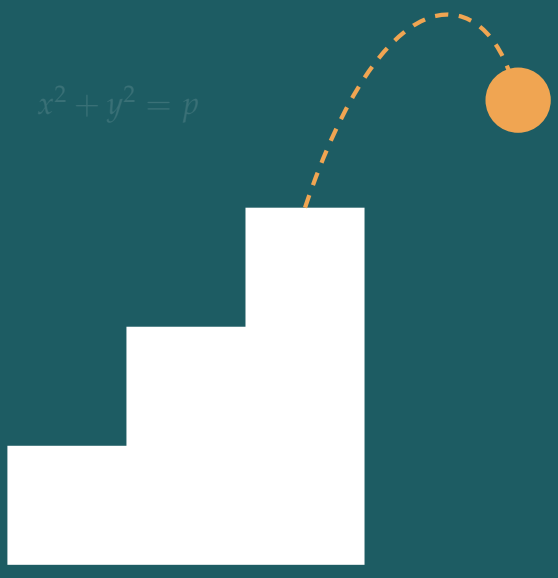
STEP 대비 · 대학 수학

Beyond STEP

STEP I, II 및 III

2011년 풀이



KEITH McNULTY

Beyond STEP

STEP 기출문제로 여는
대학 수학의 세계

STEP I, II 및 III

2011년 풀이

Keith McNulty

Beyond STEP: STEP 기출문제로 여는 대학 수학의 세계

2011년 풀이

2011년 STEP 문제지(STEP I, II 및 III)의 39개 문제 전체에 대한 풀이. 견본 문제지 이후 모든 STEP 문제의 풀이와 *Beyond STEP* 책 전체, 그리고 각 장을 `beyondstep.keithmcnulty.org`에서 무료로 읽고 내려받을 수 있다.

풀이를 읽기 전에 먼저 문제를 제대로 풀어 보자. 모든 답은 수치적으로 검증하였지만, 풀이가 이렇게 많으면 실수가 어느 정도 있을 수밖에 없다. 무언가 잘못된 것처럼 보이면 자신의 풀이를 믿고 꼼꼼히 확인해 보자.

영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.

2026년 11월 온라인 초판 발행.

이 PDF에서 지은이가 직접 만든 모든 것, 곧 본문, 풀이, 그림, 연습문제와 해답은 크리에이티브 커먼즈 CC0 1.0 Universal 라이선스에 따라 퍼블릭 도메인(public domain)으로 공개한다. 누구든 허락을 구하지 않고 어떤 목적으로든 복사하고, 고쳐 쓰고, 공유할 수 있다. 자세한 내용은 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`을 보라.

여기에서 다루는 STEP 문제의 저작권은 Cambridge University Press & Assessment에 있다. 문제는 이 책에 싣지 않았으며, 각 문제마다 공식 출처인 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스나 OCR의 기출 시험지로 가는 링크를 달았다.

오류 제보는 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty에 이슈로 남겨 주기 바란다.

차례

STEP I

Q1 음함수 미분법 순수수학 . . . 3

Q2 치환적분 순수수학 . . . 7

Q3 삼각함수 항등식 순수수학 . . . 10

Q4 포물선의 접선 순수수학 . . . 14

Q5 절댓값이 있는 적분 순수수학 . . . 18

Q6 이항급수의 합 순수수학 . . . 22

Q7 변수분리형 미분방정식 순수수학 . . . 26

Q8 디오판토스 방정식 순수수학 . . . 30

Q9 포물체 운동 역학 . . . 33

Q10 탄성 충돌 역학 . . . 37

Q11 강체의 평형 역학 . . . 41

Q12 대기열과 투표 문제 확률과 통계 . . . 45

Q13 연속확률변수 확률과 통계 . . . 49

STEP II

Q1 제곱근이 있는 방정식 순수수학 . . . 53

Q2 디오판토스 방정식 순수수학 . . . 57

Q3 단조성을 이용한 부등식 순수수학 . . . 61

Q4 삼각방정식 순수수학 . . . 65

Q5 벡터와 반사 순수수학 . . . 69

Q6 부분적분 순수수학 . . . 73

Q7 수열과 급수 순수수학 . . . 77

Q8 원의 신개선 순수수학 . . . 81

Q9 충돌과 반발계수 역학 . . . 86

Q10 포물체와 충격량 역학 90
Q11 3차원에서의 평형 역학 94
Q12 게임의 등비급수 확률과 통계 98
Q13 왜도의 척도 확률과 통계 102

STEP III

Q1 계수 내림법 순수수학 107
Q2 다항식의 유리근 순수수학 111
Q3 삼차방정식 풀기 순수수학 114
Q4 영 부등식 순수수학 118
Q5 적분을 이용한 넓이 순수수학 122
Q6 적분에서의 치환 순수수학 126
Q7 수학적 귀납법 순수수학 129
Q8 복소평면 위의 자취 순수수학 133
Q9 원기둥 위의 운동 역학 137
Q10 탄성 끈과 단진동 역학 141
Q11 강체의 회전 역학 145
Q12 확률생성함수를 이용한 복합분포 확률과 통계 149
Q13 이산분포의 최빈값 확률과 통계 153

풀이

STEP I 2011, 문제 1

순수수학 • 음함수 미분법

> **STEP I 2011, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/11-s1-q1

핵심 아이디어

음함수 미분(implicit differentiation)을 이용하면 y에 대해 풀지 않고도 각 곡선의 기울기(gradient)를 구할 수 있다. 그다음부터는 각 소문항마다 만나는 점 (p, q)에서의 조건을 적기만 하면 된다. 즉, 그 점은 직선 위에 있고, 곡선 위에 있으며, 두 기울기 사이에 관계가 성립한다(접할 때는 기울기가 같고, 법선(normal)일 때는 기울기의 곱이 -1이다). 기울기 조건으로부터 p와 q 사이의 간단한 관계를 얻고, 이 관계를 나머지 두 방정식에 대입하면 p가 서로 다른 두 가지 방식으로 결정되는데, 이 둘은 일치해야 한다.

풀이

소문항 (i)

y를 x의 함수로 보고 $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1$을 x에 대해 미분하면

$$-\frac{a}{x^2} - \frac{b}{y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0.$$

$b \neq 0$이므로 이를 정리하면

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{ay^2}{bx^2},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. (방정식에 a/x와 b/y가 들어 있으므로, 곡선 위의 모든 점에서 x와 y는 모두 0이 아니다.)

기울기가 같다는 조건. 직선 $ax + by = 1$의 기울기는 $-\frac{a}{b}$이다. 점 (p, q)에서 곡선의 기울기

는 $-\dfrac{aq^2}{bp^2}$이므로

$$-\frac{aq^2}{bp^2} = -\frac{a}{b} \quad \Longrightarrow \quad \frac{q^2}{p^2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad q^2 = p^2,$$

이다. 여기서 a/b를 약분했는데, $a \neq 0$이므로 이는 허용된다. 따라서 $p = \pm q$이다.

두 가지 경우. 점 (p, q)는 또한

$$ap + bq = 1 \qquad \text{그리고} \qquad \frac{a}{p} + \frac{b}{q} = 1.$$

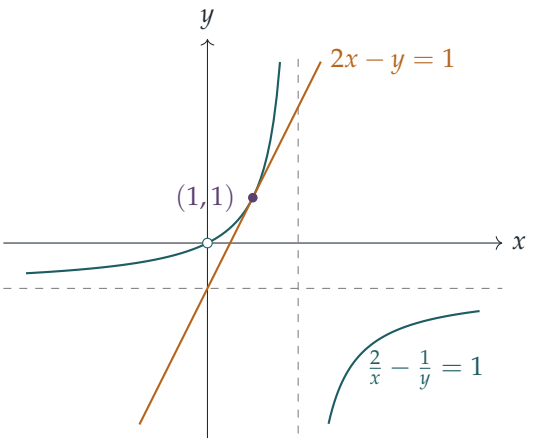
을 만족한다.

- $q = p$인 경우: 직선의 방정식에서 $p(a+b) = 1$이므로 $p = \dfrac{1}{a+b}$이다(특히 $a+b \neq 0$이다). 곡선의 방정식에서 $\dfrac{a+b}{p} = 1$이므로 $p = a+b$이다. 두 식을 비교하면 $a+b = \dfrac{1}{a+b}$, 즉 $(a+b)^2 = 1$이다.
- $q = -p$인 경우: 직선의 방정식에서 $p(a-b) = 1$이므로 $p = \dfrac{1}{a-b}$이다. 곡선의 방정식에서 $\dfrac{a-b}{p} = 1$이므로 $p = a-b$이다. 두 식을 비교하면 $(a-b)^2 = 1$이다.

따라서 $(a-b)^2 = 1$ 또는 $(a+b)^2 = 1$이 되어 원하는 결과를 얻는다.

생각해 보기 이런 점이 실제로 존재하는가, 아니면 필요조건(necessary condition)만 찾은 것인가?

실제로 존재한다. $a = 2, b = -1$로 두면 $a+b = 1$이다. 점 $(1,1)$은 직선 $2x - y = 1$ 위에 있고 곡선 $\frac{2}{x} - \frac{1}{y} = 1$ 위에도 있으며, 그 점에서 둘의 기울기는 모두 2이다. 이때 곡선은 $y = \dfrac{x}{2-x}$, 즉 원점이 제거된 직각쌍곡선(rectangular hyperbola)이다. 공통인 점에서 기울기가 같다는 것은 직선이 접선(tangent)이라는 뜻이다.



속이 빈 원은 원점을 나타내는데, 원점은 쌍곡선 $y = \frac{x}{2-x}$ 위에는 있지만 곡선 자체 위에는 있지 않다.

소문항 (ii)

$\frac{a}{x} - \frac{b}{y} = 1$을 음함수 미분하면

$$-\frac{a}{x^2} + \frac{b}{y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{ay^2}{bx^2}.$$

직선이 점 (p, q)에서 곡선의 법선이라고 하자. 그러면 $p \neq 0, q \neq 0$이고

$$ap + bq = 1 \qquad \text{그리고} \qquad \frac{a}{p} - \frac{b}{q} = 1.$$

이다. a, b, p, q가 모두 0이 아니므로, 접선의 기울기 $\frac{aq^2}{bp^2}$과 직선의 기울기 $-\frac{a}{b}$는 모두 유한하고 0이 아니다. 따라서 "법선"이라는 것은 두 기울기의 곱이 -1이라는 뜻이다.

$$\frac{aq^2}{bp^2} \cdot \left(-\frac{a}{b}\right) = -1 \quad \Longrightarrow \quad a^2q^2 = b^2p^2 \quad \Longrightarrow \quad aq = \pm bp.$$

? 생각해 보기 어느 부호가 가능한가?

각 부호를 곡선의 방정식에 넣어 확인해 보자.

- $aq = bp$이면 $\frac{b}{q} = \frac{a}{p}$이므로 $\frac{a}{p} - \frac{b}{q} = 0 \neq 1$이다. 이 부호는 불가능하다.
- $aq = -bp$이면 $\frac{b}{q} = -\frac{a}{p}$이므로 곡선의 방정식은 $\frac{2a}{p} = 1$이 되고, 따라서 $p = 2a$이며, 이어서 $q = -\frac{bp}{a} = -2b$이다.

$p = 2a, q = -2b$를 직선의 방정식에 대입하면

$$2a^2 - 2b^2 = 1, \qquad \text{즉,} \qquad a^2 - b^2 = \tfrac{1}{2},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. 법선의 발은 점 $(2a, -2b)$이다.

검산

- 소문항 (i)에 대해, 위의 예 $a = 2, b = -1$은 $(a+b)^2 = 1$을 만족하고 직선은 점 $(1,1) = (p,p)$에서 접한다. 마찬가지로 $a = 2, b = 1$은 $(a-b)^2 = 1$을 만족하고, 직선 $2x + y = 1$은 점 $(1, -1)$에서 $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 1$에 접한다.

- 소문항 (ii)에 대해, $a^2 - b^2 = \frac{1}{2}$이 되도록 $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b = \frac{1}{2}$로 두고 점 $(2a, -2b) = (\sqrt{3}, -1)$을 생각하자. 직선의 방정식에서 $\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$이고 곡선의 방정식에서 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$이다. 그 점에서 접선의 기울기는 $\frac{aq^2}{bp^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.577$이고 직선의 기울기는 $-\sqrt{3} \approx -1.732$이며, 두 기울기의 곱은 -1이다.
- 수치적으로 확인해 보면, 기울기 공식은 수백 개의 무작위 점에서 유한차분(finite-difference)으로 구한 기울기와 일치하며, (a, b)에 대해 무작위로 탐색하면 $a^2 - b^2$이 반올림 오차 범위 안에서 0.5일 때에만 법선이 존재한다.

흔한 실수

- 소문항 (i)에서 $q = -p$인 경우를 빠뜨리는 것. $(a - b)^2 = 1$을 주는 것이 바로 이 경우이다.
- 소문항 (ii)에서 곡선이 어느 부호를 허용하는지 확인하지 않고 $aq = \pm bp$에서 멈추는 것.

STEP 너머

음함수 미분은 음함수 정리(implicit function theorem)를 처음 엿보는 것이다. 음함수 정리에 따르면 $\partial F/\partial y \neq 0$인 점 근처에서 방정식 $F(x, y) = 0$은 y를 x의 미분가능한 함수로 정의하고, 이때 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = -F_x/F_y$이다. 여기서 사용한 접선 논증에는 대수적인 쌍둥이도 있다. 직선이 원뿔곡선(conic)에 접하는 것은 둘의 교점을 구하는 이차방정식이 중근(repeated root)을 가질 때와 정확히 같으며, 이 방법으로 소문항 (i)을 다시 유도할 수 있다. 이 모든 것의 바탕이 되는 해석학(analysis)에 대해서는 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 읽어 보라.

풀이

STEP I 2011, 문제 2

순수수학 • 치환적분

> **STEP I 2011, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/11-s1-q2

핵심 아이디어

적분 E는 초등함수로 나타낸 닫힌 형태(closed form)가 없으므로, 이 값을 직접 계산하려고 하지 않는다. 대신 나머지 적분들을 모두 변형하여 E 자체가 나타나도록 한다. 처음 두 적분에서는 다항식의 나눗셈(algebraic division)으로 분수를 쪼개어 골치 아픈 $\frac{1}{1+x}$ 부분을 따로 떼어 낸다. (i)과 (ii)에서는 피적분함수(integrand)가 다시 $[0,1]$ 위의 $\frac{\mathrm{e}^u}{1+u}$가 되도록 치환(substitution)을 고른다. 지수를 보고, 무엇을 새로운 변수로 삼으면 좋을지 생각해 보자.

풀이

처음 두 적분

$x = (1+x) - 1$로 쓰면

$$\frac{x\,\mathrm{e}^x}{1+x} = \mathrm{e}^x - \frac{\mathrm{e}^x}{1+x},$$

이므로

$$\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x - E = \mathrm{e} - 1 - E,$$

가 되어 원하는 결과를 얻는다.

두 번째 적분에서는 x^2을 $1+x$로 나눈다. $x^2 = (x-1)(1+x) + 1$이므로

$$\frac{x^2\,\mathrm{e}^x}{1+x} = x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}.$$

$u = x$, $\mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$로 놓고 부분적분(integration by parts)하면

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left[x\,\mathrm{e}^x\right]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - (\mathrm{e} - 1) = 1.$$

따라서

$$\int_0^1 \frac{x^2 \mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x = 1 - (\mathrm{e}-1) + E = 2 - \mathrm{e} + E.$$

(다른 방법으로, $\frac{x^2}{1+x} = x - \frac{x}{1+x}$로 쓰고 첫 번째 결과를 바로 이용해도 된다. $1-(\mathrm{e}-1-E)$를 계산하면 같은 답이 나온다.)

소문항 (i)

다루기 까다로운 부분은 지수이므로, 이것을 새로운 변수로 삼는다.

$$u = \frac{1-x}{1+x}.$$

x에 대하여 풀면 $u(1+x) = 1-x$이므로 $x = \dfrac{1-u}{1+u}$이다. 그러면

$$1 + x = \frac{2}{1+u}, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \frac{-(1+u)-(1-u)}{(1+u)^2} = -\frac{2}{(1+u)^2}.$$

$x=0$일 때 $u=1$이고, $x=1$일 때 $u=0$이다. 따라서

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\frac{1-x}{1+x}}}{1+x}\,\mathrm{d}x &= \int_1^0 \mathrm{e}^u \cdot \frac{1+u}{2} \cdot \left(-\frac{2}{(1+u)^2}\right)\mathrm{d}u \\ &= \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^u}{1+u}\,\mathrm{d}u = E.\end{aligned}$$

$\mathrm{d}x/\mathrm{d}u$에서 나온 음의 부호는 적분 구간의 위끝과 아래끝을 바꾸어 다시 증가하는 순서로 만드는 데 쓰였다.

? **생각해 보기** 왜 답이 e가 전혀 없이 정확히 E가 되리라고 예상할 수 있을까?

사상(map) $x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$는 $[0,1]$을 자기 자신으로 보내고(양 끝점을 서로 바꾼다), 인수 $\frac{1}{1+x}$는 $\mathrm{d}x$와 결합하여 정확히 $\frac{\mathrm{d}u}{1+u}$가 된다. 실제로 $\frac{\mathrm{d}x}{1+x} = -\frac{\mathrm{d}u}{1+u}$이며, 이것은 전체 계산을 기억하는 깔끔한 방법이다.

소문항 (ii)

이번에는 목표 구간 $[0,1]$이 $x \in [1,\sqrt{2}]$에서 나와야 하는데, 이 구간에서 x^2은 1부터 2까지 변한다. 그래서 다음과 같이 시도한다.

$$u = x^2 - 1, \qquad \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x,$$

이때 $x=1$에서 $u=0$이고 $x=\sqrt{2}$에서 $u=1$이다. 그러면

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{\mathrm{d}u}{2(1+u)}, \qquad \mathrm{e}^{x^2} = \mathrm{e}^{1+u} = \mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^u,$$

이므로

$$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^u}{1+u}\,\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{e}E}{2}.$$

? **생각해 보기** 왜 $u = x^2$으로 치환하지 않을까?

그렇게 해도 되며, 그러면 $\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^u}{u}\,\mathrm{d}u$를 얻는다. 하지만 구간이 $[0,1]$이 아니라 $[1,2]$이다. $u \mapsto u-1$로 1만큼 평행이동하면 같은 답에 도달한다. $u = x^2 - 1$은 단지 이 두 단계를 한 번에 처리하는 것이다.

검산

심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 $E \approx 1.125386$이다. 수치적으로 첫 번째 적분은 $0.592896 = \mathrm{e} - 1 - E$, 두 번째 적분은 $0.407104 = 2 - \mathrm{e} + E$, (i)의 적분은 $1.125386 = E$, (ii)의 적분은 $1.529558 = \frac{1}{2}\mathrm{e}E$이다. 컴퓨터 없이 빠르게 타당성을 확인할 수도 있다. 처음 두 피적분함수는 모두 양수이고, 실제로 $\mathrm{e} - 1 - E \approx 0.59 > 0$이며 $2 - \mathrm{e} + E \approx 0.41 > 0$이다. 또한 $[0,1]$에서 $x^2 \le x$이므로 두 번째 적분이 첫 번째 적분보다 작아야 하는데, 실제로 그렇다.

흔한 실수

- (i)에서 적분 구간의 위끝과 아래끝을 바꾸는 것을 잊어버리거나 음의 부호를 빠뜨려 $-E$를 얻는 실수. 피적분함수가 양수이므로 이는 불가능한 답이다.
- (ii)에서 $\mathrm{e}^{x^2} = \mathrm{e}^{1+u}$로부터 나오는 인수 e나, $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$로부터 나오는 인수 $\frac{1}{2}$을 빠뜨리는 실수.

STEP 너머

E와 같은 적분은 **지수적분**(*exponential integral*) $\mathrm{Ei}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$와 관련이 있다. $t = 1 + x$로 치환하면 $E = \mathrm{e}^{-1}\big(\mathrm{Ei}(2) - \mathrm{Ei}(1)\big)$임을 알 수 있다. 리우빌(Liouville)의 이론에 따르면 $\int \frac{\mathrm{e}^x}{x}\,\mathrm{d}x$는 초등함수인 부정적분(antiderivative)을 갖지 않는다. 바로 이 때문에 문제에서 E를 이름 붙은 상수로 다루고, 모든 것을 E로 환원하라고 요구하는 것이다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제집)에는 이런 성격의 문제가 훨씬 더 많이 실려 있다.

풀이

STEP I 2011, 문제 3

순수수학 • 삼각함수 항등식

STEP I 2011, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/11-s1-q3

핵심 아이디어

$\frac{1}{3}\pi \mp \theta$에서의 두 사인의 곱은 제곱의 차(difference of squares) 기법으로 깔끔하게 정리되고, 이것으로 $(*)$가 한 줄 만에 증명된다. 그다음 코탄젠트(cotangent)의 합은 곱을 미분하여 얻는다. 세 인수의 곱의 도함수(derivative)를 그 곱 자체로 나누면 세 개의 "로그 도함수(logarithmic derivative)"의 합이 되고, 사인의 경우 이것들은 코탄젠트이다. 코사인 버전에 같은 작업을 하면 탄젠트가 나오고, $\tan x + \cot x$는 하나의 코시컨트(cosecant)이다.

풀이

항등식 $(*)$

$a = \frac{1}{3}\pi$라 하자. 덧셈정리(compound-angle formulae)에 의하여

$$\begin{aligned}\sin(a-\theta)\sin(a+\theta) &= (\sin a\cos\theta - \cos a\sin\theta)(\sin a\cos\theta + \cos a\sin\theta)\\ &= \sin^2 a\cos^2\theta - \cos^2 a\sin^2\theta\\ &= \sin^2 a\,(1-\sin^2\theta) - (1-\sin^2 a)\sin^2\theta = \sin^2 a - \sin^2\theta.\end{aligned}$$

이다. $\sin^2 a = \frac{3}{4}$이므로

$$4\sin\theta\sin(\tfrac{1}{3}\pi-\theta)\sin(\tfrac{1}{3}\pi+\theta) = 4\sin\theta\left(\tfrac{3}{4}-\sin^2\theta\right) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta = \sin 3\theta,$$

이고, 마지막 등식은 삼배각 공식(triple-angle formula)에 의한 것이다. 이로써 모든 θ에 대하여 $(*)$가 증명된다.

소문항 (i)

$(*)$는 모든 θ에 대하여 성립하므로 양변을 미분할 수 있다. 곱의 미분법(product rule)에 의하여

$$4\Big[\cos\theta\sin(a-\theta)\sin(a+\theta)-\sin\theta\cos(a-\theta)\sin(a+\theta) \\ +\sin\theta\sin(a-\theta)\cos(a+\theta)\Big]=3\cos 3\theta,$$

이다. 여기서 가운데 항의 음의 부호는 $a-\theta$에 연쇄 법칙(chain rule)을 적용하여 생긴 것이다.

생각해 보기 이것을 어떻게 코탄젠트로 바꿀 수 있을까?

양변을 $\sin 3\theta$로 나눈다. $(*)$에 의하여 이것은 $4\sin\theta\sin(a-\theta)\sin(a+\theta)$와 같다. 그러면 좌변의 각 항에서 미분된 것 하나를 제외한 모든 사인이 약분된다. 이 나눗셈은 $\sin 3\theta\neq 0$일 때마다 가능하며, 이때 세 사인도 모두 0이 아니다. 따라서

$$\cot\theta-\cot(\tfrac{1}{3}\pi-\theta)+\cot(\tfrac{1}{3}\pi+\theta)=3\cot 3\theta \qquad (\sin 3\theta\neq 0). \tag{A}$$

를 얻는다. 이제 $\theta=\frac{1}{9}\pi$를 대입하자. 이때 $\sin 3\theta=\sin\frac{1}{3}\pi\neq 0$이다. $\frac{1}{3}\pi-\frac{1}{9}\pi=\frac{2}{9}\pi$이고 $\frac{1}{3}\pi+\frac{1}{9}\pi=\frac{4}{9}\pi$이므로

$$\cot\tfrac{1}{9}\pi-\cot\tfrac{2}{9}\pi+\cot\tfrac{4}{9}\pi=3\cot\tfrac{1}{3}\pi=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3},$$

이 되어 증명이 끝난다.

소문항 (ii)

$(*)$에 $\theta=\frac{1}{6}\pi-\phi$를 대입한다. 매번 $\sin(\frac{1}{2}\pi-x)=\cos x$를 이용하면 네 사인은

$$\begin{aligned}\sin\theta=\sin(\tfrac{1}{6}\pi-\phi)&=\cos(\tfrac{1}{3}\pi+\phi),\\ \sin(\tfrac{1}{3}\pi-\theta)=\sin(\tfrac{1}{6}\pi+\phi)&=\cos(\tfrac{1}{3}\pi-\phi),\\ \sin(\tfrac{1}{3}\pi+\theta)=\sin(\tfrac{1}{2}\pi-\phi)&=\cos\phi,\\ \sin 3\theta=\sin(\tfrac{1}{2}\pi-3\phi)&=\cos 3\phi,\end{aligned}$$

가 된다. 따라서 ϕ를 다시 θ로 바꾸어 쓰면

$$4\cos\theta\cos(\tfrac{1}{3}\pi-\theta)\cos(\tfrac{1}{3}\pi+\theta)=\cos 3\theta \qquad \text{모든}\theta. \tag{**}$$

이다. $(*)$를 $(**)$로 나누면 인수 4가 약분되고, 사인을 코사인으로 나눈 것은 각각 탄젠트가 된다. 역수를 취하면

$$\cot\theta\cot(\tfrac{1}{3}\pi-\theta)\cot(\tfrac{1}{3}\pi+\theta)=\cot 3\theta,$$

이다. 이 식은 양변이 정의되는 모든 곳, 즉 $\sin 3\theta \neq 0$이고 $\cos 3\theta \neq 0$인 곳에서 성립한다(각 조건은 대응하는 세 인수가 0이 아님을 보장한다).

코시컨트의 합을 구하기 위해 소문항 (i)에서와 똑같이 $(**)$를 미분한다.

$$4\Big[-\sin\theta\cos(a-\theta)\cos(a+\theta)+\cos\theta\sin(a-\theta)\cos(a+\theta) \\ -\cos\theta\cos(a-\theta)\sin(a+\theta)\Big] = -3\sin 3\theta.$$

$\cos 3\theta = 4\cos\theta\cos(a-\theta)\cos(a+\theta)$로 나누고(0이 아닐 때) -1을 곱하면

$$\tan\theta - \tan(\tfrac{1}{3}\pi-\theta) + \tan(\tfrac{1}{3}\pi+\theta) = 3\tan 3\theta. \qquad \text{(B)}$$

이다. (A)와 (B)의 부호가 일치하므로 둘을 더할 수 있다.

? 생각해 보기 탄젠트와 코탄젠트를 더하는 것이 왜 도움이 될까?

$\tan x + \cot x$가 하나의 코시컨트이기 때문이다.

$$\tan x + \cot x = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x} = 2\operatorname{cosec} 2x.$$

따라서 $\sin 6\theta \neq 0$일 때마다 (A)와 (B)를 더하면

$$2\operatorname{cosec} 2\theta - 2\operatorname{cosec}(\tfrac{2}{3}\pi - 2\theta) + 2\operatorname{cosec}(\tfrac{2}{3}\pi + 2\theta) = 6\operatorname{cosec} 6\theta.$$

를 얻는다. 이제 $\theta = \frac{1}{18}\pi$로 두면 $2\theta = \frac{1}{9}\pi$이고 $6\theta = \frac{1}{3}\pi$이다(이때 $\sin 6\theta \neq 0$). $\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{9}\pi = \frac{5}{9}\pi$이고 $\frac{2}{3}\pi + \frac{1}{9}\pi = \frac{7}{9}\pi$이므로, 2로 나누면

$$\operatorname{cosec}\tfrac{1}{9}\pi - \operatorname{cosec}\tfrac{5}{9}\pi + \operatorname{cosec}\tfrac{7}{9}\pi = 3\operatorname{cosec}\tfrac{1}{3}\pi = 3\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3},$$

이 되어 증명이 끝난다.

검산

- $\theta = \frac{1}{6}\pi$에서 $(*)$는 $4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = 1 = \sin\frac{1}{2}\pi$가 되고, $\theta = 0$에서 $(**)$는 $4\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = 1 = \cos 0$이 된다.
- 수치적으로 $\cot 20^\circ - \cot 40^\circ + \cot 80^\circ \approx 2.7475 - 1.1918 + 0.1763 = 1.7321 \approx \sqrt{3}$이고, $\operatorname{cosec} 20^\circ - \operatorname{cosec} 100^\circ + \operatorname{cosec} 140^\circ \approx 2.9238 - 1.0154 + 1.5557 = 3.4641 \approx 2\sqrt{3}$이다.
- 항등식 (A), (B)와 코탄젠트의 곱에 대한 식은 계산기로 임의의 θ에서 확인해 볼 수 있다. 우리는 무작위로 고른 수천 개의 값에서 이를 확인하였다.

흔한 실수

- $\sin(\frac{1}{3}\pi - \theta)$를 미분할 때 연쇄 법칙에서 나오는 음의 부호를 잊는 것. 그러면 (A)에서 번갈아 나타나는 부호가 망가진다.
- $\sin 3\theta$로 나누면서, 대입하는 값에서 그것이 0이 아니어야 한다는 점을 밝히지 않는 것.
- 코탄젠트의 곱에서 코시컨트의 합을 얻으려 하는 것. 결합되는 것은 **합** (A)와 (B)이다.

STEP 너머

도함수를 함수로 나누는 이 기법이 바로 로그 미분법(logarithmic differentiation)이다. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln|f| = f'/f$는 곱을 합으로 바꾸어 준다. 더 나아가면 sin 자체를 그 영점들에 걸친 무한곱(infinite product)으로 쓸 수 있고, 여기에 로그 미분법을 적용하면 유명한 부분분수 전개(partial-fraction expansion) $\pi\cot\pi x = \sum_n \frac{1}{x-n}$을 얻는다. 항등식 $(*)$는 이것의 유한한 그림자이다. 이러한 아이디어는 복소해석학(complex analysis)에서 전개되며, Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 공부를 시작하기에 아름다운 책이다.

풀이

STEP I 2011, 문제 4

순수수학 • 포물선의 접선

> **STEP I 2011, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/11-s1-q4

핵심 아이디어

포물선(parabola) 위의 일반적인 점에서의 접선(tangent)을 분수가 없는 꼴로 쓰면, 두 접선의 교점은 빼기만 해도 바로 나온다. 각을 구할 때는 $\overrightarrow{FT}$와 $\overrightarrow{FP}$의 내적(scalar product)을 이용한다. 길이 계산은 보기보다 수월하다. FP는 초점 거리(focal distance)이고, FT^2은 인수분해된다. $\cos\phi$를 구하고 나면 그 답이 p와 q에 대하여 대칭이라는 점에 주목하자. 이 대칭성이 이등분 논증의 전부이다.

풀이

점 T

$y^2 = 4ax$를 음함수 미분(implicit differentiation)하면 $2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4a$이므로, $y = 2ap \neq 0$인($p \neq 0$이므로) 점 P에서 기울기는 $\dfrac{4a}{4ap} = \dfrac{1}{p}$이다. 따라서 P에서의 접선은

$$y - 2ap = \frac{x - ap^2}{p} \quad \Longleftrightarrow \quad py = x + ap^2,$$

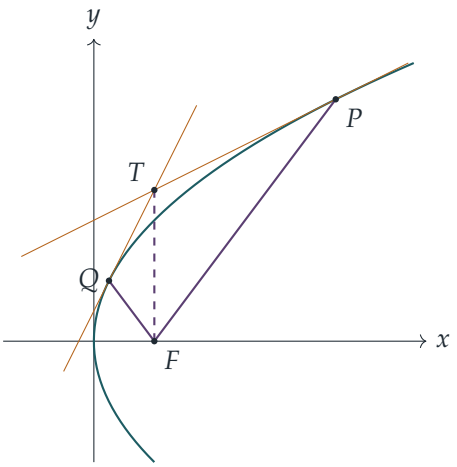
이고, 마찬가지로 Q에서의 접선은 $qy = x + aq^2$이다. 두 식을 빼면

$$(p - q)\,y = a(p^2 - q^2) = a(p - q)(p + q).$$

P와 Q는 서로 다른 점이므로 $p \neq q$이고, 따라서 $p - q$로 나누어 $y = a(p + q)$를 얻는다. 그러면

$$x = py - ap^2 = ap^2 + apq - ap^2 = apq,$$

이므로 T는 점 $\big(apq,\, a(p + q)\big)$이고, 이것이 구하는 결과이다.



그림은 $a=1$, $p=2$, $q=\frac{1}{2}$인 경우이며, 이때 FT는 마침 수직이다.

각 ϕ

먼저 $T \neq F$임에 주의하자. $T=F$이려면 $p+q=0$이고 $pq=1$이어야 하므로 $p^2=-1$이 되어 불가능하다. 따라서 각 TFP는 의미가 있다. $F=(a,0)$이므로

$$\overrightarrow{FP} = a\begin{pmatrix} p^2-1 \\ 2p \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{FT} = a\begin{pmatrix} pq-1 \\ p+q \end{pmatrix}.$$

길이는

$$FP^2 = a^2\left[(p^2-1)^2+4p^2\right] = a^2(p^2+1)^2,$$
$$FT^2 = a^2\left[(pq-1)^2+(p+q)^2\right] = a^2\left[p^2q^2+p^2+q^2+1\right] = a^2(p^2+1)(q^2+1),$$

이다. 교차항 $-2pq$와 $+2pq$가 상쇄되기 때문이다. 따라서 $FP=|a|(p^2+1)$이고 $FT=|a|\sqrt{(p^2+1)(q^2+1)}$이다.

> **생각해 보기** 내적이 인수분해되리라는 것을 어떻게 알아챌 수 있을까?

(p^2+1)이 FP와 약분되리라 예상되므로 이 인수를 찾아본다. 전개하면

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FT} &= a^2\left[(p^2-1)(pq-1)+2p(p+q)\right] \\ &= a^2\left[p^3q-p^2-pq+1+2p^2+2pq\right] \\ &= a^2\left[p^3q+pq+p^2+1\right] \\ &= a^2(p^2+1)(pq+1).\end{aligned}$$

따라서 $|a|^2=a^2$을 이용하면

$$\cos\phi = \frac{\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FT}}{FP\cdot FT} = \frac{a^2(p^2+1)(pq+1)}{a^2(p^2+1)\sqrt{(p^2+1)(q^2+1)}} = \frac{pq+1}{\sqrt{(p^2+1)(q^2+1)}},$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

이등분

T의 좌표는 p와 q에 대하여 대칭이므로, 위의 계산에서 P와 Q의 역할을 바꾸면 각 TFQ에 대하여

$$\cos\angle TFQ = \frac{qp+1}{\sqrt{(q^2+1)(p^2+1)}} = \cos\phi.$$

임을 알 수 있다. 두 각은 모두 $[0,\pi]$에 속하고, 이 구간에서 코사인은 일대일(one-to-one)이므로 $\angle TFP = \angle TFQ = \phi$이다.

따라서 반직선 FP와 FQ는 각각 반직선 FT와 각 ϕ를 이룬다. 평면에서 F를 시작점으로 하여 FT와 각 ϕ를 이루는 반직선은 두 개뿐이며, 이 둘은 직선 FT에 대하여 서로 대칭이다. 반직선 FP와 FQ는 같은 반직선이 아니다. 초점을 지나는 직선은 포물선과 F의 양쪽에 있는 두 점에서 만나므로(또는 한 점에서만 만나므로), F에서 시작하는 하나의 반직선이 P와 Q를 모두 지날 수는 없다. 그러므로 FP와 FQ는 직선 FT에 대하여 서로의 대칭이고, 이는 바로 직선 FT가 각 PFQ를 이등분(bisect)한다는 명제이다.

문제에서 굳이 **직선** FT라고 말하는 이유를 설명해 주는 세부 사항이 하나 있다. $pq+1>0$이면 $\phi<\frac{\pi}{2}$이고, 반직선 FT 자체가 각 $PFQ = 2\phi$의 내부에 놓인다. $pq+1<0$이면 $\phi>\frac{\pi}{2}$이고, 각 PFQ는 $2\pi-2\phi$이며, 이 각을 이등분하는 것은 TF를 F 너머로 연장한 부분이다. $pq=-1$이면 PQ는 초점현(focal chord)이고 $\phi=\frac{\pi}{2}$이며, FT는 PQ에 수직이어서 평각을 이등분한다. 어느 경우든 직선 FT는 각 PFQ를 이등분한다.

검산

그림처럼 $a=1$, $p=2$, $q=\frac{1}{2}$로 잡으면 $T=(1,\frac{5}{2})$, $\overrightarrow{FP}=(3,4)$, $\overrightarrow{FQ}=(-\frac{3}{4},1)$, $\overrightarrow{FT}=(0,\frac{5}{2})$이다. 그러면 $\cos\angle TFP=\frac{4}{5}$이고 $\cos\angle TFQ=\frac{1}{5/4}=\frac{4}{5}$이며, 이는 $\dfrac{2}{\sqrt{5\cdot\frac{5}{4}}}=\dfrac{4}{5}$와 일치한다. 컴퓨터로 a(양수와 음수 모두), p, q를 무작위로 10^5번 골라 시험한 결과, T의 좌표, $\cos\phi$의 공식, 그리고 이등분이 10^{-10} 이내에서 확인되었다. 여기에는 FT를 뒤쪽으로 연장한 부분이 이등분하는 $pq<-1$인 경우도 많이 포함되었다.

흔한 실수

- $p-q$가 왜 0이 아닌지(두 점이 서로 다르기 때문) 말하지 않고 $p-q$로 나누는 것.
- $FP=a(p^2+1)$이라고 쓰는 것. 이는 $a<0$이면 틀린다. $\cos\phi$에는 a^2만 나타나므로 결국 a의 부호는 상관없다.

- FP와 FQ가 왜 직선 FT의 반대쪽에 놓이는지 설명하지 않고 "코사인이 같으므로 FT가 이등분한다"고 말하는 것.

STEP 너머

이것은 모습을 바꾼 포물선의 반사 성질(reflective property)이다. 즉 외부의 어떤 점에서 그은 두 접선 선분을 초점에서 보면 같은 각으로 보인다. 타원(ellipse)과 쌍곡선(hyperbola)에서도 같은 성질이 성립하며, 세 경우 모두 이차곡선(conic)의 초점–준선(focus–directrix) 정의에서 나온다. 이 정의는 대학 1학년 기하학과 사영기하학(projective geometry) 강의에서 훨씬 더 깊이 다룬다. 이러한 성격의 문제를 더 원한다면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)가 무료로 공개되어 있으며 끝까지 풀어 볼 가치가 충분하다.

풀이

STEP I 2011, 문제 5

순수수학 • 절댓값이 있는 적분

STEP I 2011, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/11-s1-q5

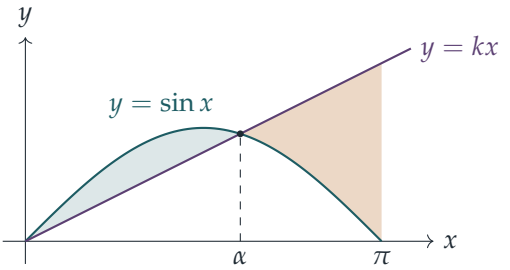
핵심 아이디어

절댓값(modulus) 기호는 $\sin x - kx$의 부호가 어디에서 바뀌는지 알기 전까지만 거추장스럽다. 그림이 답을 알려 준다. $x = \alpha$에서 단 한 번 바뀐다. 그 점에서 적분(integral)을 나누면 절댓값이 사라진다. 마지막 단계는 k를 변수로 생각하지 않는 것이다. $k = \sin\alpha/\alpha$이므로 모든 것을 α로 나타낼 수 있고, 그러면 I의 도함수(derivative)가 깔끔하게 인수분해된다.

풀이

유일한 근(root)

$g(x) = \sin x - kx$라 하자. 직선 $y = kx$는 원점을 지나고 기울기(gradient)가 $k < 1$이며, 곡선 $y = \sin x$는 기울기 $\cos 0 = 1$로 원점을 떠난다. 따라서 0의 바로 오른쪽에서는 사인 곡선이 직선보다 위에 있다. $x = \pi$에서 사인 곡선은 다시 0으로 돌아오지만 직선의 높이는 $k\pi > 0$이므로, 그곳에서는 직선이 위에 있다. $y = \sin x$는 $(0, \pi)$에서 아래로 휘어 있고 직선은 곧으므로, 둘은 그 사이에서 정확히 한 번 만난다.



"정확히 한 번"을 빈틈없이 보이자. $g(0) = 0$, $g'(x) = \cos x - k$이고, $(0, \pi)$에서 $g''(x) =$

$-\sin x < 0$이다. 따라서 g'은 순감소(strictly decreasing)하여 0에서의 값 $1-k>0$부터 π에서의 값 $-1-k<0$까지 변하고, 정확히 한 점 β에서만 영이 된다. 그러므로 g는 $(0,\beta]$에서 순증가(strictly increasing)하므로 그곳에서 양수이고(0에서 출발하므로), $[\beta,\pi)$에서는 양수 값에서 $g(\pi)=-k\pi<0$까지 순감소한다. 따라서 이 함수는 $(0,\pi)$에서 정확히 하나의 영점 α를 가지며,

$$\sin x > kx \text{ 단, } 0<x<\alpha, \qquad \sin x < kx \text{ 단, } \alpha<x<\pi.$$

I 계산하기

이 부호들(그림에서 청록색과 호박색 영역)을 이용하면

$$I=\int_0^{\alpha}(\sin x-kx)\,\mathrm{d}x-\int_{\alpha}^{\pi}(\sin x-kx)\,\mathrm{d}x.$$

$\sin x-kx$의 부정적분(antiderivative) 하나는 $F(x)=-\cos x-\frac{1}{2}kx^2$이므로

$$\begin{aligned} I &= \big(F(\alpha)-F(0)\big)-\big(F(\pi)-F(\alpha)\big)=2F(\alpha)-F(0)-F(\pi)\\ &= \big(-2\cos\alpha-k\alpha^2\big)+1-\big(1-\tfrac{1}{2}k\pi^2\big)\\ &= \tfrac{1}{2}k\pi^2-2\cos\alpha-k\alpha^2. \end{aligned}$$

α는 $(*)$의 해이므로 $k=\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$이고, 따라서 $k\alpha^2=\alpha\sin\alpha$이며

$$I=\frac{\pi^2\sin\alpha}{2\alpha}-2\cos\alpha-\alpha\sin\alpha,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

정류값(stationary value)

? **생각해 보기** α는 어떤 값을 가질 수 있는가?

각 $k\in(0,1)$마다 $\alpha\in(0,\pi)$가 하나 정해진다. 역으로, 각 $\alpha\in(0,\pi)$는 $k=\sin\alpha/\alpha$로부터 얻어지며, 그 구간에서 $0<\sin\alpha<\alpha$이므로 이 값은 $(0,1)$에 속한다. 따라서 열린구간(open interval) $(0,\pi)$의 모든 α에 대하여 $I(\alpha)$를 조사해야 한다.

첫째 항에 몫의 미분법(quotient rule)을 써서 미분하면

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\alpha} &= \frac{\pi^2(\alpha\cos\alpha-\sin\alpha)}{2\alpha^2}+2\sin\alpha-(\sin\alpha+\alpha\cos\alpha)\\ &= \frac{\pi^2(\alpha\cos\alpha-\sin\alpha)}{2\alpha^2}-(\alpha\cos\alpha-\sin\alpha)\\ &= (\alpha\cos\alpha-\sin\alpha)\left(\frac{\pi^2}{2\alpha^2}-1\right). \end{aligned}$$

첫째 인수는 $(0,\pi)$에서 결코 영이 되지 않는다. $h(\alpha) = \alpha\cos\alpha - \sin\alpha$라 하자. 그러면 $h(0) = 0$이고 $(0,\pi)$에서 $h'(\alpha) = \cos\alpha - \alpha\sin\alpha - \cos\alpha = -\alpha\sin\alpha < 0$이므로, 구간 전체에서 $h(\alpha) < 0$이다. (같은 말로, $(0, \frac{1}{2}\pi)$에서 $\tan\alpha > \alpha$이고, 그 너머에서는 $\cos\alpha \le 0$이다.)

따라서 $\mathrm{d}I/\mathrm{d}\alpha = 0$인 것은 정확히 $\pi^2 = 2\alpha^2$일 때, 즉 $\alpha = \pi/\sqrt{2}$일 때이며, 이 값은 실제로 $(0,\pi)$에 속한다. 이것이 유일한 정류값이다. $h < 0$이므로 $\mathrm{d}I/\mathrm{d}\alpha$의 부호는 $\frac{\pi^2}{2\alpha^2} - 1$의 부호와 반대이다.

- $0 < \alpha < \pi/\sqrt{2}$이면 $\frac{\pi^2}{2\alpha^2} > 1$이므로 $\mathrm{d}I/\mathrm{d}\alpha < 0$이다.
- $\pi/\sqrt{2} < \alpha < \pi$이면 $\frac{\pi^2}{2\alpha^2} < 1$이므로 $\mathrm{d}I/\mathrm{d}\alpha > 0$이다.

따라서 I는 감소하다가 증가한다. 그러므로 이 정류값은 극솟값(minimum)이고, 구간에서 유일한 정류점이므로 I의 가장 작은 값이다.

$\alpha = \pi/\sqrt{2}$에서는 $\dfrac{\pi^2}{2\alpha} = \dfrac{\pi^2}{\sqrt{2}\,\pi} = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}} = \alpha$이므로, I의 첫째 항과 셋째 항이 상쇄된다.

$$I_{\min} = \alpha\sin\alpha - 2\cos\alpha - \alpha\sin\alpha = -2\cos\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

$\pi/\sqrt{2} \approx 2.22$는 코사인이 음수인 $\frac{1}{2}\pi$와 π 사이에 있으므로, 이 값은 당연히 양수이다.

검산

- $k \to 0$이면 $\alpha \to \pi$이고 공식은 $I \to 2$를 주는데, 이는 $\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x$이다. $k \to 1$이면 $\alpha \to 0$이고 $I \to \frac{1}{2}\pi^2 - 2$인데, 이는 $\int_0^\pi (x - \sin x)\,\mathrm{d}x$이다.
- 수치로 계산하면 $-2\cos(\pi/\sqrt{2}) \approx 1.2114$이고, 이는 양 끝값 2와 $\frac{1}{2}\pi^2 - 2 \approx 2.935$보다 모두 작다. $k = \sin\alpha/\alpha \approx 0.3582$로 두고 $\int_0^\pi |\sin x - kx|\,\mathrm{d}x$를 중점법(midpoint rule)으로 직접 수치적분해도 1.2114를 얻는다.

흔한 실수

- k를 상수로 취급하면서 α에 대해 미분하는 것. k는 α에 의존하며, 바로 그 때문에 먼저 $k = \sin\alpha/\alpha$를 대입하는 것이다.
- $\alpha = \pi/\sqrt{2}$에서만 $\mathrm{d}I/\mathrm{d}\alpha = 0$임을 보이고, $\alpha\cos\alpha - \sin\alpha$가 $(0,\pi)$에서 영점을 갖지 않음을 보이는 것을 잊는 것.

STEP 너머

유일한 근에 대한 논증은 중간값 정리(intermediate value theorem)와 순단조성(strict monotonicity)을 함께 사용하고, 최소화 과정은 $\alpha \mapsto k$가 $(0, \pi)$와 $(0, 1)$ 사이의 전단사(bijection)라는 사실, 즉 α에 대해 최소화하는 것이 k에 대해 최소화하는 것과 같다는 사실을 조용히 사용한다. 이러한 재매개화(reparametrisation)와 존재 논증을 엄밀하게 만드는 것은 실해석학(real analysis) 첫 강의가 다루는 일이다. Abbott의 *Understanding Analysis*는 공부를 시작하기에 훌륭한 책이다.

풀이

STEP I 2011, 문제 6

순수수학 • 이항급수의 합

STEP I 2011, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/11-s1-q6

핵심 아이디어

$(1-x)^{-3}$의 계수(coefficient)를 알고 나면, 여기에 다항식(polynomial)을 곱하는 일은 이웃한 계수 몇 개를 섞는 것에 지나지 않는다. 따라서 더 복잡한 유리함수(rational function)의 계수도 거의 공짜로 얻는다. 이 과정을 거꾸로 읽으면, 항이 (다항식, 변수는r) $\times\, x^r$ 꼴인 급수(series)는 그것을 생성하는 유리함수가 무엇인지 알아본 뒤 알맞은 x의 값, 여기서는 $x=\frac{1}{2}$를 대입하여 그 합을 구할 수 있다.

풀이

첫 번째 결과

$|x|<1$일 때 지수(index)가 -3인 이항전개(binomial expansion)에 의해

$$(1-x)^{-3}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-3)(-4)\cdots(-3-r+1)}{r!}(-x)^r.$$

분자는 r개의 인수로 이루어지고 각 인수는 음수이므로, 그 곱은 $(-1)^r\,\dfrac{(r+2)!}{2!}$이며, 이 $(-1)^r$은 $(-x)^r$에서 나오는 부호와 상쇄된다. 따라서 x^r의 계수는

$$a_r=\frac{(r+2)!}{2!\,r!}=\tfrac{1}{2}(r+1)(r+2),$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. (따라서 $a_0=1, a_1=3, a_2=6, a_3=10, \ldots$)

소문항 (i)

다음과 같이 쓴다.

$$\frac{1-x+2x^2}{(1-x)^3} = (1-x+2x^2)\sum_{k\geq 0} a_k x^k.$$

x^r항은 $1\cdot a_r x^r$, $-x\cdot a_{r-1}x^{r-1}$, $2x^2\cdot a_{r-2}x^{r-2}$에서 생기므로, $r\geq 2$일 때 x^r의 계수는

$$\begin{aligned} a_r - a_{r-1} + 2a_{r-2} &= \tfrac{1}{2}(r+1)(r+2) - \tfrac{1}{2}r(r+1) + (r-1)r \\ &= (r+1) + r^2 - r \\ &= r^2+1. \end{aligned}$$

> **생각해 보기** a_{r-1}이나 a_{r-2}가 존재하지 않는 $r=0$과 $r=1$에서도 이 식이 성립하는가?

그렇다. $a_{-1}=a_{-2}=0$으로 두면, 식 $\frac{1}{2}(r+1)(r+2)$도 $r=-1$과 $r=-2$에서 0이 되므로 위의 계산은 모든 $r\geq 0$에 대하여 성립한다. 직접 확인해 보면, 상수항은 $a_0=1=0^2+1$이고 x의 계수는 $a_1-a_0=2=1^2+1$이다. 따라서 모든 $r\geq 0$에 대하여 x^r의 계수는 r^2+1이고, 이것이 구하려던 결과이다.

급수를 보면, 분자 $1,2,5,10,17,26,37,50,\ldots$은 $r=0,1,2,\ldots$에 대한 r^2+1이고 분모는 2^r이다. 따라서 이 급수는

$$\sum_{r=0}^{\infty}(r^2+1)\left(\tfrac{1}{2}\right)^r,$$

이며, 이것은 위의 전개식에 $x=\frac{1}{2}$를 대입한 것이다. $(1-x)^{-3}$의 이항전개는 $|x|<1$에서 수렴(converge)하므로 이 대입은 정당하다. 따라서

$$1+\frac{2}{2}+\frac{5}{4}+\frac{10}{8}+\cdots = \frac{1-\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{1/8} = 8.$$

소문항 (ii)

먼저 할 일은 규칙을 찾는 것이다. 각 항을 분모가 $1,2,4,8,16,32,64$가 되도록 다시 쓰면

$$1,\ \frac{4}{2},\ \frac{9}{4},\ \frac{16}{8},\ \frac{25}{16},\ \frac{36}{32},\ \frac{49}{64},\ \cdots$$

이므로, 이 급수는 $\displaystyle\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(r+1)^2}{2^r}$이다.

> **생각해 보기** $(1-x)^3$ 위에 어떤 분자를 올려야 계수가 $(r+1)^2$이 되는가?

소문항 (i)을 보면 (이번에도 짧은 다항식인) 분자 $1+x$를 시도해 볼 만하다. $(1+x)(1-x)^{-3}$에서 x^r의 계수는

$$a_r + a_{r-1} = \tfrac{1}{2}(r+1)(r+2) + \tfrac{1}{2}r(r+1) = \tfrac{1}{2}(r+1)(2r+2) = (r+1)^2,$$

이고, 이는 (앞에서처럼 $a_{-1}=0$으로 두면) 모든 $r \geq 0$에 대하여 성립한다. $x = \frac{1}{2}$를 대입하면

$$1+2+\frac{9}{4}+2+\frac{25}{16}+\cdots = \frac{1+\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{3}{2}\cdot 8 = 12.$$

다른 방법: 소문항 (i)을 이용하기. $s = r+1$로 첨자를 옮기면 $2^{-r} = 2\cdot 2^{-s}$이므로

$$\sum_{r\geq 0}\frac{(r+1)^2}{2^r} = 2\sum_{s\geq 1}\frac{s^2}{2^s} = 2\left(\sum_{s\geq 0}\frac{s^2+1}{2^s} - \sum_{s\geq 0}\frac{1}{2^s}\right) = 2(8-2) = 12,$$

이다. 여기서 소문항 (i)의 답과 등비급수(geometric series) $\sum 2^{-s} = 2$를 이용하였다.

검산

- $(1-x)^{-3}$을 $(1+x+x^2+\cdots)^3$으로 보고 손으로 전개하거나, 몇 항을 직접 곱해 보면 $1+3x+6x^2+10x^3+\cdots$을 얻으며, 이는 $\frac{1}{2}(r+1)(r+2)$와 일치한다.
- 소문항 (i) 급수의 부분합(partial sum)은 8에 가까워진다. 200개의 항을 더하면 그 합은 기계 정밀도 수준까지 8과 일치한다. 극한이 12인 소문항 (ii)에서도 마찬가지이다.
- 소문항 (ii)의 두 방법은 같은 답 12를 준다.

흔한 실수

- 이항계수의 부호를 틀리는 것: $(-3)(-4)\cdots$에서 r개의 음의 부호가, $(-x)^r$에서 r개의 음의 부호가 나오며, 이들은 서로 상쇄된다.
- 소문항 (ii)에서 일부 분수가 기약분수(lowest terms)로 주어져 있어서 규칙을 잘못 읽는 것: $2 = \frac{4}{2} = \frac{16}{8}$이고 $\frac{9}{8} = \frac{36}{32}$이다.
- 전개식이 그 점에서 수렴한다는 사실($|x|<1$)을 언급하지 않고 $x = \frac{1}{2}$를 대입하는 것.

STEP 너머

우리가 지금까지 한 일은 **생성함수**(*generating function*)를 이용한 것이다. 수열 $c_0, c_1, c_2, \ldots$을 멱급수(power series) $\sum c_r x^r$로 나타내면, 수열에 대한 연산이 함수에 대한

대수 계산이 된다. 사실 r에 대한 임의의 다항식에 x^r을 곱한 것의 합은 분모가 $(1-x)$의 거듭제곱인 유리함수가 되며, 이 때문에 이러한 합은 언제나 유리식으로 나온다. x의 값을 대입하는 것이 정당함을 보이려면 멱급수와 그 수렴반지름(radius of convergence)에 대한 이론이 필요한데, 이는 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)에서 다룬다. 문제 해결 도구로서의 생성함수에 대해서는 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(STEP 대비 고급 문제집)를 참고하라.

풀이

STEP I 2011, 문제 7

순수수학 • 변수분리형 미분방정식

STEP I 2011, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/11-s1-q7

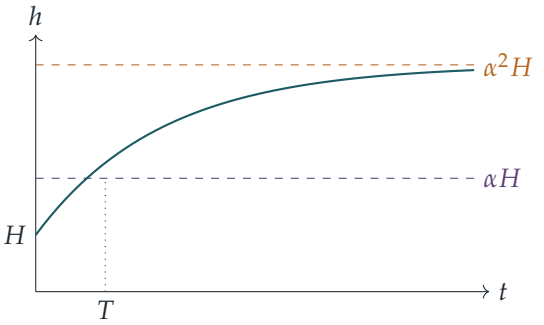
핵심 아이디어

부피는 (일정한 넓이) × 높이이므로, 높이의 변화율(rate of change)은 단순히 (유입량 − 유출량)을 넓이로 나눈 것이다. "높이가 일정하게 유지된다"는 표현이 유입량을 결정하는 단서이다. 그 높이에서는 유입량과 유출량이 정확히 균형을 이룬다. 그 뒤로는 각 소문항이 변수분리형 미분방정식(separable differential equation)이 되고, 소문항 (ii)에서는 치환(substitution) $u = \sqrt{h}$를 하면 적분이 평범한 계산으로 바뀐다.

풀이

일정한 단면적(cross-sectional area)을 A, 일정한 유입률(inflow rate)을 q(단위 시간당 부피)라 하자. 물의 부피는 Ah이므로

$$A\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = q - (\text{유출률}).$$



높이는 H에서 출발하여 유입량과 유출량이 균형을 이루는 수준 $\alpha^2 H$를 향해 올라가며, 점

점 더 가까워지지만 결코 도달하지는 않는다. 문제는 αH에 이르기까지 시간이 얼마나 걸리는가이며, $1 < \alpha < \alpha^2$이므로 이 높이는 두 값 사이에 있다. (그림은 소문항 (i)의 경우를 나타낸다.)

소문항 (i)

어떤 상수 $\lambda > 0$에 대하여 유출률은 λh이므로

$$A\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = q - \lambda h.$$

$h = \alpha^2 H$일 때 높이가 일정하게 유지되므로 그곳에서 $\mathrm{d}h/\mathrm{d}t = 0$이고, 따라서 $q = \lambda\alpha^2 H$이다. 이를 대입하면

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{\lambda}{A}\left(\alpha^2 H - h\right) = k\left(\alpha^2 H - h\right), \qquad k = \frac{\lambda}{A} > 0,$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다.

높이가 올라가는 동안 내내 $H \le h < \alpha^2 H$이므로 $\alpha^2 H - h > 0$이고, 변수를 분리할 수 있다.

$$\begin{aligned} kT &= \int_H^{\alpha H} \frac{\mathrm{d}h}{\alpha^2 H - h} = \Big[-\ln\left(\alpha^2 H - h\right) \Big]_H^{\alpha H} = \ln\frac{\alpha^2 H - H}{\alpha^2 H - \alpha H} \\ &= \ln\frac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{\alpha(\alpha-1)} = \ln\frac{\alpha+1}{\alpha} = \ln\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right), \end{aligned}$$

여기서 $\alpha > 1$이므로 $\alpha - 1 \neq 0$을 약분하였다. 이것이 요구된 결과이다.

α가 클 때 $x = 1/\alpha$는 작으므로

$$kT \approx \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2\alpha^2} \approx \frac{1}{\alpha},$$

이다. α가 크면 둘째 항은 첫째 항에 비해 무시할 수 있기 때문이다.

소문항 (ii)

이제 어떤 상수 $\mu > 0$에 대하여 유출률은 $\mu\sqrt{h}$이므로 $A\,\mathrm{d}h/\mathrm{d}t = q - \mu\sqrt{h}$이다. 높이는 $h = \alpha^2 H$에서 일정하므로 ($\alpha > 0$을 이용하면) $q = \mu\sqrt{\alpha^2 H} = \mu\alpha\sqrt{H}$이다. 따라서

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = c\left(\alpha\sqrt{H} - \sqrt{h}\right), \qquad c = \frac{\mu}{A} > 0.$$

이번에도 $h < \alpha^2 H$인 동안 괄호 안은 양수이므로

$$cT' = \int_H^{\alpha H} \frac{\mathrm{d}h}{\alpha\sqrt{H} - \sqrt{h}}.$$

? **생각해 보기** 분모에 있는 $\sqrt{h}$는 어떻게 처리할까?

$u = \sqrt{h}$로 치환하면 $h = u^2$, $\mathrm{d}h = 2u\,\mathrm{d}u$이고, 적분 구간의 끝은 $u = \sqrt{H}$와 $u = \sqrt{\alpha H}$가 된다. 간단히 $a = \alpha\sqrt{H}$라 쓰면 피적분함수는 유리함수(rational function)가 되고, 나눗셈을 하면

$$\frac{2u}{a-u} = -2 + \frac{2a}{a-u}.$$

따라서

$$\begin{aligned} cT' &= \int_{\sqrt{H}}^{\sqrt{\alpha H}} \left(-2 + \frac{2a}{a-u}\right) \mathrm{d}u = \Big[-2u - 2a\ln(a-u)\Big]_{\sqrt{H}}^{\sqrt{\alpha H}} \\ &= -2\left(\sqrt{\alpha H} - \sqrt{H}\right) + 2\alpha\sqrt{H}\,\ln\frac{\alpha\sqrt{H} - \sqrt{H}}{\alpha\sqrt{H} - \sqrt{\alpha}\sqrt{H}} \\ &= 2\sqrt{H}\left(1 - \sqrt{\alpha} + \alpha\ln\frac{\alpha-1}{\alpha - \sqrt{\alpha}}\right). \end{aligned}$$

$u \le \sqrt{\alpha H} < \alpha\sqrt{H} = a$이므로($\alpha > 1$이면 $\sqrt{\alpha} < \alpha$이기 때문이다) 로그 안의 값은 모두 양수이다. 마지막으로 $\alpha - 1 = (\sqrt{\alpha} - 1)(\sqrt{\alpha} + 1)$, $\alpha - \sqrt{\alpha} = \sqrt{\alpha}(\sqrt{\alpha} - 1)$로 인수분해하면

$$\frac{\alpha - 1}{\alpha - \sqrt{\alpha}} = \frac{\sqrt{\alpha} + 1}{\sqrt{\alpha}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha}},$$

이므로

$$cT' = 2\sqrt{H}\left(1 - \sqrt{\alpha} + \alpha\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)\right),$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다.

α가 클 때 $1/\sqrt{\alpha}$는 작으므로

$$\alpha\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) \approx \alpha\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{2\alpha}\right) = \sqrt{\alpha} - \frac{1}{2}.$$

큰 항 $\pm\sqrt{\alpha}$가 상쇄되어

$$cT' \approx 2\sqrt{H}\left(1 - \sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha} - \tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{H}.$$

만 남는다. 여기서는 로그의 x^2 항이 필요했다는 점에 주목하자. $\ln(1+x) \approx x$만 사용하면 괄호 안이 1이 되어 $2\sqrt{H}$를 얻게 되는데, 이는 틀린 값이다. 문제에서 두 항까지의 근사(approximation)를 주는 이유가 바로 이것이다.

검산

- $\alpha \to 1^+$일 때 (i)에서 $kT \to \ln 2$이며 0이 아니다. 이는 옳다. 평형(equilibrium)까지의 간격은 처음에 $(\alpha^2 - 1)H \approx 2(\alpha - 1)H$이고 $(\alpha^2 - \alpha)H \approx (\alpha - 1)H$로 줄어들어야 하므로 간격이 절반이 되며, 비율 k인 지수적 감소(exponential decay)에서 절반이 되는 데 걸리는 시간은 $(\ln 2)/k$이다. (ii)에서는 $cT' \to 2\sqrt{H}\ln 2$인데, 이는 $h = H$ 근처에서 $\sqrt{h}$를 선형화(linearising)하여 얻는 유효 비율 $c/(2\sqrt{H})$로 똑같이 절반이 되는 것과 일치한다.

- $\alpha = 4$, $H = 1$일 때 $kT = \ln 1.25 \approx 0.2231$이고 $cT' = 2(-1 + 4\ln 1.5) \approx 1.2437$이다. 여러 무작위 H, α, k, c에 대하여 두 미분방정식을 수치적으로(룽게-쿠타(Runge–Kutta) 방법) 풀어 보면 두 공식이 모두 10^{-9} 이내로 재현된다.
- $\alpha = 10^4$, $H = 2$일 때 $\alpha \ln(1 + 1/\alpha) \approx 0.99995$이고 $cT'/\sqrt{H} \approx 1.0066$이므로 극한값과 들어맞는다(다음 항까지 고려하면 $cT' \approx \sqrt{H}\,(1 + \frac{2}{3\sqrt{\alpha}})$이다).

흔한 실수

- 평형 조건을 이용하여 유입률을 소거하는 것을 잊어, 상수가 너무 많이 남는 경우.
- 소문항 (ii)에서 $\ln(1 + x) \approx x$만 사용하여 결정적인 $-\frac{1}{2}$를 잃어버리는 경우.
- $\sqrt{\alpha^2 H}$를 $\alpha^2\sqrt{H}$로 쓰는 경우.

STEP 너머

두 모형은 모두 $h = \alpha^2 H$에서 안정 평형(stable equilibrium)을 갖는 1계 자율 미분방정식(first-order autonomous differential equation) $\dot{h} = f(h)$이다. 선형인 경우는 모습만 바꾼 뉴턴(Newton)의 냉각 법칙이고, $\sqrt{h}$인 경우는 구멍을 통한 유출에 관한 토리첼리(Torricelli)의 법칙이다. 방정식을 명시적으로 풀지 않고 평형점과 그 안정성을 연구하는 것이 상미분방정식(ODE)의 정성적 이론(qualitative theory)의 출발점이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 앞부분의 장들에서 자율 방정식과 탱크 혼합 모형을 다룬다.

풀이

STEP I 2011, 문제 8

순수수학 • 디오판토스 방정식

> **STEP I 2011, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/11-s1-q8

핵심 아이디어

세제곱 함수는 순증가(strictly increasing)하므로, m^3을 n^3, $(n+1)^3$과 비교하는 것은 m을 n, $n+1$과 비교하는 것과 같다. m이 연속한 두 정수 사이에 **엄격하게** 놓이면 m은 정수일 수 없다. 그러면 직접 확인해야 할 n의 값은 몇 개만 남는다. 소문항 (ii)에서는 같은 끼워 넣기(squeeze)를 새로운 방정식에 적용한다.

풀이

풀이 전체에서 $x \mapsto x^3$이 $\mathbb{R}$ 전체에서 순증가한다는 사실을 이용한다. 따라서 실수 a, b에 대하여

$$a < b \iff a^3 < b^3.$$

소문항 (i)(a)

$(*)$로부터

$$m^3 - n^3 = n^2 + 1 > 0,$$

이다. $n^2 \geq 0$이기 때문이다. 따라서 $m^3 > n^3$이고, 그러므로 $m > n$이다.

다음으로, $m < n+1$일 필요충분조건은 $m^3 < (n+1)^3$이다. $(*)$를 이용하여 전개하면

$$\begin{aligned} m^3 < (n+1)^3 &\iff n^3 + n^2 + 1 < n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\ &\iff 0 < 2n^2 + 3n, \end{aligned}$$

이고, 이것이 요구된 동치이다. 모든 단계를 거꾸로 되짚을 수 있으므로 "필요충분조건"이 성립한다.

이제 $2n^2+3n = n(2n+3)$이다. 이것은 근이 $n=-\frac{3}{2}$와 $n=0$이고 최고차항의 계수가 양수인 이차식이므로, 정확히 $n<-\frac{3}{2}$ 또는 $n>0$일 때 양수이다. 이러한 n에 대해서는 $m>n$과 $m<n+1$이 모두 성립한다. 따라서

$$n<m<n+1 \quad \text{단, 예외는} \quad -\tfrac{3}{2}\le n\le 0.$$

소문항 (i)(b)

m과 n이 $(*)$를 만족하는 정수라고 하자. $n<-\frac{3}{2}$ 또는 $n>0$이면 (a)에 의해 $n<m<n+1$이다. 연속한 정수 n과 $n+1$ 사이에 엄격하게 놓이는 정수는 없으므로 이는 불가능하다.

> **생각해 보기** (a)는 모든 실수 n에 대하여 성립한다. 정수라는 조건은 어디에서 쓰이는가?

두 번 쓰인다. 위에서 본 것처럼 구간 밖의 모든 n을 배제하고, 또 구간 $-\frac{3}{2}\le n\le 0$을 $n\in\{-1,0\}$으로 줄여 준다. 두 값을 모두 확인한다.

- $n=0$: $m^3=0+0+1=1$이므로 $m=1$이다.
- $n=-1$: $m^3=-1+1+1=1$이므로 $m=1$이다.

두 경우 모두 m이 정수이다. 따라서 정수해는 $(m,n)=(1,0)$과 $(1,-1)$뿐이며, 이것이 요구된 결과이다.

소문항 (ii)

소문항 (i)을 그대로 따라 한다. 먼저 p를 q와 비교하면

$$p^3-q^3=2q^2-1,$$

이고, 이것은 $q^2>\frac{1}{2}$일 때마다, 즉 $q\neq 0$인 모든 정수에 대하여 양수이다. 이러한 q에 대해서는 $p>q$이다.

다음으로 p를 $q+1$과 비교하면

$$\begin{aligned} p^3<(q+1)^3 &\iff q^3+2q^2-1<q^3+3q^2+3q+1 \\ &\iff 0<q^2+3q+2=(q+1)(q+2). \end{aligned}$$

이것은 정확히 $q>-1$ 또는 $q<-2$일 때 성립한다.

두 결과를 합치자. q가 $q\neq 0, q\neq -1, q\neq -2$인 정수이면 $q<p<q+1$이므로 p는 정수일 수 없다. ($q\ge 1$ 또는 $q\le -3$이면 두 조건이 모두 성립한다.) 그러면 $q\in\{-2,-1,0\}$이 남는다.

- $q = 0$: $p^3 = -1$이므로 $p = -1$이다.
- $q = -1$: $p^3 = -1 + 2 - 1 = 0$이므로 $p = 0$이다.
- $q = -2$: $p^3 = -8 + 8 - 1 = -1$이므로 $p = -1$이다.

세 경우 모두 p가 정수이므로, 정수해는

$$(p, q) = (-1, 0), \quad (0, -1), \quad (-1, -2).$$

검산

각 답을 다시 대입해 본다. 예를 들어 $(-1)^3 = -1 = (-2)^3 + 2(-2)^2 - 1 = -8 + 8 - 1$이다. $|n|, |q| < 10^5$인 모든 정수에 대하여 컴퓨터로 탐색하면 $(*)$의 해 두 개와 소문항 (ii)의 해 세 개를 정확히 찾으며, 다른 해는 없다. 끼워 넣기를 수치로 확인해 볼 수도 있다. $n = 5$일 때 $m = \sqrt[3]{151} \approx 5.32$이고, 이 값은 5와 6 사이에 엄격하게 놓인다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)에서 $q = 0$을 빠뜨리는 것. 이 경우 $p^3 - q^3 = -1 < 0$이므로 하한 $p > q$가 성립하지 않아, 따로 확인해야 한다.
- 이유 없이 "$m^3 > n^3$이므로 $m > n$"이라고 쓰는 것. 이것은 세제곱이 순증가하기 때문에 참이며(제곱은 음수에서 이 성질이 성립하지 않는다), 이를 밝혀 둘 가치가 있다.
- $n < m < n + 1$에서 멈추고, 이것이 왜 m이 정수가 아님을 뜻하는지 설명하지 않는 것.

STEP 너머

$y^3 = f(x)$처럼 정수점을 묻는 방정식을 **디오판토스 방정식**(*Diophantine equations*)이라고 한다. 미지수를 연속한 거듭제곱 사이에 가두는 것은 이러한 방정식에 대한 표준적인 첫 공략법이다. $y^2 = x^3 + k$와 같은 더 어려운 형태는 타원곡선(elliptic curves)과 베이커(Baker)의 로그의 일차 형식(linear forms in logarithms) 이론으로 이어진다. 이들은 깊은 분야이지만, 여전히 많은 경우가 이와 같은 초등적인 범위 잡기로 해결된다. 대븐포트(Davenport)의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 초등 정수론에 대한 좋은 입문서이다.

풀이

STEP I 2011, 문제 9

역학 • 포물체 운동

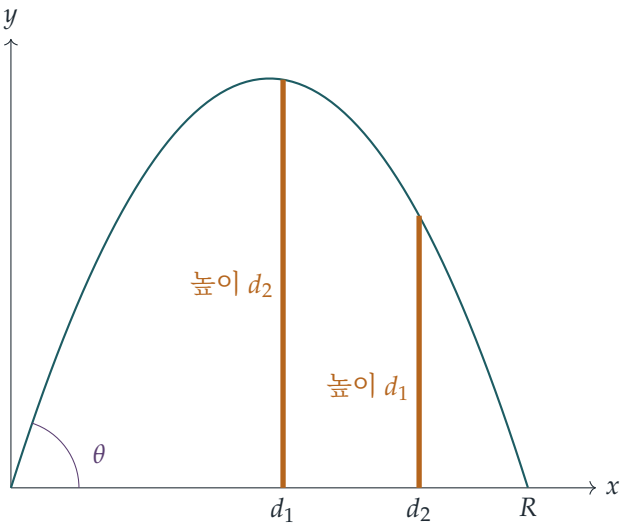
> **STEP I 2011, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/11-s1-q9

핵심 아이디어

궤적(trajectory)을 하나의 방정식 $y = x\tan\theta - ax^2$으로 쓴다. 여기서 상수 a는 g, 속력, 각도를 한데 묶은 것이다. 벽을 "간신히 넘는다"는 것은 경로가 벽의 꼭대기 모서리를 지난다는 뜻이므로, 벽 하나마다 두 미지수 $\tan\theta$와 a에 대한 일차방정식이 하나씩 생긴다. 이 연립방정식을 풀면 각도를 얻고, 사거리(range)는 $y = 0$의 나머지 한 근일 뿐이다.

풀이

입자를 공기 저항(air resistance) 없이 중력만 받아 움직이는 점으로 모형화한다. 입자는 원점 O에서 속력 u, 각도 θ로 던져지며, x는 수평 방향, y는 연직 위쪽 방향이다. 두 벽의 높이가 서로 다르므로 $d_1 \neq d_2$라고 가정한다.



(그림은 $d_1 < d_2$인 경우를 그린 것이지만, 계산은 어느 쪽이 더 큰지와 무관하다.)

궤적

시각 t에서 $x = ut\cos\theta$, $y = ut\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$이다. $t = x/(u\cos\theta)$로 시간을 소거하면

$$y = x\tan\theta - ax^2, \qquad \text{여기서} a = \frac{g}{2u^2\cos^2\theta} > 0.$$

$T = \tan\theta$로 놓는다. 입자는 각 벽을 간신히 넘으므로 벽의 꼭대기 (d_1, d_2)와 (d_2, d_1)을 지난다.

$$d_2 = d_1 T - ad_1^2, \tag{1}$$
$$d_1 = d_2 T - ad_2^2. \tag{2}$$

$\tan\theta$ 구하기

a를 소거하기 위해 (1)에 d_2^2를, (2)에 d_1^2을 곱하여 두 식의 a가 들어 있는 항이 모두 $ad_1^2d_2^2$이 되게 한다.

$$d_2^3 = d_1d_2^2\,T - ad_1^2d_2^2,$$
$$d_1^3 = d_1^2d_2\,T - ad_1^2d_2^2.$$

두 식을 빼면

$$d_2^3 - d_1^3 = d_1d_2(d_2 - d_1)\,T.$$

? **생각해 보기** $d_2 - d_1$로 나누어도 될까?

그렇다. 두 벽의 높이 d_2와 d_1은 서로 다르므로 $d_1 \neq d_2$이다. (만약 같다면 벽이 하나뿐인 셈이고, 한 점만으로는 θ와 u를 모두 결정할 수 없다.) $d_2^3 - d_1^3 = (d_2 - d_1)(d_2^2 + d_1 d_2 + d_1^2)$이므로 양변을 $d_1 d_2 (d_2 - d_1)$로 나누면

$$\tan\theta = \frac{d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2}{d_1 d_2},$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다.

사거리

입자는 $x \neq 0$이면서 $y = 0$인 곳, 즉 $x = T/a$에 떨어진다. 따라서 a도 구해야 한다. (1)을 d_1로, (2)를 d_2로 나누면

$$\frac{d_2}{d_1} = T - a d_1, \qquad \frac{d_1}{d_2} = T - a d_2.$$

둘째 식에서 첫째 식을 빼면 T가 사라진다.

$$a(d_2 - d_1) = \frac{d_2}{d_1} - \frac{d_1}{d_2} = \frac{(d_2 - d_1)(d_2 + d_1)}{d_1 d_2}, \qquad \text{따라서} \qquad a = \frac{d_1 + d_2}{d_1 d_2},$$

여기서도 $d_1 \neq d_2$를 이용하였다. 그러므로 사거리는

$$R = \frac{T}{a} = \frac{d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2}{d_1 d_2} \cdot \frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2} = \frac{d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2}{d_1 + d_2}.$$

타당성을 확인해 보면, $R - d_2 = \dfrac{d_1^2}{d_1 + d_2} > 0$이고 마찬가지로 $R - d_1 = \dfrac{d_2^2}{d_1 + d_2} > 0$이므로, 입자는 당연히 그래야 하듯 두 벽 너머에 떨어진다.

> **?** **생각해 보기** g와 u는 어디로 갔을까?

이 둘은 언제나 하나의 조합 a를 통해서만 나타나고, 두 벽이 a를 완전히 결정한다. 즉 $u^2 = g/(2a\cos^2\theta)$이다. 따라서 두 벽이 궤적 전체를 결정하며, 사거리는 d_1과 d_2에만 의존한다.

검산

- 대칭성: d_1과 d_2를 맞바꾸는 것은 두 벽을 맞바꾸는 것일 뿐이며, 두 답 모두 d_1, d_2에 대하여 대칭이다.
- 수치: $d_1 = 2$, $d_2 = 3$이면 $\tan\theta = \frac{19}{6}$, $a = \frac{5}{6}$, $R = \frac{19}{5}$이다. 이때 $y(2) = \frac{19}{3} - \frac{10}{3} = 3$, $y(3) = \frac{19}{2} - \frac{15}{2} = 2$로 요구 조건을 만족한다. $g = 9.8$로 놓고 운동을 수치적으로 단계별 계산해 보아도 $x = 3.8$에 떨어진다.

- $d_1^2 + d_2^2 \geq 2d_1d_2$이므로 $\tan\theta \geq 3$이고, 따라서 발사각은 언제나 가파르다(약 71.6° 이상). 이는 이치에 맞는다. 먼저 더 높은 벽을 넘은 뒤 곧바로 더 낮은 벽 높이까지 내려오려면 경로가 폭이 좁은 아치 모양이어야 하기 때문이다.

흔한 실수

- 어느 벽이 어느 높이인지 혼동하는 것: 거리 d_1에 있는 벽의 높이가 d_2이다.
- a를 $\cos^2\theta$ 대신 $\cos\theta$로 쓰거나, a를 하나의 미지수로 다루지 않아 u와 θ에 대한 복잡한 연립방정식이 남는 것.
- $d_2 - d_1$이 왜 0이 아닌지 밝히지 않고 그것으로 나누는 것.

STEP 너머

여기서의 요령은 두 개의 자유 매개변수(여기서는 $\tan\theta$와 a)를 가진 곡선족이 반드시 지나야 하는 두 점에 의해 결정된다는 것으로, 이는 보간(interpolation)의 작은 예이다. 미지수의 알맞은 조합을 고르는 같은 아이디어는 역학 곳곳에서 나타나는데, 예를 들어 발사 속력이 일정한 모든 궤적의 "포락선(envelope)", 즉 안전 포물선(parabola of safety)을 구할 때도 쓰인다. 대학 1학년 수준의 포물체 운동과 입자 역학을 더 공부하려면 Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 참고하라.

풀이

STEP I 2011, 문제 10

역학 • 탄성 충돌

> **STEP I 2011, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/11-s1-q10

핵심 아이디어

두 입자는 같은 지점에서 정지 상태로 출발하고, 놓은 순간부터 충돌할 때까지 일어나는 일(자유 낙하(free fall), 완전 탄성(perfectly elastic) 반사) 가운데 에너지를 잃는 것은 없다. 따라서 어떤 높이에서든 두 입자의 속력은 같고, 두 입자는 같은 높이에서 만난다. 그 뒤의 충돌은 두 식(운동량(momentum) 보존과 $e = 1$인 뉴턴의 반발 법칙(Newton's law of restitution))으로 푸는 전형적인 문제이고, B의 최고 높이는 다시 한 번 에너지로부터 얻어진다.

풀이

A와 B를 입자로 모형화하고, 공기 저항(air resistance)은 무시하며, 처음부터 끝까지 위쪽을 양의 방향으로 잡는다.

속력이 같은 이유

각 입자는 높이 h에서 정지 상태로 출발한다. 공중에 떠 있는 동안에는 중력만 작용하므로 역학적 에너지(mechanical energy)가 보존된다. 또 평면에서 A가 튀어 오르는 것은 완전 탄성 반사이므로, A의 속도의 방향만 바꿀 뿐 속력은 바꾸지 않고, 여기서도 에너지 손실은 없다. 그러므로 첫 충돌까지 각 입자의 단위 질량당 총에너지는 gh이고, 높이 y에 있는 입자의 속력 v는 다음을 만족한다.

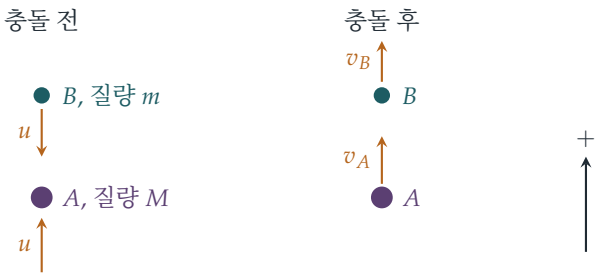
$$\tfrac{1}{2}v^2 + gy = gh, \qquad \text{따라서} \qquad v = \sqrt{2g(h-y)}.$$

속력은 높이에만 의존하며, 질량이나 입자가 지나온 경로에는 의존하지 않는다. 첫 충돌의 순간 두 입자는 같은 높이 y에 있으므로 속력이 같다. 게다가 A는 아직 P로 돌아오지 않았

으므로 $y < h$이고, 이 공통 속력 $u = \sqrt{2g(h-y)}$는 양수이다. A는 이미 튀어 올랐으므로 위로 움직이고 있고, B는 (한 번도 튀어 오르지 않았으므로) 아래로 움직이고 있다.

충돌

충돌 직전 A의 속도는 $+u$이고 B의 속도는 $-u$이다. 충돌 직후의 속도를 각각 v_A와 v_B라 하자.



충돌에서 생기는 충격력은 두 입자 사이의 내력이고, 충돌하는 순간 동안 중력이 주는 충격량(impulse)은 없으므로 운동량이 보존된다.

$$Mu - mu = Mv_A + mv_B. \tag{1}$$

충돌은 완전 탄성($e = 1$)이므로, 멀어지는 속력은 가까워지는 속력과 같다.

$$v_B - v_A = u - (-u) = 2u. \tag{2}$$

(2)에서 얻은 $v_B = v_A + 2u$를 (1)에 대입하면

$$(M-m)u = (M+m)v_A + 2mu \quad \Longrightarrow \quad v_A = \frac{(M-3m)u}{M+m},$$

이고, 따라서

$$v_B = v_A + 2u = \frac{(M-3m)u + 2(M+m)u}{M+m} = \frac{(3M-m)u}{M+m}.$$

이다. $M > 3m$이므로 $M - 3m > 0$이고, 따라서 $v_A > 0$이다. 또한 $v_B = v_A + 2u > 0$이다. 그러므로 요구한 대로 첫 충돌 후 두 입자는 모두 위로 움직인다.

생각해 보기 B가 다음에 A와 만나기 전에 실제로 비행의 최고점에 도달한다는 것을 어떻게 알 수 있을까?

충돌 후 두 입자의 가속도는 모두 $-g$이므로, 둘 다 공중에 있는 동안 상대 속도(relative velocity)는 $v_B - v_A = 2u$로 일정하다. 즉 B는 일정한 비율로 A로부터 멀어지고, A가 다음에 평면에 부딪히기 전에는 두 입자가 만날 수 없다. B가 아직 올라가고 있는 동안 A가 튀어

오르는 경우에는 단위 질량당 에너지를 비교해 보자. B의 에너지는 $\frac{1}{2}v_B^2 + gy$이고 A의 에너지는 $\frac{1}{2}v_A^2 + gy$인데, $v_B > v_A > 0$이므로 후자가 더 작다(그리고 A가 튀어 오를 때 에너지는 유지된다). 따라서 두 입자가 같은 높이에 있을 때마다 A의 속력은 B의 속력보다 작다. B가 아직 올라가고 있는 동안 아래에서 B를 따라잡으려면, 만나는 순간 A는 적어도 B만큼 빠르게 올라가고 있어야 하는데, 방금 본 것처럼 그럴 수 없다. 그러므로 두 번째 충돌은 B가 최고점을 지난 뒤에야 일어나고, 그 최고점이 바로 문제에서 묻는 최고 높이이다.

B의 최고 높이

충돌은 $u^2 = 2g(h-y)$를 만족하는 높이 y에서 일어난다. 즉

$$y = h - \frac{u^2}{2g}.$$

이다. 충돌 후 B는 처음 속력 v_B로 중력만 받으며 올라가므로, ($v = 0$일 때의 $v^2 = v_B^2 - 2gs$로부터) $v_B^2/(2g)$만큼 더 올라간다. 따라서 최고 높이는

$$\begin{aligned} y + \frac{v_B^2}{2g} &= h - \frac{u^2}{2g} + \frac{(3M-m)^2u^2}{2g(M+m)^2} \\ &= h + \frac{u^2}{2g(M+m)^2}\left[(3M-m)^2 - (M+m)^2\right] \\ &= h + \frac{u^2}{2g(M+m)^2}(2M-2m)(4M) \\ &= h + \frac{4M(M-m)u^2}{(M+m)^2 g}, \end{aligned}$$

이다. 셋째 줄에서는 제곱의 차 공식을 썼다. 이것이 구하는 결과이다.

검산

- 에너지: 위에서 구한 v_A와 v_B에 대해 $Mv_A^2 + mv_B^2 = (M+m)u^2$이고, 이는 탄성 충돌이 요구하는 바와 같다.
- 극한의 경우: $m \to 0$이면 $v_A \to u$, $v_B \to 3u$이고(매우 가벼운 공은 무거운 공에 부딪혀 움직이는 벽에 부딪힌 것처럼 튕겨 나가며, 그 공에 대해 상대 속도 $2u$로 멀어진다), 높이는 $h + 4u^2/g$가 되어 $y + 9u^2/(2g)$와 일치한다.
- $M > m$이므로 추가로 올라간 높이는 양수이다. 즉 B는 A로부터 에너지를 얻었으므로, 당연히 P보다 높이 올라간다.
- 수치적으로, $M > 3m$을 만족하는 무작위 질량과 무작위 h에 대해 무작위 시각에 B를 놓고, (A가 그 뒤에 튀어 오르는 것까지 포함하여) 두 번째 충돌까지 운동을 단계별로 계산해 보았더니, B의 최고 높이가 상대 오차 약 10^{-10} 이내로 공식과 일치하였다.

흔한 실수

- 부호 오류: 충돌 전 두 속도를 모두 $+u$로 잡으면 A가 올라가는 동안 B는 떨어지고 있다는 사실을 잊은 것이다.
- 추가로 올라가는 높이 $v_B^2/(2g)$를 충돌 높이 $h - u^2/(2g)$가 아니라 평면이나 P에서부터 재는 실수.

STEP 너머

속력이 높이에만 의존한다는 논증은 보존력(conservative force)에 대한 에너지 보존이다. 즉 어떤 점에서의 속력은 그 점의 퍼텐셜 에너지(potential energy)에만 의존하고, 지나온 경로에는 의존하지 않는다. 충돌 자체는 질량 중심 좌표계(centre-of-mass frame)에서 다루는 것이 가장 쉬운 경우가 많은데, 이 좌표계에서 탄성 충돌은 각 입자의 속도를 단순히 반대로 바꿀 뿐이다. 원래 좌표계로 되돌리면 v_A와 v_B를 한 줄로 얻는다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이 두 아이디어를 꼼꼼하게 전개한다.

풀이

STEP I 2011, 문제 11

역학 • 강체의 평형

STEP I 2011, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

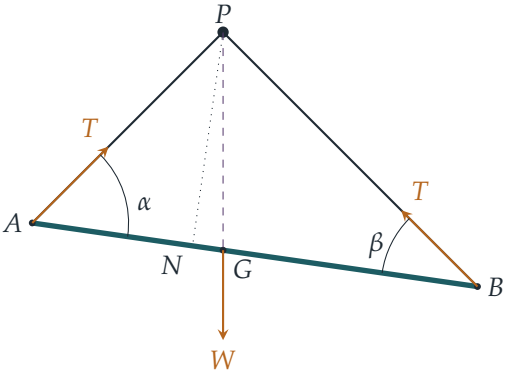
step.maths.org/questions/11-s1-q11

핵심 아이디어

막대에 작용하는 힘은 세 개뿐이다. A와 B에서의 두 줄의 장력(tension)과 G에 작용하는 무게이다. 못이 매끄러우므로(smooth) 두 장력은 크기가 같고, 따라서 무게가 모멘트를 갖지 않는 점 G에 대하여 모멘트(moment)를 취하면 곧바로 두 각 사이의 관계를 얻는다. 둘째 부분에서 추가로 필요한 사실은, 평형(equilibrium) 상태에 있고 모두 평행하지는 않은 세 힘은 한 점을 지나야 한다는 것이다. 여기서 그 점은 못이므로 PG는 연직이다.

풀이

막대는 강체 막대(rigid rod)로, 줄은 가볍고 늘어나지 않는(inextensible) 것으로, 못은 매끄러운 것으로 모형화한다. 막대의 무게를 W라 하자.



$3\sin\alpha = 4\sin\beta$임을 보이기

줄은 가볍고 매끄러운 못에 걸쳐 있으므로 장력 T는 줄 전체에서 같다. 따라서 막대에는 A에서 AP 방향으로 크기 T인 힘이, B에서 BP 방향으로 크기 T인 힘이 작용하고, 또 G에서 연직으로 W가 작용한다.

G에 대한 모멘트를 취한다. 무게는 모멘트를 갖지 않는다. $GB = 7d - 3d = 4d$이므로, G에서 직선 AP까지의 수직 거리는 $AG\sin\alpha = 3d\sin\alpha$이고, G에서 직선 BP까지의 수직 거리는 $GB\sin\beta = 4d\sin\beta$이다. A에서의 장력은 막대를 G에 대하여 한쪽으로 돌리고 B에서의 장력은 반대쪽으로 돌리므로, 평형이려면

$$T\cdot 3d\sin\alpha = T\cdot 4d\sin\beta \quad\Longrightarrow\quad 3\sin\alpha = 4\sin\beta,$$

이어야 하고, 이것이 보이려던 식이다($Td \neq 0$으로 나누었다).

줄의 길이

$\cos\beta = \frac{4}{5}$이면 $\sin\beta = \frac{3}{5}$이다(β는 삼각형의 한 각이므로 $\sin\beta > 0$). 그러면

$$\sin\alpha = \tfrac{4}{3}\sin\beta = \tfrac{4}{5}, \qquad \cos\alpha = \tfrac{3}{5},$$

이다. 여기서 α가 예각이므로 양의 근을 택하였다. 이제

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \tfrac{3}{5}\cdot\tfrac{4}{5} - \tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{3}{5} = 0,$$

이고 $0 < \alpha+\beta < \pi$이므로 $\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$이다. 따라서 삼각형 PAB는 P에서 직각이고 빗변은 $AB = 7d$이다. 그러므로

$$PA = 7d\cos\alpha = \tfrac{21}{5}d, \qquad PB = 7d\cos\beta = \tfrac{28}{5}d,$$

이고, 줄의 길이는

$$PA + PB = \tfrac{49}{5}d.$$

이다.

막대의 기울기

? **생각해 보기** 막대에 대한 P의 위치는 알지만, "연직"은 어느 방향인가?

두 장력은 P를 지나는 직선을 따라 작용하므로, 그 합력도 P를 지나며 작용한다. 평형이려면 이 합력이 무게와 균형을 이루어야 하므로, W와 크기가 같고 방향이 반대이며 같은 직선 위에 있어야 한다(평형 상태에 있는 평행하지 않은 세 힘은 한 점에서 만난다(concurrent)). 따라서 G를 지나는 연직선은 P를 지난다. 즉 PG는 **연직이다**.

P에서 AB에 내린 수선의 발을 N이라 하자. 직각삼각형 PAN에서

$$AN = PA\cos\alpha = \tfrac{21}{5}d \cdot \tfrac{3}{5} = \tfrac{63}{25}d, \qquad PN = PA\sin\alpha = \tfrac{21}{5}d \cdot \tfrac{4}{5} = \tfrac{84}{25}d.$$

이다. $AN = \frac{63}{25}d < 3d = AG$이므로 점 N은 A와 G 사이에 있고,

$$NG = 3d - \tfrac{63}{25}d = \tfrac{12}{25}d.$$

이다. 직각삼각형 PNG에서

$$\tan\angle PGN = \frac{PN}{NG} = \frac{84}{12} = 7.$$

이다. 각 PGN은 막대와 연직선 GP 사이의 각을 A 쪽에서 잰 것이다. 이 각은 예각이므로 끝점 A는 G를 지나는 수평선보다 위에, B는 그 아래에 있으며, 이는 주어진 배치와 일치한다. 막대와 수평선 사이의 각 θ는 $\frac{\pi}{2} - \angle PGN$이므로

$$\tan\theta = \frac{1}{\tan\angle PGN} = \frac{1}{7}, \qquad \text{즉,} \qquad \theta = \arctan\tfrac{1}{7},$$

이고, 이것이 보이려던 결과이다.

검산

- 줄의 길이 $\frac{49}{5}d = 9.8d$는 막대의 길이 $7d$보다 길며, 이는 삼각형 PAB에서 삼각부등식(triangle inequality)이 요구하는 바와 같다.
- 크기가 같은 두 장력의 합력은 두 힘 사이의 각을 이등분하므로, PG는 각 APB를 이등분한다. 각의 이등분선 정리(angle bisector theorem)에 따라 $PA : PB$는 $AG : GB = 3 : 4$와 같아야 하고, 실제로 $\frac{21}{5} : \frac{28}{5} = 3 : 4$이다.
- 수치 검산으로, P를 A와 B를 초점으로 하는 타원(이 줄 길이에서 못이 놓일 수 있는 위치의 집합) 위에 놓고, P 아래 G의 깊이가 정상값(stationary)을 갖는 기울기를 찾아보았다. 그 결과는 $8.13°$였으며, 이는 $\arctan\frac{1}{7} \approx 8.130°$와 일치한다.

흔한 실수

- 줄의 두 부분에 서로 다른 장력을 주는 것. 매끄러운 못은 가벼운 줄의 장력을 바꿀 수 없다.
- 거리를 바꾸어 $4\sin\alpha = 3\sin\beta$를 얻는 것. 더 긴 팔 $GB = 4d$는 B에서의 각과 짝을 이룬다.
- α가 예각임을 잊고 $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$를 허용하는 것. 그러면 다른 삼각형이 되고, 그 삼각형에서 $\alpha + \beta$는 직각이 아니다.

STEP 너머

줄의 길이가 고정되어 있으면 못은 A와 B를 초점(foci)으로 하는 타원(ellipse) 위에 있어야 한다. 그러면 PG가 각 APB를 이등분한다는 사실은 바로 타원의 반사 성질이다. 즉 P에서의 법선은 두 초점 반지름 사이의 각을 이등분한다. 또한 평형 위치는 정확히 퍼텐셜 에너지(potential energy)가 정상값을 갖는 위치이며, 이것은 대학 1학년 과정에서 배우는 가상일의 원리(principle of virtual work)와 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)의 출발점이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 평형, 토크(torque), 에너지 방법에 대해 읽기 좋은 책이다.

풀이

STEP I 2011, 문제 12

확률과 통계 • 대기열과 투표 문제

STEP I 2011, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/11-s1-q12

이 문제는 *Beyond STEP*의 9.10 절 **언제나 거스름돈을 내줄 수 있도록**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch09/ballot.html

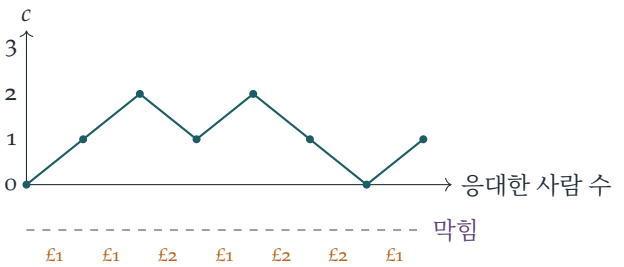
핵심 아이디어

하나의 수만 추적하면 된다. 바로 내가 들고 있는 £1 동전의 개수이다. £1을 내는 손님은 그 수를 하나 늘리고, £2를 내는 손님은 하나 줄인다(받은 £2 동전은 거스름돈으로 쓸 수 없으므로 그냥 가지고 있는다). 내가 꼼짝 못 하게 되는 것은 정확히 £2 손님이 왔는데 내게 £1 동전이 하나도 없을 때이다. £2 손님이 몇 명뿐이라면 위험은 모두 줄의 앞부분에 몰려 있으므로, 처음 몇 사람을 살펴보고 각 시작 방식이 어떤 상황을 남기는지 따져 본다.

풀이

중요한 것은 줄에 선 동전의 배열 패턴뿐이고, 사람이 누구인지는 상관없다. 사람들의 모든 배열이 같은 확률로 일어나므로, 주어진 자리에 서는 사람은 아직 배치되지 않은 사람 가운데 누구든 같은 확률을 가진다. 따라서 줄을 앞에서부터 차례로 만들어 갈 수 있다. £1 동전을 가진 사람이 a명, £2 동전을 가진 사람이 b명 남아 있다면, 다음 사람이 £1 동전을 가졌을 확률(probability)은 $\frac{a}{a+b}$이고 £2 동전을 가졌을 확률은 $\frac{b}{a+b}$이다.

내가 가진 £1 동전의 개수를 c라 하자. 모든 사람에게 팔 수 있을 필요충분조건은 c가 0 아래로 내려갈 필요가 전혀 없는 것이다. 즉 줄의 어느 시점에서든 지금까지 응대한 £1 손님의 수가 £2 손님의 수 이상이어야 한다.



그림은 성공하는 줄을 보여 준다. c의 경로가 점선에 한 번도 닿지 않는다.

소문항 (i)

£2 손님이 한 명이면, 막히는 유일한 경우는 그 사람이 줄의 맨 앞에 서서 내게 거스름돈이 전혀 없을 때이다. 다른 누군가가 맨 앞에 서면, £2 손님이 도착할 무렵 나는 적어도 하나의 £1 동전을 가지고 있다. £2 손님은 $m+1$개의 자리 중 어느 곳에나 같은 확률로 서므로

$$\mathrm{P}(\text{모두에게 판매}) = 1 - \frac{1}{m+1} = \frac{m}{m+1}.$$

소문항 (ii)

£1 손님을 1, £2 손님을 2로 쓰고, 줄의 시작 방식을 나열해 보자.

- 첫 사람이 2이면 곧바로 막힌다.
- 줄이 1, 2, 2로 시작하면 c는 1, 0으로 변하고, 세 번째 사람에서 막힌다.
- 줄이 1, 1로 시작하면 두 사람 뒤에 $c = 2$이다. £2 손님은 모두 두 명뿐이고 c는 그중 한 명을 응대할 때만 줄어들므로, c는 결코 $2 - 2 = 0$ 아래로 내려가지 않는다. 성공이다.
- 줄이 1, 2, 1로 시작하면 c는 1, 0, 1로 변하고, £2 손님은 한 명만 남으므로 c는 결코 0 아래로 내려가지 않는다. 성공이다.

이 경우들이 모든 가능성을 다루므로, 모든 사람에게 팔 수 있는 것은 정확히 줄이 1, 1 또는 1, 2, 1로 시작할 때이다. 줄을 앞에서부터 만들어 가면

$$\mathrm{P}(1,1) = \frac{m}{m+2} \cdot \frac{m-1}{m+1}, \quad \mathrm{P}(1,2,1) = \frac{m}{m+2} \cdot \frac{2}{m+1} \cdot \frac{m-1}{m} = \frac{2(m-1)}{(m+2)(m+1)}.$$

이 사건들은 서로 배반(disjoint)이므로

$$\mathrm{P}(\text{모두에게 판매}) = \frac{m(m-1)+2(m-1)}{(m+2)(m+1)} = \frac{(m-1)(m+2)}{(m+2)(m+1)} = \frac{m-1}{m+1},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. (마지막 인수에서 £1 손님이 $m-1 \geq 1$명 남아 있으려면 $m \geq 2$가 필요하다.)

소문항 (iii)

이제 £2 손님이 세 명이다. 다시 처음 세 사람을 살펴보자.

- 2로 시작하거나 1, 2, 2로 시작하면: (ii)와 똑같이 막힌다.
- 1, 1, 1로 시작하면: $c = 3$이고, 세 명의 £2 손님은 최악의 경우에도 c를 0까지만 낮출 수 있다. 성공이다.
- 1, 1, 2 또는 1, 2, 1로 시작하면: 두 경우 모두 세 사람 뒤에 $c = 1$이고, 남은 것은 £1 동전을 가진 $m-2$명과 £2 동전을 가진 2명이 무작위 순서로 선 줄이다.

생각해 보기 마지막 경우에, 나머지 줄은 언제 실패하는가?

$c = 1$로 나머지 줄을 시작하는 것은, £2 손님이 두 명인 줄의 맨 앞에 £1 손님 한 명이 공짜로 서 있는 것과 같다. 즉 모습을 바꾼 소문항 (ii)이다. $c = 1$이고 £2 손님이 두 명만 남았을 때, 막히는 것은 정확히 다음 두 사람이 모두 £2 손님일 때이다. c가 0이 된 뒤 응대할 수 없게 된다. 다음 두 사람 중 누구라도 £1 동전을 가졌다면 c는 결코 0 아래로 내려가지 않는다((ii)에서처럼 1, ...와 2, 1, ...를 확인해 보라). 처음 세 사람 이후 남은 m명 가운데에서

$$\mathrm{P}(\text{다음 두 명이 모두2}) = \frac{2}{m}\cdot\frac{1}{m-1},$$
$$\text{따라서}\quad \mathrm{P}(\text{나머지 성공}) = 1 - \frac{2}{m(m-1)} = \frac{(m-2)(m+1)}{m(m-1)},$$

이다. 여기서 $m^2 - m - 2 = (m-2)(m+1)$을 이용했다.

$D = (m+3)(m+2)(m+1)$이라 하자. 쓸모 있는 시작 방식들의 확률은

$$\mathrm{P}(1,1,1) = \frac{m(m-1)(m-2)}{D},$$
$$\mathrm{P}(1,1,2) = \frac{m\cdot(m-1)\cdot 3}{D}, \qquad \mathrm{P}(1,2,1) = \frac{m\cdot 3\cdot(m-1)}{D}.$$

이다. 시작 방식들은 서로 배반이고, 어떤 방식으로 시작하든 나머지 줄은 다시 무작위 순서이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\text{성공}) &= \frac{m(m-1)(m-2)}{D} + \frac{6m(m-1)}{D}\cdot\frac{(m-2)(m+1)}{m(m-1)}\\ &= \frac{(m-2)\big[m(m-1)+6(m+1)\big]}{D} = \frac{(m-2)(m^2+5m+6)}{D}\\ &= \frac{(m-2)(m+2)(m+3)}{(m+3)(m+2)(m+1)} = \frac{m-2}{m+1},\end{aligned}$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. (여기서 $m \geq 3$이면 $m-1 \geq 2$이므로 조건부 확률(conditional probability)이 의미를 가진다.)

검산

- 가장 작은 경우: $m = n$이면 공식은 $n = 1, 2, 3$에 대해 각각 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$를 준다. $m = n = 2$일 때 1과 2의 여섯 가지 패턴은 같은 확률로 일어나고, 그중 1122와 1212만 성공하므로 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$이다. ✓
- m이 클 때: 세 확률 모두 1로 수렴하는데, £1 동전이 넉넉할 때 마땅히 그래야 한다.
- 줄의 순서를 모두 나열해 보면, $m = 5$일 때 $n = 1, 2, 3$에 대해 $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$를 얻으며, 이는 $\frac{m}{m+1}$, $\frac{m-1}{m+1}$, $\frac{m-2}{m+1}$와 일치한다. 또한 14 이하의 모든 m에 대해 공식이 정확히 맞는지도 확인했다.

흔한 실수

- 받은 £2 동전은 거스름돈으로 쓸 수 없다는 사실을 잊는 것. £1 동전만 셈에 들어간다.
- 사람들을 고정된 확률 $\frac{m}{m+n}$을 가진 독립적인 추출로 취급하는 것. 줄은 비복원추출(without replacement)로 만들어지므로, 사람이 배치될 때마다 확률이 바뀐다.
- (iii)에서 세 사람 뒤에 $c = 1$이면 언제나 안전하다고 가정하여, 1, 1, 2, 2, 2나 1, 2, 1, 2, 2와 같은 실패를 놓치는 것.

STEP 너머

일반적으로 모든 $n \leq m$에 대해 확률은 $\frac{m+1-n}{m+1}$이다. 이것이 **투표 문제**(ballot problem)이며, 가장 깔끔한 증명은 **반사 원리**(reflection principle)를 이용한다. 막히는 수준에 닿는 경로를 반사하면 다른 곳에서 끝나는 경로를 얻게 되고, 이로써 나쁜 줄의 개수가 하나의 이항계수(binomial coefficient)로 바뀐다. $m = n$일 때 좋은 줄의 개수는 카탈랑 수(Catalan number)인데, 이 수는 조합론 곳곳에 등장한다. 랜덤 워크(random walk)와 반사 원리에 대해서는 Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)을 보라.

풀이

STEP I 2011, 문제 13

확률과 통계 • 연속확률변수

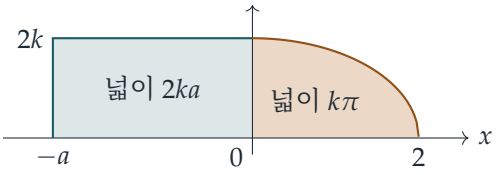
STEP I 2011, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/11-s1-q13

핵심 아이디어

밀도함수(density)의 그래프를 그려 보자. 이 그래프는 $[-a, 0)$ 위의 높이 $2k$인 직사각형과 $[0, 2]$ 위의 반지름 2인 사분원(quarter-circle)을 세로로 k배 한 것을 이어 붙인 모양이다. 그래프 아래의 넓이가 곧 확률이므로, 적분을 하지 않아도 직사각형과 사분원만으로 대부분의 계산을 할 수 있다. 전체 넓이는 1이어야 하고, 이 조건에서 k가 정해진다. 그다음부터 d에 관한 모든 물음은 어떤 점의 오른쪽에 넓이가 얼마나 있는지를 묻는 문제로 귀결된다.



풀이

k 구하기

$[0, 2]$에서 $\sqrt{4 - x^2}$의 그래프는 원 $x^2 + y^2 = 4$의 4분의 1이므로

$$\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{4}\pi \cdot 2^2 = \pi.$$

(주어진 원시함수(antiderivative)로 계산해도 $2\arcsin 1 + 0 - 0 = \pi$로 일치한다.) 따라서 전체 확률은 $2ka + k\pi = 1$이고,

$$k = \frac{1}{2a + \pi}.$$

소문항 (i)

기댓값(expectation) $\mathrm{E}(X)$의 적분을 0에서 나눈다.

$$\int_{-a}^{0} 2kx\,\mathrm{d}x = k\left[x^2\right]_{-a}^{0} = -ka^2.$$

두 번째 부분에서는 $(4-x^2)^{3/2}$의 도함수(derivative)가 $-3x(4-x^2)^{1/2}$이므로

$$\int_{0}^{2} kx\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x = k\left[-\tfrac{1}{3}(4-x^2)^{3/2}\right]_{0}^{2} = k\cdot\tfrac{1}{3}\cdot 8 = \tfrac{8}{3}k.$$

두 부분을 더하면

$$\mathrm{E}(X) = k\left(\frac{8}{3} - a^2\right) = \frac{8-3a^2}{3(2a+\pi)}.$$

소문항 (ii)

0의 오른쪽에 있는 확률은 사분원의 넓이이다.

$$\mathrm{P}(X>0) = k\pi = \frac{\pi}{2a+\pi}.$$

생각해 보기 $\mathrm{P}(X>0)$를 알면 어떻게 d의 부호를 알 수 있을까?

밀도함수가 $(-a,2)$에서 양수이므로, 함수 $t \mapsto \mathrm{P}(X>t)$는 $-a \le t \le 2$에서 연속(continuous)이고 순감소(strictly decreasing)한다. 이 함수는 1에서 0까지 줄어들므로 $\mathrm{P}(X>d) = \frac{1}{10}$을 만족하는 d는 정확히 하나 있다. 함수가 감소하므로 $d<0$일 필요충분조건은 $\mathrm{P}(X>0) < \frac{1}{10}$이다. 다시 말해, 0의 오른쪽에 있는 확률이 10분의 1보다 작을 때 d는 음수이다.

이제 $2a > 9\pi$라고 하자. 그러면 $2a+\pi > 10\pi$이므로

$$\mathrm{P}(X>0) = \frac{\pi}{2a+\pi} < \frac{1}{10},$$

따라서 구하는 대로 $d<0$이다. (이 논증은 거꾸로도 성립한다. 즉 $d<0$이면 $2a>9\pi$이다.)

이 경우 $-a \le d < 0$이므로, d의 오른쪽 넓이는 직사각형 중 d부터 0까지의 폭 $-d$인 부분과 사분원 전체를 합한 것이다.

$$\mathrm{P}(X>d) = 2k(-d) + k\pi = \frac{\pi-2d}{2a+\pi}.$$

이것을 $\frac{1}{10}$과 같다고 놓으면 $10\pi - 20d = 2a+\pi$이므로

$$d = \frac{9\pi - 2a}{20}.$$

이 값은 실제로 $[-a,0)$에 속한다. $2a>9\pi$이므로 음수이고, $d \ge -a$는 $9\pi+18a \ge 0$과 동치인데 이는 참이다.

소문항 (iii)

이제 $d = \sqrt{2} > 0$이므로 d는 원 모양 부분 아래에 있고

$$\mathrm{P}(X > \sqrt{2}) = k\int_{\sqrt{2}}^{2} \sqrt{4 - x^2}\,\mathrm{d}x.$$

주어진 결과를 이용하면

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{2}}^{2} \sqrt{4 - x^2}\,\mathrm{d}x &= \left[2\arcsin\left(\tfrac{1}{2}x\right) + \tfrac{1}{2}x\sqrt{4 - x^2}\right]_{\sqrt{2}}^{2} \\ &= \left(2 \cdot \tfrac{\pi}{2} + 0\right) - \left(2 \cdot \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2}\right) \\ &= \frac{\pi}{2} - 1.\end{aligned}$$

(기하적으로 이것은 $x = \sqrt{2}$에서의 현(chord)이 잘라 낸 활꼴(circular segment)이다. 그 넓이는 원판의 8분의 1인 $\frac{\pi}{2}$에서 넓이가 1인 직각삼각형을 뺀 것과 같다.) 따라서

$$\frac{\frac{\pi}{2} - 1}{2a + \pi} = \frac{1}{10} \quad \Longrightarrow \quad 5\pi - 10 = 2a + \pi \quad \Longrightarrow \quad a = 2\pi - 5.$$

이 값은 양수이고($a \approx 1.283$), $2a \leq 9\pi$를 만족하므로 $d > 0$이라는 점에서 소문항 (ii)와도 일치한다.

검산

- 소문항 (i)에서 $a = 1$이면 평균은 $\frac{5}{3(2+\pi)} \approx 0.3242$이다. 표본 2×10^5개로 몬테카를로 시뮬레이션(Monte Carlo simulation)을 하면 0.3236이 나왔다.
- 소문항 (ii)의 공식은 경계인 $2a = 9\pi$에서 $d = 0$을 주므로 조건과 맞는다. $a = 20$이면 $d = \frac{9\pi - 40}{20} \approx -0.586$이고, $\mathrm{P}(X > d) = \frac{1}{10}$을 수치적으로 풀어도 같은 값이 나온다.
- 소문항 (iii)에서 $a = 2\pi - 5$일 때 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 $\mathrm{P}(X > \sqrt{2}) = 0.1000$이다.

흔한 실수

- k를 모르는 채로 두는 것. 정규화(normalisation) 조건 $2ka + k\pi = 1$이 숨겨진 첫 단계이며, 모든 답은 a만으로 나타내어진다.
- 소문항 (ii)에서 사분원을 빠뜨리고 $\mathrm{P}(X > d) = -2kd$라고만 쓰는 것. $[0, 2]$ 위의 확률도 모두 음수인 d의 오른쪽에 있다.
- $\int_{-a}^{0} 2kx\,\mathrm{d}x$의 부호를 틀리는 것. 구간 전체에서 $x < 0$이므로 이 값은 음수이다.

STEP 너머

값 d는 X의 상위 10% 점, 곧 0.9-분위수(quantile)이다. 이를 구하는 것은 누적분포함수(cumulative distribution function) F의 역함수를 구하는 것이며, 바로 이 역함수가 균등분포를 따르는 확률변수로부터 다른 확률변수를 시뮬레이션할 때 쓰인다(역변환 샘플링(inverse transform sampling)). 한쪽은 평평하고 다른 쪽은 휘어진 이 밀도함수의 혼합된 모양은 분위수를 왜 구간별로 나누어 구해야 하는 경우가 많은지 보여 준다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 분포함수와 분위수를 꼼꼼히 다룬다.

풀이

STEP II 2011, 문제 1

순수수학 • 제곱근이 있는 방정식

> **STEP II 2011, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/11-s2-q1

핵심 아이디어

두 소문항 모두 제곱근의 합을 다루는데, 정의역(domain), 양 끝점에서의 값, 대칭성을 찾고 나면 그래프를 쉽게 이해할 수 있다. 소문항 (i)에서는 그림이 부등식(inequality)을 알려 준다. 곡선은 어떤 높이 아래로 절대 내려가지 않고, 직선은 단 한 점에서만 그 높이에 도달할 수 있으므로 실제로 풀 것이 없다. 소문항 (ii)에서는 그래프가 근이 몇 개일지 알려 주고, 이를 이용해 제곱할 때 생기는 여분의 근을 버릴 수 있다.

풀이

소문항 (i)

$f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{3+x}$라 하자. 두 제곱근이 모두 실수가 되려면 $1-x \geq 0$이고 $3+x \geq 0$이어야 하므로 정의역은 $-3 \leq x \leq 1$이다. 양 끝에서 $f(-3) = 2+0 = 2$이고 $f(1) = 0+2 = 2$이다.

$x = -1+t$로 놓으면 $f = \sqrt{2-t} + \sqrt{2+t}$이고, 이 식은 t를 $-t$로 바꾸어도 변하지 않으므로 곡선은 $x = -1$에 대하여 대칭이다. 미분하면

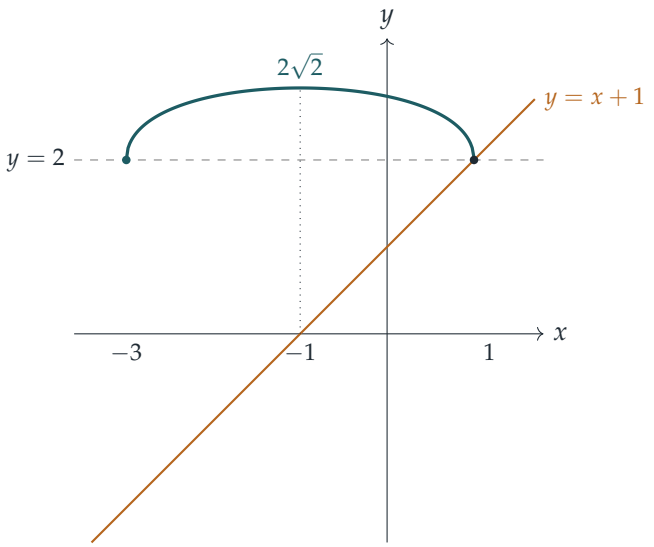
$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}} + \frac{1}{2\sqrt{3+x}},$$

이고, 이 값은 $1-x = 3+x$일 때, 즉 $x = -1$에서만 0이 되며, 이때 $f(-1) = 2\sqrt{2}$이다. $x < -1$이면 $3+x < 1-x$이므로 $f'(x) > 0$이고, $x > -1$이면 $f'(x) < 0$이다. 따라서 f는 2에서 최댓값 $2\sqrt{2}$까지 증가했다가 다시 2로 감소한다. $x = -3$ 근처에서는 f'의 둘째 항이 한없이 커지므로 곡선은 $(-3, 2)$에서 수직으로 출발하고, 마찬가지로 $(1, 2)$에 수직으로 도달한다. f의 각 항이 오목(concave)하므로 곡선 전체는 매끄러운 모자 모양이다.

최솟값을 더 깔끔하게 보는 방법은 제곱하는 것이다.

$$f(x)^2 = (1-x) + (3+x) + 2\sqrt{(1-x)(3+x)} = 4 + 2\sqrt{(1-x)(3+x)} \geq 4,$$

따라서 정의역 전체에서 $f(x) \geq 2$이고, 등호는 $x = -3$과 $x = 1$에서만 성립한다.



이제 직선 $y = x + 1$을 생각하자. 정의역에서 $x \leq 1$이므로 $x + 1 \leq 2$이고, 등호는 $x = 1$에서만 성립한다. 한편 $f(x) \geq 2$이다. 따라서 $f(x) = x + 1$이 성립하려면 양변이 모두 2가 되어야 하고, 이는 $x = 1$에서만 일어난다. 확인해 보면 $\sqrt{0} + \sqrt{4} = 2 = 1 + 1$이다. 그러므로 방정식을 만족하는 실수는 정확히 하나이다.

$$x = 1.$$

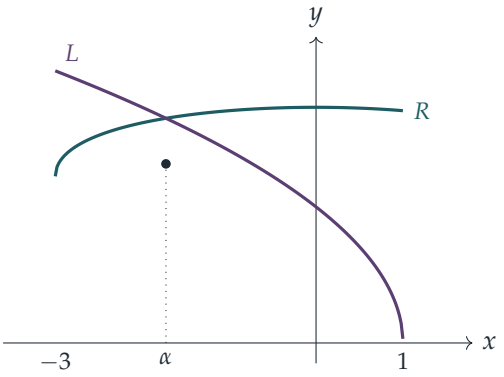
($[-3, 1]$ 밖에서는 좌변이 정의되지 않으므로 다른 후보는 없다.)

소문항 (ii)

이번에도 $x \leq 1$, $x \geq -3$, $x \leq 3$이어야 하므로 정의역은 $[-3, 1]$이다. 다음 두 함수를 비교하자.

$$L(x) = 2\sqrt{1-x} \qquad \text{그리고} \qquad R(x) = \sqrt{3+x} + \sqrt{3-x}.$$

L은 $L(-3) = 4$에서 $L(1) = 0$까지 순감소(strictly decreasing)한다. R은 소문항 (i)의 곡선과 같은 모양이다. R은 $x = 0$에 대하여 대칭이고(x와 $-x$를 맞바꾸어 보라), $R(\pm 3) = \sqrt{6}$이며 최댓값은 $R(0) = 2\sqrt{3}$이고, $[-3, 0]$에서 증가하고 $[0, 3]$에서 감소한다. 우리의 정의역에서는 $x = -3$부터 $x = 1$까지의 부분만 보이며, 여기서 $R(1) = 2 + \sqrt{2}$이다.



$x = -3$에서 $L = 4 > \sqrt{6} = R$이고, $x = 0$에서 $L = 2 < 2\sqrt{3} = R$이다. $[-3, 0]$에서 L은 순감소하고 R은 증가하므로 $L - R$은 순감소하며, 부호가 정확히 한 번 바뀐다. $[0, 1]$에서는 $L \leq 2$이고 $R \geq 2 + \sqrt{2}$이므로 교점이 없다. 따라서 실근은 **정확히 하나**이고, 그 근은 $-3 < x < 0$에 있다.

근을 구하기 위해 제곱한다. 양변이 모두 음이 아니므로 제곱해도 잃는 것이 없다.

$$\begin{aligned} & 4(1-x) = (3+x) + (3-x) + 2\sqrt{9-x^2} \\ \iff \quad & -1 - 2x = \sqrt{9-x^2}. \end{aligned}$$

? **생각해 보기** 한 번 더 제곱할 때, 새 방정식의 해 가운데 어느 것이 진짜 해인가?

우변은 제곱근이므로 ≥ 0이다. 따라서 진짜 해가 되려면 $-1 - 2x \geq 0$, 즉 $x \leq -\frac{1}{2}$이어야 한다. 이 조건 아래에서는 제곱하는 과정을 되돌릴 수 있다.

$$1 + 4x + 4x^2 = 9 - x^2 \iff 5x^2 + 4x - 8 = 0 \iff x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{11}}{5}.$$

근 $\frac{-2+2\sqrt{11}}{5} \approx 0.93$은 $x \leq -\frac{1}{2}$를 만족하지 않으므로 버린다. 다른 근 $\frac{-2-2\sqrt{11}}{5} \approx -1.73$은 이 조건을 만족하고, 그래프가 예측한 대로 $[-3, 0]$에 있다. 따라서 유일한 해는

$$x = -\frac{2 + 2\sqrt{11}}{5}.$$

검산

- $x \approx -1.72665$에서 $2\sqrt{1-x} \approx 3.3025$이고 $\sqrt{3+x} + \sqrt{3-x} \approx 1.1284 + 2.1741 \approx 3.3025$이다. 양변이 일치한다.
- 버린 근 $x \approx 0.92665$에서는 $L \approx 0.542$이지만 $R \approx 3.42$이다. 이 값은 실제로 $\sqrt{3+x} - \sqrt{3-x} = 2\sqrt{1-x}$의 해이며, 이 방정식도 제곱하면 같은 식이 된다.

- 소문항 (i)에서 $f(-1) = 2\sqrt{2} \approx 2.83 > 0 = (-1) + 1$이며, 이는 직선이 $(1,2)$를 제외한 모든 곳에서 곡선 아래에 있다는 사실과 일치한다.

흔한 실수

- 소문항 (i)에서 부등식 $f \geq 2 \geq x + 1$로 곧바로 해결되는데도, 제곱하여 대수적으로 푸는 것. 이 방법은 복잡하고 가짜 근(spurious root)이 생길 수 있다.
- $5x^2 + 4x - 8 = 0$의 두 근을 모두 남겨 두는 것. 제곱할 때마다 부호 조건이 필요하며, 여기서는 $-1 - 2x \geq 0$이다.
- 정의역을 잊는 것. $x > 1$에서는 두 방정식 모두 의미가 없다.

STEP 너머

소문항 (i)은 해석학에서 흔히 쓰는 기법의 작은 예이다. $f(x) = g(x)$를 직접 푸는 대신 $f \geq c \geq g$임을 보이고 등호가 언제 성립하는지 살펴본다. 소문항 (ii)는 중간값 정리(intermediate value theorem)와 단조성(monotonicity)을 함께 이용하여 근을 구하기 전에 근의 개수를 센다. 이것이 해석학 입문 과정에서 존재성과 유일성을 증명하는 방식이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해)는 연속성과 중간값 정리를 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP II 2011, 문제 2

순수수학 • 디오판토스 방정식

> **STEP II 2011, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/11-s2-q2

핵심 아이디어

$x^3 + y^3$이 보이면 언제나 인수분해(factorise)한다: $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$. $x+y$의 값이 정해지면((i)에서는 k, (ii)에서는 z^2), 인수 $x+y$가 kz^3의 일부와 약분되어 이차 조건만 남는다. 그 이차식을 완전제곱식으로 만들면(completing the square) "어떤 수 $= 3\times$ 완전제곱수(perfect square)" 꼴이 되고, 범위를 제한하면(bounds) 확인해야 할 세제곱수(cube)가 몇 개밖에 남지 않는다. 문제에서 먼저 10^3까지의 세제곱수를 묻는 것은 이 때문이다.

참고로: $1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000$.

풀이

소문항 (i)

$x + y = k$이므로

$$kz^3 = x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) = k(x^2 - xy + y^2),$$

이고 $k > 0$이므로 $z^3 = x^2 - xy + y^2$이다. $y = k - x$를 대입하면

$$\begin{aligned} z^3 &= x^2 - x(k-x) + (k-x)^2 \\ &= x^2 - kx + x^2 + k^2 - 2kx + x^2 \\ &= k^2 - 3kx + 3x^2, \end{aligned}$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

완전제곱수. 4를 곱하고 완전제곱식을 만들면

$$4z^3 - k^2 = 12x^2 - 12kx + 3k^2 = 3\big(4x^2 - 4kx + k^2\big) = 3(k-2x)^2.$$

따라서 $\dfrac{4z^3 - k^2}{3} = (k-2x)^2$은 정수 $k-2x$의 제곱이다.

범위. 위 식에서 $4z^3 = k^2 + 3(k-2x)^2 \geq k^2$이므로 $\frac{1}{4}k^2 \leq z^3$이다. 위쪽 범위를 구하기 위해 $3kx - 3x^2 = 3x(k-x) = 3xy$임에 주목하면

$$z^3 = k^2 - 3xy < k^2,$$

이다. x와 y가 양수이기 때문이다. 따라서 $\frac{1}{4}k^2 \leq z^3 < k^2$이다.

$k = 20$인 경우. $x + y = 20$인 해를 찾는다. 범위에서 $100 \leq z^3 < 400$이므로, 세제곱수 목록에서 $z^3 \in \{125, 216, 343\}$이다. 이제 $(4z^3 - 400)/3$이 완전제곱수인지 확인한다.

- $z = 5$: $(500 - 400)/3 = 100/3$, 정수가 아니다.
- $z = 6$: $(864 - 400)/3 = 464/3$, 정수가 아니다.
- $z = 7$: $(1372 - 400)/3 = 324 = 18^2$. ✓

따라서 $k = 20$일 때 $(k-2x)^2 = 18^2$이다. $x < y$이면 $2x < x + y = k$이므로 $k - 2x > 0$이고, 따라서 $k - 2x = 18$이며 $x = 1$, $y = 19$를 얻는다. 검산: $1^3 + 19^3 = 1 + 6859 = 6860 = 20 \times 343 = 20 \times 7^3$. 그러므로

$$x = 1, \quad y = 19, \quad z = 7$$

은 $k = 20$일 때 $(*)$의 해이다.

소문항 (ii)

이제 $x + y = z^2$이라 하자. 그러면

$$kz^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) = z^2(x^2 - xy + y^2),$$

이고, z^2으로 나누면($z > 0$이므로 가능하다) $x^2 - xy + y^2 = kz$를 얻는다.

> **생각해 보기** 여기서도 같은 "완전제곱수" 기법을 쓰려면 어떻게 해야 할까?

항등식(identity) $4(x^2 - xy + y^2) = (x+y)^2 + 3(x-y)^2$을 이용한다. 이것은 (i)에서 얻은 결과를 모양만 바꾼 것이다(우변을 전개하여 확인해 보라). $x + y = z^2$, $k = 19$를 대입하면

$$76z = z^4 + 3(y-x)^2, \qquad \text{즉} \qquad 3(y-x)^2 = z\,(76 - z^3).$$

$y > x$이므로 좌변은 양수이고, 따라서 $z^3 < 76$, 즉 $z \in \{1, 2, 3, 4\}$이다. $z(76 - z^3)/3$이 완전제곱수여야 한다.

- $z = 1$: $75/3 = 25 = 5^2$이므로 $y - x = 5$이다. 그러나 $x + y = 1$이므로 양의 정수로는 불가능하다.
- $z = 2$: $2 \times 68/3 = 136/3$, 정수가 아니다.
- $z = 3$: $3 \times 49/3 = 49 = 7^2$이므로 $y - x = 7$, $x + y = 9$이고, $x = 1$, $y = 8$을 얻는다.
- $z = 4$: $4 \times 12/3 = 16 = 4^2$이므로 $y - x = 4$, $x + y = 16$이고, $x = 6$, $y = 10$을 얻는다.

검산: $1^3 + 8^3 = 513 = 19 \times 27 = 19 \times 3^3$이고, $6^3 + 10^3 = 1216 = 19 \times 64 = 19 \times 4^3$이다. 따라서 $k = 19$일 때 $(*)$의 두 해는

$$(x, y, z) = (1, 8, 3) \quad \text{와} \quad (x, y, z) = (6, 10, 4).$$

이다. (사실 위 논증은 $x + y = z^2$인 해가 이 둘뿐임을 보여 준다.)

검산

- (i)의 항등식을 작은 경우로 확인한다: $k = 5$, $x = 2$, $y = 3$이면 $x^3 + y^3 = 35 = 5 \times 7$이고, $k^2 - 3kx + 3x^2 = 25 - 30 + 12 = 7$이다. ✓
- 위에서 한 것처럼 모든 답을 $(*)$에 다시 대입한다: $6860 = 20 \times 343$, $513 = 19 \times 27$, $1216 = 19 \times 64$.
- $x + y = 20$인 모든 $x < y$, 그리고 $k = 19$일 때 $x + y = z^2$인 모든 $x < y$에 대해 컴퓨터로 탐색하면 정확히 이 해들만 나오고 다른 해는 없다.

흔한 실수

- 부호를 잊는 실수: $(k - 2x)^2 = 18^2$에서 $k - 2x = -18$도 가능하지만, 이 경우 $x = 19 > y$가 되어 조건 $x < y$에 의해 제외된다.
- (ii)에서 $z = 1$을 해로 남겨 두는 실수: $y - x = 5$ 자체는 괜찮지만, $x + y = 1$과 동시에 성립할 수 없다.

STEP 너머

$x^3 + y^3 = kz^3$ 같은 방정식은 어떤 정수 k가 두 유리수의 세제곱의 합으로 나타나는지를 묻는다. 이 질문은 곧바로 타원곡선(elliptic curve)으로 이어지며, 아직도 완전히 해결되지 않았다. 유명한 택시 수(taxicab number) $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$도 같은 세계에 속한다. 여기서 쓴 기법들(인수분해, 완전제곱식 만들기, 그리고 범위를 제한하여 유한한 탐색으로

줄이기)은 초등 정수론(elementary number theory)의 기본 중의 기본이다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 다음 단계로 읽기에 훌륭한 책이다.

풀이

STEP II 2011, 문제 3

순수수학 • 단조성을 이용한 부등식

> **STEP II 2011, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/11-s2-q3

핵심 아이디어

여기 나오는 모든 부등식은 하나의 원리에서 나온다. 어떤 함수가 영에서 출발하고 그 도함수(derivative)가 음이 아니면, 그 함수는 계속 음이 아니다. 마지막 두 결과에는 한 가지 변형이 더해진다. 어떤 함수가 증가함수(increasing function)임을 알고 나면, 대소 관계를 이미 알고 있는 두 입력값(예를 들어 $x \leq \arcsin x$)을 넣어 출력값 사이의 부등식을 읽어 낼 수 있다. 어떤 두 입력값을 비교할지 알아차리는 것이 요령의 전부이다.

풀이

소문항 (i)(a)

$x\cos x$에 곱의 미분법(product rule)을 써서 미분하면

$$f'(x) = \cos x - (\cos x - x\sin x) = x\sin x.$$

$0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$에서는 $x \geq 0$이고 $\sin x \geq 0$이므로 $f'(x) \geq 0$이고, 따라서 f는 이 구간에서 증가한다.

그러므로 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$이면 $x \geq 0$이므로 $f(x) \geq f(0) = \sin 0 - 0 = 0$이고, 이것이 보이려던 것이다.

소문항 (i)(b)

$0 \leq x < 1$에서 $h(x) = \arcsin x - x$라 하자. 그러면 주어진 사실을 이용하여

$$h'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arcsin x) - 1 \geq 1 - 1 = 0,$$

을 얻는다. 따라서 h는 증가하고, $h(x) \geq h(0) = 0$이다. 즉 $0 \leq x < 1$에서 $\arcsin x \geq x$이다.

(주어진 사실은 단지 $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \geq 1$이라는 것이며, $0 < \sqrt{1-x^2} \leq 1$이므로 참이다.)

소문항 (i)(c)

$g(x) = \dfrac{x}{\sin x}$라 하자. $0 < x < \frac{1}{2}\pi$에서 몫의 미분법(quotient rule)을 쓰면

$$g'(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{f(x)}{\sin^2 x}.$$

(a)에 의해 이 구간에서 $f(x) \geq 0$이고 $\sin^2 x > 0$이므로 $g'(x) \geq 0$이며, g는 $(0, \frac{1}{2}\pi)$에서 증가한다.

> **생각해 보기** g가 증가한다는 사실이 $\arcsin x$를 포함한 부등식에 어떻게 도움이 되는가?

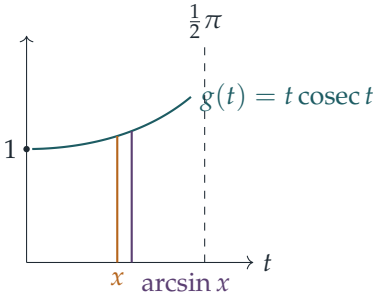
목표를 살펴보자: $\dfrac{\arcsin x}{x} \geq \dfrac{x}{\sin x}$. 우변은 $g(x)$이다. 좌변도 g의 함숫값이다. $y = \arcsin x$이면 $\sin y = x$이므로

$$g(y) = \frac{y}{\sin y} = \frac{\arcsin x}{x}.$$

따라서 $g(\arcsin x) \geq g(x)$를 보이면 되는데, g가 증가하므로 이는 (b)의 $\arcsin x \geq x$로부터 나온다.

마무리하기 위해 $0 < x < 1$이라 하고 $y = \arcsin x$라 하자. 그러면 $0 < y < \frac{1}{2}\pi$이다. 또 $0 < x < 1 < \frac{1}{2}\pi$이므로 x와 y 모두 g가 증가하는 구간에 있다. (b)에 의해 $y \geq x$이므로 $g(y) \geq g(x)$이다:

$$(\arcsin x)\, x^{-1} = \frac{y}{\sin y} \geq \frac{x}{\sin x} = x \operatorname{cosec} x \qquad (0 < x < 1).$$



그림은 $x = 0.8$일 때의 논증을 보여 준다. 입력값 $\arcsin x$가 x보다 오른쪽에 있으므로, 증가하는 곡선은 그곳에서 더 높다.

소문항 (ii)

(i)의 방식을 그대로 따른다. 먼저 (b)에 해당하는 결과이다. $x \geq 0$에서 $m(x) = x - \arctan x$라 하자. 주어진 사실에 의해 $m'(x) = 1 - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arctan x) \geq 0$이므로 $m(x) \geq m(0) = 0$이다. 따라서

$$\arctan x \leq x \qquad (x \geq 0).$$

다음은 (c)에 해당하는 결과이다. $0 < x < \frac{1}{2}\pi$에서 $k(x) = x^{-1}\tan x$라 하자. 분자와 분모에 $\cos^2 x$(양수)를 곱하고 다시 2를 곱하면

$$k'(x) = \frac{x\sec^2 x - \tan x}{x^2} = \frac{x - \sin x \cos x}{x^2 \cos^2 x} = \frac{2x - \sin 2x}{2x^2 \cos^2 x},$$

을 얻는다.

? **생각해 보기** 왜 $2x - \sin 2x \geq 0$인가?

이것은 $t \geq 0$일 때 성립하는 익숙한 부등식 $\sin t \leq t$에서 $t = 2x$로 둔 것이다. 이것도 다른 모든 것과 같은 방식으로 증명할 수 있다. $p(t) = t - \sin t$는 $p'(t) = 1 - \cos t \geq 0$이고 $p(0) = 0$이므로, $t \geq 0$에서 $p(t) \geq 0$이다.

따라서 $k'(x)$의 분자(numerator)는 음이 아니고 분모(denominator)는 양수이므로 $k'(x) \geq 0$이다. 그러므로 k는 $(0, \frac{1}{2}\pi)$에서 증가한다.

이제 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$라 하고 $y = \arctan x$라 하자. 그러면 $0 < y < \frac{1}{2}\pi$이므로 x와 y 모두 k가 증가하는 구간에 있고, $\tan y = x$이다. $y \leq x$이므로 $k(y) \leq k(x)$이다:

$$\frac{x}{\arctan x} = \frac{\tan y}{y} \leq \frac{\tan x}{x}.$$

x와 $\arctan x$는 모두 양수이므로, 양변에 $x\arctan x$를 곱해도 부등호의 방향은 바뀌지 않는다:

$$(\tan x)(\arctan x) \geq x^2 \qquad (0 < x < \tfrac{1}{2}\pi),$$

이것이 보이려던 것이다.

검산

- (c)에서 $x = \frac{1}{2}$일 때: $\arcsin(\frac{1}{2})/\frac{1}{2} = \pi/3 \approx 1.0472$이고, $\frac{1}{2}\operatorname{cosec}\frac{1}{2} \approx 1.0429$이다. 부등식이 아슬아슬하게 성립하는데, 이는 예상한 대로이다. $x \to 0$일 때 양변 모두 1로 수렴(converge)하기 때문이다.
- (ii)에서 $x = 1$일 때: $\tan 1 \cdot \arctan 1 = \frac{1}{4}\pi\tan 1 \approx 1.2232 \geq 1$.

- x가 작을 때 $\tan x \approx x + \frac{1}{3}x^3$이고 $\arctan x \approx x - \frac{1}{3}x^3$이므로, 곱은 $x^2 + O(x^6)$이다. 즉 (ii)의 부등식은 0 근처에서 매우 빠듯하다. 무작위로 고른 20,000개의 점에서 수치적으로 확인한 결과, 위의 모든 부등식과 모든 도함수 공식이 맞았다.

흔한 실수

- (c)에서 g를 엉뚱한 두 점에서 비교하거나, $\arcsin x$가 g의 증가가 알려진 구간 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 안에 있는지 확인하지 않는 것.
- (ii)에서는 입력값 사이의 부등식이 반대 방향($\arctan x \leq x$)이므로 출력값 사이의 부등식도 반대 방향이 된다. 이것을 거꾸로 하면 잘못된 부등식을 얻는다.
- 곱하는 수($x \arctan x$ 또는 $\cos^2 x$)가 양수라는 말 없이 부등식의 양변에 곱하는 것.

STEP 너머

풀이 내내 사용한 원리, 즉 도함수가 음이 아니면 함수가 증가한다는 사실은 평균값 정리(mean value theorem)의 결과이며, 이 정리는 해석학(analysis) 첫 강의에서 반드시 증명한다. sin과 arcsin이 서로 역함수(inverse function)일 때 $g(x)$와 $g(\arcsin x)$를 비교하는 요령은, 역함수와 볼록성(convexity)을 공부하며 만나게 될 아이디어들과 가까운 친척이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 평균값 정리와 그 결과들을 꼼꼼하고 읽기 쉽게 증명한다.

풀이

STEP II 2011, 문제 4

순수수학 • 삼각방정식

> **STEP II 2011, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/11-s2-q4

핵심 아이디어

$\cos\theta$를 관련된 각의 사인(또는 코사인)으로 나타내면 "$\cos\theta = \sin 4\theta$"는 두 코사인 사이의 방정식이 되고, 이것은 정확히 풀 수 있다. $\sin 4\theta$를 $\sin\theta$의 거듭제곱으로 전개하면 그 각들의 사인 값을 근으로 갖는 삼차방정식(cubic)을 얻으며, 바로 이 과정에서 $\sin 18^\circ$와 같은 무리수(surd)가 나타난다. 소문항 (ii)는 $\sin^2 x$에 대한 이차방정식(quadratic)이고, 소문항 (iii)은 사인의 제곱이 $\frac{1}{4}$인 각을 알아차리기만 하면 모습만 바꾼 소문항 (ii)이다.

풀이

소문항 (i)

같은 종류끼리 비교하기 위해 $\sin 4\theta = \cos(90^\circ - 4\theta)$로 쓴다. 두 각의 코사인 값이 같을 필요충분조건은 360°의 배수 차이를 무시할 때 두 각이 같거나 부호가 반대인 것이므로

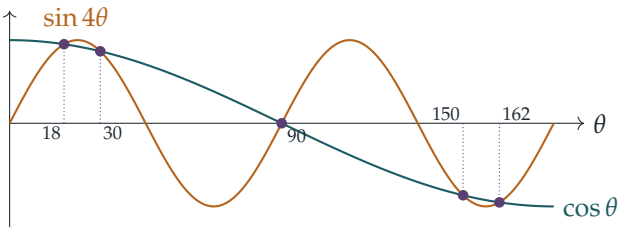
$$\cos\theta = \cos(90^\circ - 4\theta) \iff \theta = \pm(90^\circ - 4\theta) + 360^\circ k \quad \text{단, 정수} k.$$

- $+$ 부호인 경우: $5\theta = 90^\circ + 360^\circ k$이므로 $\theta = 18^\circ + 72^\circ k$이다. $0^\circ < \theta < 180^\circ$에서 이로부터 $\theta = 18^\circ,\ 90^\circ,\ 162^\circ$를 얻는다.
- $-$ 부호인 경우: $3\theta = 90^\circ - 360^\circ k$이므로 $\theta = 30^\circ - 120^\circ k$이고, 따라서 $\theta = 30^\circ,\ 150^\circ$이다.

따라서 해는

$$\theta = 18^\circ,\ 30^\circ,\ 90^\circ,\ 150^\circ,\ 162^\circ.$$

아래 그래프를 보면 교점이 정확히 다섯 개임을 확인할 수 있다.



이제 "이를 이용하여" 부분을 보자. $s = \sin\theta$라 하자. 배각 공식(double-angle formulae)을 두 번 쓰면

$$\sin 4\theta = 2\sin 2\theta\cos 2\theta = 4\sin\theta\cos\theta\,(1 - 2\sin^2\theta),$$

이므로 방정식 $\cos\theta = \sin 4\theta$는 다음과 같이 된다.

$$\cos\theta\big(1 - 4s(1 - 2s^2)\big) = 0.$$

? **생각해 보기** 왜 $\cos\theta$를 약분할 수 있는가?

다섯 개의 해 가운데 $\cos\theta = 0$인 것은 $\theta = 90°$뿐이다. 나머지 네 해 $18°, 30°, 150°, 162°$는 모두 $\cos\theta \neq 0$이므로, 이들에 대해서는 $\cos\theta$로 나누어

$$8s^3 - 4s + 1 = 0.$$

을 얻는다. $s = \sin 30° = \frac{1}{2}$가 한 근임을 알고 있으므로 인수분해(factorising)하면

$$8s^3 - 4s + 1 = (2s - 1)(4s^2 + 2s - 1).$$

이제 $\sin 18°$는 이 삼차방정식의 근이고, 사인은 $[0°, 90°]$에서 증가하므로 $0 < \sin 18° < \sin 30° = \frac{1}{2}$이다. 따라서 $\sin 18° \neq \frac{1}{2}$이고, 이 값은 $4s^2 + 2s - 1 = 0$의 근이어야 한다. 이 방정식의 근은

$$s = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 16}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

이 가운데 양수인 것은 $+$ 근뿐이므로

$$\sin 18° = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5} - 1),$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

소문항 (ii)

$s = \sin x$라 하자. $\sin^2 2x = 4\sin^2 x\cos^2 x = 4s^2(1 - s^2)$이므로 방정식은 s에만 의존한다.

$$4s^2 + 1 = 16s^2(1 - s^2) \iff 16s^4 - 12s^2 + 1 = 0.$$

이것은 s^2에 대한 이차방정식이다.

$$s^2 = \frac{12 \pm \sqrt{144-64}}{32} = \frac{12 \pm 4\sqrt{5}}{32} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{8}.$$

제곱근을 구하기 위해 다음에 주목한다.

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{16} = \frac{3+\sqrt{5}}{8}, \qquad \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = \frac{6-2\sqrt{5}}{16} = \frac{3-\sqrt{5}}{8}.$$

s^2의 두 값은 모두 0과 1 사이에 있으므로 네 개의 제곱근 각각이 실제로 $\sin x$의 값이 될 수 있고, 위의 모든 단계가 역으로도 성립하므로 각각 원래 방정식을 만족한다. 가능한 값은

$$\sin x = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\sqrt{5}, \qquad -\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\sqrt{5}, \qquad -\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\sqrt{5}, \qquad \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\sqrt{5}.$$

소문항 (i)에 의해 $\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) = \sin 18^\circ$이고, $\frac{1}{4}(1+\sqrt{5}) = \sin 54^\circ$이다(이 값은 $\cos 36^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ$이며, 계산해 보면 같은 값이 됨을 확인할 수 있다).

소문항 (iii)

소문항 (ii)의 방정식을 4로 나누면

$$\sin^2 x + \tfrac{1}{4} = \sin^2 2x.$$

이것을 $\sin^2 3\alpha + \sin^2 5\alpha = \sin^2 6\alpha$와 비교하자. $x = 3\alpha$로 놓으면 자동으로 $2x = 6\alpha$이고, 다음 조건이 성립하면 두 방정식이 일치한다.

$$\sin^2 5\alpha = \tfrac{1}{4} \qquad \text{그리고} \qquad \sin 3\alpha\text{는 소문항 (ii)의 네 값 가운데 하나이다.}$$

? 생각해 보기 $\sin 3\alpha$가 그 값들 가운데 하나이기만 하면 충분한가?

그렇다. 소문항 (ii)에서 보았듯이 방정식 $\sin^2 x + \frac{1}{4} = \sin^2 2x$는 x에 오직 $s = \sin x$를 통해서만 의존하며, s의 네 값은 이 방정식을 만족한다. 따라서 사인 값이 그 가운데 하나인 x는 모두 해가 된다.

$\alpha = 6^\circ$로 잡자. 그러면 $5\alpha = 30^\circ$이므로 $\sin^2 5\alpha = \frac{1}{4}$이고, $3\alpha = 18^\circ$이므로 $\sin 3\alpha = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$로 우리가 구한 값 가운데 하나이다. 따라서

$$\sin^2 18^\circ + \sin^2 30^\circ = \sin^2 36^\circ,$$

이고 $\alpha = 6^\circ$는 해이다.

$\alpha = 42^\circ$로 잡자. 그러면 $5\alpha = 210^\circ$이므로 $\sin 5\alpha = -\frac{1}{2}$이고 $\sin^2 5\alpha = \frac{1}{4}$이다. 또 $3\alpha = 126^\circ$이므로 $\sin 3\alpha = \sin 54^\circ = \frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$로 역시 우리가 구한 값 가운데 하나이다. 따라서 $\alpha = 42^\circ$는 해이다.

그러므로 조건에 맞는 두 값은 $\alpha = 6°$와 $\alpha = 42°$이다.

같은 방법으로 $\alpha = 66°$($5\alpha = 330°$, $\sin 3\alpha = \sin 198° = -\sin 18°$)와 $\alpha = 78°$($5\alpha = 390°$, $\sin 3\alpha = \sin 234° = -\sin 54°$)도 얻는다. 범위 안에서 $\sin^2 5\alpha = \frac{1}{4}$인 나머지 각은 $\alpha = 30°$인데, $\sin 90° = 1$은 우리가 구한 값이 아니므로 이것은 해가 아니다. (실제로 $1 + \frac{1}{4} \neq \sin^2 180° = 0$이다.)

검산

- $\sin 18° \approx 0.30902$이고 $\frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1) \approx 0.30902$이다.
- $\alpha = 6°$일 때: $\sin^2 18° + \sin^2 30° \approx 0.09549 + 0.25 = 0.34549$이고, $\sin^2 36° \approx 0.34549$이다.
- $(0°, 90°)$에서 $\sin^2 3\alpha + \sin^2 5\alpha - \sin^2 6\alpha$를 수치적으로 조사하면 영점은 정확히 $6°, 42°, 45°, 66°, 78°$이다. 추가로 나타난 $45°$는 소문항 (ii)에서 나온 것이 아니다. 이때는 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$이다.

흔한 실수

- $\cos A = \cos B$의 두 번째 해의 족(즉 $A = -B + 360°k$)을 잊어서 소문항 (i)에서 $30°$와 $150°$를 빠뜨린다.
- 아무 언급 없이 $\cos\theta$를 약분한다. 여기서는 괜찮지만, 그것은 $\cos\theta = 0$인 해가 $18°$가 아니라 $90°$이기 때문일 뿐이다.
- 소문항 (ii)에서 $\sin x$의 양수 값만 제시한다. 네 값 모두 가능하다.

STEP 너머

$\sin 18°$의 정확한 값은 $18°$가 직각의 5분의 1이라는 사실에서 나오며, 그래서 이 값은 정오각형(regular pentagon) 및 황금비(golden ratio)와 연결된다: $\frac{1}{4}(1 + \sqrt{5}) = \frac{1}{2}\varphi$. 더 일반적으로, $\cos(360°/n)$을 제곱근만으로 나타낼 수 있을 필요충분조건은 정n각형을 자와 컴퍼스로 작도(construct with ruler and compasses)할 수 있는 것이며, 가우스(Gauss)는 이것이 n을 나누는 페르마 소수(Fermat primes)에 달려 있음을 보였다. 이는 체론(field theory)과 갈루아 이론(Galois theory)의 대표적인 첫 응용이다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*는 이에 필요한 대수를 차근차근 쌓아 올리고, Needham의 *Visual Complex Analysis*는 단위근(roots of unity)과 다각형이 왜 함께 다루어지는지 보여 준다.

풀이

STEP II 2011, 문제 5

순수수학 • 벡터와 반사

> **STEP II 2011, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/11-s2-q5

핵심 아이디어

원점을 지나는 직선에 대하여 점을 대칭이동(reflection)하려면, 그 점의 위치벡터를 직선 방향 성분과 직선에 수직인 성분으로 나누면 된다. 대칭이동은 앞의 성분은 그대로 두고 뒤의 성분은 방향을 뒤집는다. $\mathbf{a}$ 방향의 $\mathbf{b}$의 성분은 익숙한 정사영(projection) $\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\,\mathbf{a}$이고, 나머지는 모두 내적(dot product)을 이용한 계산 정리일 뿐이다. 세 점이 한 직선 위에 있음(collinearity)을 다룰 때는, 한 점이 직선 AB 위에 있을 필요충분조건이 그 위치벡터가 $s+t=1$인 $s\mathbf{a}+t\mathbf{b}$ 꼴이라는 것임을 기억하자.

풀이

O, A, B가 한 직선 위에 있지 않으므로, 풀이 전체에서 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$는 영벡터가 아니고 서로 평행하지 않다. 특히 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}\neq 0$이고 $\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}\neq 0$이므로 이들로 나눌 수 있다. $\theta=\angle AOB$라 하자.

대칭점 C

B에서 직선 OA에 내린 수선의 발을 P라 하자. P의 위치벡터는 어떤 실수배 $k\mathbf{a}$이고, $\mathbf{b}-k\mathbf{a}$는 $\mathbf{a}$에 수직이다.

$$(\mathbf{b}-k\mathbf{a})\cdot\mathbf{a}=0 \quad\Longrightarrow\quad k=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}.$$

직선 OA에 대한 대칭이동은 P를 고정하고, B를 반대편에 있는 점 C로 보내는데, 이때 P는 BC의 중점이다. 따라서 $\mathbf{c}=2\overrightarrow{OP}-\mathbf{b}$, 즉

$$\mathbf{c}=\frac{2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\,\mathbf{a}-\mathbf{b}=\lambda\mathbf{a}-\mathbf{b},\qquad \lambda=\frac{2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}},$$

이므로 증명하려던 식을 얻는다.

대칭점 D

직선 OA 대신 직선 OB에 대하여 같은 논증을 적용하면

$$\mathbf{d} = \frac{2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}}\,\mathbf{b} - \mathbf{c}.$$

이다. 이제 $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = \lambda\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}$이므로

$$\begin{aligned}\mathbf{d} &= \left(\frac{2\lambda\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}} - 2\right)\mathbf{b} - (\lambda\mathbf{a} - \mathbf{b}) \\ &= \left(\frac{2\lambda\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}} - 1\right)\mathbf{b} - \lambda\mathbf{a}.\end{aligned}$$

이다. 이것은 $\mathbf{d} = \mu\mathbf{b} - \lambda\mathbf{a}$이고, 여기서

$$\mu = \frac{2\lambda\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}} - 1 = \frac{4(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b})} - 1 = 4\cos^2\theta - 1,$$

이다. 마지막 단계에서는 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$를 이용하였다. 아래에서 필요한 것은 $4\cos^2\theta - 1$ 꼴이다.

A, B, D가 한 직선 위에 있는 경우

점 D가 직선 AB 위에 있을 필요충분조건은 어떤 스칼라 t에 대하여 $\mathbf{d} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}$인 것이다. 한편 $\mathbf{d} = -\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$이기도 하다.

? **생각해 보기** 왜 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$의 계수를 비교할 수 있는가?

$\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$가 평행하지 않기 때문이다. $s\mathbf{a} + t\mathbf{b} = s'\mathbf{a} + t'\mathbf{b}$이면 $(s - s')\mathbf{a} = (t' - t)\mathbf{b}$이고, 두 괄호가 모두 0이 아니라면 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$가 평행하게 된다. O, A, B가 한 직선 위에 있지 않다는 조건은 바로 여기에서 쓰인다.

따라서 $-\lambda = 1 - t$이고 $\mu = t$이다. t를 소거하면, A, B, D가 한 직선 위에 있을 필요충분조건은

$$\mu = \lambda + 1.$$

이다.

$\lambda = -\frac{1}{2}$인 경우

이제 세 점이 한 직선 위에 있다는 조건에서 $\mu = \frac{1}{2}$이므로 $4\cos^2\theta - 1 = \frac{1}{2}$, 즉 $\cos^2\theta = \frac{3}{8}$이다. $\lambda < 0$이므로 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} < 0$이고, 따라서 $\cos\theta < 0$이며

$$\cos\angle AOB = -\sqrt{\tfrac{3}{8}} = -\frac{\sqrt{6}}{4}.$$

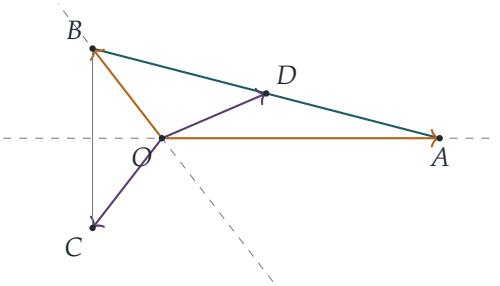
이다. 그러면

$$\mathbf{d} = \tfrac{1}{2}\mathbf{b} + \tfrac{1}{2}\mathbf{a} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}),$$

이므로 D**는 AB의 중점이다**. 도형의 모양에 대해서도 더 말할 수 있다. $\lambda = \dfrac{2|\mathbf{b}|\cos\theta}{|\mathbf{a}|} = -\frac{1}{2}$로부터

$$\frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|} = -4\cos\theta = \sqrt{6},$$

이므로 $OA = \sqrt{6}\,OB$이고, 각 AOB는 둔각(약 $127.8°$)이다. 또한 대칭이동은 O로부터의 거리를 보존하므로 $OD = OC = OB$이다. 즉 AB의 중점은 O로부터 B와 정확히 같은 거리에 있다.



검산

- 먼저 OA에 대하여, 다음으로 OB에 대하여 두 번 대칭이동하면 O를 중심으로 2θ만큼 회전(rotation)한 것이 된다. 따라서 D는 B를 2θ만큼 회전한 점이어야 하고, $\cos\angle BOD = \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$이어야 한다. 마지막 경우에 이 값은 $2\cdot\frac{3}{8} - 1 = -\frac{1}{4}$이다. 직접 계산하면 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -\frac{1}{4}\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = -\frac{3}{2}\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}$를 이용하여 $\mathbf{b}\cdot\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \frac{1}{2}(-\frac{3}{2}+1)|\mathbf{b}|^2 = -\frac{1}{4}|\mathbf{b}|^2$이므로 일치한다.
- $\theta = 90°$이면 $\lambda = 0$이고, C는 $-\mathbf{b}$, D도 다시 $-\mathbf{b}$이다. 공식에서도 $\mu = 4\cdot 0 - 1 = -1$이 나오므로 맞다.
- 수치로 확인하면, $\mathbf{a} = (\sqrt{6}, 0)$, $\mathbf{b} = (-0.6124,\ 0.7906)$일 때 두 번 대칭이동하여 $\mathbf{d} = (0.9186,\ 0.3953)$을 얻는데, 이는 AB의 중점이고 $|\mathbf{d}| = 1 = |\mathbf{b}|$이다.

흔한 실수

- 대칭이동을 $\mathbf{b} - 2\times$(정사영)으로 쓰는 것. 이것은 OA에 **수직인** 직선에 대한 대칭이동이다. 고정되어야 하는 $\mathbf{b} = \mathbf{a}$를 대입해 확인해 보자.
- $\cos\theta = +\sqrt{6}/4$로 잡는 것. λ의 부호가 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$의 부호를 결정한다.
- $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$가 일차독립(independent)이라는 말 없이 계수를 비교하는 것.

STEP 너머

사상 $\mathbf{x} \mapsto \frac{2\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{a} - \mathbf{x}$는 선형사상(linear map)이고, 그 행렬은 행렬식(determinant)이 -1인 직교행렬(orthogonal matrix)의 대표적인 대학 1학년 예시이다. 두 대칭이동을 합성하면 두 거울 사이 각의 두 배만큼 회전하는 회전이 된다. 이것이 등거리변환(isometry)과 정다각형의 대칭군처럼 대칭이동으로 생성되는 군(group)에 대한 연구의 출발점이다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수 입문)는 사영과 대칭이동 행렬을 잘 다루고 있다.

풀이

STEP II 2011, 문제 6

순수수학 • 부분적분

> **STEP II 2011, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/11-s2-q6

핵심 아이디어

피적분함수(integrand) $[f'(x)]^2[f(x)]^n$은 f' 인수 하나만 없으면 보자마자 적분할 수 있는 꼴이 된다. $f'(x)[f(x)]^n$은 $[f(x)]^{n+1}/(n+1)$의 도함수이기 때문이다. 그래서 그 부분을 떼어 내어 부분적분(integration by parts)을 한다. 남는 적분에는 f''이 들어 있는데, 조건 $f'' = kff'$을 쓰면 이것이 다시 같은 쉬운 꼴 $f'f^m$으로 돌아온다. 그러면 응용 문제는 주어진 피적분함수가 $[f']^2 f^n$이 되도록 f와 n을 고르고 k를 구하는 문제로 귀결된다.

풀이

일반적인 결과

$f(x)$를 f로 쓰고, 다른 것도 마찬가지로 줄여 쓴다. $u = f'$, $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = f'f^n$으로 두고 부분적분하면 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f''$, $v = \dfrac{f^{n+1}}{n+1}$이다($n \geq 1$이므로 $n+1 \neq 0$이어서 문제없다).

$$\begin{aligned} I = \int f' \cdot f'f^n \,\mathrm{d}x &= \frac{f'f^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int f''f^{n+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{f'f^{n+1}}{n+1} - \frac{k}{n+1}\int f'f^{n+2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{다음을 이용: } f'' = kff' \\ &= \frac{f'f^{n+1}}{n+1} - \frac{kf^{n+3}}{(n+1)(n+3)} + C. \end{aligned}$$

따라서

$$\boxed{I = \frac{f'(x)\,[f(x)]^{n+1}}{n+1} - \frac{k\,[f(x)]^{n+3}}{(n+1)(n+3)} + C}$$

이고, 이는 요구한 대로 $f(x)$, $f'(x)$, k, n으로 나타낸 식이다.

소문항 (i)

$f(x) = \tan x$이면 $f'(x) = \sec^2 x$이고

$$f''(x) = 2\sec x \cdot \sec x \tan x = 2\tan x \sec^2 x = 2f(x)f'(x),$$

이므로 $k = 2$일 때 조건이 성립한다. 그러면 공식에서

$$\int \sec^4 x \tan^n x \,\mathrm{d}x = \frac{\sec^2 x \tan^{n+1} x}{n+1} - \frac{2\tan^{n+3} x}{(n+1)(n+3)} + C. \tag{1}$$

을 얻는다.

확인. $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$와 치환(substitution) $t = \tan x$, $\mathrm{d}t = \sec^2 x \,\mathrm{d}x$를 써서 직접 계산하면

$$\int \sec^4 x \tan^n x \,\mathrm{d}x = \int (1+t^2)t^n \,\mathrm{d}t = \frac{t^{n+1}}{n+1} + \frac{t^{n+3}}{n+3} + C.$$

이다. (1)의 우변을 $\sec^2 x = 1 + t^2$을 써서 다시 쓰면

$$\frac{(1+t^2)t^{n+1}}{n+1} - \frac{2t^{n+3}}{(n+1)(n+3)} = \frac{t^{n+1}}{n+1} + \frac{(n+3)-2}{(n+1)(n+3)}\,t^{n+3} = \frac{t^{n+1}}{n+1} + \frac{t^{n+3}}{n+3},$$

로 같은 답이 나온다. 따라서 $f = \tan$일 때 결과가 확인된다.

적분.

$$\frac{\sin^4 x}{\cos^8 x} = \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} \cdot \frac{1}{\cos^4 x} = \tan^4 x \sec^4 x = [f'(x)]^2[f(x)]^4,$$

이므로 이것은 (1)에서 $n = 4$인 경우이다. 방금 구한 간단한 꼴을 쓰면

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^8 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\tan^5 x}{5} + \frac{\tan^7 x}{7} + C.$$

이다.

소문항 (ii)

생각해 보기 어떤 f를 택해야 하며, $\sec^2 x$는 어디에서 오는가?

괄호 $(\sec x + \tan x)$가 f의 뻔한 후보이므로 $f(x) = \sec x + \tan x$로 놓아 보자. 그 도함수는

$$f'(x) = \sec x \tan x + \sec^2 x = \sec x(\tan x + \sec x) = \sec x\, f(x).$$

이다. 이것이 핵심 사실이다. f를 미분하면 단지 $\sec x$가 곱해질 뿐이다. 따라서

$$\begin{aligned} f''(x) &= \sec x \tan x\, f(x) + \sec x\, f'(x) = \sec x \tan x\, f + \sec^2 x\, f \\ &= \sec x\, f\,(\tan x + \sec x) = \sec x\, f^2, \end{aligned}$$

이고, $f\,f' = f \cdot \sec x\, f = \sec x\, f^2$이기도 하므로 $f'' = ff'$, 즉 $k = 1$이다.

또 $[f'(x)]^2 = \sec^2 x\,[f(x)]^2$이므로

$$\sec^2 x\,(\sec x + \tan x)^6 = \sec^2 x\, f^2 \cdot f^4 = [f'(x)]^2[f(x)]^4,$$

이고, 이는 일반적인 결과에서 $n = 4, k = 1$인 경우이다.

$$\begin{aligned}\int \sec^2 x\,(\sec x + \tan x)^6\,\mathrm{d}x &= \frac{f'f^5}{5} - \frac{f^7}{35} + C = \frac{\sec x\, f^6}{5} - \frac{f^7}{35} + C \\ &= \frac{f^6}{35}\left(7\sec x - (\sec x + \tan x)\right) + C \\ &= \frac{(\sec x + \tan x)^6\,(6\sec x - \tan x)}{35} + C.\end{aligned}$$

검산

- (i)의 답을 미분하면 $\sec^2 x \tan^4 x + \sec^2 x \tan^6 x = \sec^2 x \tan^4 x(1 + \tan^2 x) = \tan^4 x \sec^4 x$이다.
- 수치적으로, 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 $\int_{-0.7}^{1.1} \sin^4 x / \cos^8 x\,\mathrm{d}x \approx 22.12954$로 $\left[\frac{1}{5}\tan^5 x + \frac{1}{7}\tan^7 x\right]_{-0.7}^{1.1}$과 일치하고, $\int_{-1}^{0.9} \sec^2 x(\sec x + \tan x)^6\,\mathrm{d}x \approx 133.68566$으로 (ii)의 답과 일치한다.
- 일반 공식은 $f = \tan$이고 n이 1부터 6까지인 모든 경우에 수치 적분(quadrature) 결과와 일치한다.

흔한 실수

- 부분적분에서 $u = f^n$으로 택하는 것: 그러면 $f^{n-1}[f']^3$이 나와 더 나빠진다. f' 하나를 f^n과 짝지어 정확히 적분되게 해야 한다.
- $\tan x$에 대해 $k = 1$로 두는 것: $f'' = 2\sec^2 x \tan x$이므로 $k = 2$이다.
- (ii)에서 $\sec^2 x$를 $[f']^2/f^2$으로 흡수해야 한다는 점을 잊는 것: 이 때문에 지수가 6에서 $n = 4$로 내려간다.

STEP 너머

조건 $f'' = kff'$은 그 자체로 미분방정식(differential equation)이다. 한 번 적분하면 $f' = \frac{1}{2}kf^2 + c$가 되는데, 이는 1계 변수분리형 방정식(separable equation)이고 그 해에는 $\tan(k = 2, c = 1)$와 $\sec x + \tan x (k = 1, c = \frac{1}{2})$가 포함된다. 함수가 어떤 상미분방정

식(ODE)을 만족하기 때문에 피적분함수를 다룰 수 있게 된다는 것을 알아차리는 일은 대학 1학년 과정의 특수함수와 점화적분 공식(reduction formulae)에서 거듭 등장하는 주제이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 이와 같은 변수분리형 방정식과 자율 방정식(autonomous equation)을 다룬다.

풀이

STEP II 2011, 문제 7

순수수학 • 수열과 급수

> **STEP II 2011, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/11-s2-q7

핵심 아이디어

수열을 항별로 다루지 않는다. 모든 합을 λ의 거듭제곱의 합과 μ의 거듭제곱의 합으로 나누고, 각각에 등비급수(geometric series)의 합 공식을 쓴다. 두 수는 $\lambda+\mu=2$와 $\lambda\mu=-1$을 만족하므로 $x^2=2x+1$의 두 근이다. 이 이차방정식(quadratic) 하나로 성가신 분모가 모두 정리된다. 또 다른 도구는 제곱이다. b_k^2와 a_k^2는 모두 a_{2k}에 상수를 더한 꼴이 된다.

풀이

먼저 풀이 전체에서 쓸 사실들을 정리해 둔다.

$$\lambda-1=\sqrt{2}, \qquad \mu-1=-\sqrt{2}, \qquad \lambda\mu=1-2=-1, \qquad \lambda-\mu=2\sqrt{2}.$$

또한 $a_0=2$이고 $b_0=0$이다.

소문항 (i)

$\lambda\neq 1$이고 $\mu\neq 1$이므로 각 합에 등비급수의 합 공식을 쓸 수 있다.

$$\sum_{r=0}^{n}\lambda^r=\frac{\lambda^{n+1}-1}{\lambda-1}=\frac{\lambda^{n+1}-1}{\sqrt{2}}, \qquad \sum_{r=0}^{n}\mu^r=\frac{\mu^{n+1}-1}{\mu-1}=-\frac{\mu^{n+1}-1}{\sqrt{2}}.$$

첫 번째 합에서 두 번째 합을 빼면

$$\sum_{r=0}^{n}b_r=\frac{\lambda^{n+1}-1}{\sqrt{2}}+\frac{\mu^{n+1}-1}{\sqrt{2}}=\frac{a_{n+1}-2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\,a_{n+1},$$

이므로 원하는 결과를 얻는다. 반대로 두 합을 더하면 -1들이 소거된다.

$$\boxed{\sum_{r=0}^{n} a_r = \frac{\lambda^{n+1}-1}{\sqrt{2}} - \frac{\mu^{n+1}-1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, b_{n+1}.}$$

(간단한 확인: $n=0$이면 이 식은 $a_0 = b_1/\sqrt{2} = 2\sqrt{2}/\sqrt{2} = 2$가 되어 옳다.)

소문항 (ii)

소문항 (i)에 의해 안쪽 합은 $b_{m+1}/\sqrt{2}$이다. 따라서

$$\sum_{m=0}^{2n}\left(\sum_{r=0}^{m} a_r\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{m=0}^{2n} b_{m+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{s=1}^{2n+1} b_s = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{s=0}^{2n+1} b_s,$$

이고, 마지막 단계는 $b_0 = 0$이기 때문에 성립한다. 이제 소문항 (i)에서 n 대신 $2n+1$을 넣으면

$$\sum_{m=0}^{2n}\left(\sum_{r=0}^{m} a_r\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\sqrt{2} + \frac{a_{2n+2}}{\sqrt{2}}\right) = \tfrac{1}{2}a_{2n+2} - 1. \qquad (*)$$

을 얻는다.

> **생각해 보기** a_{2n+2}를 b_{n+1}^2와 어떻게 연결할 수 있을까?

제곱을 하고, 교차항에는 $\lambda\mu = -1$을 쓴다.

$$b_{n+1}^2 = \lambda^{2n+2} + \mu^{2n+2} - 2(\lambda\mu)^{n+1} = a_{2n+2} - 2(-1)^{n+1}, \qquad a_{n+1}^2 = a_{2n+2} + 2(-1)^{n+1}.$$

n이 홀수이면 $n+1$은 짝수이므로 $b_{n+1}^2 = a_{2n+2} - 2$이다. 그러면 $(*)$는 $\frac{1}{2}(a_{2n+2}-2) = \frac{1}{2}b_{n+1}^2$와 같으므로 원하는 결과를 얻는다.

n이 짝수이면 $(-1)^{n+1} = -1$이므로, 이번에는 a_{n+1}^2가 $a_{2n+2} - 2$와 같다. 따라서

$$\boxed{n\text{이 짝수}: \quad \sum_{m=0}^{2n}\left(\sum_{r=0}^{m} a_r\right) = \tfrac{1}{2}a_{n+1}^2}$$

이고, 이는 $\frac{1}{2}b_{n+1}^2 - 2$와 같다.

소문항 (iii)

소문항 (i)과 소문항 (ii)의 제곱 항등식에 의해

$$\left(\sum_{r=0}^{n} a_r\right)^2 = \tfrac{1}{2}b_{n+1}^2 = \tfrac{1}{2}a_{2n+2} - (-1)^{n+1}.$$

두 번째 합도 다시 두 등비급수로 나누는데, 이번에는 공비가 λ^2와 μ^2이다.

$$\sum_{r=0}^{n} \lambda^{2r+1} = \lambda\,\frac{\lambda^{2n+2}-1}{\lambda^2-1}.$$

? 생각해 보기 $\lambda^2 - 1$을 간단히 할 수 있을까?

그렇다. $\lambda^2 = 2\lambda + 1$이므로 $\lambda^2 - 1 = 2\lambda$이고, 따라서 인수 λ가 약분되어 합은 $\frac{1}{2}(\lambda^{2n+2} - 1)$이 된다. μ도 같은 이차방정식을 만족하므로 $\mu^2 - 1 = 2\mu$이고, μ에 대한 합은 $\frac{1}{2}(\mu^{2n+2} - 1)$이다($\mu^2 \neq 1$이므로 공식을 쓸 수 있다는 점에 주의한다). 두 합을 더하면

$$\sum_{r=0}^{n} a_{2r+1} = \tfrac{1}{2}\left(a_{2n+2} - 2\right) = \tfrac{1}{2}a_{2n+2} - 1.$$

따라서

$$\left(\sum_{r=0}^{n} a_r\right)^2 - \sum_{r=0}^{n} a_{2r+1} = \left(\tfrac{1}{2}a_{2n+2} - (-1)^{n+1}\right) - \left(\tfrac{1}{2}a_{2n+2} - 1\right) = 1 + (-1)^n.$$

n이 짝수이면 이 값은 2이므로 원하는 결과를 얻는다. n이 홀수이면 이 값은 0이므로

$$n\text{이 홀수 :} \quad \left(\sum_{r=0}^{n} a_r\right)^2 = \sum_{r=0}^{n} a_{2r+1}.$$

검산

a_n은 $a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}$을 만족하는 정수이다: $2, 2, 6, 14, 34, 82, 198, 478, \ldots$. 소문항 (ii)에서 $n = 3$일 때, 부분합(partial sum) $2, 4, 10, 24, 58, 140, 338$을 모두 더하면 576이다. $b_4 = 24\sqrt{2}$이므로 $\frac{1}{2}b_4^2 = 576$이 되어 일치한다. 소문항 (iii)에서 $n = 2$이면 $(2 + 2 + 6)^2 - (2 + 14 + 82) = 100 - 98 = 2$이다. $n = 1$이면 $(2 + 2)^2 - (2 + 14) = 0$이다. 컴퓨터로 세 소문항 모두를, 홀짝(parity) 두 경우를 포함하여 24 이하의 모든 n에 대해 확인하였다.

흔한 실수

- $\mu - 1 = -\sqrt{2}$가 음수라는 것을 잊어서, 소문항 (i)에서 a와 b의 역할이 뒤바뀐다.
- $(-1)^{n+1}$ 대신 $(\lambda\mu)^{n+1} = 1$로 쓴다. 홀수와 짝수로 나누는 핵심이 바로 이 부호이다.
- 소문항 (ii)에서 b_{m+1}의 합의 첨자를 옮기면서, 합을 0부터 시작할 수 있게 해 주는 것이 $b_0 = 0$이라는 점을 놓친다.

STEP 너머

두 수열은 모두 선형 점화식(linear recurrence) $x_{n+1} = 2x_n + x_{n-1}$을 만족하며, 그 특성방정식(characteristic equation)은 $x^2 = 2x + 1$이다. 따라서 λ와 μ는 그 근이고, a_n과 b_n은 특

수해이다. $\lambda^n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$이므로 항등식 $\lambda^n \mu^n = (-1)^n$은 $a_n^2 - b_n^2 = 4(-1)^n$이 되는데, 이는 환(ring) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$에서의 펠 방정식(Pell-type equation) 꼴이다. 대븐포트(Davenport)의 *The Higher Arithmetic*(고등 정수론)은 이러한 단원(unit)과 $\sqrt{2}$의 연분수(continued fraction)가 어떻게 서로 맞물리는지 설명한다.

풀이

STEP II 2011, 문제 8

순수수학 • 원의 신개선

> **STEP II 2011, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/11-s2-q8

핵심 아이디어

매 순간 실은 두 부분으로 이루어진다. 하나는 원의 호(arc)로, 그 길이는 각도에서 바로 읽어 낼 수 있고, 다른 하나는 접선(tangent)을 따라 원을 떠나는 곧은 부분이다. 전체 길이가 고정되어 있으므로 곧은 부분의 길이는 남은 길이와 같고, 접선은 반지름에 수직이므로 벡터(vector)를 이용하면 B의 위치를 쉽게 구할 수 있다. 마지막 넓이를 구할 때는, 쓸고 지나간 영역 전체가 "바깥쪽 가지 아래의 넓이에서 안쪽 가지 아래의 넓이를 빼고, 다시 반원을 뺀 것"임에 주목한다.

풀이

매개변수방정식

실이 원을 떠나는 점을 $P = (\cos t, \sin t)$라 하자. 즉 t는 양의 x축에서 OP까지의 각이다. 처음에는 $P = A = (-1, 0)$이므로 $t = \pi$이다. 실이 원의 위쪽을 넘어 감겨 감에 따라 P는 시계 방향으로 움직이고 t는 0까지 감소한다.

실 가운데 원에 닿아 있는 부분은 각 π에서 각 t까지의 호이다. 반지름이 1이므로 이 호의 길이는 $\pi - t$이다. 실의 길이는 π이므로 곧은 부분 PB의 길이는

$$\pi - (\pi - t) = t.$$

이다. 실이 팽팽하므로 PB는 P에서 원에 접하고, 따라서 $OP = (\cos t, \sin t)$에 수직이다. OP에 수직인 두 단위벡터는 $\pm(\sin t, -\cos t)$이다. 처음($t = \pi$)에 실은 A에서 곧장 위쪽, 즉 $(0, 1) = (\sin \pi, -\cos \pi)$ 방향을 향하고, 연속성(continuity)에 의해 부호는 내내 같게 유지된다. 따라서

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OP} + t\,(\sin t, -\cos t),$$

즉

$$x = \cos t + t\sin t, \qquad y = \sin t - t\cos t,$$

이고, 이것이 구하려던 식이다. (확인: $t = \pi$이면 B의 처음 위치인 $(-1, \pi)$가 되고, $t = 0$이면 B가 원과 만나는 점 $(1, 0)$이 된다.)

x의 최댓값

미분하면 $\pm\sin t$ 항과 $\pm\cos t$ 항이 상쇄된다.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\sin t + \sin t + t\cos t = t\cos t, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \cos t - \cos t + t\sin t = t\sin t.$$

$0 < t < \pi$에서 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = t\cos t$는 $t < \frac{\pi}{2}$일 때 양수이고 $t > \frac{\pi}{2}$일 때 음수이다. 그러므로 t가 $[0, \pi]$를 지나는 동안 x는 증가하다가 감소하며, 최댓값은

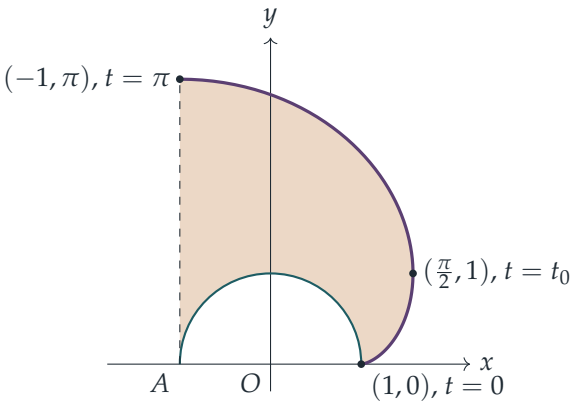
$$t_0 = \frac{\pi}{2}, \qquad \text{이때} (x, y) = \left(\frac{\pi}{2}, 1\right).$$

에서 얻어진다.

개형 그리기

두 가지 사실이 도움이 된다. 첫째, $0 < t \le \pi$에서 $y > 0$이다. $t \le \frac{\pi}{2}$이면 $\tan t > t$이므로 $y = \cos t\,(\tan t - t) > 0$이고($t = \frac{\pi}{2}$일 때는 바로 $y = 1$이다), $t > \frac{\pi}{2}$이면 $\cos t < 0$이므로 y의 두 항이 모두 음이 아니어서 $\sin t - t\cos t > 0$이다. 둘째, $x^2 + y^2 = 1 + t^2$이므로 B는 항상 원의 바깥에 있고, 원에서 떨어진 정도는 t와 함께 커진다. 또한 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = t\sin t \ge 0$이므로 y는 t와 함께 꾸준히 증가한다.

따라서 곡선은 $(1, 0)$에서 출발하여(여기서 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tan t = 0$이므로 x축을 수평으로 떠난다), 가장 오른쪽 점 $(\frac{\pi}{2}, 1)$까지 올라가서 그곳에서 수직이 되고, 다시 원의 위쪽을 넘어 되돌아가 $(-1, \pi)$에 이르러 다시 수평이 된다. 이 곡선을 원의 **신개선**(involute)이라 한다.



곡선, 실의 처음 위치(점선), 반원으로 둘러싸인 색칠한 영역이 실이 쓸고 지나간 넓이이다.

$\pi \geq t \geq t_0$일 때의 넓이

곡선의 이 부분에서 x는 $\frac{\pi}{2}$($t = \frac{\pi}{2}$일 때)에서 -1($t = \pi$일 때)까지 감소하고, $y > 0$이다. 따라서 이 호와 x축 사이의 넓이는

$$\int_{-1}^{\pi/2} y \,\mathrm{d}x = \int_{\pi}^{\pi/2} y \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \,\mathrm{d}t = \int_{\pi/2}^{\pi} \left(t^2 \cos^2 t - t \sin t \cos t\right) \mathrm{d}t,$$

이다. 여기서 적분 구간의 위끝과 아래끝을 바꾸어 음의 부호를 흡수하였다. 두 개의 적분이 필요한데, 둘 다 배각 공식(double-angle formula)을 쓴 뒤 부분적분(integration by parts)으로 구한다. $\sin t \cos t = \frac{1}{2} \sin 2t$, $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)$로 쓰자. 부분적분하면

$$\begin{aligned}
\int t \sin 2t \,\mathrm{d}t &= -\tfrac{1}{2} t \cos 2t + \tfrac{1}{4} \sin 2t, \\
\int t^2 \cos 2t \,\mathrm{d}t &= \tfrac{1}{2} t^2 \sin 2t - \int t \sin 2t \,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2} t^2 \sin 2t + \tfrac{1}{2} t \cos 2t - \tfrac{1}{4} \sin 2t.
\end{aligned}$$

이다. $t = \pi$에서 $\sin 2t = 0$, $\cos 2t = 1$이고, $t = \frac{\pi}{2}$에서 $\sin 2t = 0$, $\cos 2t = -1$이다. 따라서

$$\begin{aligned}
\int_{\pi/2}^{\pi} t \sin t \cos t \,\mathrm{d}t &= \tfrac{1}{2} \left[-\tfrac{1}{2} t \cos 2t\right]_{\pi/2}^{\pi} = \tfrac{1}{2} \left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3\pi}{8}, \\
\int_{\pi/2}^{\pi} t^2 \cos^2 t \,\mathrm{d}t &= \tfrac{1}{2} \left[\tfrac{1}{3} t^3\right]_{\pi/2}^{\pi} + \tfrac{1}{2} \left[\tfrac{1}{2} t \cos 2t\right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{7\pi^3}{48} + \tfrac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{7\pi^3}{48} + \frac{3\pi}{8}.
\end{aligned}$$

이다. 그러므로 구하는 넓이는

$$\frac{7\pi^3}{48} + \frac{3\pi}{8} - \left(-\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{7\pi^3}{48} + \frac{3\pi}{4}.$$

이다.

실이 쓸고 지나간 넓이

> **생각해 보기** $t \geq t_0$인 호 아래의 영역에는 쓸고 지나간 영역보다 더 많은 부분이 들어 있다. 무엇을 빼야 하는가?

방금 구한 넓이는 $-1 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$에서 바깥쪽 호($t_0 \leq t \leq \pi$)와 x축 사이의 모든 부분이다. 쓸고 지나간 영역은 여기서 그 아래에 놓인 두 조각을 뺀 것이다. 하나는 넓이가 $\frac{\pi}{2}$인 위쪽 반원이고, 다른 하나는 $1 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$에서 안쪽 호($0 \leq t \leq t_0$)와 x축 사이의 가느다란 조각이다. 안쪽 호는 원의 바깥에 있고($t > 0$이면 $x^2 + y^2 = 1 + t^2 > 1$이므로) 바깥쪽 호의 아래에 있으므로, 이 조각들은 서로 겹치지 않고 빼는 것이 정당하다.

안쪽 호에서는 x가 t와 함께 증가하므로, 가느다란 조각의 넓이는

$$\int_{0}^{\pi/2} y \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \,\mathrm{d}t = \int_{0}^{\pi/2} \left(t \sin t \cos t - t^2 \cos^2 t\right) \mathrm{d}t.$$

이다. 같은 원시함수(antiderivative)를 쓰되 이번에는 아래끝을 $t = 0$으로 하면(여기서 $\sin 2t = 0, \cos 2t = 1$),

$$\int_0^{\pi/2} t \sin t \cos t \, \mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\Big[-\tfrac{1}{2} t \cos 2t\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8},$$
$$\int_0^{\pi/2} t^2 \cos^2 t \, \mathrm{d}t = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\pi^3}{24} + \tfrac{1}{2}\Big[\tfrac{1}{2} t \cos 2t\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{8},$$

이므로 가느다란 조각의 넓이는 $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi^3}{48}$(약 0.14로, 작은 양수이니 안심이 된다)이다. 따라서 실이 쓸고 지나간 넓이는

$$\left(\frac{7\pi^3}{48} + \frac{3\pi}{4}\right) - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi^3}{48}\right) - \frac{\pi}{2} = \frac{8\pi^3}{48} = \frac{\pi^3}{6}.$$

이다.

검산

- 마지막 답에 이르는 더 매끄러운 방법이 있다. t가 δt만큼 감소하면, 실의 곧은 부분(길이 t)은 사실상 고정된 점을 중심으로 각 δt만큼 회전하여 넓이가 약 $\frac{1}{2}t^2\,\delta t$인 얇은 부채꼴을 쓸고 지나간다. 이것들을 모두 더하면 $\int_0^{\pi} \frac{1}{2}t^2 \, \mathrm{d}t = \frac{\pi^3}{6}$이 되어 답과 일치한다.
- 수치적으로 확인하면, 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 구한 바깥쪽 호 아래의 넓이는 6.87794로 $\frac{7\pi^3}{48} + \frac{3\pi}{4}$와 일치하고, 색칠한 영역의 경계에 신발끈 공식(shoelace formula)을 적용하면 $5.16771 \approx \frac{\pi^3}{6}$을 얻는다.

흔한 실수

- 곧은 부분의 길이를 $\pi - t$로 잡거나(그것은 호의 길이이다), 두 접선 방향 가운데 틀린 쪽을 고르는 실수. $t = \pi$를 확인해 보면 둘 다 잡아낼 수 있다.
- 그 호를 따라 x가 감소한다는 것을 알아차리지 못하고 적분 구간을 t_0에서 π까지로 그대로 두어, 음수인 "넓이"를 얻는 실수.
- 안쪽 호 아래의 작은 영역을 잊어버려 쓸고 지나간 넓이를 $\frac{7\pi^3}{48} + \frac{\pi}{4}$로 얻는 실수.

STEP 너머

어떤 곡선에서 풀려 나오는 실의 끝이 그리는 곡선을 신개선이라 하고, 실이 풀려 나오는 원래 곡선을 그 축폐선(evolute)이라 한다. B에서 신개선의 곡률 중심(centre of curvature)은 바로 실이 원을 떠나는 점 P이다. 원의 신개선은 대부분의 톱니바퀴 이의 모양을 이룬다. 그런 두 이가 서로 맞물려 구를 때 속도비가 일정하게 유지되기 때문이다.

검산에서 쓴 "얇은 부채꼴" 논증은 극좌표 넓이 공식(polar-area formula) $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$를 모습만 바꾼 것이다. 곡률(curvature)과 이런 종류의 곡선에 대해 더 알고 싶다면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*를, 그 바탕에 있는 엄밀한 미적분에 대해서는 Abbott의 *Understanding Analysis*를 보라.

풀이

STEP II 2011, 문제 9

역학 • 충돌과 반발계수

STEP II 2011, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

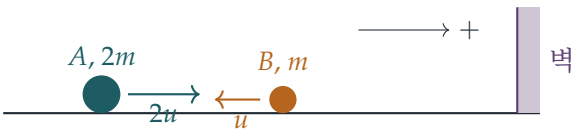
step.maths.org/questions/11-s2-q9

핵심 아이디어

여기서 일어나는 충돌(collision)은 모두 정면 충돌(direct collision)이므로, 각 충돌은 똑같은 두 방정식, 곧 운동량 보존(conservation of momentum)과 뉴턴(Newton)의 반발 법칙(law of restitution)으로 해결된다. 실제로 위험한 것은 부호뿐이다. 처음에 양의 방향 하나(벽을 향하는 방향)를 정하고, 모든 속도를 그 방향에 대한 부호 있는 수로 쓰면 계산은 저절로 풀린다. 그러면 마지막 주장은 어떤 식 하나가 항상 양수임을 보이는 문제로 귀결되는데, 그 식이 f에 대해 선형(linear)이므로 f의 범위의 양 끝만 살펴보면 된다.

풀이

모형. A와 B를 매끄러운(smooth) 평면 위의 입자(particle)로 다루므로, 충돌 순간을 제외하면 수평 방향의 힘은 작용하지 않는다. 또한 벽은 매끄러우므로 B의 속도를 (f배로 줄이면서) 반대로 바꾸기만 한다. 첫 번째 충돌 후 B는 계속 나아가 벽에 부딪히므로, 벽은 B 쪽, 곧 A가 원래 움직이던 방향으로 B보다 더 먼 곳에 있다. 이 방향을 양의 방향으로 잡는다. 그러면 직선 위의 순서는 항상 A, B, 벽이다.



첫 번째 충돌

충돌 전 A의 속도는 $2u$이고 B의 속도는 $-u$이다. 충돌 후 두 입자의 속도를 각각 v_A, v_B라 하자. 운동량이 보존되므로

$$2m(2u) + m(-u) = 2m\,v_A + m\,v_B \quad \Longrightarrow \quad 2v_A + v_B = 3u.$$

접근 속력은 $2u - (-u) = 3u$이다. B가 A보다 앞에 있으므로 분리 속력은 $v_B - v_A$이고, 뉴턴의 반발 법칙에 의해

$$v_B - v_A = 3eu.$$

첫 번째 식에서 두 번째 식을 빼면 $3v_A = 3u - 3eu$이므로

$$v_A = (1-e)u, \qquad v_B = (1+2e)u.$$

둘 다 ≥ 0이므로, 충돌 후 A는 속력 $(1-e)u$로 벽을 향해 움직이고($e=1$이면 정지해 있고), B는 속력 $(1+2e)u$로 벽을 향해 움직인다. 이는 그 뒤 B가 벽에 도달한다는 사실과 들어맞는다.

벽

벽은 매끄럽고 충돌은 정면 충돌이므로, B는 직선을 따라 속력 $f(1+2e)u$로 튕겨 나온다. 그 속도는 $-f(1+2e)u$가 된다. 한편 A에는 아무 힘도 작용하지 않으므로 여전히 속도 $(1-e)u \geq 0$으로 움직인다. 이제 B가 A를 향해 움직이므로 두 입자는 반드시 다시 만난다.

두 번째 충돌

두 번째 충돌 직전의 속도는

$$A:\ (1-e)u, \qquad B:\ -f(1+2e)u.$$

충돌 후 속도를 각각 w_A, w_B라 하자. 운동량 보존에 의해

$$2w_A + w_B = 2(1-e)u - f(1+2e)u.$$

? 생각해 보기 이번에는 반발 방정식을 어느 쪽 순서로 써야 하는가?

여전히 B가 벽에 더 가까운 입자이므로 분리 속도는 여전히 $w_B - w_A$이다. 접근 속력은 A의 속도에서 B의 속도를 뺀 값, 곧 $(1-e)u + f(1+2e)u$이다. 따라서

$$w_B - w_A = e\big[(1-e)u + f(1+2e)u\big].$$

w_B만 남기기 위해 이 식의 두 배를 운동량 방정식에 더하면

$$\begin{aligned} 3w_B &= 2(1-e)u - f(1+2e)u + 2e(1-e)u + 2ef(1+2e)u \\ &= 2(1-e)(1+e)u + f(1+2e)(2e-1)u \\ &= 2(1-e^2)u - (1-4e^2)fu. \end{aligned}$$

그러므로

$$w_B = \tfrac{2}{3}(1-e^2)u - \tfrac{1}{3}(1-4e^2)fu,$$

이며, 이는 양의 방향, 곧 벽을 향하는 방향으로 잰 값이다. 이것이 구하려던 결과이다.

B는 항상 벽을 향해 움직인다

모든 $0 < e \le 1$과 $0 < f \le 1$에 대해 $w_B > 0$임을 보여야 한다. $u > 0$이므로, 이는 다음을 보이는 것과 같다.

$$g(f) = 2(1-e^2) + (4e^2-1)f > 0.$$

항 $1-4e^2$는 양수일 수도 음수일 수도 있으므로 그냥 버릴 수는 없다. 대신 e를 고정하면 g는 f에 대해 선형이고,

$$g(0) = 2(1-e^2) \ge 0, \qquad g(1) = 2 - 2e^2 + 4e^2 - 1 = 1 + 2e^2 > 0.$$

임에 주목하자. $[0,1]$ 위의 선형 함수는 양 끝값의 가중평균(weighted average)이다: $g(f) = (1-f)\,g(0) + f\,g(1)$. $0 < f \le 1$이면 첫째 항은 ≥ 0이고 둘째 항은 ($f > 0$이고 $g(1) > 0$이므로) 엄격하게 양수이므로 $g(f) > 0$이다. 따라서 $w_B > 0$이고, e와 f의 값이 무엇이든 두 번째 충돌 후 B는 벽을 향해 움직인다.

검산

- $e = f = 1$(처음부터 끝까지 완전 탄성(perfectly elastic))이면, A는 첫 번째 충돌에서 완전히 멈추고, B는 $3u$로 나갔다가 $3u$로 돌아와 질량이 자신의 두 배인 정지한 입자에 부딪힌다. 공식은 $w_B = 0 + u = u$를 주며, 이는 탄성 충돌의 결과 $\frac{m-2m}{3m}(-3u) = u$와 일치한다.
- $e = f = \frac{1}{2}$이면 공식은 $w_B = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}u = \frac{1}{2}u$를 준다. 위치와 충돌을 단계별로 시뮬레이션해도 같은 값 $0.5u$가 나온다.
- 부호에 대해 가장 불리한 경우는 $e = 1$이고 f가 작을 때이다. 이때 $w_B = fu$로, 작지만 여전히 양수이다.

흔한 실수

- 두 번째 충돌에서 부호 있는 속도 대신 속력을 써서, B가 튕겨 나오는 속도의 부호를 틀리게 얻는 것.
- B가 "벽에서 왔다"는 이유로 반발 방정식을 $w_A - w_B$로 쓰는 것. 직선 위에서 입자들의 순서는 바뀌지 않았으므로, 분리 속도는 여전히 $w_B - w_A$이다.
- $1 - 4e^2 > 0$이라고 가정하여 $w_B > 0$이라고 주장하는 것. 이 가정은 $e > \frac{1}{2}$이면 성립하지 않으며, 바로 그 때문에 논증에서 $f \leq 1$을 써야 한다.

STEP 너머

반발은 경험적 모형(empirical model)이다. 대학 1학년 과정에서는 이를 더 깔끔한 개념인 질량중심 좌표계(centre-of-mass frame)와 함께 배운다. 이 좌표계에서는 전체 운동량이 0이고, 반발 계수(coefficient of restitution)가 e인 충돌은 두 속도에 단순히 $-e$를 곱할 뿐이다. 그러면 첫 번째 충돌 같은 결과는 거의 곧바로 얻어진다. 벽과의 반복된 충돌은 당구 문제와 세기 논증에서 다시 등장하는데, 두 블록과 벽 사이의 충돌 횟수가 π의 자릿수를 주는 유명한 예가 그렇다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 관점에서 운동량과 충돌을 다룬다.

풀이

STEP II 2011, 문제 10

역학 • 포물체와 충격량

STEP II 2011, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/11-s2-q10

핵심 아이디어

R이 항상 P의 연직 아래에 있으므로, 두 입자는 운동 내내 같은 수평 속도를 가진다. 따라서 줄은 연직이고, 연직 방향의 운동만 생각하면 된다. 줄은 P가 평면 위로 정확히 $\frac{1}{2}H$만큼 올라갔을 때 팽팽해진다. 이때 줄이 갑자기 당겨지는 현상(jerk)은 연직 방향의 충격량(impulse)으로, P의 위쪽 운동량(momentum)을 R과 나누어 가지게 한다. 그 뒤로 두 입자의 속도는 똑같으므로, R이 착지할 때까지 둘은 하나의 포사체(projectile)처럼 함께 날아간다.

풀이

최대 높이

입자를 중력만 받는 점으로 모형화한다. 속도의 연직 성분은 $u\sin\theta - gt$이고, 최고점에서 이 값은 0이 된다. 연직 방향으로 $v^2 = u^2 + 2as$를 쓰고 나중 연직 속력을 0으로 두면

$$0 = u^2\sin^2\theta - 2gH \qquad \Longrightarrow \qquad H = \frac{u^2\sin^2\theta}{2g}.$$

나중을 위해, 이 식에서 $u\sin\theta = \sqrt{2gH}$를 얻는다는 점을 기억해 두자.

줄이 팽팽해지는 때

O를 원점으로 하고, x축을 수평 방향, y축을 연직 위 방향으로 잡는다. 입자 P의 수평 속도는 항상 $u\cos\theta$이다. R이 P의 연직 아래에 계속 있으려면, 이 입자도 속력 $u\cos\theta$로 발사되어야 한다. 평면이 매끄러우므로(smooth) R은 이후 이 일정한 속력으로 미끄러진다. 따라

서 줄은 항상 연직이며, 거리 PR은 단순히 P의 높이와 같다:

$$y_P = u\sin\theta\, t - \tfrac{1}{2}gt^2 = \sqrt{2gH}\, t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

줄은 y_P가 처음으로 $\frac{1}{2}H$에 도달할 때 팽팽해진다(P는 $H > \frac{1}{2}H$까지 올라가므로 실제로 도달한다):

$$\tfrac{1}{2}gt^2 - \sqrt{2gH}\, t + \tfrac{1}{2}H = 0 \quad\Longrightarrow\quad t = \frac{\sqrt{2gH} \pm \sqrt{2gH - gH}}{g} = (\sqrt{2}\pm 1)\sqrt{\frac{H}{g}}.$$

작은 근(root)이 처음 도달하는 시각이므로, 줄은 다음 시간 뒤에 팽팽해진다.

$$t_1 = (\sqrt{2}-1)\sqrt{H/g},$$

이것이 요구된 결과이다. (큰 근은 P가 내려오면서 다시 높이 $\frac{1}{2}H$를 지나는 시각이다.)

줄이 당겨지는 순간

시각 t_1에서 P의 연직 속도는

$$u\sin\theta - gt_1 = \sqrt{2gH} - (\sqrt{2}-1)\sqrt{gH} = \sqrt{gH},$$

이고 위쪽 방향이다. 반면 R은 연직 속도가 없다. 둘의 수평 속도는 모두 $u\cos\theta$이다.

? **생각해 보기** 줄이 당겨지는 순간에 어떤 충격량들이 어느 방향으로 작용하는가?

줄이 연직이므로 장력(tension)에 의한 충격량 J도 연직이다. 이 충격량은 P에는 아래쪽으로, R에는 위쪽으로 작용한다. 평면은 매끄러워서 R을 위로 미는 것만 할 수 있는데, R은 위로 당겨져 평면에서 떨어지므로 평면은 충격량을 주지 않는다. 따라서 수평 속도는 변하지 않고, 연직 방향으로는 두 입자 전체의 운동량이 보존된다. 줄은 늘어나지 않으며(inextensible) 팽팽한 상태를 유지하므로, 직후에 P와 R은 같은 연직 속도 w를 가진다. 두 질량이 m으로 같으므로

$$m\sqrt{gH} + m\cdot 0 = 2mw \qquad\Longrightarrow\qquad w = \tfrac{1}{2}\sqrt{gH}.$$

거리 D

줄이 당겨진 뒤, 장력이 0이라면 P와 R은 같은 속도와 같은 아래쪽 가속도 g를 가진다. 따라서 둘은 고정된 거리 $\frac{1}{2}H$만큼 떨어진 똑같은 두 포사체로 움직인다. 즉 줄은 장력이 0인 채로 정확히 팽팽한 상태를 유지하며, 이는 모순이 없다. R은 높이 0에서 위쪽 속도 w로 출발하므로, 다음 시간 뒤에 평면으로 돌아온다.

$$t_2 = \frac{2w}{g} = \sqrt{\frac{H}{g}}.$$

따라서 R이 운동하는 전체 시간은

$$t_1 + t_2 = \sqrt{2}\sqrt{\frac{H}{g}} = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{u^2\sin^2\theta}{g^2}} = \frac{u\sin\theta}{g},$$

이고, 그동안 내내 R은 수평 방향으로 $u\cos\theta$의 속력으로 움직인다. 따라서

$$D = u\cos\theta \cdot \frac{u\sin\theta}{g} = \frac{u^2\sin\theta\cos\theta}{g} = \frac{u^2\sin 2\theta}{2g}.$$

이것은 P 혼자 날아갈 때의 수평 도달 거리(range)의 정확히 절반이다. 즉 R은 줄이 없었다면 P가 경로의 최고점에 있었을 순간에 착지한다.

$D = H$인 경우

다음과 같이 두자.

$$\frac{u^2\sin\theta\cos\theta}{g} = \frac{u^2\sin^2\theta}{2g}$$

양변을 $u^2\sin\theta/g$로 나누면(입자가 올라가려면 $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$이어야 하므로 이 값은 0이 아니다) $\cos\theta = \frac{1}{2}\sin\theta$를 얻는다. 따라서

$$\tan\theta = 2.$$

검산

- t에 대한 두 근의 곱은 H/g이고 합은 $2\sqrt{2H/g}$이다. 이 합은 P가 최고점에 올랐다가 평면으로 돌아오는 시간으로, 대칭성에서 예상되는 그대로이다.
- 임의의 u와 θ에 대해 수치 시뮬레이션(P의 비행을 $\frac{1}{2}H$ 높이에 이를 때까지 단계별로 계산하고, 줄이 당겨지는 효과를 적용한 뒤, R이 착지할 때까지 다시 단계별로 계산)을 해 보면 결과가 t_1 및 D와 일치했다. 예를 들어 $u = 18.11$, $\theta = 0.711$, $g = 9.8$이면 두 방법 모두 $D \approx 16.543$을 준다.
- $\tan\theta = 2$, $u = 10$, $g = 9.8$일 때: $D = H \approx 4.082$.

흔한 실수

- 큰 근 $(\sqrt{2}+1)\sqrt{H/g}$를 택하는 것. 이는 P가 내려오면서 높이 $\frac{1}{2}H$를 지나는 시각이다.
- 줄이 당겨지기 전에 R이 미끄러지는 시간 t_1을 잊고, 당겨진 뒤의 비행만으로 D를 계산하는 것.
- 줄이 당겨지는 순간에 에너지 보존을 쓰는 것. 늘어나지 않는 줄이 갑자기 팽팽해지면 운동 에너지(kinetic energy)가 손실되며, 보존되는 것은 운동량뿐이다.

STEP 너머

줄이 당겨진 뒤 두 입자는 질량중심(centre of mass)에 놓인 하나의 입자와 정확히 똑같이 행동한다. 내력(internal force)은(이 문제에서는 장력) 계의 질량중심의 운동을 결코 바꾸지 않는다. 이것이 대학 1학년 과정에서 배우는 입자계와 강체(rigid body) 역학의 출발점이며, 그 과정에서는 이번과 같은 충격적 구속(impulsive constraint)도 같은 방식으로 다룬다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이 개념들을 꼼꼼하게 전개한다.

풀이

STEP II 2011, 문제 11

역학 • 3차원에서의 평형

STEP II 2011, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/11-s2-q11

핵심 아이디어

모든 것은 각 줄 방향의 단위벡터(unit vector)를 쓰는 데서 출발한다. 각 단위벡터는 수직 부분과 수평 부분으로 나뉜다. 수직 부분은 줄이 수직선과 이루는 각으로 정해지고, 수평 부분은 O에서 천장에 있는 줄의 끝을 향하며 그 방향이 OA와 이루는 각으로 정해진다. 세 단위벡터를 알고 나면 평형(equilibrium)은 $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ 각각에 대한 스칼라 방정식 세 개일 뿐이다.

풀이

P를 입자(particle)로, 줄은 가볍고 늘어나지 않는 것으로 모형화한다. 따라서 각 줄은 줄을 따라 작용하는 힘으로 P를 고정된 끝 쪽으로 당긴다. O를 원점으로 잡고, $\mathbf{j}$는 OA 방향, $\mathbf{k}$는 연직 위쪽 방향으로 잡는다. $\mathbf{i}$는 수평이고 OA에 수직이다.

먼저 삼각비를 구한다. $\tan\theta = \sqrt{2}$이므로 세 변이 $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$인 직각삼각형에서

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$\tan\phi = \frac{1}{4}\sqrt{2}$이므로 두 변이 $4, \sqrt{2}$이고 빗변이 $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$이다. 따라서

$$\sin\phi = \frac{1}{3}, \qquad \cos\phi = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

소문항 (i)

수직선과 각 α를 이루는 줄의 단위벡터(P에서 천장 쪽으로)는 수직 성분(component)이 $\cos\alpha$이고 수평 부분의 길이가 $\sin\alpha$이다.

PB의 경우 $\alpha = 90^\circ - \theta$이므로 수직 성분은 $\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$이고 수평 부분의 길이는 $\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$이다.

수평 부분은 OB 방향을 향하며(O가 P의 바로 위에 있으므로), 이 방향은 $\mathbf{j}$와 각 $90^\circ + \theta$를 이룬다. $\mathbf{j}$와 각 $90^\circ + \theta$를 이루는 수평 단위벡터는 $\pm\sin(90^\circ + \theta)\,\mathbf{i} + \cos(90^\circ + \theta)\,\mathbf{j} = \pm\cos\theta\,\mathbf{i} - \sin\theta\,\mathbf{j}$이다. B가 OA에 대해 $\mathbf{i}$의 음의 방향 쪽에 놓이도록 $\mathbf{i}$의 방향을 정한다. 문제에서 요구하는 형태가 이 선택을 정해 준다. 그러면 PB 방향 단위벡터의 수평 부분은

$$\tfrac{1}{\sqrt{3}}(-\cos\theta\,\mathbf{i} - \sin\theta\,\mathbf{j}) = \tfrac{1}{\sqrt{3}}\left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\,\mathbf{i} - \tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,\mathbf{j}\right) = -\tfrac{1}{3}\,\mathbf{i} - \tfrac{\sqrt{2}}{3}\,\mathbf{j}.$$

여기에 수직 성분을 더하면 PB 방향의 단위벡터는

$$-\tfrac{1}{3}\,\mathbf{i} - \tfrac{\sqrt{2}}{3}\,\mathbf{j} + \tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,\mathbf{k},$$

이고, 이것이 요구된 결과이다. (검산: $\frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{3} = 1$.)

소문항 (ii)

같은 방법으로 나머지 두 줄의 단위벡터를 구한다.

줄 PA: 수직선과 이루는 각은 30°이고, 수평 부분은 $\mathbf{j}$ 방향이다.

$$\mathbf{e}_A = \tfrac{1}{2}\,\mathbf{j} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathbf{k}.$$

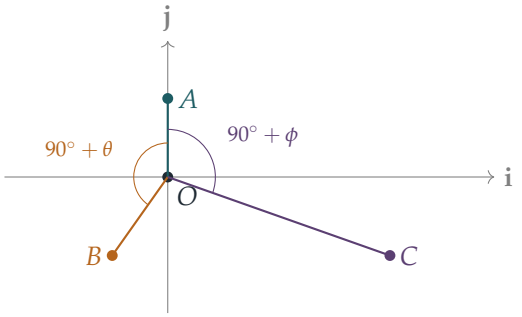
줄 PC: 수직선과 이루는 각이 60°이므로 수직 성분은 $\frac{1}{2}$이고 수평 부분의 길이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}$이다. 방향 OC는 $\mathbf{j}$와 각 $90^\circ + \phi$를 이루므로 수평 단위벡터는 $\pm\cos\phi\,\mathbf{i} - \sin\phi\,\mathbf{j}$이다.

> ? **생각해 보기** C는 OA에 대해 B와 같은 쪽에 있는가, 반대쪽에 있는가?

그림은 반대쪽을 보여 주며, 어차피 평형 조건이 이를 요구한다. PA의 장력(tension)은 $\mathbf{i}$ 성분이 없고, PB의 장력은 음의 $\mathbf{i}$ 성분을 가진다. PC도 음의 $\mathbf{i}$ 성분을 가진다면 이들을 상쇄할 힘이 없다. 따라서 부호는 $+$이고,

$$\mathbf{e}_C = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\tfrac{2\sqrt{2}}{3}\,\mathbf{i} - \tfrac{1}{3}\,\mathbf{j}\right) + \tfrac{1}{2}\,\mathbf{k} = \tfrac{\sqrt{6}}{3}\,\mathbf{i} - \tfrac{\sqrt{3}}{6}\,\mathbf{j} + \tfrac{1}{2}\,\mathbf{k}.$$

아래의 천장 평면도(plan view)($OP = 1$로 잡으면 $OA = \tan 30^\circ$, $OB = \cot\theta$, $OC = \tan 60^\circ$)가 배치를 보여 준다.



따라서 P에 작용하는 힘은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{장력}PA: &\quad T\left(\tfrac{1}{2}\,\mathbf{j}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathbf{k}\right),\\ \text{장력}PB: &\quad U\left(-\tfrac{1}{3}\,\mathbf{i}-\tfrac{\sqrt{2}}{3}\,\mathbf{j}+\tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,\mathbf{k}\right),\\ \text{장력}PC: &\quad V\left(\tfrac{\sqrt{6}}{3}\,\mathbf{i}-\tfrac{\sqrt{3}}{6}\,\mathbf{j}+\tfrac{1}{2}\,\mathbf{k}\right),\\ \text{무게(weight)}: &\quad -W\,\mathbf{k}. \end{aligned}$$

소문항 (iii)

P는 평형 상태이므로 네 힘의 합은 영벡터이다. 성분별로 나누어 본다.

i:

$$-\tfrac{1}{3}U+\tfrac{\sqrt{6}}{3}V=0 \quad\Longrightarrow\quad U=\sqrt{6}\,V,$$

이고, 이것이 요구된 결과이다.

j:

$$\tfrac{1}{2}T-\tfrac{\sqrt{2}}{3}U-\tfrac{\sqrt{3}}{6}V=0.$$

$U=\sqrt{6}V$를 대입하고 $\sqrt{2}\sqrt{6}=2\sqrt{3}$을 이용하면

$$\tfrac{1}{2}T=\tfrac{2\sqrt{3}}{3}V+\tfrac{\sqrt{3}}{6}V=\tfrac{5\sqrt{3}}{6}V \quad\Longrightarrow\quad T=\tfrac{5\sqrt{3}}{3}V.$$

k:

$$\tfrac{\sqrt{3}}{2}T+\tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}U+\tfrac{1}{2}V=W.$$

두 결과를 모두 대입하면

$$\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\tfrac{5\sqrt{3}}{3}V+\tfrac{\sqrt{2}\sqrt{6}}{\sqrt{3}}V+\tfrac{1}{2}V=\tfrac{5}{2}V+2V+\tfrac{1}{2}V=5V=W.$$

따라서

$$V=\frac{W}{5},\qquad U=\frac{\sqrt{6}\,W}{5},\qquad T=\frac{5\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{W}{5}=\frac{W}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\,W}{3}.$$

세 값이 모두 양수이므로 모든 줄이 팽팽하며, 이는 모형과 모순되지 않는다.

검산

- 각 단위벡터의 길이는 1이다. 예를 들어 $\mathbf{e}_C$의 경우 $\frac{6}{9}+\frac{3}{36}+\frac{1}{4}=1$이다.
- $\mathbf{e}_A$와 $\mathbf{e}_C$의 수평 부분이 이루는 각의 코사인은 $-\frac{1}{3}=-\sin\phi$이므로 그 각은 $90^\circ+\phi\approx 109.47^\circ$이고, 마땅히 그래야 한다.
- $W=1$로 두면 $T\approx 0.5774$, $U\approx 0.4899$, $V=0.2$이다. 이때 수직 성분의 합 $0.5774\times 0.8660+0.4899\times 0.8165+0.2\times 0.5=0.5+0.4+0.1=1$이 무게와 균형을 이룬다. 깔끔하게 나뉜다는 점에 주목하자. PA, PB, PC가 각각 무게의 $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{10}$을 떠받친다.

흔한 실수

- 줄 PB에서 sin과 cos을 혼동하는 것. 이 줄이 수직선과 이루는 각은 $90^\circ - \theta$이므로 수직 성분은 $\cos\theta$가 아니라 $\sin\theta$이다.
- C를 OA에 대해 B와 같은 쪽에 두는 것. 그러면 **i** 방정식에서 장력이 음수가 되는데(즉 $V = -\frac{1}{3}W$), 줄은 음의 장력을 가질 수 없다.
- $\cos(90^\circ + \phi) = -\sin\phi$임을 잊는 것. 그러면 $\mathbf{e}_B$와 $\mathbf{e}_C$의 **j** 성분의 부호가 틀리게 된다.

STEP 너머

서로 독립인 세 방향의 줄 세 개는 계를 **정역학적으로 결정된**(statically determinate) 계로 만든다. 즉 평형 방정식이 해가 유일한 3×3 연립일차방정식을 이룬다. 네 번째 줄을 더 하면 장력은 더 이상 정역학만으로 결정되지 않으며, 공학자들은 줄의 탄성(elasticity)까지 고려해야 한다. 이것이 구조 해석(structural analysis)의 출발점이며, 계수(rank)와 영공간(null space)을 다루는 선형대수(linear algebra)의 출발점이기도 하다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이런 방식으로 힘을 벡터로 다루며, Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수 입문)는 이러한 연립방정식이 언제 유일한 해를 가지는지 설명한다.

풀이

STEP II 2011, 문제 12

확률과 통계 • 게임의 등비급수

STEP II 2011, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/11-s2-q12

핵심 아이디어

각 게임은 길어야 세 포인트이므로, 게임이 진행될 수 있는 모든 경우(포인트 순서는 여덟 가지뿐이다)를 나열하여 "Xavier 승리", "Younis 승리", "승자 없음, 게임을 다시 한다"로 분류할 수 있다. 새 게임은 매번 처음부터 다시 시작하므로 경기 전체는 등비적 과정(geometric process)이 된다. 즉 Younis가 경기에서 이길 확률(probability)은 그가 한 게임을 이길 확률을 한 게임에서 승부가 날 확률로 나눈 값이다.

풀이

각 게임을 포인트를 딴 사람의 문자열로 나타내자. 예를 들어 XYY는 Xavier가 첫 번째 포인트를, Younis가 두 번째와 세 번째 포인트를 땄다는 뜻이다. 첫 번째 포인트는 확률 p로 X가 딴다. 그 이후로 각 포인트는 확률 p로 직전 포인트를 딴 사람과 **같은** 선수가 따고, 확률 $1-p$로 **바뀐다**.

같은 선수가 두 포인트를 연속으로 따는 순간 게임의 승부가 나므로, 가능한 게임은 다음과 같다.

순서	확률	결과
XX	$p \cdot p$	Xavier 승리
YXX	$(1-p)(1-p)p$	Xavier 승리
YY	$(1-p)p$	Younis 승리
XYY	$p(1-p)p$	Younis 승리
XYX	$p(1-p)(1-p)$	게임 다시
YXY	$(1-p)(1-p)(1-p)$	게임 다시

(게임이 XX나 YY에 이르면 세 번째 포인트는 필요 없으며, 그 포인트를 치른다고 생각하든 아니든 차이가 없다.) 승부가 나지 않는 게임은 정확히 포인트가 번갈아 나오는 경우, 즉 이후의 두 포인트가 모두 "바뀌는" 경우이다.

소문항 (i)

주어진 한 게임에서 Younis가 이기는 사건을 A, 게임의 승부가 나지 않는 사건을 C라 하자. 표로부터

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A) &= (1-p)p + p^2(1-p) = p(1-p)(1+p) = p(1-p^2),\\ \mathrm{P}(C) &= p(1-p)^2 + (1-p)^3 = (1-p)^2\big(p+(1-p)\big) = (1-p)^2.\end{aligned}$$

각 게임은 같은 규칙으로 독립적(independent)으로 치러지므로, Younis가 경기에서 이기는 것은 어떤 $n \geq 1$에 대하여 처음 $n-1$번의 게임에서 승부가 나지 않고 n번째 게임에서 그가 이기는 경우이다. 따라서

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(C)^{n-1}\,\mathrm{P}(A) = \frac{\mathrm{P}(A)}{1-\mathrm{P}(C)},$$

이고, $p \neq 0$이면 $\mathrm{P}(C) = (1-p)^2 < 1$이므로 이 등비급수(geometric series)는 수렴한다. (같은 이야기를 다르게 하면, 첫 게임에서 승부가 나지 않으면 처음 상태로 되돌아가므로 $w = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(C)\,w$이다.) 이제 $1-(1-p)^2 = 2p-p^2 = p(2-p)$이므로

$$w = \frac{p(1-p^2)}{p(2-p)} = \frac{1-p^2}{2-p},$$

이며, 여기서 p를 약분할 때 $p \neq 0$을 사용하였다. 이것이 구하는 결과이다.

$\frac{1}{2}$과 비교하기. 다음이 성립한다.

$$w - \tfrac{1}{2} = \frac{2(1-p^2)-(2-p)}{2(2-p)} = \frac{p-2p^2}{2(2-p)} = \frac{p(1-2p)}{2(2-p)}.$$

$0 < p \leq 1$이면 인수 p와 $2-p$는 양수이므로 $w - \frac{1}{2}$의 부호는 $1-2p$의 부호와 같다. 따라서 $0 < p < \frac{1}{2}$일 때 $w > \frac{1}{2}$이고, $p > \frac{1}{2}$일 때 $w < \frac{1}{2}$이다 (그리고 대칭성(symmetry)에서 예상되듯이 $p = \frac{1}{2}$에서 $w = \frac{1}{2}$이다).

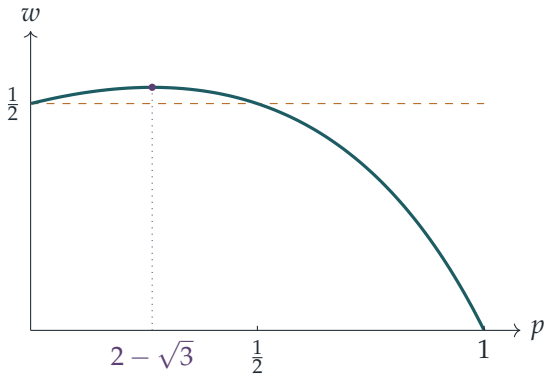
? **생각해 보기** p를 낮추면 Younis가 첫 번째 포인트를 딸 가능성이 커진다. 이것이 언제나 그에게 유리할까?

w는 p에 대하여 감소하는가? 그렇지 않다. 몫의 미분법(quotient rule)으로 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}p} = \frac{-2p(2-p)+(1-p^2)}{(2-p)^2} = \frac{p^2-4p+1}{(2-p)^2}.$$

분자의 근은 $p = 2 \pm \sqrt{3}$이고, 이 중 $[0,1]$에 속하는 것은 $2 - \sqrt{3} \approx 0.268$뿐이다. 따라서 $0 < p < 2 - \sqrt{3}$에서 $\mathrm{d}w/\mathrm{d}p > 0$이고, $2 - \sqrt{3} < p \leq 1$에서 $\mathrm{d}w/\mathrm{d}p < 0$이다. 구간 $0 < p < 2 - \sqrt{3}$에서는 p를 줄이면 오히려 w가 **줄어든다**. 예를 들어 $w(0.2) = \frac{8}{15} \approx 0.533$이지만 $w(0.1) = \frac{99}{190} \approx 0.521$이다.

그 이유는 p가 두 가지 역할을 하기 때문이다. p가 작으면 Younis가 첫 번째 포인트를 따지만, 동시에 연속으로 이기기도 어려워진다. 한 포인트를 딴 사람이 계속 이길 확률이 p에 불과하기 때문이다. p가 아주 작으면 포인트가 번갈아 나오는 경향이 있어서, 첫 번째 포인트의 이점이 사라져 버린다. 최댓값은 $w(2 - \sqrt{3}) = 4 - 2\sqrt{3} \approx 0.536$이고, $p \to 0$일 때 $w \to \frac{1}{2}$이다.



소문항 (ii)

$p = \frac{2}{3}$이면

$$w = \frac{1 - \frac{4}{9}}{2 - \frac{2}{3}} = \frac{5/9}{4/3} = \frac{5}{12}.$$

$\mathrm{P}(C) = \frac{1}{9} < 1$이므로 경기는 확률 1로 끝나고, 따라서 Xavier가 경기에서 이길 확률은 $1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$이다. Xavier의 기대 이득(expected gain)은

$$\tfrac{7}{12} \times 1 - \tfrac{5}{12} \times k,$$

이고, 게임이 공정하려면 이 값이 0이어야 하므로 다음을 얻는다.

$$k = \frac{7}{5}.$$

따라서 Younis가 이기면 Xavier는 Younis에게 £1.40을 지불해야 한다.

소문항 (iii)

$p = 0$이면 모든 게임에서 첫 번째 포인트는 반드시 Younis가 따고, 이후의 모든 포인트는 반드시 직전 포인트를 잃은 선수가 딴다. 따라서 모든 게임은 확률 1로 YXY로 진행된다. 누

구도 두 포인트를 연속으로 따지 못하므로 경기는 결코 끝나지 않는다. 즉 어느 선수도 이기지 못한다.

이것이 소문항 (i)에서 $p = 0$을 제외한 이유이다. 이때 $\mathrm{P}(A) = 0$이고 $1 - \mathrm{P}(C) = 0$이므로 공식 $w = \mathrm{P}(A)/(1 - \mathrm{P}(C))$는 $0/0$이 된다. $p \to 0$일 때 $\frac{1-p^2}{2-p} \to \frac{1}{2}$이라는 사실은 결국 끝이 나는 근처의 경기들을 설명하는 것일 뿐, $p = 0$인 경우 자체의 확률이 아니다.

검산

- $p = \frac{1}{2}$이면 모든 포인트가 공정한 동전 던지기이므로 w는 $\frac{1}{2}$이어야 한다. 공식은 $\frac{3/4}{3/2} = \frac{1}{2}$을 준다.
- $p = 1$이면 Xavier가 처음 두 포인트를 반드시 따므로 $w = 0$이다. 공식은 0을 준다.
- 표에 있는 여섯 게임의 확률을 모두 더하면 1이다.
- 여덟 가지 포인트 순서를 모두 정확히 열거한 결과(p는 0.01부터 0.99까지) w가 그대로 재현되었고, $p = \frac{2}{3}$에서 200 000번의 경기를 시뮬레이션한 결과 Younis가 이긴 비율은 41.6%로, $\frac{5}{12} \approx 41.7\%$와 일치하였다.

흔한 실수

- 전이 규칙을 거꾸로 적용하는 것. 확률 p는 Xavier가 아니라 **직전 포인트**를 딴 사람에게 속한다.
- 엉뚱한 곱을 같다고 놓아서 $k = \frac{5}{7}$이라고 답하는 것. 공정하다는 것은 $\mathrm{P}(\text{X 승리}) \times 1 = \mathrm{P}(\text{Y 승리}) \times k$라는 뜻이므로, 이길 가능성이 적은 쪽이 더 큰 상금을 받는다.
- 소문항 (iii)에서 공식에 $p = 0$을 대입하여 각 선수가 이길 확률이 $\frac{1}{2}$이라고 말하는 것. 실제로는 경기가 결코 끝나지 않는다.

STEP 너머

여기서 포인트들은 **마르코프 연쇄**(Markov chain)를 이룬다. 즉 각 포인트는 바로 앞의 포인트에만 의존한다. 경기를 동일하고 독립적인 게임들로 나누는 것은 **재생**(renewal) 논증의 한 예이며, 방정식 $w = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(C)w$는 마르코프 연쇄에서 흡수 확률(absorption probability)을 구하는 표준적인 방법인 "첫걸음 분석(first-step analysis)"의 가장 간단한 예이다. 소문항 (iii)은 흡수가 일어나지 않을 때 어떤 일이 생기는지 보여 준다. 연쇄가 영원히 순환하는 것이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 대학 1학년 수준에서 마르코프 연쇄와 이러한 방법들을 다룬다.

풀이

STEP II 2011, 문제 13

확률과 통계 • 왜도의 척도

STEP II 2011, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/11-s2-q13

핵심 아이디어

왜도(skewness)는 분포가 한쪽으로 치우친 정도를 나타내며, 여기서 다루는 세 가지 척도는 이를 서로 다른 세 가지 방식으로 포착한다. 3차 중심적률(third central moment)을 통해, 두 십분위수(decile) 사이에서 중앙값(median)이 놓인 위치를 통해, 그리고 평균(mean)과 중앙값의 차이를 통해서이다. 구간 $[0,1]$에서 밀도가 $2x$인 분포에서는 모든 것을 명시적으로 계산할 수 있다. 적률(moment)은 한 줄짜리 적분이고, 누적분포함수(cumulative distribution function)는 x^2이므로 그 역함수(inverse function)는 단순히 제곱근이다. 실제로 해야 할 일은 거듭제곱근(surd)이 들어간 식을 신중하게 계산하는 것과, 마지막에 이들을 깔끔하게 비교하는 방법을 찾는 것뿐이다.

풀이

왜도가 측정하는 것. 왜도는 분포가 중심에 대해 얼마나 **비대칭**(asymmetry)인지를 측정한다. 대칭인 분포의 왜도는 0이다. 더 긴 꼬리(tail)가 오른쪽에 있으면 왜도는 양수이고, 더 긴 꼬리가 왼쪽에 있으면 음수이다.

소문항 (i)

μ가 상수라는 점을 기억하면서 세제곱을 전개하고 기댓값의 선형성(linearity of expectation)을 이용한다.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\big((X-\mu)^3\big) &= \mathrm{E}(X^3) - 3\mu\,\mathrm{E}(X^2) + 3\mu^2\,\mathrm{E}(X) - \mu^3 \\ &= \mathrm{E}(X^3) - 3\mu(\sigma^2+\mu^2) + 3\mu^3 - \mu^3 \\ &= \mathrm{E}(X^3) - 3\mu\sigma^2 - \mu^3,\end{aligned}$$

여기서 $\mathrm{E}(X) = \mu$와 $\mathrm{E}(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$(분산(variance)의 일반적인 공식을 정리한 것)를 이용하였다. 양변을 σ^3으로 나누면 γ에 대해 구하려던 식을 얻는다.

밀도가 $2x$인 분포. $k \geq 0$에 대하여

$$\mathrm{E}(X^k) = \int_0^1 x^k \cdot 2x \,\mathrm{d}x = \frac{2}{k+2}.$$

따라서 $\mu = \frac{2}{3}, \mathrm{E}(X^2) = \frac{1}{2}, \mathrm{E}(X^3) = \frac{2}{5}$이다. 그러므로

$$\sigma^2 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{4}{9} = \tfrac{1}{18}, \qquad \sigma = \frac{1}{3\sqrt{2}}, \qquad \sigma^3 = \frac{1}{27 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{54\sqrt{2}}.$$

분자는

$$\mathrm{E}(X^3) - 3\mu\sigma^2 - \mu^3 = \frac{2}{5} - 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{18} - \frac{8}{27} = \frac{2}{5} - \frac{1}{9} - \frac{8}{27} = \frac{54 - 15 - 40}{135} = -\frac{1}{135}.$$

따라서

$$\gamma = -\frac{1}{135} \cdot 54\sqrt{2} = -\frac{54\sqrt{2}}{135} = -\frac{2\sqrt{2}}{5},$$

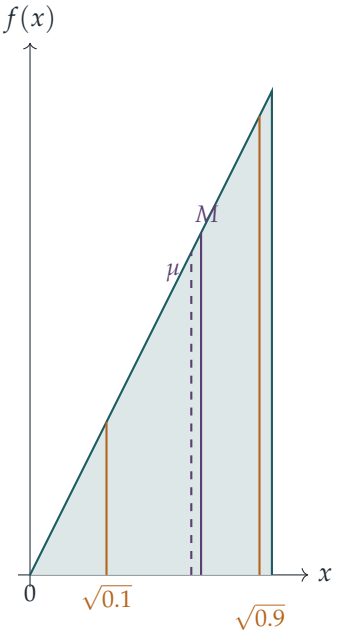
이므로 구하려던 결과가 성립한다. 음의 부호는 타당하다. 밀도가 $x = 1$ 근처에 몰려 있어서, 왼쪽으로 0을 향해 긴 꼬리가 남기 때문이다.

소문항 (ii)

$0 \leq x \leq 1$에 대하여 누적분포함수는

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^x 2t \,\mathrm{d}t = x^2,$$

이고, 이 함수는 $[0, 1]$에서 증가하므로 $0 \leq p \leq 1$에 대하여 그 역함수는 $\mathrm{F}^{-1}(p) = \sqrt{p}$이다.



십분위 왜도. D의 분자와 분모에 $\sqrt{10}$을 곱하면 거듭제곱근이 하나만 남고 모두 사라진다.

$$D = \frac{\sqrt{\frac{9}{10}} - 2\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{10}}}{\sqrt{\frac{9}{10}} - \sqrt{\frac{1}{10}}} = \frac{3 - 2\sqrt{5} + 1}{3 - 1} = \frac{4 - 2\sqrt{5}}{2} = 2 - \sqrt{5},$$

여기서 $\sqrt{10} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$임을 이용하였다. 이것이 보여야 했던 것이다.

피어슨(Pearson) 왜도. 중앙값은 $\mathrm{F}(M) = \frac{1}{2}$를 만족하므로 $M = \frac{1}{\sqrt{2}}$이다. $\frac{1}{\sigma} = 3\sqrt{2}$를 이용하면

$$P = 3\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot 3\sqrt{2} = 9\sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} - 9 = 6\sqrt{2} - 9.$$

수치로 계산하면 $D \approx -0.236$, $P \approx -0.515$, $\gamma \approx -0.566$이므로 대소 순서는 맞아 보인다. 이제 이를 증명하자.

생각해 보기 계산기 없이 $2 - \sqrt{5}$와 $6\sqrt{2} - 9$ 같은 수를 어떻게 비교할 수 있을까?

양변이 모두 양수가 되도록 정리한 다음 제곱한다. 양수에 대해서는 $a < b$일 필요충분조건이 $a^2 < b^2$이기 때문이다. 아래의 각 단계는 거꾸로도 성립하므로, 마지막 명제가 참이면 처음 명제가 증명된다.

$D > P$. $2 - \sqrt{5} > 6\sqrt{2} - 9$, 즉 $\sqrt{5} + 6\sqrt{2} < 11$임을 보여야 한다. 양변이 모두 양수이므로

이는 다음과 동치이다.

$$\begin{aligned}(\sqrt{5}+6\sqrt{2})^2 = 77+12\sqrt{10} < 121 &\iff 12\sqrt{10} < 44\\ &\iff 3\sqrt{10} < 11\\ &\iff 90 < 121,\end{aligned}$$

여기서 마지막 단계는 다시 두 양수를 제곱한 것이다. $90 < 121$은 참이므로 $D > P$이다.

$P > \gamma$. $6\sqrt{2} - 9 > -\frac{2\sqrt{2}}{5}$임을 보여야 한다. 5를 곱하고 정리하면 이는 $32\sqrt{2} > 45$이다. 양변이 모두 양수이므로 이는 $32^2 \cdot 2 > 45^2$, 즉 $2048 > 2025$와 동치이며, 이는 참이다. 따라서 $P > \gamma$이다.

그러므로 $D > P > \gamma$이다. 세 척도는 모두 음수이며 분포가 왼쪽으로 치우쳐 있다는 점에서는 일치하지만, 그 정도에 대해서는 서로 다르다.

검산

- (i)의 항등식은 임의의 대칭 분포에 대해 0을 준다. 예를 들어 X가 같은 확률로 ± 1의 값을 가지면 $\mu = 0, \sigma = 1, \mathrm{E}(X^3) = 0$이다.
- 중점법(midpoint rule)으로 $\mathrm{E}\big((X-\mu)^3\big)/\sigma^3$을 수치 계산하면 -0.56569가 나오며, 이는 $-2\sqrt{2}/5$와 일치한다.
- U가 $[0,1]$에서 균등분포(uniform distribution)를 따를 때 $X = \sqrt{U}$(이는 $\mathrm{F}(x) = x^2$를 가진다)를 모의실험하면, 그림에서처럼 표본 중앙값은 0.707에 가깝고 십분위수는 0.316과 0.949에 가깝게 나온다.
- 평균 $\frac{2}{3}$은 중앙값 $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$의 왼쪽에 있는데, 이는 왼쪽으로 치우친 분포의 전형적인 특징이며 $P < 0$인 이유이기도 하다.

흔한 실수

- $(\frac{1}{18})^{3/2}$ 대신 $\sigma^3 = (\frac{1}{18})^3$으로 쓰는 실수. 세제곱하는 것은 분산이 아니라 표준편차(standard deviation)이다.
- 한쪽 변이 음수일 수도 있는데 부등식을 제곱하는 실수. 먼저 양변이 모두 양수가 되도록 정리해야 한다.
- γ의 공식이나 P의 분모에서 $\sigma^2 = \frac{1}{18}$이 필요한 자리에 $\mathrm{E}(X^2) = \frac{1}{2}$를 쓰는 실수.

STEP 너머

$\mathrm{E}\big((X-\mu)^3\big)$은 3차 **중심적률**이며, (i)의 전개는 적률과 **누율**(cumulant) 사이의 관계의 출발점이다. 누율은 독립인 확률변수(independent random variable)들의 합에 대해 깔끔하게 더해진다. D와 같은 분위수(quantile) 기반 척도는 **로버스트**(robust)하다는 이유로 통계학에서 높이 평가된다. 극단적인 관측값 하나는 십분위수를 거의 움직이지 않지만, 3차 적률은 크게 바꿀 수 있다. Grimmett과 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 적률과 적률생성함수(moment generating function)를 알맞은 수준에서 전개한다.

풀이

STEP III 2011, 문제 1

순수수학 • 계수 내림법

STEP III 2011, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/11-s3-q1

핵심 아이디어

소문항 (i)은 변수분리형 방정식(separable equation)이며, 여기에는 이유가 있다. 이것은 바로 $(*)$에 $y = ze^{-x}$를 대입했을 때 나타나는 방정식이다. z 자체에 대한 항이 소거되어 z'과 z''만 포함하는 방정식이 남고, 이는 $u = z'$에 대한 1계 방정식이 된다. 이것이 **계수 내림법**(reduction of order)이다. 즉 하나의 해(e^{-x})를 알면 다른 해를 찾을 수 있다. 소문항 (iii)에서는 우변이 있는 상태에서 같은 치환을 수행하며, 그 결과 적분인자(integrating factor)로 푸는 1계 선형 방정식(linear first-order equation)이 된다.

풀이

전체에 걸쳐 $x \neq -1$인 구간에서 생각하므로 $x+1$로 나눌 수 있다.

소문항 (i)

$$\frac{x+2}{x+1} = 1 + \frac{1}{x+1},$$

이므로, ($u \neq 0$일 때) 변수를 분리하면 다음을 얻는다.

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int \left(1 + \frac{1}{x+1}\right) \mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \ln|u| = x + \ln|x+1| + c.$$

양변을 지수로 올리면 $|u| = e^c\,|x+1|\,e^x$이다. 부호와 인수 e^c는 하나의 임의의 상수로 합쳐지고, $u = 0$ 역시 해이므로 일반해(general solution)는 다음과 같다.

$$u = C(x+1)e^x, \qquad C\text{는 임의의 상수.}$$

소문항 (ii)

$y = ze^{-x}$로 두면 곱의 미분법(product rule)에 의해

$$y' = (z' - z)e^{-x},$$
$$y'' = (z'' - z')e^{-x} - (z' - z)e^{-x} = (z'' - 2z' + z)e^{-x}.$$

이를 $(*)$에 대입하고 0이 아닌 인수 e^{-x}를 약분하면

$$\begin{aligned} 0 &= (x+1)(z'' - 2z' + z) + x(z' - z) - z \\ &= (x+1)z'' + \big(-2(x+1) + x\big)z' + \big((x+1) - x - 1\big)z \\ &= (x+1)z'' - (x+2)z'. \end{aligned}$$

z 항이 완전히 소거되었다. $u = \dfrac{dz}{dx}$로 두고 $x+1$로 나누면

$$\frac{du}{dx} - \left(\frac{x+2}{x+1}\right)u = 0,$$

이고, 이는 요구한 대로 $\dfrac{dz}{dx}$에 대한 1계 방정식이다. 이것은 정확히 소문항 (i)의 방정식이다.

생각해 보기 왜 z 항이 사라졌을까? 이를 미리 예측할 수 있었을까?

z의 계수는 $z = 1$을 넣었을 때, 즉 $(*)$에 $y = e^{-x}$를 대입해 보았을 때 얻는 값이다. $(x+1)e^{-x} - xe^{-x} - e^{-x} = 0$이므로 $y = e^{-x}$는 이미 해이다. 따라서 상수 z는 반드시 성립해야 하고, z만 단독으로 있는 항은 남을 수 없다. 바로 이 때문에 이 치환을 택한 것이다.

소문항 (i)에 의해 $z' = C(x+1)e^{x}$이다. 부분적분(integration by parts)을 하면

$$\int (x+1)e^{x}\,dx = (x+1)e^{x} - \int e^{x}\,dx = xe^{x} + \text{상수},$$

이므로

$$z = Cxe^{x} + B.$$

따라서 $y = ze^{-x} = Cx + Be^{-x}$이고, C를 A로 바꾸어 쓰면

$$y = Ax + Be^{-x},$$

이다. 여기서 A와 B는 임의의 상수이다. 임의의 y는 $z = ye^{x}$로 두어 ze^{-x} 꼴로 쓸 수 있으므로 $(*)$의 모든 해가 이런 방식으로 얻어진다. 따라서 요구한 대로 이것이 일반해이다.

소문항 (iii)

같은 치환을 하면 우변만 바뀌는데, 우변은 $(x+1)^2$을 e^{-x}로 나눈 것이 된다.

$$(x+1)z'' - (x+2)z' = (x+1)^2e^{x}.$$

$u = z'$으로 두고 $x+1$로 나누면

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \left(\frac{x+2}{x+1}\right)u = (x+1)\mathrm{e}^x.$$

이것은 선형이다. 소문항 (i)에서 $(x+1)\mathrm{e}^x$는 동차 방정식(homogeneous equation)의 해이므로, 그 역수 $\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x+1}$이 적분인자이다. (이는 부호를 제외하면 $\exp\left(-\int \frac{x+2}{x+1}\,\mathrm{d}x\right)$이다.) 양변에 곱하면

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u\,\mathrm{e}^{-x}}{x+1}\right) = 1 \quad\Longrightarrow\quad u = (x+1)\mathrm{e}^x(x+k)$$

이고, 여기서 k는 상수이다. 그러므로

$$z' = (x^2+x)\mathrm{e}^x + k(x+1)\mathrm{e}^x.$$

둘째 항은 소문항 (ii)에서처럼 적분하면 $kx\mathrm{e}^x$가 된다. 첫째 항은 부분적분을 두 번 하면

$$\begin{aligned}\int (x^2+x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x &= (x^2+x)\mathrm{e}^x - \int (2x+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\ &= (x^2+x)\mathrm{e}^x - (2x+1)\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x + \text{상수} = (x^2-x+1)\mathrm{e}^x + \text{상수}.\end{aligned}$$

따라서 $z = (x^2-x+1)\mathrm{e}^x + kx\mathrm{e}^x + B$이고

$$y = z\mathrm{e}^{-x} = x^2 - x + 1 + kx + B\mathrm{e}^{-x}.$$

$-x$는 임의의 항 kx와 합쳐지므로, $A = k-1$로 두면 일반해는

$$y = x^2 + 1 + Ax + B\mathrm{e}^{-x},$$

이고, 여기서 A와 B는 임의의 상수이다.

다른 방법으로, 우변이 이차식이므로 특수해(particular integral) $y = px^2+qx+r$을 시도해 볼 수 있다. 대입하면 $(x+1)2p + x(2px+q) - (px^2+qx+r) = px^2+2px+2p-r$이고, 이를 x^2+2x+1과 비교하면 $p=1, r=1$이며 q는 자유롭다(x가 여함수(complementary function)이기 때문이다). 여기에 소문항 (ii)의 여함수를 더하면 같은 답을 얻는다.

검산

$y = x^2+1$을 직접 대입해 보자. $y' = 2x$, $y'' = 2$이므로 좌변은 $2(x+1) + 2x^2 - x^2 - 1 = x^2+2x+1 = (x+1)^2$이 되어 필요한 대로 성립한다. 수치적으로는, 임의의 A, B와 임의의 $x \in (-0.9, 3)$에 대해 $y = x^2+1+Ax+B\mathrm{e}^{-x}$의 유한 차분(finite-difference) 도함수가 약 3×10^{-6} 이내의 오차로 방정식을 만족한다. 같은 검사로 소문항 (i)과 (ii)도 확인된다.

흔한 실수

- y''을 잘못 구하는 것: y''은 $(z'' - 2z' + z)\mathrm{e}^{-x}$이고, z 앞의 부호는 **플러스**이다. 여기서 부호를 틀리면 엉뚱한 z 항이 남는다.
- 소문항 (iii)에서 인수 e^{-x}를 약분할 때 우변에 e^{x}를 곱하는 것을 잊는 것.
- 상수를 빠뜨리는 것: 최종 답에는 각 적분에서 하나씩, 두 개의 임의의 상수가 필요하다.

STEP 너머

계수 내림법은 일반적인 기법이다. y_1이 2계 선형 방정식의 해이면, $y = y_1 v$로 두었을 때 항상 v 항이 사라지고 v'에 대한 1계 방정식이 남는다. 이것은 또한 **매개변수 변환법**(variation of parameters)의 바탕이 되는 아이디어이기도 한데, 이 방법은 임의의 우변에 대해 특수해를 만들어 낸다. 두 방법 모두 Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에 명료하게 설명되어 있다.

풀이

STEP III 2011, 문제 2

순수수학 • 다항식의 유리근

> **STEP III 2011, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/11-s3-q2

핵심 아이디어

$\mathrm{f}(p/q) = 0$의 양변에 q^{n-1}을 곱하면 분모가 하나만 남고 모두 사라진다. 최고차항(leading term)은 p^n/q가 되고 나머지 항은 모두 정수이다. 따라서 p^n/q도 정수여야 하고, p와 q는 공통인수가 없으므로 $q = 1$일 수밖에 없다. 그 뒤로는 각 소문항이 **정수** 근에 관한 문제가 되며, 이런 근은 크기, 나누어떨어짐, 또는 깔끔하게 홀짝성(parity)으로 배제할 수 있다.

풀이

첫 번째 결과

p, q가 서로소(coprime)인 정수이고 $q > 0$일 때 $\mathrm{f}(p/q) = 0$이라 하자. 그러면

$$0 = q^{n-1}\,\mathrm{f}\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p^n}{q} + a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2}q + \cdots + a_1 p\, q^{n-2} + a_0 q^{n-1},$$

이다. 항 $a_k(p/q)^k$는 $a_k p^k q^{n-1-k}$가 되고, $k \le n-1$인 모든 k에 대해 $n-1-k \ge 0$이기 때문이다. 첫째 항을 제외한 모든 항이 정수이므로

$$\frac{p^n}{q} = -\left(a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_0 q^{n-1}\right)$$

은 정수이다. 즉 q는 p^n을 나눈다.

> ? **생각해 보기** $q \mid p^n$이면 왜 $q = 1$이어야 하는가?

$q > 1$이면 q는 어떤 소인수(prime factor) r를 가진다. 그러면 r는 p^n을 나누고, r가 소수이므로 p 자체를 나누어야 한다. 그런데 그러면 r는 p와 q의 1보다 큰 공통인수가 되므로 모순

이다. 따라서 q는 소인수를 갖지 않고, $q > 0$이므로

$$q = 1.$$

이다. 그러므로 $f(x) = 0$의 모든 유리근(rational root) p/q는 정수 p와 같다. (바로 여기서 f가 **모닉**(monic), 즉 최고차항의 계수가 1이라는 사실을 사용한다는 점에 주목하자. 최고차항의 계수가 a_n이라면 $a_n p^n/q$가 남게 되어 $q \mid a_n$이라는 결론밖에 얻을 수 없다.)

아래에서 유용하게 쓰일 사실 두 가지가 있다. m이 정수근이면

$$m\left(m^{n-1} + a_{n-1}m^{n-2} + \cdots + a_1\right) = -a_0,$$

이므로 m은 a_0을 나눈다. 또한 $a_0 \neq 0$이므로 $m \neq 0$이다.

소문항 (i)

수 $2^{1/n}$은 $x^n - 2 = 0$의 근이며, 이 다항식은 정수 계수를 갖는 모닉 다항식이고 $a_0 = -2 \neq 0$이다. 따라서 $2^{1/n}$이 유리수라면 $m^n = 2$를 만족하는 정수 m이어야 한다. 그런데

$$1^n = 1 < 2 < 4 \leq 2^n,$$

이므로 양의 실수 $2^{1/n}$은 연속한 두 정수 1과 2 사이에 엄격하게 놓이고, 정수가 될 수 없다. 그러므로 모든 $n \geq 2$에 대해 $2^{1/n}$은 무리수(irrational)이다.

소문항 (ii)

여기서 $n = 3$이고 $a_0 = 1$이다. 모든 유리근은 1을 나누는 정수 m이므로 $m = \pm 1$이다. 그런데

$$1^3 - 1 + 1 = 1 \neq 0, \qquad (-1)^3 - (-1) + 1 = 1 \neq 0.$$

이다. 따라서 $x^3 - x + 1 = 0$은 유리근을 갖지 않는다.

(다른 방법: $m^3 - m = (m-1)m(m+1)$은 연속한 두 정수를 포함하는 곱이므로 짝수이고, 따라서 $m^3 - m + 1$은 홀수이므로 결코 0이 아니다. 이 홀짝성 아이디어가 바로 소문항 (iii)에서 필요한 것이다.)

소문항 (iii)

다항식 $x^n - 5x + 7$은 정수 계수를 갖는 모닉 다항식이고 상수항이 $7 \neq 0$이므로, 모든 유리근은 정수 m이다. $m^n - 5m + 7$이 항상 홀수임을 보이자.

- m이 짝수이면 m^n과 $5m$은 짝수이므로 $m^n - 5m + 7$은 짝수 − 짝수 + 홀수, 즉 홀수이다.
- m이 홀수이면 m^n과 $5m$은 모두 홀수이므로 $m^n - 5m$은 짝수이고 $m^n - 5m + 7$은 홀수이다.

어느 경우든 $m^n - 5m + 7$은 홀수이므로, 특히 0이 아니다. 그러므로 모든 $n \geq 2$에 대해 $x^n - 5x + 7 = 0$은 정수근을 갖지 않고, 따라서 유리근도 갖지 않는다.

(대신 7의 약수를 확인하려면 $m = \pm 1, \pm 7$과 **모든** n에 대해 $m^n - 5m + 7 \neq 0$임을 보여야 한다. 이 방법도 통하지만 더 번거롭다. 홀짝성을 쓰면 모든 n을 한 번에 처리할 수 있다.)

검산

- 유리근을 **갖는** 다항식, 예를 들어 $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$를 시험해 보자. 근 3과 -2는 약속대로 정수이고, $a_0 = -6$을 나눈다.
- 모닉이 아닌 다항식은 정수가 아닌 유리근을 가질 수 있다. 예를 들어 $2x - 1$이 그렇다. 최고차항의 계수가 1이라는 조건이 중요한 이유가 이것이다.
- 수치적으로 $2^{1/2} \approx 1.414$와 $2^{1/3} \approx 1.260$은 1과 2 사이에 있다. 또 $x^3 - x + 1$은 $x = \pm 1$에서 값 1을 가진다. 컴퓨터로 무작위 정수 계수 모닉 다항식 3000개를 탐색한 결과 유리근은 모두 정수였고, $|m| \leq 200$, $2 \leq n \leq 14$에 대해 $m^n - 5m + 7$이 홀수임도 확인되었다.

흔한 실수

- q^{n-1} 대신 q^n을 곱하는 것: 그러면 $p^n = -q(\cdots)$를 얻는다. 이 방법도 통하지만, 그다음에 $q \mid p^n$임을 반드시 밝혀야 한다. q^{n-1}을 곱하면 분수 p^n/q가 이 사실을 명시적으로 드러낸다.
- 이유를 밝히지 않고 "$q \mid p^n$이므로 $q \mid p$"라고 단정하는 것: 이 논증은 q의 소인수를 거쳐야 한다.
- (iii)에서 n의 값 몇 개만 확인하는 것: 논증은 모든 $n \geq 2$에 대해 동시에 성립해야 한다.

STEP 너머

이것은 모닉 형태의 **유리근 정리**(rational root theorem)이다. 즉 정수 계수 모닉 다항식의 근인 유리수는 정수이다. 대수적 정수론(algebraic number theory)의 언어로 말하면 정수는 **정수적으로 닫혀 있다**(integrally closed)고 하며, 정수 계수 모닉 다항식의 근인 수를 대수적 정수(algebraic integer)라고 한다. (iii)의 홀짝성 기법은 다항식을 소수를 법으로 하여 줄이는 방법의 가장 단순한 경우이며, 이는 다항식이 근을 갖지 않음이나 기약(irreducible)임을 증명하는 강력한 도구이다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등산술)은 훌륭한 다음 단계이며, Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 대수적인 측면을 전개한다.

풀이

STEP III 2011, 문제 3

순수수학 • 삼차방정식 풀기

> **STEP III 2011, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/11-s3-q3

핵심 아이디어

두 세제곱식 $(x-\alpha)^3$과 $(x-\beta)^3$을 쓰면 자유롭게 정할 수 있는 상수 a와 b 두 개가 생기고, x^2항이 없는 최고차항 계수가 1인(monic) 삼차식(cubic)은 네 개의 조건을 준다. 그래서 조건 중 두 개로 a와 b를 구하면, 나머지 두 조건은 이차방정식이 알려 주는 $\alpha+\beta$와 $\alpha\beta$에 관한 사실과 정확히 일치해야 한다. 삼차식을 두 세제곱의 합으로 나타내고 나면, 이를 0으로 놓는 것은 "어떤 비의 세제곱이 상수와 같다"는 꼴이 되고, 이것은 세제곱근(cube root)을, 그것도 세 개 모두 취하여 푼다.

풀이

삼차식을 두 세제곱의 합으로 나타내기

$p \neq 0$이므로 이차방정식 $pt^2 - qt + p^2 = 0$에서

$$\alpha+\beta = \frac{q}{p}, \qquad \alpha\beta = \frac{p^2}{p} = p,$$

이고, 판별식(discriminant)은 $q^2 - 4p^3$이다. 따라서 단서 조건 $q^2 \neq 4p^3$은 정확히 $\alpha \neq \beta$라는 뜻이다. 또한 $\alpha\beta = p \neq 0$이므로 두 근 모두 0이 아니다.

전개하면

$$a(x-\alpha)^3 + b(x-\beta)^3 = (a+b)x^3 - 3(a\alpha+b\beta)x^2 + 3(a\alpha^2+b\beta^2)x - (a\alpha^3+b\beta^3).$$

이것이 $x^3 - 3px + q$와 같으려면

$$a+b = 1, \qquad a\alpha+b\beta = 0, \qquad a\alpha^2+b\beta^2 = -p, \qquad a\alpha^3+b\beta^3 = -q.$$

이어야 한다. 처음 두 식은 a와 b에 관한 일차식이다. 두 번째 식에 $b = 1 - a$를 대입하면 $a(\alpha - \beta) = -\beta$를 얻고, $\alpha \neq \beta$이므로 나눌 수 있다.

$$a = \frac{\beta}{\beta - \alpha}, \qquad b = \frac{\alpha}{\alpha - \beta}.$$

이제 나머지 두 조건이 저절로 성립함을 확인한다.

$$a\alpha^2 + b\beta^2 = \frac{\beta\alpha^2 - \alpha\beta^2}{\beta - \alpha} = \frac{\alpha\beta(\alpha - \beta)}{\beta - \alpha} = -\alpha\beta = -p,$$

$$a\alpha^3 + b\beta^3 = \frac{\beta\alpha^3 - \alpha\beta^3}{\beta - \alpha} = \frac{\alpha\beta(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)}{\beta - \alpha} = -\alpha\beta(\alpha + \beta) = -p \cdot \frac{q}{p} = -q.$$

따라서 a와 b를 이렇게 정하면

$$x^3 - 3px + q = \frac{\beta}{\beta - \alpha}(x - \alpha)^3 + \frac{\alpha}{\alpha - \beta}(x - \beta)^3,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

$x^3 - 24x + 48 = 0$ 풀기

여기서 $p = 8$, $q = 48$이고 $q^2 = 2304 \neq 2048 = 4p^3$이므로 앞의 결과를 적용할 수 있다. 이 차방정식은 $8t^2 - 48t + 64 = 0$, 즉 $t^2 - 6t + 8 = 0$이고, 근은 2와 4이다. $\alpha = 2$, $\beta = 4$로 잡으면 $a = 2$, $b = -1$이므로

$$x^3 - 24x + 48 = 2(x - 2)^3 - (x - 4)^3.$$

(간단히 전개해 보면 확인된다: $2x^3 - 12x^2 + 24x - 16 - x^3 + 12x^2 - 48x + 64$.)

생각해 보기 $2(x-2)^3 = (x-4)^3$을 어떻게 풀 수 있는 꼴로 바꿀까?

$(x - 4)^3$으로 나눈다. $x = 4$는 근이 아니므로 $(64 - 96 + 48 = 16)$ 이렇게 해도 된다. 방정식은

$$\left(\frac{x-2}{x-4}\right)^3 = \frac{1}{2}.$$

이 된다. $c = 2^{1/3}$이라 하자. 세제곱이 $\frac{1}{2}$인 복소수는 $k = c^{-1}, c^{-1}\omega, c^{-1}\omega^2$이다. 각각에 대하여 $\frac{x-2}{x-4} = k$를 풀면

$$x - 2 = kx - 4k \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{2 - 4k}{1 - k},$$

이고, $k \neq 1$이므로 이 식은 타당하다. 대응 $k \mapsto x$는 일대일(one-to-one)이므로 세 개의 k 값은 서로 다른 세 근을 주고, 이것이 삼차식의 근 전부여야 한다.

$k = c^{-1}$일 때는 분자와 분모에 c를 곱하면

$$x = \frac{2c - 4}{c - 1} = \frac{2(2 - 2^{1/3})}{1 - 2^{1/3}},$$

이고, 이것이 문제에 주어진 해이다. $k = c^{-1}\omega$일 때는 ($\omega^3 = 1$을 이용하여) 분자와 분모에 $c\,\omega^{-1} = c\,\omega^2$을 곱하면

$$x = \frac{2c\omega^2 - 4}{c\omega^2 - 1} = \frac{2(2 - 2^{1/3}\omega^2)}{1 - 2^{1/3}\omega^2},$$

이고, 같은 방법으로 $k = c^{-1}\omega^2$에서

$$x = \frac{2(2 - 2^{1/3}\omega)}{1 - 2^{1/3}\omega}.$$

를 얻는다. 따라서 세 해는 $j = 0, 1, 2$에 대하여 $x = \dfrac{2(2 - 2^{1/3}\omega^j)}{1 - 2^{1/3}\omega^j}$이다.

$p = r^2$, $q = 2r^3$인 경우

이제 $q^2 = 4r^6 = 4p^3$이므로, 이는 정확히 앞의 방법이 제외하는 경우이다. 이차방정식 $r^2t^2 - 2r^3t + r^4 = r^2(t - r)^2$은 중근(repeated root) $t = r$를 가지며, a와 b를 구할 수 없다. 그러나 이차방정식의 중근은 삼차식도 중근을 가질 것임을 시사한다. 실제로 $x = r$를 대입하면 $r^3 - 3r^3 + 2r^3 = 0$이고, 도함수(derivative) $3x^2 - 3r^2$도 $x = r$에서 0이 되므로 $(x - r)^2$은 인수이다. x^3항과 상수항을 비교하면

$$x^3 - 3r^2x + 2r^3 = (x - r)^2(x + 2r).$$

근은 $x = r$(중근)와 $x = -2r$이다.

? 생각해 보기 앞의 공식으로 이 근들을 구할 수 있었을까?

그렇지 않다. $\alpha = \beta$이면 두 세제곱이 하나로 합쳐지므로 $a(x - \alpha)^3 + b(x - \alpha)^3$은 $(x - \alpha)^3$의 상수배밖에 될 수 없고, 여기에는 $-3px$에 맞출 x항이 없다. 그래서 다른 접근이 필요했던 것이다. 삼차식을 $(x - r)$의 거듭제곱으로 나타내 보면 대신 어떤 일이 일어나는지 알 수 있다. $x^3 - 3r^2x + 2r^3 = (x - r)^3 + 3r(x - r)^2$이므로, 중근은 이차방정식의 중근 $t = r$에 놓인다.

검산

- 실근은 $2(2 - 1.259921)/(1 - 1.259921) \approx -5.694644$이고, 이를 대입하면 약 10^{-13}의 오차 범위에서 $x^3 - 24x + 48 \approx 0$이다. 나머지 두 근은 $2.847322 \pm 0.567212\,\mathrm{i}$이며, 역시 잔차가 0이다.
- 세 근의 합은 (x^2항이 없으므로) 0이고, 곱은 -48이다: $-5.694644 \times (2.847322^2 + 0.567212^2) \approx -48.0$.
- 실근 하나와 복소근 둘이라는 결과는 이론과 맞는다. $x^3 - 3px + q$는 $q^2 < 4p^3$일 때만 세 실근을 가지는데, 여기서는 $q^2 > 4p^3$이다.

- 항등식은 수치적으로 검증할 수 있다. 무작위로 고른 2000개의 (p, q) 쌍에 대하여 무작위 복소수 x에서 항등식을 확인했고, 여러 r 값에 대하여 인수분해 $(x-r)^2(x+2r)$도 확인했다.

흔한 실수

- $\frac{1}{2}$의 실수 세제곱근만 취해서 해를 하나만 구하는 것. 삼차식은 근이 세 개이고, 이들은 세 개의 세제곱근에서 나온다.
- a, b 중 어느 것이 어느 근과 짝을 이루는지 혼동하는 것: a ($(x-\alpha)^3$의 계수)는 분자에 β가 있다.
- 분수를 정리할 때 ω와 ω^2을 바꿔 쓰는 것. 다만 두 답은 켤레(conjugate) 쌍을 이루므로, 어느 쪽으로 해도 최종적인 근의 집합은 같다.

STEP 너머

이것은 흔히 카르다노(Cardano)와 타르탈리아(Tartaglia)의 업적으로 여겨지는 16세기의 삼차방정식 해법의 한 형태이다. 먼저 x^2항이 없는 "축약된(depressed)" 삼차식으로 바꾼 다음, 보조 이차방정식(**분해식**(resolvent))을 푼다. 갈루아 이론(Galois theory)은 삼차식과 사차식에는 왜 이런 분해식이 있고 일반적인 오차식에는 왜 없는지를 설명한다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 이러한 개념으로 나아가는 읽기 쉬운 길을 제시한다.

풀이

STEP III 2011, 문제 4

순수수학 • 영 부등식

STEP III 2011, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/11-s3-q4

이 문제는 *Beyond STEP*의 3.4 절 **부등식을 증명하는 넓이**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch03/areas-inequalities.html

핵심 아이디어

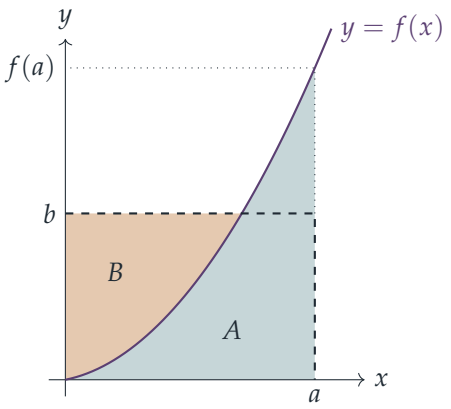
$(*)$의 두 적분(integral)은 모두 같은 그림 위의 넓이이다. $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$는 곡선과 x-축 사이의 넓이이고, $\int_0^b f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y$는 곡선과 y-축 사이의 넓이이다. 두 넓이를 합치면 언제나 꼭짓점이 $(0,0)$과 (a,b)인 직사각형을 덮으며, 꼭짓점 (a,b)가 곡선 위에 있지 않으면 남는 부분이 생긴다. 그러면 소문항 (ii)와 (iii)은 f를 골라 적분 두 개를 계산하는 일에 지나지 않는다.

풀이

소문항 (i)

f는 연속(continuous)이고 기울기(gradient)가 양수이므로 순증가(strictly increasing)한다. 따라서 역함수(inverse function) f^{-1}가 존재하고 이 역시 증가하며, $f(0) = 0$이므로 곡선 $y = f(x)$는 원점에서 시작한다.

$0 \le x \le a$에서 곡선과 x-축 사이의 영역을 A라 하자. 그 넓이는 $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$이다. $0 \le y \le b$에서 곡선과 y-축 사이의 영역을 B라 하자. y에 대하여 적분하면 그 넓이는 $\int_0^b f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y$이다. 두 영역은 곡선의 서로 반대쪽에 있으므로 겹치지 않는다.



먼저 그림처럼 $b \le f(a)$인 경우를 생각하자. 직사각형 $0 \le x \le a, 0 \le y \le b$의 모든 점은 곡선 위 또는 그 아래에 있거나(따라서 A에 속하거나) 곡선 위 또는 그 왼쪽에 있다(따라서 B에 속한다). 그러므로 A와 B를 합치면 넓이가 ab인 직사각형을 덮고, $(*)$가 성립한다. 남는 부분은 A 중에서 직선 $y = b$ 위쪽에 있는 부분, 즉 $f^{-1}(b) \le x \le a$에서 직선과 곡선 사이의 가느다란 조각이다.

반대로 $b \ge f(a)$이면 역할을 바꾸어 같은 논증을 적용하면 된다. 직사각형은 덮이고, 이번에는 B 중에서 직선 $x = a$ 오른쪽에 있는 부분이 남는다.

따라서 $(*)$는 모든 경우에 성립하고, 등호가 성립하려면 남는 부분의 넓이가 0이어야 한다. $a, b > 0$이고 $b \ne f(a)$이면, 남는 부분은 한쪽 끝에서만 만나는 곡선과 직선으로 둘러싸여 있으므로 넓이가 양수이다. 그러므로 $a > 0, b > 0$일 때

$$\text{등호가 성립할 필요충분조건은} b = f(a),$$

즉 직사각형의 꼭짓점 (a, b)가 곡선 위에 있는 경우이다.

소문항 (ii)

$p > 1$일 때 $f(x) = x^{p-1}$은 $x \ge 0$에서 연속이고 $f(0) = 0$이며 그 범위에서 순증가하므로 $(*)$를 적용할 수 있다. (기울기 $(p-1)x^{p-2}$는 $x > 0$에서 양수이다. $p < 2$이면 0에서 발산하지만, 넓이에 관한 논증에는 영향을 주지 않는다.) 역함수는 $f^{-1}(y) = y^{1/(p-1)}$이다.

조건 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$에서 $\frac{1}{q} = \frac{p-1}{p}$이므로

$$q = \frac{p}{p-1}, \qquad \frac{1}{p-1} + 1 = \frac{p}{p-1} = q.$$

따라서 $f^{-1}(y) = y^{q-1}$이고, 두 적분은

$$\int_0^a x^{p-1}\,\mathrm{d}x = \frac{a^p}{p}, \qquad \int_0^b y^{q-1}\,\mathrm{d}y = \frac{b^q}{q}.$$

이를 $(*)$에 대입하면

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

이므로 증명이 끝난다.

생각해 보기 여기서 등호 조건 $b = f(a)$는 무엇을 뜻하며, b^q는 어떻게 간단히 할 수 있을까?

조건은 $b = a^{p-1}$이다. 그러면 $(p-1)q = p$이므로 $b^q = a^{(p-1)q} = a^p$이다. 따라서

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} = a^p\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = a^p = a \cdot a^{p-1} = ab,$$

이므로 실제로 등호가 성립한다.

소문항 (iii)

$0 \le x \le \frac{1}{2}\pi$에서 $f(x) = \sin x$로 잡자. 이 함수는 연속이고 $f(0) = 0$이며, 기울기 $\cos x$는 $0 \le x < \frac{1}{2}\pi$에서 양수이므로 순증가한다(기울기는 끝점에서만 0이 되며, 이는 논증에 영향을 주지 않는다). 이 함수는 $[0, \frac{1}{2}\pi]$를 $[0,1]$ 위로 보내고 역함수는 arcsin이며, 이것이 바로 a와 b에 허용된 범위이다.

첫 번째 적분은

$$\int_0^a \sin x \,\mathrm{d}x = 1 - \cos a.$$

두 번째 적분은 $u = \arcsin y$, $\mathrm{d}v = \mathrm{d}y$로 놓고 부분적분(integration by parts)한다.

$$\begin{aligned}\int_0^b \arcsin y \,\mathrm{d}y &= \Big[y \arcsin y\Big]_0^b - \int_0^b \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y \\ &= b\arcsin b + \Big[\sqrt{1-y^2}\Big]_0^b \\ &= b\arcsin b + \sqrt{1-b^2} - 1.\end{aligned}$$

둘을 더하면 1이 서로 소거되어 $(*)$는

$$ab \le b\arcsin b + \sqrt{1-b^2} - \cos a,$$

가 되고, 이것이 구하는 부등식이며 등호는 $b = \sin a$일 때 성립한다.

생각해 보기 a는 자유롭게 고를 수 있다. 어떤 값을 골라야 원하는 부등식이 나올까?

$t \ge 1$에 대하여 $b = t^{-1}$로 놓으면, 이는 요구대로 $(0,1]$에 속한다. 부등식에 $t > 0$을 곱하고 $t\sqrt{1-t^{-2}} = \sqrt{t^2-1}$($t > 0$이므로 성립)을 이용하면

$$a \le \arcsin(t^{-1}) + \sqrt{t^2-1} - t\cos a \quad \text{임의의} a \in [0, \tfrac{1}{2}\pi].$$

목표 부등식에는 a가 없고 우변에 t가 있는데, 이는 $a = 0$일 때 $t\cos a$가 되는 값이다. $a = 0$으로 놓으면

$$0 \le \arcsin(t^{-1}) + \sqrt{t^2-1} - t, \qquad \text{즉,} \qquad \arcsin(t^{-1}) \ge t - \sqrt{t^2-1} \quad (t \ge 1).$$

검산

- $t = 1$에서 최종 부등식은 $\frac{1}{2}\pi \ge 1$이 되고, $t = 2$에서는 $\frac{1}{6}\pi \approx 0.5236 \ge 2 - \sqrt{3} \approx 0.2679$가 된다.
- $t \to \infty$일 때 양변은 모두 $\frac{1}{t}$ 정도의 크기이다. $\arcsin(t^{-1}) \approx t^{-1} + \frac{1}{6}t^{-3}$이고, $t - \sqrt{t^2-1} = \frac{1}{t+\sqrt{t^2-1}} \approx \frac{1}{2t}$이다. 따라서 이 하계는 실제 값의 약 절반이다.
- 소문항 (iii)의 부등식을 무작위 점 (a, b) 2×10^5개에서 시험해 보았는데, 한 번도 틀리지 않았고 차이는 곡선 $b = \sin a$ 근처에서만 0으로 줄어들었다. 또한 무작위 p, a, b에 대해 영(Young)의 부등식을 확인했고, 두 적분을 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 확인했다.

흔한 실수

- 소문항 (i)에서 $b \le f(a)$인 경우만 그리는 것. $b \ge f(a)$인 경우는 대칭적이지만, 그렇다고 밝혀 두어야 한다.
- $f^{-1}(y) = y^{1/(p-1)}$이라고 쓴 뒤 $1/(p-1) = q - 1$임을 알아채지 못해서 적분값 b^q/q가 나오지 않는 것.
- 마지막 단계에서 하계를 최적화하는 a를 찾으려 하는 것. 그런 a는 $\arcsin(t^{-1})$이며, 이는 자명한 항등식만 줄 뿐이다. 가장 단순한 선택인 $a = 0$이 통하는 선택이다.

STEP 너머

소문항 (ii)는 영의 부등식(Young's inequality)으로, 횔더(Hölder)의 부등식 $\sum |x_i y_i| \le \left(\sum |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum |y_i|^q\right)^{1/q}$에 이르는 표준적인 경로이며, 횔더 부등식은 다시 해석학의 L^p 공간을 떠받친다. $\int f$와 $\int f^{-1}$를 짝짓는 생각은 르장드르 변환(Legendre transform)과 볼록 쌍대성(convex duality)의 씨앗이며, 이는 역학(라그랑지안(Lagrangian)에서 해밀토니안(Hamiltonian)으로 넘어가는 과정)과 최적화에서 다시 나타난다. 해석학의 배경 지식은 Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)를 참고하라.

풀이

STEP III 2011, 문제 5

순수수학 • 적분을 이용한 넓이

STEP III 2011, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/11-s3-q5

이 문제는 *Beyond STEP*의 4.9 절 **홀디치의 정리**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch04/holditch.html

핵심 아이디어

데카르트 좌표 공식 $(*)$가 유용한 까닭은 이 공식이 **쌍선형**(*bilinear*)이기 때문이다. 즉 A가 P를 t에만 의존하는 벡터만큼 평행이동한 점이라면, OA가 쓸고 지나간 넓이는 OP가 쓸고 지나간 넓이, 평행이동만으로 생기는 넓이, 그리고 교차항으로 나뉜다. 막대는 바로 이런 평행이동, 곧 단위벡터 $(\cos t, \sin t)$의 상수배에 $\mp$를 붙인 것을 준다. 교차항 f는 계산할 수 없을 것처럼 보이지만, 실제로 계산할 필요가 전혀 없다. A와 B는 모두 같은 곡선 $\mathcal{C}$를 한 바퀴 돌기 때문에 $[A] = [B]$이고, 이 등식이 f를 결정한다.

풀이

넓이 공식

r와 θ가 t의 함수(function)일 때 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$로 두면, 곱의 미분법(product rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\,\dot{\theta}, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\,\dot{\theta},$$

이다. 여기서 점은 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$를 나타낸다. 따라서

$$\begin{aligned} x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= r\cos\theta\,(\dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\,\dot{\theta}) - r\sin\theta\,(\dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\,\dot{\theta}) \\ &= r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\,\dot{\theta} = r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}, \end{aligned}$$

이다. $r\dot{r}\sin\theta\cos\theta$ 항들이 서로 상쇄되기 때문이다. 적분변수를 θ에서 t로 바꾸면

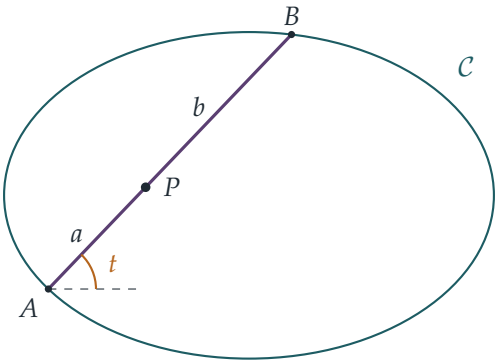
$$\tfrac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta = \tfrac{1}{2}\int r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\int\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t,$$

이고, 이것이 바로 $(*)$이다.

A와 B의 좌표

막대는 A에서 B로 향하는 단위벡터(unit vector) $\mathbf{u} = (\cos t, \sin t)$의 방향을 가리키고, P는 그 사이에 있으며 $AP = a$, $PB = b$이다. 따라서 A는 $P - a\mathbf{u}$이고 B는 $P + b\mathbf{u}$이다.

$$A = (x - a\cos t,\ y - a\sin t), \qquad B = (x + b\cos t,\ y + b\sin t).$$



OA가 쓸고 지나간 넓이

다시 점으로 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$를 나타내자. A에 대하여

$$x_A = x - a\cos t, \quad \dot{x}_A = \dot{x} + a\sin t, \qquad y_A = y - a\sin t, \quad \dot{y}_A = \dot{y} - a\cos t.$$

이다. 전개하면

$$x_A\dot{y}_A = x\dot{y} - a\cos t\,(x + \dot{y}) + a^2\cos^2 t,$$
$$y_A\dot{x}_A = y\dot{x} + a\sin t\,(y - \dot{x}) - a^2\sin^2 t,$$

이므로

$$x_A\dot{y}_A - y_A\dot{x}_A = (x\dot{y} - y\dot{x}) + a^2 - a\Big[(x + \dot{y})\cos t + (y - \dot{x})\sin t\Big].$$

이다. 이제 t가 0부터 2π까지 변할 때 $(*)$를 적용하자. 첫 번째 괄호는 $[P]$를 주고, 상수 a^2은 $\frac{1}{2}\cdot 2\pi a^2 = \pi a^2$을 주며, 마지막 항은 f의 정의에 의해 $-af$를 준다. 따라서

$$[A] = [P] + \pi a^2 - af,$$

이고, 이것이 증명하려던 식이다.

B의 경우에는 모든 곳에서 $-a$가 $+b$로 바뀌는 것만 다르다(위의 계산에서 a를 $-b$로 바꾸면 된다). 따라서

$$[B] = [P] + \pi b^2 + bf.$$

이다.

$\mathcal{C}$와 $\mathcal{D}$ 사이의 넓이

생각해 보기 $[A]$, $[B]$, $[P]$는 실제로 무엇과 같은가?

t가 0부터 2π까지 변하는 동안 막대는 정확히 한 바퀴 회전한다. 두 끝점은 모두 $\mathcal{C}$를 시계 반대 방향으로 한 바퀴 돌아 출발점으로 되돌아온다. 반 바퀴 돌았을 때 A와 B는 서로 자리를 바꾸고, 한 바퀴를 다 돌면 처음 위치로 돌아온다. 원점은 $\mathcal{D}$의 내부에 있으므로 $\mathcal{C}$의 내부에도 있다. 따라서 OA와 OB는 각각 $\mathcal{C}$로 둘러싸인 영역을 정확히 한 번 쓸고 지나가고, OP는 $\mathcal{D}$로 둘러싸인 영역을 한 번 쓸고 지나간다. 이 넓이들을 $|\mathcal{C}|$와 $|\mathcal{D}|$로 쓰면

$$[A] = [B] = |\mathcal{C}|, \qquad [P] = |\mathcal{D}|.$$

이다.

$[A] = [B]$로 두면 $[P]$가 소거된다.

$$\pi a^2 - af = \pi b^2 + bf \quad \Longrightarrow \quad (a+b)f = \pi(a^2 - b^2) = \pi(a-b)(a+b).$$

$a + b > 0$이므로(막대의 길이이다) 양변을 나누면 $f = \pi(a-b)$를 얻는다. 따라서

$$|\mathcal{C}| - |\mathcal{D}| = [A] - [P] = \pi a^2 - a\pi(a-b) = \pi ab.$$

이다. 즉 두 곡선 사이의 넓이는 πab이다. $[B]$를 대신 사용해도 $\pi b^2 + b\pi(a-b) = \pi ab$가 나오므로, 결과가 일관됨을 확인할 수 있어 안심이 된다.

검산

- **원의 경우.** $\mathcal{C}$가 반지름이 R인 원이면, 길이가 $a+b$인 현은 중심으로부터 항상 거리 $d = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}(a+b)^2}$만큼 떨어져 있다. 피타고라스(Pythagoras) 정리에 의해 P는 중심으로부터 거리 $\sqrt{d^2 + \frac{1}{4}(a-b)^2}$에 있으므로, $\mathcal{D}$는 반지름의 제곱이 $R^2 - ab$인 동심원이다. 두 원 사이의 넓이는 $\pi R^2 - \pi(R^2 - ab) = \pi ab$이다.
- **대칭성.** 답은 a와 b에 대하여 대칭이며, 당연히 그래야 한다. 막대의 방향을 뒤집으면 두 값의 역할이 바뀌기 때문이다.
- **수치 계산.** $a = 1$, $b = 1.5$인 막대를 타원 $x^2/16 + y^2/9 = 1$을 따라 움직이고, 그려진 곡선의 넓이를 신발끈 공식(shoelace formula)으로 계산하였다. 두 곡선 사이의 넓이

는 4.712390으로 나와 $\pi ab = 1.5\pi \approx 4.712389$와 일치하였다. 또한 무작위로 고른 곡선 $P(t)$에 대하여 수치적분으로 $[A]$와 $[B]$에 대한 항등식도 확인하였다.

흔한 실수

- $\dot{x}_A = \dot{x} + a\sin t$의 부호를 틀리는 경우. $-a\cos t$를 미분하면 $+a\sin t$가 된다.
- f를 직접 계산하려고 시도하는 경우. f는 $\mathcal{D}$의 모양에 따라 달라지므로 더 많은 정보 없이는 계산할 수 없다. 핵심은 $[A] = [B]$가 f를 결정한다는 점이다.

STEP 너머

이것은 홀디치 정리(Holditch's theorem, 1858)이다. 즉 $\mathcal{C}$와 $\mathcal{D}$ 사이의 넓이는 $\mathcal{C}$의 모양과 상관없이 오직 a와 b에만 의존한다. 공식 $(*)$는 그린 정리(Green's theorem)의 특수한 경우인데, 그린 정리는 영역 위의 넓이 적분을 그 경계를 따라가는 선적분(line integral)으로 바꾸어 준다. 이것은 또한 경계를 따라 그려서 넓이를 측정하는 기계 장치인 구적기(planimeter)의 원리이기도 하다. 그린 정리는 대학 1학년 벡터 미적분학의 핵심 주제이며, Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이러한 경계 적분을 아름답게 기하학적인 관점에서 보여 준다.

풀이

STEP III 2011, 문제 6

순수수학 • 적분에서의 치환

STEP III 2011, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/11-s3-q6

핵심 아이디어

어떤 값도 직접 계산해서는 안 되므로, 쓸 수 있는 도구는 한 적분을 다른 적분으로 바꾸어 주는 것들, 곧 치환적분(substitution)과 부분적분(integration by parts)뿐이다. 실마리는 적분 구간에 있다. 수 $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$와 $\ln 2, \ln 3$은 $v = e^{-u}$로 연결되고, $\frac{1}{2}\ln 2, \frac{1}{2}\ln 3$은 $t = e^{-2x}$에 의해 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$과 연결된다. 적분 T와 V는 적분 구간이 같고, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{artanh} t = \frac{1}{1-t^2}$이라는 사실은 둘 사이에 부분적분을 써 보라고 암시한다. 이 세 가지 연결만으로 네 적분이 모두 같음을 보일 수 있다.



풀이

풀이 전체에서 다음을 사용한다.

$$\operatorname{artanh} t = \tfrac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t} \quad (|t|<1), \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{artanh} t = \frac{1}{1-t^2},$$

특히 $\operatorname{artanh}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ln 3$이고 $\operatorname{artanh}\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\ln 2$이다. 모든 피적분함수(integrand)는 각자의 (닫혀 있고 유계인) 구간에서 연속이므로, 모든 적분이 존재하고 아래의 계산은 모두 정당하다.

$T = V$: 부분적분

T에서 $\frac{1}{t}$은 적분하고 $\operatorname{artanh} t$는 미분한다. 즉 $u = \operatorname{artanh} t$, $\mathrm{d}w = \frac{\mathrm{d}t}{t}$로 두면 $w = \ln t$이다(구간에서 $t > 0$이므로 문제없다).

$$\begin{aligned} T &= \Big[\ln t \, \operatorname{artanh} t\Big]_{1/3}^{1/2} - \int_{1/3}^{1/2} \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \Big[\ln t \, \operatorname{artanh} t\Big]_{1/3}^{1/2} + V, \end{aligned}$$

남은 적분이 바로 V이기 때문이다(적분변수의 이름은 상관없다).

> **생각해 보기** 경계항 때문에 등식이 깨지지 않을까?

경계항은 0이 되며, 이것이 이 문제의 묘미이다. 위끝에서는 $\ln\frac{1}{2}\cdot\operatorname{artanh}\frac{1}{2} = (-\ln 2)(\frac{1}{2}\ln 3)$이고, 아래끝에서는 $\ln\frac{1}{3}\cdot\operatorname{artanh}\frac{1}{3} = (-\ln 3)(\frac{1}{2}\ln 2)$이다. 둘 다 $-\frac{1}{2}\ln 2\ln 3$이므로

$$\Big[\ln t \, \operatorname{artanh} t\Big]_{1/3}^{1/2} = -\tfrac{1}{2}\ln 2\ln 3 + \tfrac{1}{2}\ln 2\ln 3 = 0,$$

이고, 따라서 $T = V$이다.

$V = U$: 치환 $v = e^{-u}$

$v = e^{-u}$로 두면 $\ln v = -u$이고 $\mathrm{d}v = -e^{-u}\,\mathrm{d}u$이다. $v = \frac{1}{3}$일 때 $u = \ln 3$이고, $v = \frac{1}{2}$일 때 $u = \ln 2$이다. 그러면

$$\begin{aligned} V &= -\int_{\ln 3}^{\ln 2} \frac{-u}{1-e^{-2u}}\,(-e^{-u})\,\mathrm{d}u = -\int_{\ln 3}^{\ln 2} \frac{u\,e^{-u}}{1-e^{-2u}}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{u\,e^{-u}}{1-e^{-2u}}\,\mathrm{d}u \qquad \text{(적분 구간의 위끝과 아래끝을 바꿈)} \\ &= \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{u}{e^{u}-e^{-u}}\,\mathrm{d}u \qquad \text{(분자와 분모에 } e^{u}\text{를 곱함)} \\ &= \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{u}{2\sinh u}\,\mathrm{d}u = U. \end{aligned}$$

$X = T$: 치환 $t = e^{-2x}$

먼저 X의 피적분함수를 다시 쓴다. $x > 0$일 때

$$\coth x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}} = \frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}}, \qquad \text{이므로} \qquad \ln(\coth x) = \ln\frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = 2\operatorname{artanh}\big(e^{-2x}\big),$$

이고, $0 < e^{-2x} < 1$이므로 이 식은 성립한다. 이제 $t = e^{-2x}$로 두면 $\mathrm{d}t = -2t\,\mathrm{d}x$, 즉 $\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{2t}$이다. $x = \frac{1}{2}\ln 2$일 때 $t = \frac{1}{2}$이고, $x = \frac{1}{2}\ln 3$일 때 $t = \frac{1}{3}$이다. 따라서

$$X = \int_{1/2}^{1/3} 2\operatorname{artanh} t\left(-\frac{1}{2t}\right)\mathrm{d}t = \int_{1/3}^{1/2} \frac{\operatorname{artanh} t}{t}\,\mathrm{d}t = T.$$

결론

세 가지 연결을 합치면 $X = T = V = U$이므로, 요구한 대로 네 적분은 모두 같다. 어느 적분의 값도 구할 필요가 없었다.

검산

각 적분에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 따로 적용하면 $T \approx U \approx V \approx X \approx 0.177704$를 얻고, 소수점 아래 약 12자리까지 일치한다. 경계항이 0이 됨을 계산기로 빠르게 확인해 보는 것도 안심이 된다. $\ln \frac{1}{2} \cdot \operatorname{artanh} \frac{1}{2}$와 $\ln \frac{1}{3} \cdot \operatorname{artanh} \frac{1}{3}$은 둘 다 $-0.3807\ldots$로 나온다.

흔한 실수

- $V = U$에서 음의 부호를 빠뜨리는 것. 음의 부호가 세 개 있고(V 앞의 것, $\ln v = -u$, $\mathrm{d}v = -e^{-u}\,\mathrm{d}u$), 적분 구간의 위끝과 아래끝을 바꾸면 네 번째가 생긴다.
- 경계항이 0이 아닌 것처럼 보인다는 이유로, 양 끝에서 값을 계산해 보지도 않고 부분적분을 포기하는 것.
- $\ln \coth x = \operatorname{artanh}(e^{-2x})$로 써서 인수 2를 빠뜨리는 것. 이 2는 나중에 $\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{2t}$의 $\frac{1}{2}$과 약분된다.

STEP 너머

$\operatorname{artanh} t / t$를 거듭제곱급수(power series)로 전개하면 공통의 값이 $\chi_2(\frac{1}{2}) - \chi_2(\frac{1}{3})$임을 알 수 있다. 여기서 $\chi_2(z) = \sum_{k \geq 0} z^{2k+1}/(2k+1)^2$는 르장드르(Legendre)의 카이 함수(chi function)로, 이중로그 함수(dilogarithm) $\mathrm{Li}_2(z) = \sum_{n \geq 1} z^n / n^2$와 가까운 친척이다. 이 함수들에 관한 많은 항등식이 바로 이런 종류의 변수 변환에서 나온다. 두 적분 중 어느 것도 계산하지 않고 둘이 같음을 보이는 것은 해석학(analysis)의 표준적인 기법이며, 치환적분과 부분적분을 정당화하는 정리들(연속성, 미적분의 기본정리(fundamental theorem of calculus))은 해석학 입문 강의에서 엄밀하게 다룬다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)는 이 정리들의 꼼꼼한 증명을 살펴보기에 좋은 책이다.

풀이

STEP III 2011, 문제 7

순수수학 • 수학적 귀납법

STEP III 2011, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/11-s3-q7

핵심 아이디어

$\sqrt{a+1}+\sqrt{a}$를 제곱하면 따로 떨어진 제곱근이 사라지고 $p+q\sqrt{a(a+1)}$ 꼴의 수가 남는다. 따라서 n이 짝수일 때는 T_2를 곱하여 T_n에서 T_{n+2}로 넘어갈 수 있다. 이때 $A^2-a(a+1)B^2$라는 양이 이 곱셈으로 변하지 않는다는 사실이 드러나는데, 이것이 바로 귀납법(induction)에 필요한 것이다. $\sqrt{a+1}+\sqrt{a}$를 한 번 더 곱하면 n이 홀수인 경우가 해결되고, (i)과 (ii)의 항등식은 두 항이 연속한 정수의 제곱근임을 말해 준다.

풀이

처음부터 끝까지 $N=a(a+1)$로 두면 $\sqrt{a+1}\,\sqrt{a}=\sqrt{N}$이다.

소문항 (i)

기저 단계(*base case*), $n=2$. 전개하면

$$T_2=(a+1)+2\sqrt{a+1}\,\sqrt{a}+a=(2a+1)+2\sqrt{N},$$

이므로 $A_2=2a+1$과 $B_2=2$는 정수이고

$$A_2^2-NB_2^2=4a^2+4a+1-4a(a+1)=1.$$

귀납 단계(*inductive step*). 어떤 짝수 $n\geq 2$에 대하여 $A_n^2-NB_n^2=1$을 만족하는 정수 A_n, B_n으로 $T_n=A_n+B_n\sqrt{N}$이라 하자. 간단히 $p=2a+1$로 쓰고, $p^2=4a^2+4a+1=$

$4N+1$임에 주목한다. $T_{n+2}=T_nT_2$이므로

$$\begin{aligned}T_{n+2}&=\left(A_n+B_n\sqrt{N}\right)\left(p+2\sqrt{N}\right)\\&=\left(pA_n+2NB_n\right)+\left(2A_n+pB_n\right)\sqrt{N}.\end{aligned}$$

따라서

$$A_{n+2}=pA_n+2NB_n,\qquad B_{n+2}=2A_n+pB_n,$$

로 잡을 수 있고, p, N, A_n, B_n이 정수이므로 이들도 정수이다. 항등식을 보면 교차항 $\pm4pNA_nB_n$이 소거된다.

$$\begin{aligned}A_{n+2}^2-NB_{n+2}^2&=\left(p^2A_n^2+4pNA_nB_n+4N^2B_n^2\right)-N\left(4A_n^2+4pA_nB_n+p^2B_n^2\right)\\&=(p^2-4N)A_n^2-N(p^2-4N)B_n^2\\&=A_n^2-NB_n^2=1,\end{aligned}$$

여기서 $p^2-4N=1$을 쓴 다음 귀납 가정(inductive hypothesis)을 사용하였다. 따라서 명제는 $n+2$에 대해서도 성립하고, 귀납법에 의해 모든 짝수인 양의 정수 n에 대하여 성립한다.

또한 $A_2,B_2>0$이고 점화식(recurrence)의 계수가 모두 양수이므로, 모든 짝수 n에 대하여 $A_n>0$이고 $B_n>0$이다. 이 사실은 소문항 (iii)에서 필요하다.

? 생각해 보기 왜 A^2-NB^2는 T_2를 곱해도 그대로 남는가?

$A^2-NB^2=(A+B\sqrt{N})(A-B\sqrt{N})$이고, 같은 계산으로 "켤레(conjugate)" $A-B\sqrt{N}$에는 매 단계마다 $p-2\sqrt{N}$이 곱해짐을 알 수 있기 때문이다. 따라서 그 곱에는 $(p+2\sqrt{N})(p-2\sqrt{N})=p^2-4N=1$이 곱해진다. 위의 대수 계산은 이 사실을 풀어 쓴 것에 불과하다.

소문항 (ii)

$n=1$인 경우. $T_1=1\cdot\sqrt{a+1}+1\cdot\sqrt{a}$이므로 $C_1=D_1=1$이고, $(a+1)C_1^2=a+1=aD_1^2+1$이다.

$n\geq3$이 홀수인 경우. 이때 $m=n-1$은 짝수인 양수이므로, 소문항 (i)에 의해 $A_m^2-NB_m^2=1$인 $T_m=A_m+B_m\sqrt{N}$이 성립한다. $\sqrt{N}\sqrt{a+1}=(a+1)\sqrt{a}$와 $\sqrt{N}\sqrt{a}=a\sqrt{a+1}$을 이용하면

$$\begin{aligned}T_n=\left(\sqrt{a+1}+\sqrt{a}\right)\left(A_m+B_m\sqrt{N}\right)&=A_m\sqrt{a+1}+A_m\sqrt{a}+(a+1)B_m\sqrt{a}+aB_m\sqrt{a+1}\\&=\left(A_m+aB_m\right)\sqrt{a+1}+\left(A_m+(a+1)B_m\right)\sqrt{a}.\end{aligned}$$

따라서 $C_n = A_m + aB_m$과 $D_n = A_m + (a+1)B_m$은 정수이다(그리고 양수이다). 이제

$$\begin{aligned}(a+1)C_n^2 - aD_n^2 &= (a+1)\left(A_m^2 + 2aA_mB_m + a^2B_m^2\right) \\ &\quad - a\left(A_m^2 + 2(a+1)A_mB_m + (a+1)^2B_m^2\right) \\ &= A_m^2 + a(a+1)\left[a - (a+1)\right]B_m^2 \\ &= A_m^2 - NB_m^2 = 1,\end{aligned}$$

이는 A_mB_m 항들이 소거되기 때문이다. 그러므로 요구한 대로 $(a+1)C_n^2 = aD_n^2 + 1$이다. ($n = 1$인 경우도 사실은 $T_0 = 1$, 즉 $A_0 = 1$, $B_0 = 0$으로 놓은 같은 계산이다.)

소문항 (iii)

n이 짝수인 경우. $A_n > 0$이고 $B_n > 0$이므로

$$T_n = A_n + B_n\sqrt{N} = \sqrt{A_n^2} + \sqrt{NB_n^2},$$

이고, 소문항 (i)에 의해 정수 NB_n^2과 $A_n^2 = NB_n^2 + 1$은 연속한 정수이다.

> **생각해 보기** 왜 A_n과 B_n의 부호가 필요한가?

$\sqrt{A^2} = |A|$이지 A가 아니기 때문이다. $A_n = \sqrt{A_n^2}$이라고 쓰는 것은 $A_n \geq 0$임을 알 때에만 타당하며, 그래서 소문항 (i)에서 양수임을 기록해 둔 것이다.

n이 홀수인 경우. $C_n, D_n > 0$이므로

$$T_n = C_n\sqrt{a+1} + D_n\sqrt{a} = \sqrt{(a+1)C_n^2} + \sqrt{aD_n^2},$$

이고, 소문항 (ii)에 의해 정수 aD_n^2과 $(a+1)C_n^2 = aD_n^2 + 1$은 연속한 정수이다.

따라서 모든 양의 정수 n에 대하여, 어떤 양의 정수 k가 있어 $T_n = \sqrt{k+1} + \sqrt{k}$이다. 즉 n이 짝수이면 $k = a(a+1)B_n^2$, n이 홀수이면 $k = aD_n^2$이다.

검산

$a = 3$으로 두면 $T_n = (2+\sqrt{3})^n$이다. 그러면 $T_2 = 7 + 4\sqrt{3} = 7 + 2\sqrt{12} = \sqrt{49} + \sqrt{48}$이고, $49 = 12 \cdot 4 + 1$이다. 다음으로 $A_2 = 7$, $B_2 = 2$로부터 $C_3 = 13$, $D_3 = 15$를 얻고, $T_3 = 26 + 15\sqrt{3} = \sqrt{676} + \sqrt{675} \approx 51.9808$이며, 이는 $(2+\sqrt{3})^3$을 직접 계산한 값과 일치한다. 컴퓨터로 $1 \leq a \leq 39$, $n \leq 23$에 대해 점화식을 돌려, 두 항등식이 정수 연산에서 정확히 성립함과 T_n의 전개가 수치적으로 맞음을 확인하였다.

흔한 실수

- 기저 단계를 빠뜨리거나, 소문항 (i)은 짝수 n에 관한 것인데 귀납법을 $n = 1$에서 시작하는 것.
- 소문항 (iii)에서 A_n(그리고 B_n, C_n, D_n)이 양수임을 언급하지 않고 $A_n = \sqrt{A_n^2}$이라고 쓰는 것.

STEP 너머

방정식 $x^2 - Ny^2 = 1$은 펠 방정식(Pell's equation)이며, 소문항 (i)은 $(2a+1) + 2\sqrt{a(a+1)}$의 거듭제곱이 $N = a(a+1)$에 대한 해를 무수히 많이 만들어 냄을 보여 준다. 핵심은 $x + y\sqrt{N}$의 "노름(norm)" $x^2 - Ny^2$이 곱셈적이라는 사실인데, 이것이 이차 수체(quadratic number field)와 그 단원(unit)에 관한 이론의 출발점이다. 대븐포트(Davenport)의 *The Higher Arithmetic*에는 펠 방정식과 연분수(continued fraction)에 대한 매우 읽기 쉬운 설명이 실려 있다.

풀이

STEP III 2011, 문제 8

순수수학 • 복소평면 위의 자취

> **STEP III 2011, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/11-s3-q8

핵심 아이디어

분모의 켤레(conjugate)를 분자와 분모에 곱하여 u와 v를 구한다. 그다음부터 각 소문항은 주어진 직선을 대입하고 익숙한 곡선을 알아보는 문제가 된다. 반각 치환(half-angle substitution)은 $\frac{2x}{1+x^2}$와 $\frac{x^2-1}{x^2+1}$을 사인과 코사인으로 바꾸어 주며, 문제가 이 치환을 제안하는 이유가 바로 이것이다. 풀이 내내 곡선의 어느 점에 실제로 도달하는지 주의 깊게 살펴야 한다. 끝점과 빠진 점이 답의 절반이다.

풀이

$z = x + \mathrm{i}y$라 하자. 그러면 $1 + \mathrm{i}z = (1-y) + \mathrm{i}x$이고 $\mathrm{i} + z = x + \mathrm{i}(1+y)$이므로, 분자와 분모에 $x - \mathrm{i}(1+y)$를 곱하면

$$\begin{aligned} w &= \frac{\big((1-y) + \mathrm{i}x\big)\big(x - \mathrm{i}(1+y)\big)}{x^2 + (1+y)^2} \\ &= \frac{(1-y)x + x(1+y) + \mathrm{i}\big(x^2 - (1-y)(1+y)\big)}{x^2 + (1+y)^2}. \end{aligned}$$

따라서

$$u = \frac{2x}{x^2 + (1+y)^2}, \qquad v = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + (1+y)^2},$$

이며, 이는 $z \neq -\mathrm{i}$일 때 성립한다(w가 정의되지 않는 점).

역사상(inverse map)을 구해 두는 것도 도움이 된다. $w(\mathrm{i} + z) = 1 + \mathrm{i}z$로부터 $z(w - \mathrm{i}) = 1 - \mathrm{i}w$를 얻으므로

$$z = \frac{1 - \mathrm{i}w}{w - \mathrm{i}}, \qquad w \neq \mathrm{i}.$$

따라서 모든 $w \neq \mathrm{i}$는 정확히 하나의 z로부터 오며, $w = \mathrm{i}$는 결코 얻어지지 않는다. 이것이 앞으로 계속 만나게 될 빠진 점이다.

소문항 (i)

$y = 0$이면

$$u = \frac{2x}{1+x^2}, \qquad v = \frac{x^2-1}{x^2+1}.$$

$x = \tan(\theta/2)$로 놓자. x가 모든 실수를 움직일 때 θ는 $-\pi < \theta < \pi$ 범위를 움직이며, 각 x는 이러한 θ를 정확히 하나 준다. 반각 공식에 의해

$$u = \frac{2\tan(\theta/2)}{1+\tan^2(\theta/2)} = \sin\theta, \qquad v = -\frac{1-\tan^2(\theta/2)}{1+\tan^2(\theta/2)} = -\cos\theta.$$

따라서 $u^2+v^2 = 1$이다. 더욱이 $(\sin\theta, -\cos\theta)$는 $-\pi < \theta < \pi$에서 $\theta = \pm\pi$에 해당하는 점, 즉 $(u,v) = (0,1)$을 제외한 단위원 전체를 그린다. 따라서 w의 자취(locus)는 원 $u^2+v^2 = 1$에서 한 점 $w = \mathrm{i}$를 뺀 것이며, 이것이 보여야 할 것이었다. (빠진 점은 $x \to \pm\infty$일 때 w의 극한이다.)

소문항 (ii)

이제 $-1 < x < 1$이고, 이는 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$에 해당한다. 이 범위에서 $v = -\cos\theta < 0$이고, $u = \sin\theta$는 -1에서 1까지 증가한다(양 끝값은 포함하지 않는다). 따라서 w의 자취는

$$u^2+v^2 = 1, \quad v < 0,$$

즉 단위원의 아래쪽 절반이며, 끝점 $w = \pm 1$은 **포함하지 않는다**(이 끝점은 $x = \pm 1$에서 나온다).

소문항 (iii)

$x = 0$이면 $u = 0$이고

$$v = \frac{y^2-1}{(1+y)^2} = \frac{(y-1)(y+1)}{(y+1)^2} = \frac{y-1}{y+1} = 1 - \frac{2}{y+1},$$

이다. 여기서 $y > -1$이므로 $y+1$을 약분해도 된다.

? **생각해 보기** v의 모든 음수 값에 도달하는가, 아니면 그중 일부에만 도달하는가?

y가 -1에서 1까지 증가하면 $y+1$은 $(0,2)$ 위에서 증가하므로 $\frac{2}{y+1}$은 $(1,\infty)$ 위에서 감소하고, v는 $(-\infty, 0)$ 위에서 연속적으로, 그리고 순증가(strictly increasing)하며 움직인다. $y \to -1^+$일 때 $v \to -\infty$이고, $y \to 1^-$일 때 $v \to 0^-$이다. 따라서 모든 음수 v에 정확히 한

번씩 도달한다. w의 자취는 음의 허수축

$$u = 0, \quad v < 0,$$

이며, 원점은 제외된다(원점은 $y = 1$에서 나온다).

소문항 (iv)

$y = 1$이면

$$u = \frac{2x}{x^2+4}, \qquad v = \frac{x^2}{x^2+4}.$$

그러면

$$u^2 + v^2 = \frac{4x^2 + x^4}{(x^2+4)^2} = \frac{x^2(x^2+4)}{(x^2+4)^2} = \frac{x^2}{x^2+4} = v,$$

이므로 w는 $u^2 + v^2 = v$ 위에 있다. 즉

$$u^2 + \left(v - \tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4},$$

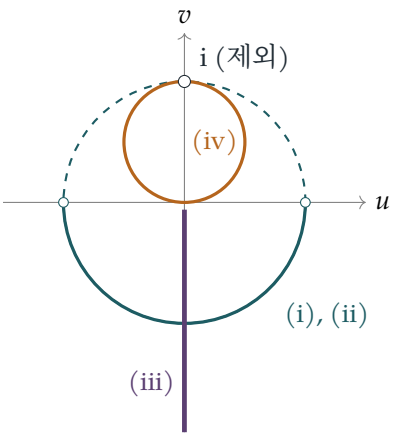
이며, 이것은 중심이 $\frac{1}{2}$i이고 반지름이 $\frac{1}{2}$인 원이다.

? **생각해 보기** 이 원의 어느 점에 실제로 도달하는가?

$v = 1 - \frac{4}{x^2+4}$이므로 $0 \le v < 1$이고, 따라서 맨 위의 점 $w = \mathrm{i}$에는 결코 도달하지 않는다. 그 밖의 모든 점에는 도달한다. $x = 2\tan(\phi/2)$, $-\pi < \phi < \pi$로 놓으면

$$u = \frac{\tan(\phi/2)}{1+\tan^2(\phi/2)} = \tfrac{1}{2}\sin\phi, \qquad v = \frac{\tan^2(\phi/2)}{1+\tan^2(\phi/2)} = \tfrac{1}{2}(1-\cos\phi),$$

이고, 이는 $\phi = \pm\pi$, 즉 점 $(0,1)$을 제외하고 원 전체를 한 바퀴 돈다. (또는 역사상을 이용하면 각 $w \neq \mathrm{i}$가 정확히 하나의 z에서 온다는 것을 알 수 있다.) 따라서 자취는 원 $u^2 + v^2 = v$에서 점 $w = \mathrm{i}$를 뺀 것이다. 이 원은 $z = \mathrm{i}$의 상(image)인 $w = 0$에서 실수축에 접한다.



점선과 실선으로 그린 청록색 원은 실수축의 상으로 소문항 (i)에 해당하고, 실선으로 그린 아래쪽 절반은 소문항 (ii)에 해당한다. 자주색 반직선은 소문항 (iii), 호박색 원은 소문항 (iv)에 해당한다.

검산

- $z = 0$이면 $w = 1/\mathrm{i} = -\mathrm{i}$이다. 이 점은 아래쪽 반원 (ii)와 반직선 (iii) 위에 있으며, 실제로 $z = 0$은 두 선분 모두에 놓인다.
- $z = 1 + \mathrm{i}$이면 $w = \frac{\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}} = 0.4 + 0.2\mathrm{i}$이고 $0.4^2 + 0.2^2 = 0.2 = v$이므로, 이 점은 (iv)의 원 위에 있다.
- 큰 실수 z: $w(10^8) \approx 2 \times 10^{-8} + \mathrm{i}$로, 빠진 점 i에 가까워진다.
- 또한 수천 개의 무작위 점에 대하여 u, v에 대한 공식과, 주장한 각 자취의 모든 점이 해당 직선 또는 선분 위에 원상(preimage)을 갖는다는 것을 수치적으로 확인하였다.

흔한 실수

- 원이나 반원만 제시하고 어느 점이 빠지거나 제외되는지 밝히지 않는 것. 여기서는 (i)과 (iv)의 $w = \mathrm{i}$, 그리고 (ii)의 끝점 ± 1이 그렇다.
- (iii)의 자취가 허수축 전체라고 주장하는 것. 모든 $-1 < y < 1$에 대하여 $v = \frac{y-1}{y+1}$은 음수이다.

STEP 너머

이 사상은 뫼비우스 변환(Möbius transformation)이다. 실제로 $w = \mathrm{i}\,\dfrac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}$이므로 $|w| = |z - \mathrm{i}|/|z + \mathrm{i}|$이고, 이 값은 z가 $\pm\mathrm{i}$에서 같은 거리에 있을 때, 즉 실수일 때 정확히 1이다. 뫼비우스 사상은 직선과 원을 직선과 원으로 보내며(직선은 "∞를 지나는 원"으로 본다), 빠진 점 i는 ∞의 상이다. 이 사상(케일리 변환(Cayley transform))은 상반평면(upper half-plane)을 단위 원판(unit disc) 위로 보내며, 복소해석학(complex analysis)과 쌍곡기하학(hyperbolic geometry)의 핵심 도구이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*는 뫼비우스 변환을 그림 중심으로 아름답게 다룬다.

풀이

STEP III 2011, 문제 9

역학 • 원기둥 위의 운동

STEP III 2011, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

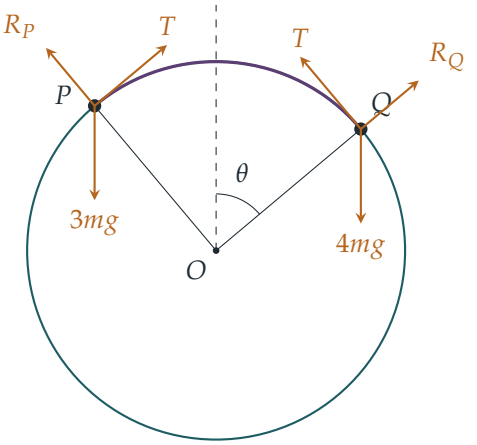
step.maths.org/questions/11-s3-q9

핵심 아이디어

원기둥 위에 놓인 길이 $\frac{1}{2}\pi a$의 줄은 O에서 직각을 이루므로, OP와 OQ는 항상 서로 수직이고 계 전체는 단 하나의 좌표 θ로 기술된다. 그러면 에너지 보존(energy conservation)으로부터 $\dot{\theta}^2$를 바로 얻고, 중심 방향으로 뉴턴의 제2법칙(Newton's second law)을 적용하면 각 수직항력(normal reaction)을 $\dot{\theta}^2$로 나타낼 수 있다. 접촉을 잃는다는 것은 수직항력이 0이 된다는 뜻이다. 장력(tension)을 구할 때는 접선 방향(tangential)의 운동방정식을 쓴다. 두 식을 더하면 T가 소거되어 $\ddot{\theta}$를 얻고, 그다음 어느 한 식만 써도 T를 구할 수 있다.

풀이

모형. P와 Q는 입자이고, 줄은 가볍고 늘어나지 않으며, 원기둥은 매끄럽다. 매끄러운 면 위를 지나는 가벼운 줄의 장력은 어디서나 같은 값 T이다. 두 입자 사이의 호의 길이는 $\frac{1}{2}\pi a$이므로 $\angle POQ = \frac{1}{2}\pi$이다. θ를 OQ가 위쪽 연직선과 이루는 각으로 잡고, Q는 꼭대기의 한쪽에 있다고 하자. 그러면 OP는 반대쪽에서 위쪽 연직선과 각 $\frac{1}{2}\pi - \theta$를 이룬다. 두 입자가 면 위에 있는 동안에는 둘 다 반지름 a인 원 위를 각속도(angular speed) $\dot{\theta}$로 움직이므로, 각각의 속력은 $a\dot{\theta}$이다.



평형. 각 입자에서 면을 따라 힘을 분해하면(수직항력은 접선 성분이 없고, 줄은 꼭대기 쪽으로 접선 방향으로 당긴다), Q에 대해서는 $T = 4mg\sin\theta$, P에 대해서는 $T = 3mg\sin(\frac{1}{2}\pi - \theta) = 3mg\cos\theta$를 얻는다. 따라서 처음에는 $\tan\theta = \frac{3}{4}$, 즉 $\sin\theta = \frac{3}{5}$, $\cos\theta = \frac{4}{5}$이다.

에너지. O의 높이를 위치 에너지(potential energy)의 기준(0)으로 잡자. Q의 높이는 $a\cos\theta$이고 P의 높이는 $a\cos(\frac{1}{2}\pi - \theta) = a\sin\theta$이다. 수직항력은 일을 하지 않고(운동 방향에 수직이므로), 장력은 계 전체에 대해 알짜 일을 하지 않으므로(줄이 늘어나지 않으므로) 에너지가 보존된다. 교란이 아주 작으므로 계는 정지 상태에서 출발한다. 따라서

$$\tfrac{1}{2}(3m+4m)a^2\dot\theta^2 + 4mga\cos\theta + 3mga\sin\theta = 4mga\cdot\tfrac{4}{5} + 3mga\cdot\tfrac{3}{5} = 5mga.$$

양변에 $2/(ma)$를 곱하면

$$7a\dot\theta^2 + 8g\cos\theta + 6g\sin\theta = 10g,$$

이 되어 요구된 식을 얻는다. Q가 아래로 움직이면서 θ는 $\tan^{-1}\frac{3}{4}$에서부터 증가한다.

소문항 (i)

Q는 반지름 a인 원 위를 속력 $a\dot\theta$로 움직이므로, O를 향하는 가속도 $a\dot\theta^2$를 가진다. 무게의 O 방향 성분은 $4mg\cos\theta$이고, R_Q는 바깥쪽으로 작용한다. 줄은 접선 방향이므로 지름 방향으로는 아무 기여도 하지 않는다. 따라서

$$4mg\cos\theta - R_Q = 4ma\dot\theta^2, \qquad \text{따라서} \qquad R_Q = 4mg\cos\theta - 4ma\dot\theta^2.$$

Q는 R_Q가 0이 될 때, 즉 $a\dot\theta^2 = g\cos\theta$일 때 면에서 떨어진다. 이를 $\theta = \beta$에서의 에너지 방정식에 대입하면

$$7g\cos\beta + 8g\cos\beta + 6g\sin\beta = 10g \quad\Longrightarrow\quad 15\cos\beta + 6\sin\beta = 10,$$

이 되어 요구된 식을 얻는다.

생각해 보기 에너지 방정식이 $\theta = \beta$에 이를 때까지 계속 성립하는 이유는 무엇인가?

에너지 방정식은 두 입자가 모두 원기둥 위에 있는 동안 성립하며, 문제에서 Q가 먼저 떨어진다고 알려 준다. 이는 직접 확인할 수도 있다. P에 대해 같은 논증을 하면 $R_P = 3mg\sin\theta - 3ma\dot{\theta}^2$이고, 이는 $13\sin\theta + 8\cos\theta = 10$일 때 0이 된다. $\beta \approx 73.6°$에서 좌변은 약 14.7이므로 R_P는 여전히 양수이다.

소문항 (ii)

이제 운동 방향을 양의 방향으로 잡고 접선 방향으로 힘을 분해한다. Q는 접선 가속도 $a\ddot{\theta}$로 꼭대기에서 멀어지고, P는 같은 접선 가속도 $a\ddot{\theta}$로 꼭대기를 향해 움직인다(줄 때문에 두 입자의 속력이 같게 유지된다). Q에 대해서는 중력의 성분 $4mg\sin\theta$가 앞쪽으로 작용하고 장력은 뒤로 당긴다.

$$4ma\ddot{\theta} = 4mg\sin\theta - T. \tag{1}$$

P에 대해서는 장력이 앞으로 당기고 중력의 성분 $3mg\cos\theta$가 뒤쪽으로 작용한다.

$$3ma\ddot{\theta} = T - 3mg\cos\theta. \tag{2}$$

(1)과 (2)를 더하면 T가 소거된다.

$$7ma\ddot{\theta} = 4mg\sin\theta - 3mg\cos\theta.$$

(이는 에너지 방정식을 시간에 대해 미분(differentiation)한 뒤 $2\dot{\theta}$로 나눈 결과와 일치한다.) 이를 (1)에 대입하면

$$\begin{aligned} T &= 4mg\sin\theta - 4ma\ddot{\theta} \\ &= 4mg\sin\theta - \tfrac{4}{7}m(4g\sin\theta - 3g\cos\theta) \\ &= \tfrac{12}{7}mg\sin\theta + \tfrac{12}{7}mg\cos\theta = \tfrac{12}{7}mg(\sin\theta + \cos\theta), \end{aligned}$$

이 되어 요구된 식을 얻는다. 이 값은 $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$에서 양수이므로, 줄은 운동하는 내내 팽팽하게 유지된다.

검산

- 평형 상태에서 $\sin\theta + \cos\theta = \frac{7}{5}$이므로 $T = \frac{12}{5}mg$이다. 이는 $4mg\cdot\frac{3}{5}$ 및 $3mg\cdot\frac{4}{5}$와 일치한다.
- $\tan\alpha = \frac{2}{5}$로 두고 $15\cos\beta + 6\sin\beta = \sqrt{261}\cos(\beta - \alpha)$로 쓰면 $\beta \approx 1.2839$ rad $\approx 73.56°$를 얻는다. 평형을 막 벗어난 지점에서부터 운동을 수치적으로 한 단계씩 계산해 보았더니, R_Q는 바로 이 각에서 처음으로 0이 되었고 R_P는 양수로 유지되었다. 에너지 관계식과 장력 공식은 전체 경로에서 반올림 오차 범위 안에서 성립했다.

흔한 실수

- P의 높이를 $a\sin\theta$가 아니라 $a\cos\theta$로 잡는 실수. 줄의 길이가 주어진 핵심 이유가 바로 직각 $\angle POQ$이다.
- 두 입자에 서로 다른 장력을 주거나, 지름 방향 방정식에 T를 넣는 실수. 줄은 입자에 접선 방향으로 닿아 있으므로 T는 접선 방향 방정식에만 나타난다.

STEP 너머

좌표 하나 θ로 모든 것이 기술되므로, 이 계는 자유도(degree of freedom)가 1인 계이다. 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)에서는 운동 에너지(kinetic energy)와 위치 에너지로부터 운동방정식을 곧바로 얻으며, 구속력(forces of constraint)은 전혀 필요하지 않다. 그러면 수직항력과 장력은 구속 조건에 대한 "라그랑주 승수(Lagrange multipliers)"로 나타난다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 라그랑주 역학을 만나기 전에 구속 운동과 에너지 방법에 대한 감각을 깊게 다지기에 좋은 책이다.

풀이

STEP III 2011, 문제 10

역학 • 탄성 끈과 단진동

STEP III 2011, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/11-s3-q10

핵심 아이디어

두 입자에는 외부에서 작용하는 수평 방향의 힘이 없으므로, 두 입자의 무게중심(centre of mass)은 충격량(impulse)으로 정해지는 일정한 속력으로 움직인다. 무게중심을 기준으로 보면 줄의 늘어난 길이(extension)는 단진동(simple harmonic motion)을 하고, 줄은 정확히 반 주기 동안만 팽팽(taut)하다. 운동을 "무게중심의 운동"과 "늘어난 길이의 변화"로 나누면 거의 계산 없이 모든 답이 저절로 나온다.

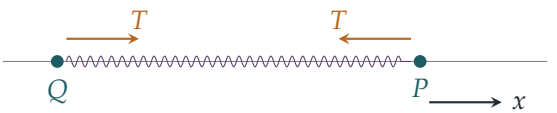
풀이

모형과 설정

두 입자는 매끄러운 수평면 위에서 움직이므로, 입자에 작용하는 수평 방향의 힘은 가벼운 줄의 장력(tension)뿐이며, 이 두 힘은 크기가 같고 방향이 반대이다. 직선 QP를 x축으로 잡고 Q에서 P로 향하는 방향을 양의 방향으로 하며, Q는 $x = 0$에서, P는 $x = a$에서 출발한다고 하자. 충격을 가한 뒤 시각 t에서의 두 입자의 위치를 x_P와 x_Q라 하고,

$$e = (x_P - x_Q) - a$$

를 줄의 늘어난 길이라 하자. 충격 직후에는 $\dot{x}_P = u$, $\dot{x}_Q = 0$이고 $e = 0$이며, $\dot{e} = u > 0$이므로 줄은 곧바로 팽팽해진다.



줄이 팽팽한 동안, 훅의 법칙(Hooke's law)에 의해 장력은

$$T = \frac{\lambda e}{a} = \frac{\frac{1}{2}ma\omega^2 e}{a} = \frac{1}{2}m\omega^2 e.$$

이다. 장력은 P를 Q 쪽으로 끌어당기고, Q를 P 쪽으로 끌어당긴다.

$$m\ddot{x}_P = -\frac{1}{2}m\omega^2 e, \qquad m\ddot{x}_Q = +\frac{1}{2}m\omega^2 e.$$

무게중심

두 식을 더하면 $\ddot{x}_P + \ddot{x}_Q = 0$이다. 따라서 $\bar{x} = \frac{1}{2}(x_P + x_Q)$에 있는 무게중심 G는 처음 값과 같은 일정한 속도로 움직인다.

$$\dot{\bar{x}} = \frac{1}{2}(u + 0) = \frac{1}{2}u.$$

(이것은 바로 운동량 보존(conservation of momentum)이다. 전체 운동량 mu를 질량 $2m$이 나누어 가진다.)

늘어난 길이

두 식을 빼면

$$\ddot{e} = \ddot{x}_P - \ddot{x}_Q = -\omega^2 e.$$

이다. 이것은 각진동수(angular frequency)가 ω인 단진동이다. $e(0) = 0$이고 $\dot{e}(0) = u$이므로

$$e = \frac{u}{\omega}\sin\omega t.$$

이다.

? **생각해 보기** 각진동수가 왜 $\omega/\sqrt{2}$나 $\sqrt{2}\,\omega$가 아니라 ω일까?

각 입자는 힘 $\frac{1}{2}m\omega^2 e$를 받지만, e는 두 입자가 모두 움직이기 때문에 변한다. 두 식을 빼면 가속도가 더해지는 것이다. 같은 말로, 질량이 m으로 같은 두 물체의 환산질량(reduced mass)은 $\frac{1}{2}m$이고 줄의 강성은 $\lambda/a = \frac{1}{2}m\omega^2$이므로 $\omega^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 / \frac{1}{2}m$이다. 탄성계수(modulus)는 이 값이 깔끔하게 나오도록 정해진 것이다.

줄의 길이가 다음으로 a가 되는 것은 다시 $e = 0$이 될 때, 즉 $t > 0$에서 처음으로 $\sin\omega t = 0$이 될 때이다.

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega}.$$

$0 < t < \pi/\omega$인 동안 내내 $e > 0$이므로, 줄은 실제로 팽팽하고 위의 식들이 성립한다.

이동 거리

각 위치를 무게중심에 간격의 절반을 더하거나 뺀 것으로 나타내면

$$x_P = \bar{x} + \tfrac{1}{2}(a + e), \qquad x_Q = \bar{x} - \tfrac{1}{2}(a + e).$$

이다. t_1에서 다시 $e = 0$이므로, 각 입자는 G와 정확히 같은 만큼 움직였고, 그 값은

$$\tfrac{1}{2}u \cdot \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi u}{2\omega}.$$

이다. 이 변위가 곧 이동 거리임을 확인하려면, 어느 입자도 방향을 바꾸지 않는다는 것을 보여야 한다. 미분하면

$$\dot{x}_P = \tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{2}\dot{e} = \tfrac{1}{2}u(1 + \cos\omega t), \qquad \dot{x}_Q = \tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{2}\dot{e} = \tfrac{1}{2}u(1 - \cos\omega t),$$

이고, 둘 다 모든 t에 대하여 ≥ 0이다. 따라서 각 입자는 앞으로만 움직이며, 요구한 대로 각각 거리 $\dfrac{\pi u}{2\omega}$만큼 이동하였다.

속력

$t_1 = \pi/\omega$에서 $\cos\omega t_1 = -1$이므로

$$\dot{x}_P = 0, \qquad \dot{x}_Q = u.$$

이다. 즉 P는 순간적으로 정지하고 Q는 속력 u로 P를 향해 움직인다. 두 입자는 질량이 같은 물체의 완전탄성충돌(perfectly elastic collision)에서처럼 속도를 정확히 맞바꾸었다. 이것은 우연이 아니다. 운동량이 보존되고, 저장되었던 탄성 에너지가 모두 운동 에너지로 되돌아왔기 때문이다.

충돌까지 걸리는 시간

t_1 이후에는 Q가 P를 향해 움직이므로 간격이 a보다 작다. 줄은 느슨(slack)해져서 힘을 작용하지 않고, 두 입자 모두 수평 방향의 힘을 받지 않는다. 따라서 P는 정지한 채로 있고, Q는 P로부터 거리 a인 곳에서 출발하여 일정한 속력 u로 움직인다. Q는 시간 a/u가 더 지난 뒤 P에 도달한다. 충격을 가한 순간부터 충돌까지 걸리는 전체 시간은

$$\frac{\pi}{\omega} + \frac{a}{u}.$$

이다.

검산

- 운동량: t_1에서 전체 운동량은 $m \cdot 0 + mu = mu$로 처음과 같다. 에너지: 두 순간 모두 운동 에너지는 $\frac{1}{2}mu^2$이고, 두 때 모두 줄은 자연 길이(natural length)이다.
- 차원: u/ω는 길이이고 a/u는 시간이므로, 마땅히 그래야 하는 대로이다.
- $m = a = \omega = u = 1$로 두고 운동 방정식을 수치적으로 계산해 보았다. 줄은 $t = 3.14159$에서 느슨해졌고 이때 각 입자는 $1.57080 = \pi/2$만큼 움직였다. 그때의 속력은 0과 1이었고, 충돌은 $t = 4.14159 = \pi + 1$에서 일어났다.

흔한 실수

- P가 고정점에 매달려 있는 것처럼 다루는 것. 그러면 각진동수가 $\omega/\sqrt{2}$가 되어 시간이 틀리게 나온다. 줄의 양 끝이 모두 움직인다.
- t_1 이후에도 단진동이 계속된다고 보는 것. 줄의 길이가 a보다 짧아지면 줄이 느슨해지므로 운동은 등속 운동이 된다.
- 마지막 단계를 아예 빠뜨리는 것. 충돌은 줄이 자연 길이로 돌아온 뒤 a/u만큼 더 지나서 일어난다.

STEP 너머

이체 문제를 무게중심의 운동과, 환산질량 $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$가 지배하는 간격의 운동으로 나누는 것은 대학 1학년 역학에서 가장 유용한 기법 가운데 하나이다. 이 방법을 쓰면 행성의 궤도, 진동하는 이원자 분자, 충돌하는 입자들이 모두 일체 문제로 바뀐다. 여기서 탄성 줄은 시간 π/ω 동안 지속되지만 순간적인 탄성 충돌과 결과가 정확히 같은 "부드러운" 충돌의 역할을 한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이체 문제의 환원과 환산질량을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP III 2011, 문제 11

역학 • 강체의 회전

> **STEP III 2011, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/11-s3-q11

핵심 아이디어

비튼 뒤에도 각 줄은 여전히 천장의 고정점에서 테두리 위의 점, 곧 θ만큼 돌아간 점까지 이어진다. 따라서 각 줄의 수평 성분은 원의 현(chord)이 되므로, 기하학적 관계는 위에서 내려다볼 때 드러난다. 대칭성(symmetry)에 의해 모든 줄이 똑같이 행동하므로, 수직 방향의 평형(equilibrium)이 장력(tension)을 정하고, 장력의 수평 성분들이 축에 대해 갖는 모멘트(moment)가 짝힘(couple)을 준다. 원판을 놓은 뒤에는 에너지 보존(energy conservation)이 나머지를 해결한다.

풀이

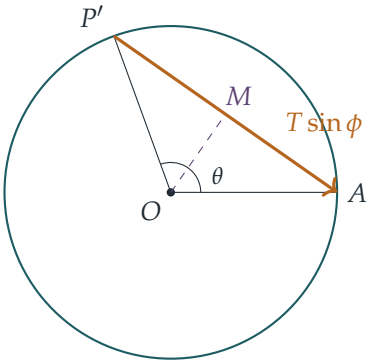
원판은 강체(rigid)인 균일한 박판(lamina)으로, 줄은 가볍고 늘어나지 않는(inextensible) 것으로 모형화한다. 대칭성에 의해 모든 줄은 팽팽하며 같은 장력 T와 같은 기울기 ϕ를 갖고, 원판은 수평을 유지하며 그 중심은 z축 위에 있다. 원판을 θ만큼 돌리면 원판은 천장 아래 깊이 h인 곳까지 올라간다.

줄의 각

P를 지나는 줄은 천장의 $A = (a, 0, 0)$에 매여 있다. 회전한 뒤 줄의 아래 끝은

$$P' = (a\cos\theta,\ a\sin\theta,\ -h).$$

에 있다. 위에서 보면 A와 P'은 모두 축을 중심으로 하는 반지름 a인 원 위에 있고, 중심 O에서 두 점 사이의 각은 θ이다. 따라서 줄의 수평 사영(projection)은 길이가 $2a\sin\frac{1}{2}\theta$인 현이다.



위에서 본 모습. M은 현 $P'A$의 중점이므로 OM은 각 θ를 이등분하고, 현에 수직이며, 길이는 $OM = a\cos\frac{1}{2}\theta$이다. 줄 자체의 길이는 b이고 연직선과 각 ϕ를 이루므로, 수평 사영의 길이는 $b\sin\phi$이다. 두 값을 같게 놓으면

$$b\sin\phi = 2a\sin\tfrac{1}{2}\theta,$$

이므로 원하는 결과를 얻는다. 수직 사영은 원판의 새 깊이를 준다.

$$h = b\cos\phi = \sqrt{b^2 - 4a^2\sin^2\tfrac{1}{2}\theta}.$$

$b > 2a$이므로 이 값은 실수이다. $0 < \theta < \pi$이므로 $0 < \sin\frac{1}{2}\theta < 1$이고, 따라서 $0 < \phi < \frac{1}{2}\pi$이다.

짝힘

원판에 대해 수직 방향으로 힘을 분해하면, n개의 같은 장력이 무게를 떠받친다.

$$nT\cos\phi = mg.$$

짝힘 C는 원판의 평면 안에서 작용하므로 이 균형에는 영향을 주지 않는다.

각 장력은 수직 성분과, P'에서 A를 향하는 현을 따르는 수평 성분 $T\sin\phi$를 갖는다. 수직 성분은 축과 평행하므로 축에 대한 모멘트가 없다. 수평 성분은 현을 따라 작용하며, 이 현과 O 사이의 수직 거리는 $OM = a\cos\frac{1}{2}\theta$이다. 모든 줄의 수평 방향 당김은 원판을 $\theta = 0$ 쪽으로 되돌리려 하므로, n개의 모멘트는 모두 같은 방향이다. 축에 대한 모멘트를 취하면

$$\begin{aligned} C &= n\,T\sin\phi\cdot a\cos\tfrac{1}{2}\theta = mg\tan\phi\; a\cos\tfrac{1}{2}\theta \\ &= mg\,a\cos\tfrac{1}{2}\theta\cdot\frac{2a\sin\frac{1}{2}\theta}{\sqrt{b^2 - 4a^2\sin^2\frac{1}{2}\theta}} = \frac{mga^2\sin\theta}{\sqrt{b^2 - 4a^2\sin^2\frac{1}{2}\theta}}, \end{aligned}$$

이다. 여기서 $nT = mg/\cos\phi$를 쓰고, 다음으로 $\tan\phi = b\sin\phi/(b\cos\phi)$를, 마지막으로 $2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta = \sin\theta$를 썼다. 이것이 구하는 크기이다.

정지 상태에서 놓기

짝힘을 없애면 원판은 비틀림이 풀리면서 떨어진다. 줄은 늘어나지 않고 팽팽한 상태를 유지하므로 일을 하지 않는다. 각 줄의 장력은 천장의 고정점에 대한 매달린 점의 상대 속도에 수직이기 때문이다. 일을 하는 힘은 중력뿐이므로 역학적 에너지가 보존된다.

위의 기하학적 관계에 의해, 원판이 줄이 연직인 위치에서 α만큼 돌아갔을 때 그 깊이는

$$z(\alpha) = \sqrt{b^2 - 4a^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha} = \sqrt{b^2 - 2a^2(1 - \cos\alpha)}.$$

이다. 원판의 운동 에너지(kinetic energy)는 $\frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$이며, 축에 대한 관성 모멘트(moment of inertia)는 $I = \frac{1}{2}ma^2$이다.

? **생각해 보기** 줄이 연직일 때에도 원판의 중심이 여전히 수직 방향 속도를 가질까?

그렇지 않다. 미분하면

$$\dot{z} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\alpha}\,\dot{\alpha} = -\frac{a^2 \sin\alpha}{z}\,\dot{\alpha},$$

이고, 이는 $\alpha = 0$에서 0이다. 그 순간 줄은 연직이고 원판은 가장 낮은 지점에 있으므로, 거기서 운동 에너지는 모두 회전 운동 에너지이다.

원판은 깊이 $\sqrt{b^2 - 4a^2 \sin^2 \frac{1}{2}\theta}$에서 깊이 b까지 떨어진다. 에너지 보존에 의해

$$\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}ma^2\,\omega^2 = mg\left(b - \sqrt{b^2 - 4a^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\theta}\right),$$

즉

$$\frac{a^2\omega^2}{4g} = b - \sqrt{b^2 - 4a^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\theta},$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

검산

- **가상일**(*virtual work*). 짝힘에 맞서 원판을 $\delta\theta$만큼 더 돌리면 원판은 $-\delta z$만큼 올라가므로 $C = mg\,|\mathrm{d}z/\mathrm{d}\theta| = mg\,a^2 \sin\theta / z$이다. 이는 모멘트를 취해 구한 짝힘과 정확히 같다.
- **작은 비틀림**. θ가 작으면 $C \approx mga^2\theta/b$이며, 이는 익숙한 쌍선 현수(bifilar suspension, 여기서는 n선 현수)의 복원 짝힘이다.
- **수치 계산**. 임의의 a, b, θ, m, n에 대해 n개의 줄을 3차원 공간에 직접 배치하고 장력의 모멘트를 합했다. 그 결과는 공식과 일치했다. 또한 $a = 1, b = 3, \theta = 2, g = 9.81$로 놓고 놓은 뒤의 운동을 수치적으로 적분했다. 줄이 연직이 되었을 때 $a^2\omega^2/(4g) = 0.51651$을 얻었으며, 이는 $3 - \sqrt{9 - 4\sin^2 1} = 0.51651$과 일치한다.

흔한 실수

- 수평 장력의 팔 길이를 $a\cos\frac{1}{2}\theta$가 아니라 a로 잡는 실수. 힘은 접선이 아니라 현을 따라 작용한다.
- 원판을 비틀면 원판이 **올라간다**는 사실을 잊는 실수. 이 높이 변화가 바로 마지막 부분에서 에너지가 나오는 곳이다.
- 병진 운동 에너지 $\frac{1}{2}m\dot{z}^2$를 포함하면서, 줄이 연직일 때 이것이 0이 된다는 점을 알아차리지 못하는 실수.

STEP 너머

이것은 운동이 구속된, 자유도(degree of freedom)가 하나인 계이다. 깊이는 비틀림 각의 정해진 함수이므로 에너지는 α와 $\dot{\alpha}$에만 의존한다. 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)은 이 관찰을 운동 방정식으로 바꾸어 준다. 또한 짝힘이 왜 단순히 $mg\,\mathrm{d}z/\mathrm{d}\alpha$인지도 설명해 주는데, 이것이 가상일의 원리이다. $\alpha = 0$ 근처에서 선형화(linearising)하면 단순 조화 비틀림 진동(simple harmonic torsional oscillation)을 얻으며, 쌍선 현수를 이용해 관성 모멘트를 측정하는 방법이 바로 이것이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이 수준에서 강체의 회전과 에너지 방법을 다룬다.

풀이

STEP III 2011, 문제 12

확률과 통계 • 확률생성함수를 이용한 복합분포

> **STEP III 2011, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/11-s3-q12

핵심 아이디어

분포의 평균과 분산에 관해 필요한 모든 정보는 확률생성함수(probability generating function, pgf)의 $t = 1$에서의 처음 두 도함수(derivative)에 담겨 있다. 따라서 합성함수 $G(H(t))$를 연쇄법칙(chain rule)으로 (두 번) 미분하고, $t = 1$을 대입한 뒤 $H(1) = 1$을 이용한다. 동전 문제에서는 N이 기하분포를 따르고 각 X_i는 공정한 동전 한 번에 대한 지시변수(indicator)이므로, 두 확률생성함수가 모두 간단하며 $G(H(t))$는 등비급수(geometric series)로 전개할 수 있는 유리함수가 된다.

풀이

일반적인 결과

음이 아닌 정수 값을 가지고 확률생성함수가 $P(t) = \mathrm{E}(t^Z)$인 임의의 확률변수 Z에 대하여 $P(1) = 1$,

$$P'(1) = \mathrm{E}(Z), \qquad P''(1) = \mathrm{E}\big(Z(Z-1)\big),$$

이고, 따라서

$$\mathrm{Var}(Z) = P''(1) + P'(1) - \big(P'(1)\big)^2.$$

이다. $\mu = \mathrm{E}(X_i) = H'(1)$, $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_i)$라 하고, Y의 확률생성함수를 $K(t) = G(H(t))$라 하자.

연쇄법칙에 의해 $K'(t) = G'(H(t))\,H'(t)$이다. $H(1) = 1$이므로

$$\mathrm{E}(Y) = K'(1) = G'(1)H'(1) = \mathrm{E}(N)\,\mathrm{E}(X_i),$$

이고, 이것이 첫 번째 결과이다.

한 번 더 미분하면 (곱의 미분법을 쓴 뒤 연쇄법칙을 쓴다)

$$K''(t) = G''(H(t))\big(H'(t)\big)^2 + G'(H(t))\,H''(t),$$

이므로, 다시 $H(1) = 1$을 이용하면

$$K''(1) = G''(1)\mu^2 + \mathrm{E}(N)\,H''(1).$$

이다. 위의 분산 공식을 N과 X_i에 적용하면

$$G''(1) = \mathrm{Var}(N) - \mathrm{E}(N) + \big(\mathrm{E}(N)\big)^2, \qquad H''(1) = \sigma^2 - \mu + \mu^2.$$

이다.

생각해 보기 $G''(1)$과 $H''(1)$을 다시 쓰지 않고 $K''(1)$에서 곧바로 $\mathrm{Var}(Y)$를 계산하면 안 되는 이유는 무엇일까?

우리가 원하는 답은 계승 모멘트(factorial moment)가 아니라 분산으로 표현된 것이기 때문이다. $G''(1)$과 $H''(1)$을 $\mathrm{Var}(N)$과 σ^2로 나타내면 불필요한 항들이 소거된다. $m = \mathrm{E}(N)$이라 쓰면

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y) &= K''(1) + K'(1) - \big(K'(1)\big)^2 \\ &= \big(\mathrm{Var}(N) - m + m^2\big)\mu^2 + m\big(\sigma^2 - \mu + \mu^2\big) + m\mu - m^2\mu^2 \\ &= \mathrm{Var}(N)\mu^2 + m\sigma^2 + \big(-m\mu^2 + m\mu^2\big) + \big(m^2\mu^2 - m^2\mu^2\big) + \big(-m\mu + m\mu\big) \\ &= \mathrm{Var}(N)\big(\mathrm{E}(X_i)\big)^2 + \mathrm{E}(N)\,\mathrm{Var}(X_i),\end{aligned}$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

동전

N의 확률생성함수. 첫 번째 앞면이 n번째 던지기에서 나오려면 처음 $n-1$번은 뒷면이 나오고 n번째에 앞면이 나와야 하므로, $n = 1, 2, 3, \ldots$에 대하여 $\mathrm{P}(N = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$이다(기하분포(geometric distribution)). 따라서 $|t| < 2$일 때

$$G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{t}{2}\right)^n = \frac{t/2}{1 - t/2} = \frac{t}{2 - t}.$$

이다.

각 X_i의 확률생성함수. 추가로 던지는 것 중 i번째에서 앞면이 나오면 $X_i = 1$, 그렇지 않으면 $X_i = 0$이라 하자. 그러면 $Y = X_1 + \cdots + X_N$이고 $H(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t = \frac{1}{2}(1 + t)$이다. 추가로 던지는 것들은 서로 독립이고 N을 결정한 던지기들과도 독립이므로, 일반적인 결과의 조건이 성립한다.

Y의 확률생성함수.

$$G(H(t)) = \frac{\frac{1}{2}(1+t)}{2-\frac{1}{2}(1+t)} = \frac{1+t}{3-t}.$$

평균과 분산. $p = \frac{1}{2}$인 기하분포에서 $\mathrm{E}(N) = 1/p = 2$이고 $\mathrm{Var}(N) = (1-p)/p^2 = 2$이다(또는 G를 미분하면 $G'(t) = 2/(2-t)^2$, $G''(t) = 4/(2-t)^3$이므로 $G'(1) = 2$, $G''(1) = 4$이고 $\mathrm{Var}(N) = 4+2-4 = 2$이다). 각 X_i는 베르누이$\left(\frac{1}{2}\right)$ 분포를 따르므로 $\mathrm{E}(X_i) = \frac{1}{2}$이고 $\mathrm{Var}(X_i) = \frac{1}{4}$이다. 따라서

$$\mathrm{E}(Y) = 2\cdot\tfrac{1}{2} = 1, \qquad \mathrm{Var}(Y) = 2\cdot\tfrac{1}{4} + 2\cdot\tfrac{1}{4} = 1.$$

이다.

Y의 분포. $|t| < 3$일 때 다음과 같이 전개한다.

$$\frac{1+t}{3-t} = \frac{1+t}{3}\cdot\frac{1}{1-t/3} = \frac{1+t}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{3^k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{3^{k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{k+1}}{3^{k+1}}.$$

t^0의 계수는 첫 번째 합에서만 나온다. $r \geq 1$일 때 t^r의 계수는 $\dfrac{1}{3^{r+1}} + \dfrac{1}{3^r} = \dfrac{4}{3^{r+1}}$이다. 따라서

$$\mathrm{P}(Y=0) = \frac{1}{3}, \qquad \mathrm{P}(Y=r) = \frac{4}{3^{r+1}} \quad (r = 1,2,3,\ldots).$$

이다.

검산

- 확률의 합이 1이다: $\frac{1}{3} + 4\sum_{r\geq 1} 3^{-(r+1)} = \frac{1}{3} + 4\cdot\frac{1}{6} = 1$.
- $\mathrm{P}(Y=0)$를 직접 구하면 $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n\geq 1} 4^{-n} = \frac{1}{3}$이다. 마찬가지로 $\mathrm{P}(Y=1) = \sum_{n\geq 1} n\,4^{-n} = \frac{4}{9}$이고, 이는 $4/3^2$와 일치한다.
- $n \leq 200$에 대하여 $\mathrm{P}(N=n)\binom{n}{r}2^{-n}$을 정확히 더하면 $r \leq 7$에 대한 $\mathrm{P}(Y=r)$가 재현되었고, 평균과 분산이 모두 1.000으로 나왔다. 200 000회 시뮬레이션에서는 0.996과 0.994가 나왔다.

흔한 실수

- N이 0부터 시작한다고 보는 것(확률생성함수 $1/(2-t)$): 여기서 N은 앞면이 나온 던지기까지 세므로 $N \geq 1$이다.
- $P''(1)$이 $\mathrm{E}(Z^2)$가 아니라 $\mathrm{E}(Z^2) - \mathrm{E}(Z)$라는 것을 잊어서, 분산 공식의 $+P'(1)$을 빠뜨리는 것.
- 모든 $r \geq 0$에 대하여 $4/3^{r+1}$이라고 답하는 것: $r = 0$인 항은 다르다.

STEP 너머

Y는 **무작위 합**(random sum, 복합 분포(compound distribution))이며, 분산 공식은 전분산 법칙(law of total variance) $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}\big(\mathrm{Var}(Y \mid N)\big) + \mathrm{Var}\big(\mathrm{E}(Y \mid N)\big)$의 특수한 경우이다. 확률생성함수의 합성은 분기 과정(branching process)의 원동력이기도 하다. 분기 과정에서는 $G(G(\cdots G(t)))$가 n번째 세대의 크기를 나타내고, 소멸 확률은 G의 고정점(fixed point)이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 생성함수, 무작위 합, 분기 과정을 정확히 이 수준에서 다룬다.

풀이

STEP III 2011, 문제 13

확률과 통계 • 이산분포의 최빈값

> **STEP III 2011, 13번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/11-s3-q13

핵심 아이디어

이산 확률변수(discrete random variable)가 가장 가질 법한 값을 찾을 때는 미분하지 않는다. 대신 이웃한 확률끼리 비교한다. 비 $\mathrm{P}(X=r+1)/\mathrm{P}(X=r)$는 r에 대한 간단한 유리함수(rational function)이고, 이 비가 언제 1보다 커지는지를 묻는 것은 r에 대한 일차부등식(linear inequality)이 된다. 비가 1보다 큰 동안에는 확률이 증가하고, 1보다 작아지면 감소하므로, 최댓값은 바뀌기 직전의 마지막 r에서 나타난다. 같은 방법이 복원추출(with replacement)과 비복원추출(without replacement) 모두에 통하며, 달라지는 것은 비뿐이다.

풀이

소문항 (i)

복원추출에서는 각 시행이 독립(independent)이고 각각 확률 $p=b/n$으로 검은 공이 나오므로 $X\sim \mathrm{B}(k,p)$이다.

$$\mathrm{P}(X=r)=\binom{k}{r}p^r(1-p)^{k-r},\qquad r=0,1,\ldots,k.$$

먼저 $0<b<n$이라고 가정하자. 그러면 이 확률들은 모두 양수이다. $0\le r\le k-1$에 대하여

$$\frac{\mathrm{P}(X=r+1)}{\mathrm{P}(X=r)}=\frac{k-r}{r+1}\cdot\frac{p}{1-p}=\frac{(k-r)\,b}{(r+1)(n-b)}.$$

분모가 양수이므로 이 비가 1보다 클 필요충분조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & (k-r)b > (r+1)(n-b) \\ \iff \quad & kb - rb > rn - rb + n - b \\ \iff \quad & (k+1)b > (r+1)n \\ \iff \quad & r+1 < \frac{(k+1)b}{n}. \end{aligned}$$

같은 방식으로, 비가 1과 같을 필요충분조건은 $r+1 = m$이고, 1보다 작을 필요충분조건은 $r+1 > m$이다. 여기서

$$m = \frac{(k+1)b}{n}.$$

따라서 r가 증가할 때, $\mathrm{P}(X=r)$는 도착하는 값이 $r+1 < m$인 각 단계에서 순증가하고, 도착하는 값이 $r+1 > m$인 각 단계에서 순감소한다. $0 < b < n$이므로 $0 < m < k+1$이고, 따라서 증가에서 감소로 바뀌는 지점은 범위 $0, \ldots, k$ 안에 있다.

? 생각해 보기 m이 정수가 아니라면 가장 큰 확률은 정확히 어디에 있는가?

m이 정수가 아니면 $M = \lfloor m \rfloor$로 두자. 그러면 $M < m < M+1$이고 $0 \le M \le k$이다. 확률은 $\mathrm{P}(X=M)$까지 순증가하고(모든 단계가 $\le M < m$인 값에서 끝나므로), 그 뒤로는 순감소한다(이후의 모든 단계가 $\ge M+1 > m$인 값에서 끝나므로). 따라서 가장 가능성이 높은 검은 공의 개수는 유일하게

$$\left\lfloor \frac{(k+1)b}{n} \right\rfloor,$$

이고, 이것이 증명하려던 것이다.

유일하지 않은 경우. m이 정수이면 $r = m-1$에서 $r = m$으로 가는 단계의 비가 정확히 1이므로 $\mathrm{P}(X = m-1) = \mathrm{P}(X=m)$이고, 이 두 같은 값은 다른 모든 값보다 크다(확률은 $m-1$까지 순증가하고 m 이후로 순감소한다). $1 \le m \le k$이므로 두 값 모두 가능한 값이다. 그러므로 답이 유일하지 않을 필요충분조건은 ($0 < b < n$일 때) $(k+1)b/n$이 정수인 것이며, 이때 $m-1$과 m이 똑같이 가장 가능성이 높다. 예를 들어 $n=3, b=1, k=5$이면 $m=2$이고, 실제로 $\mathrm{P}(X=1) = \mathrm{P}(X=2) = \frac{80}{243}$이다.

자명한 경우는 여기서 제외된다. $b=0$이면 확실히 $X=0$이고, 이는 공식과 일치한다. $b=n$이면 확실히 $X=k$인데, 공식은 ($k+1$을 주게 되므로) 적용되지 않는다. 위의 비가 $n-b$로 나누는 것을 포함하기 때문이다.

소문항 (ii)

비복원추출에서 X는 초기하분포(hypergeometric distribution)를 따른다. 표본을 k개의 공으로 이루어진 순서 없는 집합으로 뽑는다고 보면, $\binom{n}{k}$개의 집합이 모두 같은 확률로 나오

므로

$$\mathrm{P}(X=r)=\frac{\binom{b}{r}\binom{n-b}{k-r}}{\binom{n}{k}}.$$

$k \le b$이므로 가능한 가장 큰 값은 $r=k$이다. 검지 않은 공은 $n-b$개보다 많이 뽑을 수 없으므로 가장 작은 값은 $r_0=\max(0,k-(n-b))$이다. $r_0 \le r \le k$에서 확률은 양수이고, $r_0 \le r \le k-1$에 대하여 $\binom{a}{r+1}=\binom{a}{r}\frac{a-r}{r+1}$과 $\binom{a}{s-1}=\binom{a}{s}\frac{s}{a-s+1}$을 이용하면

$$\frac{\mathrm{P}(X=r+1)}{\mathrm{P}(X=r)}=\frac{b-r}{r+1}\cdot\frac{k-r}{n-b-k+r+1}.$$

이 범위에서 두 분모는 모두 양수이므로, 비가 1보다 클 필요충분조건은

$$(b-r)(k-r)>(r+1)(n-b-k+r+1).$$

전개하면 좌변은 $bk-r(b+k)+r^2$이고 우변은 $(r+1)(n-b-k+1)+r^2+r$이다. r^2 항이 소거되어 부등식은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} & bk-r(b+k)>r(n-b-k+1)+(n-b-k+1)+r \\ \iff\quad & bk+b+k+1>r(n+2)+(n+2) \\ \iff\quad & r+1<\frac{(b+1)(k+1)}{n+2}. \end{aligned}$$

? 생각해 보기 바뀌는 지점이 실제로 가능한 값의 범위 $r_0,\dots,k$ 안에 있는가?

$m=\frac{(b+1)(k+1)}{n+2}$로 두자. $b+1<n+2$이므로 $m<k+1$이다. 아래쪽 끝에 대해서는, $m>0$은 자명하고, $r_0=k+b-n>0$이면 $(b+1)(k+1)>(n+2)(k+b-n)$임을 보여야 한다. $x=n-b$, $y=n-k$로 쓰면 좌변에서 우변을 뺀 값은

$$(n+1-x)(n+1-y)-\left[(n+1)^2-1-(n+2)(x+y)\right]=1+x+y+xy>0.$$

따라서 모든 경우에 $r_0<m<k+1$이고, 소문항 (i)의 논증이 그대로 적용된다. 즉 확률은 $r+1<m$인 동안 순증가하고 $r+1>m$이 되면 순감소한다. 그러므로 유일할 때, 가장 가능성이 높은 검은 공의 개수는

$$\left\lfloor\frac{(b+1)(k+1)}{n+2}\right\rfloor.$$

이것이 유일하지 않을 필요충분조건은 $(b+1)(k+1)/(n+2)$가 정수인 것이다. 이때 $m-1$과 m은 ($r_0 \le m-1$이고 $m \le k$이므로 둘 다 가능한 값이며) 같은 확률을 가지고 다른 어떤 값보다도 확률이 크다. 예를 들어 $n=10$, $b=7$, $k=5$이면 $m=4$이고, $X=3$과 $X=4$가 동률이며 각각의 확률은 $\frac{105}{252}=\frac{5}{12}$이다.

검산

- 컴퓨터로 모든 $n \leq 24, 0 \leq b \leq n, 1 \leq k \leq 19$(소문항 (ii)에서는 $k \leq b$)에 대하여 두 분포를 분수로 정확히 계산하고, 최빈값(mode)을 전수 조사로 찾아 모든 경우에 두 공식과 두 동률 조건을 확인하였다(소문항 (ii)는 2565가지 경우).
- $n = 10, b = 6, k = 4$일 때: $m = \frac{35}{12}$이므로 공식은 2를 주고, 실제로 $X = 2$가 유일한 최빈값이다.
- n이 k에 비해 매우 크면, 공 몇 개를 꺼내도 검은 공의 비율은 거의 변하지 않으므로 소문항 (ii)는 소문항 (i)과 비슷해야 한다. 실제로 그렇다. $(b+1)(k+1)/(n+2) \approx (k+1)b/n$.

흔한 실수

- 최빈값이 평균의 정수 부분인 $\lfloor kb/n \rfloor$라고 결론짓는 것. 최빈값은 평균에 가깝지만 항상 평균의 정수 부분과 같지는 않다.
- 비가 정확히 1일 때 최빈값이 하나가 아니라 두 개라는 것을 잊는 것.
- 소문항 (ii)에서 $(r+1)(n-b-k+r+1)$을 전개할 때 부호를 틀리는 것. r^2 항이 소거되는지 보는 것이 유용한 확인 방법이다.

STEP 너머

연속한 확률을 비교하는 것은 어떤 이산분포에서든 최빈값을 찾는 표준적인 방법이며, 같은 계산으로 소문항 (i)의 극한의 경우로서 포아송(Poisson) 분포의 최빈값 $\lfloor \lambda \rfloor$를 얻는다. 초기하분포는 표본추출 이론과 통계학의 피셔(Fisher)의 정확 검정(Fisher's exact test)에서 핵심적인 역할을 한다. 이처럼 확률이 증가하다가 감소하는 분포를 단봉분포(unimodal distribution)라고 한다. 이항분포와 초기하분포의 경우 이 성질은 더 강한 성질인 로그오목성(log-concavity)에서 나온다. 더 알고 싶다면 Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문), 또는 Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)를 보라.

Beyond STEP

STEP은 대부분의 학생이 학창 시절에 치르는 수학 시험 가운데 가장 어려운 시험이다. 또한 가장 훌륭한 시험 가운데 하나이기도 하다. 문제는 짧고 낯설며 깊이가 있고, 그중 가장 뛰어난 문제들은 대학 수학의 작은 조각이 모습을 감추고 있는 것이다.

이 책은 1987년 첫 시험에 앞서 나온 예시 시험지(specimen papers)부터 2025년 시험지까지 가운데 가장 흥미로운 STEP 문제들을 골라, 각 문제를 하나의 문으로 삼는다. 모든 문제는 뛰어난 학생이 풀어 가면서 던질 법한 질문들과 함께 꼼꼼하게 풀이하고, 그런 다음 책은 그 문을 지나 한 걸음 더 나아간다. 그 아이디어가 어디에서 왔는지, 대학에서는 무엇으로 발전하는지, 그리고 다음에는 무엇을 읽으면 좋은지를 살펴본다.

이 책은 STEP을 준비하면서 기출 문제 연습 이상의 것을 원하는 재능 있는 예비 수학자를 위해 쓰였다. 수학과 학부생처럼 생각하기 시작하고, 앞으로 무엇이 자신을 기다리고 있는지 알아보고 싶은 학생들을 위한 책이다.

- 순수수학(pure mathematics), 역학(mechanics), 확률(probability)과 통계(statistics)를 아우르는 13개의 장
- 이 36개의 STEP 기출 문제와 각 문제의 안내식 풀이
- 모든 문제 뒤에 숨은 대학 수학
- 답이 실린 후속 연습 문제와 더 읽을거리

2011년 풀이. 책 전체와 모든 장,
모든 풀이를 다음 주소에서 무료로 읽고, 내려받고, 공유할 수 있다.

beyondstep.keithmcnulty.org

본문은 퍼블릭 도메인(CC0 1.0)으로 공개한다. STEP 문제 © Cambridge University Press & Assessment.

