+x^2=0$이어야 한다. 즉 $b=0$이고 $c+b-2=0$이다. 따라서 $b=0$, $c=2$이고, 이때 $K=(b-2)^2-2c=0$이 되어 모순이 없다. 이로부터 다음을 얻는다.

$$\mathrm{p}(x)=2-x^2.$$

$a=\frac{1}{2}$인 경우. 이때 $2a+3=4$이고,

$$4P^2+(2b-4)P+2c=\left(2P+\tfrac{b-2}{2}\right)^2-\tfrac{(b-2)^2}{4}+2c=x^4.$$

이제 $S=2P+\frac{b-2}{2}=x^2+2bx+2c+\frac{b-2}{2}$의 최고차항은 x^2이므로, 같은 방법으로 $S-x^2=0$이다. 즉 $b=0$이고 $2c-1=0$이다. 따라서 $b=0, c=\frac{1}{2}$이고, $K=\frac{(b-2)^2}{4}-2c=1-1=0$이 되어 모순이 없다. 이로부터 다음을 얻는다.

$$\mathrm{p}(x)=\tfrac{1}{2}(x^2+1).$$

모든 단계를 거꾸로 되짚을 수 있으므로 둘 다 실제로 해이지만, 직접 확인해 보면 안심이 된다. $\mathrm{p}(x)=2-x^2$에 대해 $\mathrm{p}(\mathrm{p}(x))=2-(2-x^2)^2=-x^4+4x^2-2$이고,

$$2(-x^4+4x^2-2)+3(x^4-4x^2+4)-4(2-x^2)=x^4.$$

$\mathrm{p}(x)=\frac{1}{2}(x^2+1)$에 대해서는 $u=x^2+1$로 쓰자. 그러면 $2\mathrm{p}(\mathrm{p}(x))=\frac{1}{4}u^2+1$이고, 좌변은 $\frac{1}{4}u^2+1+\frac{3}{4}u^2-2u=(u-1)^2=x^4$이다.

따라서 (ii)의 방정식을 만족하는 다항식은 정확히 $\mathrm{p}(x)=2-x^2$와 $\mathrm{p}(x)=\frac{1}{2}(x^2+1)$이다.

검산

- (i)에서 $b = 1$을 넣어 보자. $\mathrm{p}(x) = x + 1$이면 $(x+3) - 3(x+1) = -2x$이다.
- (ii)에서 $x = 1$을 넣어 보자. $\mathrm{p}(x) = 2 - x^2$에 대해 $\mathrm{p}(1) = 1$, $\mathrm{p}(\mathrm{p}(1)) = 1$이고 $2 + 3 - 4 = 1 = 1^4$이다. $\mathrm{p}(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$에 대해 $x = 3$에서는 $\mathrm{p}(3) = 5$, $\mathrm{p}(5) = 13$이고 $26 + 75 - 20 = 81 = 3^4$이다.
- 또한 정확한 산술로 (i)의 두 해 모임이 무작위로 고른 여러 b에 대해 성립함을 확인했고, b, c를 $\frac{1}{4}$ 간격으로 바꾸어 가며 이차식의 격자를 탐색하면 (ii)의 두 해만 나온다는 것도 확인했다.

흔한 실수

- (ii)에서 좌변의 차수가 단순히 m^2이라고 가정하는 것. $m = 2$일 때 $2\mathrm{p}(\mathrm{p}(x))$와 $3[\mathrm{p}(x)]^2$는 모두 차수가 4이고, 이 두 항이 상쇄될 가능성이 있기 때문에 바로 $2a^3 + 3a^2 = 1$에서 a를 구해야 하는 것이다.
- (i)에서 차수가 1이어야 하는 이유를 설명할 때 $m = 0$인 경우를 빠뜨리는 것.
- (i)에서 $a = 1$ 또는 $a = -2$에서 멈추고 특정한 b 하나를 정해 버리는 것. 상수항에 대한 조건은 모든 b에 대해 성립한다.

STEP 너머

규칙 $\deg(\mathrm{p} \circ \mathrm{q}) = \deg \mathrm{p} \cdot \deg \mathrm{q}$는 $\deg(\mathrm{pq}) = \deg \mathrm{p} + \deg \mathrm{q}$와 마찬가지로 계수들 사이에 영인자(zero divisor)가 없다는 사실에 기대고 있다. 영이 아닌 두 수의 곱이 영이 될 수 있는 환(ring)에서는 최고차항이 사라질 수 있어서 두 규칙 모두 성립하지 않는다. $\mathrm{p}(\mathrm{p}(x)) = \ldots$ 같은 함수방정식(functional equation)은 반복 사상(iterated map)과 동역학(dynamics)의 연구로도 이어진다. 다항식환(polynomial ring)과 차수 논법이 통하는 경우에 대해서는 Allenby, *Rings, Fields and Groups*를 보라.

풀이

STEP II 2012, 문제 3

순수수학 • 치환적분

STEP II 2012, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/12-s2-q3

핵심 아이디어

다루기 까다로운 식 $x+\sqrt{1+x^2}$는 t로 놓아 달라고 외치고 있는 셈이다. 이 치환(substitution)이 잘 통하는 비결은 그 역수(reciprocal)가 $\sqrt{1+x^2}-x$라는 데 있다. 따라서 t와 $1/t$를 더하고 빼면 x와 $\sqrt{1+x^2}$가 모두 t의 간단한 함수로 나타난다. 그다음에는 두 적분 각각에서 피적분함수(integrand)를 $x+\sqrt{1+x^2}$만의 함수로 쓰는 방법을 찾아내기만 하면 된다.

풀이

항등식

$t=x+\sqrt{1+x^2}$라 하자. 켤레(conjugate)를 곱하면

$$\frac{1}{t}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}-x}=\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{(1+x^2)-x^2}=\sqrt{1+x^2}-x.$$

이 두 식을 빼고 더하면

$$x=\tfrac{1}{2}\Big(t-\frac{1}{t}\Big),\qquad \sqrt{1+x^2}=\tfrac{1}{2}\Big(t+\frac{1}{t}\Big).$$

이 가운데 첫 번째 식은 x를 곧바로 t의 함수로 나타내므로

$$\mathrm{d}x=\tfrac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{t^2}\Big)\mathrm{d}t.$$

적분 구간을 보면, $x=0$일 때 $t=1$이고, $x\to\infty$일 때 $t\to\infty$이다. 또 t는 x에 대한 순증가함수이므로($x\geq 0$에서 x와 $\sqrt{1+x^2}$가 모두 증가한다) 이 치환은 $[0,\infty)$에서 일대일(one-to-one)이다. 따라서

$$\int_0^\infty f\big(x+\sqrt{1+x^2}\big)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^\infty\Big(1+\frac{1}{t^2}\Big)f(t)\,\mathrm{d}t,$$

이고, 이것이 보이려던 식이다.

첫 번째 적분

> **생각해 보기** 분모 $2x^2+1+2x\sqrt{x^2+1}$이 어떻게 $x+\sqrt{1+x^2}$의 함수가 될 수 있을까?

제곱해 보자. $\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^2 = x^2+2x\sqrt{1+x^2}+(1+x^2) = 2x^2+1+2x\sqrt{x^2+1}$이고, 이것은 정확히 분모이다. 따라서 피적분함수는 $f(t)=1/t^2$에 대한 $f\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$이고, 항등식(identity)에 의해

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{2x^2+1+2x\sqrt{x^2+1}} &= \frac{1}{2}\int_1^\infty \left(1+\frac{1}{t^2}\right)\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_1^\infty \left(t^{-2}+t^{-4}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{t}-\frac{1}{3t^3}\right]_1^\infty = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

두 번째 적분

$x=\tan\theta$로 놓으면 $\mathrm{d}x=\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$, 즉 $\mathrm{d}\theta = \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$이다. θ가 0부터 $\frac{1}{2}\pi$까지 변할 때 x는 0부터 ∞까지 변한다. $0\le\theta<\frac{1}{2}\pi$이므로 $\cos\theta>0$이고, 따라서 $\sec\theta=\sqrt{1+x^2}$이며

$$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad 1+\sin\theta=\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{t}{\sqrt{1+x^2}},$$

이다. 여기서도 $t=x+\sqrt{1+x^2}$이다. 그러므로

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(1+\sin\theta)^3} = \int_0^\infty \frac{(1+x^2)^{3/2}}{t^3}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \int_0^\infty \frac{\sqrt{1+x^2}}{t^3}\,\mathrm{d}x.$$

> **생각해 보기** 피적분함수에 아직 $\sqrt{1+x^2}$가 남아 있다. 이것을 어떻게 t로 나타낼까?

이미 첫 부분에서 구했다. $\sqrt{1+x^2}=\frac{1}{2}(t+1/t)$이다. 따라서 피적분함수는

$$\frac{t+t^{-1}}{2t^3} = \tfrac{1}{2}\left(t^{-2}+t^{-4}\right),$$

로, $t=x+\sqrt{1+x^2}$만의 함수이다. $f(t)=\frac{1}{2}(t^{-2}+t^{-4})$로 두고 항등식을 적용하면

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(1+\sin\theta)^3} &= \frac{1}{2}\int_1^\infty\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^4}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_1^\infty\left(t^{-2}+2t^{-4}+t^{-6}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4}\left(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{28}{15} = \frac{7}{15}.\end{aligned}$$

검산

- 간단한 f로 항등식을 확인해 보자. $f(t) = 1/t^3$이면 우변은 $\frac{1}{2}\int_1^\infty (t^{-3} + t^{-5})\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8}$이고, 좌변을 수치 적분(numerical quadrature)으로 계산해도 0.375가 나온다.
- 원래의 두 적분에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면 0.666667과 0.466667이 나와 $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{15}$와 일치한다.
- 크기에 대한 상식적인 확인: $[0, \frac{1}{2}\pi]$에서 피적분함수 $1/(1+\sin\theta)^3$은 1에서 $\frac{1}{8}$로 감소하므로 적분값은 $\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\pi \approx 0.20$과 $\frac{1}{2}\pi \approx 1.57$ 사이에 있다. 값 $\frac{7}{15} \approx 0.47$은 이 범위 안에 여유 있게 들어간다.

흔한 실수

- $\mathrm{d}t/\mathrm{d}x$를 구한 다음 그것을 힘들게 t로 나타내려 하는 것. 먼저 x를 t의 함수로 쓰고 그것을 미분하는 편이 훨씬 빠르다.
- 두 번째 적분에서 $\mathrm{d}\theta$에서 나오는 인수 $1/(1+x^2)$을 빠뜨리거나, 피적분함수의 $\sqrt{1+x^2}$를 $\frac{1}{2}(t+1/t)$로 바꾸지 않고 그대로 두는 것.

STEP 너머

치환 $t = x + \sqrt{1+x^2}$는 사실 $x = \sinh u$일 때의 $t = \mathrm{e}^u$이다. 실제로 $\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$이고, 공식 $x = \frac{1}{2}(t - 1/t)$, $\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{2}(t+1/t)$는 $\sinh u$와 $\cosh u$를 지수함수로 쓴 것에 불과하다. 이와 같은 쌍곡선 치환(hyperbolic substitution)은 $\sqrt{1+x^2}$가 들어 있는 적분을 다루는 대학 1학년 과정의 표준 도구이다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)에 이런 성격의 STEP 적분 문제가 더 실려 있다.

풀이

STEP II 2012, 문제 4

순수수학 • 로그 급수 부등식

> **STEP II 2012, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/12-s2-q4

핵심 아이디어

모든 것은 $\ln(1+x)$의 급수(series)와 e^t가 증가함수(increasing function)라는 사실에서 나온다. $(1+\frac{1}{n})^n$을 e와 비교하려면 로그(logarithm)를 취하면 된다. 즉 $n\ln(1+\frac{1}{n})$을 1과 비교해야 한다. 항의 크기가 점점 줄어드는 교대급수(alternating series)는 두 항씩 괄호로 묶어서 첫째 항보다 작음을 보일 수 있다. 한편 $\ln\frac{1+x}{1-x}$라는 조합에서는 음의 항이 모두 사라지므로 이 값은 첫째 항보다 크다. 두 경계 사이에 끼워 넣으면 극한(limit)을 얻는다.

풀이

소문항 (i)

$n>1$이고 $k\geq 1$이므로 $(k+1)n>n>1$이고, 당연히 $(k+1)n>k$이다. 양변에 $n^k>0$을 곱하면

$$(k+1)n^{k+1}>kn^k>0,$$

이고, 이 양수들의 역수를 취하면 부등호의 방향이 바뀐다.

$$\frac{1}{(k+1)n^{k+1}}<\frac{1}{kn^k}.$$

이제 급수에 $x=\frac{1}{n}$을 대입한다. $n>1$이면 $0<x<1$이므로 대입할 수 있다. 첫째 항 뒤의 항들을 두 개씩 묶으면

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{3n^3}\right)-\left(\frac{1}{4n^4}-\frac{1}{5n^5}\right)-\cdots.$$

각 괄호는 k가 짝수일 때 $\frac{1}{kn^k}-\frac{1}{(k+1)n^{k+1}}$의 꼴이므로, 방금 증명한 부등식에 의해 엄밀히 양수이다.

? 생각해 보기 무한급수를 이렇게 괄호로 묶어도 될까?

된다. 급수가 수렴(converge)하기 때문이다. 항의 개수가 홀수인 부분합(partial sum)들은 전체 부분합들의 부분수열(subsequence)을 이루므로 같은 극한 $\ln(1+\frac{1}{n})$으로 수렴한다. 괄호로 묶은 급수는 바로 이 홀수 개 항의 부분합들의 수열이다.

괄호로 묶은 급수의 부분합은 $\frac{1}{n}-b_1$, $\frac{1}{n}-b_1-b_2$, ...이고, 여기서 모든 $b_j>0$이다. 이 부분합들은 감소하므로 모두 $\frac{1}{n}-b_1$ 이하이고, 따라서 그 극한도 그러하다.

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\le\frac{1}{n}-b_1<\frac{1}{n},\qquad b_1=\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{3n^3}>0.$$

(b_1을 따로 떼어 두었기 때문에 마지막 부등식이 엄밀한 부등식이 된다. 그렇지 않으면 $\frac{1}{n}$보다 작은 수들의 극한이 $\frac{1}{n}$과 같을 수도 있다.)

양변에 $n>0$을 곱하면 $n\ln(1+\frac{1}{n})<1$, 즉 $\ln\left((1+\frac{1}{n})^n\right)<1$이다. 지수함수(exponential function)는 증가함수이므로

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}.$$

소문항 (ii)

$x=\frac{1}{2y}$라 하자. $y>\frac{1}{2}$이므로 $0<x<1$이고, 따라서 x와 $-x$ 모두 급수가 성립하는 범위에 있다.

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots,$$
$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots.$$

항별로 빼면(수렴하는 두 급수이므로 정당하다) 짝수 차수의 항은 소거되고 홀수 차수의 항은 두 배가 된다.

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right).$$

이제

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{1+\frac{1}{2y}}{1-\frac{1}{2y}}=\frac{2y+1}{2y-1},$$

이므로, $2x=\frac{1}{y}$를 이용하면

$$\ln\left(\frac{2y+1}{2y-1}\right)=\frac{1}{y}+\frac{2}{3(2y)^3}+\frac{2}{5(2y)^5}+\cdots=\frac{1}{y}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(2r+1)(2y)^{2r}}.$$

첫째 항 이후의 모든 항은 엄밀히 양수이므로($y>0$이므로) 둘째 부분합부터는 모두 $\frac{1}{y}+\frac{2}{3(2y)^3}$ 이상이다. 따라서

$$\ln\left(\frac{2y+1}{2y-1}\right)\ge\frac{1}{y}+\frac{2}{3(2y)^3}>\frac{1}{y},$$

이고, 이것이 증명하려던 것이다.

결론을 이끌어 내기 위해 분수가 $1+\frac{1}{n}$이 되도록 y를 고른다. $y=n+\frac{1}{2}$로 잡으면(모든 양의 정수 n에 대해 $\frac{1}{2}$보다 크다)

$$\frac{2y+1}{2y-1}=\frac{2n+2}{2n}=1+\frac{1}{n},$$

이므로

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>\frac{1}{n+\frac{1}{2}}.$$

양변에 $n+\frac{1}{2}>0$을 곱하면 $\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(1+\frac{1}{n})>1$이고, 지수를 취하면(역시 증가함수이므로)

$$\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}.$$

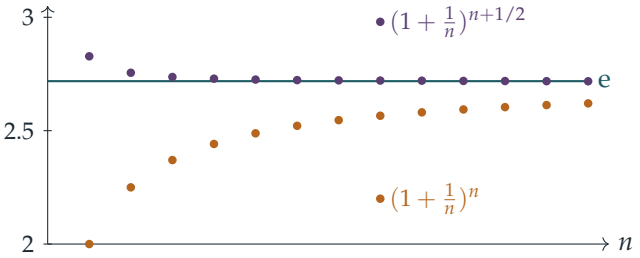
소문항 (iii)

소문항 (ii)의 결과를 $(1+\frac{1}{n})^{1/2}>0$으로 나누고 소문항 (i)과 합치면, $n\geq 2$인 모든 정수 n에 대해

$$\frac{\mathrm{e}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<\mathrm{e}.$$

$n\to\infty$일 때 $1+\frac{1}{n}\to 1$이므로 $\sqrt{1+\frac{1}{n}}\to 1$이고(제곱근 함수는 연속(continuous)이다), 좌변은 e로 수렴한다. 우변은 상수 e이다. 조임 정리(squeeze theorem, sandwich theorem)에 의해

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\to\mathrm{e}.$$



검산

$n=10$일 때 $(1.1)^{10}\approx 2.5937$이고 $(1.1)^{10.5}\approx 2.7203$이므로, 실제로 $\mathrm{e}\approx 2.7183$을 사이에 둔다. $n=1000$일 때 하한 $\mathrm{e}/\sqrt{1.001}\approx 2.7169237$은 $(1.001)^{1000}\approx 2.7169239$보다 아주 조금 작으며, 이는 조임이 얼마나 빡빡한지 보여 준다. 또한 수천까지의 모든 n에 대해 두 엄밀

한 부등식을 확인했고, 임의의 $y > \frac{1}{2}$에 대해 소문항 (ii)의 급수의 합이 $\ln \frac{2y+1}{2y-1}$이 됨을 수치적으로 확인했다.

흔한 실수

- 소문항 (i)에서 $x = 1$을 대입하는 것: 급수는 $|x| < 1$에서만 주어지므로 그곳에서 $n > 1$이 필요하다(소문항 (iii)에서는 큰 n만 쓰므로 잃는 것은 없다).
- 엄밀한 부등식들의 극한에서 곧바로 엄밀한 부등식을 결론 내리는 것. 극한은 $\leq$만 보존한다. $<$를 얻으려면 양의 항 하나를 따로 떼어 두어야 한다.
- 지수를 취해도 부등식이 보존되는 이유가 e^t가 증가함수이기 때문이라는 점을 잊는 것. 이 점을 분명히 밝혀야 한다.

STEP 너머

이 경계들은 극한 이상의 것을 보여 준다. $(1+\frac{1}{n})^{n+1/2}/(1+\frac{1}{n})^n = \sqrt{1+1/n} \approx 1 + \frac{1}{2n}$이므로 오차 $e - (1+\frac{1}{n})^n$의 크기는 대략 $e/(2n)$이고, 따라서 이 수열은 꽤 느리게 수렴한다. 수렴하는 급수의 항을 재배열하는 것, 부분합을 비교하는 것, 조임 정리는 대학 첫 해석학(analysis) 과목의 기본 중의 기본이며, 그 과목에서는 미묘한 점들도 만나게 된다(조건수렴(conditionally convergent)하는 급수의 항을 재배열하면 합이 바뀔 수 있다!). Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)는 이 모든 내용을 아름답게 다룬다.

풀이

STEP II 2012, 문제 5

순수수학 • 역수 함수의 그래프 그리기

> **STEP II 2012, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/12-s2-q5

핵심 아이디어

두 곡선 모두 어떤 식의 역수(reciprocal)이므로, 분모의 그래프를 머릿속으로 그린 뒤 뒤집으면 된다. 분모가 영이 되는 곳에서는 수직점근선(vertical asymptote)이 생기고, 분모가 큰 곳에서는 y가 0에 가까우며, 분모의 극점(turning point)은 곡선의 극점이 된다. (ii)에서는 두 이차 인수가 a와 b의 중점에 대해 서로 거울상이므로, 원점을 그 중점으로 옮기면 g는 새 변수의 우함수(even function)가 되고, 정류점(stationary point)은 t^2에 대한 이차식에서 곧바로 얻어진다.

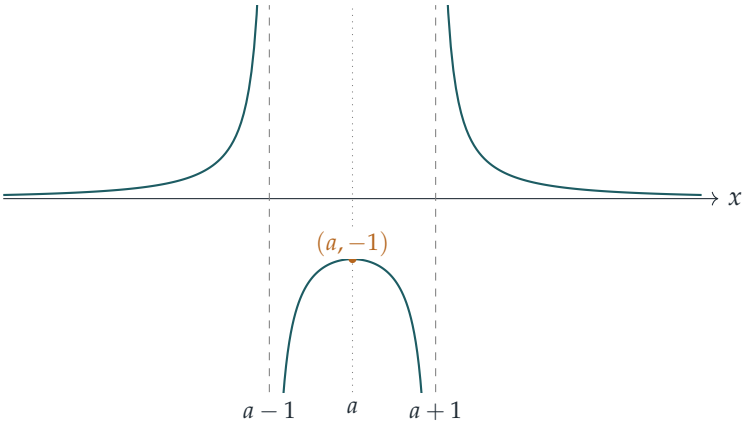
풀이

소문항 (i)

$D(x) = (x-a)^2 - 1$로 두면 $f = 1/D$이다. 분모 D는 포물선(parabola)으로, $x = a$에 대해 대칭이고, $x = a$에서 최솟값 -1을 가지며, $x = a \pm 1$에서 영점을 가진다. 역수의 그래프를 읽어 내면 다음과 같다.

- 곡선은 $x = a$에 대해 대칭이고, 수직점근선은 $x = a \pm 1$이다.
- $|x-a| < 1$이면 $-1 \le D < 0$이므로 $f \le -1$이고, 등호는 $x = a$에서만 성립한다. 따라서 $(a, -1)$은 극대점(local maximum)이고, x가 안쪽에서 $a \pm 1$에 가까워지면 $f \to -\infty$이다.
- $|x-a| > 1$이면 $D > 0$이고 $|x-a|$가 커질수록 D가 증가하므로, f는 양수이며 (점근선 바로 옆의) $+\infty$에서 0을 향해 감소한다. x축은 수평점근선(horizontal asymptote)이고, $|x|$가 크면 $f \approx 1/x^2$이다.

실제로 $f'(x) = -2(x-a)/D^2$는 $x = a$에서만 영이 된다. 곡선은 ($a \neq \pm 1$일 때) y축과 $1/(a^2-1)$에서 만나지만, 그 위치는 a에 따라 달라지므로 그림은 $x = a$를 기준으로 그린다.



소문항 (ii)

$p = (x-a)^2 - 1$, $q = (x-b)^2 - 1$로 두면 $g = 1/(pq)$이다. 이제

$$c = \tfrac{1}{2}(a+b), \qquad d = \tfrac{1}{2}(b-a) > 0, \qquad t = x - c,$$

로 놓으면 $x - a = t + d$이고 $x - b = t - d$이다. 그러면 $(t+d)(t-d) = t^2 - d^2$와 $(t+d)^2 + (t-d)^2 = 2t^2 + 2d^2$를 이용하여

$$\begin{aligned} pq &= \big((t+d)^2 - 1\big)\big((t-d)^2 - 1\big) \\ &= (t^2 - d^2)^2 - (2t^2 + 2d^2) + 1. \end{aligned}$$

을 얻는다. 이 식은 t^2에만 의존하므로, g는 a와 b의 중점인 $x = c$에 대해 대칭이다. $u = t^2$, $h(u) = (u - d^2)^2 - 2u - 2d^2 + 1$로 쓰면

$$\frac{\mathrm{d}(pq)}{\mathrm{d}t} = 2t\,h'(u) = 2t\big(2(u - d^2) - 2\big) = 4t\,(t^2 - d^2 - 1).$$

이다. $g' = -(pq)'/(pq)^2$이므로 g의 정류점은 $(pq)' = 0$인 곳, 즉

$$t = 0 \qquad \text{또는} \qquad t = \pm\sqrt{d^2 + 1},$$

이다. 단, 이 점들이 점근선이 아니어야 한다. 점근선은 $t = \pm(d+1)$과 $t = \pm(d-1)$에 있고, $d < \sqrt{d^2+1} < d+1$이므로 바깥쪽 두 정류점은 언제나 진짜 정류점이다. a와 b로 나타내면 후보는

$$x = \frac{a+b}{2} \qquad \text{그리고} \qquad x = \frac{a+b \pm \sqrt{(b-a)^2 + 4}}{2}.$$

이다. 그 점들에서의 값은 $h(0) = (d^2-1)^2$와 $h(d^2+1) = 1 - 2(d^2+1) - 2d^2 + 1 = -4d^2$이다.

생각해 보기 이 후보들 가운데 실제로 살아남는 것은 무엇이며, 각각은 극대인가 극소인가?

이는 $t=0$이 점근선과 겹치는지, 즉 $d=1$인지에 달려 있다. 이것이 바로 $b>a+2$ (이때 $d>1$)와 $b=a+2$ (이때 $d=1$)의 경우 구분이다. 각 점의 성질은 다시 미분하는 대신, 점근선 사이의 각 구간에서 g의 부호와 양 끝에서의 거동을 살펴서 판정한다.

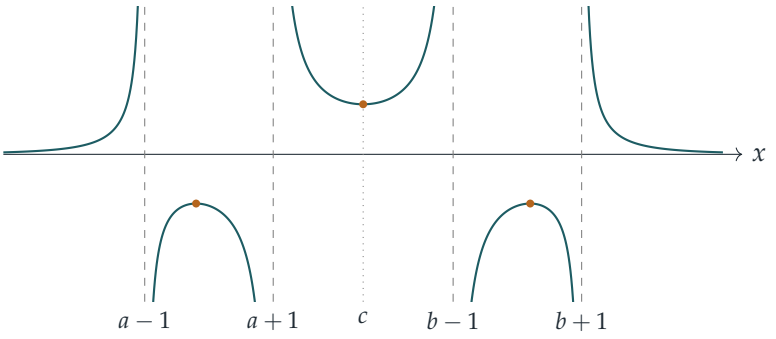
$b>a+2$인 경우. 이제 $d>1$이고, 네 점근선을 차례로 쓰면

$$t=-(d+1),\ -(d-1),\ d-1,\ d+1, \quad \text{즉} \quad x=a-1,\ a+1,\ b-1,\ b+1,$$

이며, 모두 서로 다르고 c는 $a+1$보다 크고 $b-1$보다 작다.

- **바깥쪽**, $|t|>d+1$: 여기서는 $|x-a|>1$이고 $|x-b|>1$이므로 $p,q>0$이고 $g>0$이다. 정류점이 없으므로 g는 점근선에서의 $+\infty$로부터 무한대에서의 0까지 감소하며, $1/x^4$처럼 행동한다.
- **가운데**, $|t|<d-1$, **즉** $a+1<x<b-1$: 여기서도 $p,q>0$이므로 $g>0$이고, 양 끝에서 $g\to+\infty$이다. 유일한 정류점은 $t=0$이므로 이 점은 극소점(local minimum)이어야 하며, 그 값은 다음과 같다.
$$g(c)=\frac{1}{(d^2-1)^2}=\frac{16}{\left((b-a)^2-4\right)^2}.$$
- **두 틈**, $d-1<|t|<d+1$: $(d-1,d+1)$에 속하는 t에 대해서는 $|x-b|<1$이지만 $x-a>2d-1>1$이므로 $q<0<p$이고 $g<0$이며, 양 끝에서 $g\to-\infty$이다. 이 구간의 유일한 정류점은 $t=\sqrt{d^2+1}$이므로 이 점은 극대점이어야 하며, 그 값은 다음과 같다.
$$g=\frac{1}{-4d^2}=-\frac{1}{(b-a)^2}.$$
틈 $-(d+1)<t<-(d-1)$은 이것의 거울상이다.

따라서 정류점은 세 개이다. $x=\frac{1}{2}(a+b)$에서의 극소점 하나와, $x=\frac{1}{2}\left(a+b\pm\sqrt{(b-a)^2+4}\right)$에서의 극대점 두 개이며, 두 극대점에서는 모두 $y=-1/(b-a)^2$이다. 아래 그림은 $b-a=4.8$인 경우이며, 극점이 잘 보이도록 y 방향으로 늘여 그렸다.



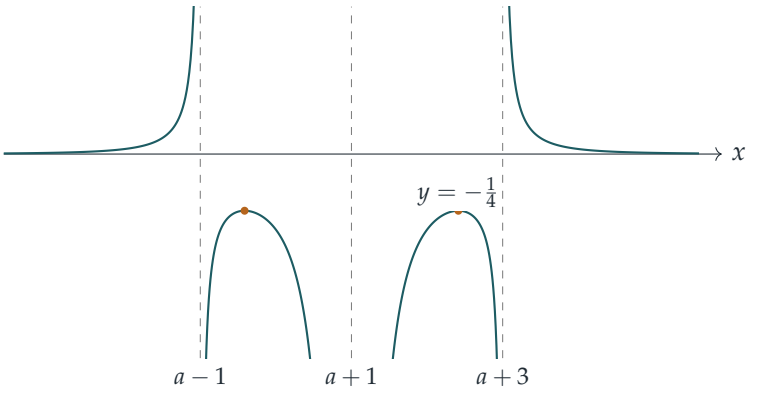
$b = a + 2$인 경우. 이제 $d = 1$이므로 $a + 1 = b - 1 = c$이고, 가운데의 두 점근선이 $x = a + 1$에서 하나로 합쳐진다. $t = x - a - 1$로 두면

$$pq = h(t^2) = t^4 - 4t^2 = t^2(t^2 - 4), \qquad g = \frac{1}{t^2(t^2-4)},$$

이므로 점근선은 $x = a - 1, a + 1, a + 3$의 세 개이다. 후보 $t = 0$은 이제 정류점이 아니라 점근선이므로, $t = \pm\sqrt{2}$만 남는다.

- $|t| > 2$이면 앞에서와 마찬가지로 $g > 0$이고, g는 $+\infty$에서 0으로 감소한다.
- $0 < |t| < 2$이면 $g < 0$이고, $t \to 0$일 때(여기서 $g \approx -1/(4t^2)$이므로 양쪽 모두 아래로 내려간다)와 $|t| \to 2$일 때 모두 $g \to -\infty$이다. 따라서 $t = \sqrt{2}$에서의 정류점은 극대점이고, $g = 1/\big(2 \cdot (-2)\big) = -\frac{1}{4}$이다. $t = -\sqrt{2}$에서도 마찬가지이다.

따라서 정류점은 $x = a + 1 \pm \sqrt{2}$이고, 둘 다 $y = -\frac{1}{4}$인 극대점이다. (이는 일반 공식과 일치한다. $b - a = 2$를 대입하면 $x = \frac{1}{2}(2a + 2 \pm \sqrt{8})$이고, $-1/(b-a)^2 = -\frac{1}{4}$이다.) 이제 곡선은 $x = a - 1$과 $x = a + 3$ 사이에서 x축 위로 결코 올라가지 않는다.



검산

- $a = 0, b = 5$일 때 $g(2.5) = 1/\left((6.25-1)^2\right) = 1/27.5625$이고, 공식 $16/(25-4)^2 = 16/441$도 같은 값, 약 0.0363을 준다. $x = \frac{1}{2}(5+\sqrt{29}) \approx 5.193$에서 직접 계산하면 $g \approx -0.04 = -1/25$이다.
- 첫 번째 경우에서 $b \to a+2$로 보내면 극솟값 $16/\left((b-a)^2-4\right)^2$이 한없이 커지는데, 이는 가운데 가지가 합쳐진 점근선 속으로 사라지는 것과 들어맞는다.
- 임의의 a와 b에 대해 g'의 부호 변화를 수치적으로 조사하면, $b > a+2$일 때는 정확히 세 개, $b = a+2$일 때는 두 개의 정류점이 위에서 구한 위치에서 발견된다.

흔한 실수

- pq를 x에 대한 사차식(quartic)으로 전개한 뒤 삼차식 $(pq)'$를 직접 인수분해하려는 것. 그렇게 해도 되지만, 대칭적인 치환(substitution) $t = x - c$를 쓰면 인수분해가 곧바로 된다.
- $b = a+2$인 경우 점 $x = a+1$이 극점이 아니라 점근선(분모의 이중근)이라는 사실을 잊는 것.
- 틈에서 g의 부호를 잘못 정하는 것. 거기서는 p, q 중 정확히 하나가 음수이므로 $g < 0$이다.

STEP 너머

D로부터 $1/D$를 그리는 것은 함수를 정성적으로 생각하는 방법을 처음 맛보는 일이다. 미적분을 쓰기 전에 부호, 영점, 대칭성, 무한대에서의 거동만으로 거의 모든 것을 알 수 있다. 치환 $t = x - \frac{1}{2}(a+b)$는 대칭성을 이용해 사차식을 t^2에 대한 이차식으로 줄이는 것으로, 대수학과 해석학 전반에 걸쳐 거듭 등장하는 기법이다. 이러한 그림 뒤에 있는 극한과 점근선의 엄밀한 다루기에 대해서는 Abbott, *Understanding Analysis*를, 이런 종류의 문제를 더 많이 보려면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*를 참고하라.

풀이

STEP II 2012, 문제 6

순수수학 • 원에 내접하는 사각형의 넓이

STEP II 2012, 6번 문제

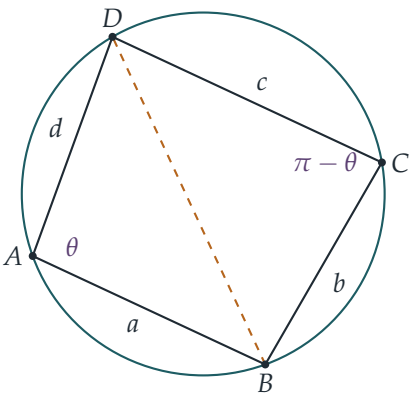
더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/12-s2-q6

핵심 아이디어

대각선 BD는 사각형을 두 삼각형으로 나누고, BD는 코사인 법칙(cosine rule)을 써서 두 가지 방법으로 나타낼 수 있다. 원에 내접하는 사각형(cyclic quadrilateral)이 특별한 것은 마주 보는 두 각의 합이 π라는 점이며, 따라서 C에서의 각은 $\pi - \theta$이다. 그러면 $\cos C = -\cos\theta$이고 $\sin C = \sin\theta$이므로, 코사인 법칙과 넓이 공식 $\frac{1}{2}xy\sin$(끼인각) 모두 하나의 각 θ만으로 나타난다. 그다음은 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$과 꼼꼼한 인수분해(factorising)가 나머지를 해결한다.

풀이



$\cos\theta$와 $\sin\theta$ 구하기

$ABCD$는 원에 내접하므로 마주 보는 두 각 DAB와 BCD의 합은 π이고, 따라서 $\angle BCD = \pi - \theta$이다. 그러므로

$$\cos\angle BCD = -\cos\theta, \qquad \sin\angle BCD = \sin\theta.$$

대각선 BD에 코사인 법칙을 적용하는데, 먼저 삼각형 ABD(두 변 a, d와 끼인각 θ)에서, 다음으로 삼각형 CBD(두 변 b, c와 끼인각 $\pi - \theta$)에서 적용하면

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta = b^2 + c^2 + 2bc\cos\theta.$$

$\cos\theta$가 있는 항끼리 모으면 $2(ad+bc)\cos\theta = a^2 + d^2 - b^2 - c^2$이므로

$$\cos\theta = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad+bc)}.$$

대각선 BD는 사각형을 이 두 삼각형으로 나누므로, 두 삼각형의 넓이의 합은 Q이다.

$$Q = \tfrac{1}{2}ad\sin\theta + \tfrac{1}{2}bc\sin(\pi-\theta) = \tfrac{1}{2}(ad+bc)\sin\theta, \qquad \text{따라서} \qquad \sin\theta = \frac{2Q}{ad+bc}.$$

(모든 변의 길이가 양수이므로 $ad+bc$로 나눌 수 있다.)

$16Q^2$에 대한 공식

두 식을 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$에 대입하면

$$\frac{4Q^2}{(ad+bc)^2} + \frac{(a^2+d^2-b^2-c^2)^2}{4(ad+bc)^2} = 1.$$

양변에 $4(ad+bc)^2$을 곱하면

$$16Q^2 = 4(ad+bc)^2 - (a^2+d^2-b^2-c^2)^2,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

브라마굽타 공식

우변은 제곱의 차(difference of two squares) $X^2 - Y^2$의 꼴이며, 여기서 $X = 2(ad+bc)$, $Y = a^2+d^2-b^2-c^2$이다.

생각해 보기 $X-Y$와 $X+Y$를 어떻게 일차 인수들의 곱으로 바꿀 수 있을까?

각각이 다시 제곱의 차가 되도록 항들을 묶는다. a, d가 있는 항끼리, b, c가 있는 항끼리 모으면

$$X - Y = (b^2+2bc+c^2) - (a^2-2ad+d^2) = (b+c)^2 - (a-d)^2,$$
$$X + Y = (a^2+2ad+d^2) - (b^2-2bc+c^2) = (a+d)^2 - (b-c)^2.$$

이들을 각각 다시 인수분해하면

$$\begin{aligned}16Q^2 &= (X-Y)(X+Y)\\ &= (b+c-a+d)(b+c+a-d)(a+d-b+c)(a+d+b-c).\end{aligned}$$

$2s = a+b+c+d$라 하면, 각 괄호는 $2s$에서 한 변의 두 배를 뺀 것이다. 예를 들어 $b+c+d-a = 2s-2a$이다. 따라서 네 괄호는 $2(s-a), 2(s-d), 2(s-b), 2(s-c)$이고

$$16Q^2 = 16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d), \qquad \text{즉,} \qquad Q^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d).$$

이것이 브라마굽타(Brahmagupta) 공식이다.

삼각형의 넓이

모든 삼각형은 세 꼭짓점이 외접원(circumcircle) 위에 있으므로 원에 내접한다. 이제 D를 원을 따라 A 쪽으로 미끄러뜨려 변 DA의 길이를 0으로 줄여 보자. 그러면 $ABCD$는 세 변이 a, b, c인 삼각형 ABC가 되고 $d = 0$이다. 공식의 양변은 모두 D에 대하여 연속적으로 변하므로, 극한에서도 공식은 여전히 성립한다. $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$라 하면, 삼각형의 넓이 Δ는 다음을 만족한다.

$$\Delta^2 = s(s-a)(s-b)(s-c), \qquad \text{따라서} \qquad \Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

이것이 헤론(Heron)의 공식이다.

검산

- 한 변의 길이가 1인 정사각형은 원에 내접하고 $s = 2$이며, $(2-1)^4 = 1$은 그 넓이이다. 세 변이 3–4–5인 삼각형에서는 $s = 6$이고 $\sqrt{6\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 6 = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4$이다.
- 직사각형에서는 $a = c$, $b = d$이므로 $\cos\theta = 0$이다. 직사각형의 모든 각은 $\frac{\pi}{2}$이므로 이는 옳다.
- 원 위에 임의의 원에 내접하는 사각형 20 000개를 만들고, $\cos\theta$, $\sin\theta$, Q^2에 대한 공식을 실제 각 및 신발끈 공식(shoelace formula)으로 구한 넓이와 비교하였다. 그 결과 오차는 3×10^{-12} 이내로 일치하였다. 헤론의 공식은 임의의 삼각형 1000개에서 맞아떨어졌다.

흔한 실수

- $\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$임을 잊는 것. 그러면 $+2bc\cos\theta$가 마이너스로 바뀌어 그 뒤의 모든 계산이 틀어진다.

- $4(ad+bc)^2-(a^2+d^2-b^2-c^2)^2$을 전부 전개하려는 것. 제곱의 차로 두 번 인수분해하는 편이 훨씬 빠르고 실수할 가능성도 훨씬 적다.

STEP 너머

일반적인(반드시 원에 내접하지는 않는) 사각형의 넓이는 브레치나이더 공식(Bretschneider's formula)으로 구할 수 있다. 이 공식에서는 $abcd\cos^2\frac{\alpha+\gamma}{2}$라는 항을 빼는데, 여기서 α와 γ는 마주 보는 한 쌍의 각이다. 따라서 변의 길이가 고정되어 있을 때 원에 내접하는 사각형의 넓이가 가장 크다. 또한 헤론 공식의 인수분해된 꼴을 보면, 삼각부등식(triangle inequality)이 등식이 될 때 정확히 넓이가 0이 된다는 것을 곧바로 알 수 있다. 이런 정신의 기하학을 더 접하고 싶다면 Coxeter와 Greitzer의 *Geometry Revisited*(기하학 다시 보기)를 참고하라.

풀이

STEP II 2012, 문제 7

순수수학 • 벡터와 원

STEP II 2012, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

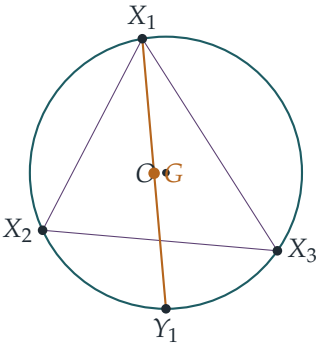
step.maths.org/questions/12-s2-q7

핵심 아이디어

점 Y_1은 X_1과 G를 지나는 직선 위에 있으므로, 그 위치벡터(position vector)는 미지의 스칼라 하나를 포함하는 $\mathbf{x}_1$과 $\mathbf{g}$의 간단한 결합으로 나타난다. Y_1에 대해 그 밖에 아는 사실은 단위원(unit circle) 위에 있다는 것 하나뿐이므로, $|\overrightarrow{OY_1}|^2 = 1$에서 λ_1에 대한 방정식을 얻는다. 이것은 이차방정식(quadratic equation)이지만, 근(root) 하나는 미리 알 수 있다. 직선은 X_1 자체에서 원과 만나므로 그 근을 인수로 묶어 낼 수 있다.

풀이

$\mathbf{g} = \frac{1}{3}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3)$, $\lambda = \lambda_1$로 놓는다. 각 $\mathbf{x}_i$는 단위벡터(unit vector)이므로 $\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_i = 1$이다.



Y_1의 위치벡터

$\overrightarrow{GY_1} = -\lambda\overrightarrow{GX_1}$에서 $\mathbf{y}_1 - \mathbf{g} = -\lambda(\mathbf{x}_1 - \mathbf{g})$를 얻으므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OY_1} = \mathbf{y}_1 &= (1+\lambda)\mathbf{g} - \lambda\mathbf{x}_1 \\ &= \tfrac{1}{3}(1+\lambda)(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3) - \lambda\mathbf{x}_1 \\ &= \tfrac{1}{3}\big((1-2\lambda)\mathbf{x}_1 + (1+\lambda)(\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3)\big),\end{aligned}$$

이다. 여기서 $\frac{1}{3}(1+\lambda) - \lambda = \frac{1}{3}(1-2\lambda)$를 썼다. 이것이 구하는 식이다.

λ_1 구하기

Y_1은 원 위에 있으므로 $|\mathbf{y}_1|^2 = 1$이고, 따라서 $|3\mathbf{y}_1|^2 = 9$이다. 다음이 필요하다.

$$|\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3|^2 = 1+2\alpha+1 = 2+2\alpha, \qquad \mathbf{x}_1\cdot(\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3) = \beta+\gamma.$$

그러므로 $|3\mathbf{y}_1|^2$을 자기 자신과의 내적(dot product)으로 전개하면

$$(1-2\lambda)^2 + (1+\lambda)^2(2+2\alpha) + 2(1-2\lambda)(1+\lambda)(\beta+\gamma) = 9.$$

을 얻는다. λ의 거듭제곱끼리 모으고 2로 나누면

$$(3+\alpha-2\beta-2\gamma)\lambda^2 + (2\alpha-\beta-\gamma)\lambda - (3-\alpha-\beta-\gamma) = 0.$$

이다. 식을 깔끔하게 하기 위해

$$A = 3+\alpha-2\beta-2\gamma, \qquad B = 3-\alpha-\beta-\gamma,$$

로 놓으면, 가운데 계수(coefficient)가 정확히 $A-B$임을 알 수 있다. 따라서 방정식은 $A\lambda^2 + (A-B)\lambda - B = 0$이고, 다음과 같이 인수분해(factorise)된다.

$$(\lambda+1)(A\lambda - B) = 0.$$

? **생각해 보기** 왜 $\lambda = -1$이 근이어야 하며, 왜 이 근을 버릴 수 있는가?

$\mathbf{y}_1 = (1+\lambda)\mathbf{g} - \lambda\mathbf{x}_1$에 $\lambda = -1$을 대입하면 $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1$이다. X_1과 G를 지나는 직선 위의 모든 점은 $(1+\lambda)\mathbf{g} - \lambda\mathbf{x}_1$ 꼴이고, 이 직선은 Y_1뿐만 아니라 X_1에서도 원과 만나므로, 이차방정식은 처음부터 $\lambda = -1$을 근으로 가질 수밖에 없었다. 문제에서 $\lambda_1 > 0$이라 했으므로 $\lambda_1 \neq -1$이고, 따라서 $A\lambda_1 = B$이다.

이제 A로 나누어도 되는지 확인하는 일이 남았다. $A = 0$이면 $A\lambda_1 = B$에서 $B = 0$이어야 한다. 그런데

$$|\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3|^2 = 3+2(\alpha+\beta+\gamma), \qquad \text{따라서} \qquad B = \tfrac{1}{2}\big(9-|\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3|^2\big) = \tfrac{9}{2}\big(1-|\mathbf{g}|^2\big).$$

이다. 삼각 부등식(triangle inequality)에 의해 $|\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3| \le 3$이고, 등호는 세 단위벡터가 모두 같을 때만 성립한다. 세 점은 서로 다르므로 $B>0$이다. 그러므로 $A \neq 0$이고

$$\lambda_1 = \frac{B}{A} = \frac{3-\alpha-\beta-\gamma}{3+\alpha-2\beta-2\gamma},$$

이므로 증명이 끝났다.

마지막 부분

$\lambda_1 > 0$이고 $\overrightarrow{GY_1} = -\lambda_1 \overrightarrow{GX_1}$이므로 길이 사이에 $GY_1 = \lambda_1 GX_1$이 성립하고, 따라서

$$\frac{GX_1}{GY_1} = \frac{1}{\lambda_1} = \frac{3+\alpha-2\beta-2\gamma}{3-\alpha-\beta-\gamma}.$$

이다. 첨자를 순환시켜($1\to2\to3\to1$, 이때 $\alpha\to\beta\to\gamma\to\alpha$가 된다) 같은 논증을 적용하면 나머지 두 비를 얻는다. 분모 $B = 3-\alpha-\beta-\gamma$는 대칭(symmetric)이므로 세 비에서 모두 같고, 분자는

$$3+\alpha-2\beta-2\gamma, \qquad 3+\beta-2\gamma-2\alpha, \qquad 3+\gamma-2\alpha-2\beta.$$

이다. 이들을 더하면 $9+(1-2-2)(\alpha+\beta+\gamma) = 9-3(\alpha+\beta+\gamma) = 3B$이다. 그러므로

$$\frac{GX_1}{GY_1}+\frac{GX_2}{GY_2}+\frac{GX_3}{GY_3} = \frac{3B}{B} = 3.$$

검산

- 정삼각형(equilateral triangle)인 경우: 이때 $G=O$이고, G를 지나는 현(chord)은 모두 지름(diameter)이며, 모든 비가 1이다. 공식에서는 $\alpha=\beta=\gamma=-\frac{1}{2}$이므로 $\lambda_1 = \frac{9/2}{9/2} = 1$이다.
- 기하학적으로 해석할 수도 있다. $A = \frac{1}{2}|\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3-2\mathbf{x}_1|^2 = \frac{9}{2}GX_1^2$이고 $B = \frac{9}{2}(1-OG^2)$이므로, $\lambda_1 = B/A$는 $GX_1\cdot GY_1 = 1-OG^2$를 뜻한다. 이것은 교차하는 현의 정리(intersecting chords theorem), 즉 방멱(power of a point) 정리이다.
- 수치 확인: X_1, X_2, X_3를 각각 0, 1, 2.5 라디안의 각에 놓으면 세 비 GX_i/GY_i는 약 1.13, 0.31, 1.57이 되고, 그 합은 기계 정밀도 범위 안에서 3이다. 같은 방법으로 무작위 삼각형 20 000개를 시험해 보았다.

흔한 실수

- $|\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3|^2$이 단순히 $1+1$이 아니라 교차항 2α를 포함한다는 사실을 잊는다.
- 근 $\lambda=-1$을 알아차리지 못하고 근의 공식(quadratic formula)으로 힘들게 계산한다.
- $3+\alpha-2\beta-2\gamma$가 왜 영이 아닌지 밝히지 않고 그것으로 나눈다.

STEP 너머

이 문제에 숨어 있는 항등식 $GX_1 \cdot GY_1 = 1 - OG^2$은 원에 대한 **방멱**이며, 내적 계산은 그 정리의 벡터 증명이다. 길이와 각이 모두 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$에서 나오도록 기하학을 내적으로 표현하는 것은 대학 첫 선형대수(linear algebra) 강의에서 배우는 내적 공간(inner-product space)의 출발점이다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수 입문)는 이 관점을 전개한다.

풀이

STEP II 2012, 문제 8

순수수학 • 비선형 점화식

STEP II 2012, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/12-s2-q8

핵심 아이디어

점화식(recurrence) $u_{n+1}u_{n-1} = u_n^2 - q^2$는 비선형(non-linear)이지만 **모든** n에 대하여 성립한다. 따라서 연속한 두 n의 값에 대해 식을 써서 빼면 다루기 까다로운 상수 q^2가 사라진다. 남는 식은 비 $(u_{n+1} + u_{n-1})/u_n$이 결코 변하지 않는다는 것을 말해 주며, 이로써 수열은 상수 계수 p를 갖는 **선형** 점화식으로 바뀐다. 처음의 부등식(inequality)은 정확히 $p > 2$라는 명제이며, 이것이 수열을 증가하게 만드는 원동력이다.

풀이

부등식

모든 항을 공통분모 $\alpha\beta$로 통분하면

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2 - q^2}{\alpha\beta} - 2 = \frac{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 - q^2}{\alpha\beta} = \frac{(\beta - \alpha)^2 - q^2}{\alpha\beta}.$$

$\beta - \alpha > q > 0$이므로 (양변이 모두 양수이므로) 제곱하면 $(\beta - \alpha)^2 > q^2$이고, 따라서 분자는 양수이다. $\alpha, \beta > 0$이므로 분모 $\alpha\beta$도 양수이다. 그러므로 주어진 식은 양수이고, 이것이 증명하려던 것이다.

첫 번째 항등식

점화식의 양변에 u_{n-1}을 곱하면, 모든 $n \geq 1$에 대하여

$$u_{n+1}u_{n-1} = u_n^2 - q^2.$$

n 대신 $n+1$을 대입하면 ($n+1 \geq 1$이므로 여전히 가능하다)

$$u_{n+2}u_n = u_{n+1}^2 - q^2.$$

두 번째 식에서 첫 번째 식을 빼면 q^2가 사라진다.

$$u_n u_{n+2} - u_{n-1}u_{n+1} = u_{n+1}^2 - u_n^2,$$

이를 정리하면 모든 $n \geq 1$에 대하여

$$u_n^2 + u_n u_{n+2} = u_{n+1}^2 + u_{n-1}u_{n+1}, \qquad \text{즉,} \qquad u_n(u_n + u_{n+2}) = u_{n+1}(u_{n-1} + u_{n+1})$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

선형 점화식

> **생각해 보기** 방금 증명한 항등식(identity)에는 서로 다른 네 개의 항이 들어 있다. 이로부터 어떻게 하나의 상수 p를 갖는 점화식을 얻을 수 있을까?

수열의 어떤 항도 0이 아니므로 항등식을 $u_n u_{n+1}$로 나눌 수 있다.

$$\frac{u_{n+2} + u_n}{u_{n+1}} = \frac{u_{n+1} + u_{n-1}}{u_n} \qquad (n \geq 1).$$

따라서 $v_n = (u_{n+1} + u_{n-1})/u_n$은 모든 $n \geq 1$에 대하여 $v_{n+1} = v_n$을 만족한다. 즉, 이 값은 상수이다. 이 공통의 값을 p라 하면 $u_{n+1} + u_{n-1} = pu_n$, 즉

$$u_{n+1} - pu_n + u_{n-1} = 0 \qquad (n \geq 1).$$

p를 구하기 위해 $n = 1$을 이용한다. 점화식으로부터 $u_2 = (\beta^2 - q^2)/\alpha$이므로

$$p = \frac{u_2 + u_0}{u_1} = \frac{1}{\beta}\left(\frac{\beta^2 - q^2}{\alpha} + \alpha\right) = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - q^2}{\alpha\beta}.$$

이것은 첫 부분의 식과 같으므로, $\beta - \alpha > q$일 때 $p > 2$임을 이미 알고 있다.

$\beta > \alpha + q$일 때 수열은 증가한다

$d_n = u_{n+1} - u_n$이라 하자. 선형 점화식을 $u_{n+1} = pu_n - u_{n-1}$의 꼴로 쓰면

$$d_n - d_{n-1} = u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = (p-2)u_n.$$

> **생각해 보기** $p - 2 > 0$임은 알지만, $(p-2)u_n$이 왜 양수여야 할까? 아직 $u_n > 0$임은 알지 못한다.

양수임과 증가함은 수학적 귀납법(induction)으로 함께 증명해야 한다. 주장: 모든 $n \geq 1$에 대하여 $u_n > 0$이고 $d_{n-1} > 0$이다.

$n = 1$일 때: $u_1 = \beta > 0$이고 $d_0 = \beta - \alpha > q > 0$이다.

어떤 $n \geq 1$에 대하여 $u_n > 0$이고 $d_{n-1} > 0$이라고 가정하자. 그러면 $p > 2$이므로

$$d_n = d_{n-1} + (p-2)u_n > 0, \qquad u_{n+1} = u_n + d_n > 0,$$

이고, 이것은 $n+1$에 대한 주장이다. 수학적 귀납법에 의해 모든 $n \geq 0$에 대하여 $d_n = u_{n+1} - u_n > 0$이므로 수열은 순증가(strictly increasing)한다. (사실 차이 자체도 증가하므로, 증가 속도는 선형보다 빠르다. 모든 항이 양수이므로, 이 경우 어떤 항도 0이 아니라는 조건은 저절로 성립한다.)

$\beta = \alpha + q$인 경우

이제 $(\beta - \alpha)^2 - q^2 = 0$이므로 정확히 $p = 2$이고 $d_n - d_{n-1} = 0$이다. 차이는 모두 $d_0 = \beta - \alpha = q$와 같으므로, 수열은 등차수열(arithmetic progression)

$$u_n = \alpha + nq.$$

이다. $q > 0$이므로 여전히 순증가하지만, 이제는 선형으로만 증가한다. 직접 확인해 보면 $(\alpha + (n+1)q)(\alpha + (n-1)q) = (\alpha + nq)^2 - q^2$이므로, 이 수열은 실제로 원래의 점화식을 만족한다.

검산

- $\alpha = 1, \beta = 4, q = 2$로 잡자 (따라서 $\beta > \alpha + q$). 점화식으로부터 $1, 4, 12, 35, \frac{407}{4}, \ldots$를 얻고, $p = \frac{1+16-4}{4} = \frac{13}{4}$이다. 실제로 $\frac{13}{4} \cdot 4 - 1 = 12$이고 $\frac{13}{4} \cdot 12 - 4 = 35$이다.
- $\alpha = 1, q = 2, \beta = 3$이면 항은 $1, 3, 5, 7, \ldots$로, 마지막 부분의 등차수열이다.
- 수백 개의 무작위 α, β, q에 대하여 두 항등식을 정확한 유리수 연산으로 확인하였고, $\beta > \alpha + q$일 때마다 수열이 증가함을 확인하였다.

흔한 실수

- $u_n > 0$임을 먼저 알지 못한 채 $p > 2$로부터 $d_n > d_{n-1}$이라고 결론짓는 것. 두 사실은 같은 귀납법 안에 들어가야 한다.
- $u_n u_{n+1}$이 0이 아님을 언급하지 않고 그것으로 나누는 것.
- 빼는 단계에서 첨자 $n+1$에서의 점화식을 사용하며, 이를 위해 $n+1 \geq 1$이 필요하다는 것을 잊는 것.

STEP 너머

몰래 선형 점화식을 만족하는 비선형 점화식은 숨은 **불변량**(invariant)을 갖는다고 한다. 여기서는 $(u_{n+1}+u_{n-1})/u_n$, 또는 동치로 $u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1} = q^2$가 불변량이며, 이는 역학에서 보존량의 이산적인 유사물이다. 선형 점화식 $u_{n+1} - pu_n + u_{n-1} = 0$의 해는 $\lambda + \lambda^{-1} = p$인 $u_n = A\lambda^n + B\lambda^{-n}$이다. 이것은 $p > 2$일 때 실수이고 지수적으로 증가하며, 중근인 경우 $p = 2$에서는 $A + Bn$이 되어, 정확히 위의 이분법과 일치한다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)에는 STEP 형식의 점화식이 더 실려 있고, 미분방정식과의 유사성은 Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에서 전개된다.

풀이

STEP II 2012, 문제 9

역학 • 포물체 운동

STEP II 2012, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

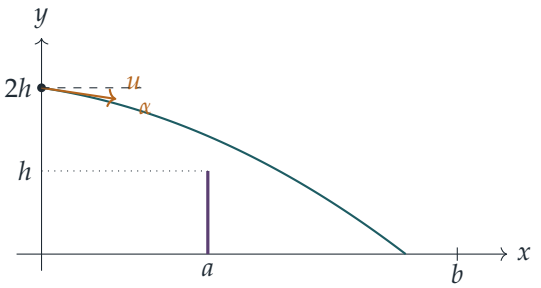
step.maths.org/questions/12-s2-q9

핵심 아이디어

공의 높이를 발사 지점으로부터의 수평 거리 x의 함수로 나타낸다. 이것이 궤적 방정식(trajectory equation)이다. 그러면 "네트를 넘어간다"는 $x = a$에서의 부등식 하나가 되고, "b보다 앞에 떨어진다"는 비행 시간(time of flight)에 대한 부등식이 된다. 마지막 부분이 풀리는 까닭은 두 조건이 모두 같은 양 $1/u^2$에 대한 경계, 즉 하나는 위로부터의 경계(상계, upper bound)이고 다른 하나는 아래로부터의 경계(하계, lower bound)로 드러나기 때문이다. 따라서 하계가 상계보다 작아야 하고, u는 사라진다.

풀이

공기 저항(air resistance)과 회전을 무시하고, 공을 중력만 받으며 자유롭게 움직이는 입자(particle)로 모형화하며, $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}\pi$이다. 원점을 발사 지점 바로 아래의 지면에 잡고, x축은 네트를 향하는 수평 방향, y축은 연직 위쪽 방향으로 잡는다.



네트 넘기기

처음 속도의 성분은 수평 방향으로 $u\cos\alpha$, 아래쪽으로 $u\sin\alpha$이다. 시간 t가 지난 뒤

$$x = ut\cos\alpha, \qquad y = 2h - ut\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

$t = x/(u\cos\alpha)$를 대입하여 소거하면 궤적은 다음과 같다.

$$y = 2h - x\tan\alpha - \frac{gx^2\sec^2\alpha}{2u^2}.$$

수평 속도는 일정한 양수이므로 공은 $x = a$에 정확히 한 번 도달하고, 그곳에서 $y > h$일 때 네트를 넘는다.

$$2h - a\tan\alpha - \frac{ga^2\sec^2\alpha}{2u^2} > h \iff \frac{ga^2\sec^2\alpha}{2u^2} < h - a\tan\alpha.$$

양수 $2/(ga^2\sec^2\alpha)$를 곱하면

$$\frac{1}{u^2} < \frac{2(h - a\tan\alpha)}{ga^2\sec^2\alpha},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

b보다 앞에 떨어지기

공은 $2h$만큼 떨어졌을 때, 즉 $\frac{1}{2}gt^2 + ut\sin\alpha - 2h = 0$일 때 땅에 닿는다. t에 대한 이 이차방정식(quadratic)의 두 근은 부호가 서로 반대이고(두 근의 곱이 $-4h/g < 0$이다), 착지 시간은 양수인 근이다.

$$T = \frac{-u\sin\alpha + \sqrt{u^2\sin^2\alpha + 4gh}}{g}.$$

공이 수평 거리 b보다 앞에 떨어질 필요충분조건은 $uT\cos\alpha < b$, 즉 $T < \dfrac{b}{u\cos\alpha}$이다($u\cos\alpha > 0$이므로). g를 곱하고 $u\sin\alpha$를 더하면

$$\sqrt{u^2\sin^2\alpha + 4gh} < \frac{bg}{u\cos\alpha} + u\sin\alpha,$$

이것이 두 번째 결과이다.

마지막 부등식

생각해 보기 u가 들어 있는 두 조건에서 어떻게 u가 없는 조건이 나올 수 있을까?

첫 번째 결과는 $1/u^2$의 상계이다. 두 번째 결과를 $1/u^2$의 하계로 바꿀 수 있다면, u가 무엇이든 하계는 상계보다 작아야 한다.

두 번째 부등식의 양변은 모두 양수이므로(우변은 $\sin\alpha \geq 0$이고 $\cos\alpha > 0$이기 때문이다), 제곱해도 부등식이 유지된다.

$$u^2\sin^2\alpha + 4gh < \frac{b^2g^2}{u^2\cos^2\alpha} + 2bg\tan\alpha + u^2\sin^2\alpha.$$

$u^2\sin^2\alpha$ 항이 소거되어 $2g(2h - b\tan\alpha) < b^2g^2\sec^2\alpha/u^2$가 남는다. 즉

$$\frac{2(2h - b\tan\alpha)}{gb^2\sec^2\alpha} < \frac{1}{u^2}.$$

첫 번째 결과와 합치면

$$\frac{2(2h - b\tan\alpha)}{gb^2\sec^2\alpha} < \frac{1}{u^2} < \frac{2(h - a\tan\alpha)}{ga^2\sec^2\alpha}.$$

양의 인수 $2/(g\sec^2\alpha)$를 약분하고 양변에 $a^2b^2 > 0$을 곱하면

$$\begin{aligned} & a^2(2h - b\tan\alpha) < b^2(h - a\tan\alpha) \\ \iff\quad & (ab^2 - a^2b)\tan\alpha < h(b^2 - 2a^2) \\ \iff\quad & ab(b - a)\tan\alpha < h(b^2 - 2a^2). \end{aligned}$$

? 생각해 보기 $b - a$로 나눌 수 있을까?

나눌 수 있으며, 부호가 중요하다. 공은 $x = a$에서 여전히 높이 $h > 0$보다 위에 있으므로 a보다 먼 곳에 떨어지고, 또 b보다 앞에 떨어진다. 따라서 $b > a$이므로 $ab(b - a) > 0$이고, 나누어도 부등호의 방향은 바뀌지 않는다.

$$\tan\alpha < \frac{h(b^2 - 2a^2)}{ab(b - a)}.$$

검산

- 단위: $a\tan\alpha$는 h와 같이 길이이고, ga^2/u^2도 길이이다. 따라서 $1/u^2$에 대한 각 경계의 단위는 $\mathrm{s}^2\,\mathrm{m}^{-2}$이며, 마땅히 그래야 한다.
- $\alpha = 0$이면 최종 결과는 $b^2 > 2a^2$이다. 실제로 수평으로 발사된 공은 $x = a$까지 h보다 적게 떨어진다. 떨어진 거리는 x^2에 비례하므로 $x = \sqrt{2}\,a$까지는 $2h$보다 적게 떨어지고, 따라서 공은 $\sqrt{2}\,a$보다 먼 곳에 떨어지며 $b > \sqrt{2}\,a$이다.
- 수치적으로 $g = 9.8$, $u = 12$, $\alpha = 0.2$, $h = 1.5$로 놓고 운동을 단계별로 계산하면 착지 거리가 6.7759로 나와 $uT\cos\alpha$와 일치한다. 20 000개의 무작위 경우에서 처음 두 부등식은 "네트를 넘는다"와 "b보다 앞에 떨어진다"와 정확히 일치했고, 두 조건이 모두 성립할 때마다 마지막 부등식도 성립했다.

흔한 실수

- 처음 속도의 연직 성분을 $+u\sin\alpha$로 잡는 것: 공은 수평선 **아래쪽**으로 발사된다.
- 양변이 양수인지 확인하지 않고 부등식을 제곱하는 것.
- $b-a$가 왜 양수인지 밝히지 않고 $b-a$로 나누는 것.

STEP 너머

마지막 부분은 부등식들 사이에서 매개변수를 소거하는 작은 예이다. L과 U에 u가 들어 있지 않을 때, 연립부등식 $L < 1/u^2 < U$가 해를 가질 필요충분조건은 $L < U$이다. 같은 아이디어를 여러 개의 일차부등식에 대해 체계적으로 적용한 것이 푸리에–모츠킨 소거법(Fourier–Motzkin elimination)이며, 이는 선형계획법(linear programming)의 기초 가운데 하나이다. 궤적이 더 이상 포물선이 아닌, 공기 저항이 있는 포물체 운동을 포함한 역학에 대해서는 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 보라.

풀이

STEP II 2012, 문제 10

역학 • 마찰과 모멘트

> **STEP II 2012, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/12-s2-q10

핵심 아이디어

막대는 원형 단면의 현(chord)이므로 모든 수직항력(normal reaction)은 중심 O를 정확히 향하고, 막대와 각 반지름 사이의 각 ϕ는 기하적으로 $\cos\phi = a/r$로 정해진다. 막대가 움직일 수 있는 유일한 방법은 O를 중심으로 회전하는 것이므로 양 끝은 함께 미끄러지고, 따라서 각 끝에서 마찰력(friction)이 어느 방향으로 작용하는지 알 수 있다. **중점**에 대한 모멘트(moment)를 잡으면 무게가 사라져 첫 번째 관계식이 곧바로 나오고, 이어서 O에 대한 모멘트와 한 방향으로의 분해를 쓰면 $\tan\theta$를 얻는다.

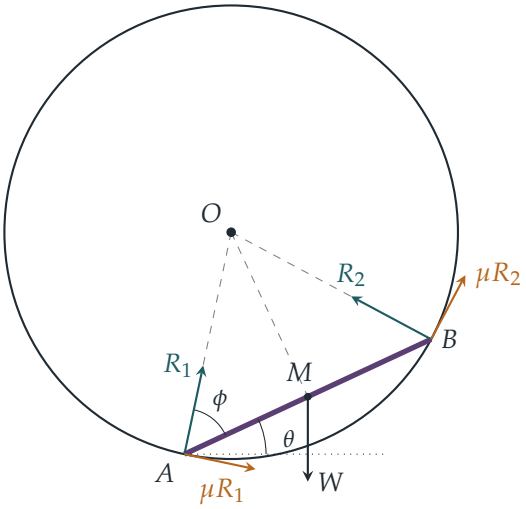
풀이

설정

막대를 무게가 W인 균일한 강체 막대로 모형화하고, 이 막대는 거친 원기둥에 양 끝 A(아래쪽)와 B(위쪽)에서만 닿아 있다고 하자. 원형 단면의 중심을 O, AB의 중점을 M이라 하자. $OA = OB = r$이므로 삼각형 OAB는 이등변삼각형이고, 따라서 OM은 AB에 수직이며

$$\cos\phi = \frac{a}{r}, \qquad \sin\phi = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r}, \qquad OM = \sqrt{r^2 - a^2} = r\sin\phi,$$

이고 $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$이다. 막대와 반지름 사이의 각은 **양** 끝 모두에서 ϕ이다.



생각해 보기 각 끝에서 마찰력은 어느 방향으로 작용하는가?

양 끝은 원 위에 머물고 AB의 길이는 변하지 않으므로, OM은 길이를 유지하며 막대에 계속 수직이다. 따라서 가능한 운동은 O를 중심으로 한 회전뿐이다. $\theta \neq 0$이므로 M은 O의 바로 아래에 있지 않고, 무게는 O에 대하여 막대를 수평 쪽으로 돌리려는 모멘트를 가진다(그림에서는 시계 방향이다. A는 벽을 따라 올라가고 B는 내려가려 한다). 수직항력은 O를 지나므로 이를 막을 수 있는 것은 마찰력뿐이다. 양 끝은 함께 움직이려 하므로, 미끄러지기 직전에는 양쪽 모두에서 마찰력이 한계값(limiting)에 이른다. 즉 그림과 같이 μR_1과 μR_2가 A와 B에서의 접선을 따라, 둘 다 O에 대하여 반시계 방향으로 작용한다.

R_1과 R_2 사이의 관계

M에 대한 모멘트를 잡으면 무게가 사라진다. R_1의 작용선은 AO이고 이는 AM과 각 ϕ를 이루므로, M에서 이 작용선까지의 수직 거리는 $a\sin\phi$이다. A에서의 마찰력은 OA에 수직인 접선을 따라 작용하므로, M에서의 거리는 $a\cos\phi$이다. B에서도 마찬가지이다. 그림에서 R_1은 막대를 M에 대하여 시계 방향으로 돌리고, R_2와 두 마찰력은 반시계 방향으로 돌리므로

$$R_1 a\sin\phi = R_2 a\sin\phi + \mu R_1 a\cos\phi + \mu R_2 a\cos\phi.$$

이다. $a\cos\phi$로 나누고 정리하면

$$\mu(R_1 + R_2) = (R_1 - R_2)\tan\phi,$$

가 되어 요구된 결과를 얻는다. 특히 $R_1 > R_2$이다. 즉 아래쪽 끝이 더 세게 누른다.

$\tan\theta$ 구하기

O에 대한 모멘트. 수직항력은 O를 지나고, 각 마찰력의 모멘트 팔 길이는 r이다. 무게는 M에 작용하며, OM이 막대에 수직이므로 OM은 연직선과 각 θ를 이룬다. 따라서 O에서 M까지의 수평 거리는 $OM\sin\theta = r\sin\phi\sin\theta$이다. 그러므로

$$\mu(R_1+R_2)\,r = Wr\sin\phi\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad \mu(R_1+R_2) = W\sin\phi\sin\theta. \tag{1}$$

막대에 수직인 방향으로 분해하기(O가 있는 쪽을 향하는 방향). 각 수직항력은 막대와 각 ϕ를 이루므로 $R_i\sin\phi$만큼 기여한다. 각 마찰력은 이 수직 방향과 각 ϕ를 이루는데, A에서는 막대의 O 쪽에서 멀어지는 방향을, B에서는 그쪽을 향한다. 무게는 $-W\cos\theta$만큼 기여한다. 따라서

$$(R_1+R_2)\sin\phi - \mu(R_1-R_2)\cos\phi = W\cos\theta. \tag{2}$$

이다. $S = R_1+R_2$라 하자. 첫 번째 결과에서 $R_1-R_2 = \mu S\cot\phi$이므로 (2)는

$$S\,\frac{\sin^2\phi-\mu^2\cos^2\phi}{\sin\phi} = W\cos\theta,$$

가 되고, (1)은 $\dfrac{\mu S}{\sin\phi} = W\sin\theta$를 말해 준다. 나누면(막대는 연직이 아니라 기울어져 있으므로 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이고 $\cos\theta\neq 0$이다)

$$\tan\theta = \frac{\mu}{\sin^2\phi-\mu^2\cos^2\phi}.$$

이다. 분자와 분모에 r^2을 곱하고 $r^2\sin^2\phi = r^2-a^2$, $r^2\cos^2\phi = a^2$을 이용하면

$$\tan\theta = \frac{\mu r^2}{r^2-a^2-\mu^2a^2} = \frac{\mu r^2}{r^2-a^2(1+\mu^2)},$$

가 되어 요구된 결과를 얻는다.

$\lambda<\phi$ 이끌어내기

? **생각해 보기** 가진 것이 등식뿐인데, 부등식(inequality)은 어디에서 나오는가?

부호에서 나온다. 막대는 수평과 각 θ를 이루며 기울어져 있고 $\theta\neq 0$이므로 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이고 $\tan\theta>0$이다. $\mu>0$이므로 분자 μr^2은 양수이고, 따라서 분모도 양수여야 한다.

$$r^2\sin^2\phi-\mu^2r^2\cos^2\phi>0 \quad\Longleftrightarrow\quad \tan^2\phi>\mu^2=\tan^2\lambda.$$

ϕ와 λ는 모두 $(0,\frac{\pi}{2})$에 속하고, 이 구간에서 tan는 양수이며 증가하므로 $\tan\phi>\tan\lambda$로부터 $\lambda<\phi$를 얻는다.

검산

- 매끄러운 극한: $\mu \to 0$이면 $\tan\theta \to 0$이므로, 매끄러운 막대는 M이 O의 바로 아래에 오는 수평 상태로만 정지할 수 있다. 올바르다.
- 수치: $r = 5$, $a = 3$, $\mu = \frac{1}{2}$로 두면 $\tan\phi = \frac{4}{3} > \frac{1}{2}$이고 $\tan\theta = \frac{12.5}{25-11.25} = \frac{10}{11}$이다. 이 각에서(그리고 무작위로 고른 수천 개의 r, a, μ에서) 두 힘의 방정식을 벡터 형태로 R_1, R_2에 대해 풀면, O에 대한 모멘트가 0이 되고 $\mu(R_1 + R_2) = (R_1 - R_2)\tan\phi$가 10^{-12} 이내로 성립한다.
- $\lambda < \phi$의 물리적 의미: λ는 마찰각(angle of friction)이다. $\lambda \geq \phi$이면 마찰력이 어떤 기울기에서도 막대를 붙잡아 둘 만큼 강하므로, 막대는 결코 미끄러지기 직전 상태에 이르지 않고 그러한 θ는 존재하지 않는다.

흔한 실수

- 수직항력을 반지름 방향이 아니라 **막대**에 수직인 방향으로 잡는 것. 접촉은 원기둥과 이루어지므로, 법선은 원기둥의 법선이다.
- 두 마찰력을 막대를 따라 서로 반대 방향으로 두는 것. 양 끝은 O에 대하여 같은 회전 방향으로 움직이므로, 마찰력은 양쪽 모두에서 O에 대하여 반시계 방향이다.
- 첫 번째 결과를 얻으려고 막대 방향과 막대에 수직인 방향으로 분해하는 것. 두 방정식 모두 W를 포함한다. M에 대한 모멘트를 잡으면 이를 피할 수 있다.

STEP 너머

$\lambda < \phi$라는 결론은 마찰 원뿔(friction cone)의 개념이다. 거친 접촉점에서의 전체 반력은 법선으로부터 각 λ 이내에 있어야 한다. 여기서 막대는 두 점에서 접촉하고 있으며, 문제의 핵심은 두 마찰 원뿔이 세 힘이 한 점에서 만날 여지를 남겨 두는가 하는 것이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 마찰과 강체 정역학을 더 충실히 다루며, 곧 일어날 운동의 방향을 직접 알아내야 하는 문제들도 포함한다.

풀이

STEP II 2012, 문제 11

역학 • 비탄성 충돌

STEP II 2012, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

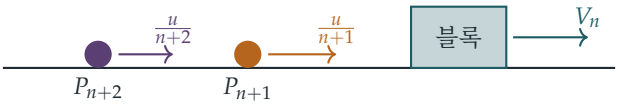
step.maths.org/questions/12-s2-q11

핵심 아이디어

각 입자가 가진 운동량(momentum)을 살펴보자. 질량 im에 속력 u/i를 곱하면 mu이고, 이 값은 모든 입자에서 같다. 따라서 n개의 입자가 흡수된 뒤 블록의 운동량은 간단히 nmu이고, 운동량 보존(conservation of momentum)으로부터 블록의 속력을 곧바로 얻는다. 그러면 다음 입자가 블록에 도달하는지는 두 속력을 비교하는 문제가 되고, 에너지 손실은 "들어온 운동에너지(kinetic energy) 빼기 나간 운동에너지"이다.

풀이

블록과 입자들을 매끄러운 면 위에서 한 직선을 따라 움직이는 입자로 모형화한다. 따라서 수평 방향의 외력은 작용하지 않고, 모든 충돌에서 직선 방향의 운동량이 보존된다. 입자가 블록에 박히므로 각 충돌은 완전 비탄성 충돌(perfectly inelastic collision)이다.



n번째 충돌 후의 속력

입자 P_i의 운동량은 $im \cdot \frac{u}{i} = mu$로, i와 무관하다.

n번째 입자가 블록과 충돌한다고 하자. 그러면 입자 $P_1, \ldots, P_{n-1}$은 그보다 먼저 충돌했어야 한다. 입자들은 차례로 발사되고 각 입자는 바로 앞 입자보다 느리므로(u/i는 감소한다) 나중 입자가 앞선 입자를 추월할 수 없고, 어떤 입자도 블록에 부딪히지 않고 지나칠 수 없기

때문이다. 따라서 n번째 충돌 직후 블록은 $P_1, \dots, P_n$을 포함하고, 그 질량은

$$km + m(1 + 2 + \cdots + n) = m\left(k + \tfrac{1}{2}n(n+1)\right)$$

이다. 블록은 정지 상태에서 출발했고 흡수된 각 입자가 운동량 mu를 가져왔으므로, 운동량 보존에 의해 현재 전체 운동량은 nmu이다. 따라서 n번째 충돌 후 블록의 속력 V_n은

$$m\left(k + \tfrac{1}{2}n(n+1)\right)V_n = nmu \quad \Longrightarrow \quad V_n = \frac{2nu}{2k + n(n+1)}$$

을 만족하며, 이것이 구하려던 결과이다.

$2k = N(N+1)$일 때의 충돌 횟수

n번의 충돌 후 블록은 일정한 속력 V_n으로 움직인다(면이 매끄럽기 때문이다). 블록 뒤에 있는 입자 P_{n+1}은 블록보다 엄밀히 빠를 때, 그리고 그때에만 블록을 따라잡는다.

$$\frac{u}{n+1} > \frac{2nu}{2k + n(n+1)} \iff 2k + n(n+1) > 2n(n+1) \iff 2k > n(n+1),$$

여기서 양수인 $n+1$과 $2k + n(n+1)$을 양변에 곱했다. ($n = 0$이면 이 조건은 $2k > 0$이 되어 참이다. P_1은 정지한 블록에 반드시 부딪힌다.)

> **생각해 보기** 한 입자가 빗나가면, 그 뒤의 입자가 여전히 블록에 부딪힐 수 있을까?

그렇지 않다. P_{n+1}이 블록을 따라잡지 못하면 블록은 속력 $V_n \geq \frac{u}{n+1}$을 영원히 유지하고, $i > n+1$일 때 $\frac{u}{i} < \frac{u}{n+1}$이므로 그 뒤의 모든 입자는 더욱 느리다. 따라서 충돌하는 입자는 정확히 $P_1, P_2, \dots$에서 처음으로 따라잡지 못하는 입자 직전까지이다.

이제 $2k = N(N+1)$이라 하자. P_{n+1}이 부딪힐 조건은 $n(n+1) < N(N+1)$, 즉 $n < N$이 된다. $n(n+1)$이 $n \geq 0$에서 순증가하기 때문이다. 따라서 $P_1, \dots, P_N$은 모두 블록에 부딪히지만 P_{N+1}은 그렇지 않다. $n = N$일 때 등호가 성립하며, 실제로

$$V_N = \frac{2Nu}{N(N+1) + N(N+1)} = \frac{u}{N+1}$$

은 정확히 P_{N+1}의 속력이므로, 이 입자는 블록 뒤에서 일정한 거리를 유지한다. 따라서 충돌은 정확히 N번 일어난다.

잃은 운동에너지

충돌에 참여하는 것은 $P_1, \dots, P_N$뿐이므로, 전체 손실은 발사 시점에 이 입자들이 가진 운동에너지(블록은 정지 상태에서 출발한다)에서 블록의 최종 운동에너지를 뺀 값이다.

처음에는

$$\sum_{i=1}^{N} \tfrac{1}{2}(im)\left(\frac{u}{i}\right)^2 = \tfrac{1}{2}mu^2 \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i}$$

이다. 마지막에 블록의 질량은 $m\left(k+\frac{1}{2}N(N+1)\right) = mN(N+1)$이고 속력은 $\frac{u}{N+1}$이므로, 블록의 운동에너지는

$$\tfrac{1}{2}\,mN(N+1)\,\frac{u^2}{(N+1)^2} = \tfrac{1}{2}mu^2\,\frac{N}{N+1} = \tfrac{1}{2}mu^2\left(1-\frac{1}{N+1}\right)$$

이다. 두 값을 빼면

$$\begin{aligned}\text{잃은 운동에너지} &= \tfrac{1}{2}mu^2\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{i} - 1 + \frac{1}{N+1}\right)\\ &= \tfrac{1}{2}mu^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N}+\frac{1}{N+1}\right) = \tfrac{1}{2}mu^2\sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{n}\end{aligned}$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

검산

- $N=1$ ($k=1$): 질량 m인 입자 하나가 속력 u로 질량 m인 블록에 부딪히면 속력은 $\frac{1}{2}u$가 되고, 손실은 $\frac{1}{2}mu^2 - \frac{1}{4}mu^2 = \frac{1}{4}mu^2$로 $\frac{1}{2}mu^2\cdot\frac{1}{2}$와 일치한다. 이때 P_2도 속력 $\frac{1}{2}u$로 움직이므로 결코 블록에 도달하지 않는다.
- $N=2$ ($k=3$): 공식에 따르면 손실은 $\frac{1}{2}mu^2(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}) = \frac{5}{12}mu^2 \approx 0.4167\,mu^2$이다. 운동을 단계별로 정확히 시뮬레이션한 결과(위치와 충돌 시각을 분수로 계산)도 같은 값과 정확히 두 번의 충돌, 그리고 공식과 일치하는 속력 V_n을 주었다. 또한 이 시뮬레이션으로 11까지의 모든 N에 대해 N번의 충돌과 손실 공식이 성립함을 확인했다.
- 단위: 손실은 질량 곱하기 속력의 제곱이므로, 에너지가 가져야 할 단위를 가진다.

흔한 실수

- n번째 입자의 운동량만 쓰고, 블록에 이미 $P_1,\ldots,P_{n-1}$이 들어 있다는 것(또는 블록 자체의 질량 km)을 잊는 것.
- 충돌을 $N+1$번으로 세는 것: P_{N+1}은 블록과 속력이 정확히 같으므로 결코 블록에 닿지 않는다.
- 손실에 $P_{N+1}, P_{N+2},\ldots$의 운동에너지를 포함하는 것: 이 입자들은 충돌하지 않으므로 잃는 에너지가 없다.

STEP 너머

이 블록은 물질을 쓸어 담으면서 질량이 늘어나는 물체로, 로켓이나 구름 속을 떨어지는 빗방울과 같은 부류이다. 이러한 가변 질량계(variable-mass system)에서는 뉴턴(Newton)의

제2법칙을 “운동량의 변화율은 힘과 같다”는 형태로 계 전체에 적용하는데, 이는 우리가 충돌 하나하나마다 한 것과 정확히 같다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 가변 질량계와 로켓 운동을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP II 2012, 문제 12

확률과 통계 • 조건부 확률

STEP II 2012, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/12-s2-q12

핵심 아이디어

스위치를 누르면 상태가 **뒤바뀐다**(toggle). 따라서 복도에 있는 수영장 스위치가 마지막에 켜져 있는 경우는 처음부터 켜져 있었고 건드리지 않았거나, 처음에 꺼져 있었고 눌렸거나 둘 중 하나이다. 부엌 쪽은 교묘하게 위장한 함정(red herring)이다. 확률 $\frac{1}{2}$로 켜져 있는 스위치는 상태가 뒤바뀌든 아니든 여전히 확률 $\frac{1}{2}$로 켜져 있다. 소문항 (i)에서 하나의 조건부 확률(conditional probability)을 구하고 나면, 일곱 번의 월요일은 이항(binomial) 실험이 되고, "가장 가능성이 큰 값이 3이다"라는 조건은 이웃한 이항 확률 사이의 부등식 두 개가 된다.

풀이

소문항 (i)

다음과 같이 사건(event)을 정의한다.

- H: 손님이 복도에 있는 수영장 스위치를 누른다. 따라서 $\mathrm{P}(H) = \frac{1}{4}$이다.
- A: 처음에 복도의 스위치가 모두 켜져 있다. 따라서 $\mathrm{P}(A) = p$이다.
- L: 마지막에 수영장 조명이 켜져 있다.

손님은 스위치를 무작위로 고르므로 H는 A와 독립(independent)이다.

복도. 스위치를 누른 뒤 복도의 수영장 스위치가 켜져 있는 경우는 정확히 A가 일어나고 H가 일어나지 않은 경우(켜져 있었고 건드리지 않음) 또는 A가 일어나지 않고 H가 일어난

경우(꺼져 있었는데 눌려서 켜짐)이다. 따라서

$$\mathrm{P}(\text{마지막에 복도의 수영장 스위치가 켜져 있음}) = p \cdot \tfrac{3}{4} + (1-p) \cdot \tfrac{1}{4} = \frac{1+2p}{4}.$$

부엌. 부엌의 수영장 스위치는 처음에 확률 $\frac{1}{2}$로 켜져 있다. 눌리지 않으면 그대로이고, 눌리면 상태가 뒤집히는데, 확률 $\frac{1}{2}$로 꺼져 있는 스위치는 뒤집히면 확률 $\frac{1}{2}$로 켜진다. 어느 경우든 손님이 부엌에서 무엇을 하든 이 스위치는 마지막에 확률 $\frac{1}{2}$로 켜져 있다.

부엌 스위치들과 손님의 부엌 선택은 복도에서 일어나는 모든 일과 독립이므로

$$\mathrm{P}(L) = \frac{1+2p}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1+2p}{8}.$$

조건부 확률을 구하기 위해 보면, $H \cap L$이 일어나려면 손님이 복도의 수영장 스위치를 누르고, 그 스위치가 처음에 꺼져 있었으며(그래야 눌러서 켜진다), 부엌 스위치가 마지막에 켜져 있어야 한다.

$$\mathrm{P}(H \cap L) = \frac{1}{4} \cdot (1-p) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1-p}{8}.$$

그러므로

$$\mathrm{P}(H \mid L) = \frac{(1-p)/8}{(1+2p)/8} = \frac{1-p}{1+2p},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

소문항 (ii)

$q = \dfrac{1-p}{1+2p}$라 하자. 각 월요일마다 조명이 켜져 있었다는 사실이 주어지므로, 소문항 (i)에 의해 복도의 수영장 스위치는 확률 q로 눌렸고, 이는 주마다 독립이다(손님들은 서로 독립적으로 행동하고, 매주 월요일 처음 상태가 새로 정해진다). 따라서 스위치가 눌린 날의 수 X는

$$X \sim \mathrm{B}(7, q).$$

를 만족한다. $1-q$도 필요하다.

$$1-q = \frac{(1+2p)-(1-p)}{1+2p} = \frac{3p}{1+2p}, \qquad \text{따라서} \qquad \frac{q}{1-q} = \frac{1-p}{3p}.$$

(여기서 $p > 0$이다. $p = 0$이면 $q = 1$이고 확실히 $X = 7$이므로 3이 가장 가능성이 큰 값이 될 수 없다.)

> **생각해 보기** "3이 가장 가능성이 큰 값이다"를 어떻게 계산 가능한 형태로 바꿀 수 있을까?

이웃한 확률을 비교한다. $1 \le k \le 7$에 대하여

$$\frac{\mathrm{P}(X=k)}{\mathrm{P}(X=k-1)} = \frac{\binom{7}{k} q^k (1-q)^{7-k}}{\binom{7}{k-1} q^{k-1} (1-q)^{8-k}} = \frac{8-k}{k} \cdot \frac{q}{1-q}.$$

인수 $\frac{8-k}{k}$는 k가 커질수록 순증가가 아니라 순감소하므로, 확률은 이 비가 1보다 큰 동안 증가하고 1보다 작아지면 감소한다. 따라서 3이 (유일한) 가장 가능성이 큰 값이 될 필요충분조건은 확률이 $k = 2$에서 $k = 3$으로 갈 때 증가하고 $k = 3$에서 $k = 4$로 갈 때 감소하는 것이다.

$$\frac{\mathrm{P}(X=3)}{\mathrm{P}(X=2)} = \frac{5}{3}\cdot\frac{q}{1-q} > 1 \qquad \text{그리고} \qquad \frac{\mathrm{P}(X=4)}{\mathrm{P}(X=3)} = \frac{4}{4}\cdot\frac{q}{1-q} < 1.$$

(우리에게 필요한 방향으로는 이 두 조건만으로 충분하다. 3이 가장 가능성이 큰 값이라면 당연히 $\mathrm{P}(X=3) > \mathrm{P}(X=2)$이고 $\mathrm{P}(X=3) > \mathrm{P}(X=4)$이다.)

$\frac{q}{1-q} = \frac{1-p}{3p}$를 대입하고 양의 값 $3p$를 양변에 곱하면

- 두 번째 조건에서 $1-p < 3p$, 즉 $p > \frac{1}{4}$를 얻는다.
- 첫 번째 조건에서 $\frac{5}{3}(1-p) > 3p$, 즉 $5-5p > 9p$이므로 $p < \frac{5}{14}$를 얻는다.

그러므로 $\frac{1}{4} < p < \frac{5}{14}$이고, 이것이 구하려던 결과이다.

검산

- $p = 0$이면 복도 스위치가 모두 꺼져 있으므로, 수영장 스위치가 눌린 경우에만 조명이 켜질 수 있다. 소문항 (i)의 결과는 $\mathrm{P}(H \mid L) = 1$로, 마땅히 그래야 하는 값이다. $p = 1$이면 그 스위치가 **눌리지 않은** 경우에만 조명이 켜질 수 있는데, 공식도 0을 준다.
- 양 끝점은 $q = \frac{1}{2}$($p = \frac{1}{4}$일 때)와 $q = \frac{3}{8}$($p = \frac{5}{14}$일 때)에 대응한다. $q = \frac{1}{2}$이면 $\mathrm{B}(7, \frac{1}{2})$는 대칭이므로 3과 4의 확률이 같다. $q = \frac{3}{8}$이면 $(n+1)q = 3$이고 2와 3의 확률이 같다. 따라서 등호 없는 부등식이 정확히 맞다.
- 소문항 (i)은 모든 처음 상태와 모든 스위치 선택을 분수로 정확히 나열하여 확인했고, 소문항 (ii)는 간격이 $\frac{1}{2800}$인 격자 위의 p에 대해 $\mathrm{B}(7, q)$ 확률을 계산하여 확인했다. 유일한 최빈값(mode)이 3이 되는 것은 정확히 $\frac{1}{4} < p < \frac{5}{14}$일 때이다.

흔한 실수

- 이미 켜져 있는 스위치를 누르면 **꺼진다**는 사실을 잊는 것. 복도 계산에서는 "켜짐"에 이르는 두 경로를 모두 고려해야 한다.
- 답이 그냥 $\frac{1}{2}$인데도 부엌을 경우로 나누어 계산하는 것. 경우 분석이 틀린 것은 아니지만 계산 실수가 나기 쉬운 곳이다.
- 소문항 (ii)에서 이항분포의 모수로 q 대신 p를 쓰는 것. 조명이 켜져 있다는 조건이 바로 스위치를 누를 확률을 $\frac{1}{4}$에서 q로 바꾸는 것이다.

STEP 너머

소문항 (i)은 베이즈 정리(Bayes' theorem)가 실제로 작동하는 모습이다. 관찰(조명이 켜져 있음)이 손님이 스위치를 눌렀을 확률을 $\frac{1}{4}$에서 $\frac{1-p}{1+2p}$로 갱신한다. 소문항 (ii)는 이 생각을 거꾸로 적용하여, 주어진 가장 가능성 큰 결과와 양립하는 미지의 모수 p의 값이 무엇인지 묻는다. 이것이 통계적 추론(statistical inference)과 최대가능도 추정(maximum likelihood estimation)의 씨앗이다. 연속한 항의 비를 이용해 최빈값을 찾는 방법은 많은 이산 분포(푸아송(Poisson) 분포, 초기하(hypergeometric) 분포)에서도 통한다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 조건부 확률과 이러한 분포들을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP II 2012, 문제 13

확률과 통계 • 푸아송 과정과 최근접 거리

STEP II 2012, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/12-s2-q13

이 문제는 *Beyond STEP*의 12.19 절 **평면 위의 무작위 점**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch12/spatial-poisson.html

핵심 아이디어

"가장 가까운 슈퍼마켓까지의 거리가 y 이상이다"라는 사건은 "우리가 고른 점을 중심으로 하는 반지름 y인 원 안에 슈퍼마켓이 하나도 없다"라는 사건과 정확히 같고, 푸아송(Poisson) 모형은 이 사건의 확률을 바로 알려 준다. 이로부터 Y의 누적분포함수(cumulative distribution function)를 얻고, 이를 미분(differentiation)하면 확률밀도함수(density)를 얻는다. 그러면 적률(moments)은 가우스(Gauss)형 적분이 된다. 부분적분(integration by parts)을 한 번 하면 $\mathrm{E}(Y)$가 가정해도 되는 적분으로 바뀌고, 치환(substitution) $u = y^2$을 하면 $\mathrm{E}(Y^2)$는 초등적으로 계산된다.

풀이

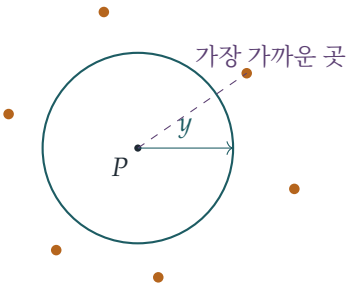
전체에 걸쳐 영역이 충분히 넓어서 경계 효과는 무시할 수 있다고 본다. 따라서 고른 점을 중심으로 하는 반지름 y인 원은 우리가 다루는 모든 y에 대하여 영역 안에 놓인다.

원 안에 슈퍼마켓이 없을 확률

반지름 y인 원 안에 있는 슈퍼마켓의 개수를 N이라 하자. 이 원의 넓이는 πy^2이므로 $N \sim \mathrm{Po}(\pi k y^2)$이고

$$\mathrm{P}(N = 0) = \mathrm{e}^{-\pi k y^2}.$$

Y의 분포



무작위로 고른 점을 P라 하자. 가장 가까운 슈퍼마켓이 P로부터 거리 y 이상 떨어져 있는 것은 P를 중심으로 하는 반지름 y인 열린 원 안에 슈퍼마켓이 하나도 없을 때이고, 오직 그때뿐이다. 따라서 $y \geq 0$에 대하여

$$\mathrm{P}(Y \geq y) = \mathrm{e}^{-\pi k y^2}, \qquad \text{따라서} \qquad \mathrm{P}(Y < y) = 1 - \mathrm{e}^{-\pi k y^2}.$$

(Y는 연속확률변수이므로 $<$로 쓰든 $\leq$로 쓰든 차이가 없다.) 이것이 Y의 누적분포함수 $F(y)$이고, 거리는 음수가 될 수 없으므로 $y < 0$에서는 $F(y) = 0$이다. $y \geq 0$에서 미분하면

$$f(y) = F'(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(1 - \mathrm{e}^{-\pi k y^2}\right) = 2\pi k y\, \mathrm{e}^{-\pi k y^2},$$

이고, 이것이 구하는 확률밀도함수이다. 간단히 확인해 보면, $y \to \infty$일 때 $F(y) \to 1$이므로 f를 적분하면 1이 된다.

평균

$$\mathrm{E}(Y) = \int_0^\infty y \cdot 2\pi k y\, \mathrm{e}^{-\pi k y^2}\, \mathrm{d}y.$$

생각해 보기 지수함수 앞에 y^2이 붙어 있을 때 주어진 적분을 어떻게 이용할 수 있을까?

피적분함수를 $y \times \left(2\pi k y\, \mathrm{e}^{-\pi k y^2}\right)$로 나누어 보자. 두 번째 인수는 $-\mathrm{e}^{-\pi k y^2}$의 도함수이다. $u = y$로 두고 부분적분하면

$$\mathrm{E}(Y) = \left[-y\, \mathrm{e}^{-\pi k y^2}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\pi k y^2}\, \mathrm{d}y = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\pi k y^2}\, \mathrm{d}y,$$

이다. $y \to \infty$일 때 $y\, \mathrm{e}^{-\pi k y^2} \to 0$이고(지수함수가 이긴다) $y = 0$에서도 0이기 때문이다. 이제 지수를 $-\frac{1}{2}x^2$에 맞춘다. $\pi k y^2 = \frac{1}{2}x^2$, 즉 $y = x/\sqrt{2\pi k}$, $\mathrm{d}y = \mathrm{d}x/\sqrt{2\pi k}$로 두자. 적분 구간은 그대로 0에서 ∞까지이므로

$$\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2/2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{k}}.$$

분산

$\mathrm{E}(Y^2)$를 구할 때는 주어진 적분이 전혀 필요 없다. y의 거듭제곱이 홀수이므로 $u = \pi k y^2$, $\mathrm{d}u = 2\pi k y\,\mathrm{d}y$로 치환할 수 있기 때문이다.

$$\mathrm{E}(Y^2) = \int_0^\infty y^2 \cdot 2\pi k y\, \mathrm{e}^{-\pi k y^2}\,\mathrm{d}y = \int_0^\infty \frac{u}{\pi k}\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\pi k}\int_0^\infty u\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\pi k},$$

여기서 $\int_0^\infty u\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = 1$을 이용했다(부분적분을 하거나, 모수가 1인 지수분포(exponential distribution)의 평균임을 알아보면 된다). 따라서

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(Y^2) - \big(\mathrm{E}(Y)\big)^2 = \frac{1}{\pi k} - \frac{1}{4k} = \frac{4-\pi}{4\pi k},$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

검산

- **척도 변환.** 슈퍼마켓의 밀도가 k배가 되면 길이는 $\sqrt{k}$배만큼 줄어들어야 하므로 $\mathrm{E}(Y) \propto k^{-1/2}$이고 $\mathrm{Var}(Y) \propto k^{-1}$이어야 한다. 두 답 모두 이 꼴이다.
- **양수 여부.** $4-\pi > 0$이므로 분산은 마땅히 그래야 하듯 양수이다.
- **수치 계산.** $k = 1$일 때 확률밀도함수에 중점 구적법을 적용하면 $\mathrm{E}(Y) = 0.5000$, $\mathrm{Var}(Y) = 0.06831$을 얻고, 이는 $(4-\pi)/(4\pi) \approx 0.06831$과 일치한다. 한 점 주위에 슈퍼마켓을 푸아송 방식으로 무작위로 흩뿌리는 시행을 10^5번 시뮬레이션한 결과 평균은 0.4996, 분산은 0.0681이었다.

흔한 실수

- $\mathrm{P}(Y < y) = \mathrm{e}^{-\pi k y^2}$으로 쓰는 실수. 이것은 거리 y 안에 슈퍼마켓이 **하나도 없을** 확률, 즉 $\mathrm{P}(Y \geq y)$이다.
- $x = \sqrt{2\pi k}\,y$ 대신 $x = \sqrt{\pi k}\,y$로 치환하는 실수. 이렇게 하면 가정한 $\mathrm{e}^{-x^2/2}$가 아니라 e^{-x^2}이 나오고, 답이 $\sqrt{2}$배만큼 어긋난다.

STEP 너머

여기서 슈퍼마켓들은 평면 위의 **푸아송 점과정**(*Poisson point process*)을 이룬다. 이는 숲 속의 나무, 하늘의 별, 휴대전화 기지국 등에 쓰이는 "완전한 공간적 무작위성"의 기본 모형이다. Y의 분포는 **레일리 분포**(*Rayleigh distribution*)로, 두 성분이 서로 독립인 정규확률변수인 벡터의 길이로도 나타난다. 또한 우리의 부분적분이 드러낸 깔끔한 꼬리 공식

$\mathrm{E}(Y) = \int_0^\infty \mathrm{P}(Y \geq y)\,\mathrm{d}y$는 음이 아닌 모든 확률변수에 대하여 성립한다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 푸아송 과정과 이러한 꼬리 적분 아이디어를 다룬다.

풀이

STEP III 2012, 문제 1

순수수학 • 비선형 미분방정식

STEP III 2012, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/12-s3-q1

핵심 아이디어

두 미분방정식(differential equation)은 모두 2계(second order)이고 비선형(non-linear)이므로 정해진 풀이법이 없다. 요령은 n을 잘 고르면 $\mathrm{d}z/\mathrm{d}x$ 속의 괄호를 각 방정식의 좌변과 일치시킬 수 있다는 점이다. 그러면 방정식은 $\mathrm{d}z/\mathrm{d}x$가 곧바로 적분할 수 있는 식과 같다는 뜻이 되고, 이로부터 변수분리(separation of variables)가 가능한 1계 방정식을 얻는다.

풀이

예비 결과

$y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$, $y'' = \mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2$로 쓰자. 곱의 미분법(product rule)을 쓰고, y^n과 $(y')^2$에는 연쇄법칙(chain rule)을 적용하면

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} &= ny^{n-1}y'\,(y')^2 + y^n \cdot 2y'y'' \\ &= y^{n-1}y'\left(n(y')^2 + 2yy''\right),\end{aligned}$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

소문항 (i)

좌변은 $(y')^2 + 2yy''$이고, 이는 $n = 1$일 때의 괄호이다. 따라서 $z = y(y')^2$으로 놓는다. 그러면

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = y'\left((y')^2 + 2yy''\right) = y'\sqrt{y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\tfrac{2}{3}y^{3/2}\right).$$

적분하면 $y(y')^2 = \frac{2}{3}y^{3/2} + C$이다. $x = 0$에서 $y = 1, y' = 0$이므로 $0 = \frac{2}{3} + C$이고

$$y\,(y')^2 = \tfrac{2}{3}\big(y^{3/2} - 1\big). \qquad (*)$$

> **생각해 보기** $(*)$는 $(y')^2$만 알려 준다. 제곱근의 부호는 어느 쪽을 택해야 하며, (양변을 모두 0으로 만드는) $y \equiv 1$도 가능한가?

상수함수 $y \equiv 1$은 원래 방정식의 해가 아니다. 대입하면 $0 = 1$이 되기 때문이다. 실제로 방정식에 $x = 0$을 대입하면 $0 + 2y''(0) = 1$이므로 $y''(0) = \frac{1}{2} > 0$이다. 따라서 y는 $x = 0$에서 극소이고, 충분히 작은 $x > 0$에 대해 $y' > 0$이다. 또한 방정식은 $x \mapsto -x$에 대해 변하지 않으므로 해는 우함수(even function)이고, $x > 0, y' > 0, y > 1$인 범위에서 다루면 된다.

$(*)$에 y를 곱하고 양의 제곱근을 취한 뒤 변수를 분리하면

$$\frac{\sqrt{y}\,y'}{\sqrt{y^{3/2} - 1}} = \sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$

$w = y^{3/2} - 1$로 치환하면 $\mathrm{d}w = \frac{3}{2}y^{1/2}\,\mathrm{d}y$이다. 좌변은 $\frac{2}{3}w^{-1/2}\,\mathrm{d}w/\mathrm{d}x$가 되고, ($w = 0$인) $x = 0$부터 적분하면

$$\tfrac{4}{3}\sqrt{w} = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,x \quad \Longrightarrow \quad w = \tfrac{9}{16}\cdot\tfrac{2}{3}\,x^2 = \tfrac{3}{8}x^2.$$

따라서 $y^{3/2} = \frac{3}{8}x^2 + 1$이고, 우함수이므로 $x < 0$에서도 성립한다. 그러므로

$$y = \big(\tfrac{3}{8}x^2 + 1\big)^{2/3},$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

직접 검산해 보자. $u = \frac{3}{8}x^2 + 1$이라 하면 $y' = \frac{2}{3}u^{-1/3}\cdot\frac{3}{4}x = \frac{1}{2}xu^{-1/3}$이므로 $y(y')^2 = u^{2/3}\cdot\frac{1}{4}x^2u^{-2/3} = \frac{1}{4}x^2$이다. 한편 $\frac{2}{3}(y^{3/2} - 1) = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8}x^2 = \frac{1}{4}x^2$이므로 $(*)$가 성립한다.

소문항 (ii)

이번에는 좌변이 $(y')^2 - yy''$이다. $n(y')^2 + 2yy''$이 이것의 상수배가 되어야 하므로 $n : 2 = 1 : -1$, 즉 $n = -2$이다. $z = y^{-2}(y')^2$으로 놓으면(y는 1 근처에 있으므로 0이 아니어서 문제없다)

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = y^{-3}y'\big(-2(y')^2 + 2yy''\big) = -2y^{-3}y'\big((y')^2 - yy''\big) = -2y^{-3}y'\,(-y^2) = \frac{2y'}{y},$$

이다. 여기서 방정식을 $(y')^2 - yy'' = -y^2$의 꼴로 사용하였다. 적분하면 $z = 2\ln y + C$이고, $x = 0$을 대입하면 $0 = 0 + C$이다. 따라서

$$\Big(\frac{y'}{y}\Big)^2 = 2\ln y.$$

$v = \ln y$로 놓으면 $v' = y'/y$이고, 방정식은 $v(0) = 0$인 $(v')^2 = 2v$가 된다.

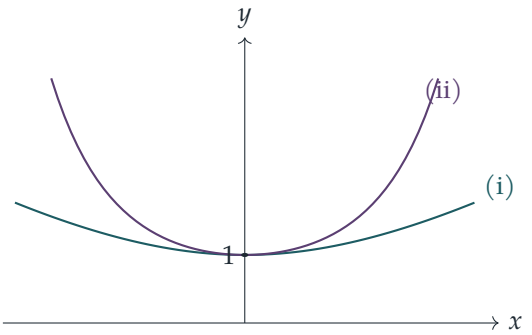
소문항 (i)에서와 마찬가지로 $v \equiv 0$(즉 $y \equiv 1$)은 이 1계 방정식의 해이지만 원래 방정식의 해는 아니다. 대입하면 $1 = 0$이 되기 때문이다. $x = 0$에서 원래 방정식은 $0 - y''(0) + 1 = 0$을 주므로 $y''(0) = 1 > 0$이다. 방정식은 이번에도 $x \mapsto -x$에 대해 변하지 않으므로 $v' > 0$인 $x > 0$에서 생각한다. 그러면

$$\frac{v'}{\sqrt{2v}} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{2v} = x \quad \Longrightarrow \quad v = \tfrac{1}{2}x^2,$$

이고, 우함수이므로 모든 x에서 성립한다. 따라서

$$y = \mathrm{e}^{x^2/2}.$$

검산: $y' = xy$, $y'' = (1 + x^2)y$이므로 $(y')^2 - yy'' + y^2 = y^2\left(x^2 - 1 - x^2 + 1\right) = 0$이다. 또한 $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$이다.



검산

- 두 해 모두 우함수이고, $y''(0)$의 값이 예측하듯 $x = 0$에서 최솟값 1을 가진다.
- 소문항 (ii)에는 더 빠른 방법이 있다. $y = \mathrm{e}^v$를 방정식에 바로 대입하면 $y' = v'\mathrm{e}^v$, $y'' = (v'' + (v')^2)\mathrm{e}^v$이고, 모든 항이 약분되어 $v'' = 1$만 남는다. 따라서 곧바로 $v = \frac{1}{2}x^2$이다.
- 수치적으로 확인하면, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$에서 출발하여 (i)을 룽게-쿠타(Runge–Kutta) 방법으로 풀면 $y(2) \approx 1.842016$이 나오고, 이는 $(\frac{5}{2})^{2/3}$과 일치한다. (ii)에 대해서는 $y(1) \approx 1.648721 = \mathrm{e}^{1/2}$이 나온다.

흔한 실수

- z의 적분상수(constant of integration)를 빠뜨리는 것. 소문항 (i)에서는 초기 조건 때문에 적분상수가 0이 아니다: $C = -\frac{2}{3}$.

- 소문항 (ii)에서 유추하여 $n = 1$을 고르는 것. $(y')^2$과 yy''의 계수의 비가 맞아야 하므로 반드시 $n = -2$이다.
- 1계 방정식에서 얻은 $y \equiv 1$을 원래 방정식에 대입해 확인하지 않고 해로 받아들이는 것.

STEP 너머

여기서 쓴 방법은 2계 방정식에 대한 **적분인자**(integrating factor)이다. $(y')^2 + 2yy''$에 y'을 곱하면 완전한 도함수(exact derivative)가 되는데, 이는 $\ddot{x} = -\omega^2 x$에 $\dot{x}$를 곱하면 에너지 보존(conservation of energy)을 얻는 것과 같은 원리이다. 이 문제의 방정식들처럼 x가 명시적으로 나타나지 않는 방정식은 $p = y'$을 y의 함수로 보면 언제나 1계로 낮출 수 있다. $y \equiv 1$에 대한 고민은 해의 비유일성(non-uniqueness)을 엿보게 해 준다. $v' = \sqrt{2v}$는 $v = 0$에서 립시츠 조건(Lipschitz condition)을 만족하지 않는다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 계수 내림법(reduction of order)과 존재성·유일성 정리(existence and uniqueness theorem)를 모두 다룬다.

풀이

STEP III 2012, 문제 2

순수수학 • 무한곱과 급수

STEP III 2012, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/12-s3-q2

핵심 아이디어

(i)의 곱은 제곱의 차(difference of two squares)를 이용하면 괄호가 하나씩 차례로 합쳐지므로, 연쇄적으로 소거되어(telescoping) 아주 간단한 식이 된다. 일단 $\frac{1}{1-x}$를 무한곱(infinite product)으로 나타내면, 로그(logarithm)를 취해 곱을 합으로 바꿀 수 있고, 그 합을 항별로 미분(differentiating term by term)하면 분수들의 급수(series)를 얻는다. (ii)는 같은 기법이 모습만 바꾼 것이다. $1+x+x^2$는 $1-t$ 꼴의 두 식의 몫이므로, (i)의 결과를 각각에 적용할 수 있다.

풀이

풀이 전체에서 $|x|<1$이고, 문제에서 허용한 대로 수렴(convergence)은 신경 쓰지 않는다.

소문항 (i)

매번 $(1-a)(1+a)=1-a^2$를 이용하여 왼쪽부터 괄호를 합친다.

$$\begin{aligned}(1-x)(1+x)&=1-x^2,\\(1-x^2)(1+x^2)&=1-x^4,\\(1-x^4)(1+x^4)&=1-x^8,\end{aligned}$$

이런 식으로 계속된다. 각 단계마다 지수가 두 배가 되고, 마지막 괄호 $1+x^{2^n}$은 $1-x^{2^n}$을 $1-x^{2^{n+1}}$로 바꾼다. 따라서

$$(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})=1-x^{2^{n+1}}.$$

$x \neq 1$이므로 $1-x$로 나눌 수 있다.

$$(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n}) = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{2^{n+1}}}{1-x},$$

이를 정리하면 $\frac{1}{1-x}$에 대한 구하는 식이 된다.

이제 $n \to \infty$로 보낸다. $|x| < 1$이므로 $x^{2^{n+1}} \to 0$이고, 따라서 나머지 항은 사라져서

$$\frac{1}{1-x} = \prod_{r=0}^{\infty}(1+x^{2^r}).$$

모든 인수가 양수이고($x^{2^r} > -1$이므로) $1-x$도 양수이므로 로그를 취할 수 있다. 곱의 로그는 로그들의 합이다.

$$-\ln(1-x) = \sum_{r=0}^{\infty}\ln\left(1+x^{2^r}\right),$$

양변에 -1을 곱하면 구하는 결과가 된다.

생각해 보기 로그들의 합에서 분수들의 합으로 어떻게 넘어갈 수 있을까?

양변을 x에 대하여 미분한다. 연쇄 법칙(chain rule)에 의해 $\ln(1+x^{2^r})$의 도함수는

$$\frac{2^r x^{2^r-1}}{1+x^{2^r}}.$$

좌변에서는 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\ln(1-x)\right) = \frac{1}{1-x}$이다. 항별로 미분하면(무시하라고 한 수렴 문제가 바로 이것이다)

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{2^r x^{2^r-1}}{1+x^{2^r}} = \frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1+x^2} + \frac{4x^3}{1+x^4} + \cdots,$$

이고, 여기에 쓴 항들은 $r = 0, 1, 2$에 해당한다. 이것이 구하는 급수이다.

소문항 (ii)

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x+x^2) = 1+2x$이므로 좌변은 $\ln(1+x+x^2)$의 도함수이다. 따라서 $1+x+x^2$에 대한 로그의 합을 찾으면 되는데, 인수분해(factorisation) $1-x^3 = (1-x)(1+x+x^2)$가 그것을 준다.

$$\ln(1+x+x^2) = \ln(1-x^3) - \ln(1-x).$$

$|x^3| < 1$이기도 하므로, (i)의 로그에 관한 결과는 x를 x^3으로 바꾸어도 성립한다. $y_r = x^{2^r}$로 놓으면 $(x^3)^{2^r} = y_r^3$이므로

$$\ln(1+x+x^2) = -\sum_{r=0}^{\infty}\ln\left(1+y_r^3\right) + \sum_{r=0}^{\infty}\ln\left(1+y_r\right) = -\sum_{r=0}^{\infty}\ln\frac{1+y_r^3}{1+y_r}.$$

세제곱의 합(sum of cubes)은 $1+y^3=(1+y)(1-y+y^2)$로 인수분해되므로 각 분수는 $1-y_r+y_r^2$이고

$$\ln(1+x+x^2)=-\sum_{r=0}^{\infty}\ln\left(1-x^{2^r}+x^{2^{r+1}}\right).$$

(모든 $1-y+y^2=(y-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$는 양수이므로 이 로그들은 의미가 있다.)

생각해 보기 미분할 때 마이너스 부호는 어디로 가는가?

연쇄 법칙에 의해

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\left(1-x^{2^r}+x^{2^{r+1}}\right)=\frac{-2^rx^{2^r-1}+2^{r+1}x^{2^{r+1}-1}}{1-x^{2^r}+x^{2^{r+1}}}=-\frac{2^rx^{2^r-1}\left(1-2x^{2^r}\right)}{1-x^{2^r}+x^{2^{r+1}}},$$

이고, 이 마이너스 부호가 합 앞의 마이너스 부호를 상쇄한다. 양변을 항별로 미분하면

$$\frac{1+2x}{1+x+x^2}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{2^rx^{2^r-1}\left(1-2x^{2^r}\right)}{1-x^{2^r}+x^{2^{r+1}}}.$$

처음 세 항은

$$\begin{aligned}
r=0:&\quad\frac{1-2x}{1-x+x^2},\\
r=1:&\quad\frac{2x(1-2x^2)}{1-x^2+x^4}=\frac{2x-4x^3}{1-x^2+x^4},\\
r=2:&\quad\frac{4x^3(1-2x^4)}{1-x^4+x^8}=\frac{4x^3-8x^7}{1-x^4+x^8},
\end{aligned}$$

이며, 이것이 바로 증명하라고 한 급수이다.

다른 방법. 항등식 $(1+y+y^2)(1-y+y^2)=1+y^2+y^4$를 이용하면 (i)에서와 똑같이 $1+x+x^2$에 대한 연쇄 소거 곱을 직접 얻는다. 즉 $1+x+x^2=\left(1+x^{2^{n+1}}+x^{2^{n+2}}\right)\Big/\prod_{r=0}^{n}\left(1-x^{2^r}+x^{2^{r+1}}\right)$이고, 분자는 1로 수렴한다.

검산

- $x=0$을 대입하면 각 급수의 양변이 모두 1이다.
- $x=\frac{1}{2}$에서 (ii)의 좌변은 $\frac{2}{7/4}=\frac{8}{7}\approx 1.142857$이다. 우변의 처음 네 항의 합은 1.142369이고, 거듭제곱 x^{2^r}이 매우 빠르게 작아지므로 오차도 매우 빠르게 줄어든다.
- 연쇄 소거된 곱은 분수를 써서 정확하게 확인했고, 두 급수와 로그 항등식은 $(-0.95, 0.95)$에서 무작위로 고른 1000개의 x에 대해 30개의 항을 사용하여 수치적으로 확인했다.

흔한 실수

- 연쇄 법칙에서 인수를 빠뜨리는 것: x^{2^r}의 도함수는 $2^r x^{2^r}$이 아니라 $2^r x^{2^r-1}$이다.
- (ii)에서 전체 부호를 틀리는 것: $1-y+y^2$의 도함수는 $-1+2y$이고, 바로 이 마이너스가 합 앞의 마이너스를 상쇄한다.

STEP 너머

곱 $\prod(1+x^{2^r})$은 모든 양의 정수를 서로 다른 2의 거듭제곱들의 합으로 나타내는 방법이 정확히 한 가지라는 것을 말해 주는데, 이는 이진법(binary notation)을 생성함수(generating function)로 표현한 것이다. "수렴을 무시한다"는 말 뒤에는 진짜 질문들이 숨어 있다. 언제 무한곱에 로그를 취할 수 있고, 언제 급수를 항별로 미분할 수 있는가? 해석학(analysis) 첫 강좌에서는 이 질문들에 균등수렴(uniform convergence)으로 답하며, $|x| \leq c < 1$에서는 여기 나온 모든 것이 균등수렴한다. 명쾌한 설명은 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 참고하라.

풀이

STEP III 2012, 문제 3

순수수학 • 접하는 곡선과 사차식

STEP III 2012, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/12-s3-q3

핵심 아이디어

$y = 4 - x^2$를 두 번째 식에 대입하면 x에 대한 사차방정식(quartic)을 얻고, 그 근은 두 곡선이 만나는 점들의 x좌표이다. "접한다"는 것은 **중근**(repeated root)을 뜻한다. m과 k를 미지수로 다루는 대신, 모든 것을 접점의 x좌표 a로 나타내자. 그러면 m, k와 나머지 교점들이 모두 a의 간단한 함수가 된다. 이로부터 네 그림 각각이 어떤 모양이어야 하는지 정확히 알 수 있고, 소문항 (ii)는 $m = 12$인 특수한 경우이다.

풀이

준비: 두 곡선은 어디서 접할 수 있는가?

두 곡선을 $C_1 : y = 4 - x^2$, $C_2 : mx = k - y^2$라 하자. C_1은 $(\pm 2, 0)$과 $(0, 4)$를 지나는, 아래로 열린 익숙한 포물선(parabola)이다. C_2는 $x = (k - y^2)/m$이다. 이는 x축에 대하여 대칭이고 ($m > 0$이므로) 왼쪽으로 열리며 꼭짓점이 $(k/m, 0)$인 포물선이다. $k > 0$이면 y축과 $(0, \pm\sqrt{k})$에서 만나고, $k < 0$이면 전혀 만나지 않는다.

C_1 위의 모든 점은 $(x, 4 - x^2)$ 꼴이므로, 이 점이 C_2 위에 있을 필요충분조건은

$$F(x) = x^4 - 8x^2 + mx + 16 - k = 0,$$

이다. 여기서 $(4 - x^2)^2 = x^4 - 8x^2 + 16$을 이용하였다.

? **생각해 보기** 왜 "접한다"는 것이 F가 중근을 가진다는 뜻인가?

공통점에서 C_1의 방향벡터는 $(1, -2x)$이고, C_2($mx + y^2$의 등위곡선(level curve))의 법선벡터(normal)는 $(m, 2y)$이다. 두 곡선이 접하는 것은 방향벡터가 법선벡터와 수직일 때, 즉

$m - 4xy = 0$, 다시 말해 $m - 4x(4 - x^2) = 0$일 때이다. 그런데 $F'(x) = 4x^3 - 16x + m$은 바로 이 식이다. 따라서 두 곡선이 $x = a$에서 접할 필요충분조건은 $F(a) = F'(a) = 0$, 즉 중근을 가지는 것이다.

$F'(a) = 0$에서 $m = 4a(4 - a^2)$를 얻는다. 이를 $F(a) = 0$에 대입하면

$$k = a^4 - 8a^2 + 4a^2(4 - a^2) + 16 = -3a^4 + 8a^2 + 16 = (4 - a^2)(3a^2 + 4),$$

이고, 따라서

$$\frac{k}{m} = \frac{3a^2 + 4}{4a}.$$

$m > 0$이므로 $0 < a < 2$ 또는 $a < -2$이어야 한다. 이중 인수를 묶어 내면

$$F(x) = (x - a)^2\left(x^2 + 2ax + 3a^2 - 8\right),$$

이며, 이는 전개하여 확인할 수 있다. x^3 항은 소거되고, x^2의 계수는 $3a^2 - 8 - 4a^2 + a^2 = -8$, x의 계수는 $2a^3 - 2a(3a^2 - 8) = 4a(4 - a^2) = m$, 상수항은 $a^2(3a^2 - 8) = 16 - k$이다. 이차 인수의 판별식(discriminant)은 $8(4 - a^2)$이므로, 다른 교점은 $0 < a < 2$일 때에만 존재한다. 그 위치는

$$x_\pm = -a \pm \sqrt{8 - 2a^2}.$$

이제 네 경우를 a로 분류할 수 있다.

- $k < 0$일 필요충분조건은 $a^2 > 4$, 따라서 $a < -2$이다.
- $0 < a < 2$일 때 $k - 16 = a^2(8 - 3a^2)$이므로, $k > 16$일 필요충분조건은 $a < \sqrt{8/3}$이다.
- $0 < a < 2$일 때 $\frac{k}{m} < 2$일 필요충분조건은 $3a^2 - 8a + 4 < 0$, 즉 $(3a - 2)(a - 2) < 0$, 즉 $a > \frac{2}{3}$이다.

따라서 (a)는 $a < -2$, (c)는 $0 < a < \frac{2}{3}$, (d)는 $\frac{2}{3} < a < \sqrt{8/3}$, (b)는 $\sqrt{8/3} < a < 2$인 경우이다. ($0 < k < 16$이고 $k/m > 2$인 접하는 배치는 존재하지 않으며, 이 때문에 그 경우는 목록에 없다.)

소문항 (i)

모든 경우에 C_1이 좌표축과 만나는 점은 $(\pm 2, 0)$과 $(0, 4)$이고, C_2가 좌표축과 만나는 점은 $(k/m, 0)$, 그리고 $k > 0$일 때 $(0, \pm\sqrt{k})$이다.

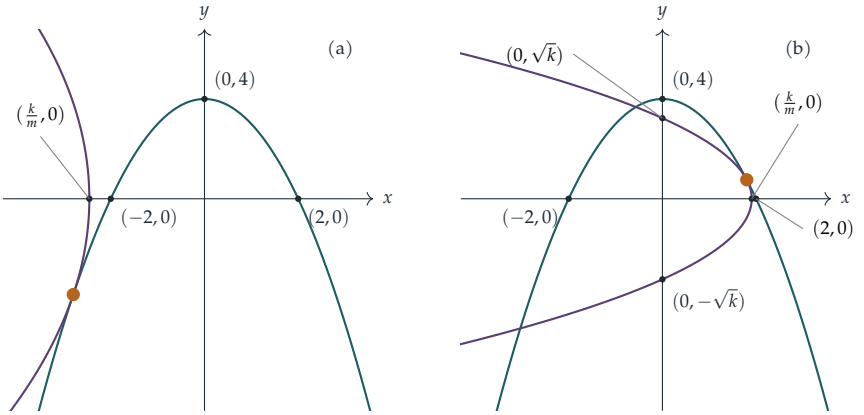
(a) 여기서는 $a < -2$이므로 두 곡선은 제3사분면의 $(a, 4 - a^2)$에서 접하고, 그 밖의 곳에서는 만나지 않는다. 꼭짓점은 $k/m = -(3a^2 + 4)/(4|a|)$에 있으며, $(3|a| - 2)(|a| - 2) > 0$이므로 이 값은 -2보다 작다. 따라서 C_2는 전체가 $(-2, 0)$의 왼쪽에 놓이고, 아래쪽 가지가 C_1의 왼쪽 가지에 맞닿는다.

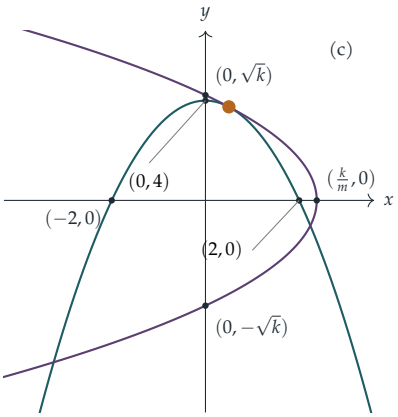
(b) 이제 $\sqrt{8/3} < a < 2$이므로 접점은 제1사분면에서 $(2,0)$ 가까이에 있다. 꼭짓점은 $\sqrt{3} \le k/m < 2$를 만족하고(산술-기하 평균 부등식(AM–GM)에 의해 $3a^2 + 4 \ge 4\sqrt{3}\,a$), $\sqrt{k} < 4$이므로, C_2의 꼭짓점과 두 y절편은 모두 C_1 아래에 있다. 위쪽 가지는 아래에서 C_1에 접한 뒤 x_+에서 이 곡선과 교차하는데, 여기서 $-2 < x_+ < 0$이다(제2사분면의 점). 아래쪽 가지는 제3사분면의 $x_- < -2$에서 C_1과 교차한다.

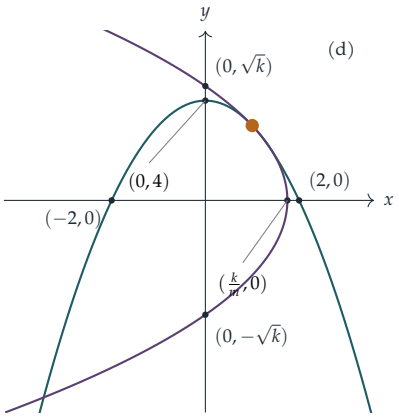
(c) 여기서는 $0 < a < \frac{2}{3}$이다. 꼭짓점은 $(2,0)$의 오른쪽에 있고 $\sqrt{k} > 4$이므로, C_2는 C_1의 위쪽을 감싸며 제1사분면에서 바깥쪽으로부터 접한다. 또한 $\sqrt{8-2a^2} > 2 + a \iff (3a-2)(a+2) < 0$이므로 $x_+ > 2$이고, $x_- < -2$이다. 따라서 아래쪽 가지는 제4사분면에서 C_1과 교차하고, 제3사분면에서 다시 교차한다.

(d) 여기서는 $\frac{2}{3} < a < \sqrt{8/3}$이다. 꼭짓점은 0과 2 사이에서 C_1 아래에 있지만 $\sqrt{k} > 4$이므로, 위쪽 가지는 $(0,4)$ 위를 지난다. 위쪽 가지는 제1사분면에서 C_1에 접하고, 같은 사분면의 $x_+ \in (0,2)$에서 교차하기도 한다($x_+ > 0 \iff a^2 < \frac{8}{3}$이므로). 아래쪽 가지는 $x_- < -2$에서 교차한다.

$0 < a < 2$이면 모든 경우에 $x_- < -2$인데, $a + \sqrt{8-2a^2} > 2$이기 때문이다($\sqrt{8-2a^2} > 2 - a$의 양변을 제곱하면 된다). 그림은 각각 $a = -2.8,\ 1.8,\ 0.5,\ 1$을 사용하였다. C_1은 청록색, C_2는 자주색, 접점은 호박색이다.







소문항 (ii)

$m = 12$일 때 $y = 4 - x^2$를 $12x = k - y^2$에 대입하면 $12x = k - 16 + 8x^2 - x^4$, 즉

$$x^4 - 8x^2 + 12x + 16 - k = 0,$$

이 되어 요구된 식을 얻는다.

접점 $x = a$에서 이 사차식은 중근을 가지므로(위의 상자 참고) 그 도함수(derivative)도 그곳에서 0이 된다.

$$4a^3 - 16a + 12 = 0 \quad \Longrightarrow \quad a^3 - 4a + 3 = 0.$$

$a = 1$이 근이므로 $a^3 - 4a + 3 = (a-1)(a^2 + a - 3)$이고, 따라서

$$a = 1 \qquad \text{또는} \qquad a = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

k를 구하기 위해 사차식에 $x = a$를 대입하고, $a^3 = 4a - 3$, 따라서 $a^4 = 4a^2 - 3a$임을 이용하여 정리하면

$$k = a^4 - 8a^2 + 12a + 16 = (4a^2 - 3a) - 8a^2 + 12a + 16 = -4a^2 + 9a + 16.$$

이제 세 경우를 살펴보자.

- $a = 1$: $k = 21$이므로 $k > 16$이고 $k/m = \frac{7}{4} < 2$이다. 이는 경우 **(d)**이다.
- $a = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{13}) \approx 1.303$: 이때 $a^2 = 3 - a$이므로 $k = -4(3-a) + 9a + 16 = 13a + 4 = \frac{1}{2}(13\sqrt{13} - 5) \approx 20.94$이다. $13\sqrt{13} > 37$이므로(제곱하면 $2197 > 1369$) 이 값은 16보다 크고, $13\sqrt{13} < 53$이므로($2197 < 2809$) 24보다 작다. 따라서 $k > 16$이고 $k/m < 2$이며, 이것도 경우 **(d)**이다.
- $a = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{13}) \approx -2.303$: $k = 13a + 4 = -\frac{1}{2}(5 + 13\sqrt{13}) \approx -25.94 < 0$이다. 이는 경우 **(a)**이다.

따라서 그림 (a)와 (d)만 나타난다. 이는 위에서 a로 한 분류와 일치한다. 1과 1.303은 $(\frac{2}{3}, \sqrt{8/3}) \approx (0.667, 1.633)$에 속하고, $-2.303 < -2$이다. $a^3 - 4a + 3 = 0$은 $m = 4a(4 - a^2)$에 $m = 12$를 대입한 것일 뿐임에 주목하자.

두 (d) 그림은 조금 다르다. $a = 1$일 때 다른 교점은 $x = -1 \pm \sqrt{6}$이다. $x \approx 1.45$에서의 교차는 접점의 **오른쪽**에 있고, 위쪽 가지는 위에서 C_1에 접한다(그림과 같이). $a \approx 1.303$일 때 교차는 $x \approx 0.84$에서 일어나 접점의 왼쪽에 있으며, 위쪽 가지는 아래에서 접한다.

검산

- $m = 12$, $k = 21$일 때 사차식은 $(x-1)^2(x^2 + 2x - 5)$로 인수분해된다. 전개하면 $x^4 - 8x^2 + 12x - 5$이고, 이는 $16 - k = -5$인 사차식이다.
- $(1, 3)$에서 C_1의 기울기는 -2이고, $12x = 21 - y^2$를 음함수 미분(implicit differentiation)하면 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = -6/y = -2$이다. 따라서 두 곡선은 실제로 그곳에서 접한다.
- 수치적으로, $(0, 2)$와 $a < -2$에서 무작위로 고른 a에 대해 공식 $m = 4a(4 - a^2)$와 $k = (4 - a^2)(3a^2 + 4)$는 $F(a)$와 $F'(a)$를 0으로 만들고, 경우의 경계는 $a = \frac{2}{3}$과 $a = \sqrt{8/3}$에서 나타난다. $a \approx 1.3028$일 때 근을 탐색하면 다른 교점이 $x \approx 0.8433$과 $x \approx -3.4488$에서 발견되며, 이는 $x_\pm$가 예측한 대로이다.

흔한 실수

- 사차식의 근이 하나뿐이어야 한다고 요구하는 것. "정확히 한 번 접한다"는 것은 다른 교차점을 허용한다. $m = 12$인 경우 (d)에서는 교차점이 두 개 있다.
- C_2를 오른쪽으로 열리게 그리는 것. $m > 0$이면 $|y|$가 커질수록 $x = (k - y^2)/m$은 감소한다.
- (a)에서 C_2가 y절편을 갖지 않는다는 것을 잊거나, 꼭짓점을 -2와 0 사이에 두는 것. 꼭짓점은 -2의 왼쪽에 있어야 한다.

STEP 너머

배치를 접점 a로 나타내는 것은 **판별식**과 **포락선**(envelope)을 처음 엿보는 일이다. F가 중근을 가지게 하는 (m, k)의 집합은 곡선 $\big(4a(4 - a^2), (4 - a^2)(3a^2 + 4)\big)$이며, 이 곡선을 가로지르면 실수 교점의 개수가 두 개씩 바뀐다. 이것이 평면곡선의 대수기하학(algebraic geometry)의 시작이며, 매개변수에 따라 해가 어떻게 변하는지 연구하는 특이점("파국") 이론(singularity theory, catastrophe theory)의 시작이기도 하다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)에는 같은 정신의 STEP 스타일 곡선 문제가 훨

씬 더 많이 실려 있다.

풀이

STEP III 2012, 문제 4

순수수학 • 무한급수의 합

STEP III 2012, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/12-s3-q4

핵심 아이디어

모든 것은 두 개의 표준적인 급수(series) $\sum x^n/n! = \mathrm{e}^x$와 $\sum x^n/n = -\ln(1-x)$에 바탕을 둔다. 소문항 (i)의 요령은 n에 대한 각 다항식을 $n!$과 약분되도록 쓰는 것이다. 즉 n의 거듭제곱 대신 $n(n-1)$이나 $n(n-1)(n-2)$ 같은 곱을 사용한다. 소문항 (ii)에서는 부분분수(partial fractions)를 이용해 다루기 까다로운 유리식 인수를 $1/(n+k)$ 꼴의 조각들로 나누며, 그 각각은 첨자를 이동한 로그 급수가 된다.

풀이

소문항 (i)

두 가지 사실이 모든 일을 해 준다. 첫째, $\sum_{n=0}^{\infty} 1/n! = \mathrm{e}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e} - 1.$$

둘째, 임의의 자연수 $k \geq 1$에 대하여 항 $n(n-1)\cdots(n-k+1)/n!$은 $n < k$일 때 0이 되고, $n \geq k$일 때 $1/(n-k)!$과 같다. 따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} = \mathrm{e} \qquad (k \geq 1). \tag{$*$}$$

여기에 나오는 급수는 모두 절대수렴(converge absolutely)한다(각각 n에 대한 다항식을 $n!$으로 나눈 꼴이다). 그러므로 급수를 자유롭게 나누고 다시 합쳐도 된다.

첫 번째 합. $n+1 = n+1$이므로, $k=1$일 때의 $(*)$를 이용하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!} = \mathrm{e} + (\mathrm{e}-1) = 2\mathrm{e}-1,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

두 번째 합. $(n+1)^2 = n^2+2n+1 = n(n-1)+3n+1$로 쓴다. 그러면 $k=2$와 $k=1$일 때의 $(*)$에 의해

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!} = \mathrm{e} + 3\mathrm{e} + (\mathrm{e}-1) = 5\mathrm{e}-1,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

세 번째 합.

> **생각해 보기** $(2n-1)^3$을 하강 곱 $n(n-1)(n-2)$, $n(n-1)$, n으로 어떻게 바꿀 수 있을까?

전개하면 $(2n-1)^3 = 8n^3 - 12n^2 + 6n - 1$이다. 다음으로

$$n^3 = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n, \qquad n^2 = n(n-1) + n.$$

을 이용한다. 이 식들은 우변을 전개하거나 $n = 0, 1, 2, 3$을 대입하여 확인할 수 있다. 대입하면

$$\begin{aligned}(2n-1)^3 &= 8\big[n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n\big] - 12\big[n(n-1)+n\big] + 6n - 1 \\ &= 8\,n(n-1)(n-2) + 12\,n(n-1) + 2n - 1.\end{aligned}$$

(간단한 확인: $n=1$일 때 양변은 모두 1이고, $n=2$일 때 양변은 모두 27이다.) 이제 $k = 3, 2, 1$일 때의 $(*)$에 의해

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^3}{n!} = 8\mathrm{e} + 12\mathrm{e} + 2\mathrm{e} - (\mathrm{e}-1) = 21\mathrm{e} + 1.$$

소문항 (ii)

부분분수. 분자와 분모의 차수가 같으므로 먼저 나눗셈을 한다.

$$\frac{n^2+1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{3n+1}{(n+1)(n+2)}.$$

$\dfrac{3n+1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{A}{n+1} + \dfrac{B}{n+2}$로 놓으면, 커버업 규칙(cover-up rule)에 의해 $A = \dfrac{-2}{1} = -2$($n=-1$에서)이고 $B = \dfrac{-5}{-1} = 5$($n=-2$에서)이다. 따라서

$$\frac{n^2+1}{(n+1)(n+2)} = 1 + \frac{2}{n+1} - \frac{5}{n+2}.$$

세 조각. $x = \frac{1}{2}$로 놓고, $|x| < 1$에서 성립하는 $-\ln(1-x) = \sum_{m=1}^{\infty} x^m/m$을 이용한다. 아래의 세 급수는 각각 수렴하므로(항이 적어도 2^{-n}만큼 빠르게 줄어든다), 합을 나누는 것은 정당하다.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = 2,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m} = \frac{-\ln(1-x)}{x} = 2\ln 2,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2} = \frac{1}{x^2}\sum_{m=2}^{\infty} \frac{x^m}{m} = \frac{-\ln(1-x)-x}{x^2} = 4\left(\ln 2 - \tfrac{1}{2}\right) = 4\ln 2 - 2.$$

둘째 줄과 셋째 줄에서는 각각 $m = n+1$, $m = n+2$로 놓았다. 셋째 줄은 전체 로그 급수에서 $m = 1$인 항 x를 뺀 것이다.

? **생각해 보기** 세 번째 조각에는 왜 $-x$가 추가로 필요할까?

$m = n+2$로 첨자를 이동하면 합이 $m = 2$부터 시작하므로, 이 급수는 첫째 항이 빠진 $-\ln(1-x)$이다. 이것을 잊어버리는 것이 여기서 틀리기 가장 쉬운 부분이다.

합치기.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n^2+1)2^{-n}}{(n+1)(n+2)} = 2 + 2(2\ln 2) - 5(4\ln 2 - 2) = 12 - 16\ln 2.$$

검산

- $n = 60$까지의 부분합(partial sums)을 구하면 (i)의 세 합에 대하여 4.436564, 12.591409, 58.083918을 얻는다. 이 값들은 기계 정밀도 수준에서 $2e-1$, $5e-1$, $21e+1$과 일치한다.
- (ii)에서 $12 - 16\ln 2 \approx 0.909645$이며, 이는 부분합과 일치한다. 처음 몇 항은 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{48}$, $\frac{1}{16}$이므로, 전체 합이 1보다 조금 작다는 것은 그럴듯하다.
- (ii)의 답은 양수여야 하며, 실제로 그렇다: $16\ln 2 \approx 11.09 < 12$.

흔한 실수

- $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n! = e$를 사용하는 것. 이는 $n = 0$인 항이 빠져 있다는 사실을 잊은 것이다.
- $\sum n^2/n!$을 $\sum n/(n-1)!$로 쓰고 거기서 멈추는 것. 여전히 $n = (n-1)+1$로 나누어야 한다.
- (ii)에서 $\sum x^n/(n+2)$의 첨자를 이동할 때 $-x$를 빠뜨리는 것.

STEP 너머

하강 곱 $n(n-1)\cdots(n-k+1)$을 하강 계승(falling factorial)이라 하며, 다항식을 하강 계승으로 나타내는 데에는 제2종 스털링 수(Stirling numbers of the second kind)가 쓰인다. $(*)$의 합은 평균이 1인 푸아송 분포(Poisson distribution)의 k차 계승 모멘트(factorial moment)가 1이라는 것을 말해 준다. 예를 들어 $\sum n^k/n!$이 k번째 벨 수(Bell number)의 e배가 되는 이유가 바로 이것이다. 여기서 한 재배열은 절대수렴에 의해 정당화되는데, 이는 대학 1학년 해석학(analysis)의 핵심 주제이다. Abbott의 *Understanding Analysis*를 참고하라. 확률 쪽으로는 Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*를 참고하라.

풀이

STEP III 2012, 문제 5

순수수학 • 이차곡선 위의 유리점

STEP III 2012, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/12-s3-q5

핵심 아이디어

(i)(b)의 항등식(identity)은 사실 회전(rotation)을 감추고 있다. 점 $(\cos\theta+\sqrt{m}\sin\theta,\ \sin\theta-\sqrt{m}\cos\theta)$는 점 $(1,-\sqrt{m})$을 각 θ만큼 회전시켜 얻는 점이므로, 반지름이 $\sqrt{1+m}$인 원 위에 그대로 머문다. $\cos\theta$와 $\sin\theta$가 둘 다 유리수이면 (예를 들어 (i)(a)에서 얻은 $\frac{3}{5}$와 $\frac{4}{5}$처럼) 이 회전은 하나의 "좋은" 점을 또 다른 "좋은" 점으로 옮긴다. (ii)의 모든 내용은 적당한 정수점에서 출발하여 같은 요령을 쓰는 것이고, 쌍곡선(hyperbola)의 경우에는 회전 대신 그 쌍곡선판 친척을 쓴다.

풀이

소문항 (i)

(a) 점 $(1,0)$은 $x^2+y^2=1$ 위의 정수 유리점(integer rational point)이다. 정수가 아닌 유리점을 얻으려면 세 변이 $3,4,5$인 직각삼각형을 이용한다. $\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9+16}{25}=1$이므로 $\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$가 조건을 만족하고, 두 좌표 모두 정수가 아니다.

(b) 점 $(1,1)$은 $x^2+y^2=2$ 위의 정수 유리점이다.

전개하면 교차항(cross terms)은 $+2\sqrt{m}\sin\theta\cos\theta$와 $-2\sqrt{m}\sin\theta\cos\theta$이고 서로 상쇄되므로

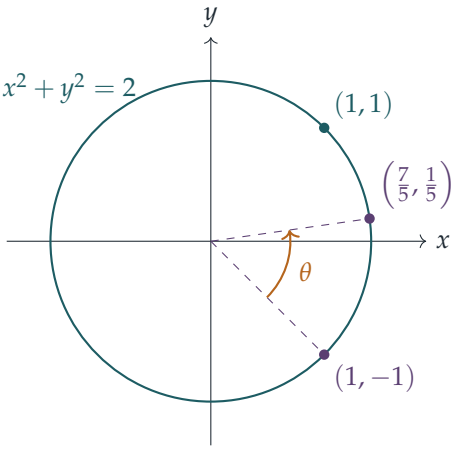
$$\begin{aligned}(\cos\theta+\sqrt{m}\sin\theta)^2+(\sin\theta-\sqrt{m}\cos\theta)^2 &= \cos^2\theta+m\sin^2\theta+\sin^2\theta+m\cos^2\theta\\ &= (1+m)(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=1+m.\end{aligned}$$

이다. $m=1$로 두면 우변은 2가 되고, $\cos\theta=\frac{3}{5}$, $\sin\theta=\frac{4}{5}$인 θ를 고른다. ($\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$가 단위

원(unit circle) 위에 있으므로 이런 θ가 존재한다.) 그러면

$$x = \tfrac{3}{5} + \tfrac{4}{5} = \tfrac{7}{5}, \qquad y = \tfrac{4}{5} - \tfrac{3}{5} = \tfrac{1}{5}$$

는 $x^2 + y^2 = 2$를 만족한다. 실제로 $\frac{49+1}{25} = 2$이다. 따라서 $\left(\frac{7}{5}, \frac{1}{5}\right)$는 $x^2 + y^2 = 2$ 위의 정수가 아닌 유리점이다.



그림은 무슨 일이 일어났는지 보여 준다. $\cos\theta = \frac{3}{5}$, $\sin\theta = \frac{4}{5}$인 θ만큼 $(1, -1)$을 시계 반대 방향으로 회전시키면 $\left(\frac{7}{5}, \frac{1}{5}\right)$에 도달한다.

소문항 (ii)

(a) $1^2 + (\sqrt{2})^2 = 3$이므로 점 $(1, \sqrt{2})$, 즉 $p = 1, q = 0, r = 0, s = 1$인 점은 $x^2 + y^2 = 3$ 위의 정수 2-유리점이다.

정수가 아닌 점을 얻으려면 (i)(b)의 항등식에서 $m = 2$로 두어 $1 + m = 3$이 되게 하고, 다시 $\cos\theta = \frac{3}{5}$, $\sin\theta = \frac{4}{5}$를 쓴다.

$$x = \tfrac{3}{5} + \tfrac{4}{5}\sqrt{2}, \qquad y = \tfrac{4}{5} - \tfrac{3}{5}\sqrt{2}.$$

여기서 $p = \frac{3}{5}$, $q = \frac{4}{5}$, $r = \frac{4}{5}$, $s = -\frac{3}{5}$이고 어느 것도 정수가 아니며, 항등식에 의해 $x^2 + y^2 = 3$이다. 직접 확인해 보면 $x^2 = \frac{9+32+24\sqrt{2}}{25}$, $y^2 = \frac{16+18-24\sqrt{2}}{25}$이고, 둘을 더하면 $\frac{75}{25} = 3$이다.

> **생각해 보기** 항등식은 $1 + m$만 만들어 내고 m에는 $\sqrt{2}$가 들어가야 하는데, 어떻게 11에 도달할 수 있을까?

출발점의 크기를 바꾸면 된다. 항등식은 $(1, -\sqrt{m})$을 회전시켜 얻은 것인데, 임의의 점 $(a, -b\sqrt{2})$를 회전시켜도 마찬가지이다. 교차항이 똑같이 상쇄되어

$$(a\cos\theta + b\sqrt{2}\sin\theta)^2 + (a\sin\theta - b\sqrt{2}\cos\theta)^2 = (a^2 + 2b^2)(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = a^2 + 2b^2.$$

를 얻는다. 따라서 $a^2+2b^2=11$인 정수가 필요하고, $a=3$, $b=1$이 조건을 만족한다($9+2=11$). 다시 말해 $x^2+y^2=11$ 위의 정수 2-유리점 $(3,\sqrt{2})$에서 출발하는 것이다.

(b) $a=3, b=1, \cos\theta=\frac{3}{5}, \sin\theta=\frac{4}{5}$로 두면

$$x=\tfrac{9}{5}+\tfrac{4}{5}\sqrt{2}, \qquad y=\tfrac{12}{5}-\tfrac{3}{5}\sqrt{2}.$$

이다. 따라서 $p=\frac{9}{5}$, $q=\frac{4}{5}$, $r=\frac{12}{5}$, $s=-\frac{3}{5}$이고 어느 것도 정수가 아니며 $x^2+y^2=11$이다. 직접 계산하면 $x^2=\frac{81+32+72\sqrt{2}}{25}$, $y^2=\frac{144+18-72\sqrt{2}}{25}$이고, 둘을 더하면 $\frac{275}{25}=11$이다.

(c) 쌍곡선의 경우에는 x^2+y^2 대신 x^2-y^2를 보존하는 "회전"이 필요하다. $c^2-s^2=1$이면 ($c=\cosh t, s=\sinh t$를 떠올리자)

$$\begin{aligned}(ac+b\sqrt{2}\,s)^2-(as+b\sqrt{2}\,c)^2 &= a^2c^2+2b^2s^2-a^2s^2-2b^2c^2\\ &= (a^2-2b^2)(c^2-s^2)=a^2-2b^2,\end{aligned}$$

이다. 교차항 $2\sqrt{2}\,abcs$가 이번에도 상쇄되기 때문이다. $a^2-2b^2=7$이 필요하므로 $a=3$, $b=1$로 둔다. (따라서 $(3,\sqrt{2})$는 이 쌍곡선 위의 정수 2-유리점이다.)

이제 $c^2-s^2=(c-s)(c+s)=1$인 유리수 c, s가 필요하다. $c+s=2$, $c-s=\frac{1}{2}$로 고르면 $c=\frac{5}{4}$, $s=\frac{3}{4}$이다. 그러면

$$x=\tfrac{15}{4}+\tfrac{3}{4}\sqrt{2}, \qquad y=\tfrac{9}{4}+\tfrac{5}{4}\sqrt{2},$$

이고 $p=\frac{15}{4}$, $q=\frac{3}{4}$, $r=\frac{9}{4}$, $s=\frac{5}{4}$이며 어느 것도 정수가 아니다. 직접 계산하면 $x^2=\frac{225+18+90\sqrt{2}}{16}$, $y^2=\frac{81+50+90\sqrt{2}}{16}$이므로 $x^2-y^2=\frac{112}{16}=7$이다. 이것이 $x^2-y^2=7$ 위의 정수가 아닌 2-유리점이다.

검산

모든 점은 위에서 한 것처럼 분수로 정확하게 확인할 수 있고, 수치로도 확인할 수 있다. (ii)(c)에서는 $x\approx 4.81066$, $y\approx 4.01777$이므로 $x^2-y^2\approx 7.0000$이고, (ii)(b)에서는 $x\approx 2.93137$, $y\approx 1.55147$이므로 $x^2+y^2\approx 11.0000$이다. 마지막에는 항상 p, q, r, s를 훑어보며 어느 것도 정수가 아님을 확인하자.

흔한 실수

- 0도 정수라는 사실을 잊는 것. $\left(\frac{7}{5}\sqrt{2},\dots\right)$ 같은 점은 $p=0$이므로 정수가 아닌 2-유리점이 아니다.
- (c)에서 무난해 보이는 선택이 실패할 수 있다. $c=\frac{5}{3}$, $s=\frac{4}{3}$도 $c^2-s^2=1$을 만족하지만 $x=5+\frac{4}{3}\sqrt{2}$가 되어 $p=5$가 정수이다. 모든 계수를 확인하자.

STEP 너머

$p + q\sqrt{2}$ 꼴의 수들은 체(field) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$를 이루며, 이 문제는 사실 그 체 위에서 원뿔곡선(conic) 위의 점을 찾는 문제이다. 알고 있는 점을 유리수 각만큼 회전시키는 요령은 아름다운 이론의 출발점이다. 원뿔곡선이 유리점을 하나 가지면 그 점을 지나는 직선들로 나머지 유리점을 모두 매개화(parametrise)할 수 있고, $x^2 - 2y^2 = 1$(펠 방정식(Pell's equation)) 위의 유리점들은 바로 (c)에서 쓴 쌍곡선 "회전"에 대해 군(group)을 이룬다. 데이븐포트(Davenport)의 *The Higher Arithmetic*(고등 정수론)은 펠 방정식과 제곱수의 합을 다루고, Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 같은 체를 소개한다.

풀이

STEP III 2012, 문제 6

순수수학 • 복소근의 자취

STEP III 2012, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/12-s3-q6

핵심 아이디어

복소수(complex number)는 실수부(real part)와 허수부(imaginary part)가 모두 0일 때, 그리고 그때에만 0이다. 따라서 $z = x + \mathrm{i}y$에 대한 복소수 방정식 하나는 x, y, p에 대한 실수 방정식 두 개가 된다. 허수부 방정식은 항상 y를 인수로 갖도록 인수분해(factorise)되며, 이 때문에 모든 자취(locus)가 "실근"과 "허근"의 두 부분으로 나뉜다. 각 경우에 p를 소거(eliminate)하여 (x, y)-평면의 곡선을 얻고, 그다음 그 곡선 위의 어떤 점들이 실제로 실수 p의 값에서 나오는지 확인한다.

풀이

첫 번째 방정식 $z^2 + pz + 1 = 0$

x, y가 실수일 때 $z = x + \mathrm{i}y$로 놓는다. 그러면

$$z^2 + pz + 1 = (x^2 - y^2 + px + 1) + \mathrm{i}\,(2xy + py).$$

p가 실수이므로 두 괄호는 각각 실수부와 허수부이고, 둘 다 0이 되어야 한다.

$$x^2 - y^2 + px + 1 = 0, \qquad (2x + p)y = 0,$$

이로써 요구된 식을 얻는다.

두 번째 방정식에서 $p = -2x$이거나 $y = 0$이다. $y = 0$이면 첫 번째 방정식은 $x^2 + px + 1 = 0$이 된다. 이때 $x = 0$이면 $1 = 0$이 되므로 $x \neq 0$이고, 따라서 x로 나누어 $p = -(x^2 + 1)/x$를 얻을 수 있다. 그러므로 $p = -2x$이거나, $x \neq 0$이면서 $p = -(x^2 + 1)/x$이다(두 번째 경우에는 $y = 0$이다).

근의 자취. $p = -2x$인 경우. 실수부 방정식에 대입하면 $x^2 - y^2 - 2x^2 + 1 = 0$, 즉

$$x^2 + y^2 = 1.$$

역으로, 단위원(unit circle) 위의 임의의 점 $x + \mathrm{i}y$를 잡고 실수 $p = -2x$로 놓자. 그러면 $(2x + p)y = 0$이고 $x^2 - y^2 + px + 1 = 1 - x^2 - y^2 = 0$이므로 이 점은 근(root)이다. 따라서 단위원 전체가 자취에 포함된다.

$y = 0$, $p = -(x^2 + 1)/x$**인 경우.** $x \neq 0$인 모든 실수 x에 대해 이 p는 실수이고, x는 $x^2 + px + 1 = 0$의 근이다. $0^2 + p \cdot 0 + 1 = 1$이므로 점 $x = 0$은 결코 근이 아니다.

따라서 근의 자취는 원점을 뺀 실수축과 단위원 $|z| = 1$을 합한 것이다. (점 ± 1은 두 부분 모두에 놓인다.)

두 번째 방정식 $pz^2 + z + 1 = 0$

$z = x + \mathrm{i}y$로 놓으면 실수부와 허수부에서

$$p(x^2 - y^2) + x + 1 = 0, \qquad (2px + 1)y = 0.$$

$z = 0$이면 $1 = 0$이 되므로 원점은 결코 근이 아니다.

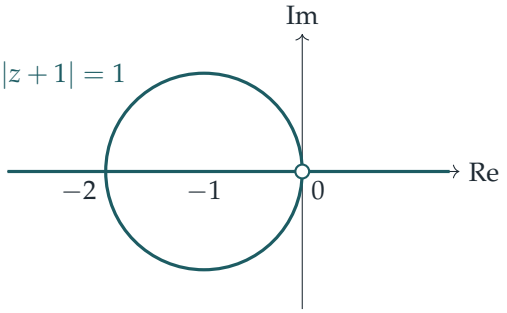
$y = 0$**인 경우.** 그러면 $x \neq 0$이고 $px^2 + x + 1 = 0$이므로 $p = -(x + 1)/x^2$이다. 이 값은 $x \neq 0$인 모든 실수 x에 대해 실수이므로, 원점을 제외한 실수축의 모든 점이 자취에 포함된다. ($x = -1$일 때는 $p = 0$이 되고, 방정식은 일차방정식 $z + 1 = 0$이 되는데, 그 근은 실제로 -1이다.)

$2px + 1 = 0$**인 경우.** 그러면 $x \neq 0$이고 $p = -1/(2x)$이다. 실수부 방정식에 대입하고 $-2x$를 곱하면

$$(x^2 - y^2) - 2x^2 - 2x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + y^2 + 2x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x + 1)^2 + y^2 = 1.$$

역으로, 이 원 위에서 원점이 아닌 임의의 점에 대해 $x \neq 0$이므로 $p = -1/(2x)$는 실수이고, 위 과정을 거꾸로 따라가면 두 방정식이 모두 성립함을 알 수 있다.

따라서 근의 자취는 실수축과 원 $|z + 1| = 1$(중심 -1, 반지름 1)을 합한 것에서, 두 부분 모두에 놓인 원점을 뺀 것이다.



속이 빈 원은 빠진 점 $z = 0$을 나타낸다.

생각해 보기 이 자취는 왜 첫 번째 자취를 안팎으로 뒤집은 것처럼 보일까?

z가 $pz^2 + z + 1 = 0$의 근이면 $w = 1/z$는 $w^2 + w + p = 0$을 만족한다. 사상 $z \mapsto 1/z$는 (0을 뺀) 실수축을 자기 자신으로 보내고, $w^2 + w + p = 0$의 허근들이 놓이는 직선 $\operatorname{Re} w = -\frac{1}{2}$를 원점을 지나는 원 $|z+1| = 1$로 보낸다. 원점이 빠지는 것은 원점이 $w = \infty$에 대응하기 때문이다.

세 번째 방정식 $pz^2 + p^2 z + 2 = 0$

$p = 0$이면 방정식은 $2 = 0$이 되어 근이 없으므로, 이후로는 줄곧 $p \neq 0$이다. 실수부와 허수부에서

$$p(x^2 - y^2) + p^2 x + 2 = 0, \qquad p(2x + p)y = 0,$$

을 얻고, $p \neq 0$이므로 두 번째 식은 $(2x + p)y = 0$이 된다.

$p = -2x$인 경우. $p \neq 0$이므로 $x \neq 0$이다. 대입하면

$$-2x(x^2 - y^2) + 4x^3 + 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x(x^2 + y^2) = -1.$$

역으로, 이 곡선 위의 임의의 점은 $x \neq 0$이므로 $p = -2x$는 0이 아닌 실수이고, 과정을 거꾸로 따라가면 그 점이 근임을 알 수 있다. $x^2 + y^2 > 0$이므로 이 곡선에서는 $x < 0$이다. 곡선을

$$y^2 = -\frac{1}{x} - x^2,$$

로 쓰면 $-1/x \geq x^2$이어야 한다. $x < 0$을 곱하면 부등호 방향이 바뀌어 $-1 \leq x^3$이 되므로 $-1 \leq x < 0$이다. 곡선은 -1을 지나고(이때 $y = 0$), 실수축에 대해 대칭이며, $x \to 0^-$일 때 $y^2 \to \infty$이므로 허수축이 점근선(asymptote)이다. 또한 $x < 0$에서 $\mathrm{d}(y^2)/\mathrm{d}x = x^{-2} - 2x > 0$이므로, x가 -1에서 0으로 갈 때 $|y|$는 꾸준히 증가한다. 극형식(polar form)으로 나타내면 이 곡선은 $r^3 \cos\theta = -1$이다.

$y = 0$인 경우. 이제 실수 x가 자취에 속하는 것은 $xp^2 + x^2 p + 2 = 0$을 만족하는 실수 p가 존재할 때이다. $x = 0$이면 이 식은 $2 = 0$이므로 0은 자취에 속하지 않는다. $x \neq 0$이면 이 식은 p에 대한 이차식(quadratic)이고, 판별식(discriminant)이 음이 아닐 때, 그리고 그때에만 실근을 갖는다.

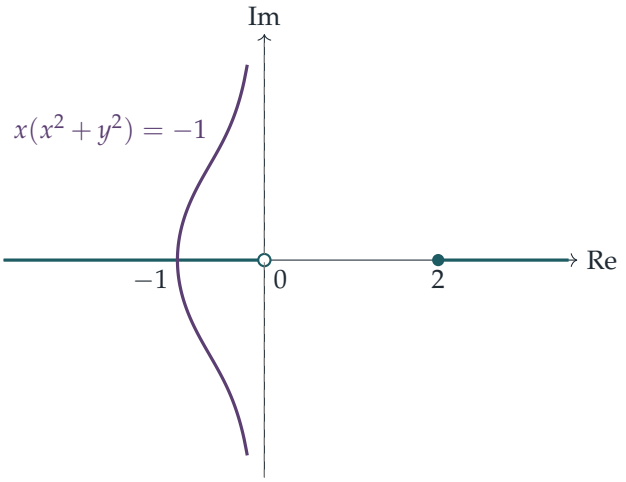
$$x^4 - 8x = x(x^3 - 8) \geq 0.$$

이 부등식은 $x < 0$일 때(두 인수가 모두 음수)나 $x \geq 2$일 때(두 인수가 모두 음이 아님) 성립하고, $0 < x < 2$에서는 성립하지 않는다. 이렇게 구한 실수 p는 자동으로 0이 아니다. $p = 0$이면 $2 = 0$이 되기 때문이다. 예를 들어 $x = 2$이면 $2p^2 + 4p + 2 = 0$이어야 하므로 $p = -1$이고, 실제로 $-z^2 + z + 2 = -(z-2)(z+1)$이다.

생각해 보기 여기서는 왜 x가 아니라 p에 대해 풀까?

우리가 알고 싶은 것은 어떤 점 x에 도달할 수 있는가이므로, x가 주어지고 p가 미지수이다. 방정식은 p에 대한 이차식이고, 실근의 존재는 정확히 x에 대한 판별식 조건이다.

따라서 근의 자취는 음의 실수축, 실수축의 반직선(ray) $x \geq 2$, 그리고 -1에서 출발하여 위아래 양쪽으로 허수축을 향해 뻗어 나가는 곡선 $x(x^2+y^2) = -1$로 이루어진다.



이 곡선은 실수축과 -1에서만 만나고 그곳에서 수직인 접선(tangent)을 가지며, $|y| \to \infty$일 때 허수축에 가까워진다.

검산

- $z^2 + pz + 1 = 0$에서 두 근의 곱은 1이므로, 허근은 $|z|^2 = 1$인 켤레(conjugate) 복소수 $z, \bar{z}$이다. 다시 단위원이 나온다.
- 세 번째 방정식에서 $p = -1$이면 근은 2와 -1로, 각각 반직선의 끝점과 곡선의 꼭짓점이다. $p = 1$로 놓으면 $z^2 + z + 2 = 0$이 되어 근은 $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}\mathrm{i}$이고, $x(x^2+y^2) = -\frac{1}{2} \cdot 2 = -1$로 예상대로이다.
- 수치적으로, 무작위로 고른 10^5개의 p 값에 대해 세 방정식을 모두 풀어 모든 근이 제시된 자취 위에 놓임을 확인하였다. 또한 각 자취의 무작위 점들이 제시된 p로 실제로 얻어짐을 확인하였고, p를 촘촘히 훑어본 결과 세 번째 방정식은 $(0, 2)$에서 실근을 갖지 않았으며 가장 작은 양의 실근은 2.0이었다.

흔한 실수

- 역(converse)을 확인하는 것을 잊는 실수: p를 소거하면 자취를 **포함하는** 곡선을 얻을 뿐이며, 각 점이 실제로 어떤 실수 p에서 얻어지는지 여전히 보여야 한다. 세 번째 방정식에서 $(0, 2)$의 실수 점들은 $y = 0$을 만족하지만 결코 얻어지지 않는다.
- x나 p가 왜 0이 아닌지 밝히지 않고 그것으로 나누는 실수. 빠진 원점은 바로 여기에서 생긴다.
- $p = 0$을 부주의하게 다루는 실수: 두 번째 방정식에서는 $p = 0$이 진짜 근 -1을 주지만, 세 번째 방정식에서는 근을 전혀 주지 않는다.

STEP 너머

근궤적(root locus)은 제어공학(control engineering)의 표준 도구이다. 이득(gain) 매개변수가 변함에 따라 시스템의 극점(pole)들이 곡선을 따라 움직이고, 안정성(stability)은 극점들이 오른쪽 반평면으로 넘어가는지에 달려 있다. 이 문제는 또한 직선과 원을 직선과 원으로 보내는 사상 $z \mapsto 1/z$의 기하학을 암시한다. 이것이 뫼비우스 변환(Möbius transformation) 이론의 출발점이며, Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)에 아름답게 그려져 있다.

풀이

STEP III 2012, 문제 7

순수수학 • 연립 미분방정식

STEP III 2012, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/12-s3-q7

핵심 아이디어

연립된(coupled) 두 1계 방정식(first-order equation)은 변수 하나를 소거(eliminate)하면 하나의 2계 방정식(second-order equation)이 된다. $\dot{y}$에 대한 방정식을 미분한 다음, 첫 번째 방정식 자체를 이용하여 z를 y와 $\dot{y}$로 나타내면 된다. 그 뒤로는 각 소문항에서 상수 A와 B를 정하기만 하면 된다. 소문항 (iii)의 무한합은 두 개의 등비급수(geometric series)이고, 그 결과를 소문항 (ii)와 맞추어 보면 c가 정해진다. 물리적으로 z_2는 단위 시간마다 같은 양을 한 번씩 주사할 때 도달하는 정상 상태(steady state)이다.

풀이

일반해

$\dot{y} = -2y + 2z$를 미분한 다음 $\dot{z}$ 자리에 두 번째 방정식을 대입하면

$$\ddot{y} = -2\dot{y} + 2\dot{z} = -2\dot{y} + 2(-\dot{y} - 3z) = -4\dot{y} - 6z.$$

첫 번째 방정식으로부터 z를 y로 나타내면

$$z = y + \tfrac{1}{2}\dot{y}, \qquad \text{따라서} \qquad 6z = 6y + 3\dot{y}.$$

이를 대입하면

$$\ddot{y} + 7\dot{y} + 6y = 0.$$

특성방정식(auxiliary equation) $m^2 + 7m + 6 = (m+1)(m+6) = 0$의 근은 $m = -1$과 $m = -6$이므로, 임의의 상수 A와 B에 대하여

$$y = Ae^{-t} + Be^{-6t}$$

이다. 그러면 z는 $z = y + \frac{1}{2}\dot{y}$로부터

$$z = Ae^{-t}\left(1 - \tfrac{1}{2}\right) + Be^{-6t}(1 - 3) = \tfrac{1}{2}Ae^{-t} - 2Be^{-6t},$$

가 되어, 구하려던 결과를 얻는다.

생각해 보기 y에 대한 방정식을 얻을 때는 두 방정식을 모두 썼지만, z를 구할 때는 첫 번째 방정식만 썼다. 이렇게 구한 쌍이 정말로 두 번째 방정식도 만족하는가?

만족한다. $z = y + \frac{1}{2}\dot{y}$이면 $\dot{z} = \dot{y} + \frac{1}{2}\ddot{y} = \dot{y} + \frac{1}{2}(-7\dot{y} - 6y) = -\frac{5}{2}\dot{y} - 3y$이다. 또한 $-\dot{y} - 3z = -\dot{y} - 3y - \frac{3}{2}\dot{y} = -\frac{5}{2}\dot{y} - 3y$이므로 둘은 같다. 따라서 연립방정식의 모든 해는 이 꼴이고, 이 꼴의 모든 쌍은 해이다.

소문항 (i)

$t = 0$에서 $y(0) = A + B$이고 $z(0) = \frac{1}{2}A - 2B$이다. 주어진 조건으로부터

$$\tfrac{1}{2}A - 2B = 0, \qquad A + B = 5,$$

이므로 $A = 4B$이고, 따라서 $5B = 5$이다. 그러므로 $B = 1$, $A = 4$이고

$$y = 4e^{-t} + e^{-6t}, \qquad z_1(t) = 2e^{-t} - 2e^{-6t}.$$

약물은 혈액 속에서 출발하며, 뇌 속의 양은 0에서부터 증가하다가 흡수되면서 감소한다.

소문항 (ii)

$a = \frac{1}{2}A$, $b = 2B$로 두면 $z = ae^{-t} - be^{-6t}$이다. 조건은

$$a - b = c, \qquad ae^{-1} - be^{-6} = c.$$

첫 번째 식에서 두 번째 식을 빼면 $a(1 - e^{-1}) = b(1 - e^{-6})$이다. 이 공통의 값을 k라 하면

$$a = \frac{k}{1 - e^{-1}}, \qquad b = \frac{k}{1 - e^{-6}}, \qquad \text{그리고} \qquad c = a - b = kC,$$

이다. 여기서

$$C = \frac{1}{1 - e^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-6}}.$$

$e^{-1} > e^{-6}$이므로 $1 - e^{-1} < 1 - e^{-6}$이고, 따라서 $C > 0$이다. 특히 $C \neq 0$이므로 이것으로 나눌 수 있어서 $k = c/C$이다. (같은 말로, 두 일차방정식의 행렬식(determinant)이 $e^{-1} - e^{-6} \neq 0$이므로 해는 유일하다.) 그러므로

$$z_2(t) = \frac{c}{C}\left(\frac{e^{-t}}{1 - e^{-1}} - \frac{e^{-6t}}{1 - e^{-6}}\right),$$

$$y_2(t) = \frac{c}{C}\left(\frac{2e^{-t}}{1 - e^{-1}} + \frac{e^{-6t}}{2(1 - e^{-6})}\right),$$

이다. 여기서 y_2는 $A = 2a$와 $B = \frac{1}{2}b$로부터 얻는다.

소문항 (iii)

$m = -n$으로 두면 m은 $0, 1, 2, \ldots$를 지나고 $t - n = t + m$이다. 소문항 (i)을 이용하면

$$\sum_{n=-\infty}^{0} z_1(t-n) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(2\mathrm{e}^{-t}(\mathrm{e}^{-1})^m - 2\mathrm{e}^{-6t}(\mathrm{e}^{-6})^m\right).$$

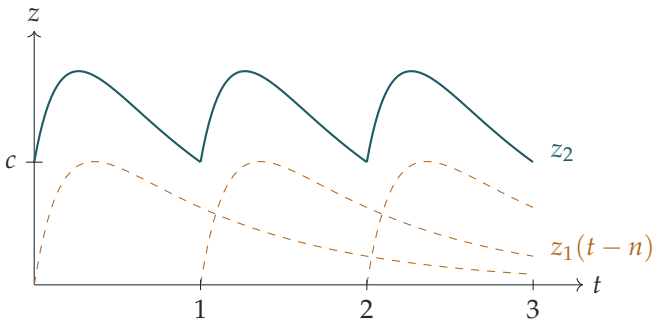
두 부분은 모두 공비가 e^{-1}과 e^{-6}인 등비급수이고, 이 공비들은 0과 1 사이에 엄격히 놓이므로 각각 수렴(converge)한다. 따라서 따로따로 합을 구할 수 있다.

$$\sum_{n=-\infty}^{0} z_1(t-n) = \frac{2\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-1}} - \frac{2\mathrm{e}^{-6t}}{1-\mathrm{e}^{-6}}.$$

이것은 $z_2(t)$의 괄호 안의 식에 정확히 2를 곱한 것이다. 따라서 $0 \le t \le 1$에서 항등식이 성립할 필요충분조건은 $c/C = 2$, 즉

$$c = 2C = \frac{2}{1-\mathrm{e}^{-1}} - \frac{2}{1-\mathrm{e}^{-6}} \approx 1.159.$$

이다. (다른 c에 대해서는 양변의 차가 0이 아닌 같은 함수의 0이 아닌 상수배가 되므로, 이 값이 유일하다.)



그림이 그 의미를 보여 준다. 시각 n에 혈액에 주사한 양 5의 약물은 뇌에서 곡선 $z_1(t-n)$(점선)을 만든다. 먼 과거부터 매 정수 시각마다 약물을 주사하면, 뇌 속의 양은 이 모든 반응의 합이다. 그 합은 단위 시간마다 반복되며(실선), $[0, 1]$에서는 이 c 값에 대한 z_2와 같다.

검산

- 소문항 (i)에서 $z_1(0) = 2 - 2 = 0$이고 $y(0) = 4 + 1 = 5$이다.
- 소문항 (iii)에서 $z_2(0)$과 $z_2(1)$은 모두 c와 같아야 한다. 합에서 $t = 1$일 때의 급수는 $t = 0$일 때의 급수에서 첫째 항을 뺀 것이고, 그 항은 $z_1(0) = 0$이다. 이로써 아무 계산 없이 $z(0) = z(1)$이 확인된다.

- $c = 2C$일 때 $y_2(0) - y_2(1) = 4 + 1 = 5$이다. 즉 각 주기 동안 혈액은 정확히 한 번 주사한 양만큼을 잃고, 다음 주사가 그만큼을 채운다.
- 수치로는 $c \approx 1.15898$이다. $t = 0.37$에서 $z_1(t + m)$을 200개 항까지 더하면 $1.967693\ldots$이 되어, $z_2(0.37)$과 소수점 아래 12자리까지 일치한다.

흔한 실수

- z가 $z = y + \frac{1}{2}\dot{y}$를 통해 y로 정해진다는 것을 잊고, z에 대한 방정식을 따로 풀어 새로운 독립 상수를 도입하는 실수.
- 소문항 (iii)에서 평행이동의 방향을 잘못 잡는 실수. $n \leq 0$이면 $t - n \geq t$이므로 과거에 주사한 양만 기여한다.

STEP 너머

이것은 선형 구획 모델(linear compartment model)로, 2×2 행렬 M을 써서 $\dot{\mathbf{x}} = M\mathbf{x}$로 쓸 수 있다. 감소율 1과 6은 M의 고윳값(eigenvalue)에 음의 부호를 붙인 것이며, 이것이 대학 1학년 과정에서 만나는 선형 연립방정식에 대한 행렬 지수(matrix exponential)의 관점이다. 소문항 (iii)은 중첩(superposition)의 간단한 예이다. 반복된 충격에 대한 반응은 하나의 충격 응답(impulse response)을 평행이동한 것들의 합이다. 이 아이디어는 그린 함수(Green's function)와 합성곱(convolution)으로 이어진다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)가 선형 연립방정식과 충격 응답을 다룬다.

풀이

STEP III 2012, 문제 8

순수수학 • 피보나치 망원급수

> **STEP III 2012, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/12-s3-q8

핵심 아이디어

(ii)의 식은 n이 하나 커질 때마다 부호가 바뀌며, 소문항 (i)은 바로 그런 규칙성을 찾아보라는 힌트이다. 홀수 n에 대한 값을 알고 나면 (iii)의 arctan 항등식(identity)은 $\tan(A-B)$ 공식을 다른 모습으로 쓴 것에 지나지 않는다. 이 항등식을 정리하면 급수(series)의 각 항이 두 arctan의 차로 표현되므로, 합이 연쇄적으로 소거된다(telescoping).

풀이

처음 몇 항은 다음과 같다.

$$F_0, F_1, \ldots, F_8 = 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21.$$

소문항 (i)

이 값들을 이용하면

$$F_0F_3 - F_1F_2 = 0\cdot 2 - 1\cdot 1 = -1, \qquad F_2F_5 - F_3F_4 = 1\cdot 5 - 2\cdot 3 = -1,$$

이므로 요구한 대로 두 식의 값은 같다.

소문항 (ii)

$G_n = F_nF_{n+3} - F_{n+1}F_{n+2}$라 하자. 소문항 (i)은 $G_0 = G_2$임을 말해 주므로, G_{n+1}과 G_n을 비교해 볼 만하다. 점화식(recurrence)을 $F_{n+4} = F_{n+3} + F_{n+2}$의 꼴로 쓰면

$$\begin{aligned} G_{n+1} &= F_{n+1}F_{n+4} - F_{n+2}F_{n+3} \\ &= F_{n+1}F_{n+3} + F_{n+1}F_{n+2} - F_{n+2}F_{n+3} \\ &= F_{n+1}F_{n+2} - F_{n+3}\left(F_{n+2} - F_{n+1}\right) \\ &= F_{n+1}F_{n+2} - F_{n+3}F_n \\ &= -G_n, \end{aligned}$$

이다. 여기서 넷째 줄에서는 점화식 $F_{n+2} - F_{n+1} = F_n$을 다시 사용하였다.

따라서 G_n은 한 단계마다 부호가 바뀐다. 소문항 (i)에서 $G_0 = -1$이므로, (n에 대한 수학적 귀납법(induction)에 의해) $G_n = (-1)^{n+1}$이다. 두 경우를 나누어 쓰면

$$F_nF_{n+3} - F_{n+1}F_{n+2} = \begin{cases} -1 & n\text{이 짝수일 때,} \\ 1 & n\text{이 홀수일 때.} \end{cases}$$

이다. 예를 들어 $n = 1$이면 $1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 1$이고, $n = 4$이면 $3 \cdot 13 - 5 \cdot 8 = -1$이다.

소문항 (iii)

$r \geq 1$을 고정하고

$$\alpha = \arctan\frac{1}{F_{2r}}, \qquad \beta = \arctan\frac{1}{F_{2r+1}}.$$

이라 하자. $k \geq 1$인 모든 F_k는 양의 정수이므로 이들은 잘 정의된다. 덧셈정리(compound-angle formula)에 의해

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\dfrac{1}{F_{2r}} - \dfrac{1}{F_{2r+1}}}{1 + \dfrac{1}{F_{2r}F_{2r+1}}} = \frac{F_{2r+1} - F_{2r}}{F_{2r}F_{2r+1} + 1} = \frac{F_{2r-1}}{F_{2r}F_{2r+1} + 1},$$

이다. 여기서 $F_{2r+1} - F_{2r} = F_{2r-1}$을 사용하였다. 이제 **홀수** 값 $n = 2r - 1$에 소문항 (ii)를 적용하면

$$F_{2r-1}F_{2r+2} - F_{2r}F_{2r+1} = 1, \qquad \text{이므로} \qquad F_{2r}F_{2r+1} + 1 = F_{2r-1}F_{2r+2}.$$

이다. $F_{2r-1} \geq 1$이므로 이 값은 0이 아니어서 약분할 수 있다.

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{F_{2r-1}}{F_{2r-1}F_{2r+2}} = \frac{1}{F_{2r+2}}.$$

생각해 보기 탄젠트 값이 같다고 해서 항상 각이 같은 것은 아니다. 그렇다면 왜 $\alpha - \beta = \arctan(1/F_{2r+2})$라고 결론지을 수 있는가?

tan은 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$에서 일대일(one-to-one)이므로, 두 각이 모두 이 구간에 속함을 확인하면 충분하다. $1 \le F_{2r} \le F_{2r+1}$이므로 $0 < \beta \le \alpha \le \frac{\pi}{4}$이고, 따라서 $0 \le \alpha - \beta < \frac{\pi}{4}$이다. 또한 $\arctan(1/F_{2r+2})$는 정의에 의해 $(0, \frac{\pi}{2})$에 속한다. 그러므로

$$\arctan\frac{1}{F_{2r}} = \arctan\frac{1}{F_{2r+1}} + \arctan\frac{1}{F_{2r+2}} \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots),$$

이고, 이것이 증명해야 할 항등식이다.

합. 항등식을 정리하면

$$\arctan\frac{1}{F_{2r+1}} = \arctan\frac{1}{F_{2r}} - \arctan\frac{1}{F_{2r+2}},$$

이므로 부분합(partial sum)이 연쇄적으로 소거된다.

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{N} \arctan\frac{1}{F_{2r+1}} &= \left(\arctan\frac{1}{F_2} - \arctan\frac{1}{F_4}\right) + \left(\arctan\frac{1}{F_4} - \arctan\frac{1}{F_6}\right) + \cdots \\ &\quad + \left(\arctan\frac{1}{F_{2N}} - \arctan\frac{1}{F_{2N+2}}\right) \\ &= \arctan\frac{1}{F_2} - \arctan\frac{1}{F_{2N+2}} = \frac{\pi}{4} - \arctan\frac{1}{F_{2N+2}},\end{aligned}$$

여기서 $F_2 = 1$을 사용하였다. $n \ge 2$이면 $F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \ge F_n + 1$이므로 $F_n \to \infty$이다. 따라서 $1/F_{2N+2} \to 0$이고, arctan은 연속(continuous)이며 $\arctan 0 = 0$이므로, $N \to \infty$로 보내면

$$\sum_{r=1}^{\infty} \arctan\frac{1}{F_{2r+1}} = \frac{\pi}{4}.$$

을 얻는다.

검산

- $r = 1$: 항등식은 $\arctan 1 = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$을 뜻한다. 우변의 tan 값이 $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3})/(1 - \frac{1}{6}) = 1$이므로, 이것은 잘 알려진 $\frac{\pi}{4}$ 항등식이다.
- 처음 세 항의 합은 $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{13} \approx 0.4636 + 0.1974 + 0.0768 = 0.7378$이고, 이는 $\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{1}{21} \approx 0.7378$과 일치한다.
- 수치적으로 급수의 89개 항을 더하면 $0.785398163\ldots$이 되어, 기계 정밀도 범위에서 $\frac{\pi}{4}$와 일치한다. 또한 소문항 (ii)의 공식은 $n < 150$인 모든 n에 대하여 정확히 성립한다.

흔한 실수

- 소문항 (iii)에서 (ii)의 짝수인 경우를 사용하는 것. 그곳의 첨자는 $2r-1$, $2r$, $2r+1$, $2r+2$이므로 $n=2r-1$은 홀수이고, 값은 $+1$이다.
- 두 각이 모두 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$에 속하는지 확인하지 않고 탄젠트 값이 같다는 것에서 바로 각이 같다고 결론짓는 것.
- 소거된 합의 첫 항을 잘못 쓰는 것: 첫 항은 $\arctan(1/F_1)$이 아니라 $\arctan(1/F_2)=\frac{\pi}{4}$이다.

STEP 너머

소문항 (ii)는 카시니(Cassini) 항등식 $F_{n-1}F_{n+1}-F_n^2=(-1)^n$의 사촌 격이다. 두 항등식 모두 행렬(matrix) $\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$을 통해 이해하는 것이 가장 좋다. 이 행렬의 n제곱은 피보나치(Fibonacci) 수들을 성분으로 가지므로, 행렬식(determinant)을 취하면 곧바로 카시니 항등식을 얻는다. 망원급수(telescoping series)와, 부분합에서 극한으로 넘어갈 때 필요한 세심함은 대학 첫 해석학(analysis) 강의의 단골 주제이다. 이에 대해서는 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)가 읽기 좋으며, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(STEP 대비 문제집)에는 점화식을 다루는 STEP 형식의 연습 문제가 더 실려 있다.

풀이

STEP III 2012, 문제 9

역학 • 회전하는 도르래의 역학

STEP III 2012, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

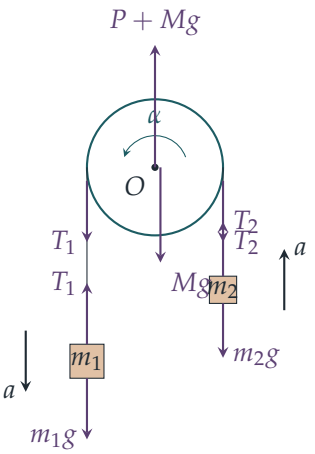
step.maths.org/questions/12-s3-q9

핵심 아이디어

축(axle)에 걸리는 힘을 측정한 값이 실마리이다. 도르래(pulley)의 질량중심(centre of mass)은 움직이지 않으므로, 축은 도르래의 무게를 떠받치는 동시에 두 줄의 장력(tension)과도 균형을 이루어야 한다. 따라서 P는 두 장력의 합이 되고, 이로부터 입자(particle)의 가속도(acceleration)가 나온다. 가속도를 알면 도르래의 회전 운동 방정식에서 관성 모멘트(moment of inertia)를 구할 수 있다. 마찰 짝힘(friction couple)은 이 방정식 하나만 바꿀 뿐 다른 것은 바꾸지 않는다.

풀이

모형. 입자는 질점(point mass)이고 줄은 가볍고 늘어나지 않는다(inextensible). 줄은 도르래 위에서 미끄러지지 않으므로 줄의 속력은 원판 가장자리의 속력과 같다. 계가 정지 상태에서 놓였다고 보면, 더 무거운 입자 m_1이 내려간다. m_1의 아래 방향 가속도를 a라 하면, 이는 m_2의 위 방향 가속도이기도 하다. 그러면 도르래의 각가속도(angular acceleration)는 $\alpha = a/r$이다. m_1 쪽 줄의 장력을 T_1, m_2 쪽 줄의 장력을 T_2라 한다(도르래에 관성이 있으므로 두 값은 다르다). 축에 대한 관성 모멘트를 I라 한다.



각 입자에 뉴턴의 운동 제2법칙(Newton's second law)을 적용하면

$$m_1g - T_1 = m_1a, \qquad T_2 - m_2g = m_2a,$$

이므로

$$T_1 = m_1(g - a), \qquad T_2 = m_2(g + a).$$

축에 걸리는 힘. 도르래의 질량중심은 고정된 점 O에 있으므로, 도르래에 작용하는 알짜힘은 0이다. 도르래에 작용하는 힘은 무게 Mg, 두 장력(양쪽 모두 줄이 연직으로 늘어져 있으므로 둘 다 아래로 당긴다), 그리고 축이 주는 힘이다. 마찰 짝힘(소문항 (ii)에서 추가한다)은 합력이 없으므로 여기에는 들어가지 않는다. 따라서 축에 걸리는 연직 방향의 힘은 $Mg + T_1 + T_2$이고, 이를 측정값과 비교하면

$$P = T_1 + T_2 = (m_1 + m_2)g - (m_1 - m_2)a,$$

이므로

$$a = \frac{(m_1 + m_2)g - P}{m_1 - m_2}. \tag{1}$$

이 식은 측정값과 입자의 운동 방정식만 사용하므로 두 소문항 모두에서 성립한다.

소문항 (i)

축에 마찰이 없으면 O에 대한 모멘트를 갖는 것은 장력뿐이다. 축에 대한 모멘트를 구하면

$$(T_1 - T_2)r = I\alpha = \frac{Ia}{r}, \qquad \text{따라서} \qquad I = \frac{(T_1 - T_2)r^2}{a}.$$

그런데 $T_1 - T_2 = (m_1 - m_2)g - (m_1 + m_2)a$이므로

$$I = r^2\left(\frac{(m_1 - m_2)g}{a} - (m_1 + m_2)\right).$$

a에 (1)을 대입하면

$$\begin{aligned} I &= r^2\left(\frac{(m_1-m_2)^2g}{(m_1+m_2)g-P}-(m_1+m_2)\right)\\ &= r^2\,\frac{(m_1-m_2)^2g-(m_1+m_2)^2g+(m_1+m_2)P}{(m_1+m_2)g-P}\\ &= \frac{\big((m_1+m_2)P-4m_1m_2g\big)r^2}{(m_1+m_2)g-P}, \end{aligned}$$

이다. 여기서 $(m_1+m_2)^2-(m_1-m_2)^2=4m_1m_2$를 이용하였다. 이것이 요구된 식 $(*)$이다.

소문항 (ii)

새로 계산한 값을 I'이라 하자. 마찰 짝힘 C는 회전을 방해하고, 회전은 T_1이 일으키는 방향이므로 모멘트 방정식은

$$(T_1-T_2)r-C=\frac{I'a}{r}.$$

이 된다. 같은 측정값 P를 사용하고 축에 걸리는 힘에 대한 논증에는 C가 관여하지 않으므로, 가속도는 여전히 (1)로 주어진다. 따라서 T_1-T_2와 a는 소문항 (i)과 정확히 같고,

$$I'=\frac{(T_1-T_2)r^2}{a}-\frac{Cr}{a}=(*)-\frac{Cr}{a}.$$

? **생각해 보기** a의 부호는 어떻게 알 수 있을까?

계는 정지 상태에서 출발하고 도르래는 m_1이 내려가는 방향으로 돌므로, m_1의 아래 방향 가속도는 양수여야 한다. (a가 0이거나 음수라면 m_1은 결코 아래로 움직이기 시작하지 않는다.) 따라서 $a>0$이다. $C>0$이고 $r>0$이므로 $Cr/a>0$이고, **마찰을 고려하여 계산한 값은 $(*)$보다 작다**. 이는 이치에 맞는다. 장력이 만드는 알짜 토크(torque)의 일부가 마찰을 이기는 데 쓰이므로, 같은 가속도를 관측했을 때 이를 설명하는 데 필요한 관성은 더 작다.

C의 상계. 모멘트 방정식에 장력을 대입하면

$$\big((m_1-m_2)g-(m_1+m_2)a\big)r-C=\frac{I'a}{r},$$

이고, 이를 정리하면

$$(m_1-m_2)rg-C=a\left(\frac{I'}{r}+(m_1+m_2)r\right).$$

우변에서 $a>0$, $I'\geq 0$(관성 모멘트는 음수일 수 없다), $(m_1+m_2)r>0$이므로 우변은 엄격히 양수이다. 따라서

$$C<(m_1-m_2)rg,$$

이고, 요구된 결과가 증명된다. 말로 하면, 마찰 짝힘은 두 무게의 차이가 만드는 짝힘 $(m_1-m_2)gr$보다 작아야 한다. 그렇지 않으면 계는 아예 움직이기 시작하지 않는다.

검산

- **가벼운 도르래**: $I = 0$이고 $C = 0$이면 $a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2}$(익숙한 앳우드(Atwood) 장치의 결과)이고 $P = \frac{4m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}$이다. 이때 $(*)$의 분자는 마땅히 0이 된다.
- **정지한 도르래**: $a \to 0$이면 $P \to (m_1 + m_2)g$이고, $(*)$의 분모는 0으로 가며 $(*)$는 발산한다. 무한히 무거운 도르래는 가속되지 않는다.
- **수치 검산**: $g = 9.8$, $m_1 = 3$, $m_2 = 1$, $r = 0.5$, $I = 0.7$, $C = 2$(SI 단위)로 두면, 실제 운동에서 $a \approx 2.29\ \mathrm{m\,s^{-2}}$이고 $P \approx 34.6$ N이다. 식 $(*)$는 $I \approx 1.14$를 주는데, 이는 정확히 $Cr/a \approx 0.44$만큼 크며, 마찰 모형은 0.7을 되돌려 준다. 여기서 $C = 2 < (m_1 - m_2)rg = 9.8$이다. 같은 방법으로 무작위 사례 10^4개를 검사하였다.

흔한 실수

- 양쪽의 장력을 같다고 놓는 것. 이는 가볍거나 마찰이 없는 도르래에서만 성립하며, 여기서 그렇게 하면 문제에서 I가 사라져 버린다.
- 축에 걸리는 힘에서 도르래 자신의 무게를 빠뜨리는 것. 측정값을 $P + Mg$로 쓴 이유가 바로 이것이다.
- 마찰 짝힘이 축에 걸리는 힘을 바꾼다고 생각하는 것. 짝힘은 합력이 0이므로 두 소문항 모두에서 $P = T_1 + T_2$이다.

STEP 너머

이것은 **측정값으로부터 숨은 매개변수를 추론하는 것**의 작은 예이다. 답은 가정한 모형에 따라 달라지며, 마찰을 빠뜨리면 추정값이 예측 가능한 방향으로 치우친다. 대학 1학년 역학에서는 강체를 선운동량과 각운동량의 모든 도구를 갖추어 다루며, 일반적인 축에 대해 회전하는 물체의 관성 모멘트는 텐서(tensor)가 된다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 고정축 회전과 질량이 있는 도르래를 가진 앳우드 장치를 깊이 있게 다룬다.

풀이

STEP III 2012, 문제 10

역학 • 원운동

STEP III 2012, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

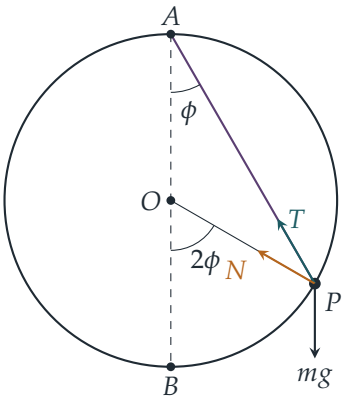
step.maths.org/questions/12-s3-q10

핵심 아이디어

모든 것은 원형 고리(hoop)의 중심, 원형 고리의 꼭대기, 작은 고리(ring)가 이루는 이등변 삼각형(isosceles triangle)의 기하로 귀결된다. 줄의 길이가 $2a\cos\phi$이고 작은 고리를 지나는 반지름이 연직 아래 방향과 각 2ϕ를 이룬다는 것만 알아차리면, 이 문제는 에너지 방정식 하나(λ와 속력을 구하는 데)와 반지름 방향 운동방정식(radial equation of motion) 하나(수직항력을 구하는 데)로 풀린다.

풀이

작은 고리를 매끄러운 원 위를 움직이는 질점(particle)으로, 줄을 훅의 법칙(Hooke's law)을 따르는 가벼운 탄성 줄로 모형화한다. 원형 고리의 중심을 O, 가장 높은 점을 A, 가장 낮은 점을 B, 작은 고리를 P라 하고, $c = \cos\phi$로 둔다.



기하

삼각형 OAP에서 $OA = OP = a$이므로 이 삼각형은 이등변삼각형이고, A와 P에서의 각은 모두 ϕ이다. 따라서

$$AP = 2a\cos\phi, \qquad \angle AOP = \pi - 2\phi, \qquad \angle BOP = 2\phi.$$

그러므로 P는 O보다 $a\cos 2\phi$만큼 아래에 있고, B보다는 $a(1-\cos 2\phi) = 2a\sin^2\phi$만큼 위에 있다. 줄이 팽팽할 때 줄이 늘어난 길이(extension)는 $x = 2a\cos\phi - a = a(2c-1)$이고, 줄은 $2c - 1 = 0$일 때, 즉 $\phi = \frac{\pi}{3}$에서 느슨해진다.

탄성 계수

원형 고리는 매끄럽고 수직항력(reaction)은 운동 방향에 수직이므로 역학적 에너지가 보존된다(conservation of mechanical energy). $B(\phi = 0)$에서 작은 고리는 정지해 있고 늘어난 길이는 a이므로, 탄성 에너지는 $\lambda a^2/(2a) = \frac{1}{2}\lambda a$이다. $\phi = \frac{\pi}{3}$에서 작은 고리는 다시 정지하고, 줄은 막 느슨해졌으며(탄성 에너지가 없다), 높이는 $2a\sin^2\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}a$만큼 올라갔다. 따라서

$$\tfrac{1}{2}\lambda a = mg\cdot\tfrac{3}{2}a \quad\Longrightarrow\quad \lambda = 3mg.$$

속력

줄이 팽팽한 상태에서 일반적인 각 ϕ에 대해, B에서부터의 에너지 보존으로부터

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}mv^2 &= \tfrac{1}{2}\lambda a - \frac{\lambda a^2(2c-1)^2}{2a} - 2mga\sin^2\phi \\ &= \tfrac{3}{2}mga\left[1-(2c-1)^2\right] - 2mga(1-c^2) \\ &= \tfrac{3}{2}mga(4c-4c^2) - 2mga + 2mgac^2 \\ &= mga(-4c^2+6c-2),\end{aligned}$$

을 얻으므로

$$\frac{mv^2}{a} = mg(-8c^2+12c-4) = -4mg(2c-1)(c-1).$$

이 값은 $c = 1$과 $c = \frac{1}{2}$에서 0이 되고 그 사이에서는 양수이다. 이는 작은 고리가 $\phi = -\frac{\pi}{3}$과 $\phi = \frac{\pi}{3}$ 사이를 오가는 것과 들어맞는다. 정지한 뒤 작은 고리는 B를 지나 반대쪽의 대칭인 점까지 미끄러져 되돌아가고, 이를 반복한다. 운동하는 내내 $\frac{1}{2} \le c \le 1$이고 줄은 팽팽하며(양 끝점에서만 막 느슨해진다), 장력(tension)은

$$T = \frac{\lambda x}{a} = 3mg(2c-1).$$

수직항력

그림처럼 수직항력의 O 방향 성분을 N이라 하자(음수로 나올 수도 있다). 중심을 향하는 PO 방향으로 힘을 분해한다.

- 장력은 PA를 따라 작용하고, PA는 PO와 각 ϕ(이등변삼각형의 밑각)를 이루므로, O 방향으로 $T\cos\phi$를 준다.
- OP는 연직 아래 방향과 각 2ϕ를 이루므로, 무게는 O에서 **멀어지는** 방향으로 성분 $mg\cos 2\phi$를 가진다.

> **생각해 보기** 여기서 왜 무게의 성분이 안쪽이 아니라 바깥쪽을 향하는가?

$\phi < \frac{\pi}{4}$이면 작은 고리는 O보다 아래에 있고 중력은 작은 고리를 중심에서 멀어지게 당긴다. P가 O의 높이를 지날 때 $\cos 2\phi$의 부호가 바뀌므로, (O 방향의) 하나의 식 $-mg\cos 2\phi$로 두 경우를 모두 다룰 수 있다.

중심 방향으로 뉴턴(Newton)의 제2법칙을 쓰면

$$N + T\cos\phi - mg\cos 2\phi = \frac{mv^2}{a}.$$

T, mv^2/a와 $\cos 2\phi = 2c^2 - 1$을 대입하면

$$\begin{aligned} N &= mg(-8c^2 + 12c - 4) - 3mg(2c-1)c + mg(2c^2 - 1) \\ &= mg(-8c^2 + 12c - 4 - 6c^2 + 3c + 2c^2 - 1) \\ &= -mg(12c^2 - 15c + 5). \end{aligned}$$

따라서 수직항력의 크기는

$$R = (12\cos^2\phi - 15\cos\phi + 5)\, mg,$$

이고, 이는 괄호 안의 값이 결코 음수가 되지 않는다면 요구된 결과이다. 이제 이를 보인다. (음의 부호는 원형 고리가 운동 내내 작은 고리를 O에서 멀어지는 **바깥쪽으로** 민다는 것을 알려 준다.)

R는 결코 0이 되지 않는다

이차식 $12c^2 - 15c + 5$의 판별식(discriminant)은 $15^2 - 4\cdot 12\cdot 5 = 225 - 240 = -15 < 0$이고 최고차항의 계수가 양수이므로, 모든 실수 c에 대해 이 식은 순양수이다. 완전제곱식으로 고치면(completing the square)

$$12c^2 - 15c + 5 = 12\left(c - \tfrac{5}{8}\right)^2 + \tfrac{5}{16} \geq \tfrac{5}{16},$$

이므로 운동 내내 $R \geq \frac{5}{16}mg > 0$이고, 최솟값은 $\cos\phi = \frac{5}{8}$일 때이다(이 값은 $[\frac{1}{2}, 1]$에 속하므로 실제로 도달된다).

검산

- $B(c=1)$에서: 작은 고리는 정지해 있고, 위쪽으로 $T=3mg$, 아래쪽으로 무게 mg가 작용하므로, 원형 고리는 아래로 $2mg$만큼 밀어야 한다. 공식은 $(12-15+5)mg=2mg$를 준다.
- 줄이 느슨해지는 점$(c=\frac{1}{2})$에서: 장력도 속력도 없고, P는 O보다 $\frac{a}{2}$만큼 위에 있으므로, 반지름 방향 수직항력은 안쪽을 향하는 무게의 성분 $mg\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}mg$와 평형을 이룬다. 공식은 $(3-7.5+5)mg=\frac{1}{2}mg$를 준다.
- 운동방정식을 수치적으로 적분하였다(B에서 살짝 벗어난 곳에서 출발하는 RK4). 작은 고리는 B에서 각 $2.094\approx\frac{2\pi}{3}$인 곳에서 멈추고, 계산된 수직항력은 공식과 10^{-7} 이내로 일치하며, 그 최솟값은 $0.3125\,mg=\frac{5}{16}mg$이다.

흔한 실수

- 작은 고리의 각 위치를 2ϕ가 아니라 ϕ로 잡는 실수. 원주각은 중심각의 절반이다.
- 훅의 법칙이나 탄성 에너지에서 늘어난 길이 $2a\cos\phi-a$ 대신 줄의 전체 길이 $2a\cos\phi$를 쓰는 실수.
- 수직항력이 안쪽을 향한다고 가정한 뒤 음수 답이 나와 당황하는 것. 문제는 그 크기만을 묻는다.

STEP 너머

작은 고리는 자유도(degree of freedom)가 하나이며, 이런 계를 다루는 가장 깔끔한 방법은 하나의 좌표로 나타낸 에너지(또는 라그랑지안(Lagrangian)) 정식화를 쓰고, R 같은 구속력(constraint force)은 나중에 뉴턴의 법칙으로 되찾는 것이다. 운동방정식은 에너지에서, 구속력은 힘의 분해에서 얻는 이러한 역할 분담은 대학 1학년 역학 강의에서 철사 위의 구슬을 다루는 방식 그대로이다. Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 관점에서 구속 조건이 있는 원운동과 에너지 방법을 다룬다.

풀이

STEP III 2012, 문제 11

역학 • 접힌 채 떨어지는 밧줄

> **STEP III 2012, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/12-s3-q11

핵심 아이디어

모든 것은 고리의 기하학적 구조에서 나온다. 입자가 x만큼 떨어졌을 때 정지해 있는 쪽과 움직이는 쪽의 길이를 알면, 각 직선 부분의 질량중심(centre of mass)을 이용하여 잃은 위치 에너지(potential energy)를 적을 수 있고, 얻은 운동 에너지(kinetic energy)도 적을 수 있다(속력을 가지는 것은 입자와 움직이는 쪽뿐이다). 그러면 에너지 보존(energy conservation)으로부터 v^2를 x의 함수로 얻고, $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$이므로 가속도(acceleration)는 $\frac{1}{2}v^2$를 x에 대하여 미분하여 얻는다.

풀이

모형과 기하학적 구조

밧줄은 단위 길이당 질량(mass per unit length)이

$$\rho = \frac{2M}{2L} = \frac{M}{L},$$

인 균일하고 늘어나지 않으며(inextensible) 완전히 유연한 선으로, 입자는 질점(point mass)으로 다루고, 고리 아래쪽의 굽은 부분의 크기는 무시할 수 있다고 본다. 깊이는 P에서 아래쪽으로 잰다.

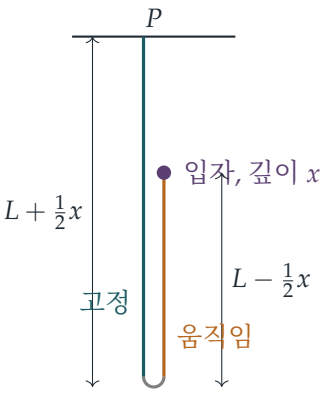
입자가 거리 x만큼 떨어졌을 때, 밧줄은 고리의 맨 아래(깊이를 d라 하자)에서 이어진 두 개의 연직 부분으로 이루어진다.

- **고정된** 부분: P에서 맨 아래까지이며, 정지해 있고 길이는 d이다.
- **움직이는** 부분: 입자(깊이 x)에서 맨 아래까지이며, 길이는 $d - x$이다.

전체 길이가 $2L$이므로 $d + (d - x) = 2L$이고, 따라서

$$d = L + \tfrac{1}{2}x, \qquad \text{움직이는 부분의 길이} = L - \tfrac{1}{2}x.$$

이다. (처음에는 $x = 0$이고 두 부분의 길이는 모두 L이다.)



잃은 위치 에너지

각 직선 부분은 균일하므로 질량중심은 그 중점에 있다. 깊이가 h인 질량 μ의 위치 에너지는 $-\mu g h$이다. 계 전체에 대한 질량 $\times$ 깊이의 합을 $D(x)$라 쓰면

$$\begin{aligned} D(x) &= mx + \rho d \cdot \frac{d}{2} + \rho(d - x) \cdot \frac{x + d}{2} \\ &= mx + \frac{\rho}{2}(2d^2 - x^2) \\ &= mx + \rho\Big(L^2 + Lx + \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{2}x^2\Big) = mx + \rho\Big(L^2 + Lx - \tfrac{1}{4}x^2\Big). \end{aligned}$$

이다. 처음에는 $D(0) = \rho L^2$이므로, $\rho L = M$을 이용하면 잃은 위치 에너지는

$$g\big(D(x) - D(0)\big) = gx\Big(m + \rho L - \tfrac{1}{4}\rho x\Big) = \frac{gx}{L}\Big(mL + ML - \tfrac{1}{4}Mx\Big),$$

이다.

얻은 운동 에너지

고정된 부분은 정지해 있다. 입자와 움직이는 부분의 모든 점은 (가정하라고 주어진 대로) 속력 v를 가지므로, 움직이는 질량은 $m + \rho\big(L - \tfrac{1}{2}x\big)$이고

$$\text{운동 에너지} = \tfrac{1}{2}\Big(m + M - \frac{Mx}{2L}\Big)v^2 = \frac{1}{2L}\Big(mL + ML - \tfrac{1}{2}Mx\Big)v^2.$$

이다. 계는 정지 상태에서 출발하므로, 에너지 보존에 의해 운동 에너지 = 잃은 위치 에너지이다.

$$\frac{1}{2L}\Big(mL + ML - \tfrac{1}{2}Mx\Big)v^2 = \frac{gx}{L}\Big(mL + ML - \tfrac{1}{4}Mx\Big),$$

즉,

$$v^2 = \frac{2gx\left(mL + ML - \frac{1}{4}Mx\right)}{mL + ML - \frac{1}{2}Mx},$$

이므로 원하는 결과를 얻는다. $x < 2L$이면 $ML - \frac{1}{2}Mx > 0$이므로 $mL + ML - \frac{1}{2}Mx > mL \geq 0$이고, 따라서 분모는 결코 0이 되지 않는다.

가속도

간단히 하기 위해

$$A = mL + ML - \tfrac{1}{4}Mx, \qquad B = mL + ML - \tfrac{1}{2}Mx,$$

라 쓰면 $\frac{1}{2}v^2 = gxA/B$이고, (x에 대하여 미분하면) $A' = -\frac{1}{4}M$, $B' = -\frac{1}{2}M$이다.

생각해 보기 x의 함수로 주어진 v^2에서 가속도를 어떻게 얻을 수 있을까?

연쇄 법칙(chain rule)에 의해 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$이고, 이것이 가속도이다. 이는 입자가 아래로 움직이는 동안, 즉 x가 t에 따라 증가하는 동안 성립한다.

곱의 미분법(product rule)과 몫의 미분법(quotient rule)에 의해

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{gxA}{B}\right) &= g\left[\frac{A}{B} + x\,\frac{A'B - AB'}{B^2}\right] \\ &= g\left[\frac{A}{B} + x\,\frac{-\frac{1}{4}MB + \frac{1}{2}MA}{B^2}\right] \\ &= g\left[\frac{A - \frac{1}{4}Mx}{B} + \frac{MxA}{2B^2}\right].\end{aligned}$$

이다. 핵심이 되는 간단한 정리는 $A - \frac{1}{4}Mx = mL + ML - \frac{1}{2}Mx = B$라는 것이며, 따라서 첫 번째 분수는 정확히 1이다. 그러므로

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g + \frac{Mgx\left(mL + ML - \frac{1}{4}Mx\right)}{2\left(mL + ML - \frac{1}{2}Mx\right)^2},$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

가속도가 g보다 크다

놓은 뒤에는 $0 < x < 2L$이다. 그러면

- 앞에서 보였듯이 $B = mL + M\left(L - \frac{1}{2}x\right) > 0$이므로 $B^2 > 0$이다.
- $A = B + \frac{1}{4}Mx > B > 0$이다.
- $M > 0, g > 0, x > 0$이다.

따라서 추가된 항 $\frac{MgxA}{2B^2}$는 순양수이고, $0 < x < 2L$인 모든 x에 대하여 가속도는 g보다 순전히 크다. (놓는 순간에는 $x = 0$이고 가속도는 정확히 g이다.)

검산

- $M = 0$(가벼운 밧줄)이면 두 공식 모두 자유 낙하(free fall)로 돌아간다. 즉 $v^2 = 2gx$이고 가속도는 g이다.
- $m = 0.3$, $M = L = 1$, $x = 1$, $g = 9.8$로 두면 $A = 1.05$, $B = 0.8$이므로 $v^2 = 25.725$이고, 가속도는 $9.8 + 9.8 \times 1.05/1.28 \approx 17.84\,\mathrm{m\,s^{-2}}$로 g보다 훨씬 크다. 이 점에서 $\frac{1}{2}v^2$를 수치적으로 미분하면 같은 값을 얻고, 정지 상태에서부터 운동 방정식을 단계적으로 진행시키면 v^2 공식이 그대로 재현된다.
- 단위: mL, ML, Mx는 모두 질량 $\times$ 길이의 단위를 가지므로 분수들은 무차원(dimensionless)이고, v^2는 gx의 단위를 가진다.

흔한 실수

- 움직이는 부분의 길이를 잘못 구하는 것: 떨어지는 쪽이 끌어들인 밧줄이 양쪽에 나뉘므로, 고리의 맨 아래는 x가 아니라 $\frac{1}{2}x$만큼 내려간다.
- 고정된 부분에 운동 에너지를 주거나, 고정된 부분의 위치 에너지도 변한다는 것(길어지므로 질량중심이 내려간다)을 잊는 것.
- $\frac{1}{2}v^2$ 대신 v^2를 미분하여 가속도의 두 배를 얻는 것.

STEP 너머

이것은 고전적인 "접힌 사슬의 낙하" 문제로, 운동하는 질량이 시간에 따라 변하는 계이다. 여기서 사용한 에너지 보존 모형은 끝부분이 g보다 빠르게 가속된다고 예측하며, $m = 0$이면 $x \to 2L$일 때 속력이 한없이 커지는데, 이것이 채찍이 딱 소리를 내는 원리이다. 굽은 부분에서 에너지가 실제로 보존되는지는 연구 문헌에서 논쟁이 되어 왔으며, 실제 사슬로 한 실험에서는 여기서처럼 g보다 큰 가속도가 관찰된다. 가변 질량계(variable-mass system)와, 에너지와 운동량(momentum) 중 무엇을 쓸지 신중하게 판단하는 방법은 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)에서 다룬다.

풀이

STEP III 2012, 문제 12

확률과 통계 • 기하학적 확률

> **STEP III 2012, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/12-s3-q12

핵심 아이디어

삼각형을 꼭짓점 P를 공유하는 세 개의 작은 삼각형으로 나누면, 세 거리의 합이 항상 높이와 같다는 것을 알 수 있다. 최솟값을 다룰 때는 꼬리 확률(tail probability) $\mathrm{P}(X > x)$를 이용하는 것이 깔끔하다. 모든 거리가 x보다 크다는 사건은 원래 삼각형과 닮은(similar) 더 작은 삼각형에 해당하며, 닮은 도형의 넓이는 길이의 비의 제곱에 비례한다. 3차원에서도 같은 아이디어가 부피에 대해 성립하며, 이때 부피는 길이의 비의 세제곱에 비례한다.

풀이

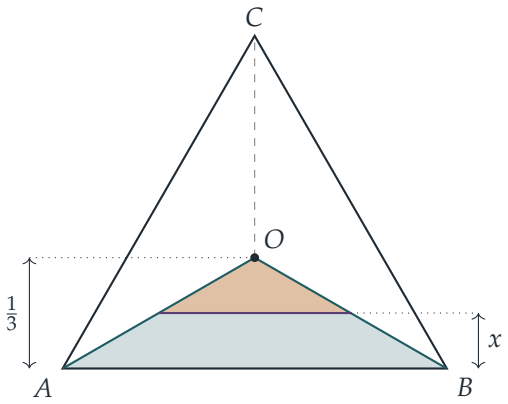
소문항 (i)

삼각형의 한 변의 길이를 s라 하자. 높이가 1이므로 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}s$이다. P를 세 꼭짓점과 이으면 ABC는 삼각형 PAB, PBC, PCA로 나뉜다. 이 삼각형들의 밑변은 각각 길이가 s인 변이고, 높이는 각각 x_1, x_2, x_3이다. 넓이를 더하면

$$\tfrac{1}{2}sx_1 + \tfrac{1}{2}sx_2 + \tfrac{1}{2}sx_3 = \tfrac{1}{2}s, \qquad \text{따라서} \qquad x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

X_1이 가장 작은 영역. AB와 CA에서 같은 거리에 있는 점들은 각 A의 이등분선(angle bisector) 위에 있다. 이 이등분선의 B 쪽에서는 P가 CA보다 AB에 더 가깝다. 마찬가지로 P가 BC보다 AB에 더 가까운 것은 정확히 그 점이 각 B의 이등분선의 A 쪽에 있을 때이다. 정삼각형에서 각의 이등분선은 중선(median)이기도 하며, 이들은 중심 O에서 만난다. 따라서 $X_1 = \min(X_1, X_2, X_3)$인 것은 정확히 P가 삼각형 ABO(아래 그림에서 색칠한 부분) 안에 있을 때이다. O에서 AB까지의 거리는 높이의 3분의 1인 $\frac{1}{3}$이다.



X의 확률밀도함수. 세 삼각형 ABO, BCO, CAO는 합동(congruent)이므로 각각의 확률은 $\frac{1}{3}$이다. (거리가 같아지는 경우는 이등분선 위에서만 일어나는데, 이등분선의 넓이는 0이다.) 대칭성에 의해 X는 P가 ABO 안에 있다는 조건 아래에서의 X_1과 같은 분포(distribution)를 가진다. 이 경우 $X = X_1$은 P에서 AB까지의 거리이다.

? **생각해 보기** 삼각형 ABO 안에서 $X_1 > x$를 만족하는 점은 어떤 점들인가?

그 점들은 AB에 평행하고 AB로부터 거리가 x인 직선보다 위에 있는 점들로, 꼭짓점이 O인 작은 호박색 삼각형을 이룬다. 이 삼각형은 ABO와 닮았고, 높이는 $\frac{1}{3}$에 대하여 $\frac{1}{3} - x$이므로, 그 넓이는 ABO의 넓이의 $\left((\frac{1}{3} - x)/\frac{1}{3}\right)^2 = (1-3x)^2$배이다. 따라서 $0 \le x \le \frac{1}{3}$일 때

$$\mathrm{P}(X > x) = (1-3x)^2, \qquad \mathrm{F}(x) = \mathrm{P}(X \le x) = 1 - (1-3x)^2.$$

또한 세 거리의 합이 1이므로 X는 $\frac{1}{3}$을 넘을 수 없다. 미분하면

$$\mathrm{f}(x) = \mathrm{F}'(x) = 6(1-3x) \quad (0 \le x \le \tfrac{1}{3}),$$

이고, 그 밖에서는 $\mathrm{f}(x) = 0$이므로 원하는 결과를 얻는다.

기댓값.

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^{1/3} 6x(1-3x)\,\mathrm{d}x = \left[3x^2 - 6x^3\right]_0^{1/3} = \tfrac{1}{3} - \tfrac{2}{9} = \tfrac{1}{9}.$$

소문항 (ii)

점에서 네 면까지의 거리를 $Y_1, \ldots, Y_4$라 하고, $Y = \min(Y_1, \ldots, Y_4)$라 하자. 각 면의 넓이는 모두 S로 같고, 부피는 $\frac{1}{3}S \cdot 1$이다. 점을 네 꼭짓점과 이으면 사면체(tetrahedron)는 네 개의 작은 사면체로 나뉜다. 각각은 한 면을 밑면으로, Y_i 중 하나를 높이로 가지므로

$$\tfrac{1}{3}S(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) = \tfrac{1}{3}S, \qquad \text{따라서} \qquad Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 = 1.$$

무게중심(centroid)은 모든 면에서 거리가 $\frac{1}{4}$이므로, 내접구(inscribed sphere)의 반지름은 $\frac{1}{4}$이다.

? **생각해 보기** 이번에는 집합 $\{Y > y\}$가 어떤 모양인가?

이 집합은 네 면 모두로부터 거리가 y보다 큰 점들의 집합이다. 각 면을 자신과 평행하게 안쪽으로 y만큼 옮기면, 무게중심이 같은 더 작은 정사면체(regular tetrahedron)가 생긴다. 무게중심에서 각 면까지의 거리가 $\frac{1}{4}$에서 $\frac{1}{4} - y$로 줄어들므로 닮음비(scale factor)는 $(\frac{1}{4} - y)/\frac{1}{4} = 1 - 4y$이다. 부피는 닮음비의 세제곱에 비례하므로, $0 \le y \le \frac{1}{4}$일 때

$$\mathrm{P}(Y > y) = (1 - 4y)^3.$$

(같은 논증을 소문항 (i)의 삼각형에 적용하면 곧바로 $(1 - 3x)^2$를 얻는다. 안쪽 삼각형의 내접원의 반지름(inradius)은 $\frac{1}{3} - x$이기 때문이다.)

$Y \ge 0$이므로 꼬리 확률을 적분하여 $\mathrm{E}(Y)$를 구할 수 있다.

$$\mathrm{E}(Y) = \int_0^{1/4} \mathrm{P}(Y > y)\,\mathrm{d}y = \int_0^{1/4} (1 - 4y)^3\,\mathrm{d}y = \left[-\tfrac{1}{16}(1 - 4y)^4\right]_0^{1/4} = \tfrac{1}{16}.$$

확률밀도함수를 쓰고 싶다면, 확률밀도함수는 $[0, \frac{1}{4}]$에서 $12(1 - 4y)^2$이고, 이 경우에도 $\int_0^{1/4} 12y(1 - 4y)^2\,\mathrm{d}y = \frac{1}{16}$이다.

따라서 가장 가까운 면까지의 거리의 기댓값은 $\frac{1}{16}$이다.

검산

- $\int_0^{1/3} 6(1 - 3x)\,\mathrm{d}x = 1$이므로 f는 실제로 확률밀도함수이다.
- 규칙성이 있다. 높이가 1인 삼각형에서는 $\mathrm{E}(X) = \frac{1}{9} = \frac{1}{3^2}$이고, 높이가 1인 사면체에서는 $\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{16} = \frac{1}{4^2}$이다. 1차원에서는 $[0, 1]$의 임의의 점에서 더 가까운 끝점까지의 거리의 평균이 $\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$이므로 규칙에 들어맞는다.
- 삼각형 안의 임의의 점 4×10^5개로 몬테카를로 시뮬레이션(Monte Carlo simulation)을 하였더니 평균은 0.1110($\frac{1}{9} \approx 0.1111$과 비교)이었고, 히스토그램은 $6(1 - 3x)$와 잘 맞았다. 사면체 안의 점 3×10^5개로 하였을 때 평균은 0.0625($\frac{1}{16} = 0.0625$와 비교)였다.

흔한 실수

- $\mathrm{P}(X > x)$를 미분하면서 음의 부호를 빠뜨리는 것. 확률밀도함수는 $-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{P}(X > x)$이다.
- 안쪽 삼각형의 높이가 $1 - x$가 아니라 $1 - 3x$라는 것을 잊는 것. 세 변이 각각 x만큼 안쪽으로 이동한다.

▶ 소문항 (ii)에서 닮음비의 제곱을 쓰는 것. 부피는 세제곱에 비례한다.

STEP 너머

이 문제에 나온 두 가지 도구는 대학의 첫 확률론 강의에서 끊임없이 등장한다. 하나는 $\mathrm{P}(\min > x)$를 통해 최솟값의 분포를 구하는 것이고, 다른 하나는 음이 아닌 확률변수(random variable)에 대하여 $\mathrm{E}(Y) = \int_0^\infty \mathrm{P}(Y > y)\,\mathrm{d}y$를 계산하는 것이다. 규칙성은 계속 이어진다. 높이가 1인 n차원 단체(simplex)에서 가장 가까운 면까지의 거리의 기댓값은 $1/(n+1)^2$이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 이 두 도구를 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP III 2012, 문제 13

확률과 통계 • 절단정규분포

STEP III 2012, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/12-s3-q13

핵심 아이디어

구간 위에서의 조건부 기댓값(conditional expectation)은 그 구간에서 $z\,f(z)$를 적분한 값을 그 구간의 확률로 나눈 것이다. 표준정규분포(standard Normal)에서 $z\,\mathrm{e}^{-z^2/2}$는 정확히 $-\mathrm{e}^{-z^2/2}$의 도함수이므로, 이 적분은 정확하게 계산할 수 있다. 그다음에 할 일은 $X = \mu + \sigma Z$로 표준화(standardising)하는 것과, X의 부호에 따라 $|X|$를 나누어 다루는 것뿐이다.

풀이

이 풀이 전체에서 Z의 확률밀도함수(probability density function)를 $\phi(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-z^2/2}$로 쓴다. 그러면 $\Phi'(z) = \phi(z)$이고 $\phi'(z) = -z\,\phi(z)$이다.

소문항 (i)

$a < Z < b$일 때 Z의 조건부 밀도(conditional density)는 (a, b)에서 $\phi(z)/\mathrm{P}(a < Z < b)$이고, $\mathrm{P}(a < Z < b) = \Phi(b) - \Phi(a)$이다. 따라서

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(Z \mid a < Z < b) &= \frac{1}{\Phi(b) - \Phi(a)} \int_a^b z\,\phi(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\big(\Phi(b) - \Phi(a)\big)} \Big[-\mathrm{e}^{-z^2/2} \Big]_a^b \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-a^2/2} - \mathrm{e}^{-b^2/2}}{\sqrt{2\pi}\,\big(\Phi(b) - \Phi(a)\big)},
\end{aligned}$$

이다. 여기서 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\big(-\mathrm{e}^{-z^2/2}\big) = z\,\mathrm{e}^{-z^2/2}$임을 이용하였다. 이것이 구하는 결과이다. 적분이 수렴(converge)하므로, $\mathrm{e}^{-\infty} = 0$, $\Phi(\infty) = 1$로 읽으면 이 결과는 $b = \infty$일 때(또는 $a = -\infty$일 때)에도 성립한다.

소문항 (ii)

$Z \sim \mathrm{N}(0,1)$, $\sigma > 0$으로 두고 $X = \mu + \sigma Z$라 쓰자. $\sigma > 0$이므로

$$X > 0 \iff Z > -\mu/\sigma,$$

이고, 따라서 $X > 0$이라는 조건을 거는 것은 $Z > -\mu/\sigma$라는 조건을 거는 것과 같다. 기댓값은 조건부로 다룰 때에도 선형(linear)이므로

$$\mathrm{E}(X \mid X > 0) = \mathrm{E}(\mu + \sigma Z \mid Z > -\mu/\sigma) = \mu + \sigma\,\mathrm{E}(Z \mid Z > -\mu/\sigma),$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

$|X|$의 평균. $c = \mu/\sigma$로 두자. 소문항 (i)에서 $a = -c$, $b = \infty$로 놓으면

$$\mathrm{E}(Z \mid Z > -c) = \frac{\mathrm{e}^{-c^2/2}}{\sqrt{2\pi}\,\big(1 - \Phi(-c)\big)} = \frac{\phi(c)}{p}, \qquad \text{여기서} p = \mathrm{P}(X > 0) = 1 - \Phi(-c).$$

을 얻는다. 앞의 식에 p를 곱하면

$$\mathrm{E}(X;\, X > 0) := \mathrm{E}(X \mid X > 0)\,\mathrm{P}(X > 0) = \mu p + \sigma\phi(c).$$

이다.

? **생각해 보기** 두 번째 적분 없이 $X < 0$ 부분의 기여를 어떻게 구할 수 있을까?

두 부분을 더하면 전체 평균이 된다. 즉 $\mathrm{E}(X;\, X > 0) + \mathrm{E}(X;\, X < 0) = \mathrm{E}(X) = \mu$이다($X = 0$인 사건의 확률은 0이다). 따라서 $\mathrm{E}(X;\, X < 0) = \mu - \mu p - \sigma\phi(c)$이다. $X < 0$에서는 $|X| = -X$이므로

$$\begin{aligned} m = \mathrm{E}|X| &= \mathrm{E}(X;\, X > 0) - \mathrm{E}(X;\, X < 0) \\ &= 2\big(\mu p + \sigma\phi(c)\big) - \mu \\ &= \mu(2p - 1) + 2\sigma\phi(c). \end{aligned}$$

이다. 마지막으로 $2p - 1 = 1 - 2\Phi(-\mu/\sigma)$이고 $2\phi(c) = \sqrt{2/\pi}\,\mathrm{e}^{-\mu^2/(2\sigma^2)}$이므로

$$m = \mu\big(1 - 2\Phi(-\mu/\sigma)\big) + \sigma\sqrt{2/\pi}\,\exp\big(-\tfrac{1}{2}\mu^2/\sigma^2\big),$$

을 얻고, 이것이 구하는 결과이다.

$|X|$의 분산. 핵심은 $|X|^2 = X^2$이라는 점이다. 따라서 이차 모멘트(second moment)는 새로 계산할 필요가 없다.

$$\mathrm{E}\big(|X|^2\big) = \mathrm{E}(X^2) = \mathrm{Var}(X) + \big(\mathrm{E}X\big)^2 = \sigma^2 + \mu^2.$$

그러므로

$$\mathrm{Var}|X| = \mu^2 + \sigma^2 - m^2.$$

이다.

검산

- $\mu = 0$이면 $|X|$는 반정규분포(half-Normal)를 따르고, 공식은 잘 알려진 값 $m = \sigma\sqrt{2/\pi}$를 준다. 이때 분산은 $\sigma^2(1-2/\pi)$로 양수이다.
- $\mu \gg \sigma$이면 X는 거의 항상 양수이고, $\Phi(-\mu/\sigma) \approx 0$이며 지수 항은 매우 작다. 따라서 $m \approx \mu$, $\mathrm{Var}|X| \approx \sigma^2$이 되는데, 마땅히 그래야 한다.
- m에 대한 공식은 μ를 $-\mu$로 바꾸어도 변하지 않는다($1-2\Phi(-c) = -(1-2\Phi(c))$를 이용한다). 이는 대칭성 $|X| \sim |-X|$와 맞아떨어진다.
- 수치적으로 $\mu = 1$, $\sigma = 2$이면 $m \approx 1.7912$, $\mathrm{Var}|X| \approx 1.7917$을 얻는데, 이는 직접 수치적분한 값 및 2×10^5개의 값을 이용한 시뮬레이션 결과와 일치한다.

흔한 실수

- 소문항 (i)에서 $\Phi(b) - \Phi(a)$로 나누는 것을 잊는 실수. 적분만으로는 조건부 기댓값이 아니라 $\mathrm{E}(Z;\, a < Z < b)$가 된다.
- $\mathrm{E}|X| = \mathrm{E}(X \mid X > 0)$이라고 쓰는 실수. 조건부 기댓값에는 각각 $\mathrm{P}(X > 0)$과 $\mathrm{P}(X < 0)$의 가중치를 주어야 한다.
- $|X|^2 = X^2$을 이용하면 곧바로 얻을 수 있는데도 $\mathrm{E}(X^2)$를 또 다른 적분으로 계산하는 것.

STEP 너머

$|X|$의 분포는 **접힌 정규분포**(folded Normal)이고, 소문항 (i)의 조건부 분포는 **절단 정규분포**(truncated Normal)이다. 비율 $\phi(c)/\big(1-\Phi(-c)\big)$는 역밀스 비(inverse Mills ratio)로, 데이터가 중도절단(censored)되거나 선택(selected)된 계량경제학 모형에서 중심적인 역할을 한다. 요령 $\phi'(z) = -z\phi(z)$는 정규근사를 위한 스타인 방법(Stein's method)의 출발점이기도 하다. 조건부 기댓값에 대해 더 알고 싶다면 Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*(확률론 입문)를 참고하라.

Beyond STEP

STEP은 대부분의 학생이 학창 시절에 치르는 수학 시험 가운데 가장 어려운 시험이다. 또한 가장 훌륭한 시험 가운데 하나이기도 하다. 문제는 짧고 낯설며 깊이가 있고, 그중 가장 뛰어난 문제들은 대학 수학의 작은 조각이 모습을 감추고 있는 것이다.

이 책은 1987년 첫 시험에 앞서 나온 예시 시험지(specimen papers)부터 2025년 시험지까지 가운데 가장 흥미로운 STEP 문제들을 골라, 각 문제를 하나의 문으로 삼는다. 모든 문제는 뛰어난 학생이 풀어 가면서 던질 법한 질문들과 함께 꼼꼼하게 풀이하고, 그런 다음 책은 그 문을 지나 한 걸음 더 나아간다. 그 아이디어가 어디에서 왔는지, 대학에서는 무엇으로 발전하는지, 그리고 다음에는 무엇을 읽으면 좋은지를 살펴본다.

이 책은 STEP을 준비하면서 기출 문제 연습 이상의 것을 원하는 재능 있는 예비 수학자를 위해 쓰였다. 수학과 학부생처럼 생각하기 시작하고, 앞으로 무엇이 자신을 기다리고 있는지 알아보고 싶은 학생들을 위한 책이다.

- 순수수학(pure mathematics), 역학(mechanics), 확률(probability)과 통계(statistics)를 아우르는 13개의 장
- 이 36개의 STEP 기출 문제와 각 문제의 안내식 풀이
- 모든 문제 뒤에 숨은 대학 수학
- 답이 실린 후속 연습 문제와 더 읽을거리

2012년 풀이. 책 전체와 모든 장,
모든 풀이를 다음 주소에서 무료로 읽고, 내려받고, 공유할 수 있다.

beyondstep.keithmcnulty.org

본문은 퍼블릭 도메인(CC0 1.0)으로 공개한다. STEP 문제 © Cambridge University Press & Assessment.

