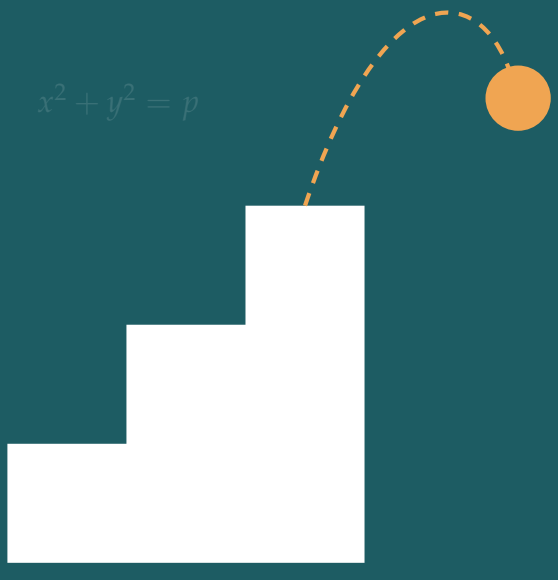
STEP 대비 · 대학 수학

Beyond STEP

STEP I, II 및 III

2010년 풀이



KEITH McNULTY

Beyond STEP

STEP 기출문제로 여는
대학 수학의 세계

STEP I, II 및 III

2010년 풀이

Keith McNulty

Beyond STEP: STEP 기출문제로 여는 대학 수학의 세계

2010년 풀이

2010년 STEP 문제지(STEP I, II 및 III)의 39개 문제 전체에 대한 풀이. 견본 문제지 이후 모든 STEP 문제의 풀이와 *Beyond STEP* 책 전체, 그리고 각 장을 `beyondstep.keithmcnulty.org`에서 무료로 읽고 내려받을 수 있다.

풀이를 읽기 전에 먼저 문제를 제대로 풀어 보자. 모든 답은 수치적으로 검증하였지만, 풀이가 이렇게 많으면 실수가 어느 정도 있을 수밖에 없다. 무언가 잘못된 것처럼 보이면 자신의 풀이를 믿고 꼼꼼히 확인해 보자.

영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.

2026년 11월 온라인 초판 발행.

이 PDF에서 지은이가 직접 만든 모든 것, 곧 본문, 풀이, 그림, 연습문제와 해답은 크리에이티브 커먼즈 CC0 1.0 Universal 라이선스에 따라 퍼블릭 도메인(public domain)으로 공개한다. 누구든 허락을 구하지 않고 어떤 목적으로든 복사하고, 고쳐 쓰고, 공유할 수 있다. 자세한 내용은 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`을 보라.

여기에서 다루는 STEP 문제의 저작권은 Cambridge University Press & Assessment에 있다. 문제는 이 책에 싣지 않았으며, 각 문제마다 공식 출처인 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스나 OCR의 기출 시험지로 가는 링크를 달았다.

오류 제보는 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty에 이슈로 남겨 주기 바란다.

차례

STEP I

Q1 완전제곱식 만들기 순수수학 3

Q2 곡선 그리기 순수수학 7

Q3 합을 곱으로 바꾸는 공식 순수수학 12

Q4 치환적분 순수수학 16

Q5 이항계수 항등식 순수수학 19

Q6 계수 내림법 순수수학 22

Q7 벡터와 교차하는 직선 순수수학 25

Q8 무한 강하법 순수수학 29

Q9 마찰과 평형 역학 33

Q10 벡터 운동학 역학 37

Q11 원 위에서의 충돌 역학 41

Q12 꼬리 합을 통한 기댓값 확률과 통계 45

Q13 푸아송 대기 시간 확률과 통계 49

STEP II

Q1 곡률과 접촉원 순수수학 53

Q2 삼각함수 적분법 순수수학 56

Q3 피보나치 수와 점화식 순수수학 60

Q4 치환적분 순수수학 63

Q5 벡터의 각과 원뿔 순수수학 67

Q6 정사면체의 기하 순수수학 71

Q7 삼차방정식 순수수학 75

Q8 곡선 사이의 넓이 순수수학 79

Q9 충돌하는 포물체 역학 83

Q10 탄성 충돌 역학 86
Q11 세 힘의 평형 역학 90
Q12 평균과 중앙값 확률과 통계 94
Q13 독립사건 확률과 통계 98

STEP III

Q1 평균과 분산 순수수학 102
Q2 정적분 순수수학 106
Q3 1의 거듭제곱근 순수수학 110
Q4 다항식의 공통근 순수수학 114
Q5 좌표기하의 작도 순수수학 118
Q6 3차원에서의 회전 순수수학 122
Q7 매클로린 급수 순수수학 126
Q8 몫의 미분법과 적분 순수수학 130
Q9 원 위의 운동 역학 134
Q10 미소 진동 역학 137
Q11 마찰과 상대 운동 역학 141
Q12 기하분포의 기댓값 확률과 통계 145
Q13 선형결합의 상관관계 확률과 통계 149

풀이

STEP I 2010, 문제 1

순수수학 • 완전제곱식 만들기

> **STEP I 2010, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/10-s1-q1

핵심 아이디어

주어진 항등식(identity)은 다루기 까다로운 이차식을 두 제곱의 합에 상수를 더한 꼴로 바꾸어 쓴다. 두 번째 방정식도 **같은** 두 괄호 $x-y+2$와 $2x-y$를 써서 나타낼 수 있다는 것을 알아차리면, 문제는 두 개의 새로운 미지수에 대한 간단한 방정식 두 개로 바뀐다. 이 방정식들은 새 미지수의 제곱에 대하여 일차이므로 곧바로 풀 수 있다.

풀이

항등식

우변을 전개하면

$$\begin{aligned} &a(x-y+2)^2+b(cx+y)^2+d \\ &\quad =a(x^2+y^2-2xy+4x-4y+4)+b(c^2x^2+2cxy+y^2)+d \\ &\quad =(a+bc^2)x^2+(a+b)y^2+(2bc-2a)xy+4ax-4ay+(4a+d). \end{aligned}$$

이것은 항등식이므로 $5x^2 + 2y^2 - 6xy + 4x - 4y$와 계수를 비교(comparing coefficients)할 수 있다.

$$\begin{aligned}
x: &\quad 4a = 4, && \text{따라서} a = 1;\\
y: &\quad -4a = -4, && \text{일치한다;}\\
y^2: &\quad a + b = 2, && \text{따라서} b = 1;\\
xy: &\quad 2bc - 2a = -6, && \text{따라서} 2c = -4,\ c = -2;\\
x^2: &\quad a + bc^2 = 5, && \text{확인: } 1 + 4 = 5;\\
\text{상수항}: &\quad 4a + d = 0, && \text{따라서} d = -4.
\end{aligned}$$

x^2의 계수만으로는 $c^2 = 4$밖에 얻지 못한다는 점에 주의하자. 부호를 결정하는 것은 xy의 계수이다. 따라서

$$a = 1, \qquad b = 1, \qquad c = -2, \qquad d = -4,$$

즉

$$5x^2 + 2y^2 - 6xy + 4x - 4y \equiv (x - y + 2)^2 + (2x - y)^2 - 4,$$

이다. 여기서 $(-2x + y)^2$을 $(2x - y)^2$으로 썼다.

연립방정식

항등식에 의해 첫 번째 방정식은 다음과 같이 된다.

$$(x - y + 2)^2 + (2x - y)^2 = 13.$$

생각해 보기 두 번째 방정식은 생김새가 다르다. 이것도 같은 두 괄호를 써서 나타낼 수 있을까?

두 번째 방정식에서 x와 y의 일차항은 $8x - 8y$로, 첫 번째 방정식의 일차항의 두 배이다. 그러므로 일차항이 꼭 맞는 $2(x - y + 2)^2$을 시도해 볼 만하다.

$$2(x - y + 2)^2 = 2x^2 + 2y^2 - 4xy + 8x - 8y + 8.$$

좌변의 나머지 부분은

$$6x^2 + 3y^2 - 8xy + 8x - 8y - 2(x - y + 2)^2 = 4x^2 + y^2 - 4xy - 8 = (2x - y)^2 - 8.$$

이다. 따라서 두 번째 방정식은 $2(x - y + 2)^2 + (2x - y)^2 - 8 = 14$, 즉

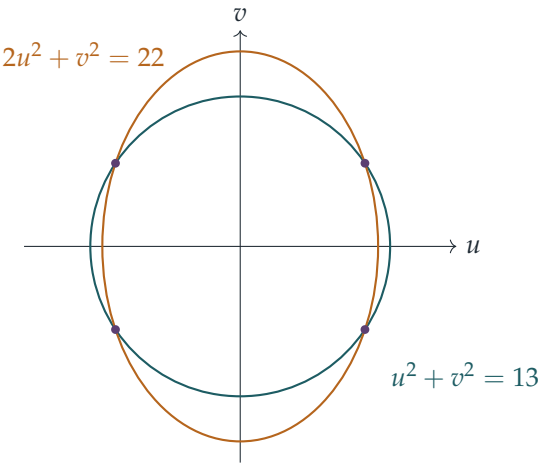
$$2(x - y + 2)^2 + (2x - y)^2 = 22.$$

이다. (항등식을 구할 때처럼 $\alpha(x - y + 2)^2 + \beta(\gamma x + y)^2 + \delta$에서 계수를 비교하여 이것을 구할 수도 있다.)

이제 $u = x - y + 2$, $v = 2x - y$라 하자. 연립방정식은 다음과 같이 된다.

$$u^2 + v^2 = 13, \qquad 2u^2 + v^2 = 22.$$

두 식을 빼면 $u^2 = 9$이고, 따라서 $v^2 = 4$이다. 그러므로 $u = \pm 3$, $v = \pm 2$이고 부호는 서로 독립적으로 정할 수 있으므로, 순서쌍 (u, v)는 네 개이다.



x와 y로 되돌아가기 위해 빼 보면 $v - (u - 2) = (2x - y) - (x - y) = x$이므로

$$x = v - u + 2, \qquad y = 2x - v = v - 2u + 4.$$

이다. 이 변수 변환(change of variables)은 일차이고 역변환이 존재하므로, 각 (u, v)에 대하여 (x, y)가 정확히 하나씩 대응한다. 네 해는 다음과 같다.

u	v	x	y
3	2	1	0
3	−2	−3	−4
−3	2	7	12
−3	−2	3	8

따라서

$$(x, y) = (1, 0), \quad (-3, -4), \quad (7, 12), \quad (3, 8).$$

검산

$(1, 0)$을 대입하면 첫 번째 방정식은 $5 + 4 = 9$, 두 번째 방정식은 $6 + 8 = 14$가 된다. $(7, 12)$에 대해서는 $245 + 288 - 504 + 28 - 48 = 9$, $294 + 432 - 672 + 56 - 96 = 14$이다.

컴퓨터로 무작위로 고른 유리수 점 천 개에서 두 항등식이 성립함을 확인하였고, 네 순서쌍이 모두 두 방정식을 만족함도 확인하였다. $|x|, |y| \leq 50$인 모든 정수 순서쌍에 대한 전수 탐색(brute-force search)에서도 정확히 이 네 해만 나왔다. 두 이차곡선(conic)은 많아야 네 점에서 만나므로 빠뜨린 해는 있을 수 없다.

흔한 실수

- xy의 계수를 확인하지 않고 $c^2 = 4$에서 $c = 2$로 정해 버린다.
- 양의 제곱근만 취하여 해를 네 개가 아닌 한 개만 구한다.
- 처음 방정식들에서 곧바로 변수를 소거한다. 이렇게 하면 사차방정식(quartic)이 나오는데, 손으로 풀기에는 매우 힘들다.

STEP 너머

이차형식(quadratic form)을 제곱들의 일차결합으로 나타내는 것은 이차형식 이론의 출발점이다. 대칭행렬(symmetric matrix)을 대각화(diagonalising)하면 $Ax^2 + Bxy + Cy^2$을 $\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2$으로 바꾸는 일차 변수 변환을 언제나 찾을 수 있으며, 이차곡선은 바로 이런 방법으로 분류된다. 이 문제에서는 두 방정식이 마침 같은 제곱 두 개를 공유했기 때문에 그렇게 깔끔하게 분리되었다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 대칭행렬과 이차형식을 명쾌하게 다룬다.

풀이

STEP I 2010, 문제 2

순수수학 • 곡선 그리기

> **STEP I 2010, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/10-s1-q2

핵심 아이디어

몫의 미분법(quotient rule)으로 미분하고, 결코 0이 되지 않는 인수 e^x를 묶어 낸다. 그러면 정류점(stationary point)은 어떤 이차식의 근이 되므로, "정류점이 두 개"라는 말은 그 이차식의 판별식(discriminant)에 대한 명제가 된다. 그래프를 그릴 때는 바로 그 이차식의 부호가 곡선이 어디서 증가하고 어디서 감소하는지 알려 주고, 점근선(asymptote) 근처와 $x \to \pm\infty$일 때의 거동이 나머지를 채워 준다.

풀이

$x \neq b$에서 정의된 $y = \dfrac{x-a}{x-b}\mathrm{e}^x$를 생각한다. 곱의 미분법(product rule)에 의해, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{x-a}{x-b}\right) = \dfrac{(x-b)-(x-a)}{(x-b)^2} = \dfrac{a-b}{(x-b)^2}$이므로

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x-a}{x-b}\mathrm{e}^x + \frac{a-b}{(x-b)^2}\mathrm{e}^x = \frac{\mathrm{e}^x\left[(x-a)(x-b)+(a-b)\right]}{(x-b)^2}.$$

$x \neq b$에서 $\mathrm{e}^x > 0$이고 $(x-b)^2 > 0$이므로, $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$의 부호는

$$q(x) = (x-a)(x-b) + (a-b) = x^2 - (a+b)x + ab + a - b,$$

의 부호와 같고, 정류점은 정확히 $x = b$가 아닌 q의 근들이다.

> **생각해 보기** 곡선이 정의되지 않는 $x = b$에 q의 근이 놓일 수 있을까?

이것은 문제가 되지 않는다. $q(b) = a - b$이므로 $x = b$가 근이 되는 것은 $a = b$일 때뿐이다. 그런데 그 경우 곡선은 ($x = b$에 구멍이 뚫린) $y = \mathrm{e}^x$일 뿐이고, 이 곡선에는 정류점이 전혀

없다. 따라서 어떤 경우든 정류점은 정확히 q의 실근들이며, 정류점이 두 개인 것은 q가 서로 다른 두 실근을 가질 때, 즉 판별식이 양수일 때와 정확히 같다.

$$(a+b)^2 - 4(ab+a-b) = (a-b)^2 - 4(a-b) = (a-b)(a-b-4) > 0.$$

두 인수의 곱이 양수인 것은 두 인수가 모두 양수이거나 모두 음수일 때이다. 둘 다 음수이면 $a-b<0$이고, 둘 다 양수이면 $a-b>4$이다(이때 이미 $a-b>0$이 성립한다). 그러므로 정류점이 두 개이려면

$$a-b<0 \quad \text{또는} \quad a-b>4,$$

이어야 하며, 이것이 보이려던 것이다. (역으로, 두 조건 중 어느 것이든 정류점 두 개를 준다.)

소문항 (i)

$a=0, b=\frac{1}{2}$이면 $a-b=-\frac{1}{2}<0$이고,

$$y=\frac{x\,\mathrm{e}^x}{x-\frac{1}{2}}, \qquad q(x)=x^2-\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{2}=(x-1)\big(x+\tfrac{1}{2}\big).$$

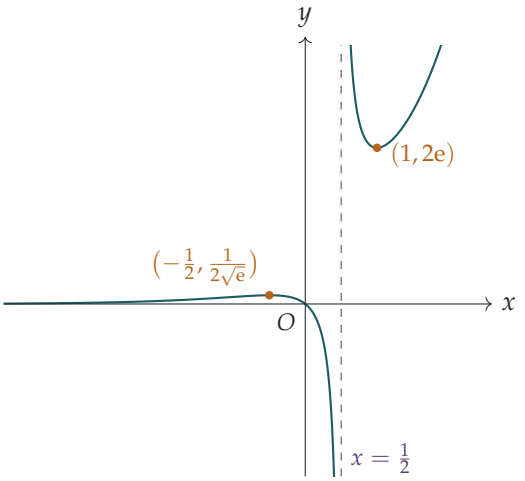
정류점은 $x=-\frac{1}{2}$와 $x=1$에 있으며, 문제에서 요구한 대로 수직 점근선 $x=\frac{1}{2}$의 양쪽에 하나씩 있다. 이 점들의 y값은

$$y\big(-\tfrac{1}{2}\big)=\frac{-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-1/2}}{-1}=\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}}}\approx 0.30, \qquad y(1)=\frac{\mathrm{e}}{\frac{1}{2}}=2\mathrm{e}\approx 5.44.$$

$x<-\frac{1}{2}$에서 $q>0$, $-\frac{1}{2}<x<1 (x\neq\frac{1}{2})$에서 $q<0$, $x>1$에서 $q>0$이므로, 점 $\big(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}}}\big)$은 극대점(local maximum)이고 $(1, 2\mathrm{e})$는 극소점(local minimum)이다.

그 밖의 특징:

- $x\to-\infty$일 때 $\frac{x}{x-1/2}\to 1$이고 $\mathrm{e}^x\to 0$이므로 $y\to 0$이다. $x<0$에서는 x와 $x-\frac{1}{2}$가 모두 음수이므로 $y>0$이다. 즉 곡선은 음의 x축에 위쪽에서 다가간다.
- 곡선은 원점에서만 좌표축과 만나고, $0<x<\frac{1}{2}$에서 $y<0$이다.
- $x\to\frac{1}{2}^-$일 때 $y\to-\infty$이고, $x\to\frac{1}{2}^+$일 때 $y\to+\infty$이다 (분자는 $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{1/2}>0$으로 수렴한다).
- $x\to\infty$일 때 $y\to\infty$이며, e^x처럼 증가한다.



소문항 (ii)

$a = \frac{9}{2}, b = 0$이면 $a - b = \frac{9}{2} > 4$이므로, 이번에도 정류점이 두 개 있다. 이제

$$y = \frac{x - \frac{9}{2}}{x}\,\mathrm{e}^x, \qquad q(x) = x^2 - \tfrac{9}{2}x + \tfrac{9}{2} = \tfrac{1}{2}(2x - 3)(x - 3),$$

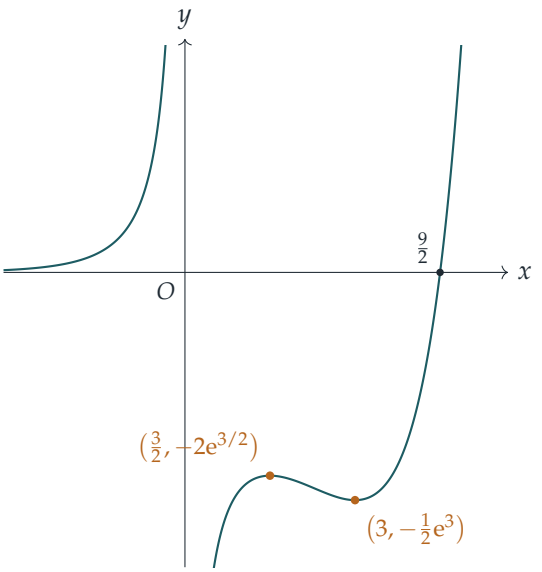
이므로 정류점은 $x = \frac{3}{2}$와 $x = 3$에 있고, 둘 다 점근선 $x = 0$의 오른쪽에 있다. 이 점들의 y값은

$$y\left(\tfrac{3}{2}\right) = \frac{-3}{\frac{3}{2}}\,\mathrm{e}^{3/2} = -2\mathrm{e}^{3/2} \approx -8.96, \qquad y(3) = \frac{-\frac{3}{2}}{3}\,\mathrm{e}^3 = -\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^3 \approx -10.04.$$

q의 부호는 $x < \frac{3}{2} (x \neq 0)$에서 양, $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$에서 음, $x > 3$에서 양이므로, $\left(\frac{3}{2}, -2\mathrm{e}^{3/2}\right)$은 극대점이고 $\left(3, -\frac{1}{2}\mathrm{e}^3\right)$은 극소점이다. 두 점이 모두 x축 아래에 있고, 극소점이 극대점보다 아주 조금만 낮으므로 그 사이의 움푹 들어간 부분은 얕다는 점에 주의한다.

그 밖의 특징:

- $x \to -\infty$일 때 $y \to 0$이다. $x < 0$에서는 $x - \frac{9}{2}$와 x가 모두 음수이므로 $y > 0$이다. $x < 0$에서 곡선은 증가하며(그곳에서 $q > 0$이므로), 축 바로 위에서부터 점근선을 향해 올라간다.
- $x \to 0^-$일 때 $y \to +\infty$이고, $x \to 0^+$일 때 $y \to -\infty$이다(분자는 $-\frac{9}{2}$로 수렴한다).
- 절편은 $\left(\frac{9}{2}, 0\right)$뿐이다. $\left(0, \frac{9}{2}\right)$에서 $y < 0$이고 $x > \frac{9}{2}$에서 $y > 0$이며, $x \to \infty$일 때 $y \to \infty$이다.



여기서는 y축 자체가 수직 점근선이다.

검산

- 임의의 (a, b, x)에서 y의 수치 미분값은 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 공식과 일치하고, 임의의 (a, b)에 대해 q의 부호 변화를 세어 보면 정류점이 두 개인 것은 정확히 $a - b < 0$ 또는 $a - b > 4$일 때이다.
- (i)에서 $y(1) = 5.4366 = 2\mathrm{e}$이고 $y(-\frac{1}{2}) = 0.3033$이며, (ii)에서 $y(\frac{3}{2}) = -8.9634$이고 $y(3) = -10.0428$이다. 각 점의 바로 양옆 값을 계산해 보면 극대인지 극소인지 확인된다.
- 조건에 대한 상식적 검토: (i)에서 $a - b = -\frac{1}{2}$, (ii)에서 $a - b = \frac{9}{2}$로, 마땅히 그래야 하듯이 둘 다 허용 범위 안에 있다.

흔한 실수

- 판별식이 $(a - b)^2 - 4(a - b)$임을 알아차리지 못하고 그냥 전개하는 것. $a - b$에 대한 식으로 쓰면 깔끔하게 인수분해된다.
- q의 근이 점근선 $x = b$ 위에 올 수 없음을 확인하는 것을 잊는 것.
- (ii)에서 극대점과 극소점을 x축의 서로 반대쪽에 그리는 것. 두 점 모두 x축 아래에 있으며, 곡선은 $x = \frac{9}{2}$에서만 축과 만난다.

STEP 너머

여기서 쓴 방법, 즉 도함수의 부호와 극한으로부터 곡선의 모양을 읽어 내는 방법은 대학의 첫 해석학(analysis) 강의에서 평균값 정리(Mean Value Theorem)(어떤 구간에서 도함수가 양수이면 정말로 증가한다는 것)와 무한대에서의 극한에 대한 엄밀한 정의를 통해 엄밀하게 다듬어진다. $x \to \pm\infty$일 때 e^x가 어떤 유리함수(rational function)보다도 압도적이라는 사실도 그곳에서 증명되는 표준적인 결과이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)는 이 모든 내용을 훌륭하게 다룬다.

풀이

STEP I 2010, 문제 3

순수수학 • 합을 곱으로 바꾸는 공식

STEP I 2010, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/10-s1-q3

핵심 아이디어

사인(또는 코사인)의 차를 곱으로 바꾸어 주는 것이 합을 곱으로 바꾸는 공식(sum-to-product formulae)이다. 매개변수(parameter)가 u와 v인 두 점을 잇는 타원(ellipse)의 현(chord)은 기울기(gradient)가 $\dfrac{b(\sin v - \sin u)}{a(\cos v - \cos u)}$이다. 분자와 분모가 모두 차의 꼴이므로 이 공식으로 각각을 인수분해할 수 있고, 공통인수가 약분되면 기울기는 **합** $u+v$에만 의존하게 된다. 그러면 두 현을 비교하는 문제는 두 코탄젠트(cotangent)를 비교하는 문제로 바뀐다.

풀이

삼각함수 항등식

덧셈정리(compound-angle formulae)를 이용하면

$$\begin{aligned}\sin(x+y) - \sin(x-y) &= (\sin x \cos y + \cos x \sin y) - (\sin x \cos y - \cos x \sin y)\\ &= 2\cos x \sin y,\end{aligned}$$

이므로 요구된 식이 성립한다. 이제 임의의 A와 B에 대하여 $x = \frac{1}{2}(A+B), y = \frac{1}{2}(A-B)$로 놓으면 $x+y = A, x-y = B$이다. 그러면 항등식은 다음과 같이 된다.

$$\sin A - \sin B = 2\cos \tfrac{1}{2}(A+B)\ \sin \tfrac{1}{2}(A-B).$$

같은 방법으로

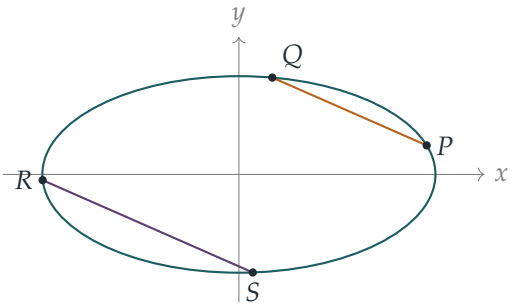
$$\begin{aligned}\cos(x+y) - \cos(x-y) &= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) - (\cos x \cos y + \sin x \sin y)\\ &= -2\sin x \sin y,\end{aligned}$$

이고, 같은 치환을 하면 다음을 얻는다.

$$\cos A - \cos B = -2\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\,\sin\tfrac{1}{2}(A-B).$$

평행한 현

네 점은 모두 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위에 있고, 시계 반대 방향으로 P, Q, R, S의 순서로 놓여 있다. 그림은 $a=2, b=1$일 때 평행한 현의 쌍을 보여 준다.



현의 기울기. $[0,2\pi)$에 속하는 두 매개변수 $u < v$를 잡되, $(a\cos u, b\sin u)$와 $(a\cos v, b\sin v)$를 지나는 현이 수직이 아니도록, 즉 $\cos v \neq \cos u$가 되도록 한다. 두 항등식에 $A=v$, $B=u$를 대입하면 이 현의 기울기는

$$\frac{b(\sin v-\sin u)}{a(\cos v-\cos u)}=\frac{2b\cos\frac{1}{2}(u+v)\,\sin\frac{1}{2}(v-u)}{-2a\sin\frac{1}{2}(u+v)\,\sin\frac{1}{2}(v-u)}=-\frac{b}{a}\cot\tfrac{1}{2}(u+v).$$

이다. 이 약분은 정당하다. $0<v-u<2\pi$이므로 $\frac{1}{2}(v-u)$는 0과 π 사이에 엄격히 놓이고, 따라서 $\sin\frac{1}{2}(v-u)\neq 0$이다. 또 원래의 분모가 0이 아니므로 $\sin\frac{1}{2}(u+v)\neq 0$이기도 하여, 코탄젠트가 정의된다.

$\alpha=\frac{1}{2}(p+q)$, $\beta=\frac{1}{2}(r+s)$로 놓자. PQ와 SR 모두 수직이 아니므로

$$\text{기울기}PQ=-\frac{b}{a}\cot\alpha,\qquad \text{기울기}SR=-\frac{b}{a}\cot\beta,$$

이고, $\sin\alpha\neq 0$, $\sin\beta\neq 0$이다. 수직이 아닌 두 직선은 기울기가 같을 때, 그리고 그때에만 평행하며, $b/a\neq 0$이므로

$$PQ\parallel SR \iff \cot\alpha=\cot\beta.$$

이다.

? **생각해 보기** 왜 그냥 "cot을 지워서" $\alpha=\beta$라고 결론 내릴 수 없을까?

cot은 일대일(one-to-one)이 아니기 때문이다. cot은 주기(period) π로 같은 값을 되풀이한다. 이 점을 놓치지 않기 위해 차를 하나의 사인으로 나타내자.

$$\cot\alpha - \cot\beta = \frac{\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

분모가 0이 아니므로

$$PQ \parallel SR \iff \sin(\beta-\alpha) = 0 \iff \beta - \alpha = k\pi \text{ , 정수} k.$$

이다.

k **정하기.** 다음이 성립한다.

$$\beta - \alpha = \tfrac{1}{2}\left[(r-p) + (s-q)\right].$$

$p < r$이고 $q < s$이므로 두 괄호는 모두 양수이고, 따라서 $\beta - \alpha > 0$이다. 네 매개변수가 모두 $[0, 2\pi)$에 속하므로 각 괄호는 2π보다 작고, 따라서 $\beta - \alpha < 2\pi$이다. 0과 2π 사이에 엄격히 놓이는 π의 배수는 π 자신뿐이므로 $k = 1$이다. 그러므로

$$PQ \parallel SR \iff \tfrac{1}{2}(r+s-p-q) = \pi \iff r+s-p-q = 2\pi.$$

이다. 모든 단계가 동치(equivalence)이므로, 요구된 대로 양방향이 모두 증명된다.

(두 직선은 결코 일치할 수 없다. 직선은 타원과 많아야 두 점에서 만나는데, P, Q, R, S는 서로 다른 네 점이기 때문이다. 따라서 여기서 "평행"은 서로 다르면서 진짜로 평행하다는 뜻이다.)

검산

- $p = 0, q = \frac{\pi}{2}, r = \pi, s = \frac{3\pi}{2}$로 잡으면 $r+s-p-q = 2\pi$이다. 이때 $P = (a, 0)$, $Q = (0, b)$, $R = (-a, 0)$, $S = (0, -b)$이고, PQ와 SR의 기울기는 모두 $-b/a$이다. $a = 2$, $b = 1$이면 두 기울기 모두 -0.5가 나온다.
- 대칭성: 조건은 $\frac{1}{2}(r+s) = \frac{1}{2}(p+q) + \pi$라는 뜻이다. 사상 $(x, y) \mapsto (-x, -y)$는 매개변수에 π를 더하는 것이고, 현 PQ를 반 바퀴 회전하면 평행한 현이 되므로 결과와 잘 맞는다.
- 수치적으로, 임의의 a, b와 임의의 $p < q < r < s$를 잡아 확인하면, $r+s-p-q = 2\pi$인 경우(직접 만든 예 약 5000개)에는 기울기가 정확히 일치했고 그 밖의 경우에는 한 번도 일치하지 않았다.

흔한 실수

- $\cot\alpha = \cot\beta$에서 곧바로 $\alpha = \beta$로 넘어가는 것. 그러면 $r+s = p+q$가 되는데, 이는 여기서 불가능하다. cot의 주기가 바로 이 문제의 핵심이다.

- $\sin\frac{1}{2}(v-u)$를 약분할 수 있는 이유를 밝히지 않거나, 순서 $p<q<r<s$를 이용해 $k=0$과 $k=2$를 배제하지 않는 것.

STEP 너머

타원을 $(a\cos t, b\sin t)$로 나타내면, 타원은 단위원을 늘이기(stretch) $(x,y)\mapsto(ax,by)$로 옮긴 상임을 알 수 있다. 이와 같은 선형사상(linear map)은 평행한 직선을 평행한 직선으로 보내므로, 이 문제는 사실 원에 관한 문제이다. 원에서는 각 p에서 각 q까지의 현이 각 $\frac{1}{2}(p+q)$의 반지름과 수직이므로, 결과는 거의 자명해진다. 사상이 보존하는 성질을 이용해 문제를 단순하게 만드는 이런 아이디어는 선형대수와 기하학 전반에 걸쳐 나타난다. 선형사상이 실제로 작동하는 모습을 보려면 Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수 입문)가 좋은 출발점이다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에는 삼각함수 항등식을 다루는 STEP 스타일의 연습 문제가 더 실려 있다.

풀이

STEP I 2010, 문제 4

순수수학 • 치환적분

STEP I 2010, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/10-s1-q4

핵심 아이디어

치환은 x와 $x+1$이 모두 같은 분모 t^2-1을 갖는 간단한 분수가 되도록 고른 것이며, 그 덕분에 두 식의 곱의 제곱근이 정확히 계산된다. 그러면 적분은 주어진 참고 사항의 표준적인 적분으로 바뀐다. 부피를 구할 때는 y를 제곱하면 쉬운 로그 두 개와 교차항(cross term)이 나오는데, 이 교차항이 바로 방금 구한 적분이다.

풀이

적분

$x>0$이라 하자. $t>1$인 치환(substitution) $x=\dfrac{1}{t^2-1}$은 정당하다. t에 대하여 풀면

$$t=\sqrt{1+\frac{1}{x}}=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}},$$

이고, t가 $(1,\infty)$ 전체를 움직일 때 x는 (감소하면서) $(0,\infty)$ 전체를 움직이며, 각 t에 대하여 x의 값이 하나씩 대응한다.

이제

$$x+1=\frac{1}{t^2-1}+1=\frac{t^2}{t^2-1}, \qquad \text{따라서} \qquad x(x+1)=\frac{t^2}{(t^2-1)^2}.$$

$t>1$이므로 t와 t^2-1은 모두 양수이고, 따라서

$$\sqrt{x(x+1)}=\frac{t}{t^2-1}.$$

? **생각해 보기** 제곱근을 구할 때 왜 $t>1$이 필요했는가?

제곱근은 결코 음수가 아니므로 $\sqrt{t^2/(t^2-1)^2} = |t|/|t^2-1|$이다. 조건 $t>1$ 덕분에 두 절댓값 기호를 모두 없앨 수 있다. 이것은 이 선택의 이유도 설명해 준다. $t^2-1>0$이 바로 $x>0$이 되게 하는 조건이다.

미분하면 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{2t}{(t^2-1)^2}$이다. 그러므로

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{t^2-1}{t}\cdot\left(-\frac{2t}{(t^2-1)^2}\right)\mathrm{d}t = -2\int \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t \\ &= -2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c = \ln\left(\frac{t+1}{t-1}\right) + c,\end{aligned}$$

여기서 $a=1$일 때의 참고 사항과, $t>1$이면 $(t-1)/(t+1)$이 양수라는 사실을 이용하였다.

이제 $t = \sqrt{x+1}/\sqrt{x}$를 이용하여 x로 되돌아가자. 분자와 분모에 $\sqrt{x}$를 곱하면

$$\frac{t+1}{t-1} = \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} = \frac{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)^2}{(x+1)-x} = \left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)^2,$$

이며, 여기서는 분자와 분모에 $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$를 곱하고 제곱의 차(difference of two squares) 공식을 이용하였다. 따라서

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}\,\mathrm{d}x = 2\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right) + c,$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

부피

$\sqrt{x} < \sqrt{x+1}$이면 $1/\sqrt{x} > 1/\sqrt{x+1}$이므로, $x>0$에서 곡선은 $y>0$이다. 따라서 곡선과 x축 사이의 영역을 회전시켜 생기는 부피(volume)는 $V = \pi\int y^2\,\mathrm{d}x$이다. 전개하면

$$y^2 = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{\sqrt{x(x+1)}},$$

이고, 마지막 항은 앞부분 피적분함수의 두 배이다. 따라서

$$V = \pi\Big[\ln x + \ln(x+1)\Big]_{1/8}^{9/16} - 2\pi\Big[2\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)\Big]_{1/8}^{9/16}.$$

적분 구간의 끝값은 제곱근이 깔끔하게 나오도록 정해져 있다.

- $x = \frac{9}{16}$일 때: $\sqrt{x} = \frac{3}{4}$, $\sqrt{x+1} = \frac{5}{4}$, 합은 2이고, $x(x+1) = \frac{225}{256}$이다.
- $x = \frac{1}{8}$일 때: $\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $\sqrt{x+1} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$, 합은 $\frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$이고, $x(x+1) = \frac{9}{64}$이다.

첫 번째 괄호는

$$\ln\frac{225}{256} - \ln\frac{9}{64} = \ln\left(\frac{225}{256}\cdot\frac{64}{9}\right) = \ln\frac{25}{4},$$

이고, 두 번째 괄호는

$$2\ln 2 - 2\ln\sqrt{2} = 2\ln 2 - \ln 2 = \ln 2.$$

그러므로

$$V = \pi \ln \frac{25}{4} - 2\pi \ln 2 = \pi \ln \frac{25}{4} - \pi \ln 4 = \pi \ln \frac{25}{16} = 2\pi \ln \frac{5}{4},$$

이고, 이것이 원하던 결과이다.

검산

- 답을 미분해 본다.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} 2\ln\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}\right) = \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}},$$

  괄호 안의 식이 $\dfrac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{x+1}}$와 같기 때문이다.

- 수치적으로, 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 $\pi \int_{1/8}^{9/16} y^2 \,\mathrm{d}x \approx 1.402052$이고, 이는 $2\pi \ln \frac{5}{4} \approx 1.402052$와 일치한다. 심프슨 공식으로 $\int_{1/8}^{9/16} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)}} = \ln 2 \approx 0.693147$도 확인할 수 있다.

흔한 실수

- $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$의 음의 부호를 빠뜨리는 것. 이 부호가 $\ln \frac{t-1}{t+1}$을 $\ln \frac{t+1}{t-1}$로 바꾸어 준다.
- y^2을 $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$로 전개하는 것. 교차항 $-2/\sqrt{x(x+1)}$이야말로 앞부분의 핵심이다.
- 부피 공식에서 인수 π를 빠뜨리거나 π 대신 2π를 쓰는 것.

STEP 너머

답 $2\ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})$은 사실 $2\,\mathrm{arsinh}\,\sqrt{x}$이다. $\mathrm{arsinh}\,u = \ln\left(u + \sqrt{u^2+1}\right)$이기 때문이다. 치환 $x = \sinh^2\theta$를 쓰면 한 줄 만에 같은 결과를 얻는다. 제곱근을 유리화하는 치환을 고르는 것은 체계적인 기법(오일러 치환(Euler substitutions))이며, x와 $\sqrt{ax^2+bx+c}$의 유리함수(rational function)의 적분은 모두 초등함수(elementary functions)로 계산할 수 있다는 결과의 바탕이 된다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제)에는 이와 같은 정신의 적분이 훨씬 더 많이 실려 있다.

풀이

STEP I 2010, 문제 5

순수수학 • 이항계수 항등식

> **STEP I 2010, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/10-s1-q5

핵심 아이디어

이 합들은 모두 $(1+x)^n$의 이항전개(binomial expansion)가 모습을 바꾼 것으로, 어떤 조작을 한 뒤에 $x=1$을 대입한 값이다. $\binom{n}{k}$ 앞에 붙은 인수 k는 x^k를 미분(differentiate)하면 생기는 것이고, 인수 $\frac{1}{k+1}$은 x^k를 적분(integrate)하면 생기는 것이다. 따라서 항등식

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

을 미분하거나 적분한 다음 $x=1$을 대입하면 된다. k^2의 경우에는 두 번 미분해야 하며, 그 사이에 x를 한 번 곱해 준다.

풀이

이 풀이 전체에서 n은 양의 정수이고,

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n \qquad (*)$$

은 모든 실수 x에 대하여 성립한다. 양변이 모두 다항식(polynomial)이므로 항별로 미분하거나 적분해도 항등식은 그대로 성립한다.

소문항 (i)

$(*)$에 $x=1$을 대입한다. 좌변은 2^n이 되고 각 x^k는 1이 되므로

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

소문항 (ii)

$(*)$를 x에 대하여 미분한다. 상수항은 사라지고 $\binom{n}{k}x^k$는 $k\binom{n}{k}x^{k-1}$이 된다.

$$n(1+x)^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}x + 3\binom{n}{3}x^2 + \cdots + n\binom{n}{n}x^{n-1}. \qquad (**)$$

$x = 1$을 대입하면

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n} = n\,2^{n-1},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

소문항 (iii)

이번에는 $\binom{n}{k}$를 $k+1$로 나눈 값이 필요한데, 이는 $\int_0^1 x^k\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k+1}$에서 얻을 수 있다. $(*)$를 0부터 1까지 적분하면 좌변은

$$\int_0^1 (1+x)^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{2^{n+1}-1}{n+1},$$

이고 우변은

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\int_0^1 x^k\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}.$$

이다. 따라서

$$\binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n} = \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right),$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. 아래끝이 중요하다는 점에 주의한다. -1은 0부터 적분하기 때문에 생기는 것이다.

소문항 (iv)

> ? **생각해 보기** $(**)$를 그대로 한 번 더 미분하면 계수가 k^2이 아니라 $k(k-1)$이 된다. 어떻게 하면 k^2을 얻을 수 있을까?

두 번째로 미분하기 전에 $(**)$에 x를 곱한다. 그러면 $k\binom{n}{k}$와 함께 거듭제곱 x^k가 되살아나므로, 다음 미분에서 정확히 k라는 인수가 하나 더 내려온다.

$$nx(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^k.$$

좌변에 곱의 미분법(product rule)을 써서 미분하면

$$n(1+x)^{n-1} + n(n-1)x(1+x)^{n-2} = \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}x^{k-1}.$$

이다. ($n = 1$일 때 좌변의 둘째 항은 인수 $n - 1 = 0$을 가지므로 그냥 없는 것이 되며, 항등식은 여전히 성립한다.) 이제 $x = 1$을 대입하면

$$\begin{aligned}\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + 3^2\binom{n}{3} + \cdots + n^2\binom{n}{n} &= n\,2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} \\ &= n\,2^{n-2}\big(2 + (n-1)\big) \\ &= n(n+1)2^{n-2},\end{aligned}$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

다른 방법으로 $k^2 = k(k-1) + k$로 쓸 수도 있다. $(*)$를 두 번 미분하고 $x = 1$을 대입하면 $\sum k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}$를 얻고, 여기에 소문항 (ii)의 결과를 더하면 같은 답이 나온다.

검산

계수가 $1, 3, 3, 1$인 $n = 3$의 경우를 보자.

- (i) $1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$.
- (ii) $3 + 6 + 3 = 12 = 3 \cdot 2^2$.
- (iii) $1 + \frac{3}{2} + 1 + \frac{1}{4} = \frac{15}{4} = \frac{1}{4}(2^4 - 1)$.
- (iv) $3 + 12 + 9 = 24 = 3 \cdot 4 \cdot 2$.

또한 1부터 40까지의 모든 n에 대하여 네 항등식을 분수로 정확히 계산하여 확인하였다.

흔한 실수

- (iii)에서 아래끝에서 나오는 값을 빠뜨려 $\frac{2^{n+1}}{n+1}$을 얻는 실수.
- (iv)에서 $(**)$를 바로 미분하여 $\sum k^2\binom{n}{k}$가 아니라 $\sum k(k-1)\binom{n}{k}$를 얻는 실수.

STEP 너머

이 항등식들은 확률적인 의미를 가진다. 공정한 동전을 n번 던져 나온 앞면의 개수를 X라 하면 $\mathrm{P}(X = k) = \binom{n}{k}/2^n$이므로, 소문항 (ii)는 $\mathrm{E}(X) = \frac{n}{2}$를, 소문항 (iv)는 $\mathrm{E}(X^2) = \frac{n(n+1)}{4}$를 뜻하며, 이로부터 $\mathrm{Var}(X) = \frac{n}{4}$를 얻는다. 생성함수(generating function)를 미분하여 적률(moment)을 뽑아내는 것은 대학 1학년 과정의 표준적인 기법이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)에서 이를 제대로 다룬다.

풀이

STEP I 2010, 문제 6

순수수학 • 계수 내림법

> **STEP I 2010, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/10-s1-q6

핵심 아이디어

선형 2계 방정식(linear second-order equation)의 해를 하나 알고 있을 때, 일반해를 그 알려진 해와 미지의 함수 u의 곱으로 쓰면 (u의 도함수가 아닌) u 자체를 포함하는 항이 모두 소거된다. 남는 것은 u'과 u''만 포함하므로, 이는 사실상 $v = u'$에 대한 1계 방정식이고, 이 방정식은 변수분리형(separable)이다. 이 기법을 **계수 내림법**(*reduction of order*)이라고 한다.

풀이

$y = \mathrm{e}^x$가 해임을 확인하기

$y = \mathrm{e}^x$이면 $y' = y'' = \mathrm{e}^x$이므로

$$(x-1)\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x = (x - 1 - x + 1)\mathrm{e}^x = 0,$$

이고, 따라서 $y = \mathrm{e}^x$는 $(*)$를 만족한다.

u에 대한 방정식

$y = u\mathrm{e}^x$라 하자. 곱의 미분법(product rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (u' + u)\,\mathrm{e}^x,$$
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = (u'' + u')\,\mathrm{e}^x + (u' + u)\,\mathrm{e}^x = (u'' + 2u' + u)\,\mathrm{e}^x.$$

이를 $(*)$의 좌변에 대입하고 인수 e^x를 묶어 내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^x\left[(x-1)(u''+2u'+u)-x(u'+u)+u\right]\\&\quad=\mathrm{e}^x\left[(x-1)u''+(2x-2-x)u'+(x-1-x+1)u\right]\\&\quad=\mathrm{e}^x\left[(x-1)u''+(x-2)u'\right].\end{aligned}$$

u를 포함하는 항들은 $y=\mathrm{e}^x$를 확인할 때와 똑같이 소거된다(그 확인은 $u=1$인 경우이다). e^x는 결코 0이 아니므로, $y=u\mathrm{e}^x$가 $(*)$를 만족할 필요충분조건은

$$(x-1)\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+(x-2)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=0,$$

이고, 이것이 바로 구하려던 $(**)$이다.

v를 구한 뒤 u 구하기

$v=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$로 두면 $(**)$는 다음 1계 방정식이 된다.

$$(x-1)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=-(x-2)\,v.$$

$v=0$은 하나의 해이다. 그렇지 않은 경우, $x\neq1$이고 $v\neq0$인 구간에서 변수를 분리하면

$$\int\frac{1}{v}\,\mathrm{d}v=-\int\frac{x-2}{x-1}\,\mathrm{d}x.$$

? **생각해 보기** $\dfrac{x-2}{x-1}$는 어떻게 적분하는가?

분자를 분모를 이용해 나타낸다. $x-2=(x-1)-1$이므로

$$\frac{x-2}{x-1}=1-\frac{1}{x-1}.$$

따라서

$$\ln|v|=-x+\ln|x-1|+c,\qquad\text{그러므로}\qquad v=C(x-1)\mathrm{e}^{-x},$$

이고, 여기서 $C=\pm\mathrm{e}^c$이다. $C=0$도 허용하면 해 $v=0$도 포함되므로, 임의의 상수 C에 대해 $v=C(x-1)\mathrm{e}^{-x}$이다. (이것이 $x=1$을 포함한 모든 x에서 $(x-1)v'+(x-2)v=0$을 만족함은 직접 쉽게 확인할 수 있다.)

이제 적분하여 u를 구한다. $(x-1)$을 미분하고 e^{-x}를 적분하는 부분적분(integration by parts)을 하면

$$\begin{aligned}\int(x-1)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x&=-(x-1)\mathrm{e}^{-x}+\int\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\\&=-(x-1)\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x}=-x\mathrm{e}^{-x}.\end{aligned}$$

따라서 $u = -Cxe^{-x} + B$이다. $-C$를 A로 바꾸어 쓰면

$$u = Axe^{-x} + B,$$

이고, 여기서 A와 B는 임의의 상수이다.

마지막 부분

앞에서 u가 $(**)$를 만족하면 $y = ue^x$는 $(*)$를 만족함을 보였다. 우리가 구한 $u = Axe^{-x} + B$는 $(**)$를 만족하는데, 그 도함수 $v = -A(x-1)e^{-x}$가 v에 대한 방정식의 해이기 때문이다. 그러므로

$$y = ue^x = \left(Axe^{-x} + B\right)e^x = Ax + Be^x$$

는 임의의 상수 A, B에 대해 $(*)$를 만족하며, 이로써 증명이 끝난다.

검산

$y = x$를 직접 확인해 보자. $y' = 1$, $y'' = 0$이므로 $(*)$의 좌변은 $0 - x + x = 0$이다. $(*)$는 선형이므로, 두 해 x와 e^x의 임의의 결합 $Ax + Be^x$도 해가 된다. 수치로 확인해 보면, $A = 2$, $B = -1$, $x = 0.5$일 때 $y = 1 - e^{0.5} \approx -0.64872$, $y' = 2 - e^{0.5} \approx 0.35128$, $y'' = -e^{0.5} \approx -1.64872$이므로 $(-0.5)(-1.64872) - 0.5(0.35128) - 0.64872 = 0.82436 - 0.17564 - 0.64872 = 0$이다.

흔한 실수

- 곱의 미분법에 의해 y''에 (u'이 아니라) $2u'$이 나온다는 것을 잊는 실수.
- $\frac{x-2}{x-1}$에서 1을 먼저 떼어 내지 않고 곧바로 로그로 적분하는 실수.
- v를 적분하여 u를 구할 때 적분상수를 빠뜨리는 실수. 바로 그 상수 B가 원래의 해 e^x를 되살려 준다.

STEP 너머

계수 내림법은 임의의 선형 방정식 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$에 적용된다. y_1이 하나의 해이면 $y = uy_1$로 두었을 때 항상 u'에 대한 1계 방정식을 얻는다. 론스키안(Wronskian)에 대한 아벨(Abel)의 공식과 함께 쓰면, 해들이 2차원 벡터 공간(vector space)을 이룬다는 것을 보일 수 있다. 따라서 특이점(singular point) $x = 1$을 포함하지 않는 각 구간에서 $Ax + Be^x$는 실제로 이 방정식의 일반해이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에서 두 아이디어를 모두 다룬다.

풀이

STEP I 2010, 문제 7

순수수학 • 벡터와 교차하는 직선

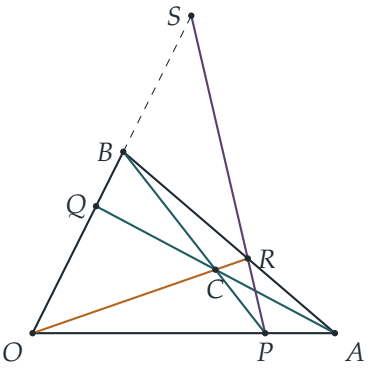
STEP I 2010, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/10-s1-q7

핵심 아이디어

O, A, B가 한 직선 위에 있지 않으므로(not collinear), 평면 위의 모든 점은 $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$의 꼴로 단 한 가지 방법으로 나타낼 수 있다. 따라서 두 직선의 교점을 구하려면 각 직선 위의 일반적인 점을 이 꼴로 쓰고 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$의 계수(coefficient)를 비교하면 된다. 한 점이 직선 OB 위에 있을 필요충분조건은 그 점의 $\mathbf{a}$의 계수가 0인 것이고, 직선 AB 위에 있을 필요충분조건은 두 계수의 합이 1인 것이다. 이 두 가지 사실이 거의 모든 일을 해 준다.



그림은 $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{7}{20}$인 경우이다. S는 직선 OB 위에 있지만 선분(segment) OB의 바깥에 있고, Q는 O와 B 사이에 있다는 점에 주목하자.

풀이

p와 q 구하기

직선 BC 위의 일반적인 점은

$$\mathbf{b} + \mu(\mathbf{c} - \mathbf{b}) = \mu\alpha\,\mathbf{a} + \big(1 - \mu(1-\beta)\big)\mathbf{b}.$$

이다. 직선 OA 위의 점은 $\mathbf{b}$ 성분이 없는 $\lambda\mathbf{a}$의 꼴이다. O, A, B가 한 직선 위에 있지 않으므로 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$는 평행하지 않고, 따라서 계수를 비교할 수 있다. $\mathbf{b}$의 계수가 0이어야 하므로 $\mu = \dfrac{1}{1-\beta}$이다. $\beta < 1 - \alpha < 1$이므로 $1 - \beta \neq 0$이고, 따라서 이렇게 해도 된다. 그러면

$$\mathbf{p} = \mu\alpha\,\mathbf{a} = \frac{\alpha\mathbf{a}}{1-\beta},$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

주어진 상황은 $A \leftrightarrow B$와 $\alpha \leftrightarrow \beta$를 서로 바꾸어도 대칭이므로(이때 $P \leftrightarrow Q$가 서로 바뀐다), 곧바로

$$\mathbf{q} = \frac{\beta\mathbf{b}}{1-\alpha}.$$

라고 쓸 수 있다.

점 R

먼저, $\mathbf{r} = \dfrac{1}{\alpha+\beta}\,\mathbf{c}$는 $\mathbf{c}$의 스칼라배이므로 R는 직선 OC 위에 있다.

다음으로, $t = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$로 두고 $\mathbf{r} = t\mathbf{a} + (1-t)\mathbf{b}$로 쓰자. 실제로 $1 - t = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}$이고, 이는 $\mathbf{r}$에서 $\mathbf{b}$의 계수이다. $t\mathbf{a} + (1-t)\mathbf{b} = \mathbf{b} + t(\mathbf{a} - \mathbf{b})$ 꼴의 점들은 정확히 직선 AB 위의 점들이므로, R는 AB 위에도 있다.

점 S

직선 PR 위의 일반적인 점은 $\mathbf{p} + t(\mathbf{r} - \mathbf{p})$이고, 이는

$$\left[\frac{\alpha}{1-\beta} + t\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta} - \frac{\alpha}{1-\beta}\right)\right]\mathbf{a} \;+\; \frac{t\beta}{\alpha+\beta}\,\mathbf{b}.$$

와 같다. 이 점이 OB 위에 있으려면 $\mathbf{a}$의 계수가 0이어야 한다. $\alpha \neq 0$으로 나누면

$$\frac{1}{1-\beta} = t \cdot \frac{(\alpha+\beta) - (1-\beta)}{(1-\beta)(\alpha+\beta)}, \qquad \text{따라서} \qquad t = \frac{\alpha+\beta}{\alpha+2\beta-1}.$$

를 얻는다. (문제에서 두 직선이 만난다고 했으므로 반드시 $\alpha + 2\beta \neq 1$이다. $\alpha + 2\beta = 1$이면 PR는 OB와 평행하다.) 그러므로

$$\mathbf{s} = \frac{t\beta}{\alpha+\beta}\,\mathbf{b} = \frac{\beta}{\alpha+2\beta-1}\,\mathbf{b}.$$

이다.

생각해 보기 위치벡터(position vector) $k\mathbf{b}$로부터 O까지의 거리와 B까지의 거리의 비를 어떻게 구할까?

X의 위치벡터가 $k\mathbf{b}$이면 $\overrightarrow{OX} = k\mathbf{b}$이고 $\overrightarrow{BX} = (k-1)\mathbf{b}$이므로

$$\frac{OX}{BX} = \frac{|k|}{|1-k|}.$$

이다. 그림의 S처럼 k가 음수이거나 1보다 클 수 있으므로 절댓값이 중요하다.

비

Q의 경우 $k = \dfrac{\beta}{1-\alpha}$이고, $0 < \beta < 1-\alpha$이므로 $0 < k < 1$이다. 그러면 $1-k = \dfrac{1-\alpha-\beta}{1-\alpha}$이므로

$$\frac{OQ}{BQ} = \frac{\beta}{1-\alpha-\beta}.$$

이다. S의 경우 $k = \dfrac{\beta}{\alpha+2\beta-1}$이므로

$$1-k = \frac{\alpha+2\beta-1-\beta}{\alpha+2\beta-1} = \frac{\alpha+\beta-1}{\alpha+2\beta-1}, \qquad \frac{k}{1-k} = \frac{\beta}{\alpha+\beta-1} = -\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}.$$

이다. 절댓값을 취하고 $\beta > 0, 1-\alpha-\beta > 0$임을 이용하면

$$\frac{OS}{BS} = \left|\frac{k}{1-k}\right| = \frac{\beta}{1-\alpha-\beta} = \frac{OQ}{BQ}.$$

이다. 이로써 증명이 끝난다. 절댓값을 취하기 전의 음의 부호는 Q가 OB를 내분하고 S가 같은 비로 OB를 외분한다는 것을 말해 준다.

검산

- $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{7}{20}$(그림의 경우)을 대입해 보자. 그러면 $\mathbf{q} = 0.7\mathbf{b}$, $\mathbf{s} = 1.75\mathbf{b}$이므로 $OQ/BQ = 0.7/0.3 = \frac{7}{3}$이고 $OS/BS = 1.75/0.75 = \frac{7}{3}$이다. 공식으로는 $\beta/(1-\alpha-\beta) = 0.35/0.15 = \frac{7}{3}$이다.
- 임의의 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, α, β에 대해 두 직선의 방정식을 연립하여 네 교점을 모두 직접 계산하고 공식과 비교했으며, 두 비가 일치하는지도 확인했다. 8000개가 넘는 경우에서 모두 일치했다.
- 대칭성: $\alpha \leftrightarrow \beta$와 $\mathbf{a} \leftrightarrow \mathbf{b}$를 서로 바꾸면 $\mathbf{p}$의 공식이 $\mathbf{q}$의 공식이 되며, 당연히 그래야 한다.

흔한 실수

- 절댓값을 빠뜨리는 것. **s**의 계수는 음수이거나 1보다 클 수 있으므로, 부주의하게 $k/(1-k)$를 계산하면 음수인 "길이의 비"가 나온다.
- 왜 그렇게 해도 되는지 밝히지 않고 **a**와 **b**의 계수를 비교하는 것. 계수 비교가 가능한 것은 **a**와 **b**가 평행하지 않기 때문이다.

STEP 너머

점 Q와 S는 OB를 같은 비로 내분하고 외분하므로, O와 B에 대한 **조화켤레**(*harmonic conjugates*)이다. 여기 나온 도형, 즉 네 직선과 그 교점들은 고전적인 **완전사변형**(*complete quadrilateral*)이다. 조화분할은 사영에 의해 보존되며, 사영기하학(projective geometry)의 핵심 아이디어 가운데 하나이다. 점을 두 개의 독립인 벡터로 나타내고 계수를 비교하는 습관은 선형대수학(linear algebra)의 출발점이며, 선형대수학에서는 이것이 기저(basis)라는 개념이 된다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)가 이 측면을 다룬다.

풀이

STEP I 2010, 문제 8

순수수학 • 무한 강하법

> **STEP I 2010, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/10-s1-q8

핵심 아이디어

두 소문항 모두 **무한 강하법**(infinite descent)이라는 같은 기법을 사용한다. 먼저 방정식을 어떤 소수(prime)를 법(modulo)으로 하여 살펴보면(소문항 (i)에서는 3, 소문항 (ii)에서는 5), 그 소수가 모든 미지수를 나누어야 함을 알 수 있다. 그 소수로 나누어 내면 **정확히 같은 방정식**의 더 작은 해가 얻어지는데, 영이 아닌 정수를 3(또는 5)으로 끝없이 나눌 수는 없다. 실제로 해야 할 일은 어떤 나머지(residue)가 가능한지 알아내는 것뿐이며, 소문항 (ii)에서는 네제곱수(fourth power)의 일의 자리 숫자가 그 일을 대신해 준다.

풀이

소문항 (i)

식을 정리하면

$$a^3 = 9c^3 - 3b^3 = 3\left(3c^3 - b^3\right),$$

이므로 3은 a^3을 나눈다. 3은 소수이므로 곱 $a \cdot a \cdot a$를 나누면 그 인수 중 하나를 나누고, 따라서 $3 \mid a$이다.

a_1이 정수일 때 $a = 3a_1$로 쓰자. 대입하고 3으로 나누면

$$27a_1^3 + 3b^3 = 9c^3 \quad \Longrightarrow \quad 9a_1^3 + b^3 = 3c^3,$$

이므로 $b^3 = 3\left(c^3 - 3a_1^3\right)$은 3으로 나누어떨어지고, 앞에서와 마찬가지로 $3 \mid b$이다. $b = 3b_1$로 쓰면

$$9a_1^3 + 27b_1^3 = 3c^3 \quad \Longrightarrow \quad c^3 = 3\left(a_1^3 + 3b_1^3\right),$$

이므로 $3 \mid c$이기도 하다. 이로써 a, b, c가 모두 3으로 나누어떨어짐을 보였다.

이제 $c = 3c_1$로도 쓰자. 마지막 방정식은 $27c_1^3 = 3a_1^3 + 9b_1^3$, 즉

$$a_1^3 + 3b_1^3 = 9c_1^3.$$

이 된다.

> **생각해 보기** 3이 모든 것을 나눈다는 것을 보였다. 그런데 왜 이로부터 모든 것이 영이어야 한다는 결론이 나올까?

$(a_1, b_1, c_1) = (a/3, b/3, c/3)$ 역시 **원래** 방정식의 정수해이므로, 방금 증명한 모든 것이 이 해에도 그대로 적용되기 때문이다. 즉 a_1, b_1, c_1은 3으로 나누어떨어지고, 다시 말해 a, b, c는 9로 나누어떨어진다. 이 논증을 k번 반복하면 모든 $k \geq 1$에 대하여 3^k이 a, b, c를 각각 나눈다. 그런데 영이 아닌 정수 n은 $3^k > |n|$이 되면 3^k으로 나누어떨어지지 않는다. 따라서 $a = b = c = 0$이고, 이것은 분명히 해이므로 유일한 해이다.

(같은 내용을 이렇게 말할 수도 있다. $(0,0,0)$이 아닌 해가 있다면, 그중에서 $|a| + |b| + |c|$가 양수이면서 가장 작은 것을 고르자. 그러면 $(a/3, b/3, c/3)$은 그보다 더 작은 양의 값을 갖는 해가 되어 모순이다.)

소문항 (ii)

$p^4 = |p|^4$이므로 p^4의 일의 자리 숫자는 $|p|$의 일의 자리 숫자에만 의존한다.

n의 일의 자리 숫자	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^4의 일의 자리 숫자	0	1	6	1	6	5	6	1	6	1

(예를 들어 $2^4 = 16, 3^4 = 81, 7^4 = 2401$이다.) 따라서 네제곱수의 일의 자리 숫자는 0, 1, 5, 6 중 하나이고, 일의 자리가 0 또는 5인 것은 정확히 $5 \mid n$일 때이다.

이제 각 항의 일의 자리 숫자를 살펴보자.

- $5r^4$은 5의 배수이므로 일의 자리가 0 또는 5이다.
- $2q^4$의 일의 자리는 (q^4의 일의 자리가 0 또는 5이면) 0이고, (q^4의 일의 자리가 1 또는 6이면) 2이다.
- p^4의 일의 자리는 0, 1, 5, 6 중 하나이다.

$\{0,1,5,6\}$에 속하는 일의 자리 숫자와 $\{0,2\}$에 속하는 일의 자리 숫자를 더하면 $0,1,5,6,2,3,7,8$ 중 하나가 된다. 0 또는 5가 나오는 경우는 $0+0$과 $5+0$뿐이다. 따라서 $2q^4$의 일의 자리는 0이고, 이는 q^4의 일의 자리가 0 또는 5, 즉 $5 \mid q$라는 뜻이다. 또 p^4의 일의 자리는 0 또는 5, 즉 $5 \mid p$이다. 이로써 p와 q가 5로 나누어떨어짐을 보였다.

(다른 방법: 페르마의 소정리(Fermat's little theorem)에 의해 $5 \nmid n$일 때 $n^4 \equiv 1 \pmod 5$이므로, $p^4 + 2q^4$는 법 5에 대하여 $0+0, 1+0, 0+2, 1+2$ 중 하나와 합동이고, 이 중 0인 것

은 첫 번째뿐이다.)

$p = 5p_1, q = 5q_1$로 쓰자. 그러면

$$625(p_1^4 + 2q_1^4) = 5r^4 \quad \Longrightarrow \quad r^4 = 125(p_1^4 + 2q_1^4),$$

이므로 $5 \mid r^4$이고, 5는 소수이므로 $5 \mid r$이다. $r = 5r_1$로 쓰면

$$625r_1^4 = 125(p_1^4 + 2q_1^4) \quad \Longrightarrow \quad p_1^4 + 2q_1^4 = 5r_1^4.$$

따라서 $(p/5, q/5, r/5)$ 역시 같은 방정식의 정수해이다.

소문항 (i)에서와 똑같이, 이를 반복하면 모든 k에 대하여 5^k이 p, q, r을 각각 나누는데, 이는 영이 아닌 정수에 대해서는 불가능하다. 따라서 유일한 정수해는 $p = q = r = 0$이다.

검산

컴퓨터로 탐색해 보면 $|a|, |b|, |c| \leq 60$인 범위에서 $a^3 + 3b^3 = 9c^3$의 해는 $(0, 0, 0)$ 말고는 없고, $|p|, |q|, |r| \leq 150$인 범위에서 $p^4 + 2q^4 = 5r^4$의 해도 마찬가지로 없다. p와 q의 일의 자리 숫자 쌍 100가지를 모두 확인하면, $p^4 + 2q^4$의 일의 자리가 0 또는 5인 것은 두 일의 자리 숫자가 모두 0 또는 5일 때뿐임을 알 수 있다. 손으로 간단히 확인해 보면, $p = q = 1$일 때 $p^4 + 2q^4 = 3$이며, 표에서 예측한 대로 5의 배수가 아니다.

흔한 실수

- 3(또는 5)이 각 미지수를 나눈다는 것을 보이고 멈추는 것. 그것만으로는 영이라는 결론이 나오지 않는다. 핵심은 나누어 내면 **같은** 방정식의 해가 얻어지므로 논증이 반복된다는 점이다.
- "$3 \mid a^3$"에서 "$3 \mid a$"로 이유 없이 넘어가는 것. 이것이 성립하는 이유는 3이 소수이기 때문이다. 예를 들어 $9 \mid a^3$이면 $9 \mid a$라는 주장은 성립하지 않는다($a = 3$을 대입해 보라).
- 일의 자리 숫자를 나열할 때 음의 정수를 잊는 것. 네제곱은 짝수 거듭제곱이므로 $p^4 = |p|^4$이고, 따라서 표가 모든 경우를 다룬다.

STEP 너머

무한 강하법은 페르마까지 거슬러 올라간다. 페르마는 이 방법으로 $x^4 + y^4 = z^2$이 양의 정수해를 갖지 않음을 증명했다(따라서 페르마의 마지막 정리(Fermat's Last Theorem)의 $n = 4$인 경우도 증명된다). 여기서 사용한 아이디어, 즉 소수의 거듭제곱을 법으로 하여 자명하지 않은 해(non-trivial solution)가 없는 방정식은 자명하지 않은 정수해도 가질 수 없

다는 생각은 p진수(p-adic number)와 하세 원리(Hasse principle)에 대한 연구로 발전한다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 합동식(congruence)과 강하법을 아름답게 소개하는 입문서이다.

풀이

STEP I 2010, 문제 9

역학 • 마찰과 평형

> **STEP I 2010, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/10-s1-q9

핵심 아이디어

바닥에 닿은 꼭짓점을 알려진 위치에 두고, 서로 수직인 두 변을 따라 질량중심(centre of mass)까지 걸어가 보면 벽으로부터의 거리를 얻는다. 평형(equilibrium)에 대해서는 "두 접촉점 모두에서 한계 상태"라는 조건 때문에 각 마찰력이 그 수직항력(normal reaction)의 μ배로 정해지므로, 두 방향의 힘의 분해(resolution)로부터 두 수직항력을 모두 무게로 나타낼 수 있다. 그런 다음 모멘트(moment) 방정식 하나로 마무리하고, $\mu = \tan\lambda$로 두면 계산이 삼각함수의 덧셈정리(compound-angle formulae)로 바뀐다.

풀이

모형

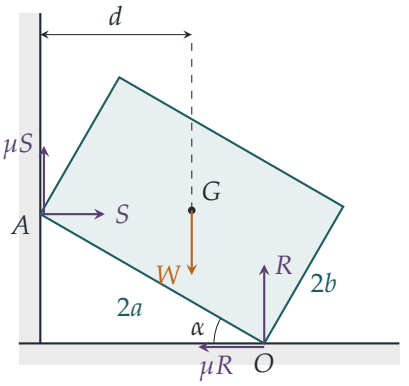
이 얇은 판(lamina)은 무게가 W인 균일한 강체 직사각형이므로, 질량중심 G는 직사각형의 중심이다. 바닥에 닿은 꼭짓점을 O, 벽에 닿은 꼭짓점을 A라 하자. 그러면 OA는 길이가 $2a$이고 바닥과 각 α를 이루는 변이며, O에서 나오는 길이 $2b$의 변은 벽에서 멀어지는 쪽 위를 향한다. 작용하는 힘은 다음과 같다.

- O에서: 위쪽으로 작용하는 수직항력 R과 수평 방향의 마찰력 F;
- A에서: 벽에서 멀어지는 수평 방향의 수직항력 S와 연직 방향의 마찰력 P;
- G에서 아래쪽으로 작용하는 무게 W.

판은 O가 벽에서 멀어지는 쪽으로 미끄러지고 A가 벽을 따라 아래로 미끄러지기 직전에 있으므로, 마찰력은 이 운동을 방해한다. 즉 F는 벽 쪽으로, P는 위쪽으로 작용한다. 두 접촉

점 모두에서 마찰이 최대 정지 마찰(limiting friction) 상태이므로

$$F = \mu R, \qquad P = \mu S.$$



벽으로부터 질량중심까지의 거리

OA는 길이가 $2a$이고 수평과 각 α를 이루므로, O는 벽으로부터 수평 거리 $2a\cos\alpha$만큼 떨어져 있다.

O에서 출발하여 O에서 만나는 두 변을 각각 절반씩 따라가면 G에 도달한다. OA를 따라 (벽 쪽으로) a만큼 가면 벽 쪽으로 $a\cos\alpha$만큼 이동한다. 길이 $2b$의 변은 OA에 수직이므로 수평과 각 $\frac{1}{2}\pi - \alpha$를 이루며 벽에서 멀어지는 쪽으로 기울어 있다. 이 변을 따라 b만큼 가면 벽에서 멀어지는 쪽으로 $b\cos(\frac{1}{2}\pi - \alpha) = b\sin\alpha$만큼 이동한다. 따라서 벽으로부터 G까지의 거리는

$$d = 2a\cos\alpha - a\cos\alpha + b\sin\alpha = a\cos\alpha + b\sin\alpha,$$

이며, 이것이 구하려던 결과이다. 같은 방법으로, G는 바닥으로부터 높이 $a\sin\alpha + b\cos\alpha$에 있고, A는 바닥으로부터 높이 $2a\sin\alpha$에 있다.

평형 조건

힘을 수평 방향과 연직 방향으로 분해하면

$$S = \mu R,$$
$$R + \mu S = W.$$

첫째 식을 둘째 식에 대입하면 $R(1+\mu^2) = W$이므로

$$R = \frac{W}{1+\mu^2}, \qquad S = \frac{\mu W}{1+\mu^2}.$$

이제 O에 대한 모멘트를 구하면 R와 μR가 사라진다. 수평 방향으로 G는 O보다 $2a\cos\alpha - d = a\cos\alpha - b\sin\alpha$만큼 벽에 더 가까우므로, 무게의 모멘트는 $W(a\cos\alpha - b\sin\alpha)$이고 판

을 벽 쪽으로 돌리려 한다. A에서 힘 S는 O보다 높이 $2a\sin\alpha$만큼 위에 있는 직선을 따라 작용하고, μS는 O로부터 수평 거리 $2a\cos\alpha$만큼 떨어진 벽을 따라 작용한다. 두 힘 모두 판을 벽에서 멀어지는 쪽으로 돌리려 한다. 따라서

$$W(a\cos\alpha - b\sin\alpha) = S\cdot 2a\sin\alpha + \mu S\cdot 2a\cos\alpha = \frac{2a\mu W(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}{1+\mu^2}. \qquad (*)$$

? **생각해 보기** $\mu=\tan\lambda$로 두면 우변이 어떻게 깔끔해지는가?

$\mu=\tan\lambda$이면 $1+\mu^2=\sec^2\lambda$이므로

$$\frac{\mu}{1+\mu^2} = \tan\lambda\cos^2\lambda = \sin\lambda\cos\lambda,$$
$$\sin\alpha+\mu\cos\alpha = \frac{\sin\alpha\cos\lambda+\cos\alpha\sin\lambda}{\cos\lambda} = \frac{\sin(\alpha+\lambda)}{\cos\lambda}.$$

따라서 $(*)$의 우변은 $2aW\sin\lambda\sin(\alpha+\lambda)$이다. W를 약분하고 $P=\alpha+\lambda$, $Q=\lambda$로 두어 $2\sin P\sin Q=\cos(P-Q)-\cos(P+Q)$를 이용하면

$$\begin{aligned} b\sin\alpha &= a\cos\alpha - 2a\sin\lambda\sin(\alpha+\lambda)\\ &= a\cos\alpha - a\big(\cos\alpha-\cos(\alpha+2\lambda)\big)\\ &= a\cos(2\lambda+\alpha), \end{aligned}$$

이며, 이것이 구하려던 결과이다.

정사각형 판

판이 정사각형이면 $b=a$이고, $a\neq 0$으로 나누면

$$\cos(2\lambda+\alpha) = \sin\alpha = \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi-\alpha\right).$$

따라서 어떤 정수 k에 대하여 $2\lambda+\alpha = \pm\left(\frac{1}{2}\pi-\alpha\right)+2k\pi$이다. 올바른 경우를 골라야 한다. 여기서 $0<\alpha<\frac{1}{2}\pi$이고(판이 기대어 있으므로), $\mu>0$이므로 $0<\lambda<\frac{1}{2}\pi$이다. 따라서 $0<2\lambda+\alpha<\frac{3}{2}\pi$이다.

- $+$ 부호이면 $2\lambda+\alpha=\frac{1}{2}\pi-\alpha+2k\pi$이다. $\frac{1}{2}\pi-\alpha$가 $(0,\frac{1}{2}\pi)$에 있으므로 $(0,\frac{3}{2}\pi)$에 들어가는 것은 $k=0$뿐이고, 이때 $\lambda=\frac{1}{4}\pi-\alpha$이다.
- $-$ 부호이면 $2\lambda=-\frac{1}{2}\pi+2k\pi$, 즉 $\lambda=-\frac{1}{4}\pi+k\pi$이고, 이러한 값 중 $(0,\frac{1}{2}\pi)$에 있는 것은 없다.

따라서 구하려던 대로 $\lambda=\frac{1}{4}\pi-\alpha$이다. (특히 이러한 한계 상태의 평형이 성립하려면 $\alpha<\frac{1}{4}\pi$이어야 하며, 이는 G가 O보다 벽 쪽에 있어야 한다는 조건 $a\cos\alpha>a\sin\alpha$와 일치한다.)

검산

- $\mu = 0$ ($\lambda = 0$)이면 조건은 $a\cos\alpha = b\sin\alpha$가 된다. 즉 G가 O의 바로 위에 있으며, 이는 정확히 판이 벽의 도움 없이 꼭짓점 위에서 균형을 잡을 수 있는 경우이다.
- $\alpha = 15°$인 정사각형에 대해 결과는 $\lambda = 30°$을 주므로 $\mu = 1/\sqrt{3} \approx 0.577$이다. $(*)$에 $a = b = 1, \alpha = \frac{\pi}{12}, \mu = 1/\sqrt{3}$을 대입하면 양변 모두 $W(\cos 15° - \sin 15°) \approx 0.707W$이다.
- 수치적으로, 무작위로 고른 직사각형과 각 2000개에 대해 힘과 모멘트 방정식으로부터 이분법(bisection)으로 μ를 구했고, $a\cos(2\lambda + \alpha) = b\sin\alpha$가 10^{-14} 이내의 오차로 성립함을 확인했다.

흔한 실수

- 마찰력의 방향을 잘못 잡는 것: 먼저 각 접촉점이 어느 쪽으로 미끄러지려 하는지 정한 다음, 그 반대 방향으로 잡아야 한다.
- **벽**으로부터의 거리 $a\cos\alpha + b\sin\alpha$를 O에 대한 모멘트 팔로 쓰는 것: O에 대한 팔의 길이는 $a\cos\alpha - b\sin\alpha$이다.
- $\lambda = \frac{3}{4}\pi$도 삼각방정식의 해라는 사실을 잊는 것: 이 값은 $\mu > 0$이면 $0 < \lambda < \frac{1}{2}\pi$이어야 하므로 제외된다.

STEP 너머

$\tan\lambda = \mu$를 만족하는 각 λ를 **마찰각**(angle of friction)이라 한다. 최대 정지 마찰 상태에서 전체 접촉력은 법선과 각 λ를 이룬다. 깔끔한 다른 접근법은 세 힘을 받아 평형을 이루는 강체에서는 세 힘의 작용선이 한 점에서 만나야(concurrent) 한다는 사실을 이용하는 것이다. 즉 두 전체 접촉력과 무게가 한 점에서 만나야 하므로, 문제가 순수한 기하 문제로 바뀐다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 뉴턴 역학의 나머지 내용과 함께 강체의 정역학과 마찰을 다룬다.

풀이

STEP I 2010, 문제 10

역학 • 벡터 운동학

> **STEP I 2010, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/10-s1-q10

핵심 아이디어

모든 것은 $\mathbf{r}$을 미분(differentiate)하고 내적(dot product)을 계산하는 데서 나온다. 두 벡터 사이의 각은 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$에서 얻고, 수직(perpendicular)이라는 것은 내적이 0이라는 뜻이다. 두 번째 입자에 대해서는 시각 t에서 Q의 위치가 정확히 시각 $t-T$에서 P가 있던 위치라는 관찰이 유용하다. 위치를 복소수(complex number) $z = \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}$로 쓰면 마지막 부분은 한 줄짜리 계산이 된다.

풀이

속도와 가속도

$\mathbf{r} = \mathrm{e}^t(\cos t,\ \sin t)$라 하자. 곱의 미분법(product rule)에 의해

$$\begin{aligned}\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} &= \mathrm{e}^t\big(\cos t - \sin t,\ \sin t + \cos t\big),\\ \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} &= \mathrm{e}^t\big((\cos t - \sin t) + (-\sin t - \cos t),\ (\sin t + \cos t) + (\cos t - \sin t)\big)\\ &= \mathrm{e}^t\big(-2\sin t,\ 2\cos t\big).\end{aligned}$$

속도와 변위 사이의 각

크기는 $|\mathbf{r}| = \mathrm{e}^t$이고

$$|\mathbf{v}|^2 = \mathrm{e}^{2t}\left[(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2\right] = \mathrm{e}^{2t}\cdot 2,$$

이다. 교차항 $\mp 2\sin t\cos t$가 상쇄되기 때문이다. 따라서 $|\mathbf{v}| = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^t$이다. 내적은

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{v} = \mathrm{e}^{2t}\left[\cos t(\cos t - \sin t) + \sin t(\sin t + \cos t)\right] = \mathrm{e}^{2t}(\cos^2 t + \sin^2 t) = \mathrm{e}^{2t}.$$

이다. 그러므로 θ를 $\mathbf{r}$과 $\mathbf{v}$ 사이의 각이라 하면

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{r}||\mathbf{v}|} = \frac{e^{2t}}{e^t\cdot\sqrt{2}\,e^t} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

이므로, 요구한 대로 모든 t에 대하여 $\theta = \frac{\pi}{4}$이다. ($e^t > 0$이므로 두 벡터 모두 결코 영벡터가 되지 않고, 따라서 각은 항상 정의된다.)

가속도는 변위에 수직이다

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{a} = e^{2t}\left[-2\sin t\cos t + 2\sin t\cos t\right] = 0,$$

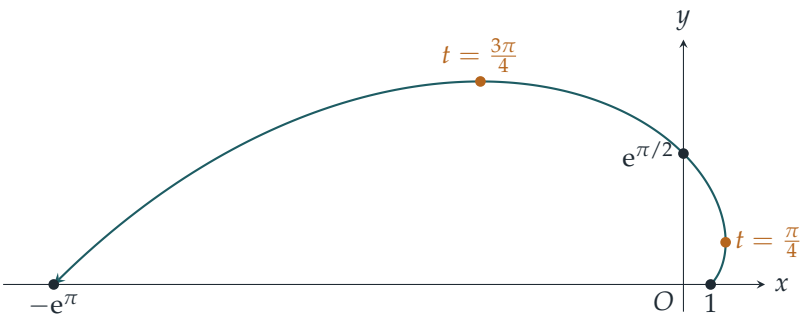
이고 두 벡터 모두 영벡터가 아니므로, $\mathbf{a}$는 항상 $\mathbf{r}$에 수직이다. 또한 $\mathbf{a} = 2e^t(-\sin t, \cos t)$는 $\mathbf{r}$을 $\frac{\pi}{2}$만큼 회전시키고 두 배로 늘인 것임에 주목하자.

$0 \le t \le \pi$에서의 경로

극좌표(polar coordinates)로 나타내면 경로는 $\theta = t$일 때 $r = e^\theta$이다. 즉 입자가 시계 반대 방향으로 돌면서 O로부터의 거리가 지수적으로 커지는 **등각** 나선(equiangular spiral), 곧 로그 나선(logarithmic spiral)이다. 유용한 기준점은 다음과 같다.

- $t = 0$: 점 $(1,0)$에서 방향 $(1,1)$로, 즉 x축과 $\frac{\pi}{4}$의 각을 이루며 움직인다.
- $t = \frac{\pi}{4}$: $\dot{x} = e^t(\cos t - \sin t) = 0$이므로 x가 최대이고, 그 점은 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\pi/4}, \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\pi/4}\right) \approx (1.55, 1.55)$이다.
- $t = \frac{\pi}{2}$: 점 $(0, e^{\pi/2}) \approx (0, 4.81)$.
- $t = \frac{3\pi}{4}$: $\dot{y} = e^t(\sin t + \cos t) = 0$이므로 y가 최대이고, 그 점은 $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{3\pi/4}, \frac{1}{\sqrt{2}}e^{3\pi/4}\right) \approx (-7.46, 7.46)$이다.
- $t = \pi$: 점 $(-e^\pi, 0) \approx (-23.1, 0)$에서 축과 $\frac{\pi}{4}$의 각을 이루며 왼쪽 아래 방향으로 축을 가로지른다.

모든 점에서 경로는 O로부터의 동경과 $\frac{\pi}{4}$의 각으로 만나며, 이것이 경로의 모양을 결정한다.



두 번째 입자

? **생각해 보기** 시각 t에서 Q는 P의 운동으로 나타내면 어디에 있는가?

Q는 각 점에 P보다 T만큼 늦게 도달하므로, 시각 t에서 Q는 시각 $t-T$에 P가 있던 곳에 있다.

$$\mathbf{r}_Q(t) = \mathbf{r}(t-T) = \mathrm{e}^{t-T}\big(\cos(t-T),\ \sin(t-T)\big).$$

그러면

$$\begin{aligned}|PQ|^2 &= |\mathbf{r}(t)|^2 + |\mathbf{r}(t-T)|^2 - 2\,\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}(t-T)\\ &= \mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{2t-2T} - 2\mathrm{e}^{2t-T}\big(\cos t\cos(t-T) + \sin t\sin(t-T)\big)\\ &= \mathrm{e}^{2t}\big(1 - 2\mathrm{e}^{-T}\cos T + \mathrm{e}^{-2T}\big),\end{aligned}$$

이다. 여기서 $\cos t\cos(t-T) + \sin t\sin(t-T) = \cos\big(t-(t-T)\big) = \cos T$를 이용하였다. 따라서

$$|PQ| = k\,\mathrm{e}^t, \qquad k = \sqrt{1 - 2\mathrm{e}^{-T}\cos T + \mathrm{e}^{-2T}},$$

이고, k는 t가 아니라 T에만 의존한다. 그러므로 요구한 대로 P와 Q 사이의 거리는 e^t에 비례한다. (괄호 안의 식은 $|1-\mathrm{e}^{-T}\mathrm{e}^{\mathrm{i}T}|^2$이고, $T\neq 0$이면 $\mathrm{e}^{-T}\neq 1$이므로 양수이다. 따라서 $k>0$이다.)

복소수를 이용한 풀이. $z = x+\mathrm{i}y$라 하면 P는 $z_P = \mathrm{e}^t\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}$에, Q는 $z_Q = \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})(t-T)}$에 있다. 따라서

$$z_P - z_Q = \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}\big(1-\mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i})T}\big), \qquad |z_P - z_Q| = \mathrm{e}^t\,\big|1-\mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i})T}\big|.$$

이것은 또한 $\overrightarrow{QP}$가 z_P의 고정된 복소수배임을 보여 주므로, 선분 PQ는 OP와 일정한 각을 이룬다. 즉 삼각형 OQP는 같은 모양을 유지한 채 커지고 회전할 뿐이다.

검산

- $z = \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}$를 미분하면 $\dot z = (1+\mathrm{i})z$와 $\ddot z = (1+\mathrm{i})^2 z = 2\mathrm{i}z$를 얻는다. $1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$를 곱하는 것은 $\frac{\pi}{4}$만큼 회전시키는 것이고, $2\mathrm{i}$를 곱하는 것은 $\frac{\pi}{2}$만큼 회전시키는 것이다. 처음 두 결과를 한눈에 알 수 있다.
- 수치적으로 임의의 t에 대하여 $\mathbf{r}$과 $\mathbf{v}$ 사이의 각은 $0.785398\ldots = \frac{\pi}{4}$로 나왔고 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{a} = 0$이었다. $T=1$일 때 확인한 모든 t에서 $|PQ|/\mathrm{e}^t = 0.85895\ldots$였으며, 이는 $\sqrt{1-2\mathrm{e}^{-1}\cos 1+\mathrm{e}^{-2}}$와 일치한다.
- $T\to 0$일 때 $k\approx T\sqrt{2}$이므로 $|PQ|\approx\sqrt{2}\,\mathrm{e}^t T = |\mathbf{v}|T$이고, 이는 마땅히 그래야 하듯 시간 T 동안 이동한 거리이다.

흔한 실수

- Q의 위치를 $\mathbf{r}(t+T)$로 잡는 것. Q는 P의 **뒤**에 있으므로 $\mathbf{r}(t-T)$에 있다. (이 경우에도 답은 e^t에 비례하지만 상수가 달라진다.)
- 시계 방향으로 도는 나선을 그리거나 경로가 원점을 지나도록 그리는 것. O로부터의 거리는 $\mathrm{e}^t \geq 1$이며 입자가 시계 반대 방향으로 움직일수록 커진다.

STEP 너머

곡선 $r = \mathrm{e}^\theta$는 로그 나선이다. 이 곡선을 O를 중심으로 확대하거나 축소한 것은 모두 이 곡선을 회전한 것과 같으며, 바로 이 때문에 만나는 각이 일정하고 OQP가 모양을 유지한다. 대학 1학년 과정에서는 평면 운동을 흔히 극좌표 단위벡터 $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}$로 다루는데, 여기서는 동경 방향 가속도 $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$이 0이 되어 수직성이 바로 나온다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 바로 이런 종류의 문제를 위해 극좌표를 전개한다.

풀이

STEP I 2010, 문제 11

역학 • 원 위에서의 충돌

STEP I 2010, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

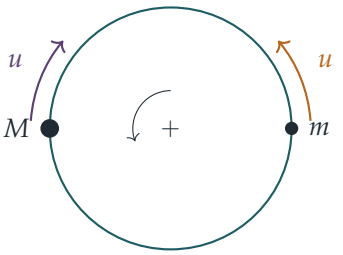
step.maths.org/questions/10-s1-q11

핵심 아이디어

입자들은 원 위를 움직이지만, 각 충돌은 공통 접선(common tangent)을 따라 일어나는 평범한 1차원 충돌이다. 매끄러운 홈은 운동 방향에 수직으로만 힘을 가하므로 속력을 바꿀 수 없고 접선 방향의 충격량(impulse)에도 영향을 주지 않는다. 따라서 원을 따라 잰 **부호 있는** 속도를 써서 운동량 보존(conservation of momentum)과 뉴턴의 실험 법칙(Newton's experimental law)을 적용한다. 그러고 나면 두 가지 사실이 모든 정보를 담는다. 부호 있는 운동량의 총합은 결코 변하지 않고, 상대 속력(relative speed)은 충돌할 때마다 e배가 된다.

풀이

입자들을 매끄러운 수평 홈 안의 점으로 모형화한다. 반시계 방향을 양의 방향으로 잡고, 처음에 m은 반시계 방향으로 속력 u, M은 시계 방향으로 속력 u로 움직인다고 하자. 그러면 두 입자의 부호 있는 속도는 u와 $-u$이다.



충돌과 충돌 사이에 각 입자에 작용하는 수평 방향의 힘은 매끄러운 홈의 수직항력(normal reaction)뿐이며, 이 힘은 속도에 수직이다. 이 힘은 일을 하지 않으므로 각 입자는 일정한 속력을 유지한다. 충돌할 때 두 입자가 서로에게 가하는 충격량은 공통 접선을 따라 작용하

고, 크기가 같고 방향이 반대이며, 홈은 접선 방향의 충격량을 주지 않는다. 따라서 각 충돌에서 원을 따라 잰 부호 있는 운동량의 총합은 변하지 않고, 뉴턴의 법칙은 부호 있는 속도에 대해 성립한다.

첫 번째 충돌

첫 번째 충돌 후의 부호 있는 속도를 p(m의 속도)와 q(M의 속도)라 하자. 운동량 보존과 뉴턴의 법칙에서

$$mp + Mq = mu - Mu,$$
$$q - p = e\big(u - (-u)\big) = 2eu.$$

$q = p + 2eu$를 첫 번째 식에 대입하면 $(m+M)p = (m-M)u - 2eMu$이므로

$$p = -\frac{u\,(M - m + 2eM)}{M+m}, \qquad q = p + 2eu = \frac{u\,\big(2em - (M-m)\big)}{M+m}.$$

따라서 첫 번째 충돌 후의 속력은 다음과 같다.

$$\text{속력}m = \frac{u\,(M - m + 2eM)}{M+m}, \qquad \text{속력}M = \frac{u\,|2em - (M-m)|}{M+m}.$$

? **생각해 보기** 어떤 부호가 입자의 운동 방향이 바뀌었음을 뜻하는가?

입자 m은 양의 방향으로 움직이고 있었으므로, $p < 0$일 때 그리고 그때에만 방향이 바뀐다. $M > m$이고 $e \geq 0$이므로 괄호 $M - m + 2eM$은 양수이고, 따라서 m은 **항상** 방향이 바뀐다. 입자 M은 음의 방향으로 움직이고 있었으므로, $q > 0$일 때 그리고 그때에만 방향이 바뀐다. 즉

$$2em > M - m.$$

일 때이다. 따라서 이 조건 아래에서 요구한 대로 두 입자 모두 방향이 바뀐다.

그 뒤 $2n$번 더 충돌한 후

$mv - MV = u(M-m)$인 이유. 처음의 부호 있는 운동량의 총합은 $mu - Mu = -u(M-m)$이다. 충돌은 이 값을 보존하고, 충돌과 충돌 사이에는 속력이 변하지 않으므로 이 값은 언제까지나 유지된다.

두 입자는 충돌할 때마다 방향이 바뀌므로, 첫 번째 충돌 후 m은 시계 방향, M은 반시계 방향으로 움직이고, 이후 충돌할 때마다 이 방향이 서로 뒤바뀐다. 그 뒤 $2n$번 더 충돌하면 모두 $2n+1$번, 곧 홀수 번 충돌한 것이므로, m은 다시 시계 방향, M은 반시계 방향으로 움직인다. 두 입자의 부호 있는 속도는 $-v$와 V이고

$$m(-v) + MV = -u(M-m) \quad \Longrightarrow \quad mv - MV = u(M-m).$$

상대 속력. 각 충돌 후 두 입자는 원을 따라 서로 반대 방향으로 일정한 속력으로 멀어지고, 다음에는 반대편에서 만나는데, 이때 서로 접근하는 상대 속력은 멀어질 때의 상대 속력과 같다. 뉴턴의 법칙에 따르면 충돌 후 멀어지는 속력은 충돌 전 접근하는 속력의 e배이다. 처음 접근하는 속력은 $2u$이므로, $2n+1$번 충돌한 후 멀어지는 속력은 $2ue^{2n+1}$이다. 두 입자는 서로 반대 방향으로 움직이므로 이 값은 $v+V$이다.

$$v+V=2ue^{2n+1}.$$

연립하여 풀기. 두 번째 식에 M을 곱하여 첫 번째 식에 더하면

$$(m+M)v=u(M-m)+2Mue^{2n+1},$$

이고, 두 번째 식에 m을 곱한 것에서 첫 번째 식을 빼면

$$(m+M)V=2mue^{2n+1}-u(M-m).$$

이다. 따라서

$$v=\frac{u\big(M-m+2Me^{2n+1}\big)}{M+m},\qquad V=\frac{u\big(2me^{2n+1}-(M-m)\big)}{M+m}.$$

검산

- $n=0$을 대입하면 앞에서 구한 첫 번째 충돌 후의 속력이 다시 나온다.
- $m=2$, $M=3$, $e=0.8$, $u=1$일 때, 공식은 $n=0$이면 $(v,V)=(1.16,\,0.44)$, $n=1$이면 $(0.8144,\,0.2096)$을 준다. 입자들이 원을 돌며 충돌하는 과정을 한 단계씩 시뮬레이션하면, 1번째와 3번째 충돌 후에 정확히 이 값들이 나온다.
- 운동 에너지(kinetic energy)는 증가하지 않아야 한다. $e=1$이면 $v=u\,\frac{3M-m}{M+m}$이고 $V=u\,\frac{3m-M}{M+m}$이며, $\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}MV^2=\frac{1}{2}(m+M)u^2$임을 확인할 수 있다.

흔한 실수

- 속력과 속도를 혼동하는 것. 뉴턴의 법칙과 운동량 보존은 부호 있는 속도로 써야 한다. 속력으로 바꾸는 것은 맨 마지막에만 한다.
- $2n$번 더 충돌한다는 것이 모두 $2n+1$번 충돌한다는 뜻임을 잊는 것. 이 때문에 거듭제곱은 e^{2n}이 아니라 e^{2n+1}이 된다.
- 홈이 주는 구심력(centripetal force)을 걱정하는 것. 이 힘은 운동 방향에 수직이므로 속력을 바꾸지도 않고 충돌 방정식에 들어가지도 않는다.

STEP 너머

V의 공식을 보면, $e < 1$일 때 주어진 가정이 영원히 유지될 수는 없음을 알 수 있다. $2me^{2n+1}$이 $M - m$보다 작아지는 순간 무거운 입자는 더 이상 방향을 바꾸지 않는다. 여기서 운동량은 회전의 의미에서만 보존된다. 홈의 힘은 항상 중심을 향하므로, 실제로 보존되는 양은 중심에 대한 **각운동량**(angular momentum)이며, 원의 반지름은 소거된다. 이처럼 대칭성에서 나오는 보존 법칙은 대학 1학년 역학의 중심 주제이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 각운동량과 충돌을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP I 2010, 문제 12

확률과 통계 • 꼬리 합을 통한 기댓값

> **STEP I 2010, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/10-s1-q12

핵심 아이디어

꼬리 합 공식(tail-sum formula)은 $n\,\mathrm{P}(X=n)$을 $\mathrm{P}(X=n)$을 n번 더한 것으로 쓴 다음, 항들을 다른 순서로 모으는 데서 나온다. 펭귄 문제에서는 사건 $X \geq n$을 $X = n$보다 훨씬 쉽게 기술할 수 있다. $n-1$개의 상자를 연 뒤에도 상자를 더 열어야 하는 것은 정확히 그 $n-1$개의 상자에 모두 같은 종류의 펭귄이 들어 있을 때이다. 따라서 꼬리 확률은 간단하고, 방금 증명한 공식을 쓰면 $\mathrm{E}(X)$는 두 개의 등비급수(geometric series)가 된다.

풀이

정의와 꼬리 합 공식

X는 $1, 2, 3, \ldots$의 값만 가지므로, 다음 급수가 수렴(converge)한다면

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{m=1}^{\infty} m\,\mathrm{P}(X=m),$$

이다.

각 $n \geq 1$에 대하여 사건 $X \geq n$은 $m \geq n$인 사건 $X = m$들의 서로소 합집합(disjoint union)이므로 $\mathrm{P}(X \geq n) = \sum_{m \geq n} \mathrm{P}(X=m)$이다. 따라서

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(X \geq n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=n}^{\infty} \mathrm{P}(X=m) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{m} \mathrm{P}(X=m) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} m\,\mathrm{P}(X=m) = \mathrm{E}(X).\end{aligned}$$

? 생각해 보기 두 합의 순서를 바꾸어도 되는 이유는 무엇일까?

이중합은 $1 \le n \le m$인 모든 쌍 (n, m)에 대하여 $\mathrm{P}(X = m)$을 더한다. 첫째 줄에서는 n을 고정하고 m에 대해 더하고, 둘째 줄에서는 m을 고정하고 $n = 1, \ldots, m$의 m개 값에 대해 더한다. 모든 항이 음이 아니며, 음이 아닌 항들로 이루어진 급수의 합은 더하는 순서에 의존하지 않는다(양변이 무한대일 수도 있는데, 그런 경우에는 양변 모두 무한대이다). 항들을 삼각형 모양으로 늘어놓고 m번째 행에 $\mathrm{P}(X = m)$을 m개 놓는다고 생각하면 도움이 된다. 행별로 더하면 $\mathrm{E}(X)$가 되고, 열별로 더하면 꼬리 합이 된다. 이로써 공식이 증명된다.

꼬리 확률

문제의 의도대로 서로 다른 상자의 내용물은 독립(independent)이라고 가정한다. D_k를 상자 k에 아빠 펭귄이 들어 있는 사건이라 하면 $\mathrm{P}(D_k) = p, \mathrm{P}(D_k') = q$이다.

$n \ge 2$라 하자. $X \ge n$인 것은 정확히 처음 $n-1$개의 상자에 아직 두 종류가 하나씩 **모이지 않았을** 때, 즉 모두 아빠 펭귄이거나 모두 엄마 펭귄일 때이다. 이 두 경우는 서로소이므로 독립성에 의해

$$\mathrm{P}(X \ge n) = p^{n-1} + q^{n-1} \qquad (n \ge 2).$$

특히 $n = 4$이면

$$\mathrm{P}(X \ge 4) = p^3 + q^3,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. 또한 한 상자에 두 종류가 모두 들어 있을 수는 없으므로 항상 $X \ge 2$이고, 따라서 $\mathrm{P}(X \ge 1) = \mathrm{P}(X \ge 2) = 1$이다. (위의 식은 $n = 2$일 때 $p + q = 1$을 주므로 일치하지만, $n = 1$일 때는 2를 주므로 $n = 1$인 항은 따로 다루어야 한다.)

기댓값

꼬리 합 공식에 의해

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= \mathrm{P}(X \ge 1) + \sum_{n=2}^{\infty} \left(p^{n-1} + q^{n-1}\right) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} p^k + \sum_{k=1}^{\infty} q^k \\ &= 1 + \frac{p}{1-p} + \frac{q}{1-q},\end{aligned}$$

이다. 여기서 $0 < p < 1, 0 < q < 1$이므로 두 등비급수는 모두 수렴한다($p \ne 0, q \ne 0$이라는 조건은 바로 여기서 쓰인다). $1 - p = q, 1 - q = p$이므로

$$\mathrm{E}(X) = 1 + \frac{p}{q} + \frac{q}{p} = 1 + \frac{p^2 + q^2}{pq}.$$

이제 $p^2+q^2=(p+q)^2-2pq=1-2pq$이므로

$$\mathrm{E}(X)=1+\frac{1-2pq}{pq}=1+\frac{1}{pq}-2=\frac{1}{pq}-1,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

마지막 부분

양수 p와 q에 대한 산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)에 의해

$$\sqrt{pq}\le\frac{p+q}{2}=\frac{1}{2},\qquad \text{이므로}\qquad 0<pq\le\frac{1}{4}.$$

? **생각해 보기** 역수를 취하면 부등호의 방향은 어떻게 될까?

$pq>0$이므로 역수를 취하면 부등호의 방향이 바뀐다. 즉 $\frac{1}{pq}\ge 4$이다. 따라서

$$\mathrm{E}(X)=\frac{1}{pq}-1\ge 4-1=3,$$

이고, 등호는 정확히 $p=q=\frac{1}{2}$일 때 성립한다. (같은 이야기로, $pq=p(1-p)=\frac{1}{4}-(p-\frac{1}{2})^2\le\frac{1}{4}$이다.)

검산

- $p=q=\frac{1}{2}$일 때: $X-1$은 상자 1과 다른 첫 상자가 나올 때까지 기다리는 횟수로, 평균이 2인 기하 확률변수이다. 따라서 $\mathrm{E}(X)=3$이고, 이는 $\frac{1}{1/4}-1$과 일치한다.
- $p\to 0$이면 $\mathrm{E}(X)\to\infty$이다. 아빠 펭귄이 드물어서 오래 기다려야 하기 때문이다. 이는 $\frac{1}{pq}-1$이 한없이 커지는 것과 일치한다.
- 직접 계산하면 $n\ge 2$일 때 $\mathrm{P}(X=n)=p^{n-1}q+q^{n-1}p$이다. $p=\frac{1}{3}$에 대하여 $n\,\mathrm{P}(X=n)$을 수치적으로 더하면 3.5가 나오고, $p=0.3$으로 수집가 200 000명을 모의실험하면 평균 3.761이 나와 정확한 값 $\frac{1}{0.21}-1\approx 3.762$와 비교된다.

흔한 실수

- $n=1$에도 $p^{n-1}+q^{n-1}$을 사용하는 것. 그러면 "확률"이 2가 되고 기댓값이 1만큼 커진다.
- $\mathrm{P}(X\ge 4)=p^4+q^4$라고 쓰는 것. 네 번째 상자가 필요하려면 처음 세 개의 상자만 같으면 된다.

- 마지막 부분에서 양수 사이의 부등식에서 역수를 취하면 부등호의 방향이 바뀐다는 것을 잊는 것.

STEP 너머

꼬리 합 공식에는 연속형 쌍둥이가 있다. 음이 아닌 확률변수(random variable)에 대하여 $\mathrm{E}(X) = \int_0^\infty \mathrm{P}(X > x)\,\mathrm{d}x$이며, 이것도 정확히 같은 방식으로 순서를 바꾸어 증명한다(일반적인 경우에는 토넬리 정리(Tonelli's theorem)가 이를 정당화한다). 펭귄 문제는 **쿠폰 수집가 문제**(*coupon collector's problem*)에서 종류가 두 가지인 경우이다. 똑같이 나올 법한 종류가 N가지이면 필요한 상자 수의 기댓값은 $N(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N})$으로, 대략 $N \ln N$이다. 두 아이디어 모두 Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)과 Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)에 나온다.

풀이

STEP I 2010, 문제 13

확률과 통계 • 푸아송 대기 시간

> **STEP I 2010, 13번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/10-s1-q13

핵심 아이디어

"첫 문자가 1시간에서 2시간 사이에 도착한다"는 것은 "처음 1시간 동안에는 문자가 없지만, 처음 2시간 동안 문자가 하나도 없는 것은 아니다"와 같다. 이 두 사건은 각각 사건이 한 번도 일어나지 않을 푸아송(Poisson) 확률이고, 이는 지수함수(exponential) 하나로 나타난다. 여기서 $x = \mathrm{e}^{\lambda}$로 치환하면 모든 것이 이차방정식(quadratic)으로 바뀌고, 나머지 일은 비에트 정리(Vieta's formulas, 근과 계수의 관계: 두 근의 합과 곱)가 해 준다. 밀드러드의 경우도 마찬가지이다.

풀이

일반적인 푸아송 모형을 사용한다. 즉 길이가 t시간인 임의의 구간에서 조지가 받는 문자의 개수는 평균이 λt인 푸아송 분포를 따르고, 겹치지 않는 구간들에서의 개수는 서로 독립(independent)이다. 시간은 아침이 시작되는 순간부터 잰다. 시간은 연속적이므로 첫 문자가 정확히 1시간 또는 정확히 2시간에 도착할 확률은 0이다. 따라서 구간의 끝점을 포함하든 포함하지 않든 상관없다.

조지의 방정식

조지가 첫 문자를 받을 때까지 걸리는 시간을 시간 단위로 T라 하자. 그러면 $T > t$인 것은 정확히 $[0, t]$에서 문자가 하나도 오지 않는 경우이므로

$$\mathrm{P}(T > t) = \mathrm{P}(\mathrm{Poisson}(\lambda t) = 0) = \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

사건 $\{1 < T \leq 2\}$는 $\{T > 1\}$에서 $\{T > 2\}$를 뺀 것이고, $\{T > 2\} \subseteq \{T > 1\}$이므로

$$p = \mathrm{P}(1 < T \leq 2) = \mathrm{P}(T > 1) - \mathrm{P}(T > 2) = \mathrm{e}^{-\lambda} - \mathrm{e}^{-2\lambda}.$$

양변에 $e^{2\lambda}$를 곱하면 $pe^{2\lambda} = e^{\lambda} - 1$, 즉

$$pe^{2\lambda} - e^{\lambda} + 1 = 0,$$

이 되어 요구된 식을 얻는다.

λ의 두 양수 값

$x = e^{\lambda}$로 놓자. $\lambda \mapsto e^{\lambda}$는 $(0, \infty)$에서 $(1, \infty)$로 가는 순증가 전단사함수(bijection)이므로, 양수 해 λ는

$$px^2 - x + 1 = 0.$$

의 해 중 $x > 1$인 것과 정확히 일대일로 대응한다. 여기서 $p > 0$이다(예를 들어 $[1, 2]$에서 문자가 정확히 하나 오고 그 전에는 하나도 오지 않으면 항상 일어나는 사건의 확률이기 때문이다). 따라서 이 식은 실제로 이차방정식이다.

> **생각해 보기** 두 근이 실수임을 보이는 것은 쉽다. 두 근이 모두 1보다 크다는 것은 어떻게 알 수 있을까?

서로 다른 두 실근. $4p < 1$이므로 판별식(discriminant)은 $1 - 4p > 0$이다. 따라서 서로 다른 두 실근 $x_1 < x_2$가 존재한다.

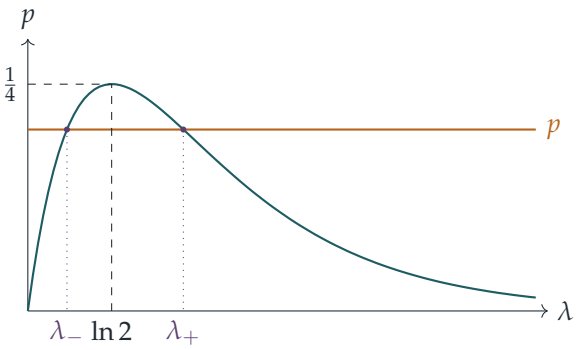
두 근 모두 1보다 크다. 비에트 정리에 의해 $x_1 + x_2 = \frac{1}{p}$이고 $x_1 x_2 = \frac{1}{p}$이다. 그러면

$$(x_1 - 1)(x_2 - 1) = x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} + 1 = 1 > 0,$$

이므로 $x_1 - 1$과 $x_2 - 1$은 부호가 같다. 또한 $p < \frac{1}{4}$에서 $\frac{1}{p} > 4$이므로 두 수의 합은 $x_1 + x_2 - 2 = \frac{1}{p} - 2 > 0$이다. 따라서 둘 다 양수이다. 즉 $x_1 > 1$이고 $x_2 > 1$이다.

그러므로 $\lambda_{\pm} = \ln\left(\dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4p}}{2p}\right)$는 방정식을 만족하는 서로 다른 두 양수 λ 값이다.

그림을 보면 이 결과가 이해된다. λ의 함수로서 $p = e^{-\lambda} - e^{-2\lambda}$는 $\lambda = 0$에서 0이고, $\lambda \to \infty$일 때 0으로 수렴(tends to)하며, ($u = e^{-\lambda}$로 놓으면 $p = u - u^2$이므로) $u = \frac{1}{2}$, 즉 $\lambda = \ln 2$에서 최댓값 $\frac{1}{4}$를 갖는다. 높이가 $p < \frac{1}{4}$인 수평선은 이 그래프와 두 번 만난다. 한산한 전화(문자가 거의 오지 않음)와 바쁜 전화(문자가 대개 첫 1시간 안에 옴)가 같은 p를 줄 수 있는 것이다.



밀드러드: $\lambda_1 + \lambda_2$

각 전화를 따로 보면 조지의 상황과 정확히 같으므로, e^{λ_1}과 e^{λ_2}는 모두 $px^2 - x + 1 = 0$을 만족한다. 이 이차방정식의 근은 두 개뿐이고 $\lambda_1 \neq \lambda_2$이므로, e^{λ_1}과 e^{λ_2}는 바로 그 두 근 x_1과 x_2이다. (이를 위해서는 $p < \frac{1}{4}$가 필요한데, 서로 다른 두 값이 존재하므로 이 조건은 성립한다. $p = \frac{1}{4}$이면 중근이 된다.) 두 근의 곱에 의해

$$e^{\lambda_1+\lambda_2} = e^{\lambda_1}e^{\lambda_2} = x_1x_2 = \frac{1}{p}, \qquad \text{따라서} \qquad \lambda_1 + \lambda_2 = \ln\frac{1}{p} = -\ln p.$$

밀드러드의 첫 문자

? **생각해 보기** 밀드러드가 두 전화로 받는 문자의 총 개수는 어떤 분포를 따를까?

두 개수는 서로 독립인 푸아송 확률변수이므로, 그 합은 평균이 두 평균의 합인 푸아송 분포를 따른다. 즉 t시간 동안 밀드러드가 받는 문자의 총 개수는 $\text{Poisson}\big((\lambda_1 + \lambda_2)t\big)$를 따른다. 같은 내용을 다르게 표현하면 다음과 같다. 두 전화의 대기 시간(waiting time)을 T_1, T_2라 하면 이들은 서로 독립이고, 첫 문자는 $T = \min(T_1, T_2)$에 오며

$$\mathrm{P}(T > t) = \mathrm{P}(T_1 > t)\,\mathrm{P}(T_2 > t) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}.$$

어느 방법이든 $\mu = \lambda_1 + \lambda_2$로 놓으면 $e^{-\mu} = p$이고, 조지의 경우와 같은 논증에 의해

$$\mathrm{P}(1 < T \leq 2) = e^{-\mu} - e^{-2\mu} = p - p^2 = p(1-p).$$

검산

- $\lambda = 0.8$이면 $p = e^{-0.8} - e^{-1.6} \approx 0.2474$이다. 지수분포를 따르는 대기 시간 2×10^5개를 시뮬레이션(simulation)하면 0.2462를 얻었다.
- $p = 0.2$이면 근은 $\lambda_1 \approx 0.3235$와 $\lambda_2 \approx 1.2859$로 둘 다 양수이고, 그 합은 $1.6094 =$

$\ln 5 = -\ln 0.2$이다. $\min(T_1, T_2)$를 시뮬레이션하면 마지막 확률로 0.1601을 얻었으며, 이는 $p - p^2 = 0.16$과 잘 맞는다.

- 타당성 확인: 예상대로 $p(1-p) < p$이다. 전화가 두 대이면 첫 문자가 더 빨리 오는 경향이 있어서 "1시간 동안 문자가 없음"의 가능성이 더 작아지기 때문이다.

흔한 실수

- x에 대한 근이 실수이고 양수임을 보이고 나서, $\lambda > 0$이려면 $x > 0$이 아니라 $x > 1$이어야 한다는 것을 잊는 경우.
- 마지막 문항에서 두 전화의 확률을 더하거나 곱하는(p^2) 경우. 올바른 사건은 "두 전화 중 어느 쪽이든 첫 문자가 오는 것"이고, 이는 합쳐진 비율이 결정한다.

STEP 너머

푸아송 과정(Poisson process)에서 첫 사건이 일어날 때까지의 대기 시간은 지수분포를 따른다. 여기서 사용한 병합(merging) 성질(비율이 λ_1, λ_2인 서로 독립인 두 푸아송 과정을 합치면 비율이 $\lambda_1 + \lambda_2$인 하나의 푸아송 과정이 된다)은 "솎아내기(thinning)"(각 사건을 독립적으로 확률 q로 남기는 것)와 함께 푸아송 과정의 기본 성질 중 하나이다. 이러한 아이디어는 대기행렬 이론(queueing theory)과 응용 확률론의 상당 부분을 떠받치고 있다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 이 문제에서 자연스럽게 이어지는 방식으로 푸아송 과정을 다룬다.

풀이

STEP II 2010, 문제 1

순수수학 • 곡률과 접촉원

> **STEP II 2010, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/10-s2-q1

핵심 아이디어

"접한다(touches)"는 것은 원과 곡선이 점 P를 공유하고 그 점에서 기울기(gradient)도 같다는 뜻이고, "기울기의 변화율"은 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$를 뜻한다. 따라서 P에서 y, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$의 값이 모두 곡선의 값과 일치하는 원을 찾아야 한다. 일반적인 원의 방정식을 음함수 미분(implicit differentiation)으로 두 번 미분하면, 이 조건은 중심에 대한 간단한 방정식이 된다.

풀이

점 P에서의 곡선

$y = 1 - x + \tan x$에 대하여

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -1 + \sec^2 x = \tan^2 x, \qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 2\tan x \sec^2 x.$$

$x = \frac{1}{4}\pi$에서 $\tan x = 1$이고 $\sec^2 x = 2$이므로

$$y = 2 - \tfrac{1}{4}\pi, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1, \qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 4.$$

따라서 $P = \left(\frac{1}{4}\pi,\ 2 - \frac{1}{4}\pi\right)$이다.

원

원을 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$이라 하자. x에 대하여 음함수 미분하면

$$(x-a) + (y-b)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0,$$

이고, 한 번 더 미분하면(둘째 항에 곱의 미분법(product rule)을 적용한다)

$$1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+(y-b)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=0.$$

? 생각해 보기 왜 곡선의 값을 원의 방정식에 바로 대입해도 되는가?

이 두 방정식은 원 위의 모든 점에서 성립하며, 이때 y, $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2$는 원 자신의 값이다. 주어진 두 조건은 원이 P를 지나고, P에서 C와 같은 기울기와 같은 이계도함수(second derivative)를 가진다는 뜻이다. 따라서 P에서는 $x=\frac{1}{4}\pi$, $y=2-\frac{1}{4}\pi$, $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=1$, $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2=4$를 사용해도 된다.

둘째 방정식에서

$$1+1+4(y-b)=0 \quad\Longrightarrow\quad y-b=-\tfrac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad b=2-\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}=\tfrac{5}{2}-\tfrac{1}{4}\pi.$$

이를 첫째 방정식에 넣으면

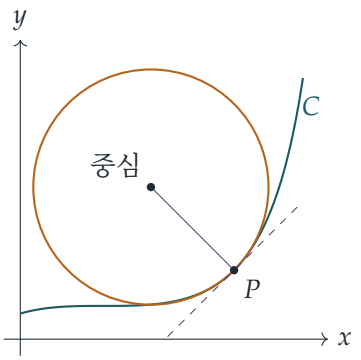
$$x-a=-(y-b)\cdot 1=\tfrac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad a=\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}.$$

마지막으로 $r^2=(x-a)^2+(y-b)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$이다. 따라서 접촉원(osculating circle)은

$$\text{중심}\left(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2},\ \tfrac{5}{2}-\tfrac{1}{4}\pi\right) \qquad \text{반지름} \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

을 가진다.

이 결과는 기하학적으로도 타당하다. 중심은 P에서 방향 $(-1,1)$을 따라 거리 $\frac{1}{\sqrt{2}}$만큼 떨어져 있는데, 이 방향은 기울기가 1인 접선(tangent)에 수직이다. 또한 중심은 $y>2-\frac{1}{4}\pi$인 쪽, 즉 곡선의 위쪽에 있다. $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2>0$이어서 그 근처에서 곡선이 아래로 볼록(concave upwards)하므로 이는 옳다.



검산

- 일반적인 곡률반지름(radius of curvature) 공식 $\rho = \left(1 + y'^2\right)^{3/2} / |y''|$에 대입하면 $2^{3/2}/4 = 1/\sqrt{2}$로, 앞에서 구한 값과 같다.
- 수치적으로 중심은 약 $(0.2854,\ 1.7146)$, P는 약 $(0.7854,\ 1.2146)$이고, 두 점 사이의 거리는 0.70711이다. 원의 아랫부분 $y = b - \sqrt{r^2 - (x-a)^2}$을 잡아 $x = 0.7854$에서 수치 미분하면 기울기 1.0000, 이계도함수 4.000을 얻어 곡선과 일치한다.

흔한 실수

- 중심을 접선의 반대쪽에 놓는 실수: $y - b$의 부호는 둘째 방정식이 정해 주므로, 계산 결과에 맡기면 된다.
- $(y-b)\,\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$를 미분할 때 곱의 미분법이 필요하다는 것을 잊는 실수: $(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)^2$ 항은 바로 여기서 나온다.

STEP 너머

접촉원의 반지름이 곡률반지름이고, 그 역수 $\kappa = |y''|/(1+y'^2)^{3/2}$가 곡률(curvature)이다. 곡률은 곡선의 미분기하학(differential geometry)에서 가장 중심적인 양이다. 공간곡선에서는 곡률과 비틀림률(torsion)이 함께 프레네-세레 공식(Frenet–Serret formulae)에 나타나며, 이 공식은 곡선이 어떻게 휘어지고 비틀리는지를 기술한다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)에 이런 성격의 STEP 문제가 더 실려 있다.

풀이

STEP II 2010, 문제 2

순수수학 • 삼각함수 적분법

STEP II 2010, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/10-s2-q2

핵심 아이디어

삼차식(cubic) $7\sin x - 8\sin^3 x$는 그대로 적분하기 까다로워 보이지만, 이것이 삼배각 공식(triple-angle formula)으로 만들어져 있다는 것을 알아차리면 사정이 달라진다. 즉 $\sin 3x$의 두 배에 약간의 나머지를 더한 것이다. 그다음 코사인의 삼배각 공식을 쓰면 답이 다시 $c = \cos\alpha$에 대한 다항식이 된다. Eustace의 적분에서는 $\sin^2\alpha = 1 - c^2$를 이용하면 그의 (틀린) 답도 같은 변수로 나타낼 수 있고, 두 결과를 비교하면 c에 대한 사차식(quartic)이 나오는데, 그 근에 대해서는 이미 힌트가 주어져 있다.

풀이

삼배각 공식

덧셈정리(addition formulae)와 $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$를 이용하면

$$\begin{aligned}\cos 3x = \cos(2x + x) &= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x \\ &= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin^2 x \cos x \\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2(1 - \cos^2 x)\cos x \\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x,\end{aligned}$$

이므로 원하는 식을 얻는다. 같은 방법으로 $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$를 이용하면

$$\begin{aligned}\sin 3x = \sin(2x + x) &= \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x \\ &= 2 \sin x \cos^2 x + (1 - 2\sin^2 x) \sin x \\ &= 2 \sin x (1 - \sin^2 x) + \sin x - 2 \sin^3 x \\ &= 3 \sin x - 4 \sin^3 x.\end{aligned}$$

소문항 (i)

사인 공식에서 $8 \sin^3 x = 6 \sin x - 2 \sin 3x$이므로

$$7 \sin x - 8 \sin^3 x = \sin x + 2 \sin 3x.$$

이제 적분은 쉽다.

$$\mathrm{I}(\alpha) = \Big[-\cos x - \tfrac{2}{3} \cos 3x \Big]_0^{\alpha} = -\cos \alpha - \tfrac{2}{3} \cos 3\alpha + 1 + \tfrac{2}{3}.$$

코사인 공식에 의해 $\cos 3\alpha = 4c^3 - 3c$이므로

$$\mathrm{I}(\alpha) = -c - \tfrac{2}{3}(4c^3 - 3c) + \tfrac{5}{3} = -\tfrac{8}{3}c^3 + c + \tfrac{5}{3},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

$\mathrm{I}(\alpha) = 0$이 되게 하는 c의 값을 찾자. $\alpha = 0$으로 두면 적분은 자명하게 0이므로 $c = 1$이 조건을 만족한다(확인: $-\frac{8}{3} + 1 + \frac{5}{3} = 0$). 사실 이것이 유일한 값인데, $8c^3 - 3c - 5 = (c - 1)(8c^2 + 8c + 5)$이고 이차식의 판별식(discriminant)이 $64 - 160 < 0$이기 때문이다.

소문항 (ii)

Eustace의 규칙에 따르면 $\int \sin x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \sin^2 x$이고 $\int \sin^3 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4} \sin^4 x$이므로, 그가 구한 정적분(definite integral)의 값은

$$\mathrm{E}(\alpha) = \Big[\tfrac{7}{2} \sin^2 x - 2 \sin^4 x \Big]_0^{\alpha} = \tfrac{7}{2} s^2 - 2s^4, \qquad s = \sin \alpha.$$

이다. 소문항 (i)과 비교하기 위해 $s^2 = 1 - c^2$로 쓰면

$$\mathrm{E}(\alpha) = \tfrac{7}{2}(1 - c^2) - 2(1 - c^2)^2 = \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2} c^2 - 2c^4.$$

$\cos \beta = -\frac{1}{6}$인 경우. $c = -\frac{1}{6}$이면

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(\beta) &= -\tfrac{8}{3} \cdot \big(-\tfrac{1}{216} \big) - \tfrac{1}{6} + \tfrac{5}{3} = \tfrac{1}{81} + \tfrac{3}{2} = \tfrac{245}{162}, \\ \mathrm{E}(\beta) &= \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{36} - 2 \cdot \tfrac{1}{1296} = \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{72} - \tfrac{1}{648} = \tfrac{3}{2} + \tfrac{8}{648} = \tfrac{245}{162}.\end{aligned}$$

두 값이 일치하므로, Eustace는 운 좋게 $\mathrm{I}(\beta)$의 올바른 값을 얻는다.

가능한 모든 α의 값. Eustace의 답이 맞는 것은 정확히 $\mathrm{E}(\alpha) = \mathrm{I}(\alpha)$일 때이고, 이는 (6을 곱하고 항을 정리하면)

$$12c^4 - 16c^3 - 3c^2 + 6c + 1 = 0.$$

과 같다.

? **생각해 보기** 공식 없이 이런 사차식을 어떻게 인수분해(factorise)할 수 있을까?

우리는 이미 두 근을 알고 있다. 방금 한 계산에 의해 $c = -\frac{1}{6}$이 근이므로 $6c + 1$은 인수이다. 또 $c = 1$(즉 $\alpha = 0$)도 근이어야 하는데, 그때 I와 E가 모두 0이기 때문이다. $6c + 1$로 나누면(c^3과 c의 계수를 비교하면)

$$12c^4 - 16c^3 - 3c^2 + 6c + 1 = (6c + 1)(2c^3 - 3c^2 + 1),$$

이고, $c = 1$이 이 삼차식의 근이므로

$$2c^3 - 3c^2 + 1 = (c - 1)(2c^2 - c - 1) = (c - 1)^2(2c + 1).$$

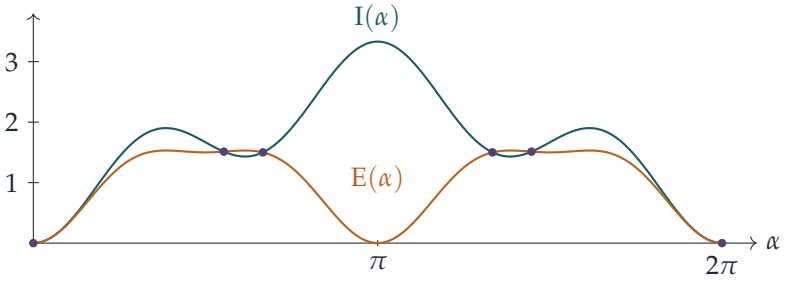
따라서 조건은

$$(6c + 1)(2c + 1)(c - 1)^2 = 0, \qquad \text{즉} \qquad c = 1,\ -\tfrac{1}{2} \text{ 또는 } -\tfrac{1}{6}.$$

$c = \cos\alpha$이고 $[-1, 1]$에 속하는 모든 c의 값은 어떤 α로부터 얻어지므로, Eustace가 $\mathrm{I}(\alpha)$의 올바른 값을 얻는 것은 정확히 어떤 정수 n에 대하여

$$\alpha = 2n\pi, \qquad \alpha = 2n\pi \pm \tfrac{2\pi}{3}, \qquad \text{또는} \qquad \alpha = 2n\pi \pm \arccos\left(-\tfrac{1}{6}\right).$$

일 때이다. (음수인 α도 포함된다. I와 E는 모두 $\cos\alpha$를 통해서만 α에 의존하기 때문이다.) 그래프는 $0 \le \alpha \le 2\pi$에서 실제 적분값(청록색)과 Eustace의 답(호박색)을 보여 준다. 두 곡선은 $\alpha = 0$, $\frac{2\pi}{3}$, $\arccos(-\frac{1}{6}) \approx 1.738$에서 만나고, $\alpha = \pi$에 대하여 이들과 대칭인 점에서도 만난다.



검산

▶ $\alpha = \pi$ ($c = -1$)일 때 공식은 $\mathrm{I}(\pi) = \frac{8}{3} - 1 + \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$을 주고, 이는 $\int_0^\pi (\sin x + 2\sin 3x)\,\mathrm{d}x = 2 + \frac{4}{3}$과 일치한다.

- 원래의 피적분함수에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면 $\mathrm{I}(\beta) \approx 1.5123457$을 얻고, 이는 $\frac{245}{162} = 1.5123456\ldots$과 일치한다. $\alpha = \frac{2\pi}{3}$에서는 적분값과 Eustace의 답이 모두 1.5이다.

흔한 실수

- 아래끝을 잊는 것: $-\cos 0 - \frac{2}{3}\cos 0 = -\frac{5}{3}$이고, 이것이 $+\frac{5}{3}$을 만든다.
- $c = 1$이 사차식의 **중근**(double root)이라는 것을 놓치거나, 아예 잊어버리고 $c = -\frac{1}{2}$와 $c = -\frac{1}{6}$만 답하는 것.
- $[0, \pi]$에 속하는 α만 답하는 것. 문제는 모든 값을 요구한다.

STEP 너머

$\sin^3 x$ 같은 거듭제곱을 $\sin x$와 $\sin 3x$의 결합으로 쓰는 것은 푸리에 해석(Fourier analysis)의 출발점이다. 모든 거듭제곱 $\sin^n x$는 $\sin kx$ 또는 $\cos kx$의 유한합이며, 이는 $\sin x = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})/2\mathrm{i}$를 이용하면 빠르게 구할 수 있다. $\cos nx$를 $\cos x$로 나타내는 다항식은 체비쇼프 다항식(Chebyshev polynomial) T_n이며, $T_3(c) = 4c^3 - 3c$이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 드무아브르 정리(de Moivre's theorem)가 왜 이 모든 항등식을 자연스럽게 만드는지 보여 준다.

풀이

STEP II 2010, 문제 3

순수수학 • 피보나치 수와 점화식

STEP II 2010, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/10-s2-q3

핵심 아이디어

주어진 항이 네 개이고 미지수도 네 개이다. $(*)$에 $n = 0, 1, 2, 3$을 대입하여 연립방정식을 풀면 된다. 요령은 한 식을 다른 식으로 나누는 것이다. 그러면 a가 소거되고, 조건이 $\lambda + \mu$와 $\lambda\mu$에 대한 식으로 바뀐다. 이 두 값은 대칭함수(symmetric function)로서, λ와 μ를 한 이차방정식(quadratic equation)의 두 근으로 만들어 준다. 공식을 알고 나면 (iii)의 합은 두 등비급수(geometric series)로 나뉜다.

풀이

소문항 (i)

$(*)$에 $n = 0, 1, 2, 3$을 대입하면 다음을 얻는다.

$$a + b = 0, \qquad a\lambda + b\mu = 1,$$
$$a\lambda^2 + b\mu^2 = 1, \qquad a\lambda^3 + b\mu^3 = 2.$$

첫째 식에서 $b = -a$이므로 나머지 세 식은 다음과 같이 된다.

$$a(\lambda - \mu) = 1, \qquad a(\lambda^2 - \mu^2) = 1, \qquad a(\lambda^3 - \mu^3) = 2.$$

특히 $a(\lambda - \mu) = 1$로부터 $a \neq 0$이고 $\lambda \neq \mu$임을 알 수 있다. 인수분해하면

$$\lambda^2 - \mu^2 = (\lambda - \mu)(\lambda + \mu), \qquad \lambda^3 - \mu^3 = (\lambda - \mu)(\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2),$$

이므로 둘째 식과 셋째 식을 $a(\lambda - \mu) = 1$로 나누면(이 값은 0이 아니므로 나눌 수 있다)

$$\lambda + \mu = 1 \qquad \text{그리고} \qquad \lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 = 2,$$

를 얻는다. 이 가운데 둘째 식이 바로 보여야 할 결과이다.

생각해 보기 이 두 식으로부터 λ와 μ 자체는 어떻게 구할 수 있을까?

둘째 식을 합과 곱으로 나타내자. $\lambda^2+\lambda\mu+\mu^2=(\lambda+\mu)^2-\lambda\mu$이므로 $1-\lambda\mu=2$이고 $\lambda\mu=-1$이다. 합이 1이고 곱이 -1인 두 수는

$$t^2-t-1=0, \qquad \text{따라서} \qquad t=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

의 두 근이다. 어느 근이 λ일까? $a(\lambda-\mu)=1$이고 $a>0$이므로 $\lambda-\mu>0$이어야 한다. 따라서 λ는 큰 쪽의 근이다. 그러면 $\lambda-\mu=\sqrt{5}$이고

$$\lambda=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \mu=\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \qquad a=\frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad b=-\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

이다. (두 근을 반대로 놓으면 $a=-1/\sqrt{5}$가 되어야 하므로 이 경우는 제외된다.) 역으로, 위의 모든 단계는 거꾸로 거슬러 갈 수 있으므로 이 값들은 네 식을 모두 만족한다.

소문항 (ii)

$F_6=(\lambda^6-\mu^6)/\sqrt{5}$이다. $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^6$을 직접 전개하는 대신, λ가 $t^2=t+1$의 근이라는 사실을 이용하여 거듭제곱의 차수를 낮춘다.

$$\begin{aligned}\lambda^2&=\lambda+1,\\ \lambda^3&=\lambda^2+\lambda=2\lambda+1,\\ \lambda^6&=(2\lambda+1)^2=4\lambda^2+4\lambda+1=4(\lambda+1)+4\lambda+1=8\lambda+5.\end{aligned}$$

μ도 같은 이차방정식을 만족하므로 똑같은 계산이 성립하여 $\mu^6=8\mu+5$이다. 따라서

$$F_6=\frac{(8\lambda+5)-(8\mu+5)}{\sqrt{5}}=\frac{8(\lambda-\mu)}{\sqrt{5}}=\frac{8\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=8.$$

소문항 (iii)

$(*)$를 이용하면

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n}{2^{n+1}}=\frac{1}{2\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{\lambda}{2}\right)^n-\left(\frac{\mu}{2}\right)^n\right].$$

$\lambda\approx 1.618$이고 $\mu\approx -0.618$이므로 두 공비(common ratio) $\lambda/2$와 $\mu/2$는 모두 절댓값이 1보다 작다. 따라서 두 등비급수는 모두 수렴(converge)하고, 합을 두 급수의 차로 나눌 수 있다.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n}{2^{n+1}}&=\frac{1}{2\sqrt{5}}\left[\frac{1}{1-\lambda/2}-\frac{1}{1-\mu/2}\right]=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{2-\lambda}-\frac{1}{2-\mu}\right]\\ &=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\lambda-\mu}{(2-\lambda)(2-\mu)}=\frac{1}{4-2(\lambda+\mu)+\lambda\mu},\end{aligned}$$

여기서 $\lambda - \mu = \sqrt{5}$를 이용하였다. $\lambda + \mu = 1$, $\lambda\mu = -1$이므로 분모는 $4 - 2 - 1 = 1$이고, 따라서

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n}{2^{n+1}} = 1.$$

검산

이 공식은 정수를 주어야 한다. $\lambda^4 = 3\lambda + 2$를 이용하면 $F_4 = (\lambda^4 - \mu^4)/\sqrt{5}$에서 $F_4 = 3$을 얻고, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$은 처음 네 항에서 보이는 규칙 $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$에 들어맞는다. (iii)의 경우 부분합 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{19}{32}$, ... 은 1을 향해 조금씩 올라간다. 처음 300개 항을 수치적으로 더하면 기계 정밀도 안에서 1.0000000이 나온다. 항들이 $(0.809)^n$ 정도로만 줄어들기 때문에 수렴은 느리다.

흔한 실수

- 어느 근이 λ인지 정할 때 $a > 0$을 쓰는 것을 잊는 실수. 이 조건이 없으면 답이 하나로 정해지지 않는다.
- $\lambda - \mu$가 왜 0이 아닌지 밝히지 않고 이것으로 나누는 실수($a(\lambda - \mu) = 1$이므로 0이 아니다).
- 각 급수가 수렴하는지 확인하지 않고 무한급수의 합을 두 급수로 나누는 실수.

STEP 너머

여기서 다룬 공식은 피보나치 수(Fibonacci numbers)에 대한 비네(Binet) 공식이고, 사용한 방법은 선형 점화식(linear recurrence)에 대한 일반적인 방법이다. λ와 μ는 $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$의 특성방정식(characteristic equation) $t^2 = t + 1$의 두 근이다. 소문항 (iii)은 생성함수(generating function) $\sum F_n x^n = x/(1 - x - x^2)$의 $x = \frac{1}{2}$에서의 값을 구하여 절반으로 나눈 것이며, 그 결과 역시 1이 된다. 생성함수는 대학 1학년 조합론과 확률론의 주요한 도구이다. 연분수(continued fraction) 이론에서 황금비(golden ratio) λ와 피보나치 수가 어떻게 나타나는지는 Davenport, *The Higher Arithmetic*(고등 정수론)을 참고하라.

풀이

STEP II 2010, 문제 4

순수수학 • 치환적분

> **STEP II 2010, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/10-s2-q4

핵심 아이디어

치환(substitution) $u = a - x$는 구간의 두 끝점을 맞바꾸고, $f(x)$를 $f(a-x)$로, 또 그 반대로 바꾼다. 따라서 이 적분은 분자가 분모의 나머지 절반인 "짝" 적분과 값이 같다. 두 적분을 더하면 분자가 분모와 같아져서 피적분함수(integrand)가 1이 된다. 문제의 나머지 부분은 이 구조가 모습을 바꾸어 숨어 있는 것을 알아차리는 것이다. 소문항 (ii)에서는 $[\frac{1}{2}, 2]$의 두 끝점을 맞바꾸는 치환 $x \mapsto 1/x$를 써서 같은 기법을 적용한다.

풀이

소문항 (i)

피적분함수가 정의되도록, 줄곧 $[0, a]$에서 $f(x) + f(a-x) \neq 0$이라고 가정한다. I에서 $u = a - x$로 치환하면 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$이다. $x = 0$일 때 $u = a$이고, $x = a$일 때 $u = 0$이다. 따라서

$$I = \int_a^0 \frac{f(a-u)}{f(a-u)+f(u)}\,(-\mathrm{d}u) = \int_0^a \frac{f(a-u)}{f(u)+f(a-u)}\,\mathrm{d}u.$$

u는 더미 변수(dummy variable)이므로 이름을 x로 바꿀 수 있고, 그러면 요구된 I의 두 번째 꼴을 얻는다.

이제 I에 대한 두 식을 더한다.

$$2I = \int_0^a \frac{f(x)+f(a-x)}{f(x)+f(a-x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^a 1\,\mathrm{d}x = a, \qquad \text{따라서} \qquad I = \frac{a}{2}.$$

첫 번째 적분.

생각해 보기 $\ln(2+x-x^2)$ 속에서 $f(x)+f(a-x)$는 어디에 숨어 있는가?

이차식은 $2+x-x^2=(1+x)(2-x)$로 인수분해된다. 따라서

$$\ln(2+x-x^2)=\ln(1+x)+\ln(2-x),$$

이고, 두 인수가 모두 $[0,1]$에서 양수이므로 이 식은 성립한다. $a=1, f(x)=\ln(1+x)$로 두자. 그러면 $f(1-x)=\ln(2-x)$이고, 피적분함수는 정확히 $\dfrac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}$이다. $[0,1]$에서 $2+x-x^2\geq 2$이므로 분모는 결코 0이 되지 않는다. 그러므로

$$\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{\ln(2+x-x^2)}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

두 번째 적분. 덧셈정리(compound-angle formula)로 분모를 전개한다.

$$\sin\left(x+\tfrac{\pi}{4}\right)=\sin x\cos\tfrac{\pi}{4}+\cos x\sin\tfrac{\pi}{4}=\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}}.$$

따라서 피적분함수는 $\sqrt{2}\,\dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}$이다. $a=\frac{\pi}{2}$, $f=\sin$으로 두면 $f(\frac{\pi}{2}-x)=\cos x$이다. 분모 $\sin x+\cos x$는 $[0,\frac{\pi}{2}]$에서 양수이다. 위의 결과에 의해

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{\sin(x+\frac{\pi}{4})}\,\mathrm{d}x=\sqrt{2}\cdot\frac{\pi/2}{2}=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}.$$

소문항 (ii)

이 적분을 J라 하자. 피적분함수는 $\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\sin x}{\sin x+\sin(1/x)}$이다. 분모는 안전하다. $x\in[\frac{1}{2},2]$이면 x와 $1/x$가 모두 $[\frac{1}{2},2]\subset(0,\pi)$에 속하므로 $\sin x>0$이고 $\sin(1/x)>0$이다.

생각해 보기 어떤 치환이 $\sin x$와 $\sin\frac{1}{x}$를 맞바꾸면서 적분 구간의 끝 $\frac{1}{2}$와 2를 유지하는가?

답은 $x=1/u$이다. 그러면 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}u/u^2$이다. $x=\frac{1}{2}$일 때 $u=2$이고, $x=2$일 때 $u=\frac{1}{2}$이다. 인수 $\frac{1}{x}$는 u가 되므로

$$J=\int_2^{1/2}u\cdot\frac{\sin(1/u)}{\sin(1/u)+\sin u}\cdot\left(-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\right)=\int_{1/2}^{2}\frac{\sin(1/u)}{u\left(\sin u+\sin\frac{1}{u}\right)}\,\mathrm{d}u.$$

u의 이름을 x로 바꾸고 이것을 원래 꼴의 J와 더하면

$$2J=\int_{1/2}^{2}\frac{\sin x+\sin\frac{1}{x}}{x\left(\sin x+\sin\frac{1}{x}\right)}\,\mathrm{d}x=\int_{1/2}^{2}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln 2-\ln\tfrac{1}{2}=2\ln 2.$$

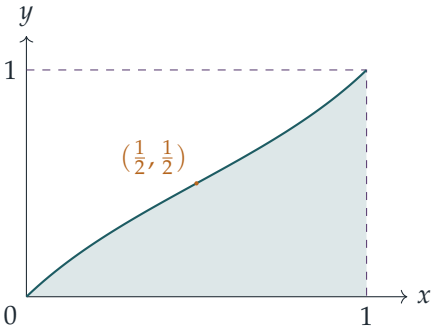
따라서

$$\int_{1/2}^{2} \frac{\sin x}{x\left(\sin x + \sin \frac{1}{x}\right)}\,\mathrm{d}x = \ln 2.$$

여기서는 인수 $\frac{1}{x}$가 핵심이다. $\mathrm{d}x$가 $x \mapsto a - x$에 의해 변하지 않는 것과 마찬가지로, 측도(measure) $\frac{\mathrm{d}x}{x}$는 $x \mapsto 1/x$에 의해 (방향을 제외하면) 변하지 않는다.

검산

- 피적분함수 $g(x) = \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}$는 $g(x) + g(a-x) = 1$을 만족한다. 따라서 그 그래프는 $(\frac{a}{2}, \frac{1}{2})$에 대하여 반 바퀴 회전에 대칭이므로, 그래프 아래의 넓이는 $a \times 1$ 직사각형 넓이의 절반이다. 그림은 첫 번째 적분에 대해 이를 보여 준다.



- 수치적으로 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면 첫 번째 적분은 0.500000, 두 번째 적분은 1.110721($\frac{\sqrt{2}\pi}{4} \approx 1.110721$), 소문항 (ii)는 0.693147 ($\ln 2 \approx 0.693147$)이 나온다.

흔한 실수

- $\sin(x + \frac{\pi}{4})$를 고쳐 쓸 때 인수 $\sqrt{2}$를 빠뜨려서 $\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$ 대신 $\frac{\pi}{4}$를 얻는 것.
- 소문항 (ii)에서 $\frac{1}{x}$를 놓치는 것. 이것은 u로 바뀌고, $-\frac{1}{u^2}$과 결합하여 $-\frac{1}{u}$이 남는다.

STEP 너머

두 기법 모두 적분의 "측도"를 바꾸지 않는 구간의 대칭성을 이용한다. 반사 $x \mapsto a - x$는 $\mathrm{d}x$를 보존하고, 역수 변환 $x \mapsto 1/x$는 $\frac{\mathrm{d}x}{x}$를 보존한다. 대학에서는 이것이 불변 측도(invariant measure)라는 개념으로 발전한다. 예를 들어 $\frac{\mathrm{d}x}{x}$는 곱셈에 대한 양의 실수 위의 자연스러운 측도이며, 멜린 변환(Mellin transform)의 바탕이 된다. 치환적분의 실해석학적 기초에 대해서는 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 참고하라. STEP

스타일의 적분 기법을 더 많이 보려면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제집)를 참고하라.

풀이

STEP II 2010, 문제 5

순수수학 • 벡터의 각과 원뿔

> **STEP II 2010, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/10-s2-q5

핵심 아이디어

이 문제는 모두 한 가지 사실로 귀결된다. 방향(direction)이 $\mathbf{d}$인 직선과 벡터 $\mathbf{a}$ 사이의 각 θ는 $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{d}|\,|\mathbf{a}|}$를 만족한다. "같은 각으로 기울어져 있다"와 "각 α로 기울어져 있다"는 곧바로 $\mathbf{d}$의 성분에 대한 방정식이 된다. 마지막 부분에서는 주어진 데카르트 방정식(Cartesian equation)이 방금 구한 관계식과 같은 꼴이라는 점에 주목하자. O를 지나고 모두 한 고정된 직선과 같은 각을 이루는 직선들의 모임은 원뿔(cone)이다.

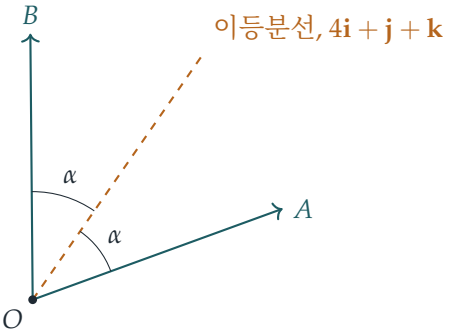
풀이

$\mathbf{a} = \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 5\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$라 하면 $|\mathbf{a}| = \sqrt{3}$, $|\mathbf{b}| = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$이다. 또 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 5-1-1 = 3$이다. 따라서

$$\cos 2\alpha = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} = \frac{3}{\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{3}} = \frac{1}{3}.$$

$\cos 2\alpha > 0$이므로 각 2α는 예각(acute angle)이고, 따라서 α는 0과 $\frac{\pi}{4}$ 사이에 있다. 앞으로 다음 값이 필요하다.

$$\cos^2\alpha = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\alpha) = \tfrac{2}{3}.$$



(그림은 평면 OAB를 개략적으로만 나타낸 것이다.)

소문항 (i)

$\mathbf{d} = m\mathbf{i} + n\mathbf{j} + p\mathbf{k}$를 L_1의 방향이라 하자. $\mathbf{d}$가 OA, OB와 이루는 각의 코사인은 각각

$$\frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{d}|\sqrt{3}} = \frac{m+n+p}{\sqrt{3}\,|\mathbf{d}|} \qquad \text{그리고} \qquad \frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{d}|\,3\sqrt{3}} = \frac{5m-n-p}{3\sqrt{3}\,|\mathbf{d}|}.$$

cos는 $[0,\pi]$에서 일대일(one-to-one)이므로, 각이 같다는 것은 코사인이 같다는 뜻이다. 양변에 $3\sqrt{3}\,|\mathbf{d}|$를 곱하면

$$3(m+n+p) = 5m-n-p \quad \Longleftrightarrow \quad m = 2(n+p).$$

생각해 보기 직선에는 정해진 향이 없다. 직선이 OA와는 각 θ를, OB와는 각 $\pi-\theta$를 이룬다면 어떻게 될까?

"두 직선 사이의 각"을 예각 쪽으로 정한다면, 코사인은 부호를 무시하고 같기만 하면 된다. 반대 부호를 택하면 $3(m+n+p) = -(5m-n-p)$, 즉 $4m+n+p=0$이다. 이 직선들은 O를 지나고 이등분선에 수직인 평면 위에 있으며, 이 평면은 $\angle AOB$의 외각의 이등분선(external bisector)을 포함한다. 문제가 의도한 답은 $m = 2(n+p)$이지만, 두 번째 직선족이 존재한다는 사실도 알아 둘 만하다.

$\angle AOB$의 이등분선(bisector)을 구하려면 OA와 OB 방향의 **단위벡터**(*unit vector*)를 더한다. 두 단위벡터는 마름모(rhombus)를 이루므로, 그 합은 두 벡터 사이의 각을 이등분한다. 따라서

$$\frac{\mathbf{a}}{\sqrt{3}} + \frac{\mathbf{b}}{3\sqrt{3}} = \frac{3\mathbf{a}+\mathbf{b}}{3\sqrt{3}} = \frac{8\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}}{3\sqrt{3}},$$

이고 $m=4$, $n=1$, $p=1$(또는 이것의 0이 아닌 임의의 상수배)로 잡을 수 있다. 확인해 보면 $4 = 2(1+1)$이므로 이 방향은 위의 관계식을 만족한다.

소문항 (ii)

$\mathbf{e} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$를 L_2의 방향이라 하자. 이 직선이 OA와 각 α를 이루는 것은

$$\frac{u+v+w}{\sqrt{3}\sqrt{u^2+v^2+w^2}} = \pm\cos\alpha.$$

일 때이다. $\pm$는 직선 위의 두 향을 모두 허용하기 위한 것이다. 양변을 제곱하면 부호가 사라지고, $\cos^2\alpha = \frac{2}{3}$를 이용하면

$$(u+v+w)^2 = 2(u^2+v^2+w^2).$$

좌변을 $u^2+v^2+w^2+2(vw+wu+uv)$로 전개하여 정리하면 다음 관계식을 얻는다.

$$u^2+v^2+w^2 = 2(vw+wu+uv).$$

? **생각해 보기** 방향에 대한 조건이 어떻게 곡면이 될까?

$(x,y,z) \neq (0,0,0)$인 임의의 점을 잡자. 이 점은 O를 지나는 직선 중 정확히 하나, 즉 방향이 $x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$인 직선 위에 있다. 소문항 (ii)에 의해, 이 점이

$$x^2+y^2+z^2 = 2(yz+zx+xy)$$

를 만족하는 것은 O를 지나는 그 직선이 OA와 각 α를 이룰 때, 그리고 그때에만이다. 원점도 이 방정식을 만족한다. 따라서 이 곡면은 O를 지나고 직선 OA와 각 α로 기울어진 모든 직선의 합집합이다.

이것은 꼭짓점(vertex)이 원점이고 축(axis)이 직선 $x=y=z$(직선 OA)인 **(양쪽으로 뻗은) 직원뿔(right circular cone)**이다. 반꼭지각(semi-vertical angle) α는

$$\cos\alpha = \sqrt{\tfrac{2}{3}}, \qquad \tan\alpha = \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \alpha \approx 35.3^\circ,$$

를 만족하며, 이는 $\angle AOB$의 절반이다. μ가 모든 실수 값을 취하므로 이 원뿔은 두 갈래(nappe)를 가진다. 소문항 (i)의 이등분선은 이 원뿔 위에 있다. 실제로 $(4,1,1)$에 대해 $16+1+1 = 18 = 2(1+4+4)$이다.

검산

- 점 $(1,1,0)$은 $2 = 2(0+0+1)$을 만족한다. 이 점이 $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$와 이루는 각의 코사인은 $2/(\sqrt{2}\sqrt{3}) = \sqrt{2/3}$으로, 예상대로이다.
- 수치로 계산하면 $\arccos(1/3)/2 = 0.61548\,\text{rad}$이고, 이등분선 $4\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$는 OA, OB 모두와 $0.61548\,\text{rad}$의 각을 이룬다.
- c를 $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$와 이루는 각의 코사인이라 하면 항등식 $x^2+y^2+z^2-2(yz+zx+xy) = (x^2+y^2+z^2)(2-3c^2)$이 성립한다. 따라서 좌변은 $c^2 = \frac{2}{3}$일 때, 그리고 그때에만 0이 된다.

흔한 실수

- 단위벡터의 합 대신 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$로 이등분하는 것. $|\mathbf{b}| \neq |\mathbf{a}|$이므로 $\mathbf{a}+\mathbf{b} = 6\mathbf{i}$는 이등분선이 아니다.
- $\cos\alpha = \frac{1}{2}\cos 2\alpha$ 같은 식을 쓰는 것. 배각 공식(double-angle formula) $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$가 필요하다.
- 꼭짓점, 축, 반꼭지각을 밝히지 않고 곡면을 그저 "원뿔"이라고만 서술하는 것.

STEP 너머

원뿔의 방정식은 M이 대칭행렬(symmetric matrix)일 때 $\mathbf{x}^{\mathsf{T}}M\mathbf{x} = 0$ 꼴의 **이차형식**(*quadratic form*)이다. 대학 1학년 선형대수학(linear algebra)에서는 이러한 곡면을 M의 고윳값(eigenvalue)으로 분류한다. 여기서 M은 대각성분이 1이고 비대각성분이 -1이므로, 고윳값은 -1($\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ 방향)과 2(중복도 2)이다. 음의 고윳값 하나와 서로 같은 양의 고윳값 둘은 바로, 홀로 다른 고윳값의 고유벡터(eigenvector)를 축으로 하는 원뿔의 부호수(signature)이다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 대칭행렬과 이차형식을 다루는 부분에서 이 내용을 전개한다.

풀이

STEP II 2010, 문제 6

순수수학 • 정사면체의 기하

STEP II 2010, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

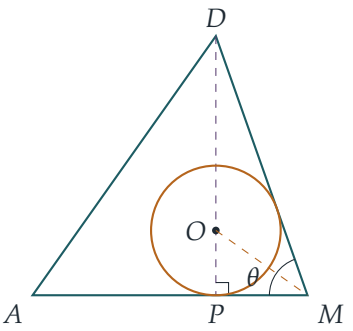
step.maths.org/questions/10-s2-q6

핵심 아이디어

정사면체(regular tetrahedron)는 대칭성이 매우 커서 거의 모든 일이 하나의 수직 단면(cross-section), 즉 한 모서리의 중점, 그 맞은편 꼭짓점, 그리고 꼭대기 꼭짓점을 지나는 평면에서 일어난다. 이 평면에서는 모든 3차원 문제가 직각삼각형 문제가 된다. 구(sphere)에 대해서는 대칭성이 중심의 위치를 알려 주고, 소문항 (ii)의 각이 그 중심이 각 면에서 얼마나 떨어져 있는지를 알려 준다.

풀이

이 풀이 전체에서 M을 BC의 중점이라 하자. 모든 면은 한 변의 길이가 1인 정삼각형이므로, 각 중선(median)(AM이나 DM 등)의 길이는 $\sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$이다.



소문항 (i)

D는 A, B, C에서 같은 거리에 있고 DP는 평면 ABC에 수직이므로, 피타고라스(Pythagoras) 정리에 의해 $PA^2 = DA^2 - DP^2 = DB^2 - DP^2 = PB^2$이고, 마찬가지로 $PB = PC$이다. 따라서 P는 정삼각형 ABC의 외심(circumcentre)이며, 이는 동시에 무게중심(centroid)이기도 하다. 무게중심은 각 중선을 따라 3분의 2 지점에 있으므로

$$PA = \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2} = \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \qquad PM = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2} = \tfrac{1}{2\sqrt{3}}.$$

이제 삼각형 DPA에서 P의 각이 직각이므로

$$PD^2 = DA^2 - PA^2 = 1 - \tfrac{1}{3} = \tfrac{2}{3}, \qquad \text{따라서} \qquad PD = \sqrt{\tfrac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

소문항 (ii)

여섯 모서리는 모두 똑같이 보이므로(정사면체의 대칭변환으로 어떤 모서리든 다른 모서리로 옮길 수 있다), BC를 따라 만나는 두 면 ABC와 DBC 사이의 각 θ만 구하면 충분하다.

> **생각해 보기** 그림에서 어느 각이 실제로 두 면 사이의 각인가?

한 직선에서 만나는 두 평면 사이의 각(이면각, dihedral angle)은 각 평면에 하나씩 있으면서 같은 점에서 공통 직선에 수직인 두 직선을 이용해 잰다. 정삼각형 ABC에서 중선 AM은 BC에 수직이고, 정삼각형 DBC에서 중선 DM은 BC에 수직이다. 따라서 $\theta = \angle AMD$이고, P가 AM 위에서 A와 M 사이에 있으므로 $\theta = \angle PMD$이기도 하다.

삼각형 DPM은 P에서 직각이고, $PM = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, 빗변은 $DM = \frac{\sqrt{3}}{2}$이다. 그러므로

$$\cos\theta = \frac{PM}{DM} = \frac{1/(2\sqrt{3})}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{3},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. (검산으로, $PD^2 = DM^2 - PM^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{12} = \frac{2}{3}$이므로 소문항 (i)과 일치한다.)

소문항 (iii)

가장 좋은 구. O를 DP 위에서 $OP = r$인 점이라 하고, O가 세 개의 기울어진 면에서도 거리 r만큼 떨어지도록 r을 정하자. 대칭성에 의해 면 DBC만 다루면 충분하다.

평면 AMD는 BC에 수직이므로(둘 다 BC에 수직인 AM과 DM을 포함한다), 면 DBC에 수직이고, 따라서 O에서 그 면에 내린 수선(perpendicular)은 이 단면 안에 있다. 즉 그것은 O에서 직선 MD에 내린 수선이다. O는 직선 MP에서 거리 OP, 직선 MD에서 거리 r만큼 떨어져 있고 이 둘이 같기를 원하므로, O는 M에서의 각 θ의 이등분선(bisector) 위에 있어야 한다. 따라서

$$r = PM \tan\tfrac{\theta}{2}.$$

소문항 (ii)에서 $\tan^2\frac{\theta}{2} = \dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$를 이용하면

$$\tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}, \qquad \tan\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

이다(θ가 예각이므로 양수). 그러므로

$$r = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{12}.$$

중심이 O이고 반지름이 $\frac{\sqrt{6}}{12}$인 구는 네 면에 모두 접하며, O가 모든 면에서 적어도 r만큼 떨어진 내부의 점이므로 이 구는 사면체 안에 있다.

생각해 보기 어디에 놓든 이보다 큰 구가 들어갈 수 없다는 것을 어떻게 알 수 있는가?

더 큰 것은 들어가지 않는다. 사면체 내부의 임의의 점 X를 잡고, 네 면까지의 거리를 d_1, d_2, d_3, d_4라 하자. X를 꼭짓점들과 이으면 사면체가 각 면을 밑면으로 하는 네 개의 각뿔로 나뉘고, 각 밑면의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}$이다. 이들의 부피를 더하면

$$V = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{4}\,(d_1 + d_2 + d_3 + d_4).$$

그런데 $X = D$로 잡으면(세 거리는 0이고 하나는 PD이다) $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}\,PD$임을 알 수 있다. 그러므로 모든 내부의 점에 대해

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = PD = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

X를 중심으로 하는 반지름 ρ인 구가 안에 들어가려면 모든 $d_i \geq \rho$이어야 하므로 $4\rho \leq \frac{\sqrt{6}}{3}$, 즉 $\rho \leq \frac{\sqrt{6}}{12}$이다. 따라서 가장 큰 구의 반지름은

$$r = \frac{\sqrt{6}}{12} = \tfrac{1}{4}\,PD,$$

이고, 등호는 네 거리가 모두 같을 때(O에서), 그리고 그때에만 성립한다.

검산

- 좌표: $A = (0,0,0)$, $B = (1,0,0)$, $C = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, $D = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \sqrt{2/3})$로 두면 여섯 모서리의 길이가 모두 1이고, $PD \approx 0.8165$이다.
- 임의의 두 면의 바깥쪽 단위 법선벡터(unit normal)의 내적(dot product)은 $-\frac{1}{3}$이므로, $\cos\theta = \frac{1}{3}$(약 70.5°)임이 확인된다.

- 점 $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{12})$은 네 면 모두에서 거리 $0.20412\ldots = \frac{\sqrt{6}}{12}$만큼 떨어져 있다. 무작위로 잡은 내부의 점들은 항상 거리의 합이 $0.8165\ldots$였고, 그 가장 작은 거리는 결코 0.2041을 넘지 않았다.
- 중심은 PD를 따라 4분의 1만큼 올라간 곳에 있다. 이는 정사면체의 내심(incentre)이 무게중심이고, 무게중심은 한 면에서 맞은편 꼭짓점까지 가는 길의 4분의 1 지점에 있다는 사실과 일치한다.

흔한 실수

- $\angle DAM$이나 $\angle DBA$를 두 면 사이의 각으로 쓰는 것. 두 직선은 모두 공통 모서리에 수직이어야 하며, DM과 AM이 바로 그런 직선이다.
- PA를 중선의 3분의 2가 아니라 절반으로 잡는 것.
- 네 면에 접하는 구를 찾고 나서, 다른 곳에 놓인 구가 왜 더 클 수 없는지를 설명하지 않는 것. 거리의 합에 관한 항등식이 이를 두 줄로 해결해 준다.

STEP 너머

면까지의 거리의 합이 일정하다는 사실은 정삼각형에 대한 비비아니 정리(Viviani's theorem)의 3차원 판이다. 이는 무게중심 좌표(barycentric coordinates)에서 나오는데, 무게중심 좌표는 단체(simplex)의 임의의 점을 꼭짓점들의 가중평균으로 나타낸다. 각 $\arccos\frac{1}{3}$은 화학에도 나타난다. 메테인 분자에서 결합 사이의 각은 $\arccos(-\frac{1}{3}) \approx 109.5°$인데, 이는 바로 이 정사면체의 두 꼭짓점이 중심에서 이루는 각이다. 이런 종류의 3차원 추론을 더 보려면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*를, 내적과 외적(cross product)을 이용한 벡터 접근법을 보려면 Strang의 *Introduction to Linear Algebra*를 참고하라.

풀이

STEP II 2010, 문제 7

순수수학 • 삼차방정식

> **STEP II 2010, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/10-s2-q7

핵심 아이디어

최고차항 계수(leading coefficient)가 양수인 삼차식(cubic)의 그래프가 축과 정확히 한 번만 만나는 것은 두 극점(turning point)이 축의 같은 쪽에 있을 때이고, 그때뿐이다. 소문항 (ii)는 x^2 항이 없는 삼차방정식을 푸는 고전적인 방법이다. 치환(substitution) $x = u + q/u$는 x^3에서 생기는 교차항이 $-3qx$와 상쇄되도록 고른 것이며, 그 결과 u^3에 대한 이차방정식(quadratic equation)이 남는다. 소문항 (iii)은 알고 보면 x 자리에 p가 들어간 같은 삼차방정식이다.

풀이

소문항 (i)

$f(x) = x^3 - 3qx - q(1+q)$라 하자. 그러면 $f'(x) = 3x^2 - 3q$이고, 이는 $x = \pm\sqrt{q}$에서 0이 된다($q > 0$이므로 실수이다). $f''(x) = 6x$이므로 $x = -\sqrt{q}$인 점은 극대(local maximum)이고 $x = \sqrt{q}$인 점은 극소(local minimum)이다.

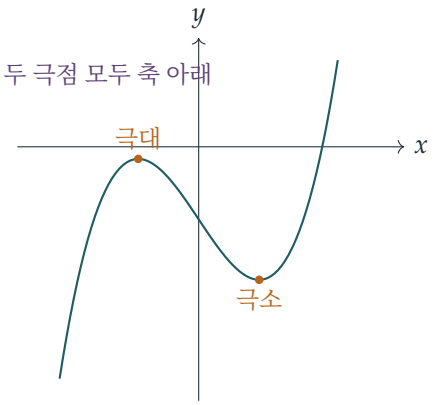
극대점에서

$$\begin{aligned} f(-\sqrt{q}) &= -q\sqrt{q} + 3q\sqrt{q} - q - q^2 \\ &= -q\left(q - 2\sqrt{q} + 1\right) \\ &= -q\left(\sqrt{q} - 1\right)^2. \end{aligned}$$

이다. $q > 0$이고 $q \neq 1$이므로($\sqrt{q} \neq 1$이므로) 이 값은 엄밀히 음수이다. 극솟값은 이보다 더 작다.

$$f(\sqrt{q}) = q\sqrt{q} - 3q\sqrt{q} - q - q^2 = -2q\sqrt{q} - q - q^2 < 0.$$

따라서 두 극점 모두 x축 아래에 있다. $x < \sqrt{q}$에서 곡선은 음수인 극댓값보다 위로 올라가지 않으므로 그 범위에서는 축과 만나지 않는다. $x > \sqrt{q}$에서 함수는 음수 값에서 $+\infty$까지 엄밀히 증가하므로 축과 정확히 한 번 만난다. 그러므로 곡선은 x축과 단 한 번만 만난다.



소문항 (ii)

이항정리(binomial theorem)로 $x = u + q/u$를 세제곱하면

$$\begin{aligned} x^3 &= u^3 + 3u^2 \cdot \frac{q}{u} + 3u \cdot \frac{q^2}{u^2} + \frac{q^3}{u^3} \\ &= u^3 + \frac{q^3}{u^3} + 3q\left(u + \frac{q}{u}\right) = u^3 + \frac{q^3}{u^3} + 3qx. \end{aligned}$$

이다. 따라서 $x^3 - 3qx = u^3 + q^3/u^3$이고, 삼차방정식은 다음과 같이 된다.

$$u^3 + \frac{q^3}{u^3} = q(1+q).$$

양변에 u^3을 곱하면(치환이 의미를 가지려면 $u \neq 0$이어야 함에 주의한다) u^3이 만족하는 이차방정식은 다음과 같다.

$$\left(u^3\right)^2 - q(1+q)\,u^3 + q^3 = 0.$$

생각해 보기 이 이차식은 어떻게 인수분해되는가?

두 근의 합은 $q + q^2$, 곱은 $q^3 = q \cdot q^2$이어야 하므로 두 근은 q와 q^2이다.

$$\left(u^3 - q\right)\left(u^3 - q^2\right) = 0.$$

실수 세제곱근(cube root)을 취하면 $u = q^{1/3}$ 또는 $u = q^{2/3}$이다. 둘 다 같은 x를 준다.

$$q^{1/3} + \frac{q}{q^{1/3}} = q^{1/3} + q^{2/3}, \qquad q^{2/3} + \frac{q}{q^{2/3}} = q^{2/3} + q^{1/3}.$$

직접 확인해 보자. $s = q^{1/3}$, $x = s + s^2$이라 하면 $x^3 = s^3 + 3s^4 + 3s^5 + s^6$이고 $3qx = 3s^4 + 3s^5$이므로 $x^3 - 3qx = s^3 + s^6 = q(1+q)$이다. 소문항 (i)에 의해 $q > 0, q \neq 1$일 때 이 삼차방정식의 실근은 하나뿐이므로, 그 실근은

$$x = q^{1/3} + q^{2/3}.$$

이다.

소문항 (iii)

$\alpha + \beta = p$이고 $\alpha\beta = q$이므로

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta) = p^3 - 3qp,$$

이고, 이것이 보이려던 식이다.

한 근이 다른 근의 제곱이면 $\alpha^2 = \beta$ 또는 $\beta^2 = \alpha$이므로, 어느 경우든

$$(\alpha^2 - \beta)(\beta^2 - \alpha) = 0.$$

이다. 이 식은 α와 β에 대해 대칭(symmetric)이므로 p와 q로 나타낼 수 있다. 전개하면

$$\begin{aligned}(\alpha^2 - \beta)(\beta^2 - \alpha) &= \alpha^2\beta^2 - (\alpha^3 + \beta^3) + \alpha\beta \\ &= q^2 - (p^3 - 3qp) + q.\end{aligned}$$

이다. 이를 0으로 놓으면 다음 관계식을 얻는다.

$$p^3 - 3qp - q(1+q) = 0.$$

이는 소문항 (ii)의 삼차방정식에서 x 자리에 p를 넣은 것과 정확히 같다. $q > 0, q \neq 1$이고 p가 실수이면 p는 이 방정식의 유일한 실근이어야 하므로

$$p = q^{1/3} + q^{2/3}.$$

이다. 이는 타당하다. 이때 두 근은 $\alpha = q^{1/3}$과 $\beta = q^{2/3} = \alpha^2$이며, 그 합은 p이고 곱은 q이다.

검산

$q = 8$로 놓자. 소문항 (ii)에서 $x = 2 + 4 = 6$이고, 실제로 $216 - 144 - 72 = 0$이다. 소문항 (iii)에서 $p = 6$이면 $t^2 - 6t + 8 = (t-2)(t-4)$이고 $4 = 2^2$이다. 컴퓨터로 수천 개의 임의의 q에 대해 (i)의 두 극값을, 임의의 복소수 u에 대해 항등식 $x^3 - 3qx = u^3 + q^3/u^3$을 확인했고, $p = q^{1/3} + q^{2/3}$이면 언제나 한 근이 다른 근의 제곱인 두 근이 나온다는 것도 확인했다.

흔한 실수

- (i)에서 극솟값이 음수라는 것만 확인하는 것. 그것만으로는 축과 세 번 만날 수도 있다. 중요한 것은 극댓값이 음수라는 사실이며, $q \neq 1$이 쓰이는 곳도 바로 여기이다.
- (ii)에서 u^3의 두 값이 서로 다른 두 근을 줄까 봐 걱정하는 것. u와 q/u의 역할이 대칭이므로 두 값은 당연히 같은 x를 준다.

STEP 너머

(ii)의 치환은 일반 삼차방정식에 대한 카르다노(Cardano) 공식의 핵심이며, 수학에서 복소수(complex number)가 처음으로 피할 수 없게 된 곳이기도 하다. 삼차방정식이 세 실근을 가지면 u^3에 대한 이차방정식은 복소근을 갖는다. 제외된 경우인 $q = 1$이 좋은 예이다. 이 때는 $p = -1$도 가능하며, $t^2 + t + 1 = 0$의 근은 1의 복소 세제곱근(cube roots of unity)인 ω와 ω^2로, 각각 다른 하나의 제곱이다. 다항방정식이 언제 거듭제곱근(radical)으로 풀리는지에 대한 온전한 이야기는 갈루아 이론(Galois theory)이며, Allenby, *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)에 잘 설명되어 있다.

풀이

STEP II 2010, 문제 8

순수수학 • 곡선 사이의 넓이

> **STEP II 2010, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/10-s2-q8

핵심 아이디어

$\sin x \le 1$이므로 곡선 $y = \mathrm{e}^{-x}\sin x$는 $y = \mathrm{e}^{-x}$보다 위로 올라갈 수 없다. 두 곡선은 정확히 $\sin x = 1$인 곳에서 만나며, 그곳에서 서로 접할 뿐이다. 따라서 각 넓이는 이웃한 두 접점 사이에서 $\mathrm{e}^{-x}(1-\sin x)$를 적분한 하나의 적분이며, 부호가 바뀌는 것을 걱정할 필요가 없다. $\mathrm{e}^{-x}\sin x$의 적분은 전형적인 "부분적분(integration by parts)을 두 번 하는" 문제이고, 적분 구간의 끝점이 모두 $\sin x = 1, \cos x = 0$인 점이므로 그곳에서 원시함수(antiderivative)는 아주 간단한 꼴로 정리된다.

풀이

개형 그리기

C_1은 익숙한 감소하는 지수함수 곡선으로, $(0,1)$에서 시작하여 0을 향해 감소한다. C_2는 감쇠하는 사인파이다. 원점에서 시작하고, π의 모든 배수에서 값이 0이며, $-1 \le \sin x \le 1$이므로 $y = \mathrm{e}^{-x}$와 $y = -\mathrm{e}^{-x}$ 사이에 갇혀 있다. 진동은 매우 빠르게 줄어든다. 첫 번째로 음수가 되는 골짜기의 깊이부터 이미 약 0.014에 불과하다($x = \frac{5\pi}{4}$에서).

두 곡선은 어디에서 만나는가? $\mathrm{e}^{-x} > 0$이므로

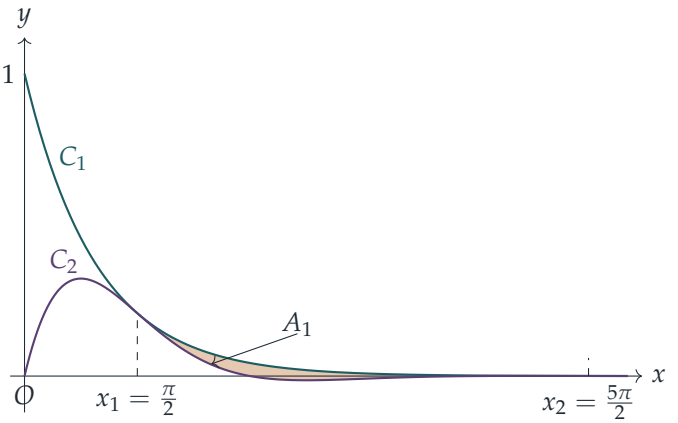
$$\mathrm{e}^{-x}\sin x = \mathrm{e}^{-x} \iff \sin x = 1 \iff x = \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

이 점들에서 두 곡선은 교차하지 않고 접한다. 즉 C_2는 모든 곳에서 C_1 위에 있거나 그 아래에 있다. 실제로 이 점들에서는 기울기도 같은데,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{-x}\sin x\right) = \mathrm{e}^{-x}(\cos x - \sin x) = -\mathrm{e}^{-x} \quad \text{단, } \sin x = 1,\ \cos x = 0.$$

이기 때문이다. C_2의 첫 번째 극댓값은 $x = \frac{\pi}{4}$($\cos x = \sin x$인 곳)에서 나타나며, 이는 첫

번째 접점 $x = \frac{\pi}{2}$보다 **앞선다**는 점에 주의하라. 따라서 개형에서는 C_2가 정점에 이른 뒤 내려와서 C_1과 접하도록 그려야 한다.



넓이 A_n

n번째 접점은 $x > 0$에서 $\sin x = 1$의 n번째 해이다.

$$x_n = \tfrac{\pi}{2} + 2(n-1)\pi = \tfrac{(4n-3)\pi}{2}, \qquad x_{n+1} = x_n + 2\pi.$$

x_n과 x_{n+1} 사이에서 $\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}\sin x = \mathrm{e}^{-x}(1-\sin x) \geq 0$이므로 이 구간 전체에서 C_1이 위쪽 경계이고,

$$A_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \mathrm{e}^{-x}(1-\sin x)\,\mathrm{d}x.$$

이다.

? 생각해 보기 $\mathrm{e}^{-x}\sin x$는 어떻게 적분하는가?

부분적분을 두 번 하면 처음의 적분으로 되돌아온다. $I = \int \mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$라 하자. $u = \sin x$, $\mathrm{d}v = \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$로 부분적분하고, 다시 $u = \cos x$로 부분적분하면

$$\begin{aligned} I &= -\mathrm{e}^{-x}\sin x + \int \mathrm{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x \\ &= -\mathrm{e}^{-x}\sin x - \mathrm{e}^{-x}\cos x - \int \mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

이므로 $2I = -\mathrm{e}^{-x}(\sin x + \cos x)$이고 $I = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}(\sin x + \cos x) + c$이다. (미분해 보면 확인할 수 있다.)

따라서 $\mathrm{e}^{-x}(1-\sin x)$의 한 원시함수는

$$F(x) = -\mathrm{e}^{-x} + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}(\sin x + \cos x).$$

이다. 이제 깔끔한 부분이 나온다. 모든 접점에서 $\sin x = 1, \cos x = 0$이므로 그곳에서

$$F(x) = -\mathrm{e}^{-x} + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} = -\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}.$$

이다. 그러므로 $x_{n+1} = x_n + 2\pi$를 이용하면

$$\begin{aligned} A_n = F(x_{n+1}) - F(x_n) &= \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x_n} - \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x_n-2\pi} \\ &= \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x_n-2\pi}\left(\mathrm{e}^{2\pi} - 1\right). \end{aligned}$$

마지막으로 $x_n + 2\pi = \frac{(4n-3)\pi}{2} + \frac{4\pi}{2} = \frac{(4n+1)\pi}{2}$이므로

$$A_n = \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{2\pi} - 1\right)\mathrm{e}^{-(4n+1)\pi/2},$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

무한합

이 식으로부터 $A_{n+1} = \mathrm{e}^{-2\pi}A_n$임을 알 수 있으므로, 넓이들은 첫째항이 $A_1 = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2\pi} - 1)\mathrm{e}^{-5\pi/2}$이고 공비(common ratio)가 $r = \mathrm{e}^{-2\pi}$인 등비급수(geometric series)를 이룬다. $0 < r < 1$이므로 이 급수는 수렴(converge)하고,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} A_n = \frac{A_1}{1 - \mathrm{e}^{-2\pi}} &= \frac{\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2\pi} - 1)\mathrm{e}^{-5\pi/2}}{\mathrm{e}^{-2\pi}(\mathrm{e}^{2\pi} - 1)} \\ &= \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\pi/2}. \end{aligned}$$

이다.

검산

- 합계는 x_1의 오른쪽에서 두 곡선 사이에 있는 넓이 전체이므로 $\int_{\pi/2}^{\infty} \mathrm{e}^{-x}(1 - \sin x)\,\mathrm{d}x = \lim_{X\to\infty} F(X) - F(\frac{\pi}{2}) = 0 + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\pi/2}$와 같아야 한다. 실제로 그러하며, 급수를 쓸 필요도 없다.
- 수치로 보면 $A_1 \approx 0.10375$이고 $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\pi/2} \approx 0.10394$이다. $\mathrm{e}^{-2\pi} \approx 0.0019$이므로, 개형에서 짐작할 수 있듯이 넓이의 거의 전부가 첫 번째 영역에 있다. 구간 $[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$에서 $\mathrm{e}^{-x}(1 - \sin x)$에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용해도 같은 값 0.103746을 얻는다.

흔한 실수

- 접점을 C_2가 극댓값을 갖는 점으로 잡는 것. 극댓값은 $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$에서 나타나고, 두 곡선이 접하는 곳은 $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$이다.

- $\sin x = \pm 1$의 해를 모두 세거나, $\sin x = 1$의 해가 π 간격으로 있다고 보는 것. 이웃한 접점 사이의 간격은 2π이다.
- $\int \mathrm{e}^{-x} \sin x \, \mathrm{d}x$에서 부호를 틀리는 것. 답을 미분하여 확인하라.

STEP 너머

곡선 C_2는 감쇠 진동(damped oscillation), 즉 마찰이 있는 용수철의 운동 모양이며, 포락선(envelope) $\pm \mathrm{e}^{-x}$가 진동이 얼마나 빨리 사라지는지를 결정한다. $\int \mathrm{e}^{-x} \sin x \, \mathrm{d}x$ 같은 적분은 $\int \mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})x} \, \mathrm{d}x$의 허수부로 보면 훨씬 빨리 계산할 수 있는데, 이는 대학 1학년 과정의 미분방정식(differential equation)과 라플라스 변환(Laplace transform)에서 늘 쓰이는 기법이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에서 감쇠 진동을 자세히 다룬다.

풀이

STEP II 2010, 문제 9

역학 • 충돌하는 포물체

STEP II 2010, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

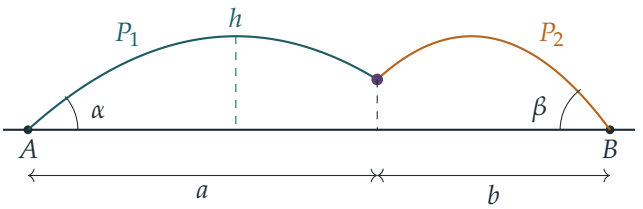
step.maths.org/questions/10-s2-q9

핵심 아이디어

같은 순간에 쏘아 올린 두 입자는 같은 가속도 g로 떨어지므로, 충돌하는 순간 두 입자의 높이가 같으려면 처음 연직 속도(vertical velocity)가 같아야만 한다. 그러면 두 입자의 연직 운동은 완전히 같다. 최고 높이(greatest height) h도 같고, 그 높이에 도달하는 시각도 같으며, 땅에 떨어지는 시각도 같다. 충돌은 최고점과 착지 사이에 일어나고, 각 입자가 이동한 수평 거리는 시간에 비례하므로 두 개의 간단한 경계 사이에 놓이게 된다.

풀이

두 입자를 공기 저항(air resistance) 없이 중력 g만 받으며 자유롭게 움직이는 포물체(projectile)로 모형화한다. P_1의 속력을 u, P_2의 속력을 v라 하고, 발사 순간을 $t = 0$으로 잡으며, 충돌이 시각 $t_c > 0$에 일어난다고 하자.



같은 연직 운동

시각 t에서 P_1과 P_2의 높이는 다음과 같다.

$$y_1 = ut\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2, \qquad y_2 = vt\sin\beta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

충돌할 때 $y_1 = y_2$이므로 $(u\sin\alpha - v\sin\beta)\,t_c = 0$이고, $t_c > 0$이므로

$$u\sin\alpha = v\sin\beta.$$

따라서 두 입자의 연직 운동은 완전히 같다. 특히 두 입자 모두 같은 최고 높이 h에, 같은 시각 T에 도달하며, 이때

$$T = \frac{u\sin\alpha}{g} = \frac{v\sin\beta}{g}, \qquad h = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} = \frac{v^2\sin^2\beta}{2g},$$

이고, 두 입자 모두 시각 $2T$에 땅으로 돌아오게 된다.

생각해 보기 "공중에서"와 "P_1이 최고 높이에 도달한 뒤"라는 조건은 t_c에 대해 무엇을 알려 주는가?

P_1은 시각 T에 가장 높이 있으므로, "뒤"라는 조건에서 $t_c > T$이다. 두 입자는 $0 < t < 2T$일 때만 지면 위에 있으므로, 공중에서 충돌하려면 $t_c < 2T$여야 한다. 따라서

$$T < t_c < 2T.$$

b의 범위

수평 방향으로 P_2는 일정한 속력 $v\cos\beta$로 움직이므로 $b = v\cos\beta\,t_c$이다. 시각 T까지 이동했을 거리는

$$v\cos\beta\,T = \frac{v^2\sin\beta\cos\beta}{g} = \frac{v^2\sin^2\beta}{2g}\cdot\frac{2\cos\beta}{\sin\beta} = 2h\cot\beta.$$

따라서

$$b = v\cos\beta\,T\cdot\frac{t_c}{T} = 2h\cot\beta\cdot\frac{t_c}{T},$$

이고, $1 < t_c/T < 2$이며 (β가 예각이므로) $2h\cot\beta > 0$이므로

$$2h\cot\beta < b < 4h\cot\beta,$$

가 성립한다. 이것이 증명하려던 결과이다.

a의 범위

완전히 같은 방법으로 $a = u\cos\alpha\,t_c$이고

$$u\cos\alpha\,T = \frac{u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = 2h\cot\alpha,$$

이므로 $a = 2h\cot\alpha\cdot t_c/T$이며, $1 < t_c/T < 2$로부터

$$2h\cot\alpha < a < 4h\cot\alpha.$$

여기서는 같은 h를 쓴다. h는 정의에 따라 P_1의 최고 높이이고, 연직 운동이 같으므로 P_2의 최고 높이이기도 하다.

검산

- 경계의 경우: 정확히 최고점에서 충돌하면($t_c = T$) $a = 2h\cot\alpha$가 되는데, 이는 잘 알려진 사정거리(range)의 절반 $\frac{u^2\sin 2\alpha}{2g}$이다. 착지하는 순간에 충돌하면($t_c = 2T$) $a = 4h\cot\alpha$, 즉 전체 사정거리 $\frac{u^2\sin 2\alpha}{g}$가 된다. 문제의 등호 없는 부등식(strict inequality)은 이 두 값 사이에 놓인다.
- 수치 확인: $g = 9.8$, $u = 20$, $\alpha = 0.7$, $\beta = 0.9$ (라디안), $v = u\sin\alpha/\sin\beta$, $t_c = 1.5T$로 두면 $h \approx 8.470$, $a \approx 30.17$을 얻고, 이는 $2h\cot\alpha \approx 20.11$과 $4h\cot\alpha \approx 40.22$ 사이에 있다(실제로 정확히 1.5×20.11이다). 이런 방식으로 무작위 설정 20 000개를 시험했는데, P_1의 운동을 단계별로 계산하여 h를 확인하고 두 입자가 실제로 한 점에서 만나는지 점검했다.

흔한 실수

- 두 입자가 충돌 지점에 도달하는 시간을 서로 다르게 취급하는 것: 두 입자는 동시에 발사되므로 같은 t_c이다.
- 상한(upper bound)을 정당화하는 것을 잊는 것: 상한은 충돌이 공중에서, 즉 공통 착지 시각 $2T$ 이전에 일어난다는 사실에서 나온다.

STEP 너머

핵심 단계는 기준틀(frame)을 바꾸는 것이다. 가속도 g로 자유낙하하는 기준틀에서는 두 입자 모두 일정한 속도로 직선 운동을 하므로, 그 기준틀에서 서로를 겨냥하고 있었을 때만 충돌한다. 이것이 고전적인 "원숭이와 사냥꾼(monkey and hunter)" 아이디어이다. 가속하는 기준틀에서 생각하는 것, 그리고 가속도가 균일하지 않을 때 생기는 가상의 힘(fictitious force)은 대학 1학년 역학의 중심 주제이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 포물체 운동, 상대 운동(relative motion), 비관성 기준틀(non-inertial frame)을 좋은 문제들과 함께 다룬다.

풀이

STEP II 2010, 문제 10

역학 • 탄성 충돌

> **STEP II 2010, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/10-s2-q10

이 문제는 *Beyond STEP*의 10.2 절 **포갠 공 효과**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch10/stacked-balls.html

핵심 아이디어

모든 것은 하나의 충돌, 즉 한 입자가 정지해 있는 입자에 탄성(elastic) 충돌하는 상황에 달려 있다. 운동량 보존(conservation of momentum)과 뉴턴의 실험 법칙(Newton's experimental law)($e = 1$인 경우)을 함께 쓰면 전달되는 속력을 구할 수 있고, 이 속력은 질량의 비(*ratio*)에만 의존한다. 소문항 (ii)에서는 모든 충돌의 질량비가 λ로 같으므로 충돌할 때마다 속력에 같은 인수가 곱해지고, 나머지는 등비수열(geometric progression)이 해결해 준다.

풀이

입자들을 매끄러운 탁자 위의 한 직선을 따라 움직이는 질점(point mass)으로 모형화하고, 모든 속도는 B의 처음 운동 방향을 양의 방향으로 하여 잰다.

소문항 (i)

충돌 직후 B와 A의 속도를 각각 v_B, v_A라 하자. 운동량 보존에 의하여

$$bmu = bm\,v_B + m\,v_A,$$

이고, 충돌이 완전 탄성(perfectly elastic) 충돌($e = 1$)이므로 뉴턴의 실험 법칙에 의하여 멀어지는 속력과 가까워지는 속력이 같다.

$$v_A - v_B = u.$$

$v_B = v_A - u$를 운동량 방정식에 대입하고 m을 약분하면

$$bu = b(v_A - u) + v_A \quad \Longrightarrow \quad v_A = \frac{2bu}{b+1}.$$

따라서 A의 속력은 $\dfrac{2b}{b+1}\,u$이다.

이 식은 질량의 비 b만을 사용하였고, 유도 과정은 모든 $b > 0$에 대하여 성립한다. $b + 1 > b$이고 $u > 0$이므로

$$v_A = 2u \cdot \frac{b}{b+1} < 2u,$$

가 b의 값에 관계없이 성립한다. 따라서 A가 B의 처음 속력의 두 배로 움직이게 할 수는 결코 없지만, b를 크게 잡으면 $2u$에 원하는 만큼 가까워지게 할 수 있다.

소문항 (ii)

직선을 따라 차례로 놓인 입자들의 질량은 다음과 같다.

$$B_1 : \lambda^n m, \quad B_2 : \lambda^{n-1} m, \quad \ldots, \quad B_n : \lambda m, \quad A : m.$$

각 입자는 바로 다음 입자보다 λ배 무겁다. 따라서 속력 v로 움직이는 입자가 다음의 (정지해 있는) 입자에 부딪힐 때마다 $b = \lambda$로 하여 소문항 (i)을 적용할 수 있고, 부딪힌 입자는 속력 kv로 움직이기 시작한다. 여기서

$$k = \frac{2\lambda}{\lambda + 1}.$$

소문항 (i)의 식 $v_B = v_A - u$로부터, 부딪친 입자는 속력

$$kv - v = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}\,v,$$

로 계속 앞으로 움직이며, $\lambda > 1$이므로 이 값은 양수이다.

따라서 B_1은 B_2에게 속력 ku를 주고, 이어서 B_2는 B_3에게 속력 k^2u를 주며, 이와 같이 계속하여 마침내 속력 $k^{n-1}u$로 움직이는 B_n이 A에게 속력

$$v_A = k^n u = \left(\frac{2\lambda}{\lambda + 1}\right)^n u.$$

를 준다.

생각해 보기 어떤 B_i가 속력을 전달한 뒤 앞의 입자를 따라잡아 추가 충돌이 일어날 수 있을까?

n번의 충돌이 모두 끝난 뒤 $i = 1, \ldots, n$에 대하여 B_i는 속력 $\dfrac{\lambda - 1}{\lambda + 1} k^{i-1} u$로 앞으로 움직이고, A는 속력 $k^n u$로 움직인다. $\lambda > 1$이면 $2\lambda > \lambda + 1$이므로 $k > 1$이고, 따라서 이 속력들은 직선을 따라 순증가한다. 즉 각 입자가 바로 뒤의 입자보다 빠르게 움직이므로 입자들은 서로 멀어진다. 그러므로 더 이상의 충돌은 없으며, A의 최종 속력은 $k^n u$이다.

$k > 1$이므로 $n \to \infty$일 때 $k^n \to \infty$이다. 따라서 임의의 목표 속력 V에 대하여 $k^n u > V$가 되도록 n을 충분히 크게 잡으면 A는 V보다 빠르게 움직인다. 즉 A의 속력에는 상한이 없다.

$\lambda = 4$인 경우

이때 $k = \frac{8}{5}$이고, $\left(\frac{8}{5}\right)^n > 20$을 만족하는 가장 작은 n을 구해야 한다. 밑이 10인 로그(logarithm)를 취하면 (로그는 증가함수이므로 부등식의 방향이 유지된다)

$$n \log_{10} \tfrac{8}{5} > \log_{10} 20.$$

$\frac{8}{5} = \frac{2^4}{10}$, $20 = 2 \times 10$으로 쓰면

$$\log_{10} \tfrac{8}{5} = 4 \log_{10} 2 - 1 \approx 0.20412,$$
$$\log_{10} 20 = \log_{10} 2 + 1 \approx 1.30103.$$

$\log_{10} \frac{8}{5} > 0$이므로 양변을 이 값으로 나눌 수 있고, 따라서

$$n > \frac{1.30103}{0.20412} \approx 6.37.$$

이를 만족하는 가장 작은 정수는 $n = 7$이다. (여유가 충분하다. 6.37은 정수와 멀리 떨어져 있으므로 $\log_{10} 2$의 근삿값 때문에 답이 바뀔 수는 없다.)

검산

- 소문항 (i)에서 $b = 1$이면 $v_A = u$, $v_B = 0$이다. 질량이 같은 두 입자는 당연히 속도를 서로 맞바꾼다. $b \to \infty$이면 $v_A \to 2u$이다.
- 운동 에너지(kinetic energy): $v_A = \frac{2b}{b+1} u$, $v_B = \frac{b-1}{b+1} u$이면 $b v_B^2 + v_A^2 = \frac{b(b-1)^2 + 4b^2}{(b+1)^2} u^2 = bu^2$이므로 에너지가 보존된다.
- 직접 계산하면 $1.6^6 \approx 16.78 < 20$이고 $1.6^7 \approx 26.84 > 20$이므로 $n = 7$이 확인된다. 정확한 분수를 써서 입자들의 사슬을 한 단계씩 시뮬레이션해 보아도 정확히 n번의 충돌 후 A의 속력이 정확히 $k^n u$로 나왔다.

흔한 실수

- 질량의 순서를 거꾸로 생각하는 실수: B_1이 **가장 무겁고**$(\lambda^n m)$ B_n이 B들 중 가장 가벼우며(λm), A는 그보다 더 가볍다.
- 충돌 횟수를 n이 아니라 $n-1$로 세는 실수: 속력은 $B_1 \to B_2 \to \cdots \to B_n \to A$로 전달되며, 이는 n단계이다.
- 이후의 충돌이 없음을 보이는 것을 빠뜨리거나, 가장 작은 정수 $n = 7$ 대신 정수가 아닌 6.37을 답으로 쓰는 실수.

STEP 너머

한 번의 탄성 충돌로는 속력을 기껏해야 두 배로 만들 수 있지만, 충돌의 사슬에는 그런 한계가 없다. 이것이 "쌓은 공(stacked ball)" 시연의 원리로, 무거운 공 위에 가벼운 공을 올려놓고 떨어뜨리면 가벼운 공이 떨어진 높이보다 훨씬 높이 튀어 오른다. 운동량과 에너지를 통하여 (그리고 더 깔끔하게는, 탄성 충돌이 각 속도를 단순히 반대로 뒤집기만 하는 질량중심 좌표계(centre-of-mass frame)에서) 충돌을 분석하는 것은 대학 1학년 역학의 중심 주제이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)가 이를 깊이 있게 다룬다.

풀이

STEP II 2010, 문제 11

역학 • 세 힘의 평형

> **STEP II 2010, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/10-s2-q11

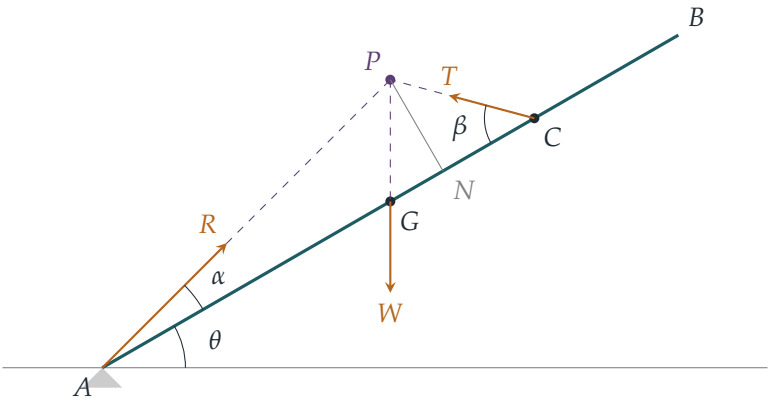
핵심 아이디어

막대에 작용하는 힘은 세 가지뿐이다. 막대의 무게, A에서의 반력(reaction), 그리고 C에서의 장력(tension)이다. 평행하지 않은 세 힘이 한 물체를 평형(equilibrium) 상태로 유지할 때, 세 힘의 작용선(line of action)은 반드시 한 점을 지나야 한다. 따라서 A에서의 반력의 작용선, C에서의 줄의 방향선, 막대의 중점을 지나는 연직선은 모두 한 점에서 만난다. 그 공통점에서 막대를 따라, 그리고 막대에 수직으로 거리를 재면, 힘 자체를 구할 필요 없이 문제 전체가 간단한 직각삼각형의 삼각법 문제로 바뀐다.

풀이

모형과 그림

막대를 균일한 강체 막대(uniform rigid rod)로 모형화하므로, 무게 W는 중점 G에 작용하고 $AG = 2L$이다. 줄은 가벼우므로(light) C에서 자기 길이 방향으로 막대를 당기며, 여기서 $AC = 3L$이다. 받침은 A에서 하나의 힘 R을 작용한다(받침이 매끄러운지 거친지는 주어지지 않았으며, 알 필요도 없다). 그림은 $\theta = 30°$, $\beta = 45°$인 경우를 축척에 맞게 그린 것이다.



공식 보이기

무게는 G를 지나 연직으로 작용하고, 줄의 작용선은 C를, 반력의 작용선은 A를 지난다. 이 세 직선은 평행하지 않으므로 세 직선 모두 한 점을 지나며, 이 점을 P라 하자.

? **생각해 보기** 세 작용선은 왜 한 점에서 만나야 할까?

R와 T의 작용선이 P에서 만난다고 하자. P에 대한 모멘트(moment)를 취하면 R와 T의 모멘트는 모두 영이므로, 막대가 회전 평형을 이루려면 무게의 P에 대한 모멘트도 영이어야 한다. 이는 G를 지나는 연직선도 P를 지난다는 뜻이다.

P에서 막대에 내린 수선의 발(foot of the perpendicular)을 N이라 하고, $h = PN$이라 하자. 직각삼각형 PNA에서 A에서의 각은 α이므로 $AN = h\cot\alpha$이다. 직각삼각형 PNC에서 C에서의 각은 β이므로 $NC = h\cot\beta$이다. $AN + NC = AC$이므로

$$h\cot\alpha + h\cot\beta = 3L. \tag{1}$$

(α나 β가 둔각이면 N은 A 또는 C의 바깥쪽에 놓이지만, 부호 있는 길이(signed length) $h\cot\alpha$와 $h\cot\beta$의 합은 여전히 AC이므로 (1)은 모든 경우에 성립한다.)

이제 세 번째 작용선을 이용하자. 막대는 수평면과 각 θ를 이루므로, 수선 PN은 연직선 PG와 각 θ를 이룬다. 직각삼각형 PNG에서 P에서의 각은 θ이므로 $GN = h\tan\theta$이고, 그림에서처럼 N은 G의 위쪽(A에서 더 먼 쪽)에 놓인다. 따라서

$$h\cot\alpha = AN = AG + GN = 2L + h\tan\theta. \tag{2}$$

(1)에서 (2)를 빼면 $h\cot\beta = L - h\tan\theta$, 즉

$$L = h(\cot\beta + \tan\theta).$$

이 L의 값을 (2)에 대입하면

$$h\cot\alpha = 2h(\cot\beta + \tan\theta) + h\tan\theta = h(3\tan\theta + 2\cot\beta).$$

$h \neq 0$이므로(그렇지 않으면 P가 막대 위의 G에 놓이게 되고, C에 매인 줄이 막대를 따라 놓이게 되어 A에 대한 무게의 모멘트와 균형을 이룰 수 없다) h로 나눌 수 있다.

$$\cot\alpha = 3\tan\theta + 2\cot\beta,$$

이로써 원하는 식이 증명되었다.

$\theta = 30°$, $\beta = 45°$인 경우

$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$이고 $\cot 45° = 1$이므로

$$\cot\alpha = \frac{3}{\sqrt{3}} + 2 = 2 + \sqrt{3}.$$

이제 $\cot 15°$를 구해야 한다. $A = 45°$, $B = 30°$로 두고 $\tan(A - B)$를 이용하면

$$\tan 15° = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2} = 2 - \sqrt{3},$$

이므로

$$\cot 15° = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = 2 + \sqrt{3}.$$

따라서 $\cot\alpha = \cot 15°$이다. 각 α는 $0°$와 $180°$ 사이에 있고, 이 구간에서 cot은 순감소(strictly decreasing)하므로 각 값을 정확히 한 번씩만 가진다. 그러므로 $\alpha = 15°$이다.

검산

- **독립적인 다른 방법.** A에 대한 모멘트를 취하면 $T \cdot 3L\sin\beta = W \cdot 2L\cos\theta$이다. 이어서 막대 방향과 막대에 수직인 방향으로 힘을 분해하면 R의 성분이 나오고, $\cot\alpha$는 그 성분들의 비이다. 이렇게 하면 같은 공식이 다시 얻어진다. 이 방법으로 무작위 순서쌍 (θ, β) 10^5개에 대해 수치적으로 확인했으며, 약 10^{-15} 이내로 일치했다.
- **특수한 값.** $\theta = 30°$, $\beta = 45°$일 때 수치적으로 구한 평형은 $\alpha = 15.000°$를 주며, $\cot 15° = 3.7320\ldots = 2 + \sqrt{3}$이다. 그림은 축척에 맞게 그려져 있다. P는 G의 바로 위, A보다 $\sqrt{3}L$만큼 높은 곳에 있다.
- **극한의 경우.** $\theta \to 0$이고 $\beta = 90°$이면(수평인 막대, 연직인 줄) 공식은 $\cot\alpha = 0$을 주므로 $\alpha = 90°$이다. 즉 반력도 연직이며, 다른 모든 힘이 연직일 때 당연히 그래야 한다.

흔한 실수

- 무게를 C에 두거나 $AG = 3L/2$로 잡는 것. 무게는 막대 전체의 중점, 즉 A에서 $2L$인 곳에 작용한다.
- GN의 부호를 틀리는 것. 막대가 A에서 위로 기울어져 있으므로, G를 지나는 연직선은 P에서 내린 수선과 G에 대해 A의 반대쪽에서 만난다. 따라서 $AN = 2L + h\tan\theta$이며, $2L - h\tan\theta$가 아니다.
- $\cot\alpha = 2 + \sqrt{3}$에서 멈추고, 이것이 $\cot 15^\circ$임을 보이지 않거나 이 값이 왜 α를 유일하게 결정하는지 말하지 않는 것.

STEP 너머

세 힘 정리(three-force theorem)는 정역학(statics)의 일반적인 사실의 특수한 경우이다. 강체(rigid body)에 작용하는 임의의 힘들의 계는 선택한 한 점을 지나는 하나의 힘과 하나의 우력(couple)으로 환원되며, 평형이란 이 둘이 모두 영이라는 뜻이다. 대학에서는 이것이 전체 힘과 전체 모멘트 $\sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$가 모두 영이 된다는 벡터 조건이 되고, 이는 강체 동역학(rigid-body dynamics)의 토대가 된다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 토크(torque)와 평형을 이러한 벡터 언어로 전개한다.

풀이

STEP II 2010, 문제 12

확률과 통계 • 평균과 중앙값

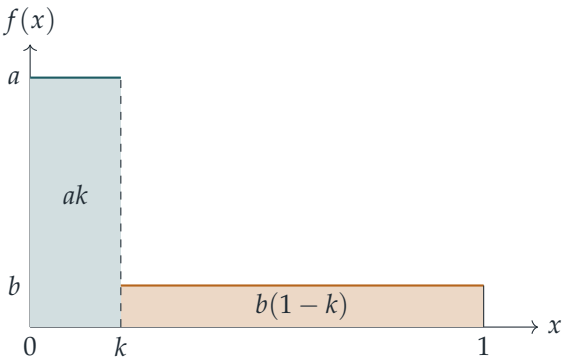
STEP II 2010, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/10-s2-q12

핵심 아이디어

이 밀도함수(density function)는 두 단계로 된 계단함수(step function)이므로 모든 확률은 직사각형의 넓이이고, 실질적인 조건은 전체 넓이가 1이라는 것 하나뿐이다. 이 조건이 k를 a와 b로 결정하며, k를 소거하고 나면 나머지는 모두 대수 계산이다. 중앙값(median)에 대해서는 높은 첫 번째 직사각형이 이미 확률의 절반을 담고 있는지만 따지면 된다.



풀이

그림의 두 직사각형의 넓이는 ak와 $b(1-k)$이므로, 밀도함수의 적분값이 1이 될 필요충분조건은

$$ak + b(1-k) = 1, \qquad \text{즉,} \qquad k = \frac{1-b}{a-b}.$$

이다. ($a > b$이므로 $a - b$로 나눌 수 있다.) 이후 줄곧 이 k의 값을 사용한다.

$a > 1$이고 $b < 1$인 이유. 등식 $ak + b(1-k) = 1$은 1이 a와 b의 가중평균(weighted average)이고, 그 가중치 k와 $1-k$가 모두 0과 1 사이에 엄격하게 놓인다는 뜻이다. 양의 가중치를 갖는 가중평균은 두 값 사이에 엄격하게 놓이므로 $b < 1 < a$이다. 말없이 식으로 나타내면 $1 - b = k(a-b) > 0$이고 $a - 1 = (1-k)(a-b) > 0$이다.

소문항 (i)

각 구간에서 $xf(x)$를 적분하면

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^k ax\,\mathrm{d}x + \int_k^1 bx\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}ak^2 + \tfrac{1}{2}b(1-k^2) = \tfrac{1}{2}\big(b + (a-b)k^2\big).$$

이다. 이제 $(a-b)k^2 = \dfrac{(1-b)^2}{a-b}$이므로

$$\mathrm{E}(X) = \frac{b(a-b) + (1-b)^2}{2(a-b)} = \frac{ab - b^2 + 1 - 2b + b^2}{2(a-b)} = \frac{1 - 2b + ab}{2(a-b)},$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

소문항 (ii)

누적분포함수(cumulative distribution function)는

$$\mathrm{F}(x) = \begin{cases} ax & 0 \le x < k, \\ ak + b(x-k) & k \le x \le 1. \end{cases}$$

이다. 이 함수는 $[0,1]$에서 연속이고 순증가하므로, 중앙값 M은 $\mathrm{F}(M) = \frac{1}{2}$의 유일한 해이다. 어느 식을 쓸지는 첫 번째 직사각형이 확률의 절반 이상을 담고 있는지에 따라 달라진다.

> ? **생각해 보기** "첫 번째 직사각형의 넓이가 $\frac{1}{2}$ 이상이다"를 어떻게 a와 b에 대한 조건으로 바꿀까?

k를 대입하고 양수인 분모 $a-b$를 없애면 다음을 얻는다.

$$ak \ge \tfrac{1}{2} \iff 2a(1-b) \ge a - b \iff 2a - 2ab \ge a - b \iff a + b \ge 2ab.$$

$a + b \ge 2ab$인 경우. 이때 $\mathrm{F}(k) = ak \ge \frac{1}{2}$이므로 중앙값은 $[0,k]$에 있고 $aM = \frac{1}{2}$를 만족한다. 따라서

$$M = \frac{1}{2a}.$$

$a + b \le 2ab$인 경우. 이때 $ak \le \frac{1}{2}$이므로 중앙값은 $[k,1]$에 있다. 오른쪽 끝에서부터 계산하는 것이 가장 쉽다. M의 오른쪽에 있는 확률은 $b(1-M)$이고, 이것이 $\frac{1}{2}$와 같아야 한다. 따라서

$$M = 1 - \frac{1}{2b} = \frac{2b-1}{2b}.$$

$a+b=2ab$일 때는 두 식이 모두 적용되며 값이 일치한다. 이때 $1-\frac{1}{2b}=\frac{2ab-a}{2ab}=\frac{b}{2ab}=\frac{1}{2a}$이기 때문이다.

소문항 (iii)

각 경우에 $\mathrm{E}(X)-M$을 계산하여 양수임을 보인다.

$a+b\geq 2ab$인 경우. 공통분모 $2a(a-b)$로 통분하면

$$\mathrm{E}(X)-\frac{1}{2a}=\frac{a(1-2b+ab)-(a-b)}{2a(a-b)}=\frac{b-2ab+a^2b}{2a(a-b)}=\frac{b(a-1)^2}{2a(a-b)}.$$

$a+b\leq 2ab$인 경우. 공통분모 $2b(a-b)$로 통분하면

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)-\frac{2b-1}{2b}&=\frac{b(1-2b+ab)-(2b-1)(a-b)}{2b(a-b)}\\&=\frac{(b-2b^2+ab^2)-(2ab-2b^2-a+b)}{2b(a-b)}=\frac{a(1-b)^2}{2b(a-b)}.\end{aligned}$$

생각해 보기 이 값들이 단지 음이 아닌 것이 아니라 엄격하게 양수인 이유는 무엇인가?

두 경우 모두 a, b, $a-b$는 양수이고, 처음에 $a>1$이고 $b<1$임을 보였으므로 제곱 항도 엄격하게 양수이다. 따라서 모든 경우에 $\mathrm{E}(X)-M>0$이고, $M<\mathrm{E}(X)$이다.

검산

- $a=3$, $b=\frac{1}{2}$로 두면 $k=\frac{1}{5}$, $a+b=\frac{7}{2}\geq 3=2ab$이고, $\mathrm{E}(X)=\frac{1-1+\frac{3}{2}}{5}=0.3$인 반면 $M=\frac{1}{6}$이다. 그 차 $0.1\overline{3}$은 $\frac{b(a-1)^2}{2a(a-b)}=\frac{2}{15}$와 일치한다.
- $a=\frac{5}{4}$, $b=\frac{9}{10}$로 두면 이번에는 $a+b=2.15\leq 2.25=2ab$이므로 $M=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}\approx 0.444$이고, $\mathrm{E}(X)=\frac{13}{28}\approx 0.464$이다.
- $a\to 1^+$이면 (따라서 $b\to 1^-$이면) 밀도함수는 균등분포(uniform distribution)의 밀도함수로 수렴하고, 두 차는 모두 0으로 수렴한다. 대칭성에서 예상할 수 있듯이 평균과 중앙값은 $\frac{1}{2}$에서 일치한다.

임의로 고른 300개의 쌍 (a,b)에 대하여, F에 이분법(bisection)을 적용해 구한 중앙값이 경우별 공식과 일치하는지, 중점 수치적분(midpoint quadrature)으로 구한 평균이 소문항 (i)의 결과와 일치하는지, 그리고 $\mathrm{E}(X)-M$이 위의 인수분해된 식과 같은지를 수치적으로 확인하였다.

흔한 실수

- k를 소거하는 것을 잊는 실수. 답은 a와 b만으로 나타내야 한다.
- 두 번째 경우의 중앙값을 $b(M-k)=\frac{1}{2}$의 해로 써서, $[0,k)$에 이미 쌓인 확률 ak를 빠뜨리는 실수.
- $\mathrm{E}(X)\geq M$까지만 결론짓는 실수. 엄격한 부등식을 얻으려면 $a\neq 1$이고 $b\neq 1$이어야 하며, 바로 이것을 첫 부분에서 보였다.

STEP 너머

이 밀도함수는 감소하므로 "오른쪽으로 치우쳐(skewed to the right)" 있다. 즉 긴 꼬리가 평균을 중앙값보다 오른쪽으로 끌어당긴다. 이런 양상은 흔하지만 언제나 성립하는 것은 아니며, 대학의 첫 확률론 강의에서는 단봉분포(unimodal distribution)에서 평균, 중앙값, 최빈값(mode)이 어떤 관계에 있는지, 그리고 익숙한 경험 법칙이 어디에서 성립하지 않는지를 배운다. 이와 같은 계단함수는 히스토그램(histogram)의 기본 구성 요소이기도 하고, 측도론(measure theory)에서 적분을 정의할 때 쓰는 단순함수(simple function)의 기본 구성 요소이기도 하다. 연속분포에 대해 더 알고 싶다면 Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문서)을 참고하라.

풀이

STEP II 2010, 문제 13

확률과 통계 • 독립사건

STEP II 2010, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/10-s2-q13

핵심 아이디어

로절린드는 파딥을 상대로 적어도 한 판을 이기고, **동시에** 퀜틴을 상대로도 적어도 한 판을 이길 때, 그리고 그때에만 합격한다. "적어도 하나"는 언제나 여사건(complement)으로 다루는 것이 가장 쉽다. n판 가운데 적어도 한 판을 이길 확률은 1에서 모든 판을 질 확률을 뺀 것이다. 각 판이 독립(independent)이면 각 전략의 성공 확률은 이런 인수 두 개의 곱이 되고, 전략을 비교하는 일은 차를 인수분해(factorise)하는 일이 된다. 질 확률을 $a = 1 - p$, $b = 1 - q$로 쓰면 계산이 깔끔해진다.

풀이

서로 다른 판의 결과는 독립이고, 파딥(또는 퀜틴)과의 각 판은 이전에 무슨 일이 있었든 확률 p(또는 q)로 이긴다고 가정한다. 순서는 상관없다. 자격을 얻은 뒤에 경기를 멈추든 멈추지 않든, 그녀가 자격을 얻는 결과는 정확히 똑같다.

로절린드가 파딥과 m번, 퀜틴과 n번 경기한다고 하자. 파딥을 상대로 적어도 한 판을 이기는 사건을 A, 퀜틴을 상대로 적어도 한 판을 이기는 사건을 B라 하자. A가 일어나지 않는 것은 m판을 모두 질 때뿐이므로 $\mathrm{P}(A) = 1 - (1-p)^m$이고, 마찬가지로 $\mathrm{P}(B) = 1 - (1-q)^n$이다. 두 사건은 서로 다른 판에 관한 것이므로 독립이고,

$$\mathrm{P}(\text{합격}) = \left(1 - (1-p)^m\right)\left(1 - (1-q)^n\right).$$

이제부터 $a = 1 - p$, $b = 1 - q$로 쓴다. $0 < p < q < 1$이므로 $0 < b < a < 1$이다.

소문항 (i)

파딥과 두 번, 퀜틴과 한 번 경기하면 성공 확률은 $(1-a^2)(1-b)$이고, 퀜틴과 두 번, 파딥과 한 번 경기하면 $(1-a)(1-b^2)$이다. 각 제곱의 차를 인수분해하면

$$\begin{aligned}(1-a^2)(1-b)-(1-a)(1-b^2) &= (1-a)(1-b)\big[(1+a)-(1+b)\big]\\ &= (1-a)(1-b)(a-b)\\ &= pq(q-p).\end{aligned}$$

$p, q > 0$이고 $q > p$이므로 이 값은 양수이다. 따라서 파딥과 두 번 경기하는 쪽이 합격할 확률이 더 크고, 그녀는 그 방법을 택해야 한다.

소문항 (ii)

세 전략의 성공 확률은 다음과 같다.

$$S_1 = (1-a^3)(1-b), \qquad S_2 = (1-a^2)(1-b^2), \qquad S_3 = (1-a)(1-b^3).$$

$1-x^k = (1-x)(1+x+\cdots+x^{k-1})$이므로 각각은 인수 $(1-a)(1-b) = pq$를 가진다.

전략 1은 언제나 전략 3보다 낫다. 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}S_1 - S_3 &= pq\big[(1+a+a^2)-(1+b+b^2)\big]\\ &= pq\,(a-b)(1+a+b) > 0,\end{aligned}$$

$a > b$이기 때문이다. 따라서 전략 3은 결코 최선의 선택이 아니며, 전략 1과 전략 2만 비교하면 된다.

전략 1과 전략 2의 비교. 다음이 성립한다.

$$S_1 - S_2 = pq\big[(1+a+a^2)-(1+a)(1+b)\big] = pq\big[a^2 - b(1+a)\big].$$

다시 p와 q로 나타내면

$$S_1 - S_2 = pq\,D, \qquad \text{여기서} \qquad D = (1-p)^2 - (1-q)(2-p).$$

$pq > 0$이므로 전략 1이 전략 2보다 나은 것은 정확히 $D > 0$일 때이다.

> **생각해 보기** 조건 $q - p > \frac{1}{2}$는 D를 양수로 만드는 데 어떻게 도움이 되는가?

D에서 q를 포함하는 항은 $-(1-q)(2-p)$뿐이고, $2-p > 0$이므로 이 항은 q가 커질수록 커진다. 따라서 q를 조건이 허용하는 가장 작은 값으로 바꾸어 본다. $q - p > \frac{1}{2}$이면 $1-q < \frac{1}{2} - p$이고, $2-p > 0$이므로

$$(1-q)(2-p) < \left(\tfrac{1}{2}-p\right)(2-p) = 1 - \tfrac{5}{2}p + p^2.$$

그러므로

$$D > (1 - 2p + p^2) - \left(1 - \tfrac{5}{2}p + p^2\right) = \tfrac{1}{2}p > 0.$$

따라서 $S_1 > S_2$이고, $S_1 > S_3$과 함께 이는 $q - p > \frac{1}{2}$일 때 로절린드가 전략 1을 택해야 함을 보여 준다.

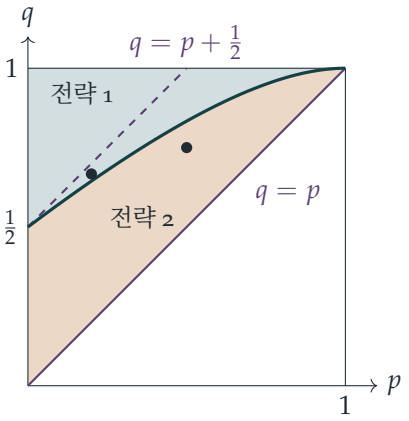
$q - p < \frac{1}{2}$이면 어느 쪽이든 나을 수 있다. 두 가지 예를 보자.

- $p = \frac{1}{2}, q = \frac{3}{4}$ (따라서 $q - p = \frac{1}{4}$). 이때 $D = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} = -\frac{1}{8} < 0$이다. 실제로 $S_1 = \frac{7}{8} \cdot \frac{3}{4} = \frac{42}{64}$이고 $S_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{15}{16} = \frac{45}{64}$이므로 **전략 2가 더 낫다**.
- $p = \frac{1}{5}, q = \frac{2}{3}$ (따라서 $q - p = \frac{7}{15} < \frac{1}{2}$). 이때 $D = \frac{16}{25} - \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{5} = \frac{16}{25} - \frac{15}{25} = \frac{1}{25} > 0$이다. 실제로 $S_1 = \frac{61}{125} \cdot \frac{2}{3} = \frac{122}{375}$이고 $S_2 = \frac{9}{25} \cdot \frac{8}{9} = \frac{120}{375}$이므로 **전략 1이 더 낫다**.

(p, q) 평면에서 보면 전체 그림이 분명해진다. $D = 0$으로 놓으면 경계 곡선 $q = 1 - \dfrac{(1-p)^2}{2-p}$를 얻는다. 다음을 확인할 수 있다.

$$\left(p + \tfrac{1}{2}\right) - \left(1 - \frac{(1-p)^2}{2-p}\right) = \frac{p}{2(2-p)} > 0,$$

따라서 이 곡선은 직선 $q = p + \frac{1}{2}$의 바로 아래에 놓인다. 곡선 위쪽에서는 전략 1이 최선이고, 곡선과 대각선 $q = p$ 사이에서는 전략 2가 최선이다.



두 점은 위의 예이다. $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$는 전략 2 영역에 있고, $(\frac{1}{5}, \frac{2}{3})$는 곡선 바로 위에 있다.

검산

소문항 (i)에서 $q \to 1$로 보내 보자. 퀜틴과의 경기는 반드시 이기므로 파딥과의 경기만 중요하고, 그 경기가 많을수록 분명히 유리하다. 이는 차 $pq(q-p) \to p(1-p) > 0$과 일치한다. 소문항 (ii)에서는 무작위로 뽑은 $p < q$ 쌍 2000개에 대해 가능한 2^4가지 결과를 모두

분수로 정확히 나열하여 S_1, S_2, S_3의 식과 인수분해를 확인하였다. $p = \frac{1}{2}, q = \frac{3}{4}$로 한 시뮬레이션(simulation)에서는 $S_1 \approx 0.657$, $S_2 \approx 0.703$을 얻었고, 정확한 값은 $\frac{21}{32} = 0.65625$와 $\frac{45}{64} \approx 0.7031$이다.

흔한 실수

- "적어도 한 번 이길 확률"을 $1 - (1-p)^m$이 아니라 mp로 계산하는 실수. 서로 겹치는 사건의 확률을 더하면 중복해서 세게 된다.
- 전략 3을 잊는 실수. 전략 1이 최선임을 보이려면 다른 **두** 전략 모두보다 나음을 보여야 한다.
- $q - p < \frac{1}{2}$인 예를 들면서 조건 $0 < p < q < 1$을 확인하지 않는 실수.

STEP 너머

직관적으로는 "가장 약한 곳에 힘을 쏟아라"라고 생각하기 쉽지만, 두 번째 소문항은 그것이 언제나 옳지는 않음을 보여 준다. 파딥과의 추가 경기는 수확 체감(diminishing returns)을 겪으며, p가 너무 작지 않으면 퀜틴과의 두 번째 경기가 더 가치 있다. 정해진 시행 횟수를 배분하여 "적어도 한 번 성공할" 확률들의 곱을 최대화하는 문제는 신뢰성 이론(reliability theory)과 실험 계획법(design of experiments)의 바탕이 되는 최적화(optimisation) 문제의 작은 사례이다. Grimmett과 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 독립과 여사건을 꼼꼼하게 다루며, 이런 성격의 문제가 많이 실려 있다.

풀이

STEP III 2010, 문제 1

순수수학 • 평균과 분산

STEP III 2010, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/10-s3-q1

핵심 아이디어

A와 B는 처음 n개 수의 평균(mean)과 분산(variance)이고, C와 D는 수를 하나 더 추가했을 때의 평균과 분산이다. 분산은 "제곱의 평균에서 평균의 제곱을 뺀 것"의 꼴로 다룰 때 가장 쉬운데, 바로 소문항 (ii)가 이 꼴을 준다. 이를 이용하면 D는 x_{n+1}에 대한 이차식(quadratic)으로 나오고, 두 부등식(inequality)은 모두 이 이차식에 관한 명제가 된다.

풀이

풀이 전체에서 간단히 $x = x_{n+1}$로 쓴다.

소문항 (i)

정의에 의해 $\sum_{k=1}^{n} x_k = nA$이므로

$$C = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k + x\right) = \frac{nA + x}{n+1}.$$

소문항 (ii)

제곱을 전개하고 $\sum_{k=1}^{n} x_k = nA$와 $\sum_{k=1}^{n} 1 = n$을 이용하면

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k^2 - 2Ax_k + A^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \frac{2A}{n}\cdot nA + \frac{1}{n}\cdot nA^2 \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - A^2, \end{aligned}$$

이므로 요구된 식이 성립한다.

소문항 (iii)

소문항 (ii)는 어떤 수의 목록에 대해서도 성립하므로, 이를 (평균이 C인) $n+1$개의 수 $x_1, \ldots, x_{n+1}$에 적용하면

$$D = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} x_k^2 - C^2.$$

다시 소문항 (ii)에서 $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = n(B+A^2)$이므로 $\sum_{k=1}^{n+1} x_k^2 = n(B+A^2) + x^2$이다. C에 대해 소문항 (i)을 이용하면

$$D = \frac{nB + nA^2 + x^2}{n+1} - \frac{(nA+x)^2}{(n+1)^2}.$$

양변에 $(n+1)^2$을 곱하고 전개하면

$$\begin{aligned}(n+1)^2 D &= (n+1)\left(nB + nA^2 + x^2\right) - \left(n^2A^2 + 2nAx + x^2\right)\\ &= n(n+1)B + (n^2 + n - n^2)A^2 - 2nAx + (n+1-1)x^2\\ &= n(n+1)B + n\left(x^2 - 2Ax + A^2\right)\\ &= n(n+1)B + n(x-A)^2.\end{aligned}$$

따라서

$$\boxed{D = \frac{n}{n+1}B + \frac{n}{(n+1)^2}\left(x_{n+1} - A\right)^2.}$$

첫 번째 부등식. $n+1$을 곱하면

$$(n+1)D = nB + \frac{n}{n+1}\left(x_{n+1} - A\right)^2 \;\geq\; nB,$$

인데, 마지막 항이 제곱에 음이 아닌 수를 곱한 것이기 때문이다. 이는 x_{n+1}의 모든 값에 대해 성립하며, 등호는 정확히 $x_{n+1} = A$일 때 성립한다.

> **생각해 보기** 음수의 제곱근을 걱정하지 않고 $D < B$를 x_{n+1}에 대한 조건으로 바꾸려면 어떻게 해야 할까?

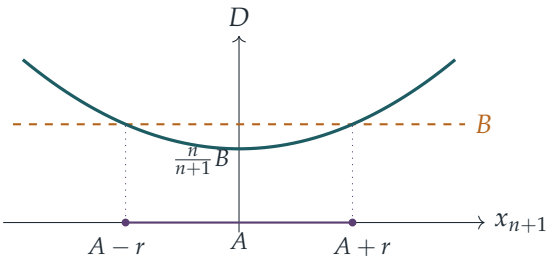
두 번째 부등식. 먼저 $B \geq 0$임에 주목한다. B는 제곱들의 평균이기 때문이다. 따라서 $\sqrt{(n+1)B/n}$은 실수이다. 이제 상자 안의 공식을 이용하면, 아래의 각 단계는 거꾸로도 성

립한다(양변에서 같은 양을 빼고 양수 $(n+1)^2/n$을 곱하기만 하기 때문이다).

$$\begin{aligned} D < B &\iff \frac{n}{(n+1)^2}(x_{n+1}-A)^2 < B - \frac{n}{n+1}B = \frac{B}{n+1} \\ &\iff (x_{n+1}-A)^2 < \frac{(n+1)B}{n} \\ &\iff |x_{n+1}-A| < \sqrt{\frac{(n+1)B}{n}} \\ &\iff A - \sqrt{\frac{(n+1)B}{n}} < x_{n+1} < A + \sqrt{\frac{(n+1)B}{n}}. \end{aligned}$$

세 번째 단계는 양변의 음이 아닌 제곱근을 취하는데, 이는 음이 아닌 수들 사이의 엄격한 부등식을 보존한다. 이것이 요구된 "필요충분조건(if and only if)"이다. ($B = 0$이면 구간은 공집합이고, 실제로 이때는 항상 $D \geq 0 = B$이다.)

아래 그림은 $n = 3, A = 0, B = 1$일 때 D를 x_{n+1}의 함수로 나타낸 것이다. 이는 $x_{n+1} = A$에서 최솟값 $\frac{n}{n+1}B$를 갖는 포물선이며, 정확히 위에서 구한 구간에서 높이 B 아래로 내려간다.



여기서 $r = \sqrt{(n+1)B/n}$이다.

검산

- $n = 1$로 두자. 그러면 $B = 0$이고, 공식은 $D = \frac{1}{4}(x_2 - x_1)^2$을 주는데, 이는 평균이 중점인 두 수 x_1, x_2에 대해 옳은 값이다.
- $x_1, x_2, x_3 = 0, 0, 3$으로 두면 $A = 1, B = 2$이고, 여기에 $x_4 = 1 = A$를 추가한다. 직접 계산하면 $D = \frac{1}{4}(1+1+4+0) = \frac{3}{2} = \frac{3}{4}B$로, 최솟값이다.
- 20 000개의 무작위 목록에 대해 세 결과를 모두 (분수로) 정확히 확인했으며, 여기에는 동치 관계 $D < B \iff (x_{n+1}-A)^2 < (n+1)B/n$도 포함된다. 또한 구간의 양 끝점이 유리수인 216가지 경우에 대해 두 끝점에서 $D = B$임을 확인했다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)에서 전개할 때 $\sum_{k=1}^{n} A^2 = nA^2$이고 A^2이 아니라는 것을 잊는 것.

- D를 $\sum x_k^2$로 나타내고 거기서 멈추는 것. 문제는 B, A, x_{n+1}, n으로 나타내기를 요구하므로, 소문항 (ii)를 이용해 합을 바꿔 써야 한다.
- $(x_{n+1} - A)^2 < k$의 제곱근을 취해 $x_{n+1} - A < \sqrt{k}$만 얻고, 구간의 아래쪽 끝을 놓치는 것.

STEP 너머

D에 대한 공식은 **갱신 공식**(*updating formula*)이다. 이 공식을 쓰면 컴퓨터가 모든 데이터를 저장하지 않고도 데이터 스트림의 평균과 분산을 값 하나씩 받아 가며 유지할 수 있는데, 이 아이디어는 Welford 알고리즘(Welford's algorithm)에서 더 정교해진다. 항 $n(x_{n+1} - A)^2/(n+1)^2$은 통계학의 분산분석(analysis of variance)의 바탕이 되는, 분산을 "집단 내" 부분과 "집단 간" 부분으로 분해하는 것의 작은 예이다. 더 자세한 내용은 Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)을 보라.

풀이

STEP III 2010, 문제 2

순수수학 • 정적분

STEP III 2010, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/10-s3-q2

핵심 아이디어

여기에 나오는 분모는 모두 (x 또는 x^2에 대한) 이차식이고, 그 근은 결국 $\pm e^{a}$와 $\pm e^{-a}$로 밝혀진다. 쌍곡함수(hyperbolic function) 계수를 지수함수로 써 보면 인수분해(factorisation)가 곧바로 드러난다. e^{a}와 e^{-a}는 곱이 1이고 합이 $2\cosh a$(또는 차가 $2\sinh a$)이기 때문이다. 그다음에는 부분분수(partial fractions)를 이용하면 모든 것이 로그나 아크탄젠트(arctangent)로 귀결되고, 남은 일은 답을 쌍곡함수 꼴로 깔끔하게 정리하는 것이다.

풀이

소문항 (i)

정의에 따라

$$\cosh a = \tfrac{1}{2}\left(e^{a} + e^{-a}\right).$$

따라서 $2\cosh a = e^{a} + e^{-a}$이고 $e^{a} \cdot e^{-a} = 1$이므로

$$x^2 + 2x\cosh a + 1 = (x + e^{a})(x + e^{-a}).$$

$x \geq 0$이면 두 인수가 모두 양수이므로 피적분함수(integrand)는 $[0,1]$에서 연속이다. $a > 0$이므로 두 근 $-e^{a}$와 $-e^{-a}$는 서로 다르고, 부분분수 분해는 다음과 같다.

$$\frac{1}{(x+e^{-a})(x+e^{a})} = \frac{1}{e^{a}-e^{-a}}\left(\frac{1}{x+e^{-a}} - \frac{1}{x+e^{a}}\right) = \frac{1}{2\sinh a}\left(\frac{1}{x+e^{-a}} - \frac{1}{x+e^{a}}\right),$$

이는 다시 통분해 보면 확인할 수 있다. 분자가 $(x+e^a)-(x+e^{-a})=e^a-e^{-a}$가 된다. 적분하면

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x\cosh a+1} &= \frac{1}{2\sinh a}\left[\ln\frac{x+e^{-a}}{x+e^a}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2\sinh a}\left(\ln\frac{1+e^{-a}}{1+e^a}-\ln\frac{e^{-a}}{e^a}\right).\end{aligned}$$

첫 번째 로그는 깔끔하게 정리된다. $1+e^a=e^a(e^{-a}+1)$이므로 $\dfrac{1+e^{-a}}{1+e^a}=e^{-a}$이다. 두 번째 로그는 $\ln e^{-2a}=-2a$이다. 그러므로

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x\cosh a+1} = \frac{1}{2\sinh a}(-a+2a) = \frac{a}{2\sinh a},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

소문항 (ii)

첫 번째 적분. 이번에는 계수가 $2\sinh a=e^a-e^{-a}$이고 상수항이 $-1=e^a\cdot(-e^{-a})$이므로

$$x^2+2x\sinh a-1=(x+e^a)(x-e^{-a}).$$

> **?** **생각해 보기** 피적분함수는 구간 $[1,\infty)$ 전체에서 문제없이 정의되는가?

근은 $-e^a<0$과 e^{-a}이고, $a>0$이므로 $e^{-a}<1$이다. 따라서 $x\geq 1$이면 두 인수가 모두 양수이고 피적분함수는 연속이다. x가 크면 피적분함수는 $1/x^2$처럼 행동하므로 이상적분(improper integral)은 수렴(converge)한다. 앞에서와 같이 부분분수로 분해하되, 이번에는 $e^a-(-e^{-a})=2\cosh a$를 쓴다.

$$\frac{1}{(x-e^{-a})(x+e^a)} = \frac{1}{2\cosh a}\left(\frac{1}{x-e^{-a}}-\frac{1}{x+e^a}\right).$$

1부터 X까지 적분하고 $X\to\infty$로 보내면

$$\int_1^X \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x\sinh a-1} = \frac{1}{2\cosh a}\left(\ln\frac{X-e^{-a}}{X+e^a}-\ln\frac{1-e^{-a}}{1+e^a}\right).$$

$X\to\infty$일 때 분수 $\frac{X-e^{-a}}{X+e^a}\to 1$이므로 첫 번째 로그는 0으로 수렴한다. 두 번째 로그는 분자에서 e^{-a}를 묶어 낸다.

$$\frac{1-e^{-a}}{1+e^a} = e^{-a}\frac{e^a-1}{e^a+1} = e^{-a}\tanh\tfrac{a}{2},$$

여기서 $\dfrac{e^a-1}{e^a+1}=\dfrac{e^{a/2}-e^{-a/2}}{e^{a/2}+e^{-a/2}}=\tanh\frac{a}{2}$를 이용했다(분자와 분모를 $e^{a/2}$로 나눈다). 따라서 두 번째 로그는 $-a+\ln\tanh\frac{a}{2}$이고,

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x\sinh a-1} = \frac{a-\ln\tanh\frac{a}{2}}{2\cosh a} = \frac{a+\ln\coth\frac{a}{2}}{2\cosh a}.$$

($0 < \tanh\frac{a}{2} < 1$이므로) 분자의 두 항은 모두 양수이며, 피적분함수가 양수이니 당연히 그래야 한다.

두 번째 적분. 이것은 소문항 (i)의 이차식에서 x를 x^2으로 바꾼 것이다.

$$x^4 + 2x^2\cosh a + 1 = (x^2 + e^a)(x^2 + e^{-a}),$$

두 인수는 모든 실수 x에 대해 양수이므로 피적분함수는 연속이고, 무한대에서 $O(1/x^4)$이므로 적분은 수렴한다. x^2을 변수로 보고 같은 부분분수 분해를 하면

$$\frac{1}{(x^2 + e^{-a})(x^2 + e^a)} = \frac{1}{2\sinh a}\left(\frac{1}{x^2 + e^{-a}} - \frac{1}{x^2 + e^a}\right).$$

각 항은 표준적인 아크탄젠트 적분이다. $c > 0$에 대해

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + c^2} = \left[\frac{1}{c}\arctan\frac{x}{c}\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2c}.$$

각각 $c = e^{-a/2}$, $c = e^{a/2}$로 두면(각 항이 따로 수렴하므로 적분을 나누어도 된다)

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^4 + 2x^2\cosh a + 1} = \frac{1}{2\sinh a}\cdot\frac{\pi}{2}\left(e^{a/2} - e^{-a/2}\right) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{2\sinh\frac{a}{2}}{2\sinh a}.$$

마지막으로 배각 공식(double-angle formula) $\sinh a = 2\sinh\frac{a}{2}\cosh\frac{a}{2}$를 쓰면 $\sinh\frac{a}{2}$가 약분된다.

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^4 + 2x^2\cosh a + 1} = \frac{\pi}{4\cosh\frac{a}{2}}.$$

? **생각해 보기** $\cosh\frac{a}{2}$가 나오리라는 것을 미리 알아챌 방법이 있을까?

있다. 이 적분을 I라 하자. 치환(substitution) $x \mapsto 1/x$를 하면 $I = \int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+2x^2\cosh a+1}\,\mathrm{d}x$이기도 하므로

$$2I = \int_0^\infty \frac{1 + 1/x^2}{x^2 + 1/x^2 + 2\cosh a}\,\mathrm{d}x.$$

$u = x - 1/x$로 두면 $\mathrm{d}u = (1 + 1/x^2)\,\mathrm{d}x$이고 $x^2 + 1/x^2 = u^2 + 2$이며, u는 $-\infty$부터 ∞까지 변한다. 분모는 $u^2 + 2 + 2\cosh a = u^2 + 4\cosh^2\frac{a}{2}$가 되므로 $2I = \pi/(2\cosh\frac{a}{2})$이고, 같은 답을 얻는다.

검산

- $a \to 0$이면 소문항 (i)은 $\int_0^1 (1+x)^{-2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$가 되고, $a/(2\sinh a) \to \frac{1}{2}$이다. 마지막 적분은 $\int_0^\infty (1+x^2)^{-2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$가 되어 $\pi/(4\cosh 0)$과 일치한다.
- 수치적으로 $a = 1$일 때 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 소문항 (i)은 0.4254590641, (ii)의 첫 번째 적분은 0.5741556186, 두 번째 적분은 0.6965059227이 나오고, 이는 각각 $\frac{1}{2\sinh 1}$, $\frac{1-\ln\tanh\frac{1}{2}}{2\cosh 1}$, $\frac{\pi}{4\cosh\frac{1}{2}}$와 소수점 아래 열 자리까지 일치한다.

흔한 실수

- 부분분수의 상수를 잘못 구하는 것. 이 상수는 1/(두 근의 차)이며, 소문항 (i)에서는 $1/(2\sinh a)$이지만 (ii)의 첫 번째 적분에서는 $1/(2\cosh a)$이다.
- $e^{-a} < 1$임을, 즉 분모의 근이 $[1, \infty)$ 밖에 있음을 확인하지 않는 것.
- 답을 지수함수 꼴로 남겨 두는 것. 문제에서 쌍곡함수로 나타내라고 했으므로 $\frac{e^a-1}{e^a+1}$은 $\tanh\frac{a}{2}$로 바꿔야 한다.

STEP 너머

(ii)의 두 번째 적분은 대학에서는 보통 경로 적분(contour integration)으로 계산한다. 피적분함수는 $\pm ie^{\pm a/2}$에서 단순극(simple pole)을 가지며, 상반평면(upper half-plane)에 있는 유수(residue)를 더하면 몇 줄 만에 $\pi/(4\cosh\frac{a}{2})$를 얻는다. 같은 방법으로 $\int_0^\infty \mathrm{d}x/(1+x^n)$을 비롯해 실해석적 방법으로는 잘 풀리지 않는 많은 적분을 다룰 수 있다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석)는 유수와 그것이 왜 통하는지를 기하학적으로 설명한다.

풀이

STEP III 2010, 문제 3

순수수학 • 1의 거듭제곱근

STEP III 2010, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/10-s3-q3

이 문제는 *Beyond STEP*의 6.1 절 **근이 모두 단위근인 다항식**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch06/cyclotomic.html

핵심 아이디어

1의 거듭제곱근(root of unity) a는 모두 단 하나의 **위수**(order)를 가진다. 위수란 $a^m = 1$을 만족하는 가장 작은 양의 정수 m이다. 1의 원시(primitive) n제곱근이라는 것은 위수가 정확히 n이라는 뜻일 뿐이다. 따라서 $C_n(x)$를 구하려면 1의 n제곱근 $e^{2\pi ik/n}$을 나열하고, 그보다 작은 거듭제곱에서 이미 1로 돌아오는 것들을 버린 뒤, 남은 것들에 대해 $(x-a)$를 모두 곱해 전개하면 된다. 각 수가 단 하나의 위수만 가진다는 사실은 마지막 소문항을 해결하는 열쇠이기도 하다.

풀이

이 풀이 전체에서 1의 n제곱근은 $k = 0, 1, \ldots, n-1$에 대한 ω^k이다. 여기서 $\omega = e^{2\pi i/n}$이고, $(\omega^k)^m = 1$은 n이 km을 나눌 때, 그리고 그때에만 성립한다. C_n은 최고차항의 계수가 1(monic)이고 중근(repeated root)이 없으며, 그 근은 정확히 1의 원시 n제곱근이므로

$$C_n(x) = \prod_{a\text{원시}} (x-a).$$

1의 4제곱근

1의 4제곱근은 $1, i, -1, -i$이다. 이때 $1^1 = 1$이고 $(-1)^2 = 1$이므로 이 둘은 원시근이 아니다. 그러나 $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$로 어느 것도 1이 아니며, $-i$도 마찬가지이다(그 거듭제

곱은 앞의 것들의 켤레(conjugate)이다). 따라서 1의 원시 4제곱근은 i와 $-\mathrm{i}$이고

$$C_4(x) = (x-\mathrm{i})(x+\mathrm{i}) = x^2+1,$$

이므로 요구한 결과가 성립한다.

소문항 (i)

$n = 1$. 1의 1제곱근은 1뿐이고, $0 < m < 1$인 m은 존재하지 않으므로 1은 원시근이다: $C_1(x) = x-1$.

$n = 2$. 1의 제곱근은 ± 1이다. $1^1 = 1$이므로 1은 제외되고, 한편 $(-1)^1 \neq 1$이다. 따라서 $C_2(x) = x+1$이다.

$n = 3$**과** $n = 5$. n이 소수(prime)이면, $1 \leq k \leq n-1$인 근 ω^k가 $(\omega^k)^m = 1$을 만족하는 것은 $n \mid km$일 때뿐이다. 그런데 n은 소수이고 k를 나누지 않으므로, 이로부터 $n \mid m$이어야 한다. 따라서 1이 아닌 1의 n제곱근은 모두 원시근이다. 이들은 다음 다항식의 근이다.

$$\frac{x^n-1}{x-1} = x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1,$$

이 다항식은 최고차항의 계수가 1이고 서로 다른 근을 가진다. 그러므로

$$C_3(x) = x^2+x+1, \qquad C_5(x) = x^4+x^3+x^2+x+1.$$

$n = 6$. $\omega = \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/3}$이라 하면 거듭제곱 ω^k의 위수는 $6/\gcd(k,6)$이다. 따라서 $\omega^0 = 1$의 위수는 1, $\omega^3 = -1$의 위수는 2, ω^2, ω^4의 위수는 3이고, 위수가 6인 것은 ω와 $\omega^5 = \overline{\omega}$뿐이다. 이 둘의 합은 $2\cos\frac{\pi}{3} = 1$이고 곱은 $|\omega|^2 = 1$이므로

$$C_6(x) = x^2-x+1.$$

(검산으로, 1의 6제곱근은 모두 위수가 1, 2, 3, 6 중 하나이므로 $x^6-1 = C_1C_2C_3C_6$이고, 실제로 $(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1) = (x^3-1)(x^3+1) = x^6-1$이다.)

소문항 (ii)

$x^4+1 = 0$의 임의의 근을 a라 하자. 그러면 $a^4 = -1$이므로 $a^8 = 1$이다. a의 위수 d는 8을 나눈다($8 = qd+r$, $0 \leq r < d$로 쓰면 $a^r = a^8(a^d)^{-q} = 1$이므로, d의 최소성에 의해 $r = 0$이다). 따라서 $d \in \{1,2,4,8\}$이다. d가 1, 2, 4 중 하나라면 $a^4 = 1$이 되어 $a^4 = -1$에 모순(contradiction)이다. 그러므로 x^4+1의 근은 모두 1의 원시 8제곱근이다.

역으로, $\omega = \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/4}$일 때 ω^k의 위수가 8인 것은 정확히 k가 홀수일 때이므로(k가 짝수이면 $(\omega^k)^4 = 1$), 원시 8제곱근은 정확히 네 개, 즉 $\omega, \omega^3, \omega^5, \omega^7$이다. 사차식 x^4+1은 서로 다른 네 근(이들은 $\mathrm{e}^{(2j+1)\pi\mathrm{i}/4}$, $j = 0,1,2,3$이다)을 가지며 이들은 모두 원시 8제곱근이므로, 바로 이 네 개이다. 따라서 $C_8(x) = x^4+1$이다.

다른 n은 성립하지 않는다: C_n의 근은 모두 위수가 n이고, x^4+1의 근은 위수가 8이다. 따라서 답은 $n=8$이다.

소문항 (iii)

소문항 (i)에서 $n=3$과 $n=5$에 쓴 논증은 임의의 소수 p에 그대로 적용된다: 1을 제외한 1의 p제곱근은 모두 원시근이다. 그러므로

$$C_p(x) = \frac{x^p-1}{x-1} = x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1.$$

($p=2$이면 $x+1$이 되어 소문항 (i)의 결과와 일치한다.)

소문항 (iv)

어떤 양의 정수 q, r, s에 대해 $C_q(x) \equiv C_r(x)C_s(x)$라고 가정하고 모순을 이끌어 내자.

먼저 C_s는 적어도 하나의 근을 가진다. $e^{2\pi i/s}$가 1의 원시 s제곱근이기 때문이다: $(e^{2\pi i/s})^m = e^{2\pi i m/s} = 1$은 $s \mid m$일 때만 성립한다. C_r도 마찬가지이다. 따라서 C_r과 C_s의 차수(degree)는 모두 1 이상이다.

C_r의 임의의 근 a를 택하자. 항등식(identity)에 의해 $C_q(a) = C_r(a)C_s(a) = 0$이므로, a는 1의 원시 q제곱근이면서 동시에 1의 원시 r제곱근이다.

> **생각해 보기** 하나의 수가 1의 원시 r제곱근이면서 1의 원시 q제곱근이고 $r \neq q$일 수 있을까?

그럴 수 없다. 예를 들어 $r<q$이면 $0<r<q$인데 $a^r=1$이므로, a가 원시 q제곱근이라는 데 모순이다. $q<r$이면 역할을 바꾸면 된다. 따라서 $r=q$이고, 같은 방법으로(C_s의 근을 이용하면) $s=q$이다.

그런데 그러면 항등식은 $C_q = C_q^2$가 된다. 차수를 비교하면 $\deg C_q = 2\deg C_q$이므로 $\deg C_q = 0$이 되어, C_q가 근을 가진다는 사실에 모순이다. (또는 C_q^2는 중근을 가지지만 C_q는 그렇지 않다는 점을 써도 된다.) 따라서 그러한 q, r, s는 존재하지 않는다.

검산

- C_n의 차수는 $1 \le k \le n$이고 $\gcd(k,n)=1$인 k의 개수이다: $n=1,\ldots,6$에 대해 차수는 $1,1,2,2,4,2$이고 $n=8$에 대해서는 4로, 모두 일치한다.
- 1의 n제곱근은 모두 n의 약수인 어떤 위수 d를 가지므로, x^n-1은 n의 약수 d 전체에 대한 C_d의 곱이다. $n=4$일 때: $(x-1)(x+1)(x^2+1) = x^4-1$; $n=8$일 때: $(x^4-1)(x^4+1) = x^8-1$.

- 수치적으로, $n \le 40$에 대해 원시근 전체에 걸쳐 $(x-a)$를 곱해 전개하면 위의 모든 다항식이 그대로 나오고, x^4+1은 $n=8$일 때만 나오며, $q,r,s \le 30$인 범위에서 항등식 $C_q = C_r C_s$는 찾을 수 없다.

흔한 실수

- 원시근에 1(또는 -1)을 포함하는 것: C_n은 x^n-1이 아니다.
- 소문항 (ii)에서 더 작은 위수를 배제하지 않고 x^4+1이 x^8-1을 나눈다는 것만 확인하는 것: 핵심은 $a^4=-1\neq 1$이라는 점이다.
- 소문항 (iv)에서 차수만으로 논증하는 것: $\deg C_q = \deg C_r + \deg C_s$는 실제로 일어날 수 있으므로(예: $4=2+2$), 모순을 주는 것은 차수가 아니라 근이다.

STEP 너머

C_n을 **원분다항식**(cyclotomic polynomial)이라 한다. 항등식 $x^n-1=\prod_{d\mid n} C_d(x)$는 이들의 계수가 항상 정수임을 보여 주며, 더 깊은 정리에 따르면 각 원분다항식은 유리수 위에서 기약(irreducible)이다. 원분다항식은 갈루아(Galois) 이론의 핵심이며, 어떤 정다각형을 자와 컴퍼스로 작도할 수 있는지에 대한 가우스(Gauss)의 발견에서도 중심적인 역할을 한다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 이 대수학을 전개하며, Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 1의 거듭제곱근에 대한 기하학적 그림을 제공한다.

풀이

STEP III 2010, 문제 4

순수수학 • 다항식의 공통근

STEP III 2010, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/10-s3-q4

핵심 아이디어

α가 최고차항 계수(leading coefficient)가 같은 두 이차방정식(quadratic)을 모두 만족하면, 두 식의 차도 만족한다. 이때 x^2 항이 소거되어 **일차**방정식(linear equation)이 남는다. 이것으로 α가 결정되고, 이를 한 이차방정식에 다시 대입하면 조건을 얻는다. 소문항 (ii)에서는 삼차식(cubic)을 이차식으로 나누면 같은 방법이 통한다. 이차식의 근에서는 삼차식이 그 나머지(remainder)와 정확히 같은 값을 가지므로, 다시 두 이차방정식의 문제로 돌아와 소문항 (i)의 결과를 그대로 쓸 수 있다.

풀이

이 풀이 전체에서 "근(root)"은 복소수 범위의 근을 뜻한다. 따라서 모든 이차방정식은 (중복도(multiplicity)를 세어) 두 근을 가진다.

소문항 (i)

α가 두 방정식을 모두 만족한다고 하자. 첫째 식에서 둘째 식을 빼면

$$(a-c)\alpha + (b-d) = 0.$$

$a \neq c$이므로 양변을 $a-c$로 나눌 수 있고,

$$\alpha = -\frac{b-d}{a-c},$$

를 얻는다. 이것이 보이려던 것이다.

조건. $k = a - c \neq 0$, $m = b - d$로 놓으면 조건은 $m^2 - amk + bk^2 = 0$이다.

($\Rightarrow$) 공통근(common root)이 있으면, 앞의 결과에 의해 그 근은 $\alpha = -m/k$이다. 이를 $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$에 대입하면

$$\frac{m^2}{k^2} - \frac{am}{k} + b = 0,$$

이고, 양변에 $k^2 \neq 0$을 곱하면 $m^2 - amk + bk^2 = 0$을 얻는다.

($\Leftarrow$) $m^2 - amk + bk^2 = 0$이라 하고, $\alpha = -m/k$로 **정의**하자. 조건을 k^2으로 나누고 위의 과정을 거꾸로 따라가면 $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$임을 알 수 있다. 또한 α를 이렇게 골랐으므로 $(a-c)\alpha + (b-d) = k\alpha + m = 0$이다. 따라서

$$\alpha^2 + c\alpha + d = (\alpha^2 + a\alpha + b) - \big((a-c)\alpha + (b-d)\big) = 0 - 0 = 0,$$

이므로 α는 공통근이다. 이로써 $a \neq c$일 때 동치임이 증명되었다.

> ? **생각해 보기** 왜 정방향만으로는 충분하지 않을까?

정방향은 공통근이 존재한다면 조건이 성립한다는 것만 말해 준다. "필요충분조건(if and only if)"을 보이려면 조건으로부터 공통근이 생긴다는 것도 보여야 한다. 그래서 조건으로부터 α를 정의하고, 그것이 **두** 방정식을 모두 만족함을 확인한 것이다.

$a \neq c$를 없애면. $a = c$라 하자. 그러면 조건은 $(b-d)^2 = 0$, 즉 $b = d$가 된다.

- $b = d$이면 두 방정식은 똑같으므로 당연히 공통근을 가지며(두 근이 모두 공통근이다), 조건도 성립한다.
- $b \neq d$이면, 공통근 α가 있다고 할 때 두 식을 빼면 $(a-c)\alpha + (b-d) = b - d = 0$이 되어 모순이다. 따라서 공통근이 없고, 조건도 성립하지 않는다.

두 경우 모두 "공통근이 있음"과 "조건이 성립함"이 일치하므로, $a \neq c$라는 조건이 없어도 **결과는 여전히 성립한다**.

(한 가지 미묘한 점은 실근만 세는 경우이다. $a = c$, $b = d$, $a^2 < 4b$이면 조건은 성립하지만 똑같은 두 방정식은 실근을 갖지 않는다. $a \neq c$일 때는 이런 문제가 없는데, 계수가 실수이면 공통근 $-(b-d)/(a-c)$는 저절로 실수이기 때문이다.)

소문항 (ii)

삼차식을 $x^2 + ax + b$로 나누자. $(x+1)(x^2 + ax + b) = x^3 + (a+1)x^2 + (a+b)x + b$이므로

$$x^3 + (a+1)x^2 + qx + r = (x+1)(x^2 + ax + b) + (q - a - b)x + (r - b).$$

따라서 $x = \alpha$에서 $x^2 + ax + b = 0$이면, 그 점에서 삼차식의 값은 $(q-a-b)\alpha + (r-b)$이고, 다음 이차식

$$(x^2 + ax + b) + (q - a - b)x + (r - b) = x^2 + (q-b)x + r.$$

의 값도 마찬가지이다. 그러므로 α가 이차방정식과 삼차방정식의 공통근일 필요충분조건은 α가

$$x^2 + ax + b = 0 \qquad \text{그리고} \qquad x^2 + (q-b)x + r = 0.$$

의 공통근인 것이다. 이제 $c = q - b$, $d = r$로 놓고 소문항 (i)을 적용하자. 그러면 $a - c = a + b - q$, $b - d = b - r$이므로, 공통근이 존재할 필요충분조건은

$$(b-r)^2 - a(b-r)(a+b-q) + b(a+b-q)^2 = 0.$$

이다. 소문항 (i)의 결과는 $a = c$인지 아닌지와 관계없이 성립하므로, 여기서 추가 조건은 필요 없다.

예제. 두 방정식을 2로 나누어 최고차항 계수가 1인(monic) 꼴로 만든다.

$$x^2 + \tfrac{5}{2}x + b = 0, \qquad x^3 + \tfrac{7}{2}x^2 + \tfrac{5}{2}x + \tfrac{1}{2} = 0.$$

이들은 $a = \frac{5}{2}$(실제로 $a + 1 = \frac{7}{2}$이다), $q = \frac{5}{2}$, $r = \frac{1}{2}$인 요구된 꼴이다. 그러면 $a + b - q = b$, $b - r = b - \frac{1}{2}$이므로 조건은

$$\left(b - \tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{5}{2}\left(b - \tfrac{1}{2}\right)b + b \cdot b^2 = 0.$$

이 된다. 양변에 4를 곱하면

$$\begin{aligned}(2b-1)^2 - 5b(2b-1) + 4b^3 &= 0\\ 4b^3 - 6b^2 + b + 1 &= 0.\end{aligned}$$

살펴보면 $b = 1$이 근이고,

$$4b^3 - 6b^2 + b + 1 = (b-1)(4b^2 - 2b - 1).$$

이차 인수에서 $b = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+16}}{8} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$를 얻는다. 따라서 두 방정식이 공통근을 가지는 것은 정확히

$$b = 1 \qquad \text{또는} \qquad b = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \qquad \text{또는} \qquad b = \frac{1-\sqrt{5}}{4}.$$

일 때이다.

다른 방법. 여기서 삼차방정식에는 b가 들어 있지 않으므로 그냥 풀면 된다. $x = -\frac{1}{2}$를 넣어 보면 $-\frac{1}{4} + \frac{7}{4} - \frac{5}{2} + 1 = 0$이므로

$$2x^3 + 7x^2 + 5x + 1 = (2x+1)(x^2 + 3x + 1),$$

이고, 근은 $-\frac{1}{2}$와 $\frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{5})$이다. 공통근 x가 있으면 $2b = -(2x^2 + 5x)$여야 한다. $x = -\frac{1}{2}$이면 $b = 1$이다. 나머지 두 근에 대해서는 $x^2 = -3x - 1$이므로 $2x^2 + 5x = -x - 2$이고 $b = \frac{1}{2}(x+2) = \frac{1}{4}(1 \pm \sqrt{5})$이다. 이는 위의 답과 일치한다.

검산

- $b = 1$일 때 이차식 $2x^2 + 5x + 2 = (2x + 1)(x + 2)$는 근 $-\frac{1}{2}$를 가지며, 이는 삼차방정식의 근이다.
- $b = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5}) \approx 0.8090$: 이차방정식의 근은 ≈ -0.3820과 -2.1180이고, $-0.3820 \approx \frac{1}{2}(-3 + \sqrt{5})$는 삼차방정식의 근이다.
- a, b, c, d(그리고 a, b, q, r)에 대해 무작위 정수 20 000가지를 컴퓨터로 시험한 결과, $a = c$인 경우를 포함하여 조건식이 0이 되는 것은 정확히 두 방정식이 복소수 근을 공유할 때였다.

흔한 실수

- "공통근 $\Rightarrow$ 조건"만 증명하고 역(converse)을 잊는 것.
- $a = c$에 관한 질문에 "아니다, $a - c$로 나누었으니까"라고 답하는 것. 증명은 깨지지만 **결과**는 살아남는다. 양쪽 모두 $b = d$로 귀결되기 때문이다.
- 먼저 2로 나누지 않고 소문항 (ii)를 적용하는 것. 이 공식은 최고차항 계수가 1인 방정식에만 쓸 수 있다.

STEP 너머

소문항 (i)의 식은 두 이차식의 **종결식**(resultant)이다. 종결식은 계수들에 대한 다항식으로, 두 다항식이 근을 공유할 때 정확히 0이 된다. 종결식은 실베스터(Sylvester)의 행렬식(determinant)에서 나오며, 연립 다항방정식을 푸는 데 쓰이는 소거 이론(elimination theory)의 바탕이 된다. 소문항 (ii)의 "나누고 나머지를 남기는" 단계는 다항식에 대한 유클리드 호제법(Euclidean algorithm)의 첫 단계로, 정수에서와 똑같이 두 다항식의 최대공약수(highest common factor)를 찾아 준다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 이러한 맥락에서 다항식의 나눗셈과 최대공약수를 전개한다.

풀이

STEP III 2010, 문제 5

순수수학 • 좌표기하의 작도

STEP III 2010, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/10-s3-q5

핵심 아이디어

여기서는 좌표(coordinates)가 모든 일을 해 준다. R와 S를 구하고, 직선 PQ와 RS를 절편 형태(intercept form)로 쓴 다음, 각 직선이 A를 지나고 AC에 수직인 직선과 어디에서 만나는지 살펴본다. 두 직선은 그 직선과 **같은** 점에서 만나며, 그 점은 T일 수밖에 없다. 작도는 한 가지 관찰에 기대고 있다. 주어진 정사각형의 대각선(diagonal)이 바로 우리가 필요로 하는 변이고, 첫 번째 부분이 눈금 없는 자(straight-edge)만으로 그 대각선에 직각을 그리는 방법을 알려 준다.

풀이

$TA \perp AC$임을 보이기

$C(a,a)$를 지나는 직선은 다루기 쉽다. 직선 CP는 (a,a)와 $(an,0)$을 잇므로, 기울기(gradient)는 $\dfrac{a}{a-an} = \dfrac{1}{1-n}$이고($n<1$이므로 정의된다) 방정식은 다음과 같다.

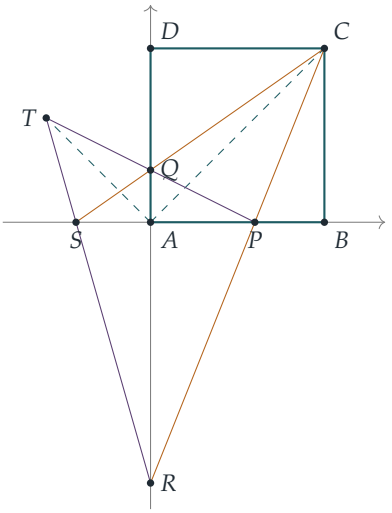
$$y = \frac{x-an}{1-n}.$$

직선 DA는 $x=0$이므로

$$R = \left(0,\ -\frac{an}{1-n}\right).$$

마찬가지로 CQ는 (a,a)와 $(0,am)$을 잇고, 기울기는 $1-m \neq 0$이며, 방정식은 $y = am + (1-m)x$이다. $y=0$(직선 BA)으로 놓으면

$$S = \left(-\frac{am}{1-m},\ 0\right).$$



이제 절편 형태를 이용한다. 직선 PQ의 절편은 an과 am이고, 직선 RS의 절편은 $-\frac{am}{1-m}$과 $-\frac{an}{1-n}$이다. 따라서

$$\begin{aligned} PQ: &\quad \frac{x}{n}+\frac{y}{m}=a, \\ RS: &\quad -\frac{(1-m)x}{m}-\frac{(1-n)y}{n}=a. \end{aligned}$$

AC의 기울기가 1이므로, A를 지나고 AC에 수직(perpendicular)인 직선은 $y=-x$이다. 각 방정식에 $y=-x$를 대입하면

$$\begin{aligned} PQ: &\quad x\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)=a, \\ RS: &\quad x\left(-\frac{1}{m}+1+\frac{1}{n}-1\right)=x\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)=a. \end{aligned}$$

두 식은 같은 방정식이다. $m\neq n$이므로 괄호 안은 0이 아니고, 두 직선은 모두 $y=-x$와 다음 한 점에서 만난다.

$$\left(\frac{amn}{m-n},\ -\frac{amn}{m-n}\right).$$

생각해 보기 PQ와 RS 위에 모두 놓인 점을 찾았다. 왜 이 점이 반드시 T여야 할까?

서로 다른 두 직선은 많아야 한 점에서 만난다. 직선 PQ와 RS는 서로 다르다(PQ는 x축 위의 $x>0$인 점 P를 지나지만, RS는 $x<0$인 점 S에서 x축과 만난다). 따라서 두 직선의 공통점은 모두 그 교점 T이다. 그러므로

$$T=\left(\frac{amn}{m-n},\ -\frac{amn}{m-n}\right),$$

이고, 이 점은 $y = -x$ 위에 있다. 벡터(vector) $\overrightarrow{AT}$는 $(1, -1)$의 실수배이고 $\overrightarrow{AC} = (a, a)$이며, $(1, -1) \cdot (a, a) = 0$이다. 따라서 요구한 대로 TA는 AC에 수직이다.

풀이 과정에서 $m < n$은 전혀 쓰지 않았고, $m \neq n$만 썼다는 점에 주목하자. 또한 P와 Q의 실제 위치도 쓰지 않았으므로, $AP \neq AQ$이기만 하면 변 AB 위의 **임의의** 점 P와 변 AD 위의 임의의 점 Q에 대해 T는 A에서 AC에 그은 수선 위에 놓인다.

작도

넓이가 $2a^2$인 정사각형의 한 변은 $\sqrt{2}\,a$이고, 이는 대각선 AC의 길이이다. 따라서 AC를 한 변으로 하는 정사각형을 만든다. 좌표로 쓰면 이 정사각형의 꼭짓점은 다음과 같다.

$$A(0,0), \quad E(a,-a), \quad F(2a,0), \quad C(a,a).$$

변 $\overrightarrow{AE} = (a, -a)$, $\overrightarrow{EF} = (a, a)$, $\overrightarrow{FC} = (-a, a)$, $\overrightarrow{CA} = (-a, -a)$의 길이는 모두 $\sqrt{2}\,a$이고 이웃한 변끼리 수직이므로, 넓이는 $2a^2$이다.

> **생각해 보기** 눈금 없는 자로는 점을 잇고 직선을 연장하는 일밖에 할 수 없다. 도대체 어떻게 직각을 얻을 수 있을까?

첫 번째 부분이 바로 그런 방법이다. 그 안의 모든 단계는 알려진 두 점을 잇거나 두 직선의 교점을 구하는 것뿐이기 때문이다. 눈금 없는 자로 다음을 한다.

1. 대각선 AC를 긋는다. AB 위에 임의의 점 P를, AD 위에 임의의 점 Q를 잡되, A로부터의 거리가 눈에 띄게 다르도록 잡는다(측정은 필요 없다. $AP \neq AQ$이기만 하면 된다).
2. CP를 연장하여 직선 DA와 만나는 점을 R, CQ를 연장하여 직선 BA와 만나는 점을 S라 한다. PQ와 RS를 연장하여 만나는 점을 T라 한다.
3. 직선 TA를 긋는다. 앞의 결과에 의해 이 직선은 AC에 수직이다. CB를 B 너머로 연장하여 직선 TA와 만나는 점을 E라 한다. (직선 CB는 $x = a$이고 직선 TA는 $y = -x$이므로 $E = (a, -a)$이다.)
4. 반대쪽 꼭짓점 C에서 1–3단계를 반복한다. CD와 CB 위에 C로부터의 거리가 눈에 띄게 다른 점을 잡고 같은 작도를 한다. 정사각형의 중심에 대한 반회전(half-turn)은 A와 C를 서로 바꾸고 정사각형을 자기 자신으로 옮기므로, 이렇게 하면 C를 지나고 AC에 수직인 직선, 곧 $x + y = 2a$를 얻는다.
5. AB를 B 너머로 연장하여 이 직선과 만나는 점을 $F = (2a, 0)$이라 한다.

그러면 $AEFC$는 한 변이 $AC = \sqrt{2}\,a$인 정사각형이므로 넓이는 $2a^2$이다. (그 대각선 AF와 CE는 직선 AB와 CB 위에 놓이며, 새 정사각형의 중심인 B에서 만난다.)

검산

- $a = 1$, $m = 0.3$, $n = 0.6$으로 두자. 그러면 $R = (0, -1.5)$, $S = (-\frac{3}{7}, 0)$, $T = (-0.6, 0.6)$이다. 점 T는 R와 S를 지나는 직선 위에 있다: $-\frac{0.7}{0.3}(-0.6) - \frac{0.4}{0.6}(0.6) = 1.4 - 0.4 = 1$. 또한 PQ 위에도 있다: $-1 + 2 = 1$. 그리고 T는 $y = -x$ 위에 있다.
- 컴퓨터로 a, m, n을 무작위로 2000번 골라, $m < n$과 $m > n$ 두 경우 모두에 대해 분수를 써서 R, S, T를 정확히 계산했다. 모든 경우에 $\overrightarrow{AT} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$이었고, 작도한 $AEFC$는 길이의 제곱이 $2a^2$인 네 변이 서로 직각으로 만나는 도형이었다.

흔한 실수

- PQ와 RS의 연립방정식을 무작정 푸는 것. 풀리기는 하지만 지저분하다. 후보 직선($y = -x$)을 두 방정식에 대입해 확인하는 편이 훨씬 빠르다.
- 공통점이 정말로 T인 이유를 설명하지 않는 것. 두 직선이 서로 다르다는 사실이 필요하다.
- 작도에서 방법을 밝히지 않고 "수선을 긋는다"거나 "길이를 옮긴다"고 쓰는 것. 모든 단계는 점을 잇거나 직선의 교점을 구하는 것이어야 한다.

STEP 너머

눈금 없는 자만 쓰는 작도는 **사영기하학**(projective geometry)에 속한다. 사영기하학에서는 잇기와 교점 구하기만이 허용되는 연산이며, R, S, T에 숨어 있는 것과 같은 비는 복비(cross-ratio)와 조화점열(harmonic range)을 통해 연구한다. 퐁슬레(Poncelet)와 슈타이너(Steiner)의 고전적인 정리에 따르면, 원 하나와 그 중심이 그려져 있기만 하면 눈금 없는 자 하나로 자와 컴퍼스로 할 수 있는 모든 작도를 할 수 있다. 이 문제에서는 정사각형이 그와 비슷한 역할을 한다. 콕서터(Coxeter)의 *Projective Geometry*(사영기하학)는 이 분야에 대한 아름다운 입문서이다.

풀이

STEP III 2010, 문제 6

순수수학 • 3차원에서의 회전

STEP III 2010, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/10-s3-q6

핵심 아이디어

축을 중심으로 하는 회전(rotation)은 축 위의 모든 점을 제자리에 두고, 축에 수직인 평면 위의 모든 것을 그 평면의 회전과 똑같이 돌린다. 따라서 각 단계는 2차원 회전으로 귀결된다. 돌아가는 평면을 찾고, 그 평면 안의 정규직교(orthonormal) 벡터 한 쌍을 적은 다음, 그 벡터들을 회전시키면 된다. 축 방향의 벡터는 그대로 남으며, 이 관찰 하나가 Q에 대한 계산의 상당 부분을 해결해 준다.

풀이

좌표축 방향의 단위벡터를 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$로 나타내자. 그러면 P_0, Q_0, R_0의 위치벡터는 각각 $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$이다.

소문항 (i)

z축을 중심으로 회전하면 x-y 평면이 ϕ만큼 돌아가고, $\mathbf{i}$는 $\mathbf{j}$ 쪽으로 움직인다. 따라서

$$P_1 = (\cos\phi,\ \sin\phi,\ 0).$$

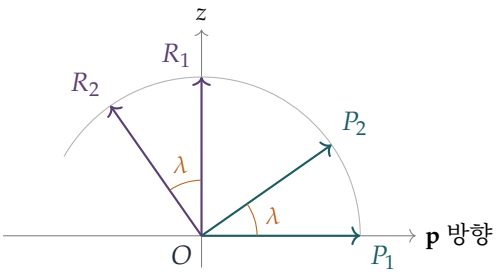
나중을 위해 적어 두면, 같은 회전은 $\mathbf{j}$를 $Q_1 = (-\sin\phi, \cos\phi, 0)$으로 보낸다. 그 평면에서 Q는 P보다 항상 직각만큼 앞서 있기 때문이다. 또 R_0은 축 위에 있으므로 움직이지 않는다: $R_1 = (0, 0, 1)$.

소문항 (ii)

$\mathbf{p} = \overrightarrow{OP_1} = (\cos\phi, \sin\phi, 0)$이라 하자. x-y 평면에서 OP_1에 수직인 직선의 방향은

$$\mathbf{u} = (-\sin\phi,\ \cos\phi,\ 0),$$

이다. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{p} = 0$이고 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{k} = 0$이기 때문이다. 이 축에 수직인 평면은 정규직교 쌍 $\mathbf{p}$와 $\mathbf{k}$로 생성되는 평면이며, 두 번째 회전은 이 평면을 λ만큼 돌리고 $\mathbf{p}$는 $\mathbf{k}$ 쪽으로 움직인다.



그 평면에서 이 회전은 다음과 같이 보낸다.

$$\mathbf{p} \mapsto \cos\lambda\,\mathbf{p} + \sin\lambda\,\mathbf{k}, \qquad \mathbf{k} \mapsto -\sin\lambda\,\mathbf{p} + \cos\lambda\,\mathbf{k},$$

두 번째 식은 $\mathbf{k}$가 $\mathbf{p}$보다 항상 직각만큼 앞서 있기 때문이다. 따라서

$$P_2 = (\cos\lambda\cos\phi,\ \cos\lambda\sin\phi,\ \sin\lambda), \qquad R_2 = (-\sin\lambda\cos\phi,\ -\sin\lambda\sin\phi,\ \cos\lambda).$$

생각해 보기 두 번째 회전에서 Q는 어디로 가는가?

첫 번째 회전 후 Q는 $Q_1 = (-\sin\phi, \cos\phi, 0)$에 있는데, 이것은 정확히 $\mathbf{u}$이다. 즉 Q는 두 번째 회전의 축 위에 있으므로 움직이지 않는다. 따라서

$$Q_2 = (-\sin\phi,\ \cos\phi,\ 0).$$

검산으로, P_2, Q_2, R_2는 서로 수직인 단위벡터이다(예를 들어 $\overrightarrow{OP_2}\cdot\overrightarrow{OR_2} = -\sin\lambda\cos\lambda\cos^2\phi - \sin\lambda\cos\lambda\sin^2\phi + \sin\lambda\cos\lambda = 0$). 회전을 거친 뒤이므로 당연히 그래야 한다.

소문항 (iii)

이 소문항 전체에서 $P_2 \neq \pm P_0$이라고 가정하여, O, P_0, P_2가 실제로 하나의 평면을 결정하도록 한다.

생각해 보기 회전각이 왜 각 P_2OP_0과 같은가?

P는 평면 OP_0P_2 안에 머무르므로, 회전축은 O를 지나고 그 평면에 수직인 직선이어야 한다(회전은 한 점을, 그 점을 지나고 축에 수직인 평면 안에서 움직인다). 따라서 P는 이 평면 위의 대원(great circle)을 따라 움직이고, 이 평면 안의 모든 벡터는 회전각만큼 돌아간다. 그러므로 그 각은 $\overrightarrow{OP_2}$와 $\overrightarrow{OP_0}$ 사이의 각이며, 둘 다 단위벡터이므로

$$\cos\theta = \overrightarrow{OP_2}\cdot\overrightarrow{OP_0} = (\cos\lambda\cos\phi)(1) + (\cos\lambda\sin\phi)(0) + (\sin\lambda)(0) = \cos\phi\cos\lambda,$$

이고, 이것이 증명하려던 것이다. (반대쪽으로 길게 돌아 $2\pi-\theta$만큼 회전해도 코사인 값은 같다.)

축은 $\overrightarrow{OP_2}$와 $\overrightarrow{OP_0}$ 모두에 수직이므로, 두 벡터의 외적(cross product) 방향이다.

$$\overrightarrow{OP_2}\times\overrightarrow{OP_0} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\lambda\cos\phi & \cos\lambda\sin\phi & \sin\lambda \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0,\ \sin\lambda,\ -\cos\lambda\sin\phi).$$

따라서 축 방향의 벡터는

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \sin\lambda \\ -\cos\lambda\sin\phi \end{pmatrix}.$$

이다. 이 방향을 택하면, 오른손 법칙에 따라 θ만큼 회전할 때 P_2가 P_0으로 간다. 축에 x성분이 없다는 점에 주목하자. 축이 OP_0에 수직이므로 당연히 그래야 한다.

검산

- $\lambda = 0$이면 두 번째 회전은 아무 일도 하지 않으므로, 세 번째 회전은 첫 번째 회전을 되돌리기만 한다. 즉 $\theta = \phi$이고 축은 $(0, 0, -\sin\phi)$ 방향, 곧 z축이다. 공식과 일치한다.
- $\phi = 0$이면 회전은 y축을 중심으로 한 것뿐이었고, 실제로 축은 $(0, \sin\lambda, 0)$ 방향이며 $\theta = \lambda$이다.
- 수치적으로, 무작위로 고른 20 000개의 (ϕ, λ)에 대해 로드리게스 공식(Rodrigues' formula)으로 회전을 적용하면 P_2, Q_2, R_2가 그대로 재현되고, $(0, \sin\lambda, -\cos\lambda\sin\phi)$를 축으로 θ만큼 회전하면 P_2가 P_0으로 돌아온다. $\phi = 0.7, \lambda = 0.4$일 때 $\cos\theta \approx 0.7045$이므로 $\theta \approx 0.789$이다.

흔한 실수

- 두 번째 단계에서 Q를 회전시키는 실수: Q는 축 위에 있으므로 제자리에 머문다.
- R_2의 부호를 틀리는 실수: P가 $\mathbf{k}$ 쪽으로 기울어 올라가면 R은 OP_1에서 멀어지는 쪽으로 기울어 내려가므로, 수평 성분은 $-\sin\lambda\,\mathbf{p}$이다.

STEP 너머

여기서 두 각은 경도 ϕ와 위도 λ이며, $\cos\theta = \cos\phi\cos\lambda$는 구면 코사인 법칙(spherical cosine rule)의 직각인 경우로, 항해에서 대원 거리를 구하는 데 쓰인다. 더 일반적으로, 두 회전의 합성은 다시 하나의 축을 중심으로 하는 회전이며(오일러(Euler)의 회전 정리), 열벡터 $\overrightarrow{OP_2}$, $\overrightarrow{OQ_2}$, $\overrightarrow{OR_2}$는 합성 회전의 직교행렬(orthogonal matrix)을 이룬다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 회전행렬과 직교행렬을 다루며, Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 구의 회전을 복소수로 기술하는 방법을 보여 준다.

풀이

STEP III 2010, 문제 7

순수수학 • 매클로린 급수

> **STEP III 2010, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/10-s3-q7

핵심 아이디어

다루기 불편한 제곱근을 정리해 두는 것이 모든 것을 풀어 주는 열쇠이다. $\sqrt{1-x^2}\,y'$를 하나의 깔끔한 식으로 쓰고 한 번 더 미분하면 2계 방정식이 자연스럽게 나온다. 그다음 미분을 거듭하면 계수(coefficient)에 규칙이 나타나고, 이를 수학적 귀납법(induction)으로 증명한다. 일반 관계식에 $x = 0$을 대입하면 매클로린(Maclaurin) 계수에 대한 점화식(recurrence)이 되고, m이 짝수이면 이 점화식에서 0인 인수가 나타나므로 급수가 끊긴다.

풀이

미분방정식

$\theta = \arcsin x$라 하면 $|\theta| < \frac{1}{2}\pi$에서 $\sin\theta = x$이고, $|x| < 1$에 대하여 $\cos\theta = \sqrt{1-x^2} > 0$이다. 그러면 $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$이고 $y = \cos m\theta$이므로, 연쇄 법칙(chain rule)에 의하여

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{m\sin m\theta}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \text{즉,} \qquad \sqrt{1-x^2}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -m\sin m\theta.$$

이 식을 x에 대하여 미분하되, 좌변에는 곱의 미분법(product rule)을 쓴다.

$$\sqrt{1-x^2}\,\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{m^2\cos m\theta}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{m^2y}{\sqrt{1-x^2}}.$$

양변에 $\sqrt{1-x^2}$(0이 아니다)를 곱하면

$$(1-x^2)\,y'' - x\,y' + m^2y = 0,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. (여기서부터 $y^{(n)}$은 $\mathrm{d}^ny/\mathrm{d}x^n$을 뜻한다.)

3계 및 4계 방정식

방금 증명한 방정식을 미분한다. 곱 $(1-x^2)y''$에서는 $(1-x^2)y'''-2xy''$가, xy'에서는 $xy''+y'$가 나오므로

$$(1-x^2)\,y'''-3x\,y''+(m^2-1)\,y'=0.$$

같은 방법으로 한 번 더 미분하면

$$(1-x^2)\,y^{(4)}-2x\,y'''-3x\,y'''-3y''+(m^2-1)\,y''=0,$$

이므로

$$(1-x^2)\,y^{(4)}-5x\,y'''+(m^2-4)\,y''=0.$$

일반 관계식

x의 계수는 $1,3,5$로 나아가고 상수는 $m^2-0^2,\ m^2-1^2,\ m^2-2^2$로 나아가므로, 모든 정수 $n\geq 0$에 대하여

$$(1-x^2)\,y^{(n+2)}-(2n+1)\,x\,y^{(n+1)}+(m^2-n^2)\,y^{(n)}=0. \qquad (*)$$

이라고 추측할 수 있다. 이를 n에 대한 귀납법으로 증명한다. $n=0$인 경우는 처음에 증명한 방정식이다. 어떤 n에 대하여 $(*)$가 성립한다고 하자. 이를 미분하면

$$\begin{aligned}(1-x^2)\,y^{(n+3)}-2x\,y^{(n+2)}-(2n+1)\,x\,y^{(n+2)}\\ -(2n+1)\,y^{(n+1)}+(m^2-n^2)\,y^{(n+1)}=0.\end{aligned}$$

항을 정리하면 $x\,y^{(n+2)}$의 계수는 $-(2n+3)=-\big(2(n+1)+1\big)$이고, $y^{(n+1)}$의 계수는 $m^2-(n^2+2n+1)=m^2-(n+1)^2$이다. 따라서

$$(1-x^2)\,y^{(n+3)}-\big(2(n+1)+1\big)x\,y^{(n+2)}+\big(m^2-(n+1)^2\big)y^{(n+1)}=0,$$

이고, 이는 $(*)$에서 n 대신 $n+1$을 넣은 것이다. 귀납법에 의하여 $(*)$는 모든 $n\geq 0$에 대하여 성립한다.

매클로린 급수

$x=0$에서 $\theta=0$이므로 $y(0)=\cos 0=1$이고 $y'(0)=-m\sin 0=0$이다. $(*)$에 $x=0$을 대입하면 가운데 항이 사라진다.

$$y^{(n+2)}(0)=(n^2-m^2)\,y^{(n)}(0).$$

$y'(0)=0$이므로 홀수 계 도함수는 모두 0에서 값이 0이다. 짝수 계 도함수는

$$\begin{aligned}y''(0)&=(0-m^2)\cdot 1=-m^2,\\ y^{(4)}(0)&=(2^2-m^2)(-m^2)=m^2(m^2-2^2),\\ y^{(6)}(0)&=(4^2-m^2)\,m^2(m^2-2^2)=-m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2),\end{aligned}$$

이고, 일반적으로 $y^{(2k)}(0) = (-1)^k m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)\cdots\left(m^2-(2k-2)^2\right)$이다. 따라서 매클로린 급수(Maclaurin series)는

$$y = 1 - \frac{m^2x^2}{2!} + \frac{m^2(m^2-2^2)\,x^4}{4!} - \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)\,x^6}{6!} + \cdots,$$

이고, 0이 아닌 처음 세 항은 $1 - \dfrac{m^2x^2}{2!} + \dfrac{m^2(m^2-2^2)x^4}{4!}$이다. ($m \neq 0, \pm 2$이면 이 항들은 모두 0이 아니다. 이 값들에 대해서는 다음 부분에서 설명하듯이 급수의 항이 더 적다.)

짝수 m

m을 짝수인 정수라 하고 $|m| = 2p$라 쓰자. 인수 $m^2-(2p)^2$은 0이며, $2k-2 \geq 2p$가 되자마자 이 인수가 $y^{(2k)}(0)$에 나타난다. 따라서 $|m|$보다 높은 계의 도함수는 모두 $x=0$에서 0이고, 매클로린 급수는 $x^{|m|}$ 항에서 끊긴다.

생각해 보기 $x=0$에서 끊기는 급수는 한 점에서의 도함수에 대한 정보만 알려 준다. y가 모든 $|x|<1$에서 이 다항식과 정말로 **같다는** 것을 어떻게 알 수 있을까?

이번에는 구간 전체에서 $(*)$를 다시 이용한다. $n = |m|$으로 잡아 $m^2 - n^2 = 0$이 되게 하고, $v = y^{(n+1)}$이라 하자. 그러면 $(*)$는

$$(1-x^2)\,v' - (2n+1)\,x\,v = 0 \qquad (|x|<1).$$

이 된다. 이 1계 방정식의 적분인자(integrating factor)는 $(1-x^2)^{(2n-1)/2}$이다. 실제로

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)^{(2n+1)/2}\,v\right] = (1-x^2)^{(2n-1)/2}\left[(1-x^2)\,v' - (2n+1)\,x\,v\right] = 0,$$

이므로 $(1-x^2)^{(2n+1)/2}\,v$는 $(-1,1)$에서 상수이다. $n+1$이 홀수이므로 $x=0$에서의 값은 $v(0) = y^{(n+1)}(0) = 0$이다. 따라서 $v \equiv 0$, 즉 모든 $|x|<1$에 대하여 $y^{(|m|+1)}(x) = 0$이고, 그러므로 y는 차수가 $|m|$ 이하인 다항식(polynomial)이다. 다항식은 자기 자신의 매클로린 급수와 같으므로, $|x|<1$에 대하여

$$\cos(m \arcsin x) = 1 - \frac{m^2x^2}{2!} + \frac{m^2(m^2-2^2)\,x^4}{4!} - \cdots,$$

이고, 우변은 위의 끊기는 급수이다.

이제 $|\theta| < \frac{1}{2}\pi$라 하고 $x = \sin\theta$라 두자. 그러면 $|x|<1$이고 $\arcsin(\sin\theta) = \theta$이므로(바로 여기서 θ에 대한 제한이 쓰인다)

$$\cos m\theta = 1 - \frac{m^2\sin^2\theta}{2!} + \frac{m^2(m^2-2^2)\sin^4\theta}{4!} - \cdots,$$

이고, 이는 요구된 대로 시작하는 $\sin\theta$의 다항식이다.

마지막으로 $\sin^{|m|}\theta$의 계수는 $y^{(|m|)}(0)/|m|!$, 즉 $\pm m^2(m^2-2^2)\cdots\left(m^2-(|m|-2)^2\right)/|m|!$이다. $2j \leq |m|-2$이면 $(2j)^2 < m^2$이므로 이 인수들은 어느 것도 0이 아니다. 따

라서 $m \neq 0$이면 이 다항식의 차수는 정확히 $|m|$이다(즉 m이 양의 짝수이면 차수는 m이다). $m = 0$이면 상수 1이다.

검산

- $m = 2$: 급수는 $1 - 2\sin^2\theta$이고, 이는 익숙한 $\cos 2\theta$이다.
- $m = 4$: 급수는 $1 - 8\sin^2\theta + \frac{16\cdot 12}{24}\sin^4\theta = 1 - 8\sin^2\theta + 8\sin^4\theta$이다. 직접 계산하면 $\cos 4\theta = 1 - 2\sin^2 2\theta = 1 - 8\sin^2\theta\cos^2\theta = 1 - 8\sin^2\theta + 8\sin^4\theta$이다. 두 결과가 일치한다.
- 무작위로 고른 200개의 순서쌍 (m, x)에서 각 점을 중심으로 한 $\cos(m \arcsin x)$의 테일러 전개를 이용하여 $n = 0, \ldots, 8$에 대해 $(*)$를 수치적으로 확인하였고(가장 큰 상대 잔차는 약 10^{-13}), 12 이하의 모든 짝수 m에 대해 $\cos m\theta$와 다항식을 비교하였다. 예를 들어 $m = 6, \theta = 1$에서 양변은 모두 0.96017이다.

흔한 실수

- $(1 - x^2)y^{(n+2)}$를 미분할 때 곱의 미분법에서 나오는 $-2x\,y^{(n+2)}$ 항을 빠뜨리는 실수. 바로 이 항이 $2n + 1$을 $2n + 3$으로 바꾼다.
- 끊기는 매클로린 급수는 반드시 원래 함수와 같다고 가정하는 실수. 이 문제에서는 실제로 같지만, $v = y^{(|m|+1)}$을 이용한 논증(또는 다른 정당화)이 필요하다.
- 차수를 $m/2$로 답하는 실수. 이 다항식에는 $\sin\theta$의 짝수 거듭제곱만 있지만, 가장 높은 거듭제곱은 $\sin^m\theta$이다.

STEP 너머

대신 $x = \cos\phi$로 치환하면 같은 종류의 방정식이 체비쇼프(Chebyshev) 방정식 $(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$이 되며, 그 다항식 해 $T_n(\cos\phi) = \cos n\phi$가 수치 근사에서 핵심적인 체비쇼프 다항식이다. 미분한 방정식에 $x = 0$을 대입하여 계수에 대한 점화식을 얻는 우리의 기법은 선형 상미분방정식(linear ODE)에 대한 **거듭제곱급수 방법**(*power series method*)의 출발점이다. 이 방법에서는 특별한 매개변수 값에서 급수가 끊기는 현상을 통해 르장드르(Legendre), 에르미트(Hermite), 체비쇼프 다항식이 모두 나타난다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에는 급수해를 명쾌하게 다루는 장이 있다.

풀이

STEP III 2010, 문제 8

순수수학 • 몫의 미분법과 적분

STEP III 2010, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/10-s3-q8

핵심 아이디어

식 $QR' - Q'R$는 몫 R/Q를 미분(differentiate)할 때 얻어지는 분자이다. 따라서 주어진 P를 만들어 내는 R을 찾을 수만 있다면, P/Q^2 꼴의 피적분함수(integrand)는 보자마자 적분할 수 있다. 두 소문항 모두에서 분모가 Q를 알려 주고, R은 계수비교(comparing coefficients)로 찾는다. 소문항 (ii)에서는 미분방정식(differential equation)의 좌변이 정확히 $Qy' - Q'y$가 되는데, 이는 같은 구조가 모습을 바꾸어 나타난 것이다.

풀이

일반적인 적분

몫의 미분법(quotient rule)에 의하여

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{R}(x)}{\mathrm{Q}(x)}\right) = \frac{\mathrm{Q}(x)\mathrm{R}'(x) - \mathrm{Q}'(x)\mathrm{R}(x)}{\big(\mathrm{Q}(x)\big)^2} = \frac{\mathrm{P}(x)}{\big(\mathrm{Q}(x)\big)^2},$$

이므로

$$\int \frac{\mathrm{P}(x)}{\big(\mathrm{Q}(x)\big)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{R}(x)}{\mathrm{Q}(x)} + C.$$

이다.

소문항 (i)

여기서 $\mathrm{Q}(x) = 1 + 2x + 3x^2$이므로 $\mathrm{Q}'(x) = 2 + 6x$이다. $\mathrm{R}(x) = a + bx + cx^2$, $\mathrm{R}'(x) = b + 2cx$로 두면

$$\begin{aligned}\mathrm{QR}' - \mathrm{Q}'\mathrm{R} &= (1 + 2x + 3x^2)(b + 2cx) - (2 + 6x)(a + bx + cx^2) \\ &= (b - 2a) + (2c - 6a)x + (2c - 3b)x^2.\end{aligned}$$

이다. (각 곱에서 나오는 x^3 항 $6cx^3$은 서로 소거된다.) 이것이 $5x^2 - 4x - 3$과 같아야 하므로

$$b - 2a = -3, \qquad 2c - 6a = -4, \qquad 2c - 3b = 5.$$

이다. 처음 두 식에서 $b = 2a - 3$, $c = 3a - 2$를 얻는다. 이를 세 번째 식에 대입하면

$$2(3a - 2) - 3(2a - 3) = 6a - 4 - 6a + 9 = 5,$$

가 되어 a가 **어떤 값이든** 성립한다. 따라서 세 번째 식은 새로운 정보를 주지 않으며, 모든 a의 값이 조건을 만족한다.

$$\mathrm{R}(x) = a + (2a - 3)x + (3a - 2)x^2.$$

$a = 1$로 택하면 가장 깔끔한 $\mathrm{R}(x) = 1 - x + x^2$를 얻고, 따라서

$$\int \frac{5x^2 - 4x - 3}{(1 + 2x + 3x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1 - x + x^2}{1 + 2x + 3x^2} + C.$$

이다. 분모는 결코 0이 되지 않으므로(판별식(discriminant)이 $4 - 12 < 0$이다), 이 식은 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

유일하지 않음. 방금 본 것처럼 조건을 만족하는 R은 매개변수 하나로 이루어진 족(one-parameter family)을 이루므로, 선택은 유일하지 않다. 예를 들어 $a = 0$이면 $\mathrm{R} = -3x - 2x^2$, $a = 1$이면 $\mathrm{R} = 1 - x + x^2$이고, 둘 다 조건을 만족한다. 일반적인 a에 대한 선택과 $a = 0$에 대한 선택을 비교하면

$$\big(a + (2a - 3)x + (3a - 2)x^2\big) - \big(-3x - 2x^2\big) = a + 2ax + 3ax^2 = a\,\mathrm{Q}(x).$$

이다.

? **생각해 보기** R에 Q의 상수배를 더해도 아무런 차이가 없는 이유는 무엇일까?

상수 k에 대하여 R을 $\mathrm{R} + k\mathrm{Q}$로 바꾸면

$$\mathrm{Q}(\mathrm{R} + k\mathrm{Q})' - \mathrm{Q}'(\mathrm{R} + k\mathrm{Q}) = \mathrm{QR}' - \mathrm{Q}'\mathrm{R} + k(\mathrm{QQ}' - \mathrm{Q}'\mathrm{Q}) = \mathrm{QR}' - \mathrm{Q}'\mathrm{R},$$

이므로 P는 변하지 않는다. 이에 대응하여 답 R/Q는 R/Q + k로 바뀐다. 즉 R을 다르게 택하면 상수만큼만 차이 나는 부정적분(antiderivative)을 얻게 되고, 그 상수는 임의의 적분상수(constant of integration)에 흡수된다. 예를 들어

$$\frac{1-x+x^2}{1+2x+3x^2} = \frac{-3x-2x^2}{1+2x+3x^2} + 1.$$

이다.

소문항 (ii)

$\mathrm{Q}(x) = 1+\cos x + 2\sin x$로 두자. 그러면 $\mathrm{Q}'(x) = -\sin x + 2\cos x$이므로, 방정식에서 y의 계수 $\sin x - 2\cos x$는 정확히 $-\mathrm{Q}'(x)$이다. 따라서 방정식은

$$\mathrm{Q}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \mathrm{Q}'y = 5 - 3\cos x + 4\sin x.$$

이다. $\mathrm{Q} \neq 0$인 구간에서 양변을 Q^2으로 나누면 좌변이 몫의 도함수임을 알 수 있다.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y}{\mathrm{Q}}\right) = \frac{5-3\cos x+4\sin x}{\mathrm{Q}^2}.$$

(다시 말해 $1/\mathrm{Q}^2$이 적분인자(integrating factor)이다.) 우변을 적분하기 위해 $\mathrm{QR}' - \mathrm{Q}'\mathrm{R} = 5 - 3\cos x + 4\sin x$를 만족하는 R을 찾는다. Q의 꼴을 본떠 $\mathrm{R} = a + b\cos x + c\sin x$로 시도하면 $\mathrm{R}' = -b\sin x + c\cos x$이다. 전개하면

$$\begin{aligned}\mathrm{QR}' &= -b\sin x + c\cos x + (2c-b)\sin x\cos x + c\cos^2 x - 2b\sin^2 x,\\ \mathrm{Q}'\mathrm{R} &= -a\sin x + 2a\cos x + (2c-b)\sin x\cos x + 2b\cos^2 x - c\sin^2 x.\end{aligned}$$

이다. 빼면 $\sin x\cos x$ 항은 소거되고, 제곱 항들은 $(c-2b)(\cos^2 x + \sin^2 x) = c - 2b$로 합쳐진다. 따라서

$$\mathrm{QR}' - \mathrm{Q}'\mathrm{R} = (c-2b) + (c-2a)\cos x + (a-b)\sin x.$$

이다. 이를 $5 - 3\cos x + 4\sin x$와 비교하면

$$c - 2b = 5, \qquad c - 2a = -3, \qquad a - b = 4.$$

이다. 첫 번째 식에서 두 번째 식을 빼면 $2a - 2b = 8$, 즉 세 번째 식이 다시 나오므로, 소문항 (i)과 같은 이유로 자유 매개변수가 하나 있다. $b = 0$으로 택하면 $c = 5$, $a = 4$이므로 $\mathrm{R} = 4 + 5\sin x$이다. 따라서

$$\frac{y}{\mathrm{Q}} = \frac{4+5\sin x}{1+\cos x+2\sin x} + C,$$

이고, 일반해(general solution)는

$$y = 4 + 5\sin x + C(1+\cos x+2\sin x),$$

이다. 여기서 C는 임의의 상수이다. 이 해를 구할 때 Q로 나누었지만, 직접 대입해 보면 이 함수는 모든 x에 대하여 방정식을 만족한다. b를 다르게 택하면 C만 이동할 뿐이다. 예를 들어 $b = -2$이면 $\mathrm{R} = 2 - 2\cos x + \sin x = (4 + 5\sin x) - 2\mathrm{Q}$이다.

검산

- 소문항 (i)에서 피적분함수의 $\int_0^1$은 우리가 구한 부정적분으로부터 $\frac{1}{6} - 1 = -\frac{5}{6}$이어야 한다. 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 $-0.83333\ldots$이고, 임의의 구간에서도 모든 a의 선택에 대하여 값이 일치한다.
- 소문항 (ii)에서 $y = 4 + 5\sin x$를 대입하면 좌변은 $(1 + \cos x + 2\sin x)5\cos x - (2\cos x - \sin x)(4 + 5\sin x) = 5 - 3\cos x + 4\sin x$이다. 또한 $y = \mathrm{Q}$를 대입하면 $\mathrm{QQ}' - \mathrm{Q}'\mathrm{Q} = 0$이므로, 이것이 여함수(complementary function)이다.
- 방정식을 수치적으로(룽게–쿠타(Runge–Kutta) 방법) $y(0.5) = 1.7$에서 $x = 1.5$까지 풀면 3.910638을 얻으며, 이는 대응하는 C를 넣은 공식의 값과 일치한다.

흔한 실수

- 미지수 세 개에 대한 방정식 세 개가 유일한 해를 가지리라고 기대하는 것. 여기서는 방정식들이 종속이며, 바로 그것이 유일하지 않음에 관한 질문의 핵심이다.
- 소문항 (ii)에서 Q′의 부호를 틀리는 것. $\mathrm{Q}' = 2\cos x - \sin x$이므로 y의 계수는 $+\mathrm{Q}'$가 아니라 $-\mathrm{Q}'$이다.
- 최종 답에서 적분상수가 Q에 곱해진다는 사실을 잊는 것. 일반해는 $y = \mathrm{R} + C$가 아니라 $y = \mathrm{R} + C\mathrm{Q}$이다.

STEP 너머

소문항 (ii)의 방정식은 1계 선형 미분방정식(first-order linear differential equation)이며, 일반해는 "특수해 더하기 동차방정식의 해의 상수배"라는 모양을 갖는다. 이는 모든 선형 문제에 공통으로 나타나는 패턴이다. 식 $\mathrm{QR}' - \mathrm{Q}'\mathrm{R}$은 Q와 R의 론스키안(Wronskian)으로, 2계 선형 방정식에서, 특히 계수 내림법(reduction of order)과 매개변수 변환법(variation of parameters)에서 핵심적인 역할을 한다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 적분인자와 론스키안을 모두 다룬다.

풀이

STEP III 2010, 문제 9

역학 • 원 위의 운동

STEP III 2010, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

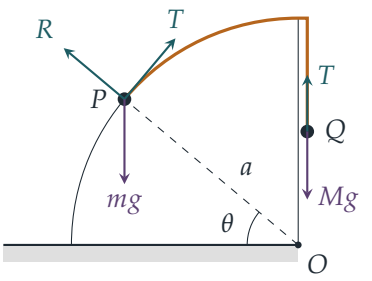
step.maths.org/questions/10-s3-q9

핵심 아이디어

줄이 늘어나지 않고(inextensible) 블록이 매끄러우므로(smooth), P와 Q는 항상 같은 속력으로 움직이며 계 전체의 에너지가 보존(conservation of energy)된다. 이로부터 미분방정식(differential equation)을 풀지 않고도 P의 속력을 θ의 함수(function)로 얻는다. 그다음 P는 원 위를 움직이므로, O를 향하는 방향으로 힘을 분해하면 수직항력(normal reaction)을 구할 수 있다. 접촉을 유지한다는 것은 이 수직항력이 음이 되지 않는다는 뜻이고, 오목성(concavity)을 이용한 논증으로 블록의 꼭대기만 확인하면 충분함을 보인다.

풀이

모형. P와 Q는 입자이고, 줄은 가볍고 늘어나지 않으며, 블록은 매끄러우므로 장력(tension) T는 줄 전체에서 같다. P가 호 위에서 각 θ인 위치에 있다고 하자. 줄은 P에서 호를 따라 블록의 꼭대기까지 이어진 다음, 연직면 옆을 따라 곧게 아래로 내려가 Q에 이른다.



속력. P가 $\theta = 0$에서 θ까지 움직였을 때 길이 $a\theta$인 호를 지나왔으므로, Q는 거리 $a\theta$만큼 내려왔다. 둘 다 속력 $v = a\dot{\theta}$로 움직인다. 한편 P는 높이 $a\sin\theta$만큼 올라갔다. 블록은 매끄럽고 줄은 (늘어나지 않으므로) 계에 대해 알짜 일을 하지 않으므로 에너지가 보존된다. 정지 상태에서 출발하므로

$$\tfrac{1}{2}(m+M)v^2 = Mga\theta - mga\sin\theta, \qquad \text{따라서} \qquad v^2 = \frac{2ga\,(M\theta - m\sin\theta)}{m+M}.$$

$M\theta > m\theta \geq m\sin\theta$이므로 이 값은 $0 < \theta \leq \frac{1}{2}\pi$에서 양수이다. 따라서 계는 실제로 정지 상태에서 움직이기 시작한다.

수직항력. P는 O를 중심으로 하는 반지름 a인 원 위를 움직이므로, O를 향하는 가속도는 v^2/a이다. P에 작용하는 힘은 다음과 같다.

- OP 방향으로 O에서 멀어지는 쪽을 향하는 수직항력 R;
- 접선 방향의 장력 T. 이 힘은 반지름 방향 성분이 없다;
- 무게 mg. OP가 수평과 각 θ를 이루므로 O를 향하는 성분은 $mg\sin\theta$이다.

O를 향하는 방향으로 분해하면

$$mg\sin\theta - R = \frac{mv^2}{a} = \frac{2mg\,(M\theta - m\sin\theta)}{m+M}.$$

따라서

$$R = \frac{mg\big[(m+M)\sin\theta - 2M\theta + 2m\sin\theta\big]}{m+M}$$
$$= \boxed{\frac{mg\big[(3m+M)\sin\theta - 2M\theta\big]}{m+M}}.$$

생각해 보기 $[0, \frac{1}{2}\pi]$의 모든 θ에 대해 R은 음이 아니어야 한다. R의 최솟값을 찾아야 할까?

조건. P가 접촉을 유지하는 것은 전 구간에서 $R \geq 0$일 때, 즉

$$f(\theta) = (3m+M)\sin\theta - 2M\theta \geq 0 \quad \text{다음 범위에서: } 0 \leq \theta \leq \tfrac{1}{2}\pi.$$

일 때와 정확히 같다. 최솟값은 필요 없다. 이 구간에서 $f''(\theta) = -(3m+M)\sin\theta \leq 0$이므로 f는 오목(concave)하고, 따라서 그 그래프는 양 끝점을 잇는 현(chord) 위에 있거나 그보다 위에 있다. $f(0) = 0$이므로 다음이 성립한다.

- **필요성**(*necessity*). $\theta = \frac{1}{2}\pi$에서 P가 여전히 접촉하고 있다면 $f(\frac{1}{2}\pi) = 3m + M - \pi M \geq 0$이다.

- **충분성**(*sufficiency*). $f(\frac{1}{2}\pi) \geq 0$이면 $(0,0)$에서 $(\frac{1}{2}\pi, f(\frac{1}{2}\pi))$까지의 현은 축 위에 있거나 그보다 위에 있다. 오목성에 의해 f는 현 위에 있거나 그보다 위에 있으므로, 구간 전체에서 $f \geq 0$이다.

따라서 조건은 $3m \geq (\pi - 1)M$, 즉

$$\frac{m}{M} \geq \frac{\pi - 1}{3},$$

이고, 이것이 보이려던 것이다. $(\pi - 1)/3 \approx 0.714 < 1$이므로 이 결과는 $m < M$과 모순되지 않는다.

검산

- $\theta = 0$에서 $R = 0$을 얻는다. 이는 옳다. 처음에 P는 블록의 밑동에 있고, 반지름 OP는 수평이며, P의 무게는 탁자가 떠받친다.
- P에 대해 접선 방향으로, Q에 대해 연직 방향으로 분해하면 $T = \dfrac{Mmg(1+\cos\theta)}{m+M} > 0$을 얻으므로, 줄은 실제로 내내 팽팽하다.
- 수치적으로 $m = 0.8$, $M = 1$, $a = 1$ (비율 $0.8 > 0.714$)로 두고 운동방정식(equation of motion)을 단계적으로 풀며 뉴턴(Newton)의 제2법칙으로 R을 계산하면 공식과 10^{-13} 이내로 일치하고, R은 음이 되지 않는다. $m/M = \frac{2}{3}$이면 꼭대기 근처에서 R이 음수가 된다.

흔한 실수

- Q도 운동 에너지를 가진다는 것을 잊어서 $\frac{1}{2}(m+M)v^2$ 대신 $\frac{1}{2}mv^2$로 쓰는 것.
- 반지름 방향 방정식에 장력을 넣는 것. 매끄러운 면 위에서 줄은 P에서의 접선을 따라 놓인다.
- 왜 그것으로 충분한지 정당화하지 않고 $\theta = \frac{1}{2}\pi$에서만 $R \geq 0$을 확인하는 것. 그것으로 충분하게 만드는 것은 f의 오목성이다.

STEP 너머

여기서는 에너지 보존이 운동방정식 $(m+M)a\ddot{\theta} = g(M - m\cos\theta)$를 푸는 일을 대신했다. 이것이 제1적분(first integral)이라는 아이디어이며, 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)에서 핵심이 된다. 줄은 구속 조건(constraint)이고, 좌표 하나 θ가 계 전체를 기술한다. 이 문제가 속한, 구슬이 구면에서 떨어져 나가는 유형의 문제들은 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)에서 자세히 다룬다.

풀이

STEP III 2010, 문제 10

역학 • 미소 진동

STEP III 2010, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/10-s3-q10

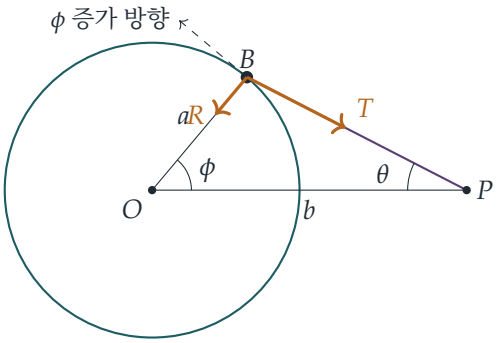
핵심 아이디어

구슬은 원 위에 묶여 있으므로, 고리의 접선 방향 힘 성분만이 구슬의 운동을 바꾼다. 수직항력(normal reaction)과 (고리의 연직 방향 항력이 상쇄하는) 중력은 전혀 관여하지 않는다. 나머지는 모두 삼각형 OBP의 기하이며, 사인법칙(sine rule)이 이 기하를 줄의 길이로 바꾸어 주고, 작은 각에 대해서는 두 번째 부분에서 요구하는 θ와 ϕ 사이의 선형 관계로 바꾸어 준다.

풀이

운동 방정식

구슬은 매끄러운 고리 위의 질점으로, 줄은 가볍고 탄성 있는 줄로 모형화한다. 그림과 같이 P를 양의 x축 위에 두고 ϕ를 시계 반대 방향으로 재어, B가 OP로부터 각 ϕ인 위치에 있도록 한다. 삼각형 OBP에서 O에서의 각은 ϕ, P에서의 각은 θ이므로 B에서의 각은 $\pi - \theta - \phi$이다.



$l = BP$라 하자. 삼각형 OBP에서 사인법칙에 의해

$$\frac{l}{\sin\phi} = \frac{a}{\sin\theta} = \frac{b}{\sin(\theta+\phi)},$$

이다. 여기서 $\sin(\pi-\theta-\phi) = \sin(\theta+\phi)$를 이용하였다. 특히 $l = \dfrac{a\sin\phi}{\sin\theta}$이다.

B가 P에 가장 가까워질 수 있는 거리는 $b-a$이고 $b-a > c$이므로, 줄은 항상 팽팽하다. 따라서 훅의 법칙(Hooke's law)에 의해 장력(tension)은

$$T = \frac{\lambda(l-c)}{c} = \lambda\left(\frac{a\sin\phi}{c\sin\theta} - 1\right).$$

이다.

수평면에서 작용하는 힘은 BP 방향의 장력 T와, 반지름 OB 방향으로 작용하는 매끄러운 고리의 수직항력 R이다. (연직 방향으로는 무게가 항력의 연직 성분과 평형을 이룬다.) 구슬은 반지름 a인 원 위를 움직이므로, ϕ가 증가하는 방향의 접선 가속도는 $a\ddot{\phi}$이다. 접선 성분을 가지는 힘은 T뿐이다.

줄 BP는 안쪽을 향하는 반지름인 BO와 각 $\pi-\theta-\phi$를 이룬다. 따라서 바깥쪽을 향하는 반지름과는 각 $\theta+\phi$를 이루고, 접선 방향 성분의 크기는 $T\sin(\theta+\phi)$이다. 이 성분은 P 쪽, 즉 ϕ가 **감소하는** 방향을 향한다. 접선 방향으로 힘을 분해하면

$$ma\ddot{\phi} = -\lambda\left(\frac{a\sin\phi}{c\sin\theta} - 1\right)\sin(\theta+\phi),$$

이고, 이것이 구하는 식이다. ($\phi < 0$이면 그림을 OP에 대해 대칭이동한 것이 되며, 이때 $\theta < 0$이기도 하므로 부호를 가진 각으로 같은 방정식이 성립한다.)

미소 진동

사인법칙으로부터 $a\sin(\theta+\phi) = b\sin\theta$가 정확히 성립한다. θ와 ϕ가 작으면 양변에서 $\sin x \approx x$이므로

$$a(\theta+\phi) \approx b\theta.$$

이다. 따라서 $\theta \approx \dfrac{a\phi}{b-a}$이고 $\theta+\phi \approx \dfrac{b\theta}{a} \approx \dfrac{b\phi}{b-a}$이다.

> **생각해 보기** 두 각이 모두 0으로 갈 때 $\dfrac{a\sin\phi}{c\sin\theta}$는 어떻게 되는가? $0/0$ 꼴처럼 보인다.

이 몫은 그저 l/c이며, B가 평형 위치에 가까워지면 길이 l은 $b-a$로 수렴한다. 같은 말이지만, 위의 관계로부터 $\dfrac{a\sin\phi}{\sin\theta} \approx \dfrac{a\phi}{\theta} \approx b-a$이다. 그러므로 최저차까지 보면 장력은 일정한 평형 장력

$$T_0 = \lambda\left(\frac{b-a}{c} - 1\right) = \frac{\lambda(b-a-c)}{c},$$

이고, $c < b - a$이므로 이 값은 양수이다. 인수 $\sin(\theta + \phi)$가 이미 작으므로, T에 대한 보정은 이차 항에만 기여한다.

운동 방정식에 대입하고 일차 항만 남기면

$$ma\ddot{\phi} \approx -\frac{\lambda(b-a-c)}{c} \cdot \frac{b\phi}{b-a}, \qquad \text{따라서} \qquad \ddot{\phi} = -\omega^2\phi, \quad \omega^2 = \frac{\lambda b(b-a-c)}{mac(b-a)}.$$

이다. 이것은 단진동(simple harmonic motion)이며, $\theta = \phi = 0$ 근처의 미소 진동의 주기는

$$\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{mac(b-a)}{\lambda b(b-a-c)}}.$$

이다.

검산

- 차원: λ는 힘이므로 $mac(b-a)/(\lambda b(b-a-c))$의 차원은 $\mathrm{ML}/(\mathrm{MLT}^{-2}) = \mathrm{T}^2$이고, 이는 주기에 걸맞다.
- $c \to b - a$이면 평형 장력이 0이 되고 주기는 무한대가 된다. 느슨한 줄은 복원력을 주지 못하므로 타당하다.
- 수치적으로 $a = 1, b = 2.5, c = 0.7, \lambda = 3, m = 0.5$일 때 공식은 주기 1.8586을 준다. 작은 변위에서 출발하여 (힘을 B의 위치로부터 직접 계산하면서) 정확한 운동을 단계별로 계산하면 유효숫자 여섯 자리까지 같은 값이 나온다. 정확한 운동 방정식은 임의의 위치에서 직접 벡터로 분해한 결과와도 일치한다.

흔한 실수

- 부호를 틀리는 것: 접선 방향으로 당기는 힘은 P 쪽, 즉 $\phi = 0$ 쪽을 향하므로 반드시 음의 부호가 붙어야 한다.
- 평형 상태에서 장력을 0으로 놓는 것. 그곳에서 줄은 길이 $b - a > c$로 늘어나 있으므로 장력은 $\lambda(b-a-c)/c$이고, 바로 이 장력이 복원력을 제공한다.
- $\theta + \phi \approx \phi$를 쓰는 것. 여기서 θ는 ϕ와 같은 차수이므로, 이를 버리면 틀린 주기가 나온다.

STEP 너머

여기서 쓴 방법은 미소 진동의 진동수를 구하는 표준적인 방법이다. 평형점을 찾고, 그 근처에서 운동 방정식을 선형화(linearise)한 뒤 ω^2를 읽어 낸다. 흥미로운 점은 복

원력이 전적으로 줄의 방향 변화를 통해 작용하는 **평형** 장력에서 나온다는 것인데, 이는 팽팽하게 당긴 기타 줄과 같은 원리이다. 대학 1학년 과정에서는 이것이 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)과 정규 모드(normal modes)로 이어진다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 미소 진동 해석이 신중하게 전개되는 것을 볼 수 있는 좋은 책이다.

풀이

STEP III 2010, 문제 11

역학 • 마찰과 상대 운동

STEP III 2010, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

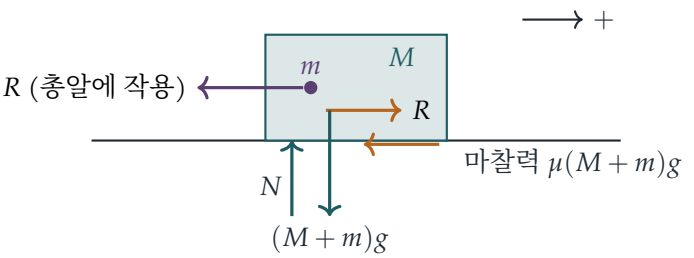
step.maths.org/questions/10-s3-q11

핵심 아이디어

여기서는 운동량(momentum)이 보존되지 **않는다**. 지면의 마찰력(friction)이 처음부터 끝까지 나무토막에 작용하기 때문이다. 따라서 익숙한 "총알이 나무토막에 박히는" 지름길은 쓸 수 없다. 대신 총알과 나무토막을 서로 다른 두 질점(particle)으로 보고, 각각 일정한 가속도(acceleration)를 가지며 크기가 같고 방향이 반대인 저항력 R로 연결되어 있다고 생각한다. 가속도가 일정하므로 *suvat* 공식(suvat equations)만으로 모든 계산을 할 수 있고, 상대 운동(relative motion)은 두 운동의 차일 뿐이다.

풀이

총알과 나무토막을 수평선 위를 움직이는 질점으로 모형화하고, 총알이 날아가는 방향을 양의 방향으로 잡는다. 총알이 나무토막 안에 있는 동안 나무토막은 총알을 힘 R로 뒤로 밀고, 뉴턴의 제3법칙(Newton's third law)에 따라 총알은 나무토막을 힘 R로 앞으로 민다.



수직항력. 연직 방향으로는 아무것도 가속되지 않는다. 총알은 나무토막이 떠받치고 있으므로 지면이 둘의 무게를 모두 떠받친다. 따라서 수직항력(normal reaction)은 $N = (M + m)g$이다.

마찰력. 문제에서 $R > (M+m)\mu g$라고 주어졌으므로, 나무토막에 작용하는 앞쪽 방향의 힘 R는 가능한 최대 마찰력 $\mu N = (M+m)\mu g$보다 크다. 그러므로 나무토막은 실제로 미끄러지며, 일단 움직이기 시작하면 마찰력은 한계값 $\mu(M+m)g$를 가지고 뒤쪽으로 작용한다.

소문항 (i)

총알에 작용하는 수평 방향의 힘은 뒤쪽으로 향하는 R뿐이므로, 총알은 R/m의 크기로 감속한다. 나무토막에 작용하는 알짜힘은 앞쪽으로 $R-(M+m)\mu g$이므로, 나무토막은 앞쪽으로

$$A = \frac{R-(M+m)\mu g}{M} > 0.$$

의 가속도로 가속한다. 나무토막에 대한 총알의 상대 가속도는 $-\frac{R}{m} - A$이므로, 나무토막에 대한 총알의 감속도(deceleration)의 크기는

$$a = \frac{R}{m} + \frac{R-(M+m)\mu g}{M},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

소문항 (ii)

나무토막에 대해 총알은 속력 u로 출발하여 a의 크기로 균일하게 감속하므로, 시간

$$t_1 = \frac{u}{a}.$$

가 지난 뒤 나무토막에 대해 정지한다. 이 순간 나무토막의 속력은 공통 속력 v이다. 나무토막은 정지 상태에서 일정한 가속도 A로 출발했으므로

$$v = At_1 = \frac{Au}{a}, \qquad \text{즉,} \qquad av = Au = \frac{Ru-(M+m)\mu gu}{M},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

> **생각해 보기** 왜 그냥 운동량 보존을 이용해 v를 구하지 않을까?

총알–나무토막 계의 운동량은 외부에서 수평 방향의 힘이 작용하지 않을 때에만 보존된다. 여기서는 지면의 마찰력이 시간 t_1 동안 내내 나무토막에 작용하여 운동량 $(M+m)\mu g\, t_1$을 빼앗아 간다. (실제 총알에서는 이 시간이 매우 짧아 $v \approx mu/(M+m)$이지만, 문제는 정확한 값을 요구한다.)

소문항 (iii)

시간 t_1 동안 나무토막은 정지 상태에서 속력 v까지 균일하게 가속하므로, 이동 거리는 평균 속력에 시간을 곱한 것이다.

$$s_1 = \frac{0+v}{2}\, t_1 = \frac{uv}{2a}.$$

소문항 (iv)

총알이 나무토막 안에서 더 이상 움직이지 않게 되면, 둘은 질량 $M+m$인 하나의 물체로서 함께 움직인다. 무게는 여전히 $(M+m)g$이므로 마찰력은 뒤쪽으로 $\mu(M+m)g$이고 감속도는 μg이다. 속력 v에서 출발하여 정지할 때까지

$$s_2 = \frac{v^2}{2\mu g}$$

만큼 더 미끄러진다(그 뒤에는 정지 마찰력(static friction)을 이겨 낼 수평 방향의 힘이 남아 있지 않으므로 정지한 채로 있다). 전체 이동 거리는

$$s_1 + s_2 = \frac{uv}{2a} + \frac{v^2}{2\mu g} = \frac{uv}{2a} + \frac{v}{2\mu g} \cdot \frac{Au}{a} = \frac{uv}{2a\mu g}\left(\mu g + A\right),$$

이다. 여기서 v의 한 인수에 소문항 (ii)의 $v = Au/a$를 대입하였다.

생각해 보기 어떻게 하면 a와 A를 없애고 깔끔한 답에 이를 수 있을까?

둘 다 분모 mM으로 통분하고 공통인수를 찾아본다.

$$\mu g + A = \frac{M\mu g + R - (M+m)\mu g}{M} = \frac{R - m\mu g}{M},$$
$$a = \frac{MR + mR - m(M+m)\mu g}{mM} = \frac{(M+m)(R - m\mu g)}{mM}.$$

따라서 인수 $R - m\mu g$가 약분되어 $\dfrac{\mu g + A}{a} = \dfrac{m}{M+m}$이다($R > (M+m)\mu g > m\mu g$이므로 이 인수는 양수이다). 그러므로 나무토막이 움직인 전체 거리는

$$\frac{uv}{2\mu g} \cdot \frac{m}{M+m} = \frac{muv}{2(M+m)\mu g},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

$R < (M+m)\mu g$인 경우

이번에는 나무토막을 앞으로 미는 힘 R가 한계 마찰력(limiting friction) $(M+m)\mu g$보다 작으므로, 정지 마찰력이 나무토막을 제자리에 붙잡아 둘 수 있다. 즉 나무토막은 전혀 움직이지 않는다. 총알은 정지해 있는 나무토막 안에서 R/m의 크기로 감속하다가 거리 $\dfrac{mu^2}{2R}$만큼 파고든 뒤 멈추고(나무토막이 충분히 두껍다고 가정한다), 나무토막은 내내 그 자리에 머문다.

검산

- $m = 0.02\,\mathrm{kg}$, $M = 2\,\mathrm{kg}$, $u = 300\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $\mu = 0.5$, $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $R = 1000\,\mathrm{N}$로 놓자. 그러면 $a \approx 50\,495\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $v \approx 2.941\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $s_1 \approx 0.0087\,\mathrm{m}$, $s_2 \approx 0.8827\,\mathrm{m}$이고

$s_1 + s_2 \approx 0.8914\,\mathrm{m}$이므로 $muv/\big(2(M+m)\mu g\big)$와 일치한다. 두 질점의 운동을 단계별로 수치 모의실험해도 같은 v와 전체 거리를 얻는다.

- $R \to \infty$일 때(순간적인 충돌), $v = Au/a \to mu/(M+m)$이 되어 운동량 보존으로 얻는 답과 같아진다. 당연히 그래야 한다.
- 차원(dimensions): $muv/\big((M+m)\mu g\big)$의 차원은 (속력)^2/(가속도), 즉 길이이다.

흔한 실수

- 나무토막에 대해 $N = Mg$를 사용하여, 박혀 있는 총알의 무게도 지면이 떠받친다는 사실을 잊는 것.
- 충돌 과정에서 운동량이 보존된다고 보아 마찰력에 의한 충격량을 무시하는 것.
- R에서 마찰력을 뺀 값이 아니라 R 자체를 나무토막에 작용하는 알짜힘으로 보는 것.

STEP 너머

충격량(impulse)을 이용하면 전체 운동이 서로 맞아떨어지는지 빠르게 확인할 수 있다. 계는 결국 정지하므로, 나무토막이 움직이는 전체 시간 동안 지면의 마찰력이 주는 충격량은 총알의 처음 운동량 mu와 같아야 한다. 계를 여러 부분으로 나누고, 내력은 뉴턴의 제3법칙으로, 외력은 꼼꼼하게 추적하는 것은 대학 1학년 역학의 핵심 기술이며, 이는 질량중심 좌표계(centre-of-mass frame)와 비탄성 충돌(inelastic collisions)로 이어진다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 바로 이런 성격의 문제를 많이 다루며 이 아이디어들을 전개한다.

풀이

STEP III 2010, 문제 12

확률과 통계 • 기하분포의 기댓값

STEP III 2010, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/10-s3-q12

핵심 아이디어

급수 S는 등차등비급수(arithmetico-geometric series)이며, rS를 빼는 기법을 쓰면 이것이 보통의 등비급수(geometric series)로 바뀐다. 이 결과를 얻고 나면, 문제에 나오는 모든 기댓값(expectation)이 정확히 이 꼴의 합이 된다. 사격 횟수는 일차적으로 늘어나는 반면, 그 횟수까지 갈 확률(probability)은 기하급수적으로 줄어든다. 따라서 문제 전체는 각 기댓값을 합으로 쓰고 알맞은 r과 d의 값을 읽어 내는 일로 귀결된다.

풀이

급수

$|r| < 1$이므로 급수는 절대수렴(converges absolutely)한다(각 항이 상수 곱하기 $n|r|^n$으로 위로 유계이다). 따라서 항별로 뺄 수 있다. r의 같은 거듭제곱끼리 줄을 맞추면

$$\begin{aligned} S &= 1 + (1+d)r + (1+2d)r^2 + (1+3d)r^3 + \cdots, \\ rS &= \quad\quad r + (1+d)r^2 + (1+2d)r^3 + \cdots, \end{aligned}$$

이고, $n \geq 1$인 r^n의 각 계수는 정확히 d만큼 차이가 난다. 그러므로

$$(1-r)S = 1 + d\left(r + r^2 + r^3 + \cdots\right) = 1 + \frac{rd}{1-r},$$

이다. 여기서 등비급수를 합했는데, $|r| < 1$이므로 이는 타당하다. $1 - r \neq 0$으로 나누면

$$S = \frac{1}{1-r} + \frac{rd}{(1-r)^2},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

아서 혼자일 때

$0 < a \leq 1$이라고 가정한다($a = 0$이면 아서(Arthur)는 결코 명중시키지 못한다). 아서가 필요로 하는 사격 횟수를 N이라 하자. $N = n$인 것은 처음 $n-1$번의 사격이 빗나가고 n번째에 명중할 때와 정확히 같으므로, 독립성(independence)에 의해

$$\mathrm{P}(N = n) = a'^{n-1}a, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

이다. 따라서

$$\mathrm{E}(N) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a\, a'^{n-1} = a\big(1 + 2a' + 3a'^2 + \cdots\big).$$

괄호 안은 $r = a'$, $d = 1$인 S이고(a'^n의 계수가 $1+n$이다), $0 \leq a' < 1$이므로

$$\mathrm{E}(N) = a\left(\frac{1}{1-a'} + \frac{a'}{(1-a')^2}\right) = a\left(\frac{1}{a} + \frac{a'}{a^2}\right) = \frac{a+a'}{a} = \frac{1}{a},$$

이다. 여기서 $1 - a' = a$를 쓰고, 이어서 $a + a' = 1$을 썼다. (이 공식은 $a = 1$일 때에도 1을 준다.)

시합: 누가 이기는가

이제부터 $0 < a < 1, 0 < b < 1$로 두어 $0 < a'b' < 1$이 되게 한다. $1, 3, 5, \ldots$번째 사격은 아서의 것이고 $2, 4, 6, \ldots$번째 사격은 보아디케아(Boadicea)의 것이다. 아서의 사격 한 번과 그에 이은 보아디케아의 사격 한 번을 묶어 **라운드**(round)라 부르자. 한 라운드가 아무도 명중시키지 못한 채 지나갈 확률은 $a'b'$이다.

아서가 $2k+1$번째 사격($k = 0, 1, 2, \ldots$)에서 이기는 것은 처음 k개의 라운드가 명중 없이 지나가고 그다음 아서가 명중시킬 때와 정확히 같다. 독립성에 의해 그 확률은 $(a'b')^k a$이고, 이 사건들은 서로 배반(disjoint)이므로

$$\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} (a'b')^k a = \frac{a}{1-a'b'}.$$

마찬가지로 보아디케아가 $2k+2$번째 사격에서 이기는 것은 k개의 라운드가 지나가고 아서가 빗나간 뒤 보아디케아가 명중시킬 때이며, 그 확률은 $(a'b')^k a'b$이다. 따라서

$$\beta = \sum_{k=0}^{\infty} (a'b')^k a'b = \frac{a'b}{1-a'b'} = \frac{(1-a)b}{1-(1-a)(1-b)}.$$

검산으로, $1 - a'b' = a + b - ab = a + a'b$이므로 $\alpha + \beta = 1$이다. 즉 시합은 확률 1로 끝난다.

시합: 기대 길이

시합의 사격 횟수를 T라 하자. 앞 부분에서, $T = 2k+1$일 확률은 $(a'b')^k a$이고 $T = 2k+2$일 확률은 $(a'b')^k a'b$이다. $q = a'b'$로 쓰면

$$\mathrm{E}(T) = a\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)q^k + a'b\sum_{k=0}^{\infty}(2k+2)q^k.$$

? **생각해 보기** 이 합들은 급수 S와 어떻게 들어맞는가?

첫 번째 합은 $1+3q+5q^2+\cdots$이고, 이는 $r=q$, $d=2$인 S이다. 두 번째 합은 $1+2q+3q^2+\cdots$의 두 배이고, 이는 $r=q$, $d=1$인 S이다. 따라서

$$\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)q^k = \frac{1}{1-q} + \frac{2q}{(1-q)^2} = \frac{1+q}{(1-q)^2},$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}(2k+2)q^k = 2\left(\frac{1}{1-q} + \frac{q}{(1-q)^2}\right) = \frac{2}{(1-q)^2}.$$

그러므로

$$\mathrm{E}(T) = \frac{a(1+q)+2a'b}{(1-q)^2}.$$

이제 목표식과 비교한다. $\alpha = a/(1-q)$와 $\beta = a'b/(1-q)$를 쓰면

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} = \frac{1}{1-q} + \frac{a'}{1-q} = \frac{(1+a')(1-q)}{(1-q)^2}.$$

따라서 $a(1+q)+2a'b = (1+a')(1-q)$임을 보이면 된다. $1-q = a+a'b$를 쓰면

$$(1+a')(1-q) = (1+a')(a+a'b) = a+aa'+a'b+a'^2b,$$
$$a(1+q)+2a'b = a+aa'(1-b)+2a'b = a+aa'-aa'b+2a'b.$$

두 식의 차(첫 번째 빼기 두 번째)는

$$a'^2b + a'b - 2a'b + aa'b = a'b\,(a'+a-1) = 0,$$

이다. $a+a' = 1$이기 때문이다. 그러므로

$$\mathrm{E}(T) = \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

검산

- $a = 1$이면 아서가 곧바로 명중시킨다. 이때 $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\mathrm{E}(T) = 1$이며, 이는 $\alpha/a + \beta/b$와 일치한다.

- $a = b = p$이면 $\alpha/p + \beta/p = (\alpha + \beta)/p = 1/p$이다. 이는 옳다. 이 경우 시합은 각각 확률 p로 명중하는 독립적인 사격의 나열일 뿐이고, 첫 부분에 의해 첫 명중까지는 평균 $1/p$번의 사격이 걸린다.
- $a = 0.3$, $b = 0.45$이면 $\alpha = 0.3/0.615 \approx 0.4878$, $\mathrm{E}(T) = 1.7/0.615 \approx 2.764$를 얻는다. 시합 200 000회를 시뮬레이션(simulation)한 결과는 0.486과 2.769였다.

흔한 실수

- 보아디케아는 아서가 방금 빗나갔을 때에만 이길 수 있다는 점을 잊고 $\beta = b/(1 - a'b')$라고 쓰는 실수. 빠진 인수 a'는 $\alpha + \beta \neq 1$이 되는 것으로 드러난다.
- 사격 횟수 대신 라운드 수를 세는 실수. 보아디케아가 $k + 1$번째 라운드에서 이기는 시합은 $k + 1$번이 아니라 $2k + 2$번의 사격으로 이루어진다.

STEP 너머

이와 같은 결과는 보통 첫 라운드에 대해 조건을 거는 방법("첫 단계 분석(first-step analysis)")으로 더 매끄럽게 증명한다. 첫 라운드에서 아무도 명중시키지 못하면 시합은 두 번의 사격 뒤에 처음부터 다시 시작되므로 $\mathrm{E}(T) = a \cdot 1 + a'b \cdot 2 + a'b'\big(2 + \mathrm{E}(T)\big)$이고, 이로부터 한 줄 만에 $\mathrm{E}(T) = (1 + a')/(1 - a'b')$를 얻는다. 첫 단계 분석은 마르코프 연쇄(Markov chain)의 기본 도구로, 수학과 1학년이나 2학년에서 배운다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 생성함수(generating function)와 이런 방식의 논증을 다룬다.

풀이

STEP III 2010, 문제 13

확률과 통계 • 선형결합의 상관관계

STEP III 2010, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/10-s3-q13

이 문제는 *Beyond STEP*의 13.7 절 **상관관계 만들어 내기**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch13/correlation.html

핵심 아이디어

여기에 나오는 모든 것은 평균이 0이고 분산이 1인 독립(independent) 확률변수들의 일차결합(linear combination)이므로, 모든 기댓값, 분산, 공분산(covariance)을 계수만 보고 바로 읽어 낼 수 있다. 즉 $U = \sum u_k Z_k$이고 $V = \sum v_k Z_k$이면 $\mathrm{Cov}(U, V) = \sum u_k v_k$이다. 이 문제는 사실 변수를 하나씩 추가하면서, 주어진 임의의 상관계수(correlation)를 갖는 세 개의 표준화된 변수를 만드는 것이며, 이것은 모습을 바꾼 그람-슈미트 과정(Gram–Schmidt process)이다. 새로운 조건 하나가 새로운 계수 하나를 결정한다.

풀이

풀이 전체에서 공분산의 쌍선형성(bilinearity), $\mathrm{Var}(Z_k) = 1$, 그리고 $j \neq k$일 때 $\mathrm{Cov}(Z_j, Z_k) = 0$(이것은 Z_k들이 독립이므로 성립한다)을 사용한다. 특히 상수 u_k, v_k에 대하여

$$\mathrm{Cov}\Big(\sum_k u_k Z_k,\ \sum_k v_k Z_k\Big) = \sum_{j,k} u_j v_k \,\mathrm{Cov}(Z_j, Z_k) = \sum_k u_k v_k.$$

Z_1과 Z_2의 상관계수

독립성에 의해 $\mathrm{Cov}(Z_1, Z_2) = \mathrm{E}(Z_1 Z_2) - \mathrm{E}(Z_1)\mathrm{E}(Z_2) = 0$이므로 $\mathrm{Corr}(Z_1, Z_2) = 0$이다.

변수 Y_2

$s = \sqrt{1-\rho_{12}^2}$로 놓자. $-1 < \rho_{12} < 1$이므로 s는 양의 실수이다. 그러면 $Y_2 = \rho_{12}Z_1 + sZ_2$이고, 기댓값의 선형성(linearity of expectation)에 의해

$$\mathrm{E}(Y_2) = \rho_{12}\mathrm{E}(Z_1) + s\,\mathrm{E}(Z_2) = 0.$$

위의 공분산 규칙에 의해

$$\mathrm{Var}(Y_2) = \rho_{12}^2 + s^2 = \rho_{12}^2 + (1-\rho_{12}^2) = 1, \qquad \mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) = \mathrm{Cov}(Z_1, \rho_{12}Z_1 + sZ_2) = \rho_{12}.$$

$\mathrm{Var}(Y_1) = \mathrm{Var}(Y_2) = 1$이므로 정의에서 분모는 1이고,

$$\mathrm{Corr}(Y_1, Y_2) = \rho_{12}.$$

변수 Y_3

조건 $\mathrm{E}(Y_3) = 0$은 모든 a, b, c에 대하여 자동으로 성립하므로 아무 정보도 주지 않는다. 나머지 세 조건은 각각 방정식 하나씩을 준다. Y_1, Y_2, Y_3의 분산이 모두 1이므로 각 상관계수는 대응하는 공분산과 같다.

Y_1**과의 상관계수.** $\mathrm{Cov}(Z_1,\ aZ_1 + bZ_2 + cZ_3) = a$이므로

$$a = \rho_{13}.$$

Y_2**와의 상관계수.** $\mathrm{Cov}(\rho_{12}Z_1 + sZ_2,\ aZ_1 + bZ_2 + cZ_3) = \rho_{12}a + sb$이므로 $\rho_{12}\rho_{13} + sb = \rho_{23}$이고, $s \neq 0$이므로

$$b = \frac{\rho_{23} - \rho_{12}\rho_{13}}{\sqrt{1-\rho_{12}^2}}.$$

분산이 1. $a^2 + b^2 + c^2 = 1$이고, $c \geq 0$이므로 음이 아닌 근을 택한다.

$$\begin{aligned} c^2 &= 1 - \rho_{13}^2 - \frac{(\rho_{23} - \rho_{12}\rho_{13})^2}{1-\rho_{12}^2} \\ &= \frac{(1-\rho_{12}^2)(1-\rho_{13}^2) - (\rho_{23} - \rho_{12}\rho_{13})^2}{1-\rho_{12}^2} \\ &= \frac{1 - \rho_{12}^2 - \rho_{13}^2 - \rho_{23}^2 + 2\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23}}{1-\rho_{12}^2}, \end{aligned}$$

여기서 마지막 단계에서 $\rho_{12}^2\rho_{13}^2$ 항들이 소거된다. 따라서

$$c = \sqrt{\frac{1 - \rho_{12}^2 - \rho_{13}^2 - \rho_{23}^2 + 2\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23}}{1-\rho_{12}^2}}.$$

? 생각해 보기 근호 안의 식이 음수이면 어떻게 될까?

그러면 실수 c가 존재하지 않으며, 이 세 상관계수를 갖는 확률변수는 아예 존재하지 않는다. 즉 수 $\rho_{12}, \rho_{13}, \rho_{23}$이 서로 모순된다. 예를 들어 $\rho_{12} = \rho_{13} = 0.9$이고 $\rho_{23} = -0.9$인 것은 불가능하다. Y_2와 Y_3이 둘 다 Y_1에 가깝다면 이 둘이 서로 강하게 반대 방향일 수는 없기 때문이다. 문제는 주어진 상관계수들이 실현 가능하다고 암묵적으로 가정하고 있으며, 이것이 바로 이 분자가 음이 아니라는 조건이다.

마지막 부분: X_i

$i = 1, 2, 3$에 대하여

$$X_i = \mu_i + \sigma_i Y_i,$$

로 놓고, $\sigma_i > 0$으로 한다(σ_i^2만 주어져 있으므로 σ_i를 양수로 택할 수 있다). 그러면 $\mathrm{E}(X_i) = \mu_i + \sigma_i \cdot 0 = \mu_i$이고 $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma_i^2 \mathrm{Var}(Y_i) = \sigma_i^2$이다. 상수를 더해도 공분산은 변하지 않으므로

$$\mathrm{Corr}(X_i, X_j) = \frac{\sigma_i \sigma_j \,\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)}{\sqrt{\sigma_i^2 \sigma_j^2}} = \frac{\sigma_i \sigma_j}{|\sigma_i \sigma_j|} \rho_{ij} = \rho_{ij},$$

이며, 여기서 $\sigma_i \sigma_j > 0$을 사용하였다. 따라서 이 X_i들은 요구된 성질을 모두 갖는다.

검산

- $\rho_{13} = \rho_{23} = 0$이면 $a = b = 0, c = 1$이므로 $Y_3 = Z_3$이 되어, 마땅히 그래야 하듯이 다른 변수들과 독립이다. $\rho_{12} = 0$이면 $Y_2 = Z_2$이고 $a = \rho_{13}, b = \rho_{23}, c = \sqrt{1 - \rho_{13}^2 - \rho_{23}^2}$이 되어 자명한 선택과 일치한다.
- 수치적으로, $\rho_{12} = 0.5, \rho_{13} = -0.3, \rho_{23} = 0.2$이면 $a = -0.3, b \approx 0.4041, c \approx 0.8641$이고 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$이다. 2×10^5개의 세 쌍을 시뮬레이션한 결과(Z_k로 정규분포가 아닌 균등분포를 사용), X_i들의 표본 상관계수는 0.500, −0.302, 0.200이었고 평균과 표준편차도 올바르게 나왔다.

흔한 실수

- $\mathrm{Var}(Y_2) = 1$이므로 상관계수가 곧 공분산이라는 사실을 잊고, 엉뚱한 값으로 나누는 것.
- $X_i = \mu_i + \sigma_i^2 Y_i$로 쓰는 것: 분산은 곱하는 수의 **제곱**만큼 커진다.
- 어떤 변수에 대해 $\sigma_i < 0$으로 택하는 것: 그러면 그 변수의 상관계수 부호가 뒤집힌다.

STEP 너머

세 조건은 계수 행렬 A(행이 $(1,0,0)$, $(\rho_{12}, s, 0)$, (a,b,c))가 $AA^{\mathsf{T}} = R$을 만족한다는 뜻이며, 여기서 R은 상관행렬(correlation matrix)이다. 이것이 R의 **숄레스키 분해**(*Cholesky decomposition*)이며, 이 분해는 R이 양의 준정부호(positive semi-definite)일 때 정확히 존재한다. c^2의 분자는 $\det R$이다. 이것은 통계학자들이 실제로 상관된 변수들을 시뮬레이션하는 방법이며, Z_k로 정규분포를 사용하면 다변량 정규분포(multivariate normal distribution)가 만들어진다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)는 공분산, 상관계수, 다변량 정규분포를 다루고, Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 양의 정부호 행렬과 숄레스키 분해를 설명한다.

Beyond STEP

STEP은 대부분의 학생이 학창 시절에 치르는 수학 시험 가운데 가장 어려운 시험이다. 또한 가장 훌륭한 시험 가운데 하나이기도 하다. 문제는 짧고 낯설며 깊이가 있고, 그중 가장 뛰어난 문제들은 대학 수학의 작은 조각이 모습을 감추고 있는 것이다.

이 책은 1987년 첫 시험에 앞서 나온 예시 시험지(specimen papers)부터 2025년 시험지까지 가운데 가장 흥미로운 STEP 문제들을 골라, 각 문제를 하나의 문으로 삼는다. 모든 문제는 뛰어난 학생이 풀어 가면서 던질 법한 질문들과 함께 꼼꼼하게 풀이하고, 그런 다음 책은 그 문을 지나 한 걸음 더 나아간다. 그 아이디어가 어디에서 왔는지, 대학에서는 무엇으로 발전하는지, 그리고 다음에는 무엇을 읽으면 좋은지를 살펴본다.

이 책은 STEP을 준비하면서 기출 문제 연습 이상의 것을 원하는 재능 있는 예비 수학자를 위해 쓰였다. 수학과 학부생처럼 생각하기 시작하고, 앞으로 무엇이 자신을 기다리고 있는지 알아보고 싶은 학생들을 위한 책이다.

- 순수 수학(pure mathematics), 역학(mechanics), 확률(probability)과 통계(statistics)를 아우르는 13개의 장
- 이 36개의 STEP 기출 문제와 각 문제의 안내식 풀이
- 모든 문제 뒤에 숨은 대학 수학
- 답이 실린 후속 연습 문제와 더 읽을거리

2010년 풀이. 책 전체와 모든 장,
모든 풀이를 다음 주소에서 무료로 읽고, 내려받고, 공유할 수 있다.

beyondstep.keithmcnulty.org

본문은 퍼블릭 도메인(CC0 1.0)으로 공개한다. STEP 문제 © Cambridge University Press & Assessment.

