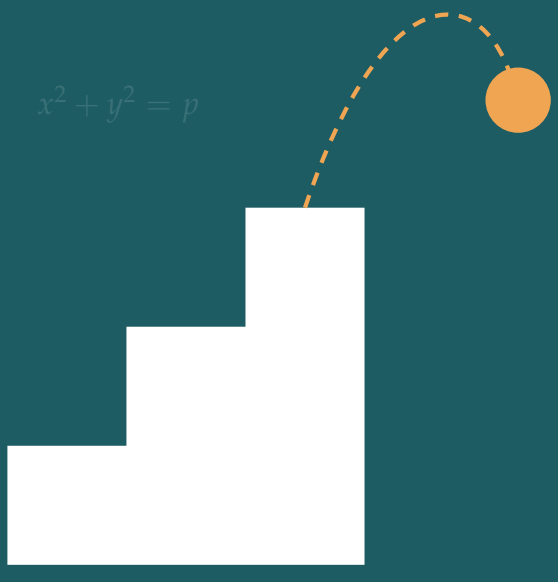
STEP 대비 · 대학 수학

Beyond STEP

STEP I, II 및 III

2009년 풀이



KEITH McNULTY

Beyond STEP

STEP 기출문제로 여는
대학 수학의 세계

STEP I, II 및 III

2009년 풀이

Keith McNulty

Beyond STEP: STEP 기출문제로 여는 대학 수학의 세계

2009년 풀이

2009년 STEP 문제지(STEP I, II 및 III)의 39개 문제 전체에 대한 풀이. 견본 문제지 이후 모든 STEP 문제의 풀이와 *Beyond STEP* 책 전체, 그리고 각 장을 `beyondstep.keithmcnulty.org`에서 무료로 읽고 내려받을 수 있다.

풀이를 읽기 전에 먼저 문제를 제대로 풀어 보자. 모든 답은 수치적으로 검증하였지만, 풀이가 이렇게 많으면 실수가 어느 정도 있을 수밖에 없다. 무언가 잘못된 것처럼 보이면 자신의 풀이를 믿고 꼼꼼히 확인해 보자.

영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.

2026년 11월 온라인 초판 발행.

이 PDF에서 지은이가 직접 만든 모든 것, 곧 본문, 풀이, 그림, 연습문제와 해답은 크리에이티브 커먼즈 CC0 1.0 Universal 라이선스에 따라 퍼블릭 도메인(public domain)으로 공개한다. 누구든 허락을 구하지 않고 어떤 목적으로든 복사하고, 고쳐 쓰고, 공유할 수 있다. 자세한 내용은 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`을 보라.

여기에서 다루는 STEP 문제의 저작권은 Cambridge University Press & Assessment에 있다. 문제는 이 책에 싣지 않았으며, 각 문제마다 공식 출처인 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스나 OCR의 기출 시험지로 가는 링크를 달았다.

오류 제보는 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty에 이슈로 남겨 주기 바란다.

차례

STEP I

Q1 약수의 개수 세기 순수수학 . . . 3

Q2 삼차곡선의 접선 순수수학 . . . 7

Q3 실근의 개수 세기 순수수학 . . . 11

Q4 코사인법칙 순수수학 . . . 15

Q5 제약 조건이 있는 최적화 순수수학 . . . 18

Q6 치환적분 순수수학 . . . 22

Q7 부분적분 순수수학 . . . 26

Q8 원과 접선 순수수학 . . . 29

Q9 충돌하는 포물체 역학 . . . 33

Q10 경사면 위의 연결된 입자 역학 . . . 37

Q11 충돌과 반발계수 역학 . . . 41

Q12 확률과 부등식 확률과 통계 . . . 45

Q13 배열과 연 확률과 통계 . . . 49

STEP II

Q1 곡선의 대칭성 순수수학 . . . 52

Q2 곡선 그리기와 근사 순수수학 . . . 56

Q3 삼각함수 항등식과 무리수 순수수학 . . . 60

Q4 다항식의 나누어떨어짐 순수수학 . . . 64

Q5 중첩 제곱근 순수수학 . . . 67

Q6 무한급수의 상계와 하계 순수수학 . . . 71

Q7 꼴을 알아보는 적분 순수수학 . . . 75

Q8 벡터 기하 순수수학 . . . 79

Q9 질량중심 역학 . . . 82

Q10 충돌과 반발계수 역학 . . . 86
Q11 일률과 저항 역학 . . . 90
Q12 반정규분포 확률과 통계 . . . 94
Q13 이항분포와 기대 비용 확률과 통계 . . . 98

STEP III

Q1 원의 좌표기하 순수수학 . . . 101
Q2 멱급수 해 순수수학 . . . 105
Q3 극한과 곡선의 개형 순수수학 . . . 109
Q4 라플라스 변환 순수수학 . . . 113
Q5 근의 대칭함수 순수수학 . . . 117
Q6 프톨레마이오스 정리 순수수학 . . . 120
Q7 반복 미분과 수학적 귀납법 순수수학 . . . 124
Q8 극한과 점화 공식 순수수학 . . . 128
Q9 포물체 궤적의 각 역학 . . . 132
Q10 단순 조화 운동 역학 . . . 136
Q11 질량이 변하는 운동 역학 . . . 140
Q12 확률생성함수 확률과 통계 . . . 144
Q13 중심극한정리 확률과 통계 . . . 148

풀이

STEP I 2009, 문제 1

순수수학 • 약수의 개수 세기

> **STEP I 2009, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/09-s1-q1

핵심 아이디어

$p^a q^b$ (p, q는 서로 다른 소수(prime))의 모든 약수(factor)는 $0 \le i \le a, 0 \le j \le b$인 $p^i q^j$ 꼴이고, 소인수분해의 유일성(unique factorisation)에 의해 (i, j)를 다르게 고르면 서로 다른 약수가 나온다. 따라서 약수의 개수는 곱 $(a+1)(b+1)$이며, 소수가 몇 개이든 같은 사실이 성립한다. 진약수(proper factor)의 개수를 세는 것은 단지 2를 빼는 것이므로, 두 소문항 모두 어떤 수를 곱으로 나타내는 문제가 된다.

풀이

1과 N을 포함하여 N의 양의 약수의 개수를 $d(N)$으로 나타내자. 서로 다른 소수 p_i와 $a_i \ge 1$에 대하여

$$N = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$$

이면, N의 양의 약수는 $0 \le e_i \le a_i$인 $p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$ 꼴이다. 각 e_i에 대하여 $a_i + 1$가지 선택이 있고, 소인수분해의 유일성에 의해 서로 다른 선택은 서로 다른 약수를 준다. 따라서

$$d(N) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_k + 1).$$

$N > 1$이면 약수 1과 N은 서로 다르므로, 진약수의 개수는 $d(N) - 2$이다.

소문항 (i)

$3^2 \times 5^3$에 대하여 $d = (2+1)(3+1) = 12$이므로, 진약수는 $12 - 2 = 10$개이다. 이것이 보이려던 것이다.

이제 $3^m \times 5^n$을 생각하자. 이것이 정수이면서 진약수를 가지려면 $m, n \ge 0$이어야 한다(3이나 5의 음의 거듭제곱은 다른 소수로 약분되지 않는다). 약수는 $0 \le i \le m, 0 \le j \le n$인

3^i5^j이므로 $d = (m+1)(n+1)$이다(이는 $m = 0$ 또는 $n = 0$인 경우도 포함한다). 따라서

$$(m+1)(n+1) = 12,$$

즉 12를 두 양의 정수의 순서 있는 곱으로 나타내야 한다. 그러한 곱은

$$1 \times 12, \quad 2 \times 6, \quad 3 \times 4, \quad 4 \times 3, \quad 6 \times 2, \quad 12 \times 1,$$

이고, 이로부터

$$(m,n) = (0,11),\ (1,5),\ (2,3),\ (3,2),\ (5,1),\ (11,0).$$

을 얻는다. 역시 소인수분해의 유일성에 의해 각각은 서로 다른 정수를 준다. 이 가운데 $(2,3)$은 주어진 수이므로, 진약수가 10개인 이 꼴의 **다른** 정수는 정확히 **5**개이다. 바로 5^{11}, 3×5^5, $3^3 \times 5^2$, $3^5 \times 5$, 3^{11}이다.

소문항 (ii)

$d(N) = 426 + 2 = 428$이어야 하고,

$$428 = 2^2 \times 107,$$

이며, 여기서 107은 소수이다(2, 3, 5, 7로 나누어떨어지지 않고, $11^2 > 107$이다).

? **생각해 보기** N의 소인수분해는 어떤 모양일 수 있는가?

각 수 $a_i + 1$은 2 이상이고 그 곱은 428이다. 107이 소수이므로 그중 정확히 하나가 107의 배수이며, 그 값은 107, 214, 428 중 하나이다. 나머지 수들의 곱은 각각 4, 2, 1이다. 순서를 무시하면 $a_i + 1$의 목록으로 가능한 것은

$$\{428\}, \qquad \{214, 2\}, \qquad \{107, 4\}, \qquad \{107, 2, 2\},$$

이므로, 지수의 중복집합(multiset)은

$$\{427\}, \qquad \{213, 1\}, \qquad \{106, 3\}, \qquad \{106, 1, 1\}.$$

이다.

? **생각해 보기** 지수가 주어졌을 때, 어떤 소수에 그 지수를 붙여야 하는가?

주어진 지수 목록으로 N을 가능한 한 작게 만들려면 가장 작은 소수들을 사용하고, 가장 큰 지수를 가장 작은 소수에 붙여야 한다. 가장 작은 소수들을 쓰는 것이 최선임은 분명하다. 어떤 소수를 사용하지 않은 더 작은 소수로 바꾸면 N이 작아지기 때문이다. 또 $p < q$인데 p에 지수 a, q에 지수 b가 붙어 있고 $a < b$라면, 두 지수를 맞바꿀 때 N에는

$$\frac{p^b q^a}{p^a q^b} = \left(\frac{p}{q}\right)^{b-a} < 1,$$

이 곱해지므로, 맞바꾸면 N이 작아진다. 따라서 각 모양에서 가장 좋은 후보는

$$2^{427}, \qquad 2^{213} \times 3, \qquad 2^{106} \times 3^3, \qquad 2^{106} \times 3 \times 5.$$

이다. 이들을 비교하면 다음과 같다.

- $2^{106} \times 3 \times 5 = 2^{106} \times 15 < 2^{106} \times 27 = 2^{106} \times 3^3$이다.
- $2^{106} \times 27 < 2^{106} \times 2^5 = 2^{111}$이고, 이는 $2^{213} \times 3$이나 2^{427}보다 훨씬 작다.

따라서

$$N = 2^{106} \times 3 \times 5.$$

검산하면 $d(N) = 107 \times 2 \times 2 = 428$이므로, N의 진약수는 426개이다.

검산

- 작은 경우로, $3 \times 5^5 = 9375$의 약수를 직접 나열해 보자. $i \in \{0,1\}$, $j \in \{0,\ldots,5\}$인 $3^i 5^j$로 약수가 12개 나오므로, 진약수는 10개이다.
- $(a+1)(b+1)(c+1)(d+1) = 428$를 만족하는 모든 지수 패턴 $2^a 3^b 5^c 7^d$를 컴퓨터로 간단히 탐색하면, 가장 작은 것이 $2^{106} \times 15 \approx 1.22 \times 10^{33}$이고 그다음이 $2^{106} \times 27$임을 확인할 수 있다.

흔한 실수

- 소문항 (i)에서 6이라고 답하는 것: 문제는 **다른** 정수를 묻고 있으므로 주어진 수는 제외한다.
- $m = 0$ 또는 $n = 0$인 경우(즉 5^{11}과 3^{11})를 빠뜨리는 것: 이들도 요구된 꼴이다.
- 소문항 (ii)의 답이 가능한 한 많은 소수를 사용해야 한다고 가정하는 것: 107이 소수이므로 매우 큰 지수 하나가 강제되며, 실제로 선택할 수 있는 것은 인수 4를 어떻게 나누느냐뿐이다.

STEP 너머

함수 $d(N)$은 **곱셈적 함수**(multiplicative function)이다. 즉 m과 n이 서로소(coprime)이면 언제나 $d(mn) = d(m)d(n)$이며, 이것이 바로 여기서 사용한 곱 공식이다. 자신보다 작은 모든 수보다 약수가 더 많은 수를 라마누잔(Ramanujan)의 **고합성수**(highly composite numbers)라고 하며, 소문항 (ii)의 지수 맞바꾸기 논증은 라마누잔이 이 수들을 기술할 때

의 첫 단계이다. 대븐포트(Davenport)의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 소인수분해의 유일성과 산술 함수(arithmetic function)에 대해 읽어 보기 좋은 책이다.

풀이

STEP I 2009, 문제 2

순수수학 • 삼차곡선의 접선

> **STEP I 2009, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/09-s1-q2

이 문제는 *Beyond STEP*의 1.9 절 **삼차곡선의 접선**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch01/tangents-cubic.html

핵심 아이디어

접선(tangent)은 접점(point of contact)에서 곡선과 **두 번** 만난다. 즉 접선의 식을 곡선의 방정식에 대입하면 접점은 중근(repeated root)으로 나타난다. 삼차방정식(cubic)의 중근을 하나 알면 나머지 근은 인수분해(factorising)로 바로 얻어지고, 그 세 번째 교점은 유리수 좌표(rational coordinates)를 가진다는 것이 밝혀진다. 그런 다음 분모를 없애면 곡선의 방정식이 세제곱수의 합(sum of cubes)으로 바뀐다.

풀이

$(-a, b)$에서의 접선

먼저 $(-a, b)$는 실제로 곡선 위에 있다. $x^3 + a^3 + b^3 = -a^3 + a^3 + b^3 = b^3 = y^3$이기 때문이다.

$y^3 = x^3 + a^3 + b^3$을 x에 대하여 음함수 미분(implicit differentiation)하면(a와 b는 상수이다)

$$3y^2 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2, \qquad \text{따라서} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x^2}{y^2}$$

이고, 이는 $y \neq 0$인 모든 곳에서 성립한다. $b > 0$인 점 $(-a, b)$에서 기울기(gradient)는

a^2/b^2이다. 따라서 접선은

$$\begin{aligned} y - b &= \frac{a^2}{b^2}(x + a) \\ b^2y - b^3 &= a^2x + a^3 \\ b^2y - a^2x &= a^3 + b^3, \end{aligned}$$

이고, 이것이 구하려던 식이다.

$a = 1, b = 2$일 때의 교점

이제 곡선은 $y^3 = x^3 + 9$이고 $(-1, 2)$에서의 접선은 $4y - x = 9$, 즉 $y = \frac{1}{4}(x + 9)$이다. 이를 곡선의 방정식에 대입하면

$$\begin{aligned} \frac{(x+9)^3}{64} &= x^3 + 9 \\ x^3 + 27x^2 + 243x + 729 &= 64x^3 + 576 \\ 0 &= 63x^3 - 27x^2 - 243x - 153. \end{aligned}$$

모든 계수(coefficient)가 9로 나누어떨어지므로, 양변을 나누면

$$7x^3 - 3x^2 - 27x - 17 = 0,$$

이고, 이것이 문제에서 요구한 삼차방정식이다.

p, q, r, s 구하기

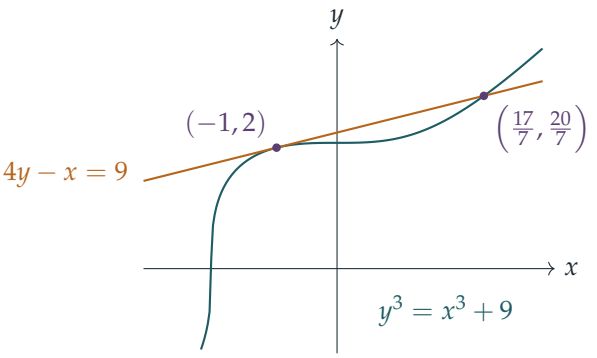
> **생각해 보기** 우리는 이 삼차방정식의 근 하나를 이미 알고 있다. 왜 그 근이 중근이어야 할까?

직선은 $x = -1$에서 곡선에 접하므로 $x = -1$은 중근이다. 접점 근처에서 직선과 곡선은 1차까지 일치하므로, 그 차는 그 점에서 2차까지 0이 된다. 따라서 $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$은 인수이다. x^3의 계수와 상수항을 비교하면 나머지 인수는 $7x - 17$이어야 하며, 이를 확인할 수 있다.

$$(x+1)^2(7x - 17) = 7x^3 + 14x^2 + 7x - 17x^2 - 34x - 17 = 7x^3 - 3x^2 - 27x - 17.$$

따라서 접선은 $x = \frac{17}{7}$에서 곡선과 다시 만나고, 이때

$$y = \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{17}{7} + 9\right) = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{80}{7} = \tfrac{20}{7}.$$



이 점은 $y^3 = x^3 + 9$ 위에 있으므로

$$\left(\frac{20}{7}\right)^3 = \left(\frac{17}{7}\right)^3 + 9.$$

양변에 7^3을 곱하면 $20^3 = 17^3 + 9 \cdot 7^3$이다. 마지막 항은 세제곱수가 아니지만, $9 = 1 + 8 = 1^3 + 2^3$이므로

$$9 \cdot 7^3 = 7^3 + 2^3 \cdot 7^3 = 7^3 + 14^3.$$

(바로 여기서 $a = 1, b = 2$인 원래의 꼴 $a^3 + b^3$이 다시 등장한다.) 그러므로

$$20^3 = 17^3 + 14^3 + 7^3,$$

이고, $p = 20, q = 17, r = 14, s = 7$로 잡을 수 있다(뒤의 세 수는 순서를 바꾸어도 된다).

검산

직접 계산하면 $17^3 + 14^3 + 7^3 = 4913 + 2744 + 343 = 8000 = 20^3$이다. 또한 삼차방정식의 세 근은 $-1, -1, \frac{17}{7}$이고, 그 합은 $\frac{3}{7}$, 곱은 $\frac{17}{7}$이다. 이는 계수에서 읽어 낸 $3/7, 17/7$과 일치한다. $y = \sqrt[3]{x^3 + a^3 + b^3}$의 $x = -a$에서의 수치 미분값도 a^2/b^2과 일치한다.

흔한 실수

- 중근을 활용하지 않는 것: $(x+1)^2$으로 나누는 대신 삼차방정식을 처음부터 풀려고 한다.
- $20^3 = 17^3 + 3087$에서 멈추는 것. 우리가 필요한 것은 세제곱의 합이 되는 양의 정수들이므로, $3087 = 9 \cdot 7^3$을 $7^3 + 14^3$으로 쪼개야 한다.

STEP 너머

이것은 삼차 곡선에 대한 고전적인 **접선법**(tangent method)이다. 직선은 삼차 곡선과 중복도(multiplicity)를 세어 세 점에서 만나므로, 두 유리점(또는 이 문제처럼 두 번 세는 한 점)이 있으면 세 번째 유리점이 생긴다. 타원곡선(elliptic curve)에서는 이 현-접선 작도(chord-and-tangent construction)가 군 법칙(group law)이 되며, 이는 현대 정수론(number theory)의 넓은 분야의 출발점이다. 대븐포트(Davenport)의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 이런 종류의 디오판토스 방정식(Diophantine equation)을 다루고, 실버먼(Silverman)과 테이트(Tate)의 *Rational Points on Elliptic Curves*(타원곡선 위의 유리점)는 그 기하를 본격적으로 전개한다.

풀이

STEP I 2009, 문제 3

순수수학 • 실근의 개수 세기

> **STEP I 2009, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/09-s1-q3

핵심 아이디어

양변을 알맞게 거듭제곱하여 근호를 없애되, 그 과정에서 잃는 정보를 놓치지 않아야 한다. 제곱근(square root)은 결코 음수가 아니므로, 제곱하는 과정을 되돌릴 수 있으려면 $x \geq 0$이라는 조건을 함께 요구해야 한다. 반면 실수 세제곱근(cube root)에는 이런 제약이 없다. 모든 실수는 실수 세제곱근을 정확히 하나 가지기 때문이다. 그러고 나면 각 개수 세기는 결국 이차방정식(quadratic equation)의 근을 세는 문제로 귀결되고, 그 근들의 부호는 두 근의 합과 곱으로부터 바로 읽어 낼 수 있다.

풀이

소문항 (i): 제곱근 방정식

여기서 $(a-x)^{\frac{1}{2}}$는 음이 아닌 제곱근을 뜻하므로, 모든 해는 $x \geq 0$을 만족하고, 양변을 제곱하면 $x^2 = a - x$, 즉 $x^2 + x - a = 0$을 얻는다. 거꾸로 $x \geq 0$이고 $x^2 + x - a = 0$이면 $a - x = x^2 \geq 0$이고 $(a-x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2} = |x| = x$이다. 따라서

$$x = (a-x)^{\frac{1}{2}} \iff x^2 + x - a = 0 \text{ 그리고 } x \geq 0,$$

이고, 이차방정식 $x^2 + x - a = 0$의 **음이 아닌** 근의 개수를 세면 된다. 이 방정식의 두 근을 (실근일 때) α, β라 하면

$$\alpha + \beta = -1, \qquad \alpha\beta = -a.$$

경우 $a > 0$. 판별식(discriminant) $1 + 4a$가 양수이므로 서로 다른 두 실근이 있고, 두 근의 곱 $-a$는 음수이다. 따라서 한 근은 양수, 다른 한 근은 음수이다. 해는 정확히 하나이다.

경우 $a = 0$. 이차방정식은 $x(x+1) = 0$이고 근은 0과 -1이다. 이 가운데 음이 아닌 것은

$x = 0$뿐이다. 해는 정확히 하나이다.

경우 $a < 0$. $a < -\frac{1}{4}$이면 판별식이 음수이므로 실근이 전혀 없다. $-\frac{1}{4} \le a < 0$이면 근은 실수이고, 두 근의 곱 $-a$가 양수이므로 두 근의 부호가 같으며, 두 근의 합이 -1이므로 둘 다 음수이다. 어느 쪽이든 음이 아닌 근이 없으므로 해가 없다.

따라서 이 방정식은 $a \ge 0$일 때 실수해를 하나 가지고, $a < 0$일 때는 실수해를 가지지 않는다. 이로써 요구한 것이 증명되었다.

소문항 (i): 세제곱근 방정식

모든 실수 t는 실수 세제곱근을 정확히 하나 가지며, 부호 조건 없이 $x = t^{\frac{1}{3}} \iff x^3 = t$이다. 따라서 주어진 방정식은

$$x^3 - (1+a)x + a = 0.$$

과 동치이다. 계수의 합이 $1 - (1+a) + a = 0$이므로 $x = 1$은 언제나 근이고, 인수로 나누면

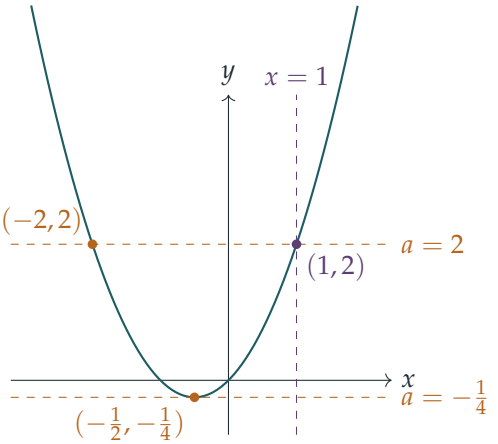
$$x^3 - (1+a)x + a = (x-1)(x^2 + x - a).$$

앞에서와 같은 이차식이 나타났다. 해는 $x = 1$과 $x^2 + x - a = 0$의 실근들이며, 이번에는 부호 제약이 없다.

> **생각해 보기** 이차방정식의 근이 $x = 1$과 같아지거나, 두 근이 서로 같아질 수 있을까?

두 경우 모두 일어나며, 바로 이 경우들이 해의 개수를 줄인다. 이차방정식은 $1 + 4a = 0$, 즉 $a = -\frac{1}{4}$일 때 중근(repeated root)을 가지며, 그 근은 $-\frac{1}{2}$이다. 또 $1 + 1 - a = 0$, 즉 $a = 2$일 때 $x = 1$이 이차방정식의 근이 된다. 이때 $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$이므로 근은 1과 -2이다.

이차방정식을 $a = x^2 + x$로 쓰면, 그 실근은 높이 a인 수평선이 포물선(parabola) $y = x^2 + x$와 만나는 점에 해당한다. 이 포물선의 꼭짓점(가장 낮은 점)은 $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$이다. 추가로 생기는 해 $x = 1$은 포물선 위의 점 $(1, 2)$에 대응한다.



경우들을 종합하면, 서로 다른 실수해의 개수는 다음과 같다.

- $a < -\frac{1}{4}$: 이차방정식이 실근을 가지지 않으므로 해는 $x = 1$ **하나**이다.
- $a = -\frac{1}{4}$: 해는 1과 $-\frac{1}{2}$이므로 **두 개**이다.
- $-\frac{1}{4} < a < 2$ 또는 $a > 2$: 이차방정식의 서로 다른 두 근이 있고 어느 것도 1이 아니며, 여기에 $x = 1$이 더해지므로 **세 개**이다.
- $a = 2$: 해는 1과 -2이므로 **두 개**이다.

소문항 (ii)

소문항 (i)과 똑같이 제곱근은 음이 아니므로

$$x = (b + x)^{\frac{1}{2}} \iff x^2 - x - b = 0 \text{ 그리고 } x \geq 0,$$

이다($x \geq 0$이고 $b + x = x^2$이면 $(b + x)^{\frac{1}{2}} = |x| = x$이므로 역도 성립한다). 이제 $x^2 - x - b = 0$의 두 근의 합은 1, 곱은 $-b$이고, 판별식은 $1 + 4b$이다.

경우 $b < -\frac{1}{4}$. 실근이 없으므로 해가 **없다**.

경우 $b = -\frac{1}{4}$. 이차방정식은 $(x - \frac{1}{2})^2 = 0$이고 $x = \frac{1}{2} \geq 0$이므로 해는 **하나**이다.

경우 $-\frac{1}{4} < b < 0$. 서로 다른 두 실근이 있고, 곱 $-b$가 양수이므로 부호가 같으며, 합 1이 양수이므로 둘 다 양수이다. 해는 **두 개**이다.

경우 $b = 0$. 이차방정식은 $x(x - 1) = 0$이고, 0과 1 모두 음이 아니다. 해는 **두 개**이다. (실제로 $0 = \sqrt{0}$이고 $1 = \sqrt{1}$이다.)

경우 $b > 0$. 두 실근의 곱이 음수이므로 하나는 양수, 하나는 음수이다. 해는 **하나**이다.

정리하면, $b < -\frac{1}{4}$일 때 해가 없고, $b = -\frac{1}{4}$일 때 하나, $-\frac{1}{4} < b \leq 0$일 때 두 개, $b > 0$일 때 하나이다.

검산

- 그래프로 보면, 소문항 (ii)는 직선 $y = x$가 $(-b, 0)$에서 시작하는 반포물선 $y = \sqrt{b + x}$와 만나는 점을 묻는 것이다. $b = -\frac{1}{5}$일 때 해는 $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{5}}$, 즉 약 0.276과 0.724이며, 둘 다 소수점 아래 여러 자리까지 $x = \sqrt{x - 0.2}$를 만족한다.
- $a = 2$인 세제곱근 방정식에서 $x = 1$과 $x = -2$ 모두 해가 된다. $(3 \cdot (-2) - 2)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{1}{3}} = -2$이다.
- 컴퓨터로 각 경계값$(-\frac{1}{4}, 0, 2)$의 양쪽에 걸친 여러 a, b 값에 대해 촘촘한 격자 위에서 각 방정식의 근을 세어 보았으며, 그 개수는 위의 경우 분석과 일치하였다.

흔한 실수

- 제곱한 뒤 $x \geq 0$이라는 조건을 잊는 것. 그러면 소문항 (i)에서 모든 $a > -\frac{1}{4}$에 대해 해가 두 개라는 틀린 결론이 나온다.
- 세제곱근 방정식에도 $x \geq 0$이라는 조건을 붙이는 것. 음수의 세제곱근도 엄연한 실수이다.
- $a = 2$인 경우를 놓치는 것. 이때는 일차 인수의 근 $x = 1$이 이차방정식의 근이기도 하므로, 세 해 가운데 두 개가 하나로 합쳐진다.

STEP 너머

핵심은 $\mathbb{R}$ 위에서 제곱은 되돌릴 수 있는 연산이 아니지만 세제곱은 그렇다는 점이다. $x \mapsto x^3$은 $\mathbb{R}$의 전단사(bijection)이지만 $x \mapsto x^2$은 그렇지 않으므로, 음이 아닌 가지(branch)를 택해야만 비로소 "그" 제곱근이 정의된다. $x = f(x)$ 꼴의 방정식을 고정점(fixed point) 문제로 보고, 매개변수가 변할 때 그 개수를 세는 것은 분기 이론(bifurcation theory)의 출발점이다. 이 이론에서 해는 쌍으로 생겨나거나($a = -\frac{1}{4}$에서처럼) 서로 자리를 맞바꾼다($a = 2$에서처럼). 함수, 역함수(inverse function), 연속성(continuity)에 대한 엄밀한 설명은 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 참고하라.

풀이

STEP I 2009, 문제 4

순수수학 • 코사인법칙

> **STEP I 2009, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/09-s1-q4

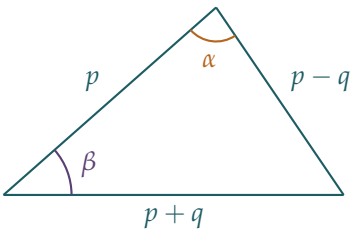
핵심 아이디어

삼각형에서 가장 큰 각은 가장 긴 변의 대각이고, 가장 작은 각은 가장 짧은 변의 대각이다. 따라서 코사인법칙(cosine rule)을 쓰면 $\cos\alpha$와 $\cos\beta$를 p와 q로 바로 나타낼 수 있고, 항등식(identity)은 단순한 대수 계산으로 확인된다. 둘째 부분에서는 $\alpha = 2\beta$이므로 배각 공식(double-angle formula)을 써서 $\cos\alpha$를 $\cos\beta$로 나타낼 수 있다. 그러면 항등식은 $\cos\beta$만의 방정식이 된다.

풀이

항등식

$p - q < p < p + q$이므로 가장 큰 각 α는 변 $p + q$의 대각이고, 가장 작은 각 β는 변 $p - q$의 대각이다.



α에 대해 코사인법칙을 적용하면

$$\cos\alpha = \frac{p^2 + (p-q)^2 - (p+q)^2}{2p(p-q)} = \frac{p^2 - 4pq}{2p(p-q)} = \frac{p-4q}{2(p-q)},$$

이고, β에 대해 적용하면

$$\cos\beta = \frac{p^2+(p+q)^2-(p-q)^2}{2p(p+q)} = \frac{p^2+4pq}{2p(p+q)} = \frac{p+4q}{2(p+q)}.$$

이다. 여기서 p로 약분했는데, $p>0$이므로 이는 허용된다. 그러면

$$1-\cos\alpha = \frac{2(p-q)-(p-4q)}{2(p-q)} = \frac{p+2q}{2(p-q)},$$
$$1-\cos\beta = \frac{2(p+q)-(p+4q)}{2(p+q)} = \frac{p-2q}{2(p+q)},$$

이므로

$$4(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta) = \frac{(p+2q)(p-2q)}{(p-q)(p+q)} = \frac{p^2-4q^2}{p^2-q^2}.$$

이다. 한편 다른 쪽은

$$\begin{aligned}\cos\alpha+\cos\beta &= \frac{(p-4q)(p+q)+(p+4q)(p-q)}{2(p^2-q^2)}\\ &= \frac{(p^2-3pq-4q^2)+(p^2+3pq-4q^2)}{2(p^2-q^2)} = \frac{p^2-4q^2}{p^2-q^2}.\end{aligned}$$

이다. 두 식이 일치하므로, 요구한 대로 $4(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)=\cos\alpha+\cos\beta$이다.

(삼각형이 존재하려면 $(p-q)+p>p+q$, 즉 $p>2q$여야 한다. 이때 항등식의 양변은 모두 양수이지만, 위의 대수 계산은 이 조건에 의존하지 않는다.)

$\alpha = 2\beta$인 경우

$c=\cos\beta$라 하자. 그러면 $\cos\alpha=\cos 2\beta = 2c^2-1$이므로 $1-\cos\alpha = 2(1-c^2) = 2(1-c)(1+c)$이다. 이를 항등식에 대입하면

$$8(1-c)^2(1+c) = 2c^2+c-1 = (2c-1)(c+1).$$

을 얻는다.

? **생각해 보기** 양변을 $1+c$로 나눌 수 있는가?

나눌 수 있다. β는 삼각형의 한 각이므로 $0<\beta<\pi$이고 $c=\cos\beta>-1$이다. 즉 $1+c\neq 0$이다. 양변을 이것으로 나누면

$$8(1-c)^2 = 2c-1 \quad\Longrightarrow\quad 8c^2-18c+9=0 \quad\Longrightarrow\quad (4c-3)(2c-3)=0.$$

이다. 따라서 $c=\frac{3}{4}$ 또는 $c=\frac{3}{2}$이다. 코사인 값은 1보다 클 수 없으므로 $\frac{3}{2}$는 버린다. 그러므로 요구한 대로 $\cos\beta=\frac{3}{4}$이다.

변의 비

첫째 부분에서 구한 $\cos\beta$의 식을 쓰면

$$\frac{p+4q}{2(p+q)} = \frac{3}{4} \quad \Longrightarrow \quad 4p+16q = 6p+6q \quad \Longrightarrow \quad p = 5q.$$

이다. 이는 $p > 2q$를 만족하므로 삼각형이 존재한다. 세 변은 $p-q = 4q$, $p = 5q$, $p+q = 6q$이므로 변의 비는

$$4 : 5 : 6.$$

이다.

검산

세 변이 $4,5,6$인 삼각형에서 코사인법칙을 쓰면 $\cos\beta = \frac{25+36-16}{60} = \frac{3}{4}$, $\cos\alpha = \frac{16+25-36}{40} = \frac{1}{8}$이다. 또한 $2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 1 = \frac{1}{8}$이므로 $\alpha = 2\beta$임이 확인된다(두 각 모두 코사인이 일대일(one-to-one)인 구간 $(0,\pi)$에 있다). 수치로는 $\beta \approx 0.7227$, $\alpha \approx 1.4455$ 라디안이다. 이 삼각형에서 항등식은 $4\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{4} = \frac{7}{8} = \frac{1}{8}+\frac{3}{4}$가 된다. 또한 $p > 2q$인 무작위 삼각형 10^5개에 대해 항등식을 시험해 보았는데, 양변은 3×10^{-15} 이내에서 일치했다.

흔한 실수

- 각을 엉뚱한 변에 대응시키는 것. 가장 큰 각은 **가장 긴** 변 $p+q$의 대각이다.
- 인수 $1+c$가 왜 0이 아닌지 밝히지 않고 약분하거나, 근 $c = \frac{3}{2}$를 그대로 남겨 두는 것.
- 답을 세 변의 비 $4:5:6$이 아니라 $p = 5q$로 제시하는 것.

STEP 너머

닮음을 무시하면, 세 변이 등차수열(arithmetic progression)을 이루고 가장 큰 각이 가장 작은 각의 두 배인 삼각형은 세 변이 $4,5,6$인 삼각형뿐이다. "세 변이 정수이고 각들이 주어진 비를 이루는 삼각형은 무엇인가?"와 같은 질문은 피타고라스 세 쌍(Pythagorean triples)의 경우와 마찬가지로 곧바로 디오판토스 방정식(Diophantine equations)과 곡선 위의 유리점(rational points)을 매개화하는 문제로 이어진다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 정수론)은 이러한 아이디어가 전개되는 과정을 살펴보기 좋은 책이고, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제)에는 STEP 형식의 기하와 삼각함수 문제가 더 실려 있다.

풀이

STEP I 2009, 문제 5

순수수학 • 제약 조건이 있는 최적화

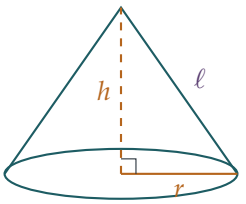
STEP I 2009, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/09-s1-q5

핵심 아이디어

길이는 세 개이지만 자유롭게 정할 수 있는 것은 두 개뿐이다. r, h, ℓ은 피타고라스 정리(Pythagoras' theorem) $\ell^2 = r^2 + h^2$으로 묶여 있기 때문이다. 한 양을 고정하면 자유도가 하나 더 줄어들므로, 각 소문항에서 정상값을 구할 양을 r만의 함수로 나타내고 미분한다. 제곱근이 있으면 계산이 복잡해지므로 V^2이나 A^2을 대신 다루는 것이 유리하다. 이들은 정확히 V나 A가 정상인 곳에서 정상이 된다.



풀이

이 풀이 전체에서 r, h, ℓ은 양수이고, 단면의 직각삼각형으로부터

$$\ell^2 = r^2 + h^2.$$

이다. $V > 0$, $A > 0$이므로 V^2의 도함수(derivative)는 $2V\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$이고, 이것은 정확히 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$가 0일 때 0이 된다. A도 마찬가지이다. 따라서 제곱한 양의 정상점(stationary point)을 대신 구해도 된다.

소문항 (i)

A가 고정되어 있으면 $\ell = \dfrac{A}{\pi r}$이므로

$$h^2 = \ell^2 - r^2 = \frac{A^2}{\pi^2 r^2} - r^2.$$

이다. (실제로 원뿔이 되려면 $h > 0$, 즉 $A > \pi r^2$이어야 한다.) 그러면

$$\begin{aligned} V^2 = \tfrac{1}{9}\pi^2 r^4 h^2 &= \tfrac{1}{9}\pi^2 r^4 \left(\frac{A^2}{\pi^2 r^2} - r^2\right) \\ &= \tfrac{1}{9}\left(A^2 r^2 - \pi^2 r^6\right). \end{aligned}$$

이다. A를 상수로 두고 r에 대하여 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}(V^2)}{\mathrm{d}r} = \tfrac{1}{9}\left(2A^2 r - 6\pi^2 r^5\right) = \tfrac{2}{9} r\left(A^2 - 3\pi^2 r^4\right).$$

이다. $r > 0$이므로 이것은 정확히

$$A^2 = 3\pi^2 r^4,$$

일 때 0이 되며, 이것이 첫 번째 결과이다. 양의 제곱근을 취하면 $A = \sqrt{3}\,\pi r^2$이므로

$$\ell = \frac{A}{\pi r} = \frac{\sqrt{3}\,\pi r^2}{\pi r} = \sqrt{3}\, r,$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. ($A = \sqrt{3}\,\pi r^2 > \pi r^2$이므로 이것은 실제로 원뿔임에 주의한다.)

r가 이 값을 지나며 증가할 때 V^2의 도함수는 양에서 음으로 바뀌므로, 이 정상값은 최댓값이다. 즉 주어진 옆넓이(curved surface area)에 대하여 부피가 가장 큰 원뿔이다. 또 $\ell^2 = r^2 + h^2$에서 $h^2 = 3r^2 - r^2 = 2r^2$이므로 $h = \sqrt{2}\, r$이다.

소문항 (ii)

이번에는 V가 고정되어 있으므로 $h = \dfrac{3V}{\pi r^2}$이고

$$\begin{aligned} A^2 = \pi^2 r^2 \ell^2 = \pi^2 r^2 (r^2 + h^2) &= \pi^2 r^4 + \pi^2 r^2 \cdot \frac{9V^2}{\pi^2 r^4} \\ &= \pi^2 r^4 + \frac{9V^2}{r^2}. \end{aligned}$$

이다. V를 상수로 두고 r에 대하여 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}(A^2)}{\mathrm{d}r} = 4\pi^2 r^3 - \frac{18V^2}{r^3},$$

이고, 이것은 정확히

$$V^2 = \tfrac{2}{9}\pi^2 r^6, \qquad \text{따라서} \qquad V = \tfrac{\sqrt{2}}{3}\,\pi r^3$$

일 때 0이 된다($V > 0$이므로 양의 제곱근을 취한다).

생각해 보기 V를 r로 나타냈지만, 문제에서 묻는 것은 h이다. 어떻게 h에 도달할 수 있을까?

부피 공식 $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$를 한 번 더 이용한다. 이것을 $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi r^3$과 같다고 놓고 $\frac{1}{3}\pi r^2$을 약분하면

$$h = \sqrt{2}\, r.$$

을 얻는다. 이번에는 도함수가 음에서 양으로 바뀐다(r가 작을 때는 $9V^2/r^2$ 항이 매우 크고, r가 클 때는 $\pi^2 r^4$ 항이 매우 크다). 따라서 이것은 주어진 부피에 대하여 옆넓이가 가장 작은 원뿔이다.

생각해 보기 두 소문항 모두 같은 모양 $h = \sqrt{2}\, r$을 주는 것은 우연일까?

그렇지 않다. 어떤 원뿔이 자신의 넓이에 대하여 부피를 최대로 한다면, 그 원뿔은 자신의 부피에 대하여 넓이도 최소로 한다. 부피는 같고 넓이가 더 작은 원뿔이 있다면, 그 원뿔을 원래 넓이가 될 때까지 확대할 수 있고, 그러면 부피가 더 커지는데, 이는 불가능하기 때문이다. 문제는 모양을 닮음(scale)의 차이를 제외하고만 결정하므로, 두 소문항은 같은 비 $h : r$을 골라내야 한다.

검산

- 소문항 (i)에서 $r = 1$로 두면 $A = \sqrt{3}\,\pi$, $\ell = \sqrt{3}$, $h = \sqrt{2}$이고, $\pi r\ell = \sqrt{3}\,\pi$로 맞아떨어진다. A를 $\sqrt{3}\,\pi$로 유지한 채 r를 0.99나 1.01로 살짝 바꾸면 부피가 약간 작아진다.
- 임의로 고정한 A에 대하여 V를 수치적으로 최대화하고, 임의로 고정한 V에 대하여 A를 수치적으로 최소화해 보면, 언제나 $h/r \approx 1.41421$, 즉 $\sqrt{2}$를 얻었다.
- 차원: A^2과 $\pi^2 r^4$은 모두 (길이)^{4}이고, V^2과 $\pi^2 r^6$은 모두 (길이)^{6}이다.

흔한 실수

- ℓ이 r와 h에 의존한다는 것을 잊는 실수. 실제로는 A(또는 V)만 고정되어 있는데, 소문항 (i)에서 ℓ을 상수로, 또는 소문항 (ii)에서 h를 상수로 취급하는 경우이다.
- 제곱근이 남아 있는 상태로 V를 직접 미분하는 것. 이렇게 해도 되지만 실수하기 쉽다. 먼저 제곱하면 연쇄법칙(chain rule)을 아예 쓰지 않아도 된다.

STEP 너머

다른 양을 고정한 채 한 양의 극값을 구하는 문제를 **제약 조건이 있는 최적화**(*constrained optimisation*) 문제라고 한다. 대학에서는 라그랑주 승수법(method of Lagrange multipliers)을 배우는데, 이 방법은 변수를 소거하지 않고도 제약 조건을 다룰 수 있으며, 여기서 두 소문항 사이의 "쌍대성(duality)"을 설명해 준다. 다변수 미적분학과 라그랑주 승수법을 처음 명쾌하게 접하려면 Stewart의 *Calculus*(미적분학)를 읽어 보라. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에는 STEP 스타일의 최적화 연습 문제가 더 실려 있다.

풀이

STEP I 2009, 문제 6

순수수학 • 치환적분

STEP I 2009, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/09-s1-q6

핵심 아이디어

적분 구간의 끝점 $1/m$과 m은 $x \mapsto 1/x$에 의해 서로 바뀌므로, 이 치환(substitution)을 먼저 시도해 보는 것이 자연스럽다. 이 치환은 구간을 자기 자신으로 보내고, 거듭제곱 x^{-n}을 거듭제곱 u^{n-1}로 바꾸어 준다. 그러면 (ii)를 이용하여 (iii)의 다루기 어려운 조각들을 (i)의 다루기 쉬운 적분의 복사본으로 바꿀 수 있다. (iii)(b)에서는 구간이 더 이상 대칭이 아니지만, 같은 치환이 $[1,2]$를 $[\frac{1}{2},1]$로 보내므로 두 반쪽이 다시 이어 붙는다.

풀이

소문항 (i)

x^2을 $x+1$로 나누면

$$\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1},$$

이고, 구간에서 $x+1 > 0$이므로($m > 0$이기 때문이다)

$$\int_{1/m}^{m} \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{2}x^2 - x + \ln(x+1)\right]_{1/m}^{m}.$$

로그 부분은

$$\ln(m+1) - \ln\left(\frac{1}{m}+1\right) = \ln\frac{m+1}{(m+1)/m} = \ln m.$$

이 된다. 다항식 부분은

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\Big(m^2-\frac{1}{m^2}\Big)-\Big(m-\frac{1}{m}\Big) &= \Big(m-\frac{1}{m}\Big)\Big[\tfrac{1}{2}\Big(m+\frac{1}{m}\Big)-1\Big]\\ &= \frac{m^2-1}{m}\cdot\frac{m^2-2m+1}{2m}\\ &= \frac{(m-1)(m+1)(m-1)^2}{2m^2}=\frac{(m-1)^3(m+1)}{2m^2}.\end{aligned}$$

이 된다. 두 부분을 더하면 원하는 결과를 얻는다.

소문항 (ii)

$x=1/u$로 놓으면 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}u/u^2$이다. $x=1/m$일 때 $u=m$이고, $x=m$일 때 $u=1/m$이다. 또한

$$x^n(x+1)=\frac{1}{u^n}\cdot\frac{1+u}{u}=\frac{u+1}{u^{n+1}}.$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}\int_{1/m}^{m}\frac{1}{x^n(x+1)}\,\mathrm{d}x &= \int_{m}^{1/m}\frac{u^{n+1}}{u+1}\cdot\Big(-\frac{1}{u^2}\Big)\mathrm{d}u\\ &= \int_{1/m}^{m}\frac{u^{n-1}}{u+1}\,\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

이며, 여기서 음의 부호를 이용하여 적분 구간의 위끝과 아래끝을 다시 바꾸었다. 이것이 원하는 결과이다.

소문항 (iii)

(a) 피적분함수(integrand)를 나누면

$$\frac{x^5+3}{x^3(x+1)}=\frac{x^2}{x+1}+\frac{3}{x^3(x+1)}.$$

이다. 구간은 $[\frac{1}{2},2]$이고, 이는 (ii)의 구간에서 $m=2$인 경우이다. (ii)를 $n=3$으로 적용하면

$$\int_{1/2}^{2}\frac{3}{x^3(x+1)}\,\mathrm{d}x=3\int_{1/2}^{2}\frac{u^2}{u+1}\,\mathrm{d}u,$$

이고, 이는 첫 번째 조각의 세 배이다. (i)을 $m=2$로 적용하면

$$\int_{1/2}^{2}\frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1^3\cdot 3}{2\cdot 4}+\ln 2=\frac{3}{8}+\ln 2.$$

이다. 따라서 적분값은 $4\big(\frac{3}{8}+\ln 2\big)$, 즉

$$\int_{1/2}^{2}\frac{x^5+3}{x^3(x+1)}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}+4\ln 2.$$

이다.

(b) 이번에는

$$\frac{x^5+x^3+1}{x^3(x+1)} = \frac{x^2}{x+1} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^3(x+1)}.$$

이다.

> **생각해 보기** 이번 구간은 $[1,2]$이며, $[1/m, m]$ 꼴이 아니다. 그래도 (ii)가 도움이 될까?

그렇다. 치환 $x = 1/u$는 양수로 이루어진 어떤 구간에서도 쓸 수 있고, 단지 적분 구간의 끝점을 옮길 뿐이다. $x = 1$이면 $u = 1$, $x = 2$이면 $u = \frac{1}{2}$라는 점만 바꾸어 (ii)와 똑같이 계산하면

$$\int_1^2 \frac{1}{x^3(x+1)}\,\mathrm{d}x = \int_{1/2}^1 \frac{u^2}{u+1}\,\mathrm{d}u.$$

임을 알 수 있다. 이것은 첫 번째 조각과 피적분함수가 같고 구간만 이웃한 구간이므로, 둘을 합치면 $m = 2$일 때 (i)의 적분이 된다.

$$\int_1^2 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x + \int_{1/2}^1 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int_{1/2}^2 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{8} + \ln 2.$$

남은 조각은

$$\int_1^2 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \ln 3 - \ln 2.$$

이다. 모두 더하면

$$\int_1^2 \frac{x^5+x^3+1}{x^3(x+1)}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{8} + \ln 2 + \ln 3 - \ln 2 = \frac{3}{8} + \ln 3.$$

이다.

검산

- (i)에서 $m = 1$이면 한 점에서의 적분이 되는데, 실제로 우변은 $0 + \ln 1 = 0$이다. m을 $1/m$으로 바꾸면 적분 구간의 끝점이 서로 바뀌므로 적분값의 부호가 바뀌어야 하는데, 공식도 실제로 부호가 바뀐다.
- 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 (iii)(a)는 4.272589로 $\frac{3}{2} + 4\ln 2 \approx 4.272589$와 일치하고, (iii)(b)는 1.473612로 $\frac{3}{8} + \ln 3 \approx 1.473612$와 일치한다.
- (b)의 타당성 검사: $[1,2]$에서 피적분함수는 1.5에서 약 1.37까지 내려갔다가 약 1.71까지 올라가므로, 답이 1.47 근처인 것은 타당하다.

흔한 실수

- $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u/u^2$에서 나오는 음의 부호를 빠뜨리거나, 적분 구간의 끝점을 바꾸는 것을 잊는 실수. 두 가지를 모두 해야 하며, 둘은 서로 상쇄된다.
- (iii)(b)에서 구간이 $[\frac{1}{2}, 2]$인 것처럼 (ii)를 적용하는 실수. 치환은 $[1,2]$를 $[\frac{1}{2}, 1]$로 옮기며, 바로 이 점 덕분에 조각들이 서로 맞아떨어진다.

STEP 너머

사상 $x \mapsto 1/x$는 구간 $[1/m, m]$의 대칭(symmetry)이며, 정의역의 대칭을 이용하여 적분들 사이의 관계를 얻는 것은 해석학(analysis)에서 거듭 등장하는 기법이다. 예를 들어 $\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 0$임을 보일 때도 이 방법을 쓴다. 복소해석학(complex analysis)에서는 같은 반전(inversion) $z \mapsto 1/z$가 단위원의 안쪽과 바깥쪽을 서로 바꾸며, 기본적인 도구가 된다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)에는 반전을 기하학적으로 다룬 아름다운 설명이 있다.

풀이

STEP I 2009, 문제 7

순수수학 • 부분적분

STEP I 2009, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/09-s1-q7

핵심 아이디어

첫 번째 적분은 "부분적분(integration by parts)을 두 번 하면 원래 적분이 다시 나타난다"는 고전적인 기법을 쓴다. 두 단계를 거치면 우변에 원래 적분이 다시 나타나고, 이것을 방정식의 미지수처럼 풀어 구한다. 모든 정수 m에 대하여 $\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \cos mx \,\mathrm{d}x$의 공식을 얻고 나면, 뒤의 소문항들은 계산 정리에 불과하다. 사인과 코사인의 곱을 하나의 코사인들의 합으로 바꾸면, 각 항은 곧바로 적분할 수 있다.

풀이

일반적인 적분

$I_m = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \cos mx \,\mathrm{d}x$라 쓰고, 간단히 $E = \mathrm{e}^{2\pi} - 1$이라 하자. $u = \cos mx$, $\mathrm{d}v = \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$로 두고 부분적분하면

$$I_m = \Big[\mathrm{e}^x \cos mx\Big]_0^{2\pi} + m\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \sin mx \,\mathrm{d}x.$$

m이 정수이므로 $\cos 2m\pi = 1$이고, 따라서 대괄호 부분은 $\mathrm{e}^{2\pi} - 1 = E$이다. 이번에는 $u = \sin mx$로 두고 다시 부분적분하면

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \sin mx \,\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{e}^x \sin mx\Big]_0^{2\pi} - m\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \cos mx \,\mathrm{d}x = 0 - mI_m,$$

이다. 여기서도 m이 정수라는 사실을 써서 $\sin 2m\pi = \sin 0 = 0$이기 때문이다. 두 식을 합치면

$$I_m = E - m^2 I_m, \qquad \text{따라서} \qquad (m^2+1)I_m = E.$$

생각해 보기 한 바퀴 돌아서 I_m이 다시 나왔다. 이것은 막다른 길일까?

아니다. 바로 이것이 우리가 원하던 것이다. 방정식 $I_m = E - m^2 I_m$은 미지의 수 I_m에 대한 일차방정식이고, $m^2 + 1 \neq 0$이므로 이것으로 나눌 수 있다.

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \cos mx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{m^2+1}\left(\mathrm{e}^{2\pi} - 1\right),$$

이므로 원하는 결과를 얻는다. ($m = 0$인 경우도 포함된다. 이때는 단지 $\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = E$라는 뜻이다.) 경계항을 간단하게 만드는 데 정수 조건이 쓰였다는 점에 주목하자. m이 정수가 아니면 이 공식은 성립하지 않는다.

소문항 (i)

삼각함수의 덧셈정리(compound-angle formulae)로 전개하면 $\sin A \sin B$ 항들이 소거된다.

$$\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2\cos A \cos B.$$

$A = 6x$, $B = x$로 두면 $\cos x \cos 6x = \frac{1}{2}(\cos 7x + \cos 5x)$를 얻는다. 따라서 $m = 7$과 $m = 5$에 대하여 일반적인 결과를 쓰면

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \cos x \cos 6x \,\mathrm{d}x &= \tfrac{1}{2}\left(I_7 + I_5\right) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{50} + \frac{1}{26}\right)E \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot \frac{26+50}{1300}\,E = \frac{76}{2600}\,E = \frac{19}{650}\left(\mathrm{e}^{2\pi} - 1\right),\end{aligned}$$

이고, 이것이 구하려는 결과이다.

소문항 (ii)

곱을 합으로 바꾸는(product-to-sum) 단계가 두 번 필요하다. 덧셈정리를 더하는 대신 빼면 $\cos(A-B) - \cos(A+B) = 2\sin A \sin B$를 얻으므로, $A = 4x$, $B = 2x$로 두면

$$\sin 2x \sin 4x = \tfrac{1}{2}(\cos 2x - \cos 6x).$$

여기에 $\cos x$를 곱하고 각 곱에 소문항 (i)의 항등식을 쓰면

$$\begin{aligned}\sin 2x \sin 4x \cos x &= \tfrac{1}{2}\cos 2x \cos x - \tfrac{1}{2}\cos 6x \cos x \\ &= \tfrac{1}{4}(\cos 3x + \cos x) - \tfrac{1}{4}(\cos 7x + \cos 5x).\end{aligned}$$

이제 각 항은 $m = 3, 1, 7, 5$인 경우의 일반적인 결과로 처리된다.

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \sin 2x \sin 4x \cos x \,\mathrm{d}x &= \tfrac{1}{4}\left(I_3 + I_1 - I_7 - I_5\right) \\ &= \tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{2} - \frac{1}{50} - \frac{1}{26}\right)E \\ &= \tfrac{1}{4} \cdot \frac{65 + 325 - 13 - 25}{650}\,E = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{352}{650}\,E.\end{aligned}$$

따라서

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \sin 2x \sin 4x \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{44}{325}\left(\mathrm{e}^{2\pi} - 1\right).$$

검산

- $\dfrac{\mathrm{e}^x(\cos mx + m \sin mx)}{m^2+1}$을 미분하면 $\mathrm{e}^x \cos mx$가 되므로 이것은 부정적분(antiderivative)이다. 이를 2π와 0에서 계산하면 일반적인 결과가 다시 나온다.
- 소문항 (ii)의 항등식에 $x = 0$을 대입하면 좌변은 0이고 우변은 $\frac{1}{4}(1+1-1-1) = 0$이다. 맞다.
- 수치적으로(심프슨 공식(Simpson's rule)) 계산하면 소문항 (i)의 적분은 15.6236…, 소문항 (ii)의 적분은 72.3619…이고, $E = \mathrm{e}^{2\pi} - 1 \approx 534.49$일 때 $\frac{19}{650}E$, $\frac{44}{325}E$와 일치한다.

흔한 실수

- 두 번째 부분적분에서의 부호 실수: $\sin mx$의 도함수는 $+m\cos mx$이고, 부분적분 공식의 음의 부호와 합쳐져 $-m^2 I_m$이 된다.
- 곱을 합으로 바꾸는 각 단계에서 인수 $\frac{1}{2}$을 빠뜨려, 소문항 (ii)에서 $\frac{1}{4}$ 대신 $\frac{1}{2}$이 붙는 실수.

STEP 너머

더 매끄러운 방법은 $\cos mx = \operatorname{Re} \mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}$로 쓰는 것이다. 그러면 부분적분을 전혀 하지 않고도 $I_m = \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i}m)x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{Re} \dfrac{E}{1+\mathrm{i}m} = \dfrac{E}{1+m^2}$를 얻는다. 뒤의 소문항들에서 한 것처럼 함수를 성분 $\cos mx$들로 분해하는 것은 푸리에 급수(Fourier series)의 출발점이며, 푸리에 급수는 대학 1학년 해석학과 미분방정식의 핵심 도구이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에 읽기 쉬운 입문이 있고, Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석)는 지수함수의 관점이 왜 그토록 잘 통하는지 보여 준다.

풀이

STEP I 2009, 문제 8

순수수학 • 원과 접선

STEP I 2009, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/09-s1-q8

핵심 아이디어

원이 직선에 접하는(touch) 것은 원의 중심에서 직선까지의 거리가 반지름과 같을 때, 그리고 그때에만 그렇다. 원 C들의 중심은 모두 원점을 지나면서 x축과 $3y = 4x$ 사이의 각을 이등분하는 직선 위에 있으므로, 각각의 원은 두 직선에 모두 접한다. 따라서 C는 그 모서리에 놓인 원 전체의 모임이 되고, 소문항 (ii)의 내접원(incircle)은 반드시 이들 가운데 하나여야 한다. 세 번째 변에도 접하도록 하는 t의 값만 고르면 된다.

풀이

소문항 (i)

원 C의 중심은 $P = (2t, t)$이고 반지름은 t이다. $t > 0$이므로 중심은 x축 위쪽에 있고 x축까지의 거리는 t로, 반지름과 같다. 따라서 C는 점 $(2t, 0)$에서 $y = 0$에 접한다.

직선 OP의 기울기(gradient)는 $\frac{t}{2t} = \frac{1}{2}$이므로 $\tan\alpha = \frac{1}{2}$이고

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3},$$

이 되어 요구한 결과를 얻는다.

이제 β를 x축과 기울기가 $\frac{4}{3}$인 직선 $3y = 4x$ 사이의 예각이라 하자. 그러면 $\tan\beta = \frac{4}{3} = \tan 2\alpha$이다. $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$이므로($\tan\alpha = \frac{1}{2} < 1$이기 때문이다) 각 2α도 예각이고, tan는 예각에서 일대일(one-to-one)이므로 $\beta = 2\alpha$이다.

? **생각해 보기** $\beta = 2\alpha$라는 사실로부터 왜 C가 $3y = 4x$에 접한다는 것을 알 수 있는가?

직선 OP는 x축과 각 α를 이루고 직선 $3y = 4x$와 각 $\beta - \alpha = \alpha$를 이루므로, OP는 두 직선 사이의 각을 이등분한다. P에서 각 직선에 수선(perpendicular)을 내리면 빗변(hypotenuse) OP가 같고 O에서의 각 α도 같은 두 직각삼각형이 생기므로, 두 수선의 길이는 모두 $OP\sin\alpha$로 같다. x축까지의 거리가 t이므로 P에서 $3y = 4x$까지의 거리도 반지름인 t이다. 따라서 C는 $3y = 4x$에 접한다.

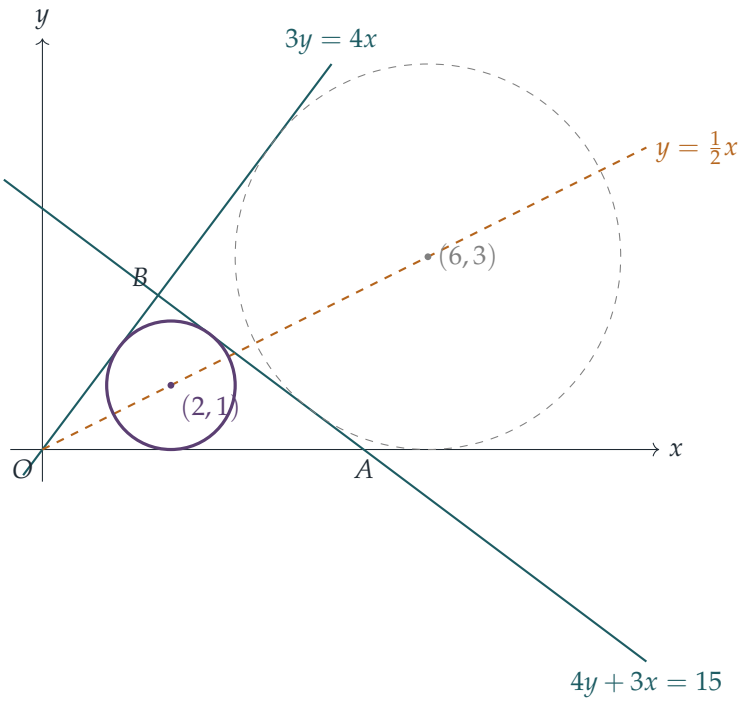
(검산으로, 점과 직선 사이의 거리 공식을 쓰면 $(2t, t)$에서 $4x - 3y = 0$까지의 거리는 $\frac{|8t-3t|}{5} = t$이다.)

소문항 (ii)

먼저 삼각형을 구한다. 직선 $y = 0$과 $3y = 4x$는 $O = (0,0)$에서 만나고, $y = 0$과 $4y + 3x = 15$는 $A = (5,0)$에서 만난다. 세 번째 꼭짓점을 구하기 위해 $y = \frac{4}{3}x$를 $4y + 3x = 15$에 대입하면

$$\tfrac{16}{3}x + 3x = 15 \quad \Longrightarrow \quad x = \tfrac{9}{5}, \qquad y = \tfrac{12}{5},$$

이므로 $B = \left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)$이다. $3y = 4x$와 $4y + 3x = 15$의 기울기는 각각 $\frac{4}{3}$과 $-\frac{3}{4}$이고 그 곱이 -1이므로, 삼각형은 B에서 직각이다. 세 변의 길이는 $OA = 5$, $OB = 3$, $AB = 4$이다.



내접원은 삼각형 안에 있으므로, O 근처에서 양의 x축과 직선 $3y = 4x$ 사이의 예각 안에 놓여 두 직선에 모두 접한다. 그 중심은 두 직선에서 같은 거리에 있으므로 그 각의 이등분선(angle bisector) 위에 있고, 소문항 (i)에 의해 이 이등분선은 직선 $y = \frac{1}{2}x$(직선 OP)이

다. 중심을 $t > 0$인 $(2t, t)$라 하면 $y = 0$까지의 거리는 t이고, 이것이 반지름이어야 한다. 따라서 내접원은 소문항 (i)의 원 C 가운데 하나이다.

이제 C가 세 번째 변 $3x + 4y - 15 = 0$에도 접하도록 하면 된다. $(2t, t)$에서 이 직선까지의 거리가 t와 같아야 하므로

$$\frac{|6t + 4t - 15|}{5} = t \quad \Longleftrightarrow \quad |10t - 15| = 5t.$$

$10t - 15 = 5t$이면 $t = 3$이고, $15 - 10t = 5t$이면 $t = 1$이다.

두 원 모두 세 직선에 접하지만, 삼각형 안에 있는 것은 하나뿐이다. $t = 3$일 때 중심 $(6, 3)$은 $3x + 4y = 30 > 15$이므로, AB에 대해 $O(3x + 4y = 0 < 15)$의 반대쪽에 있다. 이것은 **방접원**(*excircle*)으로, 그림의 점선 원이다. $t = 1$일 때 중심 $(2, 1)$은 $3x + 4y = 10 < 15$이고, $y = 0$의 위쪽, $3y = 4x$의 아래쪽에 있으므로 삼각형 안에 있다. 중심이 삼각형 안에 있으면서 세 변에 모두 접하는 원은 삼각형 안에 놓이므로, 내접원의 중심은 $(2, 1)$이고 반지름은 1이다.

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1.$$

검산

직각을 낀 두 변이 a, b이고 빗변이 c인 직각삼각형에서 내접원의 반지름(inradius)은 $\frac{1}{2}(a + b - c)$이다. 여기서는 $\frac{1}{2}(3 + 4 - 5) = 1$로, 구한 값과 같다. 내접원의 반지름은 넓이/반둘레(semi-perimeter)$= 6/6 = 1$로도 구할 수 있다. 수치로 확인하면, 내심(incentre)을 꼭짓점들의 변의 길이에 따른 가중평균 $\frac{4O+3A+5B}{12}$로 계산하면 정확히 $(2, 1)$이 나오고, $(2, 1)$에서 세 직선까지의 거리는 모두 1이다.

흔한 실수

- $|10t - 15| = 5t$를 절댓값(modulus) 없이 풀어 $t = 3$만 구하는 실수. 이것은 내접원이 아니라 방접원이다.
- 두 근을 모두 구하고도 왜 $t = 1$이 삼각형 안에 있는 원인지 설명하지 않는 실수.
- 소문항 (i)에서 두 각이 모두 예각임을 언급하지 않고 $\tan\beta = \tan 2\alpha$이므로 $\beta = 2\alpha$라고 말하는 실수.

STEP 너머

모든 삼각형에는 내접원 하나와 방접원 세 개가 있고, 이 네 원의 중심은 내각과 외각의 이등분선들이 만나는 점이다. 여기서 구한 값 $t = 3$은 O의 맞은편에 있는 방접원이다. 이 원들은

구점원(nine-point circle)과, 구점원이 이 네 원에 모두 접한다는 포이어바흐(Feuerbach) 정리를 비롯한 고전 기하학의 풍부한 세계로 이어진다. 콕서터(Coxeter)의 *Introduction to Geometry*(기하학 입문)는 이를 탐구하기에 좋은 고전이고, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에는 STEP 스타일의 연습 문제가 더 있다.

풀이

STEP I 2009, 문제 9

역학 • 충돌하는 포물체

STEP I 2009, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

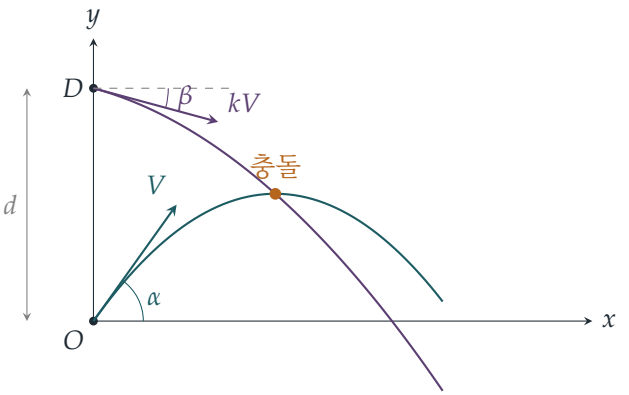
step.maths.org/questions/09-s1-q9

핵심 아이디어

중력만 받는 두 입자는 같은 가속도를 가지므로, 두 입자의 위치를 비교하면 $-\frac{1}{2}gt^2$ 항이 소거된다. 즉 서로에 대해 상대적으로 보면 두 입자는 일정한 속도로 직선 운동을 한다. 충돌한다는 것은 같은 시각 T에 수평 변위와 수직 변위가 각각 같다는 뜻이다. 수평 방향의 식에서 코사인 관계식이 곧바로 나온다. 수직 방향의 식에는 β가 들어 있는데, $\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta$와 코사인 관계식을 이용하여 이를 소거한다.

풀이

P와 Q를 공기 저항 없이 중력만 받으며 자유롭게 운동하는 입자로 모형화한다. 두 입자가 충돌하려면 같은 연직 평면 안에서 같은 수평 방향으로 던져져야 한다. O를 원점으로 잡고, 그 방향을 x축의 수평 방향, 연직 위쪽을 y축 방향으로 잡으면 D는 $(0, d)$이다.



시각 t에서 두 입자의 위치는

$$\begin{aligned} P: &\quad x = Vt\cos\alpha, && y = Vt\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2, \\ Q: &\quad x = kVt\cos\beta, && y = d - kVt\sin\beta - \tfrac{1}{2}gt^2, \end{aligned}$$

이다. 여기서 Q의 수직 속도에 음의 부호가 붙는 것은 β를 수평선 **아래쪽으로** 잰 각이기 때문이다.

코사인 관계식과 T에 대한 방정식

충돌하는 순간 $t = T > 0$이고 두 입자의 좌표가 일치한다. 수평 방향으로는

$$VT\cos\alpha = kVT\cos\beta,$$

이고, 양변을 $VT \neq 0$으로 나누면 요구한 대로 $\cos\alpha = k\cos\beta$를 얻는다.

수직 방향으로는 양변에서 $-\frac{1}{2}gT^2$ 항이 소거되어

$$VT\sin\alpha = d - kVT\sin\beta, \qquad \text{따라서} \qquad kVT\sin\beta = d - VT\sin\alpha.$$

가 남는다.

> **생각해 보기** β를 어떻게 없앨 수 있을까?

$k\cos\beta$는 α로 나타낼 수 있으므로, 양변을 제곱하여 $k^2\sin^2\beta$가 나오게 한다. 이 값은

$$k^2\sin^2\beta = k^2 - k^2\cos^2\beta = k^2 - \cos^2\alpha.$$

이다. 수직 방향의 식을 제곱하고 이를 대입하면

$$\begin{aligned} (k^2 - \cos^2\alpha)V^2T^2 &= d^2 - 2dVT\sin\alpha + V^2T^2\sin^2\alpha, \\ (k^2 - \cos^2\alpha - \sin^2\alpha)V^2T^2 + 2dVT\sin\alpha - d^2 &= 0, \\ (k^2 - 1)V^2T^2 + 2dVT\sin\alpha - d^2 &= 0, \end{aligned}$$

이다. 여기서 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$을 이용하였다. 이것이 구하는 방정식이다.

이를 T에 대한 이차방정식(quadratic equation)으로 보면, $k > 1$이므로 두 근의 곱은 $-d^2/\left((k^2-1)V^2\right) < 0$이다. 따라서 양수인 근은 정확히 하나이고, 그 근이 충돌 시각이다.

P의 최고점에서의 충돌

P의 수직 속도는 $V\sin\alpha - gt$이고, 이 값은 $t = V\sin\alpha/g$일 때 0이다. 따라서 이 경우 $T = V\sin\alpha/g$이다. 이를 이차방정식에 대입하면

$$(k^2 - 1)\frac{V^4\sin^2\alpha}{g^2} + \frac{2dV^2\sin^2\alpha}{g} - d^2 = 0.$$

이다. 양변에 g^2을 곱하고 $\sin^2\alpha$가 들어 있는 항끼리 묶으면 $\sin^2\alpha\left((k^2-1)V^4+2gdV^2\right)=g^2d^2$이므로

$$\boxed{\sin^2\alpha=\frac{g^2d^2}{V^2\left((k^2-1)V^2+2gd\right)}}$$

이다. $k>1$이므로 괄호 안의 값은 양수이고, 따라서 이 식은 잘 정의된다.

부등식

$\sin^2\alpha\le 1$이고 분모가 양수이므로

$$\begin{aligned} g^2d^2 &\le (k^2-1)V^4+2gdV^2,\\ g^2d^2-2gdV^2+V^4 &\le k^2V^4,\\ (gd-V^2)^2 &\le (kV^2)^2. \end{aligned}$$

이다. $|gd-V^2|$와 kV^2는 모두 음이 아니므로, 제곱근을 취해도 부등호의 방향은 유지된다. 즉 $|gd-V^2|\le kV^2$이다. 특히 $gd-V^2\le kV^2$, 곧

$$gd\le(1+k)V^2,$$

이 되어 요구한 결과를 얻는다. 등호가 성립하려면 $\sin^2\alpha=1$, 즉 P를 연직 위로 던져야 한다.

검산

- $g=10$, $V=10$, $k=2$, $d=10$이라 하자. 공식에서 $\sin^2\alpha=\frac{100\cdot100}{100(300+200)}=\frac{1}{5}$이므로 $T=V\sin\alpha/g=1/\sqrt{5}$이다. 이때 이차방정식의 좌변은 $3\cdot100\cdot\frac{1}{5}+2\cdot10\cdot10\cdot\frac{1}{5}-100=60+40-100=0$이다. $\cos\beta=\cos\alpha/2$로 잡으면 시각 T에서 두 입자 모두 높이 1에 있다. 이 경우 $gd=100\le300=(1+k)V^2$이다.
- 수천 개의 무작위 V, k, α, T에 대하여 두 운동을 수치적으로 한 단계씩 진행시켜 본 결과, 충돌, 코사인 관계식, 이차방정식, $\sin^2\alpha$에 대한 공식이 반올림 오차 범위 안에서 모두 성립함을 확인하였다.
- 극한의 경우: $\alpha\to\frac{1}{2}\pi$이면 $\cos\beta\to0$이기도 하므로 두 입자 모두 연직으로 움직인다. P는 시간 V/g 동안 높이 $V^2/(2g)$까지 올라가고, 그동안 Q는 $kV^2/g+V^2/(2g)$만큼 떨어지므로 $d=(1+k)V^2/g$이다. 예상대로 등호가 성립한다.

흔한 실수

- Q의 수직 속도의 부호를 잘못 잡는 것: 수평선 **아래쪽으로** 던졌으므로 $-kV\sin\beta$이다.

- $\frac{1}{2}gT^2$ 항을 그대로 남겨 두는 것: 이 항들은 소거되며, T에 대한 방정식에는 g가 들어 있지 않다.
- $(gd - V^2)^2 \leq k^2V^4$의 제곱근을 취할 때 절댓값을 언급하지 않고 $gd - V^2 \leq kV^2$로 쓰는 것. 결론은 맞지만, 그 이유는 $x \leq |x|$이기 때문이다.

STEP 너머

중력이 소거되는 현상은 기준틀(frame of reference)을 바꾸는 생각을 처음 맛보게 해 준다. 가속도 g로 자유낙하하는 기준틀에서는 두 입자 모두 일정한 속력으로 직선 운동을 하므로, 충돌 문제는 상대 속도(relative velocity)의 기하 문제로 바뀐다. 이것이 아인슈타인(Einstein)의 등가 원리(equivalence principle)의 바탕에 있는 생각이며, 이를 이용하면 포물체 요격 문제의 상당수가 한 줄로 풀린다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 상대 운동과 비관성 기준틀(non-inertial frame)을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP I 2009, 문제 10

역학 • 경사면 위의 연결된 입자

STEP I 2009, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

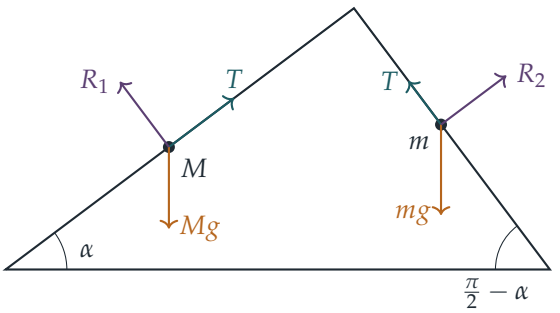
step.maths.org/questions/09-s1-q10

핵심 아이디어

줄이 늘어나지 않고(inextensible) 도르래(pulley)가 매끄러우므로(smooth) 두 입자는 하나의 계로 움직인다. 즉 M이 자신의 면을 따라 거리 s만큼 내려가면 m은 자신의 면을 따라 같은 거리 s만큼 올라가고, 장력(tension)은 양쪽에서 같다. 따라서 각 면을 따른 중력의 두 성분을 비교하고, 각 입자에 뉴턴의 운동 제2법칙(Newton's second law)을 적용하면 공통 가속도를 얻는다. 마지막 부분은 하나의 변수 α에 대한 평범한 미적분 최대화 문제가 된다.

풀이

입자들을 매끄러운 면 위의 질점(point mass)으로 모형화하고, 가벼우며 늘어나지 않는 줄이 매끄러운 도르래에 걸려 있다고 하며, 계는 정지 상태에서 출발한다고 가정한다. T를 장력, R_1, R_2를 각각 M과 m에 작용하는 수직항력(normal reaction)이라 하자.



꼭짓점의 각은 $\pi - \alpha - (\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{\pi}{2}$이므로 두 면은 서로 수직이다. 경사각이 α인 면을 따라 아래로 향하는 중력의 성분은 $Mg\sin\alpha$이고, 경사각이 $\frac{\pi}{2} - \alpha$인 면을 따라 아래로 향하는

성분은 $mg\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha) = mg\cos\alpha$이다. 수직항력은 면에 수직이므로 면을 따른 운동에는 아무런 역할을 하지 않는다.

소문항 (i)

"M은 자신의 면을 따라 아래로, m은 자신의 면을 따라 위로"인 방향을 양의 방향으로 잡고, 가속도를 a라 하자. 각 면을 따라 힘을 분해하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} M: &\quad Mg\sin\alpha - T = Ma, \\ m: &\quad T - mg\cos\alpha = ma. \end{aligned}$$

두 식을 더하면 T가 소거된다.

$$a = \frac{g\,(M\sin\alpha - m\cos\alpha)}{M+m}.$$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$에서 $\cos\alpha > 0$이므로

$$a > 0 \iff M\sin\alpha > m\cos\alpha \iff \tan\alpha > \frac{m}{M}.$$

따라서 $\tan\alpha > \frac{m}{M}$이면 정지 상태에서 출발한 계는 양의 방향으로 가속한다. 즉 요구된 대로 M이 자신의 면을 따라 미끄러져 내려간다.

> **생각해 보기** 줄이 팽팽하게 유지되어 이 방정식들이 올바른 방정식이라는 것을 어떻게 알 수 있는가?

두 번째 방정식에서 $T = m(a + g\cos\alpha)$이고, 이는 $a > 0$일 때 양수이므로 줄이 팽팽하다는 가정과 모순이 없다. 또한 줄은 느슨해질 수 없다. 만약 느슨해진다면 각 입자는 자신의 면을 따라 **아래로** 미끄러져 둘 다 도르래에서 멀어질 것이고, 그러려면 더 긴 줄이 필요하기 때문이다.

소문항 (ii)

이제 $\tan\alpha = \frac{2m}{M}$이므로 $m = \frac{1}{2}M\tan\alpha$이고, $\tan\alpha > \frac{m}{M}$이므로 소문항 (i)에 의해 이번에도 M이 아래로 움직인다. $m = \frac{1}{2}M\tan\alpha$를 대입하고 M을 약분하면

$$\begin{aligned} a &= \frac{g\left(M\sin\alpha - \frac{1}{2}M\tan\alpha\cos\alpha\right)}{M + \frac{1}{2}M\tan\alpha} = \frac{g\left(\sin\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha\right)}{1 + \frac{1}{2}\tan\alpha} = \frac{\frac{1}{2}g\sin\alpha}{\frac{1}{2}(2+\tan\alpha)} \\ &= \frac{g\sin\alpha}{\tan\alpha + 2}, \end{aligned}$$

이다. 여기서 $\tan\alpha\cos\alpha = \sin\alpha$를 이용하였다. 이것이 구하는 가속도의 크기이다.

최대화. 비 m/M은 $\tan\alpha = 2m/M$을 통해 α를 결정하므로, 다음을 최대화하면 된다.

$$f(\alpha) = \frac{\sin\alpha}{\tan\alpha + 2}, \qquad 0 < \alpha < \tfrac{\pi}{2}.$$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\tan\alpha = \sec^2\alpha$와 몫의 미분법(quotient rule)을 이용하면

$$f'(\alpha) = \frac{\cos\alpha\,(\tan\alpha+2) - \sin\alpha\sec^2\alpha}{(\tan\alpha+2)^2} = \frac{\sin\alpha + 2\cos\alpha - \dfrac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}}{(\tan\alpha+2)^2}.$$

분자에 $\cos^2\alpha > 0$을 곱하고 $1-\cos^2\alpha = \sin^2\alpha$를 이용하면

$$\cos^2\alpha\,(\sin\alpha + 2\cos\alpha) - \sin\alpha = 2\cos^3\alpha - \sin\alpha\,(1-\cos^2\alpha) = 2\cos^3\alpha - \sin^3\alpha.$$

따라서 $f'(\alpha)$의 부호는 $2\cos^3\alpha - \sin^3\alpha = \cos^3\alpha\,(2-\tan^3\alpha)$의 부호와 같다. $\tan\alpha$가 0에서 ∞까지 증가할 때, 이 값은 $\tan^3\alpha < 2$인 동안 양수이고 $\tan^3\alpha > 2$가 되면 음수이다. 그러므로 f는 증가하다가 감소하며, 최댓값은 유일한 정상점(stationary point)

$$\tan^3\alpha = 2.$$

에서 얻어진다. (구간에서 $f > 0$이고 양 끝에서 $f \to 0$이므로 이것이 최댓값임을 알 수도 있다.) $\tan\alpha = \frac{2m}{M}$을 이용하면 이 조건은

$$\frac{8m^3}{M^3} = 2, \qquad \text{즉,} \qquad 4m^3 = M^3,$$

이 되어, 요구된 결과를 얻는다.

검산

- 소문항 (i)의 극한 경우(limiting case): $m = 0$이면 $a = g\sin\alpha$로, 매끄러운 경사면 위의 입자 하나에 해당한다. 또 $\tan\alpha = m/M$이면 $a = 0$으로, 평형점에 해당한다.
- 최적점에서 $\tan\alpha = 2^{1/3} \approx 1.26$이므로 $\alpha \approx 51.6°$이고 $m/M = 4^{-1/3} \approx 0.63$이다. $(0, \frac{\pi}{2})$에서 f를 격자 탐색(grid search)한 결과 같은 α에서 최댓값 $f \approx 0.240$을 얻었으므로, 가장 큰 가속도는 약 $0.240g$이다.
- 임의의 질량과 각에 대해, $\tan\alpha = 2m/M$일 때마다 소문항 (i)의 일반 공식은 소문항 (ii)의 공식과 일치했고, 두 운동 방정식은 같은 양의 장력을 주었다.

흔한 실수

- m에 대해 $mg\sin\alpha$를 사용하는 것: m이 놓인 면의 경사각은 $\frac{\pi}{2} - \alpha$이므로 성분은 $mg\cos\alpha$이다.
- a가 α에만 의존한다는 것을 알아차리지 못한 채 m을 고정하고 M을 변화시키며(또는 그 반대로) 최대화하는 것. 모든 것을 α로 나타내면 일변수 문제가 된다.

STEP 너머

이처럼 물체들이 구속 조건으로 연결된 계는 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)의 출발점이다. 좌표 하나(여기서는 줄을 따라 움직인 거리 s)를 고르면 장력과 수직항력 같은 구속력(constraint force)은 자동으로 사라진다. 대학 1학년 과정에서는 이를 도르래, 진자를 비롯한 훨씬 많은 문제에 통하는 체계적인 방법으로 발전시킨다. 이 수준에서 뉴턴 역학을 명료하게 다룬 책으로는 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 읽어 보라.

풀이

STEP I 2009, 문제 11

역학 • 충돌과 반발계수

STEP I 2009, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/09-s1-q11

핵심 아이디어

모든 일차원 충돌은 두 방정식, 즉 운동량 보존(conservation of momentum)과 뉴턴(Newton)의 반발 법칙(law of restitution)으로 결정된다. 에너지를 다루는 요령은 각 입자의 손실을 제곱의 차 $\frac{1}{2}m(u-p)(u+p)$로 쓰는 것인데, 운동량 보존이 인수 $u-p$와 $q-v$를 서로 묶어 주기 때문이다. 공통인수 $u-p$를 묶어 내고 나면, 남은 괄호가 바로 반발 법칙이 기술하는 양이 된다.

풀이

입자들이 매끄러운 탁자 위의 한 직선을 따라 움직인다고 모형화하고, 속도는 $\mathbf{i}$ 방향으로 잰다. $u > v$이므로 질량 m인 입자가 뒤에 있다가 따라잡는다. 수평 방향의 외력이 없으므로 운동량이 보존된다.

$$mu + Mv = mp + Mq, \qquad \text{따라서} \qquad M(q-v) = m(u-p). \tag{1}$$

뉴턴의 반발 법칙에 따르면 멀어지는 속력은 다가오는 속력의 e배이다.

$$q - p = e(u-v). \tag{2}$$



충돌 전($\mathbf{i}$ 방향 속도), $u > v$

소문항 (i)

운동 에너지(kinetic energy)의 손실은 다음과 같다.

$$\Delta = \tfrac{1}{2}m(u^2 - p^2) + \tfrac{1}{2}M(v^2 - q^2) = \tfrac{1}{2}m(u-p)(u+p) - \tfrac{1}{2}M(q-v)(q+v).$$

(1)에 의해 $M(q-v)$를 $m(u-p)$로 바꿀 수 있으므로, 인수 $\frac{1}{2}m(u-p)$가 묶여 나온다.

$$\begin{aligned}\Delta &= \tfrac{1}{2}m(u-p)\big[(u+p) - (q+v)\big] \\ &= \tfrac{1}{2}m(u-p)\big[(u-v) - (q-p)\big] \\ &= \tfrac{1}{2}m(u-p)\big[(u-v) - e(u-v)\big] \qquad (2)\text{에 의해} \\ &= \tfrac{1}{2}m(u-p)(u-v)(1-e),\end{aligned}$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

? **생각해 보기** 에너지 손실에 대한 공식이 어떻게 p에 관해 무언가를 알려 줄까?

충돌은 운동 에너지를 만들어 낼 수 없으므로 $\Delta \geq 0$이다. 곧 $\frac{1}{2}m(u-p)(u-v)(1-e)$에서 $m > 0$, $u - v > 0$(주어진 조건), $1 - e > 0$($e < 1$이므로)이다. 따라서 Δ의 부호는 $u - p$의 부호와 같고, $\Delta \geq 0$이면 반드시 $u \geq p$이다. 질량 m인 입자는 **i** 방향으로 빨라질 수 없는데, M이 이 입자에 가하는 충격량(impulse)이 뒤쪽으로 작용하므로 이는 당연하다.

$\Delta \geq 0$을 물리적 사실로 받아들이고 싶지 않다면, (1)과 (2)를 직접 풀어도 된다.

$$p = \frac{mu + Mv - Me(u-v)}{m+M}, \qquad \text{따라서} \qquad u - p = \frac{M(1+e)(u-v)}{m+M} > 0$$

이고, 이는 $e \geq 0$일 때 성립한다. 이로써 $u \geq p$가 확인되고, 따라서 $\Delta \geq 0$이다.

소문항 (ii)

각 입자가 0이 아닌 같은 양의 에너지를 잃으므로

$$\tfrac{1}{2}m(u-p)(u+p) = \tfrac{1}{2}M(v-q)(v+q) \neq 0.$$

(1)에 의해 $M(v-q) = -m(u-p)$이므로 우변은 $-\frac{1}{2}m(u-p)(v+q)$이고

$$\tfrac{1}{2}m(u-p)(u+p) = -\tfrac{1}{2}m(u-p)(v+q).$$

좌변이 0이 아니므로 $m(u-p) \neq 0$이고, 양변을 $\frac{1}{2}m(u-p)$로 나눌 수 있다.

$$u + p = -(v+q), \qquad \text{즉} \qquad u + v + p + q = 0. \tag{3}$$

이제 (2)와 (3)으로부터 p와 q의 합과 차를 얻는다.

$$p + q = -(u+v), \qquad q - p = e(u-v),$$

따라서

$$p = -\tfrac{1}{2}\big[(u+v)+e(u-v)\big], \qquad q = -\tfrac{1}{2}\big[(u+v)-e(u-v)\big].$$

아직 운동량 보존을 완전한 형태로는 쓰지 않았는데, 바로 그것이 e를 결정한다. $mp+Mq = mu+Mv$에 대입하고 양변에 2를 곱하면

$$\begin{aligned} -(m+M)(u+v)+(M-m)e(u-v) &= 2mu+2Mv, \\ (M-m)e(u-v) &= (m+M)(u+v)+2mu+2Mv \\ &= (M+3m)u+(3M+m)v. \end{aligned}$$

$u-v>0$이고 $m\neq M$이면 $M-m\neq 0$이므로, 나누어서

$$e = \frac{(M+3m)u+(3M+m)v}{(M-m)(u-v)},$$

를 얻고, 이것이 원하는 결과이다.

검산

- $m=1, M=3, u=1, v=-\frac{1}{2}$로 두자. 공식에 의해 $e = \frac{6-5}{2\times\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$이다. 그러면 $p=-\frac{1}{2}, q=0$이고, 운동량도 맞는다: $1-\frac{3}{2} = -\frac{1}{2}+0$. 각 입자는 에너지 $\frac{3}{8}$을 잃고, $u+v+p+q = 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+0 = 0$이다.
- $e=1$이면 (i)의 공식은 손실이 0임을 주는데, 완전 탄성 충돌(perfectly elastic collision)이라면 마땅히 그래야 한다.
- 컴퓨터로 (i)은 무작위 충돌 2000개에 대해 정확한 분수로, (ii)는 $0\le e<1$인 무작위 경우 455개에 대해 검증하였다.

흔한 실수

- 반발 법칙을 거꾸로 쓰는 것: 올바른 식은 $q-p=e(u-v)$, 즉 멀어지는 속력을 다가오는 속력으로 나눈 것이며, 여기서는 둘 다 양의 값으로 잰다.
- $u-p$가 왜 0이 아닌지 밝히지 않고 $u-p$로 나누는 것. 이 문제에서 "0이 아닌 양"이라는 표현은 바로 그 이유를 위해 들어 있다.

STEP 너머

(i)의 인수분해는 질량 중심계(centre-of-mass frame)에서 생각하면 자연스럽게 나오는 결과이다. 이 기준계에서는 전체 운동량이 0이고, 운동 에너지는 환산 질량(reduced mass)

$\mu = \frac{mM}{m+M}$을 써서 $\frac{1}{2}\mu$(상대 속력)^{2}이며, 손실은 $\frac{1}{2}\mu(1-e^2)(u-v)^2$이다. 환산 질량과 질량 중심계는 이체 궤도 문제와 입자 산란에서도 다시 등장한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)가 이 개념들을 꼼꼼하게 전개한다.

풀이

STEP I 2009, 문제 12

확률과 통계 • 확률과 부등식

> **STEP I 2009, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/09-s1-q12

핵심 아이디어

여기서 구하는 각 확률(probability)은 봉지 속 사탕 개수들의 곱의 합을 전체 개수의 거듭제곱으로 나눈 것이므로, 모든 비교는 결국 a, b, c에 대한 두 다항식(polynomial)을 비교하는 문제가 된다. 처음에 나오는 부등식(inequality) $x^2 + y^2 \geq 2xy$가 바로 이를 위한 도구이다. 소문항 (ii)에서 "정확히 두 개가 같은 색"인 경우를 정면으로 세는 것은 번거롭다. 나머지 두 경우(모두 같은 색, 모두 다른 색)를 세어 1에서 빼는 편이 훨씬 쉽다.

풀이

부등식

임의의 실수 x와 y에 대하여

$$x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2 \geq 0,$$

이다. 실수의 제곱은 절대 음수가 아니기 때문이다. 따라서 $x^2 + y^2 \geq 2xy$이고, 등호(equality)는 정확히 $x = y$일 때 성립한다.

소문항 (i)

각 봉지에는 사탕이 $a + b$개 들어 있고, 두 번의 뽑기는 서로 다른 봉지에서 이루어지므로 독립(independent)이다. 두 사탕의 색이 같은 사건(event)을 S, 색이 다른 사건을 D라 하자.

그러면

$$\mathrm{P}(S) = \mathrm{P}(\text{빨강, 빨강}) + \mathrm{P}(\text{파랑, 파랑}) = \frac{a}{a+b}\cdot\frac{b}{a+b} + \frac{b}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b} = \frac{2ab}{(a+b)^2},$$
$$\mathrm{P}(D) = \mathrm{P}(\text{빨강, 파랑}) + \mathrm{P}(\text{파랑, 빨강}) = \frac{a}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b}\cdot\frac{b}{a+b} = \frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}.$$

분모는 서로 같고 양수이며, 위의 부등식에 의해 $2ab \le a^2 + b^2$이다. 따라서 요구한 대로 $\mathrm{P}(S) \le \mathrm{P}(D)$이고, 등호는 $a = b$일 때만 성립한다.

소문항 (ii)

각 봉지에 든 사탕의 개수를 $n = a + b + c$라 하자. 봉지의 내용물은 다음과 같다.

	빨강	하양	노랑
봉지 1	a	b	c
봉지 2	b	c	a
봉지 3	c	a	b

세 번의 뽑기는 독립이므로, 각 봉지에서 (순서대로) 특정한 색이 나올 확률은 해당하는 세 개수의 곱을 n^3으로 나눈 값이다. 세 사탕이 모두 같은 색인 사건을 A, 정확히 두 개가 같은 색인 사건을 T, 세 개가 모두 다른 색인 사건을 E라 하자. 이 세 사건은 모든 경우를 빠짐없이 포함하며 서로 겹치지 않는다.

모두 같은 색. 표의 각 열을 위에서 아래로 읽으면

$$\mathrm{P}(A) = \frac{abc + bca + cab}{n^3} = \frac{3abc}{n^3}.$$

모두 다른 색. 봉지 1, 2, 3에서 나온 색은 빨강, 하양, 노랑을 늘어놓는 $3! = 6$가지 순서 중 하나를 이룬다.

$$\text{RWY: } a\cdot c\cdot b \quad \text{RYW: } a\cdot a\cdot a \quad \text{WRY: } b\cdot b\cdot b$$
$$\text{WYR: } b\cdot a\cdot c \quad \text{YRW: } c\cdot b\cdot a \quad \text{YWR: } c\cdot c\cdot c$$

따라서

$$\mathrm{P}(E) = \frac{a^3 + b^3 + c^3 + 3abc}{n^3}.$$

생각해 보기 나머지 18가지 결과를 일일이 나열하지 않고, 이 두 답으로부터 어떻게 $\mathrm{P}(T)$를 구할 수 있을까?

$\mathrm{P}(T) = 1 - \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(E)$이므로, $n^3 = (a+b+c)^3$의 전개(expansion)가 필요하다. 이 전개식에는 세 개의 세제곱 항, a^2b와 같은 꼴의 여섯 항이 각각 계수 3으로, 그리고 abc가 계수 6으로 나타난다.

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3\left(a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2\right) + 6abc.$$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(T) &= \frac{n^3 - 3abc - (a^3 + b^3 + c^3 + 3abc)}{n^3} \\ &= \frac{3\left(a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2\right)}{(a+b+c)^3},\end{aligned}$$

이고, 이것이 주어진 결과이다. 사탕이 모두 같은 색일 확률은

$$\mathrm{P}(A) = \frac{3abc}{(a+b+c)^3}.$$

결론 이끌어 내기. 여섯 항을 공통인수를 가진 것끼리 묶는다.

$$a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2 = a\left(b^2 + c^2\right) + b\left(c^2 + a^2\right) + c\left(a^2 + b^2\right).$$

처음의 부등식에 의해 $b^2 + c^2 \geq 2bc$이고, $a > 0$이므로 곱해도 부등호의 방향이 유지되어 $a(b^2 + c^2) \geq 2abc$이다. 마찬가지로 $b(c^2 + a^2) \geq 2abc$이고 $c(a^2 + b^2) \geq 2abc$이다. 이들을 더하면

$$a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2 \geq 6abc.$$

양변에 $3/n^3 > 0$을 곱하면

$$\mathrm{P}(T) \geq \frac{18abc}{n^3} = 6 \cdot \frac{3abc}{n^3} = 6\,\mathrm{P}(A),$$

이므로 요구한 결과를 얻는다. 등호가 성립하려면 $b = c$, $c = a$, $a = b$가 동시에 성립해야 하므로, 등호는 $a = b = c$일 때만 성립한다.

검산

- $a = b = c$이면 모든 봉지에서 각 색이 3분의 1씩이므로 $\mathrm{P}(A) = 3 \cdot \frac{1}{27} = \frac{1}{9}$이고 $\mathrm{P}(E) = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$이며, 남은 값은 $\mathrm{P}(T) = \frac{2}{3} = 6 \cdot \frac{1}{9}$이다. 이것이 등호가 성립하는 경우이다.
- $a, b, c = 1, 2, 3 (n = 6)$이면 $\mathrm{P}(A) = \frac{18}{216} = \frac{1}{12}$, $\mathrm{P}(E) = \frac{54}{216} = \frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(T) = \frac{144}{216} = \frac{2}{3}$이다. 이들의 합은 1이고, $\frac{2}{3}$은 $\frac{1}{12}$의 8배이다.
- 세 공식 모두를 1부터 8까지의 모든 a, b, c에 대하여 전수 조사(exact enumeration)로 확인했고, 시뮬레이션(simulation)으로도 확인했다($a, b, c = 2, 3, 5$일 때 200 000번의 시행에서 $\mathrm{P}(T)$의 정확한 값 0.66에 대해 0.659를 얻었다).

흔한 실수

- 봉지의 내용물을 잘못된 순서로 쓰는 것. 봉지 2에는 빨강이 a개가 아니라 노랑이 a개 들어 있다. 위와 같은 표를 만들면 이런 실수를 막을 수 있다.
- P(E)에서 모든 순서가 abc를 준다고 가정하는 것. 그런 순서는 세 가지뿐이며, RYW, WRY, YWR 순서는 각각 a^3, b^3, c^3을 준다.
- 부등식에 a, b, c를 곱할 때 $a, b, c > 0$임을 밝히지 않는 것.

STEP 너머

마지막 부등식은 단항식(monomial)의 대칭(symmetric) 합을 비교하는 일반적인 법칙인 뮤어헤드 부등식(Muirhead's inequality)의 한 경우이다. 여기서 이 부등식은 a^2b 꼴의 항들의 합이 abc 꼴의 항들의 합보다 크거나 같다는 것을 말해 준다. 소문항 (i)은 같은 아이디어의 두 변수 경우이며, 둘 다 산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)에 바탕을 둔다. 세기 논증과 여사건(complementary event)에 대해 더 알고 싶다면 Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)를 보라.

풀이

STEP I 2009, 문제 13

확률과 통계 • 배열과 연

STEP I 2009, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/09-s1-q13

핵심 아이디어

중요한 것은 여학생들의 **위치**뿐이고, 어느 여학생 또는 어느 남학생이 누구인지는 중요하지 않다. 따라서 $(n+3)!$가지 순서를 일일이 다루는 대신, 여학생들이 차지하는 세 자리의 집합을 고른다. $\binom{n+3}{3}$개의 집합은 모두 똑같이 일어날 가능성이 있다. 그러면 유리한 집합을 세는 일은 n명의 남학생을 먼저 줄 세운 다음, 여학생들이 그 사이와 양 끝의 틈 가운데 어디로 들어가는지를 묻는 방식이 가장 쉽다.

풀이

모든 $(n+3)!$가지 순서가 똑같은 확률로 일어나고, 여학생들이 차지하는 세 자리의 각 집합은 같은 개수, 즉 $3!\,n!$개의 순서에서 나오므로, 여학생들의 위치 집합은 가능한

$$\binom{n+3}{3} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}$$

개의 집합 위에서 균등분포(uniform distribution)를 따른다. 전체에 걸쳐 K는 1, 2, 3 가운데 하나의 값만 가질 수 있다.

한 줄로 선 n명의 남학생은 $n+1$개의 틈(gap)을 만든다(첫 번째 남학생 앞에 하나, 마지막 남학생 뒤에 하나, 이웃한 남학생 사이에 $n-1$개):



여학생들을 틈에 넣으면(한 틈에 몇 명이든 넣을 수 있다) 하나의 줄이 만들어지고, 모든 줄은 정확히 한 가지 방법으로 만들어진다. 같은 틈에 들어간 여학생들은 서로 이웃해 앉고,

서로 다른 틈에 들어간 여학생들은 적어도 한 명의 남학생으로 떨어져 있다.

소문항 (i)

$K = 3$은 세 여학생이 모두 한 덩어리를 이룬다는 뜻, 즉 모두 같은 틈에 들어간다는 뜻이다. 틈을 고르는 방법은 $n+1$가지이므로

$$\mathrm{P}(K=3) = \frac{n+1}{\binom{n+3}{3}} = \frac{6(n+1)}{(n+3)(n+2)(n+1)} = \frac{6}{(n+2)(n+3)}.$$

(같은 말로, 연속한 세 자리로 된 덩어리는 $1, 2, \ldots, n+1$ 가운데 어느 위치에서든 시작할 수 있다.)

소문항 (ii)

$K = 1$은 어떤 두 여학생도 이웃하지 않는다는 뜻, 즉 여학생들이 세 개의 **서로 다른** 틈에 들어간다는 뜻이다. $n+1$개의 틈 가운데 3개를 $\binom{n+1}{3}$가지 방법으로 고르고, 각 틈에 여학생을 한 명씩 넣는다. 따라서

$$\mathrm{P}(K=1) = \frac{\binom{n+1}{3}}{\binom{n+3}{3}} = \frac{(n+1)n(n-1)}{(n+3)(n+2)(n+1)} = \frac{n(n-1)}{(n+2)(n+3)},$$

이고, 이것이 증명하려던 식이다. ($n = 0$ 또는 1이면 틈이 너무 적은데, 이때 공식도 올바르게 0을 준다.)

? **생각해 보기** 왜 경우의 수가 $\binom{n+1}{3} \times 3!$가 아니라 $\binom{n+1}{3}$인가?

우리는 이름이 붙은 아이들의 순서가 아니라 **위치**의 집합을 세고 있다. 어느 세 틈을 쓰는지 고르면 여학생들의 위치가 완전히 정해진다. 어느 여학생이 어디에 앉는지는 모든 위치 집합이 똑같은 확률로 일어난다는 주장 안에 이미 반영되어 있다.

소문항 (iii)

먼저 $\mathrm{P}(K=2)$가 필요하다. $K \in \{1, 2, 3\}$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(K=2) &= 1 - \frac{6}{(n+2)(n+3)} - \frac{n(n-1)}{(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{(n^2+5n+6) - 6 - (n^2-n)}{(n+2)(n+3)} = \frac{6n}{(n+2)(n+3)}.\end{aligned}$$

검산으로 직접 세어 보자. $K = 2$는 두 여학생이 한 틈에 있고 나머지 한 여학생은 다른 틈에 있다는 뜻이다. 두 명이 들어갈 틈을 고르고 나서 한 명이 들어갈 다른 틈을 고르면 $(n+1)n$개의 집합이 나오고, $(n+1)n/\binom{n+3}{3} = 6n/\big((n+2)(n+3)\big)$이므로 앞의 결과와 같다.

이제 기댓값(expectation)은

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(K) &= 1\cdot\frac{n(n-1)}{(n+2)(n+3)} + 2\cdot\frac{6n}{(n+2)(n+3)} + 3\cdot\frac{6}{(n+2)(n+3)}\\ &= \frac{n^2+11n+18}{(n+2)(n+3)} = \frac{(n+2)(n+9)}{(n+2)(n+3)}\\ &= \frac{n+9}{n+3}.\end{aligned}$$

검산

- $n=0$: 여학생만 있으므로 반드시 $K=3$이고, $\frac{n+9}{n+3}=3$이다.
- $n=1$: 줄은 GGGB, GGBG, GBGG, BGGG이고 똑같은 확률로 일어나므로, $K=3$ 또는 2가 각각 확률 $\frac{1}{2}$로 일어나고 $\mathrm{E}(K)=\frac{5}{2}=\frac{10}{4}$이다.
- $n\to\infty$일 때 $\mathrm{E}(K)\to 1$이다. 남학생이 많으면 여학생들은 거의 이웃하지 않는다.
- $n=0,\ldots,9$에 대해 모든 위치 집합을 정확한 분수로 열거했고(예를 들어 $n=3$이면 $\mathrm{P}(K=1,2,3)=\frac{1}{5},\frac{3}{5},\frac{1}{5}$이고 $\mathrm{E}(K)=2$이다), $n\le 4$에 대해 이름 붙은 아이들의 모든 $(n+3)!$가지 순서도 열거했다. 모든 결과가 일치했다.

흔한 실수

- 같은 분수 안에서 순서 있는 배열의 개수와 위치 집합의 개수를 섞어 쓰는 실수. 표본공간(sample space)을 하나 정하고 끝까지 그것만 사용하라.
- 양 끝의 두 틈을 빠뜨려서 $n+1$개 대신 $n-1$개의 틈을 쓰는 실수.

STEP 너머

"남학생이 틈을 만들고, 여학생이 틈에 들어간다"는 기법은 별과 막대(stars and bars) 아이디어이며, 무작위 배열에서 가장 긴 연속 구간(longest run)에 관한 일반적인 질문은 고전적인 문제이다. 긴 무작위 수열에서 가장 긴 연속 구간의 길이는 수열 길이의 로그처럼 증가한다. 대학 학부의 확률 강좌에서는 지시변수(indicator variable)와 생성함수(generating function)를 통해 이런 내용을 접한다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 이런 세기 논법이 전개되는 모습을 살펴보기에 좋은 책이다.

풀이

STEP II 2009, 문제 1

순수수학 • 곡선의 대칭성

STEP II 2009, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/09-s2-q1

핵심 아이디어

여기서는 계산할 것이 거의 없다. 대칭(symmetry)이 모든 일을 해 준다. 두 곡선 모두 직선 $y = x$와 $y = -x$에 대한 반사(reflection)로 변하지 않으므로, 교점(intersection point)을 하나만 찾으면 나머지는 그 점을 반사하여 얻는다. 그러면 직사각형(rectangle)이라는 사실은 네 점의 배치에서 바로 나온다. 넓이를 구할 때에도 α와 β 자체를 구할 필요는 전혀 없다. 답에 필요한 것은 이 둘의 조합 하나뿐이며, 그것은 $\alpha^4 + \beta^4 = u$와 $\alpha\beta = v$에서 곧바로 얻을 수 있다.

풀이

대칭축

곡선 위의 임의의 점을 어떤 직선에 대하여 반사한 점이 다시 곡선 위에 있으면, 그 곡선은 그 직선에 대하여 대칭이라고 한다. 우리에게 필요한 네 가지 반사는

$$(x, y) \mapsto (-x, y), \quad (x, y) \mapsto (x, -y), \quad (x, y) \mapsto (y, x), \quad (x, y) \mapsto (-y, -x),$$

이며, 각각 $x = 0, y = 0, y = x, y = -x$에 대한 반사이다.

곡선 $x^4 + y^4 = u$. 네제곱은 부호와 무관하고 식이 x와 y에 대하여 대칭이므로, $x^4 + y^4$는 네 사상 모두에 대하여 변하지 않는다. 따라서 이 곡선은 다음 네 개의 대칭축(line of symmetry)을 가진다.

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad y = x, \qquad y = -x.$$

곡선 $xy = v$. x와 y를 맞바꾸어도 xy는 변하지 않고, $(-y)(-x) = xy$이므로 $(x, y) \mapsto (-y, -x)$에 대해서도 변하지 않는다. 한 좌표의 부호만 바꾸면 xy는 $-xy$가 되는데,

$v > 0$이므로 점 $(-x, y)$는 우리 곡선이 아니라 $xy = -v$ 위에 놓인다. 따라서 이 직각쌍곡선(rectangular hyperbola)의 대칭축은 정확히 두 개이다.

$$y = x, \qquad y = -x.$$

네 교점

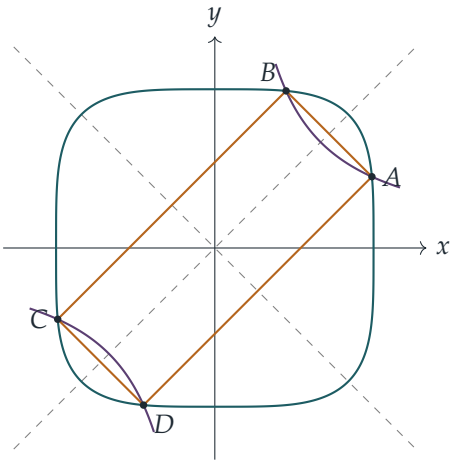
$y = x$에 대한 반사를 S, $y = -x$에 대한 반사를 T라 하자. 각각은 두 곡선을 모두 자기 자신으로 보내므로, 교점을 교점으로 보낸다. $A = (\alpha, \beta)$에서 출발하면

$$S(A) = (\beta, \alpha), \qquad T(A) = (-\beta, -\alpha), \qquad T(S(A)) = (-\alpha, -\beta).$$

를 얻는다. $\alpha > \beta > 0$이므로 이 네 점은 서로 다르다. 다른 교점은 없다. 사차곡선(quartic)의 식에 $y = v/x$를 대입하면 $x^8 - ux^4 + v^4 = 0$이 되는데, 이것은 x^4에 대한 이차방정식으로 양의 근을 많아야 두 개 가지므로, x의 실숫값은 많아야 네 개이다.

이 점들에 시계 반대 방향으로 이름을 붙이기 위해 극각(polar angle)을 살펴보자. $0 < \beta < \alpha$이므로 점 A의 각 θ는 $0 < \theta < 45°$를 만족한다. 그러면 (β, α)의 각은 $90° - \theta$, $(-\alpha, -\beta)$의 각은 $180° + \theta$, $(-\beta, -\alpha)$의 각은 $270° - \theta$이다. 이 각들은 이 순서대로 커지므로

$$B = (\beta, \alpha), \qquad C = (-\alpha, -\beta), \qquad D = (-\beta, -\alpha).$$



(그림은 $u = 81, v = 4$인 경우이다. 청록색은 사차곡선, 자주색은 쌍곡선이다.)

$ABCD$는 직사각형이다

대각선(diagonal)은 AC와 BD이다. AC의 중점은 $\left(\frac{\alpha-\alpha}{2}, \frac{\beta-\beta}{2}\right) = (0, 0)$이고, 마찬가지로 BD의 중점도 $(0, 0)$이다. 따라서 두 대각선은 서로를 이등분하고, $ABCD$는 평행사변

형(parallelogram)이다. 대각선의 길이는

$$AC = \sqrt{(2\alpha)^2 + (2\beta)^2} = 2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \qquad BD = \sqrt{(2\beta)^2 + (2\alpha)^2} = 2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2},$$

로 서로 같다. 두 대각선의 길이가 같은 평행사변형은 직사각형이므로, $ABCD$는 직사각형이다.

생각해 보기 두 대각선의 길이가 같은 평행사변형은 왜 반드시 직사각형일까?

네 꼭짓점은 모두 O로부터 같은 거리 $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$에 있으므로 O를 중심으로 하는 한 원 위에 놓이고, AC와 BD는 그 원의 지름이다. 반원에 대한 원주각은 직각이므로, $ABCD$의 각 내각은 직각이다. 대신 직접 확인하려면, $\overrightarrow{AB} = (\beta - \alpha,\ \alpha - \beta)$와 $\overrightarrow{BC} = (-\alpha - \beta,\ -\alpha - \beta)$의 스칼라곱(scalar product)을 계산하면 된다.

$$-(\beta - \alpha)(\alpha + \beta) - (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = (\alpha + \beta)\big[(\alpha - \beta) - (\alpha - \beta)\big] = 0.$$

넓이

$\alpha > \beta > 0$을 이용하여 양의 제곱근을 택하면, 변의 길이는

$$AB = \sqrt{2(\alpha - \beta)^2} = \sqrt{2}\,(\alpha - \beta), \qquad BC = \sqrt{2(\alpha + \beta)^2} = \sqrt{2}\,(\alpha + \beta),$$

이다. 따라서

$$\text{넓이} = AB \cdot BC = 2(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = 2(\alpha^2 - \beta^2).$$

이제 A가 두 곡선 위에 모두 있다는 사실, 즉 $\alpha^4 + \beta^4 = u$이고 $\alpha\beta = v$라는 사실을 이용한다. 그러면

$$(\alpha^2 - \beta^2)^2 = \alpha^4 + \beta^4 - 2\alpha^2\beta^2 = u - 2v^2.$$

$\alpha^2 - \beta^2 > 0$이므로 양의 근을 택하면

$$\boxed{\text{넓이} ABCD = 2\sqrt{u - 2v^2}}$$

이 결과는 서로 다른 네 점이 있다는 문제의 가정이 $u > 2v^2$를 강제한다는 것도 보여 준다. $u = 2v^2$이면 $\alpha = \beta$이고 두 곡선은 접하기만 한다.

$u = 81$, $v = 4$이면 $u - 2v^2 = 81 - 32 = 49$이므로, 요구한 대로 넓이는 $2 \times 7 = 14$이다.

검산

$u = 81$, $v = 4$일 때 $x^8 - 81x^4 + 256 = 0$을 수치적으로 풀면 $\alpha \approx 2.9690$, $\beta = 4/\alpha \approx 1.3472$를 얻는다. 그러면 $2(\alpha^2 - \beta^2) \approx 14.000$이고, 네 꼭짓점에 신발끈 공식(shoelace formula)을 적용해도 같은 넓이가 나온다. u가 $2v^2$ 쪽으로 줄어들면 각 사분면(quadrant)의 두 점이 $y = x$ 위에서 합쳐지고 직사각형은 납작해져 선분이 되는데, 이는 넓이 $2\sqrt{u - 2v^2} \to 0$과 들어맞는다.

흔한 실수

- 좌표축을 $xy = v$의 대칭축으로 드는 실수. 좌표축에 대하여 반사하면 제1사분면의 가지가 제2사분면으로 옮겨지는데, 그곳에서는 $xy < 0$이다.
- 점의 이름을 잘못된 순서로 붙이는 실수. 예를 들어 $B = (-\alpha, -\beta)$로 잡으면 $ABCD$를 따라가는 경로가 꼬인 사각형이 된다.
- α와 β를 직접 구하려는 실수. 넓이에는 $\alpha^2 - \beta^2$만 필요하며, 이것은 u와 v에서 곧바로 나온다.

STEP 너머

$x^4 + y^4 = u$를 보존하는 반사와 회전들은 정사각형의 대칭군, 즉 위수 8인 이면체군(dihedral group)을 이룬다. 쌍곡선은 그중 위수 4인 부분군(subgroup)(두 반사, 반바퀴 회전, 항등변환)만 보존한다. 교점들은 두 곡선이 공유하는 대칭에 의해 서로 치환되며, 이처럼 군의 작용을 통해 대상을 찾아내는 것은 대학 1학년 군론(group theory)의 주제 가운데 하나이다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 이러한 아이디어를 접하기에 좋은 책이다.

풀이

STEP II 2009, 문제 2

순수수학 • 곡선 그리기와 근사

STEP II 2009, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/09-s2-q2

핵심 아이디어

$a > 1$이므로 함수 a^u는 u에 대하여 순증가(strictly increasing)한다. 따라서 y는 $\sin(\pi e^x)$가 가장 클 때 정확히 가장 크고, 가장 작을 때 정확히 가장 작다. 그러므로 곡선의 모든 성질은 안쪽 함수 πe^x에서 나온다. 이 함수는 꾸준히 증가하면서 사인의 봉우리와 골짜기를 차례로 지나가는데, 그 점들은 x가 커질수록 점점 더 촘촘하게 모인다. 넓이의 경우에는 사다리꼴(trapezium)들의 양 끝 높이가 같으므로, 합이 로그의 차 하나로 줄어든다.

풀이

소문항 (i)

양변에 로그를 취하면 $\ln y = \ln a \, \sin(\pi e^x)$이다. 음함수 미분(implicit differentiation)을 하면

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \pi \ln a \, e^x \cos(\pi e^x), \qquad \text{이므로} \qquad \frac{dy}{dx} = \pi \ln a \, e^x \cos(\pi e^x)\, a^{\sin(\pi e^x)}.$$

여기서 $\ln a > 0$이고($a > 1$이므로) $e^x > 0$, $a^{\sin(\pi e^x)} > 0$이므로, 도함수(derivative)가 영이 되는 것은 정확히 $\cos(\pi e^x) = 0$일 때, 즉 πe^x가 $\frac{\pi}{2}$의 홀수배일 때이다. $\pi e^x > 0$이므로 양의 홀수배만 가능하다.

$$e^x = n + \tfrac{1}{2}, \qquad x = \ln\left(n + \tfrac{1}{2}\right), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

이 점들에서 $\sin(\pi e^x) = \sin\left((n + \frac{1}{2})\pi\right) = (-1)^n$이므로 $y = a^{(-1)^n}$이다. 정류점(stationary point)은 다음과 같다.

$$\left(\ln\left(n + \tfrac{1}{2}\right),\ a\right) \ (n \text{ 짝수}), \qquad \left(\ln\left(n + \tfrac{1}{2}\right),\ \tfrac{1}{a}\right) \ (n \text{ 홀수}).$$

첫 번째 무리는 극대점(maximum)이고 두 번째 무리는 극소점(minimum)이다. a^u가 증가하므로 모든 x에 대하여 $y \le a^1 = a$이고 $y \ge a^{-1}$이다. 따라서 $y = a$인 점은 최댓값(global maximum)을 갖는 점이고, $y = 1/a$인 점은 최솟값(global minimum)을 갖는 점이다. 구체적으로 극대점은 $x = \ln\frac{1}{2}, \ln\frac{5}{2}, \ln\frac{9}{2}, \ldots$에 있고, 극소점은 $x = \ln\frac{3}{2}, \ln\frac{7}{2}, \ln\frac{11}{2}, \ldots$에 있다

소문항 (ii)

x가 작을 때 $e^x \approx 1 + x$이므로

$$\sin(\pi e^x) \approx \sin(\pi + \pi x) = -\sin(\pi x) \approx -\pi x,$$

이다. 여기서 $\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$를 쓰고, 이어서 $t = \pi x$가 작으므로 $\sin t \approx t$를 썼다. 따라서

$$y \approx a^{-\pi x} = e^{-\pi x \ln a} \approx 1 - \pi x \ln a,$$

이다. 마지막 단계에서는 다시 $e^t \approx 1 + t$를 쓰는데, 이번에는 작은 양 $t = -\pi x \ln a$에 대해서이다. 이것이 구하는 근사이다. 즉 곡선은 $x = 0$에서 기울기 $-\pi \ln a$로 직선 $y = 1$을 가로지른다.

> ? **생각해 보기** 왜 $\sin t \approx t$를 $\sin(\pi e^x)$에 바로 넣을 수 없을까?

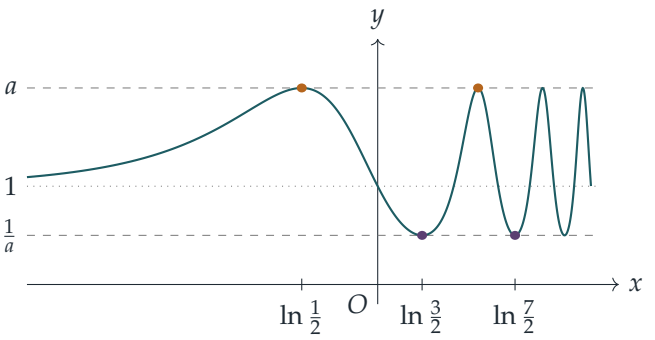
x가 작을 때 πe^x는 0이 아니라 π에 가깝기 때문이다. 먼저 $\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$를 써서 작은 양 πx를 사인의 인수(argument)로 옮겨야 한다.

소문항 (iii)

그래프에 나타낼 몇 가지 특징은 다음과 같다.

- $x \to -\infty$일 때 $e^x \to 0$이므로 $\sin(\pi e^x) \to 0$이고, $y \to 1$이며 위쪽에서 다가간다($x < \ln\frac{1}{2}$이면 $0 < \pi e^x < \frac{\pi}{2}$이므로 사인이 양수이고 $y > 1$이다). 직선 $y = 1$은 왼쪽의 점근선(asymptote)이다.
- 곡선은 $x = \ln\frac{1}{2}$에서 첫 번째 극댓값 a까지 올라간 뒤, a와 $1/a$ 사이에서 끝없이 진동하며 항상 x축 위에 있다.
- 곡선은 e^x가 양의 정수인 곳, 즉 $x = 0, \ln 2, \ln 3, \ldots$에서 $y = 1$을 가로지르며, 소문항 (ii)에 의해 $x = 0$에서의 기울기는 $-\pi \ln a$이다.
- 이웃한 정류점 사이의 간격은 $\ln\frac{n+3/2}{n+1/2} \to 0$이므로, x가 커질수록 진동이 점점 빨라진다.

그림은 $a = 2$인 경우이다.



소문항 (iv)

극대점을 왼쪽부터 세어 보자. k번째 극대점은 $n = 2(k-1)$에 해당하므로 $\mathrm{e}^x = 2k - \frac{3}{2}$인 곳에 있다. $(k+1)$번째 극대점은 $\mathrm{e}^x = 2k + \frac{1}{2}$인 곳에 있고, 그 사이에 있는 유일한 극소점은 $\mathrm{e}^x = 2k - \frac{1}{2}$인 곳에 있다. 다음과 같이 놓자.

$$x_1 = \ln\left(2k - \tfrac{3}{2}\right), \qquad x_2 = \ln\left(2k - \tfrac{1}{2}\right), \qquad x_3 = \ln\left(2k + \tfrac{1}{2}\right).$$

(x_1, a)와 $(x_2, \frac{1}{a})$를, 그리고 $(x_2, \frac{1}{a})$와 (x_3, a)를 선분으로 이으면, x축까지의 영역은 두 개의 사다리꼴로 나뉘고, 각 사다리꼴의 평행한 두 변은 a와 $\frac{1}{a}$이다. 따라서 근사 넓이는

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\left(a + \tfrac{1}{a}\right)(x_2 - x_1) + \tfrac{1}{2}\left(a + \tfrac{1}{a}\right)(x_3 - x_2) &= \frac{a^2+1}{2a}\,(x_3 - x_1) \\ &= \frac{a^2+1}{2a}\,\ln\frac{2k+\frac{1}{2}}{2k-\frac{3}{2}} = \frac{a^2+1}{2a}\,\ln\frac{k+\frac{1}{4}}{k-\frac{3}{4}}.\end{aligned}$$

이다. 마지막으로 $\dfrac{k+\frac{1}{4}}{k-\frac{3}{4}} = 1 + \dfrac{1}{k-\frac{3}{4}}$이므로 넓이는 근사적으로

$$\left(\frac{a^2+1}{2a}\right)\ln\left(1 + \left(k - \tfrac{3}{4}\right)^{-1}\right),$$

이고, 이것이 구하려던 식이다. 극소점의 위치 x_2가 완전히 소거된다는 점에 주목하자. 중요한 것은 두 극대점뿐이다.

검산

- 수치 미분으로 확인하면, $[-6, \ln 8]$에서 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 0$인 곳은 $n = 0, \ldots, 7$에 대한 $x = \ln(n + \frac{1}{2})$뿐이고, $x = 0$에서의 기울기는 $-\pi \ln a$이다($a = 2$일 때 둘 다 -2.1776이다).
- $a = 2, k = 1$일 때 공식은 $\frac{5}{4}\ln 5 \approx 2.012$를 주고, 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 구한 실제 넓이는 1.954이다. 근사로서 충분히 가깝다. 사다리꼴은 넓이를 약간 과대평가하는데, 곡선이 극소점 근처에서 현(chord) 아래로 처지는 정도가 극대점 근처에서 현 위로 부푸는 정도보다 크기 때문이다.

- $k \to \infty$일 때 넓이는 0으로 수렴하며, 이는 점점 좁아지는 진동과 들어맞는다.

흔한 실수

- 소문항 (i)에서 $\frac{\pi}{2}$의 음의 홀수배까지 포함하는 것. πe^x는 항상 양수이다.
- 극대점의 번호를 $k = 1$이 아니라 $k = 0$부터 매기는 것. 그러면 답이 $\ln\left(1 + (k + \frac{1}{4})^{-1}\right)$로 밀린다.
- 소문항 (ii)에서 마지막 선형화(linearisation) $e^t \approx 1 + t$를 하지 않고 $a^{-\pi x}$에서 멈추는 것.

STEP 너머

소문항 (ii)는 더 간단한 전개들을 합성하여 얻은 1차 테일러 전개(Taylor expansion)이며, 이는 대학생들이 합성함수(composite function)의 전개를 다루는 방식 그대로이다. k가 클 때 진동 한 번에 해당하는 실제 넓이는 대략 $(x_3 - x_1)$에 한 주기에 걸친 $a^{\sin\theta}$의 평균을 곱한 값이며, 이 적분은 변형 베셀 함수(modified Bessel function) $I_0(\ln a)$로 이어진다. 이것을 $\frac{1}{2}(a + \frac{1}{a})$와 비교해 보는 것은 이런 곡선에서 사다리꼴 공식(trapezium rule)이 왜 과대평가하는지 이해하는 좋은 연습이 된다. 근사와 테일러 정리를 꼼꼼히 다룬 책으로는 Abbott, *Understanding Analysis*를 보라.

풀이

STEP II 2009, 문제 3

순수수학 • 삼각함수 항등식과 무리수

STEP II 2009, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/09-s2-q3

핵심 아이디어

항등식(identity) $(*)$는 각 x에서 알고 있는 탄젠트(tangent)를 각 $\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x$에서의 탄젠트로 바꾸어 준다. 이 새 각은 원래 각의 대략 절반 크기이다. 따라서 이 항등식은 반각(half-angle)을 만들어 내는 장치 역할을 한다. 핵심은 원하는 각에 정확히 도달하도록 출발 각 x를 고르는 데 있다. 그다음부터는 근호식(surd)을 조심스럽게 계산하는 일, 즉 유리화(rationalising)하고 전개하고 제곱하는 일만 남는다.

풀이

$(*)$의 증명

$\theta = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x$로 두면 $x = \frac{1}{2}\pi - 2\theta$이다. 그러면

$$\sin x = \cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta, \qquad \cos x = \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta.$$

따라서 양변이 모두 정의되는 곳에서(즉 $\cos x \neq 0$일 때)

$$\sec x - \tan x = \frac{1-\sin x}{\cos x} = \frac{2\sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}x\right).$$

$\cos x = 2\sin\theta\cos\theta \neq 0$이면 반드시 $\sin\theta \neq 0$이므로 $\sin\theta$로 약분할 수 있다. 이로써 $(*)$가 증명된다.

소문항 (i)

$\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x = \frac{1}{8}\pi$가 되기를 원하므로 $x = \frac{1}{4}\pi$이다. $\sec\frac{1}{4}\pi = \sqrt{2}$이고 $\tan\frac{1}{4}\pi = 1$이므로

$$\tan\tfrac{1}{8}\pi = \sqrt{2} - 1.$$

두 번째 결과를 얻기 위해 $\frac{11}{24}\pi = \frac{3}{24}\pi + \frac{8}{24}\pi = \frac{1}{8}\pi + \frac{1}{3}\pi$임에 주목하자. 또 $\tan\frac{1}{3}\pi = \sqrt{3}$임을 알고 있다. 덧셈정리(addition formula)에 의해

$$\tan\tfrac{11}{24}\pi = \frac{\tan\frac{1}{8}\pi + \tan\frac{1}{3}\pi}{1 - \tan\frac{1}{8}\pi\tan\frac{1}{3}\pi} = \frac{(\sqrt{2}-1)+\sqrt{3}}{1-(\sqrt{2}-1)\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}-\sqrt{6}+1},$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

소문항 (ii)

항이 세 개인 분모를 유리화하기보다는 다음을 보이는 편이 더 빠르다.

$$(2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})(\sqrt{3}-\sqrt{6}+1) = \sqrt{3}+\sqrt{2}-1.$$

$\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$과 $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$를 이용하여 $\sqrt{3}-\sqrt{6}+1$에 첫 번째 괄호의 각 항을 차례로 곱하면

$$\begin{aligned}
2(\sqrt{3}-\sqrt{6}+1) &= 2\sqrt{3}-2\sqrt{6}+2,\\
\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{6}+1) &= \sqrt{6}-2\sqrt{3}+\sqrt{2},\\
\sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{6}+1) &= 3-3\sqrt{2}+\sqrt{3},\\
\sqrt{6}(\sqrt{3}-\sqrt{6}+1) &= 3\sqrt{2}-6+\sqrt{6}.
\end{aligned}$$

이제 같은 종류의 항끼리 모은다. 상수항은 $2+3-6=-1$이다. $\sqrt{2}$항은 $1-3+3=1$이다. $\sqrt{3}$항은 $2-2+1=1$이다. $\sqrt{6}$항은 $-2+1+1=0$이다. 합은 $\sqrt{3}+\sqrt{2}-1$이다. 분모 $\sqrt{3}-\sqrt{6}+1 \approx 0.28$은 0이 아니므로 이것으로 나눌 수 있고,

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}-\sqrt{6}+1} = 2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}.$$

생각해 보기 마지막 소문항에서는 $(*)$에 어떤 x 값을 넣어야 할까?

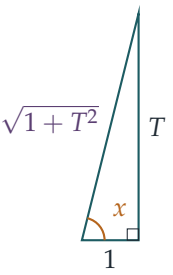
$\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x = \frac{1}{48}\pi$가 되어야 하므로 $\frac{1}{2}x = \frac{11}{48}\pi$이고 $x = \frac{11}{24}\pi$이다. 이것은 바로 (i)과 (ii)에서 탄젠트 값을 구한 각이다.

소문항 (iii)

$T = \tan\frac{11}{24}\pi = 2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$이라 하자. $x = \frac{11}{24}\pi$로 두고 $(*)$를 적용하면

$$\tan\tfrac{1}{48}\pi = \sec\tfrac{11}{24}\pi - T.$$

시컨트(secant)에 대해서는 $\sec^2 x = 1+\tan^2 x$이다. $0 < \frac{11}{24}\pi < \frac{1}{2}\pi$이므로 코사인 값이 양수이고, 따라서 양의 제곱근을 택하여 $\sec\frac{11}{24}\pi = \sqrt{1+T^2}$이다. 아래 삼각형도 같은 사실을 보여 준다.



T를 제곱하면 네 항 각각의 제곱의 합은 $4+2+3+6=15$이다. 교차항(cross terms)의 합은

$$2\left(2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}+\sqrt{6}+\sqrt{12}+\sqrt{18}\right)=2\left(5\sqrt{2}+4\sqrt{3}+3\sqrt{6}\right)=10\sqrt{2}+8\sqrt{3}+6\sqrt{6}.$$

따라서 $1+T^2=16+10\sqrt{2}+8\sqrt{3}+6\sqrt{6}$이고, 그러므로

$$\tan\tfrac{1}{48}\pi=\sqrt{16+10\sqrt{2}+8\sqrt{3}+6\sqrt{6}}-2-\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6},$$

이 되어 요구하는 결과를 얻는다.

검산

- $\sqrt{2}-1\approx 0.41421$이고, 이는 $\tan 22.5^\circ$와 일치한다.
- $2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}\approx 7.59575$이고, 이는 $\tan 82.5^\circ$와 일치한다. (i)의 분수도 같은 값을 준다.
- 최종 식은 $\sqrt{57.45\ldots}-7.59575\approx 0.0655435$이고, 이는 $\tan 3.75^\circ\approx 0.0655435$와 일치한다.
- $(*)$의 간단한 확인: $x=0$에서 양변은 모두 1이고, $x=\frac{1}{3}\pi$에서 양변은 모두 $2-\sqrt{3}=\tan\frac{1}{12}\pi$이다.

흔한 실수

- $\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}x=\frac{1}{48}\pi$를 잘못 풀어 $x=\frac{11}{48}\pi$를 사용하는 것. $\frac{1}{2}$을 되돌려 주어야 한다.
- 항이 네 개인 근호식을 제곱할 때 교차항을 빠뜨리는 것. 교차항은 여섯 개이고, 각각 두 배가 된다.
- 양의 제곱근이 왜 옳은지 설명하지 않고 $\sec x=\sqrt{1+\tan^2 x}$로 두는 것.

STEP 너머

이처럼 각을 거듭 반으로 나누는 방법으로 $\tan\frac{\pi}{48}$과 같은 정확한 값을, 중첩된 제곱근까지 포함하여 쌓아 올릴 수 있다. 이것은 어떤 정다각형(regular polygon)을 자와 컴퍼스로 작도할 수 있는가라는 고전적인 질문의 대수적 측면이다. 가우스(Gauss)는 그 답이 $\cos\frac{2\pi}{n}$을 제곱근만으로 나타낼 수 있는지에 달려 있음을 보였고, 갈루아 이론(Galois theory)은 그 이유를 설명해 준다. 이 이야기의 언어인 체(field)와 체의 확대(field extension)를 처음 접해 보려면 Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)를 읽어 보자.

풀이

STEP II 2009, 문제 4

순수수학 • 다항식의 나누어떨어짐

STEP II 2009, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/09-s2-q4

핵심 아이디어

$(x-1)^5$로 나누어떨어진다는 조건은 식으로 직접 써 두는 것이 가장 다루기 쉽다. 즉 어떤 다항식(polynomial) q에 대하여 $\mathrm{p}(x) = 1 + (x-1)^5\mathrm{q}(x)$ 로 쓴다. 이를 미분하면 $\mathrm{p}(x) - 1$의 중복된 인수가 차수가 하나 낮아진 채로 $\mathrm{p}'(x)$에 남아 있음을 알 수 있다. 마지막 소문항에서는 이 사실 덕분에 p'이 거의 완전히 결정되므로, 미지의 계수 열 개와 씨름하는 대신 p'을 적분하여 p를 구한다.

풀이

$\mathrm{p}(x) - 1$은 $(x-1)^5$로 나누어떨어지고 차수(degree)가 9이므로, 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathrm{p}(x) = 1 + (x-1)^5\,\mathrm{q}(x),$$

여기서 q는 차수가 4인 다항식이다.

소문항 (i)

$x = 1$을 대입하면 둘째 항이 사라지므로

$$\mathrm{p}(1) = 1.$$

소문항 (ii)

곱의 미분법(product rule)으로 미분하면

$$\begin{aligned}\mathrm{p}'(x) &= 5(x-1)^4\,\mathrm{q}(x) + (x-1)^5\,\mathrm{q}'(x)\\ &= (x-1)^4\big(5\mathrm{q}(x) + (x-1)\mathrm{q}'(x)\big).\end{aligned}$$

괄호 안은 다항식이므로, 요구한 대로 $\mathrm{p}'(x)$는 $(x-1)^4$로 나누어떨어진다.

소문항 (iii)

$x-1$ 대신 $x+1$을 써서 똑같은 논증을 적용할 수 있다. $\mathrm{p}(x) = -1 + (x+1)^5\,\mathrm{r}(x)$로 쓰면 $\mathrm{p}(-1) = -1$을 얻고, $\mathrm{p}'(x)$가 $(x+1)^4$로 나누어떨어짐을 알 수 있다.

따라서 $\mathrm{p}'(x)$는 $(x-1)^4$와 $(x+1)^4$ 모두로 나누어떨어진다.

> **생각해 보기** 왜 이로부터 $\mathrm{p}'(x)$가 곱 $(x-1)^4(x+1)^4$로 나누어떨어진다고 할 수 있을까?

$\mathrm{p}'(x) = (x-1)^4\mathrm{s}(x)$로 쓰자. $(x+1)^4$의 근(root)은 모두 -1이고, 이는 $(x-1)^4$의 근이 아니므로 인수 $(x+1)^4$는 $\mathrm{s}(x)$를 나누어야 한다. (같은 말이지만, 일차 인수 $x+1$은 p'에 네 번 나타나고, 그중 어느 것도 $(x-1)^4$에 흡수될 수 없다.) 따라서 $(x-1)^4(x+1)^4 = (x^2-1)^4$은 $\mathrm{p}'(x)$를 나눈다.

이제 p'의 차수는 8로 $(x^2-1)^4$의 차수와 같으므로, 몫은 0이 아닌 상수이다.

$$\mathrm{p}'(x) = k(x^2-1)^4 = k\left(x^8 - 4x^6 + 6x^4 - 4x^2 + 1\right).$$

적분하면

$$\mathrm{p}(x) = k\,\mathrm{F}(x) + c, \qquad \mathrm{F}(x) = \frac{x^9}{9} - \frac{4x^7}{7} + \frac{6x^5}{5} - \frac{4x^3}{3} + x.$$

F는 기함수(odd function)이므로 $\mathrm{F}(-1) = -\mathrm{F}(1)$임에 주목하자. 알고 있는 두 값으로부터

$$k\mathrm{F}(1) + c = \mathrm{p}(1) = 1, \qquad -k\mathrm{F}(1) + c = \mathrm{p}(-1) = -1.$$

두 식을 더하면 $c = 0$이고, 빼면 $k\mathrm{F}(1) = 1$이다. 공통분모 315로 통분하면

$$\mathrm{F}(1) = \frac{35 - 180 + 378 - 420 + 315}{315} = \frac{128}{315}, \qquad \text{따라서} \qquad k = \frac{315}{128}.$$

그러므로

$$\mathrm{p}(x) = \frac{1}{128}\left(35x^9 - 180x^7 + 378x^5 - 420x^3 + 315x\right).$$

지금까지는 조건을 만족하는 p라면 반드시 이 꼴이어야 함을 보였을 뿐이므로, 이 다항식이 실제로 조건을 만족하는지도 확인해야 한다. 이 다항식의 차수는 9이다. 또한 $\mathrm{p}(1) - 1 = 0$이고 $\mathrm{p}'(x) = \frac{315}{128}(x-1)^4(x+1)^4$이므로, $\mathrm{p}(x) - 1$의 처음 네 도함수(derivative)는 모두 $x = 1$에서 0이 된다. 따라서 $x = 1$은 $\mathrm{p}(x) - 1$의 중복도(multiplicity)가 적어도 5인 근이고, 즉 $(x-1)^5$는 $\mathrm{p}(x) - 1$을 나눈다. p는 기함수이므로 $\mathrm{p}(x) + 1 = -\big(\mathrm{p}(-x) - 1\big)$이고, 이는 $(-x-1)^5 = -(x+1)^5$로 나누어떨어진다. 따라서 두 조건이 모두 성립하며, 이 p가 유일한 답이다.

검산

- 계수 $35, -180, 378, -420, 315$의 합은 128이므로 $\mathrm{p}(1) = 1$이 확인된다.
- $\mathrm{p}(x) - 1$을 정확한 분수 계산으로 $x - 1$로 거듭 나누면 나머지가 정확히 다섯 번 영이 되고, $\mathrm{p}(x) + 1$을 $x + 1$로 나누어도 마찬가지이다.
- p는 당연히 기함수이다. p가 조건을 만족하면 $-\mathrm{p}(-x)$도 조건을 만족하는데, 답은 유일하기 때문이다.

흔한 실수

- 열 개의 연립방정식으로부터 p의 계수 열 개를 모두 직접 구하려는 것. 원리적으로는 가능하지만, p′을 적분하는 편이 훨씬 빠르다.
- 적분상수를 빠뜨리거나, 적분상수와 k를 정할 때 $\mathrm{p}(1) = 1$과 $\mathrm{p}(-1) = -1$을 모두 쓰지 않는 것.

STEP 너머

소문항 (ii)의 배경에 있는 사실은, a가 f의 m중근일 필요충분조건이 $\mathrm{f}(a) = \mathrm{f}'(a) = \cdots = \mathrm{f}^{(m-1)}(a) = 0$이라는 것이다. 이처럼 여러 점에서 함숫값과 도함숫값을 지정하는 것을 **에르미트 보간법**(*Hermite interpolation*)이라 하며, 여기서 구한 다항식은 "스무스스텝(smoothstep)" 곡선으로, 양 끝에서 가능한 한 평평하게 -1에서 1까지 올라가며 컴퓨터 그래픽스에서 쓰인다. 서로소인 인수들이 곱을 나눈다는 논증은 환론(ring theory)의 한 부분이다. 체(field) 위의 다항식은 정수와 마찬가지로 유일 인수분해(unique factorisation)를 가진다. 더 알고 싶다면 Allenby, *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)를 참고하라.

풀이

STEP II 2009, 문제 5

순수수학 • 중첩 제곱근

> **STEP II 2009, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/09-s2-q5

핵심 아이디어

처음의 전개가 사실상 문제 전체이다. 이 전개는 $x+2\sqrt{x-1}$이 완전제곱식(perfect square)임을 알려 주고, 같은 방법으로 $x-2\sqrt{x-1}$도 완전제곱식임을 보일 수 있다. 겹친 근호를 풀어내고 나면 모든 피적분함수(integrand)가 기본적인 꼴로 간단해진다. 한 가지 주의할 점은 $\sqrt{a^2}=|a|$이지 a가 아니라는 것이다. 따라서 부호를 계속 추적해야 하며, 바로 이 점이 소문항 (ii)를 흥미롭게 만든다.

풀이

전개

$x\geq 1$일 때,

$$(\sqrt{x-1}+1)^2=(x-1)+2\sqrt{x-1}+1=x+2\sqrt{x-1}.$$

같은 방법으로 $(\sqrt{x-1}-1)^2=x-2\sqrt{x-1}$이다. 음이 아닌 제곱근을 취하고 $\sqrt{a^2}=|a|$임을 기억하면,

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1}+1,\qquad \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\left|\sqrt{x-1}-1\right|.$$

첫 번째 식은 $\sqrt{x-1}+1>0$이므로 절댓값(modulus)이 필요 없다. 두 번째 식은 절댓값이 필요하다. $\sqrt{x-1}-1$은 $1\leq x<2$에서 음수이고 $x\geq 2$에서 음이 아니기 때문이다.

소문항 (i)

$[5,10]$에서 $\sqrt{x-1}\geq 2>1$이므로 $\left|\sqrt{x-1}-1\right|=\sqrt{x-1}-1$이다. 따라서 분자는

$$(\sqrt{x-1}+1)+(\sqrt{x-1}-1)=2\sqrt{x-1},$$

이고, 피적분함수는 단순히 2이다. 그러므로

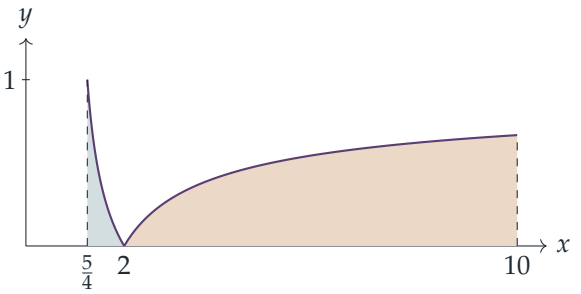
$$\int_5^{10} \frac{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x = \int_5^{10} 2\,\mathrm{d}x = 10.$$

소문항 (ii)

위의 전개에 의해

$$y = \frac{\left|\sqrt{x-1}-1\right|}{\sqrt{x-1}} = \left|1-\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right|.$$

따라서 전 구간에서 $y \geq 0$이고, 곡선은 $\sqrt{x-1}=1$이 되는 $x=2$에서 x축에 접한다.



생각해 보기 왜 그냥 근호를 없애고 전체 구간에서 $1-\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$을 적분하면 안 되는가?

$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$은 결코 음수가 아니지만, $\sqrt{x-1}-1$은 $x<2$에서 음수이기 때문이다. 절댓값을 무시하면 $[\frac{5}{4},2]$ 위의 부분을 음의 넓이로 계산하게 된다. 그래서 $x=2$에서 구간을 나눈다.

$[\frac{5}{4},2]$에서는 $\sqrt{x-1}\leq 1$이므로 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}-1$이고,

$$\int_{5/4}^{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}-1\right)\mathrm{d}x = \left[2\sqrt{x-1}-x\right]_{5/4}^{2} = (2-2)-\left(1-\tfrac{5}{4}\right) = \tfrac{1}{4}.$$

$[2,10]$에서는 $\sqrt{x-1}\geq 1$이므로 $y=1-\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$이고,

$$\int_2^{10}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)\mathrm{d}x = \left[x-2\sqrt{x-1}\right]_2^{10} = (10-6)-(2-2) = 4.$$

따라서 전체 넓이는 $\frac{1}{4}+4=\frac{17}{4}$이다.

소문항 (iii)

분자의 두 번째 근호는 모양이 다르지만, $x-1$ 대신 $x+1$을 쓰면 같은 방법이 통한다.

$$\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2 = (x+1) - 2\sqrt{x+1} + 1 = x - 2\sqrt{x+1} + 2.$$

$x \geq \frac{5}{4}$이면 $\sqrt{x+1} > 1$이므로 $\sqrt{x-2\sqrt{x+1}+2} = \sqrt{x+1}-1$이고, 절댓값이 필요 없다. $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{x-1}\,\sqrt{x+1}$로 쓰면($x>1$에서 두 인수가 모두 양수이므로 성립한다), 피적분함수는

$$\frac{(\sqrt{x-1}+1)+(\sqrt{x+1}-1)}{\sqrt{x-1}\,\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}\,\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}.$$

가 된다. 두 ± 1 항이 상쇄되는데, 이것이 분자가 다소 이상해 보이는 이유이다. 그러므로

$$\begin{aligned}\int_{5/4}^{10}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)\mathrm{d}x &= \left[2\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x-1}\right]_{5/4}^{10} \\ &= \left(2\sqrt{11}+6\right) - \left(3+1\right) \\ &= 2\sqrt{11}+2,\end{aligned}$$

이다. 여기서 아래끝에서는 $\sqrt{9/4} = \frac{3}{2}$와 $\sqrt{1/4} = \frac{1}{2}$를 이용하였다.

검산

- $x=5$에서 $\sqrt{5+4}=3$, $\sqrt{5-4}=1$이므로 (i)의 피적분함수는 $(3+1)/2 = 2$이고, 주장한 대로이다.
- (ii)에서 $x=\frac{5}{4}$일 때 곡선의 높이는 $|1-2|=1$이고 $x=10$일 때 높이는 $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$이므로 그림과 일치한다. 첫 번째 부분은 넓이가 $\frac{1}{4}$인 가느다란 조각으로, 그럴듯하다.
- 원래의 피적분함수에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면 10.000, 4.250, 8.6332를 얻으며, 이는 10, $\frac{17}{4}$, $2\sqrt{11}+2 \approx 8.6332$와 일치한다.

흔한 실수

- 모든 x에 대해 $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1}-1$이라고 쓰는 것. 그러면 (ii)에서 $\frac{17}{4}$ 대신 $4-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$를 얻게 된다.
- (iii)에서 $x-2\sqrt{x+1}+2$도 완전제곱식임을 알아차리지 못하고 대신 치환을 시도하는 것.

STEP 너머

항등식 $\sqrt{a^2} = |a|$은 해석학(analysis)의 큰 주제를 보여 주는 작은 예이다. 식으로 정의된 함수는 꺾인 점이나 부호의 변화를 숨기고 있을 수 있으므로, 적분하기 전에 식의 부호가 어디에서 바뀌는지 살펴보아야 한다. 또한 $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}$과 같은 이중근호를 푸는 일(denesting radicals)에는 놀라울 만큼 깊은 대수적 이론이 있으며, 이는 체의 확대(field extensions)와 연결된다. 해석학 쪽으로는 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)가 좋은 다음 단계이다.

풀이

STEP II 2009, 문제 6

순수수학 • 무한급수의 상계와 하계

STEP II 2009, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/09-s2-q6

핵심 아이디어

$\sum 1/F_i$의 값을 정확히 구할 수는 없지만, 그 값을 범위 안에 가둘 수는 있다. 점화식(recurrence)에서 두 가지 간단한 비교를 얻는다. 각 피보나치 수(Fibonacci number)는 바로 앞 항의 두 배보다 작고, 두 칸 앞 항의 두 배보다 크다. 첫 번째 비교로 급수의 꼬리(tail)를 등비급수(geometric series)로 아래에서 누를 수 있다. 두 번째 비교는 꼬리를 자기 자신을 평행이동한 것과 연결해 주며, 이로써 위에서 누를 수 있다. 어느 쪽 부등식을 쓰기 전에 앞의 몇 항을 정확히 더해 두면 원하는 만큼 추정을 정밀하게 할 수 있다.

풀이

연속한 두 항을 차례로 더하면

$$F_3 = 2, \quad F_4 = 3, \quad F_5 = 5, \quad F_6 = 8, \quad F_7 = 13, \quad F_8 = 21, \quad F_9 = 34, \quad F_{10} = 55.$$

을 얻는다. 모든 F_n은 양수이고 $n \geq 2$일 때 $F_{n+1} = F_n + F_{n-1} > F_n$이므로, 이 수열은 F_2부터 순증가(strictly increasing)한다.

급수는 수렴한다. $i \geq 4$이면 $i-2 \geq 2$일 때 $F_{i-1} > F_{i-2}$이므로 $F_i = F_{i-1} + F_{i-2} > 2F_{i-2}$이다. $F_1 = 1 \geq 2^{-1/2}$, $F_2 = 1 \geq 2^0$이고 $F_3 = 2 \geq 2^{1/2}$이므로, 두 칸씩 나아가는 수학적 귀납법(induction)으로 모든 i에 대해 $F_i \geq 2^{(i-2)/2}$를 얻는다. 따라서 $0 < 1/F_i \leq (1/\sqrt{2})^{i-2}$이고, 공비가 $1/\sqrt{2} < 1$인 등비급수와 비교하면 S는 수렴(converge)한다. 덕분에 아래에서 합을 자유롭게 다룰 수 있다. 또 다음 사실을 여러 번 사용한다. 모든 i에 대해 $a_i \leq b_i$이고 적어도 하나의 i에 대해 $a_i < b_i$이면, 수렴하는 급수에 대해 $\sum a_i < \sum b_i$이다.

소문항 (i)

하한. $i \geq 4$이면 $F_{i-2} < F_{i-1}$이므로

$$F_i = F_{i-1} + F_{i-2} < 2F_{i-1} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{F_i} > \frac{1}{2F_{i-1}} \qquad (i \geq 4),$$

이고, 이것이 첫 번째 결과이다. ($i = 3$에서는 $F_3 = 2F_2$로 등호가 성립하며, 그래서 부등식이 $i = 4$부터 시작한다.)

이를 반복해서 적용하면 $i \geq 4$일 때

$$\frac{1}{F_i} > \frac{1}{2F_{i-1}} > \frac{1}{2^2F_{i-2}} > \cdots > \frac{1}{2^{i-3}F_3} = \frac{1}{2^{i-2}}.$$

이다. $i \geq 4$에 대해 더하면

$$\sum_{i=4}^{\infty} \frac{1}{F_i} > \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{1}{2},$$

이므로

$$S = 1 + 1 + \tfrac{1}{2} + \sum_{i=4}^{\infty} \frac{1}{F_i} > \tfrac{5}{2} + \tfrac{1}{2} = 3.$$

이다.

상한. 이제 다른 비교를 쓴다. 앞에서 얻은 $F_i > 2F_{i-2}$로부터 $i \geq 4$일 때 $1/F_i < 1/(2F_{i-2})$이다. 이를 $i = 5$부터의 모든 항에 적용하고 $j = i - 2$로 놓으면

$$\sum_{i=5}^{\infty} \frac{1}{F_i} < \frac{1}{2} \sum_{i=5}^{\infty} \frac{1}{F_{i-2}} = \frac{1}{2} \sum_{j=3}^{\infty} \frac{1}{F_j} = \frac{1}{2}(S - 2).$$

이다. 좌변은 S에서 처음 네 항 $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{17}{6}$을 뺀 것이다. 그러므로

$$S - \tfrac{17}{6} < \tfrac{1}{2}S - 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \tfrac{1}{2}S < \tfrac{11}{6} \qquad \Longrightarrow \qquad S < \tfrac{11}{3} = 3\tfrac{2}{3}.$$

이다.

? **생각해 보기** 상한을 위한 비교를 왜 $i = 4$가 아니라 $i = 5$부터 시작할까?

$i = 4$부터 시작해도 되지만, 그러면 $S - \frac{5}{2} < \frac{1}{2}(S - 1)$, 즉 $S < 4$를 얻어 충분하지 않다. 추정하기 전에 정확히 더해 두는 항이 많을수록 인수 $\frac{1}{2}$로 인한 손실이 줄어든다. 이 생각이 소문항 (ii)를 이끈다.

소문항 (ii)

부분합(partial sum)을 $S_k = \sum_{i=1}^{k} 1/F_i$, 꼬리를 $T_k = \sum_{i=k}^{\infty} 1/F_i$로 쓰면 $S = S_{k-1} + T_k$이다. 소문항 (i)에서는 두 가지 일반적인 부등식을 썼으며, 둘 다 $k \geq 3$에서 성립한다.

하한: 앞에서와 똑같이 $i > k$이면 $1/F_i > 1/(2^{i-k}F_k)$이므로

$$T_{k+1} > \frac{1}{F_k}\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \cdots\right) = \frac{1}{F_k}, \qquad \text{따라서} \qquad S > S_k + \frac{1}{F_k}.$$

이다.

상한: $i \geq k+2 \geq 5$일 때 $1/F_i < 1/(2F_{i-2})$이므로 $T_{k+2} < \frac{1}{2}T_k$이고, $T_{k+2} = T_k - \frac{1}{F_k} - \frac{1}{F_{k+1}}$이므로

$$T_k < 2\left(\frac{1}{F_k} + \frac{1}{F_{k+1}}\right), \qquad \text{따라서} \qquad S < S_{k-1} + 2\left(\frac{1}{F_k} + \frac{1}{F_{k+1}}\right).$$

이다. $k = 3$이면 이것이 소문항 (i)의 경계 3과 $3\frac{2}{3}$이다. 이제 두 부등식 모두에서 $k = 5$로 놓는다.

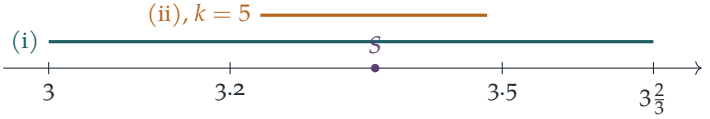
하한의 경우 $S_5 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{91}{30}$이므로

$$S > \frac{91}{30} + \frac{1}{5} = \frac{97}{30} > \frac{96}{30} = 3.2.$$

이다. 상한의 경우 $S_4 = \frac{17}{6}$이고 $F_5 = 5$, $F_6 = 8$이므로

$$S < \frac{17}{6} + 2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{8}\right) = \frac{17}{6} + \frac{13}{20} = \frac{170 + 39}{60} = \frac{209}{60} < \frac{210}{60} = 3.5.$$

이다. 두 결과를 합치면 요구한 대로 $3.2 < S < 3.5$를 얻는다. ($k = 4$로는 부족하다. 그러면 $\frac{19}{6} < S < \frac{107}{30}$, 즉 대략 $3.17 < S < 3.57$밖에 얻지 못한다.)



검산

- 처음 200개 항을 수치적으로 더하면 $S \approx 3.35989$이다. 이 값은 두 구간 안에 모두 들어 있으며, $k = 3, \ldots, 6$에 대한 경계도 모두 이 값을 감싼다: $3 < \frac{19}{6} < \frac{97}{30} < \frac{197}{60} < S < \frac{2681}{780} < \frac{209}{60} < \frac{107}{30} < \frac{11}{3}$.
- 실제 값으로 비교를 확인해 보자: $F_7 = 13 < 2 \times 8$이고 $13 > 2 \times 5$이다.

흔한 실수

- 등호가 성립하는 $i = 3$에서 $1/F_i > 1/(2F_{i-1})$을 쓰는 것. 그러면 엄격한 부등호가 깨지거나 잘못된 등비급수의 합이 나온다.

- 급수가 수렴한다는 것을 먼저 알지 못한 채 S를 수처럼 다루는 것("$S - \frac{17}{6} < \frac{1}{2}S - 1$").
- $i = 4$부터 시작한 비교로는 $S < 4$밖에 얻지 못한다고 상한을 포기하는 것. 추정하기 전에 더 많은 항을 정확히 더하라.

STEP 너머

이 값 $S \approx 3.3598856\ldots$를 **피보나치 역수 상수**(reciprocal Fibonacci constant)라 한다. 이 수는 무리수(irrational)임이 알려져 있지만(André-Jeannin의 1989년 결과), 닫힌 꼴(closed form)은 알려져 있지 않다. 여기서 쓴 비교는 사실 비판정법(ratio test)이 모습을 바꾼 것이다. F_{i+1}/F_i는 황금비(golden ratio) $\varphi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$로 수렴하므로, 꼬리는 공비가 $1/\varphi \approx 0.618$인 등비급수처럼 행동하며, 이 값은 우리가 쓴 거친 비율 $\frac{1}{2}$과 $1/\sqrt{2}$ 사이에 있다. 이와 같은 비교판정법(comparison test)과 꼬리 추정은 대학 첫 해석학(analysis) 강의의 핵심이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 이를 제대로 만나기에 훌륭한 책이다.

풀이

STEP II 2009, 문제 7

순수수학 • 꼴을 알아보는 적분

> **STEP II 2009, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/09-s2-q7

핵심 아이디어

이런 적분은 피적분함수가 어떤 함수의 도함수와 **정확히** 같다는 사실을 알아차리기 전까지는 손댈 수 없어 보인다. 첫 번째 결과는 $(x-a)^n \mathrm{e}^{bx}\sqrt{1+x^2}$의 도함수(derivative)가 어떤 모양인지 알려 준다. 즉 $(x-a)$의 거듭제곱, 지수함수, 삼차식을 곱한 것을 $\sqrt{1+x^2}$로 나눈 꼴이다. 따라서 각 적분은 사실상 짝 맞추기 문제이다. n, a, b를 읽어 내고 삼차식이 일치하는지 확인하면 된다. 분자의 다항식이 삼차식이 아니라 사차식일 때는 늘어난 차수가 어디에서 오는지 알아내야 한다.

풀이

도함수

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{1+x^2} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$임을 이용하여 세 인수의 곱을 미분한다.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= n(x-a)^{n-1}\mathrm{e}^{bx}\sqrt{1+x^2} + b(x-a)^n\mathrm{e}^{bx}\sqrt{1+x^2} + (x-a)^n\mathrm{e}^{bx}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{(x-a)^{n-1}\mathrm{e}^{bx}}{\sqrt{1+x^2}}\Big[\,n(1+x^2) + b(x-a)(1+x^2) + x(x-a)\,\Big],\end{aligned}$$

여기서 공통인수 $(x-a)^{n-1}\mathrm{e}^{bx}/\sqrt{1+x^2}$를 묶어 냈다(앞의 두 항은 분자와 분모에 $\sqrt{1+x^2}$를 곱해 공통분모로 맞추었다). 괄호를 전개하면

$$q(x) = bx^3 + (n+1-ab)x^2 + (b-a)x + (n-ab).$$

$b \neq 0$이므로 x^3의 계수가 0이 아니고, 따라서 q는 실제로 삼차식이다. 이것이 구하려던 결과이다. 이 결과를 다음 꼴로 사용한다.

$$\int \frac{(x-a)^{n-1}\mathrm{e}^{bx}\,q(x)}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = (x-a)^n\mathrm{e}^{bx}\sqrt{1+x^2} + C. \qquad (*)$$

소문항 (i)

인수를 맞춰 보면 $a = 4$, $b = 4$, $n - 1 = 14$, 즉 $n = 15$이어야 한다. 이 값들을 대입하면

$$q(x) = 4x^3 + (16-16)x^2 + (4-4)x + (15-16) = 4x^3 - 1,$$

이고, 이는 피적분함수에 있는 삼차식과 정확히 같다. 따라서 $(*)$에 의해

$$\int \frac{(x-4)^{14}\mathrm{e}^{4x}(4x^3-1)}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = (x-4)^{15}\mathrm{e}^{4x}\sqrt{1+x^2} + C.$$

소문항 (ii)

이번에는 다항식이 사차식이므로 그대로 q가 될 수는 없다.

? 생각해 보기 삼차식만 만들어 내는 공식에 사차식을 어떻게 맞출 수 있을까?

$(*)$에서 $(x-a)$의 지수는 우리가 정할 수 있다. 사차식이 인수 $(x-1)$을 가진다면 이를 옮겨 $(x-1)^{21}$에 합치고 삼차식만 남길 수 있다. $x = 1$을 대입해 보면 $12 - 1 - 11 = 0$이므로 $(x-1)$은 실제로 인수이고, 나누면

$$12x^4 - x^2 - 11 = (x-1)(12x^3 + 12x^2 + 11x + 11).$$

(이를 $(x^2-1)(12x^2+11)$로 알아볼 수도 있다.) 따라서 피적분함수는

$$\frac{(x-1)^{22}\mathrm{e}^{12x}(12x^3+12x^2+11x+11)}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$a = 1$, $b = 12$, $n = 23$으로 두면

$$q(x) = 12x^3 + (24-12)x^2 + (12-1)x + (23-12) = 12x^3 + 12x^2 + 11x + 11,$$

이 되어 일치한다. 그러므로

$$\int \frac{(x-1)^{21}\mathrm{e}^{12x}(12x^4-x^2-11)}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = (x-1)^{23}\mathrm{e}^{12x}\sqrt{1+x^2} + C.$$

소문항 (iii)

이번에도 다항식은 사차식이지만, $x = 2$를 대입하면 $64 + 8 - 2 = 70 \neq 0$이므로 $(x-2)$는 인수가 아니고 (ii)의 기법은 통하지 않는다.

? 생각해 보기 $(x-2)$가 인수가 아니라면, 늘어난 차수는 어디에서 오는 것일까?

차수를 세어 보자. 피적분함수의 분자는 차수가 $6+4=10$이지만, $(x-2)^6$에 대해 $(*)$를 쓰면 차수가 $6+3=9$밖에 되지 않는다. 답에 인수 x가 하나 더 있으면 차수가 하나 올라가므로, $a=2$, $b=4$, $n=7$에 해당하는 함수 y에 대하여 xy를 미분해 본다.

$$y=(x-2)^7\mathrm{e}^{4x}\sqrt{1+x^2}, \qquad q(x)=4x^3+(8-8)x^2+(4-2)x+(7-8)=4x^3+2x-1.$$

곱의 미분법(product rule)에 의해 $(xy)'=y+xy'$이다. y도 분모가 $\sqrt{1+x^2}$가 되도록 바꾸어 쓰면

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xy)&=\frac{(x-2)^7\mathrm{e}^{4x}(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{x(x-2)^6\mathrm{e}^{4x}(4x^3+2x-1)}{\sqrt{1+x^2}}\\&=\frac{(x-2)^6\mathrm{e}^{4x}}{\sqrt{1+x^2}}\Big[(x-2)(1+x^2)+4x^4+2x^2-x\Big].\end{aligned}$$

$(x-2)(1+x^2)=x^3-2x^2+x-2$이므로 괄호 안은

$$x^3-2x^2+x-2+4x^4+2x^2-x=4x^4+x^3-2,$$

로, 정확히 원하는 사차식이다. 그러므로

$$\int\frac{(x-2)^6\mathrm{e}^{4x}(4x^4+x^3-2)}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x=x(x-2)^7\mathrm{e}^{4x}\sqrt{1+x^2}+C.$$

검산

- 각 답을 미분하여 비교한다. 이것이 결정적인 검산이며, 어느 경우든 다시 $(*)$를 쓰는 것일 뿐이다((iii)에서는 곱의 미분법도 함께 쓴다).
- 간단한 차수 세기: (제곱근과 지수함수를 무시하고) 다항식 부분의 차수가 d인 답을 미분하면 분자의 차수는 $d+2$가 된다. (i)에서는 $15+2=14+3$, (ii)에서는 $23+2=21+4$, (iii)에서는 $8+2=6+4$이다.
- 수치적으로, (iii)의 적분을 구간 $[-1,\,1.2]$에서 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 $-104.41424\ldots$가 나오며, 이는 $F(x)=x(x-2)^7\mathrm{e}^{4x}\sqrt{1+x^2}$에 대한 $F(1.2)-F(-1)$과 유효숫자 약 13자리까지 일치한다. (i)과 (ii)도 마찬가지로 잘 일치한다.

흔한 실수

- n이 피적분함수에 있는 지수보다 1 크다는 것을 잊는 실수. (i)의 답에는 $(x-4)^{14}$가 아니라 $(x-4)^{15}$가 들어간다.

- (ii)에서 인수 $(x-1)$을 먼저 흡수하지 않고 사차식을 그대로 맞추려다가 해가 없다고 결론 내리는 실수.
- 적분상수(constant of integration)를 빠뜨리는 실수.

STEP 너머

여기서 쓴 방법은 "알아보기에 의한 적분(integration by recognition)"이다. 부정적분(antiderivative)의 모양을 추측하고, 그것을 미분한 뒤 계수를 맞춘다. 이를 알고리즘으로 만든 것이 리시 알고리즘(Risch algorithm)으로, 컴퓨터 대수 시스템은 이 알고리즘을 이용해 어떤 초등함수가 초등함수인 부정적분을 가지는지 판정하고, 가진다면 그것을 구한다. 이와 관련된 아이디어, 즉 미지의 계수를 가진 특정한 꼴의 해를 추측하는 방법은 선형 미분방정식(linear differential equation)의 미정계수법(method of undetermined coefficients)이며, Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에서 다룬다. STEP 스타일의 적분 문제를 더 보고 싶다면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제)를 참고하라.

풀이

STEP II 2009, 문제 8

순수수학 • 벡터 기하

STEP II 2009, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/09-s2-q8

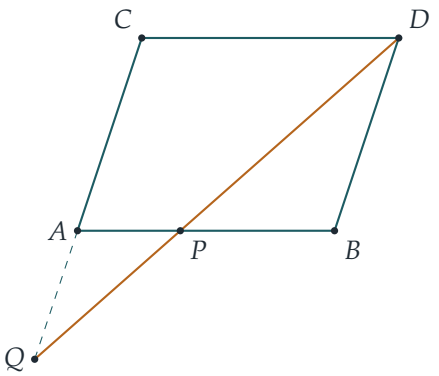
핵심 아이디어

각 정의를 "한 점에서 출발하여 한 변의 몇 배만큼 이동한다"는 꼴로 다시 쓴다. 그러면 $\mathbf{p}-\mathbf{b}=\lambda(\mathbf{a}-\mathbf{b})$이고 $\mathbf{q}-\mathbf{c}=\mu(\mathbf{a}-\mathbf{c})$이므로 길이 BP와 CQ는 그저 $\lambda\,AB$와 $\mu\,AC$가 되고, 길이 조건은 매우 간단한 방정식으로 바뀐다. 세 점이 한 직선 위에 있음(공선, collinear)을 보이려면, 그 점들을 잇는 벡터(vector) 가운데 두 개가 평행(parallel)함을 보이면 된다.

풀이

그림

$0<\lambda<1$일 때 $\mathbf{p}=\mathbf{b}+\lambda(\mathbf{a}-\mathbf{b})$이므로 점 P는 선분 AB 위, A와 B 사이(양 끝점 제외)에 있다. $\mu>1$일 때 $\mathbf{q}=\mathbf{c}+\mu(\mathbf{a}-\mathbf{c})$이므로 점 Q는 직선 CA 위에서 A 너머에 있다. 즉 C에서 출발하여 A까지 간 다음 계속 나아간 곳이다. ($\lambda=0.6$으로 그린) 그림에는 아래에서 등장할 점 D도 함께 나타나 있다.



μ 구하기

위에서 다시 쓴 식으로부터

$$BP = |\mathbf{p}-\mathbf{b}| = \lambda|\mathbf{a}-\mathbf{b}| = \lambda\, AB, \qquad CQ = |\mathbf{q}-\mathbf{c}| = \mu|\mathbf{a}-\mathbf{c}| = \mu\, AC,$$

이다. 여기서 $\lambda > 0$과 $\mu > 0$을 이용하여 이들을 절댓값 기호 밖으로 꺼냈다. 조건 $CQ \times BP = AB \times AC$는 $\lambda\mu\, AB \cdot AC = AB \cdot AC$가 된다. A, B, C는 서로 다른 점이므로 $AB \cdot AC \neq 0$이고, 따라서

$$\mu = \frac{1}{\lambda}.$$

$0 < \lambda < 1$이므로 이 값은 실제로 $\mu > 1$을 만족한다.

고정점 D

$\mathbf{d} = -\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$로 놓는다. $\overrightarrow{PQ}$와 $\overrightarrow{PD}$를 비교하자. 먼저

$$\begin{aligned}\mathbf{d} - \mathbf{p} &= -\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} - \lambda\mathbf{a} - (1-\lambda)\mathbf{b} \\ &= -(1+\lambda)\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} + \mathbf{c}.\end{aligned}$$

다음으로 $\mu = 1/\lambda$를 대입하면

$$\begin{aligned}\mathbf{q} - \mathbf{p} &= \left(\frac{1}{\lambda} - \lambda\right)\mathbf{a} + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\mathbf{c} - (1-\lambda)\mathbf{b} \\ &= \frac{1-\lambda}{\lambda}\Big[(1+\lambda)\mathbf{a} - \lambda\mathbf{b} - \mathbf{c}\Big],\end{aligned}$$

이다. 여기서 $\frac{1}{\lambda} - \lambda = \frac{(1-\lambda)(1+\lambda)}{\lambda}$와 $1 - \frac{1}{\lambda} = -\frac{1-\lambda}{\lambda}$를 이용하였다.

? **생각해 보기** 이 두 벡터가 평행하다는 것을 어떻게 알 수 있는가?

대괄호 안의 식은 정확히 $-(\mathbf{d}-\mathbf{p})$이다. 따라서

$$\mathbf{q} - \mathbf{p} = -\frac{1-\lambda}{\lambda}(\mathbf{d}-\mathbf{p}), \qquad \text{즉} \qquad \mathbf{d} = \mathbf{p} - \frac{\lambda}{1-\lambda}(\mathbf{q}-\mathbf{p}).$$

$\lambda \neq 1$이므로 계수는 유한하고, Q는 직선 AB 위에 있지 않으므로 $\mathbf{q} \neq \mathbf{p}$이다. 그러므로 D는 직선 PQ 위에 있다. 벡터 $\mathbf{d}$는 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$만으로 이루어져 있으므로, 요구한 대로 모든 λ에 대하여 같은 점이다. 계수 $-\lambda/(1-\lambda)$가 음수이므로, 그림에서처럼 P는 Q와 D 사이에 있다.

사각형 $ABDC$

$$\mathbf{d} - \mathbf{c} = \mathbf{b} - \mathbf{a} \quad \text{이고} \quad \mathbf{d} - \mathbf{b} = \mathbf{c} - \mathbf{a},$$

이므로 $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$이고 $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$이다. 두 쌍의 대변이 각각 길이가 같고 평행하므로 $ABDC$는 **평행사변형(parallelogram)**이며, D는 A의 맞은편 꼭짓점이다. (A, B, C가 한 직선 위에 있지 않으므로 이 평행사변형은 퇴화(degenerate)하지 않는다.)

검산

- 기하학적인 교차 확인: $BD \parallel AC$이므로 삼각형 PAQ와 PBD는 닮음(similar)이고, 따라서 $AQ/BD = AP/BP$이다. 여기서 $AQ = (\mu - 1)AC$, $BD = AC$, $AP = (1-\lambda)AB$, $BP = \lambda AB$이므로 $\mu - 1 = (1-\lambda)/\lambda$를 얻고, 이는 다시 $\mu = 1/\lambda$이다.
- $A = (0,0)$, $B = (4,0)$, $C = (1,3)$, $\lambda = 0.6$(그림의 경우)으로 두면 $P = (1.6, 0)$, $Q = (-\frac{2}{3}, -2)$, $D = (5,3)$을 얻는다. QP와 PD의 기울기(gradient)는 모두 $\frac{15}{17}$이다.
- 3차원에서 무작위로 만든 삼각형 20,000개로도 시험하였다. 길이 조건을 μ에 대하여 수치적으로 풀었더니, 모든 경우에 10^{-13} 이내에서 $1/\lambda$와 일치하였고 P, Q, D는 한 직선 위에 있었다.

흔한 실수

- $BP = (1-\lambda)AB$라고 쓰는 것. $\mathbf{p}$에서 $\mathbf{b}$의 계수는 $1-\lambda$이지만, B로부터의 거리를 재는 것은 A에 붙은 가중치이다.
- 꼭짓점의 순서를 확인하지 않고 $ABDC$를 "평행사변형"이라고 부르는 것. 여기서는 $A \to B \to D \to C$ 순서이므로 AD와 BC가 대각선(diagonal)이다.

STEP 너머

$\lambda\mathbf{a} + (1-\lambda)\mathbf{b}$처럼 계수의 합이 1인 식을 **아핀 결합**(*affine combination*)이라고 한다. 아핀 결합은 (벡터가 아닌) 점을 다루는 자연스러운 언어이며, 공선성은 아핀 성질이다. 즉 원점을 어떻게 잡든 달라지지 않는다. 이는 무게중심 좌표(barycentric coordinates)로 이어지고, 직선이 삼각형의 세 변(의 연장선)과 만나는 조건을 정확히 기술하는 메넬라오스(Menelaus) 정리 같은 고전적인 결과로도 이어진다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 벡터 쪽을 깊이 다루고, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에는 STEP 스타일의 벡터 기하 문제가 더 실려 있다.

풀이

STEP II 2009, 문제 9

역학 • 질량중심

STEP II 2009, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/09-s2-q9

핵심 아이디어

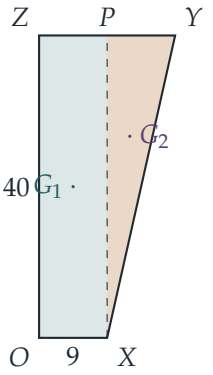
필요한 거리는 모두 하나의 고정된 평면에 수직으로 잰다. (i)에서는 모서리 OZ, (ii)에서는 OZ를 포함하는 탱크의 뒷면이다. 따라서 좌표는 하나만 있으면 된다. 각 도형을 무게중심(centre of mass)을 알고 있는 조각(직사각형과 삼각형)으로 나누고, 그 직선이나 평면에 대한 모멘트(moment)를 구한 다음 전체 질량으로 나눈다. 탱크도 한 단계 위에서 같은 계산을 한다. 탱크의 조각은 사다리꼴(trapezium) 금속판 두 장과 직사각형 금속판 세 장이고, 그다음에 액체 덩어리가 더해진다.

풀이

소문항 (i)

O를 원점으로 하고, x축을 OX 방향으로, y축을 OZ 방향으로 잡는다. 그러면 $X = (9,0)$, $Z = (0,40)$이고, YZ는 OX와 평행하며 길이가 18이므로 $Y = (18,40)$이다. 검산하면 $XY^2 = 9^2 + 40^2 = 1681 = 41^2$로, 마땅히 그래야 하는 값이 나온다. OZ로부터의 거리는 바로 x좌표이다.

X에서 OZ에 평행한 직선을 그어 ZY와 만나는 점을 $P = (9,40)$이라 하자. 이 직선은 얇은 판(lamina)을 직사각형 $OXPZ$와 직각삼각형 XYP로 나눈다.



판의 질량을 cm^2당 1이라 하면, 질량은 넓이와 같다.

- 직사각형 $OXPZ$: 넓이 $9 \times 40 = 360$, 무게중심 G_1은 $x = 4.5$에 있다.
- 삼각형 XYP: 넓이 $\frac{1}{2} \times 9 \times 40 = 180$. 균일한 삼각형의 무게중심은 세 꼭짓점의 평균이므로, G_2는 $x = \frac{1}{3}(9 + 18 + 9) = 12$이다.

판 전체의 넓이는 540이다. OZ에 대한 모멘트를 구하면

$$540\,\bar{x} = 360 \times 4.5 + 180 \times 12 = 1620 + 2160 = 3780,$$

이므로 $\bar{x} = 7$이다. 따라서 무게중심은 요구한 대로 OZ로부터 7 cm 떨어져 있다.

소문항 (ii)

이제 금속판의 질량을 cm^2당 1이라 하자. 뒷면 $OTWZ$는 평면 $x = 0$ 위에 있고, 폭 d가 양 끝면에 수직인 방향으로 놓이므로 탱크의 모든 점은 (i)에서의 x좌표를 그대로 유지한다. 따라서 뒷면에 대한 모멘트를 구한다. 각 직사각형 면은 균일하므로 무게중심은 그 중심에 있고, 그 x좌표는 사다리꼴의 대응하는 변의 중점의 x좌표와 같다.

조각	넓이 (cm^2)	중심의 x (cm)	모멘트
양 끝면	$2 \times 540 = 1080$	7	7560
밑면 $OXUT$	$9d$	4.5	$40.5d$
뒷면 $OTWZ$	$40d$	0	0
앞면 $XUVY$	$41d$	$\frac{1}{2}(9 + 18) = 13.5$	$553.5d$
합계	$1080 + 90d$		$7560 + 594d$

생각해 보기 기울어진 앞면의 중심은 어디인가?

앞면은 한 쌍의 변이 XU와 YV인 직사각형이고, 이 두 변은 $x = 9$와 $x = 18$에 있다. 그 중심은 두 변의 한가운데인 $x = 13.5$에 있다. 넓이는 수평 폭 9가 아니라 비스듬한 길이 $XY = 41$을 써서 구한다.

따라서 빈 탱크에 대하여

$$\bar{x} = \frac{7560 + 594d}{1080 + 90d}.$$

모든 계수가 18로 나누어떨어진다: $7560 = 18 \times 420$, $594 = 18 \times 33$, $1080 = 18 \times 60$, $90 = 18 \times 5$. 따라서

$$\bar{x} = \frac{420 + 33d}{60 + 5d} = \frac{3(140 + 11d)}{5(12 + d)} \text{ cm},$$

이고, 이것이 요구한 뒷면으로부터의 거리이다.

가득 찬 탱크

액체는 단면이 (i)의 사다리꼴이고 길이가 d인 각기둥(prism)을 채운다. 그 부피는 $540d$이므로, 우리의 단위로 질량은 $540dk$이다(단위 부피당 질량은 금속의 단위 넓이당 질량의 k배이고, 금속의 단위 넓이당 질량은 1로 잡았다). 모든 단면이 같은 사다리꼴이므로, 액체의 무게중심은 (i)에서처럼 $x = 7$에 있다.

$d = 20$일 때 탱크의 질량은 $1080 + 1800 = 2880$이고, 뒷면에 대한 모멘트는 $7560 + 594 \times 20 = 19440$이다. 액체의 질량은 $10800k$이고 모멘트는 $75600k$이다. 따라서 가득 찬 탱크에 대하여

$$\bar{x} = \frac{19440 + 75600k}{2880 + 10800k} = \frac{27 + 105k}{4 + 15k} \text{ cm},$$

이다(분자와 분모를 720으로 나누었다). 이것이 가득 찬 탱크의 무게중심과 뒷면 사이의 거리이다.

검산

- $k = 0$일 때(액체가 없거나 액체의 밀도(density)를 무시할 수 있을 때) 답은 $\frac{27}{4} = 6.75$이고, 빈 탱크 공식에 $d = 20$을 넣어도 $\frac{3\times360}{5\times32} = 6.75$가 나온다.
- $k \to \infty$일 때는 액체가 지배적이 되어 $\bar{x} \to \frac{105}{15} = 7$, 즉 액체 자체의 무게중심이 된다.
- 답은 둘의 가중평균(weighted average)이어야 하므로 항상 6.75와 7 사이에 있다. 예를 들어 $k = 1$이면 $\frac{132}{19} \approx 6.947$이다.
- 수치 검증(사다리꼴의 무게중심을 신발끈 공식(shoelace formula)으로 구한 값, $\bar{x} \approx 6.9994$를 주는 몬테카를로(Monte Carlo) 추정, 두 탱크 공식에 대한 정확한 분수 계산)도 모든 결과와 일치한다.

흔한 실수

- 앞면의 넓이로 $41d$ 대신 $9d$를 쓰는 것. 앞면은 기울어져 있으므로, 그 폭은 비스듬한 길이 XY이다.
- 모멘트가 0이라는 이유로 뒷면을 빼먹는 것. 뒷면은 여전히 전체 질량에 $40d$만큼 기여한다.
- 끝면을 하나만 세거나, 탱크에 뚜껑을 다는 것.

STEP 너머

여기서는 중심을 알고 있는 조각으로 나누어 무게중심을 구했다. 대학에서는 판이나 입체의 무게중심을 $\bar{x} = \frac{1}{M}\iint x\,\rho\,\mathrm{d}A$와 같은 적분(integral)으로 정의하며, "조각으로 나누기" 방법은 영역을 여러 부분으로 자르면 적분이 더해진다는 사실에 지나지 않는다. 같은 적분으로 관성 모멘트(moment of inertia)도 구하는데, 관성 모멘트는 물체가 어떻게 회전하는지를 결정한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 두 개념을 모두 꼼꼼하게 전개한다.

풀이

STEP II 2009, 문제 10

역학 • 충돌과 반발계수

STEP II 2009, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/09-s2-q10

핵심 아이디어

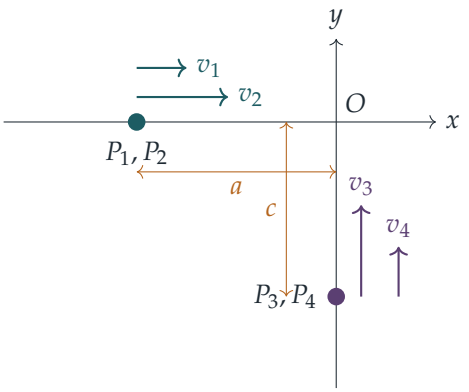
충돌(collision)은 네 번 일어나지만, 역학이 필요한 것은 처음 두 번뿐이다. 이 두 충돌이 직후의 네 속력을 결정한다. 나머지는 모두 시간 계산이다. 서로 다른 축을 따라 움직이는 두 입자(particle)가 "O에서 충돌한다"는 것은 단지 같은 순간에 O에 도달한다는 뜻이므로, 이후의 각 충돌은 거리/속력 = 거리/속력 꼴의 방정식을 하나씩 준다. 한 시간 방정식을 다른 시간 방정식으로 나누면 미지의 거리가 소거되고, 질량에 대한 조건만 남는다.

풀이

설정하기

네 물체를 매끄러운 축 위에서 움직이는 입자로 모형화하므로, 충돌과 충돌 사이에 각 입자는 일정한 속도로 움직인다. P_2가 음의 x축 위에서 O로부터 거리 a인 곳에서, P_3이 음의 y축 위에서 O로부터 거리 c인 곳에서 출발한다고 하자. $a = c$임을 보여야 한다.

처음 두 (동시에 일어나는) 충돌의 순간을 $t = 0$으로 잡자. 이 충돌은 P_2와 P_3이 놓여 있는 곳에서 일어나므로, $t = 0$일 때 입자 P_1과 P_2는 모두 O로부터 거리 a에 있고, P_3과 P_4는 모두 O로부터 거리 c에 있다.



처음 두 충돌

속력 u로 움직이는 질량 M인 입자가 정지해 있는 질량 m인 입자와 반발계수(coefficient of restitution) e로 정면 충돌(direct impact)하고, 충돌 후 처음 운동 방향으로의 속도가 각각 V와 w라 하자. 운동량 보존(conservation of momentum)과 뉴턴(Newton)의 실험 법칙(Newton's experimental law)에 의해

$$Mu = MV + mw, \qquad w - V = eu,$$

이므로

$$w = \frac{M(1+e)u}{M+m}, \qquad V = \frac{(M-em)u}{M+m}.$$

이를 P_1이 P_2와 충돌하는 경우와 P_4가 P_3과 충돌하는 경우에 적용하면, $t = 0$ 직후 O를 향하는 속도는

$$v_1 = \frac{(m_1 - em_2)u}{m_1 + m_2}, \qquad v_2 = \frac{m_1(1+e)u}{m_1 + m_2},$$
$$v_4 = \frac{(m_4 - em_3)u}{m_3 + m_4}, \qquad v_3 = \frac{m_4(1+e)u}{m_3 + m_4}.$$

이다. 분명히 $v_2, v_3 > 0$이다. P_1과 P_4도 나중에 O에 도달하므로 여전히 O를 향해 움직이고 있어야 하고, 따라서 $v_1 > 0, v_4 > 0$이기도 하다.

이후의 충돌 이용하기

생각해 보기 서로 수직인 축 위의 두 입자가 어떻게 "충돌"할 수 있을까?

두 축이 공유하는 점은 O뿐이다. 따라서 "P_2와 P_3이 O에서 충돌한다"는 것은 단지 두 입자가 같은 시각에 O에 도착한다는 뜻이고, P_1과 P_4도 마찬가지이다. $t = 0$부터 O에 도착할 때까지 각 입자는 일정한 속력으로 움직이므로(문제에서 이들 중 어느 입자든 관여하는 다음

충돌은 O에서 일어난다고 하였다), 도착 시각은 거리를 속력으로 나눈 것이다.

$$\frac{a}{v_2} = \frac{c}{v_3} \qquad (P_2\text{와}P_3\text{이 만나는 점은}O), \tag{1}$$

$$\frac{a}{v_1} = \frac{c}{v_4} \qquad (P_1\text{과}P_4\text{가 만나는 점은}O). \tag{2}$$

(1)을 (2)로 나누면 거리가 소거된다.

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{v_4}{v_3}.$$

위의 식에서 각 비의 인수 u와 $m_1 + m_2$(또는 $m_3 + m_4$)가 약분되므로, 이 식은

$$\frac{m_1 - em_2}{m_1(1+e)} = \frac{m_4 - em_3}{m_4(1+e)},$$

를 뜻하고, 양변에 $m_1 m_4(1+e)$를 곱하면

$$m_4(m_1 - em_2) = m_1(m_4 - em_3), \qquad \text{따라서} \qquad e\,m_2 m_4 = e\,m_1 m_3.$$

이다. $e > 0$이므로 e로 나눌 수 있고, 따라서 $m_1 m_3 = m_2 m_4$, 즉

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{m_4}{m_3} = k, \text{ 라 하자.}$$

이제 v_2와 v_3으로 돌아가자. 분자와 분모를 각각 m_2와 m_3으로 나누면

$$v_2 = \frac{k(1+e)u}{k+1} = v_3.$$

이다. 따라서 P_2와 P_3은 처음 충돌 후 같은 속력으로 떠나고, (1)에 의해 $a = c$이다. 그러므로 P_2와 P_3은 처음에 O로부터 같은 거리에 있었다. 이로써 증명이 끝난다.

검산

- $m_1 = 2, m_2 = 1, m_3 = 3, m_4 = 6$ (따라서 $k = 2$), $e = \frac{1}{2}$, $u = 1$, $a = c = 1.7$로 잡자. 그러면 $v_2 = v_3 = 1$, $v_1 = v_4 = \frac{1}{2}$이다. P_2와 P_3은 $t = 1.7$에 함께 O에 도달하고, P_1과 P_4는 $t = 3.4$에 함께 도달하는데, 문제에서 말한 대로 더 나중이다. 단계별 시뮬레이션도 이와 일치한다.
- $v_2 - v_1 = eu > 0$이므로 P_1은 실제로 P_2보다 늦게 도착하며, 이는 "얼마 후에"라는 조건과 들어맞는다.
- $e = 0$이면 논증이 깨지는데, 당연히 그래야 한다. 이때 $v_1 = v_2$, $v_3 = v_4$이므로 (2)는 (1)과 같은 식이 되고, $a/c = v_2/v_3$을 만족하는 어떤 a와 c든 성립한다. 바로 이 때문에 문제에서 $e > 0$을 고집하는 것이다.

흔한 실수

- P_1의 이동 거리를 처음 출발점부터 재는 것. $t = 0$ 이후 P_1은 P_2가 있던 곳, 즉 O로부터 거리 a인 곳에서 출발한다. 그래서 (1)과 (2)에 같은 a가 나타난다.
- 아무 언급 없이 e로 나누는 것. $e = 0$인 경우는 정말로 다르다.
- O에서 일어나는 P_2와 P_3의 충돌을 분석하려 하는 것. 그 결과에 대해서는 아무것도 필요하지 않고, 두 입자가 함께 그곳에 도착한다는 사실만 필요하다.

STEP 너머

질량 조건 $m_1 m_3 = m_2 m_4$는 두 충돌이 서로의 축소·확대판이라는 뜻이다. 정면 충돌 후의 속도는 질량비와 e에만 의존하는데, 이는 차원 분석(dimensional analysis)과 상사(similarity)를 처음 엿보는 것이다. 대학에서는 충돌을 질량중심 좌표계(centre-of-mass frame)에서 다루는 것이 가장 깔끔한데, 이 좌표계에서 반발계수는 단순히 상대 속도의 크기를 바꾸는 배율이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 운동량과 충돌을 이런 방식으로 전개한다.

풀이

STEP II 2009, 문제 11

역학 • 일률과 저항

STEP II 2009, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/09-s2-q11

핵심 아이디어

열차 전체를 질량 $(n+1)M$, 전체 저항(resistance) $(n+1)R$인 하나의 물체로 본다. 일률(power) P로 달릴 때 속력 v에서의 구동력은 P/v이므로, 뉴턴 제2법칙(Newton's second law)으로 가속도를 곧바로 얻는다. 어떤 속력에 도달하는 데 걸리는 시간을 구하려면 가속도를 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$로 쓰고, 변수를 분리(separation of variables)하여 적분한다. 마지막 소문항은 에너지 수지를 따지는 문제이다. 기관차가 한 일은 운동 에너지(kinetic energy)와 저항을 이기는 일로 나뉜다.

풀이

기관차와 화차들을 함께 움직이는 입자로 모형화한다(연결 장치는 팽팽하고 늘어나지 않는다). 그러면 열차는 하나의 물체가 된다. 전체 질량과 전체 저항을 각각

$$m = (n+1)M, \qquad k = (n+1)R$$

로 쓴다.

가속도

일률은 힘과 속력의 곱이므로, 최대 일률에서 속력이 v일 때 기관차의 견인력(tractive force)은 P/v이다. 선로 방향으로 힘을 분해하여 열차 전체에 뉴턴 제2법칙을 적용하면

$$ma = \frac{P}{v} - k, \qquad \text{따라서} \qquad a = \frac{P-(n+1)Rv}{(n+1)Mv}.$$

이다.

속력 V에 도달하는 시간

$a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$로 놓고 변수를 분리하면

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}v} = \frac{mv}{P-kv}, \qquad T = m\int_0^V \frac{v}{P-kv}\,\mathrm{d}v.$$

이다. 적분하기 위해 분자를 분모로 나타내어 $v = \frac{1}{k}\big(P-(P-kv)\big)$로 쓰고 분수를 쪼개면

$$\frac{v}{P-kv} = -\frac{1}{k} + \frac{P}{k}\cdot\frac{1}{P-kv}.$$

이다. 따라서

$$T = m\Big[-\frac{v}{k} - \frac{P}{k^2}\ln(P-kv)\Big]_0^V = -\frac{mV}{k} - \frac{mP}{k^2}\ln\Big(1-\frac{kV}{P}\Big).$$

이다. $m/k = M/R$이고 $m/k^2 = M/\big((n+1)R^2\big)$이므로

$$T = -\frac{MV}{R} - \frac{MP}{(n+1)R^2}\ln\Big(1-\frac{(n+1)RV}{P}\Big).$$

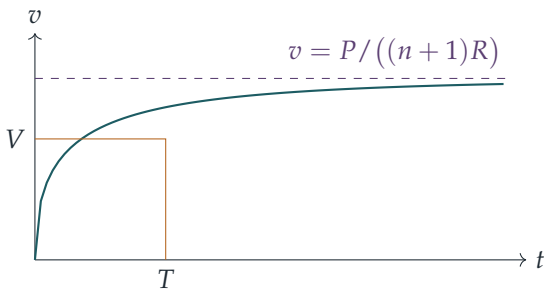
이다.

> **생각해 보기** P가 $(n+1)RV$보다 커야 하는 것이 단지 로그가 정의되기 위한 조건이 아니라 왜 꼭 필요한 조건일까?

물리적으로 보면, 가속도 $(P-kv)/(mv)$는 $v < P/k$인 동안 양수이고 $v = P/k$에서 0이 된다. 열차는 $v = 0 < P/k$에서 출발하여 속력이 증가하지만, v가 P/k에 가까워질수록 가속도는 사그라든다. 위의 식은 열차가 그 속력에 결코 도달하지 못함을 보여 준다. $V \to P/k$로 아래쪽에서 다가가면 $\ln(1-kV/P) \to -\infty$이므로 $T \to \infty$이다. 즉 P/k는 열차가 다가가기는 하지만 유한한 시간 안에 도달하지는 못하는 종단 속력(terminal speed)이며, 그 이상의 속력에는 결코 이르지 못한다. 따라서 속력 V에 도달할 수 있으려면 $V < P/k$, 즉

$$P > (n+1)RV,$$

이어야 한다. 이것이 증명할 내용이었다. (같은 말이지만, $P \le kV$라면 기관차가 최대 일률로 달려도 속력 V에서의 저항조차 상쇄하지 못한다.)



(이 그림은 정성적인 개형이다. 구동력 P/v가 큰 처음에는 속력이 가파르게 증가하다가, 종단 속력을 향해 점점 완만해진다.)

소문항 (i)

$x = \dfrac{(n+1)RV}{P} = \dfrac{kV}{P}$로 놓으면 x는 작다. 이때 $\ln(1-x) \approx -x - \frac{1}{2}x^2$이고, $V = Px/k$를 이용하면

$$T = -\frac{mV}{k} - \frac{mP}{k^2}\ln(1-x) \approx -\frac{mP}{k^2}\,x + \frac{mP}{k^2}\left(x + \tfrac{1}{2}x^2\right) = \frac{mP}{2k^2}\,x^2 = \frac{mP}{2k^2}\cdot\frac{k^2V^2}{P^2} = \frac{mV^2}{2P}.$$

이다. 일차항들이 정확히 상쇄되므로 x^2항까지 필요했던 것이다. 따라서

$$PT \approx \tfrac{1}{2}(n+1)MV^2.$$

이다. **해석.** PT는 시간 T 동안 기관차가 한 일이고, $\frac{1}{2}(n+1)MV^2$은 열차가 얻은 운동 에너지이다. 그러므로 $(n+1)RV$가 P에 비해 작을 때(저항력과 속력의 곱이 기관차의 일률에 비해 작을 때), 기관차가 한 일은 거의 모두 운동 에너지가 되고 저항으로 잃는 양은 아주 적다. 즉 열차는 마치 저항이 없는 것처럼 움직인다.

소문항 (ii)

시간 T 동안 일정한 일률 P로 작동하는 기관차는 PT만큼의 일을 한다. 거리 X를 가는 동안 일정한 전체 저항 $(n+1)R$이 한 일은 $-(n+1)RX$이다. 다시 말해 열차가 저항을 이기며 한 일은 $(n+1)RX$이다. 열차는 정지 상태에서 출발하여 속력 V에 이르고, 선로가 수평이므로 위치 에너지의 변화는 없다. 일-에너지 원리(work–energy principle)에 의해

$$PT = \tfrac{1}{2}(n+1)MV^2 + (n+1)RX.$$

이다. 이를 정리하면

$$X = \frac{2PT - (n+1)MV^2}{2(n+1)R},$$

이고, 이것이 구하는 결과이다. 이는 소문항 (i)과도 들어맞는다. 저항을 무시할 수 있으면 $(n+1)RX$항이 사라지고 $PT \approx \frac{1}{2}(n+1)MV^2$만 남는다.

검산

- $n = 3$, $M = 2$, $R = 1$, $P = 40$, $V = 6$으로 잡자(그러면 $(n+1)RV = 24 < 40$이다). 공식에 따르면 $T \approx 6.3258$이고, 이어서 $X \approx 27.258$이다. 운동 방정식을 시간에 따라 수치적으로 한 단계씩 풀어 나가도 유효숫자 네 자리까지 같은 값이 나온다.
- 차원: MV/R은 (질량)(속력)/(힘)이므로 시간의 차원을 가지며, MP/R^2도 마찬가지이다. 로그는 무차원이다.

- $V \to P/\big((n+1)R\big)$이면 T는 한없이 커진다(위의 수치에서 종단 속력의 90%, 99%, 99.9%일 때 각각 $T \approx 28, 72, 118$이다). 이로써 조건이 확인된다.
- x가 작을 때 비 $PT/\frac{1}{2}(n+1)MV^2$은 약 $1+\frac{2}{3}x$이고 1로 다가간다. 소문항 (i)의 예측과 같다.

흔한 실수

- 열차 전체가 아니라 기관차만의 질량과 저항을 쓰는 실수. 기관차는 $n+1$대의 차량 전부를 끈다.
- 시간을 구해야 하는데 $a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}x$로 쓰거나 $v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$를 쓰는 실수. 이 방법으로는 시간이 아니라 거리가 나온다.
- 소문항 (i)에서 로그를 일차까지만 전개하는 실수. x항들이 상쇄되어 $T \approx 0$이 되고 답을 잃는다.

STEP 너머

방정식 $m\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = P/v - k$는 일계 비선형 상미분방정식(ODE)인데 마침 변수분리가 가능한 꼴이다. 종단 속력 P/k는 안정 평형점(stable equilibrium)으로, 해는 이 값에 다가가지만 유한한 시간 안에 도달하지는 못한다. 해의 유일성(uniqueness)이 보여 주듯, 이는 매끄러운 상미분방정식의 평형점 근처에서 전형적으로 나타나는 현상이다. 소문항 (ii)는 일-에너지 정리로, 대학 역학에서 전체를 꿰는 핵심 원리가 된다. 더 알고 싶다면 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를, 상미분방정식 쪽은 Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(미분방정식 입문)를 참고하라.

풀이

STEP II 2009, 문제 12

확률과 통계 • 반정규분포

STEP II 2009, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/09-s2-q12

핵심 아이디어

지수 $-2x^2$는 모습을 감춘 정규분포(normal distribution)의 밀도이다. $-2x^2 = -\dfrac{x^2}{2\sigma^2}$로 쓰면 $\sigma = \frac{1}{2}$를 얻으므로, f는 $Y \sim \mathrm{N}(0, \frac{1}{4})$의 확률밀도함수(probability density function)를 0에서 잘라 낸 것의 정확히 두 배이다. 다시 말해 X는 $|Y|$와 같은 분포를 가진다. 이것을 알아차리고 나면 정규화 상수(normalising constant), $\mathrm{E}(X^2)$, 그리고 중앙값(median)이 모두 정규분포에 관한 사실들로부터 곧바로 나온다. $\mathrm{E}(X)$만이 (아주 쉬운) 적분을 필요로 한다.

풀이

이 풀이 전체에서 $Y \sim \mathrm{N}(0, \frac{1}{4})$, $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$이라 하자. 그러면 Y는 $\frac{1}{2}Z$와 같은 분포를 가지며, 그 밀도는 다음과 같다.

$$g(y) = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-y^2/(2\cdot\frac{1}{4})} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-2y^2}.$$

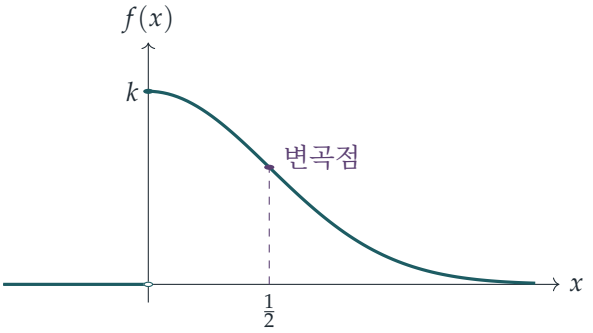
소문항 (i)

$x \geq 0$에서 $f'(x) = -4kx\,\mathrm{e}^{-2x^2} \leq 0$이므로, f는 $x = 0$에서의 최댓값 k로부터 감소하며, 그 점에서 기울기는 영이다. 또한

$$f''(x) = k(16x^2 - 4)\,\mathrm{e}^{-2x^2},$$

이고, 이는 $x = \frac{1}{2}$에서 부호가 바뀌므로 $x = \frac{1}{2}$에 변곡점(point of inflection)이 있다. $x \to \infty$일 때 $f(x) \to 0$으로 매우 빠르게 수렴하며, $x < 0$에서는 $f(x) = 0$이다. 그래프는

종 모양 곡선의 오른쪽 절반이고(소문항 (ii)에서 $k \approx 1.60$), $x = 0$에서 0으로부터 k까지 뛰어오르는 불연속이 있다.



소문항 (ii)

전체 확률은 1이어야 한다. g는 0에 대하여 대칭이고 실수 전체에서 적분하면 1이므로, $[0, \infty)$에서의 적분은 $\frac{1}{2}$이다.

$$\int_0^\infty \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-2x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \int_0^\infty \mathrm{e}^{-2x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

따라서 $k \cdot \dfrac{\sqrt{2\pi}}{4} = 1$이고, 이로부터

$$k = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \approx 1.596.$$

을 얻는다. $x \geq 0$에서 $f(x) = 2g(x)$임에 주목하자. 이것은 X가 $|Y|$와 같은 분포를 가진다는 것을 확인해 준다.

소문항 (iii)

평균(mean)의 경우, 인수 x 덕분에 적분이 초등적으로 계산된다. $x\,\mathrm{e}^{-2x^2}$가 e^{-2x^2}의 도함수의 상수배이기 때문이다.

$$\mathrm{E}(X) = k\int_0^\infty x\,\mathrm{e}^{-2x^2}\,\mathrm{d}x = k\Big[-\tfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x^2}\Big]_0^\infty = \frac{k}{4} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0.399.$$

? **생각해 보기** 긴 부분적분(integration by parts) 없이 $\displaystyle\int_0^\infty x^2\,\mathrm{e}^{-2x^2}\,\mathrm{d}x$를 어떻게 구할 수 있을까?

다시 정규분포를 이용한다. 함수 $x^2 g(x)$는 우함수이므로

$$\mathrm{E}(X^2) = \int_0^\infty x^2 \cdot 2g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^\infty x^2 g(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{E}(Y^2) = \mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{4},$$

이다. $\mathrm{E}(Y) = 0$이기 때문이다. ($u = x$, $\mathrm{d}v = x\mathrm{e}^{-2x^2}\,\mathrm{d}x$로 놓고 부분적분을 해도 같은 결과 $\int_0^\infty x^2\mathrm{e}^{-2x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4k}$를 얻는다.) 따라서 분산(variance)은

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \big(\mathrm{E}(X)\big)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} = \frac{\pi - 2}{4\pi} \approx 0.0908.$$

소문항 (iv)

중앙값 m은 $\mathrm{P}(X \le m) = \frac{1}{2}$를 만족한다. X는 $|Y|$와, Y는 $\frac{1}{2}Z$와 같은 분포를 가지므로, 표준정규분포(standard normal distribution)의 대칭성을 이용하면

$$\mathrm{P}(X \le m) = \mathrm{P}(|Z| \le 2m) = 2\Phi(2m) - 1,$$

이다. (직접 계산하면 $\mathrm{P}(X \le m) = \int_0^m 2g(x)\,\mathrm{d}x = 2\big(\mathrm{P}(Y \le m) - \frac{1}{2}\big)$이다.) 이것을 $\frac{1}{2}$과 같게 놓으면

$$\Phi(2m) = \frac{3}{4}.$$

을 얻는다. 표에서 $\Phi^{-1}(0.75) = 0.6745$이므로 $2m = 0.6745$이고

$$m \approx 0.337 \quad \text{(유효숫자 3자리)}.$$

검산

$k = 2\sqrt{2/\pi}$로 두고 f를 $[0, 10]$에서 수치적으로(심프슨 공식(Simpson's rule)으로) 적분하면 전체 확률 1.0000, $\mathrm{E}(X) = 0.39894$, $\mathrm{Var}(X) = 0.090845$를 얻으며, 이는 $1/\sqrt{2\pi}$ 및 $(\pi - 2)/(4\pi)$와 일치한다. $\int_0^m f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$를 수치적으로 풀면 $m = 0.33724$이다. 표준편차가 $\frac{1}{2}$인 정규분포 값 200 000개로 $|Y|$를 모의실험하면 평균 0.399, 분산 0.091을 얻었고, 값의 50.0%가 0.337보다 작았다. 상식 점검: 중앙값 0.337이 평균 0.399보다 작은데, 오른쪽 꼬리가 긴 분포라면 마땅히 그래야 한다.

흔한 실수

- 지수로부터 $\sigma^2 = 2$ 또는 $\sigma = \frac{1}{4}$로 잘못 읽는 것: $2x^2$를 $x^2/(2\sigma^2)$와 맞추면 $\sigma^2 = \frac{1}{4}$가 된다.
- 인수 2를 빠뜨리는 것: 실수 직선의 절반에서는 정규분포의 밀도를 적분해도 $\frac{1}{2}$밖에 되지 않는다.
- $\Phi(2m) = \frac{1}{2}$를 풀어 $m = 0$을 얻는 것. m 아래에 있는 X의 확률 절반은 Y의 확률 중 가운데 절반에 해당하므로, 조건은 $\Phi(2m) = \frac{3}{4}$이다.

STEP 너머

X는 **반정규**(*half-normal*) 확률변수이며, Y가 정규분포를 따를 때의 $|Y|$는 **확률변수의 변환**(*transformation of a random variable*)의 가장 간단한 예이다. 일반적으로 $X = h(Y)$이면, X의 밀도는 모든 원상(preimage)에서의 Y의 밀도를 더하여 얻으며, 여기서는 그것이 인수 2이다. 같은 아이디어로 Z^2가 자유도(degree of freedom) 1인 카이제곱분포(chi-squared distribution)를 따른다는 것을 보일 수 있고, 이것은 통계학의 많은 부분의 출발점이 된다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 확률변수의 함수를 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP II 2009, 문제 13

확률과 통계 • 이항분포와 기대 비용

STEP II 2009, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/09-s2-q13

핵심 아이디어

고장 나는 엔진의 개수는 이항분포(binomial distribution)를 따르므로, 수리 비용은 이항 확률변수의 간단한 함수이고 그 기댓값(expectation)은 짧은 합으로 구할 수 있다. 깔끔한 형태 $(*)$에 이르는 요령은 "모두 교체하는" 경우들을 하나씩 더하지 않는 것이다. 여사건(complement)을 이용한 다음, $1-q^n = p(1+q+\cdots+q^{n-1})$으로 인수분해하여 p를 인수로 끌어낸다.

풀이

문제의 의도대로 엔진들은 서로 독립적으로(independently) 각각 확률 p로 고장 난다고 가정하고, $q = 1-p$로 쓴다. 마지막 단계 전까지 모든 비용은 K 단위로 잰다.

Andover호

X를 고장 나는 Andover호 엔진의 개수라 하면 $X \sim \mathrm{B}(4, p)$이고, C_A를 수리 비용이라 하자. 그러면

$$C_A = \begin{cases} 0 & X = 0, \\ K & X = 1, \\ 4K & X \geq 2. \end{cases}$$

이다. 이제 $\mathrm{P}(X=0)=q^4$, $\mathrm{P}(X=1)=4pq^3$이므로 $\mathrm{P}(X\geq 2)=1-q^4-4pq^3$이다. 따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(C_A) &= K\cdot 4pq^3 + 4K\big(1-q^4-4pq^3\big)\\ &= 4K(1-q^4)-12Kpq^3.\end{aligned}$$

이다. $1-q^4=(1-q)(1+q+q^2+q^3)=p(1+q+q^2+q^3)$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(C_A) &= 4Kp\big(1+q+q^2+q^3\big)-4Kp\cdot 3q^3\\ &= 4Kp\big(1+q+q^2-2q^3\big),\end{aligned}$$

이고, 이것이 바로 구하려던 $(*)$이다.

Basingstoke호

$Y\sim \mathrm{B}(6,p)$를 고장 나는 Basingstoke호 엔진의 개수, C_B를 수리 비용이라 하자. 그러면 $Y\leq 2$일 때 $C_B=YK$이고, $Y\geq 3$일 때 $C_B=6K$이다.

$$\mathrm{P}(Y=0)=q^6,\qquad \mathrm{P}(Y=1)=6pq^5,\qquad \mathrm{P}(Y=2)=15p^2q^4,$$

이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(C_B) &= K\cdot 6pq^5+2K\cdot 15p^2q^4+6K\big(1-q^6-6pq^5-15p^2q^4\big)\\ &= 6K(1-q^6)-30Kpq^5-60Kp^2q^4.\end{aligned}$$

을 얻는다. $1-q^6=p(1+q+q^2+q^3+q^4+q^5)$를 이용하여 $6Kp$로 묶으면

$$\mathrm{E}(C_B)=6Kp\big(1+q+q^2+q^3+q^4+q^5-5q^5-10pq^4\big).$$

이다.

> **생각해 보기** 괄호 안에 아직 p가 남아 있다. 이것을 어떻게 "$(*)$와 비슷한 형태"로 만들 수 있을까?

형태 $(*)$는 인수 p에 q만의 다항식을 곱한 꼴이므로, 남은 p를 $1-q$로 바꾼다. 즉 $10pq^4=10q^4-10q^5$이다. 항을 정리하면

$$\boxed{\mathrm{E}(C_B)=6Kp\big(1+q+q^2+q^3-9q^4+6q^5\big).}$$

이다.

Andover호의 비용이 Basingstoke호 비용의 $\frac{2}{3}$이 되는 때는 언제인가?

$\mathrm{E}(C_A)=\frac{2}{3}\mathrm{E}(C_B)$, 즉

$$4Kp\big(1+q+q^2-2q^3\big)=4Kp\big(1+q+q^2+q^3-9q^4+6q^5\big).$$

이어야 한다. 양변에 인수 $4Kp$가 있고 $K > 0$이므로, 이 식은 $p = 0$이거나

$$-2q^3 = q^3 - 9q^4 + 6q^5 \iff 3q^3 - 9q^4 + 6q^5 = 0 \iff 3q^3(1-q)(1-2q) = 0.$$

일 때, 그리고 그때에만 성립한다. 따라서 $q = 0$, $q = 1$ 또는 $q = \frac{1}{2}$이고, 이는 각각 $p = 1$, $p = 0$, $p = \frac{1}{2}$에 해당한다. 세 값 모두 $[0,1]$에 속하므로 구하는 값은

$$p = 0, \qquad p = \tfrac{1}{2}, \qquad p = 1.$$

이다. $p = 0$은 시시한 경우이다. 어떤 엔진도 고장 나지 않으므로 두 기대 비용이 모두 0이다. $p = 1$이면 모든 엔진이 고장 나서 비용은 각각 $4K$와 $6K$이다. 흥미로운 값은 $p = \frac{1}{2}$이다.

검산

$p = \frac{1}{2}$일 때 $(*)$에서 $\mathrm{E}(C_A) = 2K\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = 3K$이고, Basingstoke호의 공식에서 $\mathrm{E}(C_B) = 3K\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{9}{16} + \frac{6}{32}\right) = \frac{9}{2}K$이며, 실제로 $3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{2}$이다. 또한 두 공식을 p의 유리수 값 200개에 대하여 이항분포 위에서 직접 모든 경우를 나열한 결과와 정확히 비교하여 확인했고, 시뮬레이션(simulation)으로도 확인했다. $p = 0.3$에서 2×10^5번의 모의 발사로 얻은 평균 비용은 $1.811K$와 $2.483K$였고, 공식의 값은 $1.805K$와 $2.485K$이다.

흔한 실수

- Andover호 엔진이 두 개 이상 고장 났을 때 비용을 $4K$가 아니라 XK로 계산하는 것. 기준을 넘으면 멀쩡한 엔진까지 포함하여 **모든** 엔진을 교체한다.
- Basingstoke호의 괄호 안에 p를 남겨 두어, 답이 요구된 형태가 되지 않는 것.
- 마지막 방정식에서 p로 나누어 $p = 0$을 잃어버리거나, q^3으로 나누어 $p = 1$을 잃어버리는 것.

STEP 너머

이것은 임계값 정책(threshold policy)에서의 기대 비용을 보여 주는 작은 예로, 신뢰성 이론(reliability theory)과 운용과학(operational research)의 기본 중의 기본이다. 관리자는 멀쩡한 부품을 교체하는 비용과 더 잦은 수리 비용 사이의 균형을 맞추도록 임계값을 정한다. 여기서 사용한 꼬리 합(tail sum) 조작, 즉 $\mathrm{P}(X \geq k)$를 1에서 처음 몇 항을 뺀 것으로 쓰는 방법은, 음이 아닌 정수 값을 갖는 확률변수에 대하여 $\mathrm{E}(X) = \sum_{k \geq 1} \mathrm{P}(X \geq k)$를 주는 것과 같은 아이디어이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 이러한 아이디어를 꼼꼼하게 전개한다.

풀이

STEP III 2009, 문제 1

순수수학 • 원의 좌표기하

STEP III 2009, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

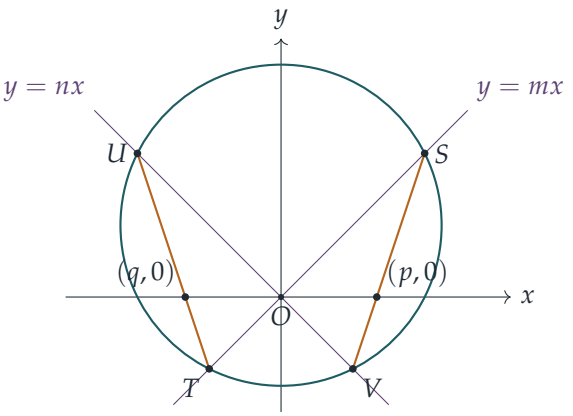
step.maths.org/questions/09-s3-q1

핵심 아이디어

네 점은 모두 원점(origin)을 지나는 직선 위에 있으므로, 각 점은 하나의 수, 즉 x좌표만으로 나타낼 수 있다. 원과 직선 $y = mx$의 교점을 구하면 두 근이 s와 t인 이차방정식(quadratic equation)을 얻는데, 근 자체는 전혀 필요하지 않고 두 근의 합과 곱만 있으면 된다. 마지막 항등식은 $p + q$의 분자를 $st, s + t, uv, u + v$만 나타나도록 묶어 주면 얻어진다.

풀이

풀이 전체에서 S와 T는 직선 $y = mx$ 위에, U와 V는 직선 $y = nx$ 위에 있고, 두 직선은 모두 원점 O를 지난다. $m \neq n$이라고 가정하고(그렇지 않으면 네 점이 모두 한 직선 위에 있다), SV와 UT가 수평이 아니어서 $y = 0$과 실제로 만난다고 가정한다. 즉 $ms \neq nv$이고 $mt \neq nu$이다.



절편 p와 q

$S(s, ms)$와 $V(v, nv)$를 지나는 직선의 기울기(gradient)는 $\dfrac{nv - ms}{v - s}$이므로, 이 직선 위의 점은 다음을 만족한다.

$$y - ms = \frac{nv - ms}{v - s}(x - s).$$

$y = 0, x = p$를 대입하면 $p - s = -\dfrac{ms(v - s)}{nv - ms}$이므로

$$p = \frac{s(nv - ms) - ms(v - s)}{nv - ms} = \frac{nsv - msv}{nv - ms} = \frac{(m - n)sv}{ms - nv},$$

이고, 이것이 구하려던 식이다. ($v = s$이면 직선 SV는 수직선이므로 $p = s$이다. 이때에도 공식은 $\frac{(m-n)s^2}{(m-n)s} = s$를 준다.)

직선 UT는 $y = mx$ 위의 점 $T(t, mt)$와 $y = nx$ 위의 점 $U(u, nu)$를 잇는데, 이는 SV가 S와 V를 잇는 것과 정확히 같은 구조이다. s를 t로, v를 u로 바꾸면

$$q = \frac{(m - n)tu}{mt - nu}.$$

s와 t에 대한 이차방정식

점 (x, mx)가 $x^2 + (y - c)^2 = r^2$ 위에 있을 필요충분조건은 $x^2 + (mx - c)^2 = r^2$, 즉

$$(1 + m^2)x^2 - 2mc\,x + c^2 - r^2 = 0.$$

이다. s와 t는 모두 이 식을 만족한다. S와 T를 직선과 원의 서로 다른 두 교점으로 잡으면 s와 t는 이 방정식의 두 근이므로, 근과 계수의 관계(relations between roots and coefficients)에 의해

$$st = \frac{c^2 - r^2}{1 + m^2}, \qquad s + t = \frac{2mc}{1 + m^2}.$$

$p + q = 0$ 보이기

직선 $y = nx$에 대해 같은 논증을 적용하면 u와 v는 $(1 + n^2)x^2 - 2nc\,x + c^2 - r^2 = 0$의 두 근이므로

$$uv = \frac{c^2 - r^2}{1 + n^2}, \qquad u + v = \frac{2nc}{1 + n^2}.$$

이제 두 절편(intercept)을 통분하여 더한다.

$$p + q = (m - n)\,\frac{sv(mt - nu) + tu(ms - nv)}{(ms - nv)(mt - nu)}.$$

생각해 보기 s, t, u, v 네 개가 모두 들어 있는 분자를 어떻게 다룰 수 있을까?

분자를 전개하고, 계수 m 또는 n에 따라 항을 짝지어 묶는다.

$$\begin{aligned} sv(mt-nu)+tu(ms-nv) &= mstv-nsuv+mstu-ntuv \\ &= mst(u+v)-nuv(s+t). \end{aligned}$$

이제 모든 항이 이미 알고 있는 대칭함수(symmetric function)이다. 대입하면

$$\begin{aligned} mst(u+v)-nuv(s+t) &= m\cdot\frac{c^2-r^2}{1+m^2}\cdot\frac{2nc}{1+n^2}-n\cdot\frac{c^2-r^2}{1+n^2}\cdot\frac{2mc}{1+m^2} \\ &= \frac{2mnc(c^2-r^2)}{(1+m^2)(1+n^2)}-\frac{2mnc(c^2-r^2)}{(1+m^2)(1+n^2)}=0. \end{aligned}$$

가정에 의해 분모 $(ms-nv)(mt-nu)$는 0이 아니므로 $p+q=0$이고, 이것이 증명하려던 것이다.

검산

그림에서처럼 $c=1, r^2=5, m=1, n=-1$로 잡자. 이차방정식은 $x^2-x-2=0$과 $x^2+x-2=0$이므로 $s=2, t=-1$이고 $u=-2, v=1$이다. 그러면 $st=-2=\frac{1-5}{2}$, $s+t=1=\frac{2}{2}$로 예측과 일치한다. $S(2,2)$에서 $V(1,-1)$로 가는 직선은 기울기가 3이고 $p=\frac{4}{3}$에서 $y=0$과 만나며, 이는 $\frac{2\cdot2\cdot1}{2+1}$과 일치한다. $U(-2,2)$에서 $T(-1,-1)$로 가는 직선은 $q=-\frac{4}{3}$에서 만난다. 무작위로 만든 원과 직선 16 000쌍으로 컴퓨터 검사를 해 보았더니 매번 $|p+q|$가 10^{-12}보다 작았다.

흔한 실수

- 점을 잘못 짝짓는 실수: q는 U와 T에서 나오므로 바꿔치기는 $s\to t, v\to u$이다. 대신 $s\leftrightarrow v$로 바꾸면 다시 p가 나온다.
- 이차방정식을 풀어 s,t,u,v를 직접 구하려는 시도. 제곱근 때문에 계산이 감당할 수 없게 된다. 식이 깔끔하게 정리되는 것은 $mst(u+v)-nuv(s+t)$로 묶어 주기 때문이다.

STEP 너머

원의 중심 $(0,c)$가 y축 위에 있으므로, 직선 $y=0$은 원과 만나 중점이 O인 현(chord)을 만든다. 따라서 이 문제는 **나비 정리**(butterfly theorem)를 증명한 셈이다. 즉 두 현 ST와 UV가 어떤 현의 중점 O를 지나면, SV와 UT는 그 현과 O로부터 같은 거리에 있는 점에서 만난다. 우리 증명은 $c^2<r^2$을 한 번도 쓰지 않았으므로 O가 원 밖에 있을 때에도 성립한다. 이는 이 결과가 본래 사영기하학(projective geometry)에 속한다는 암시이며, 사영기하학에서 이 결과는 데자르그(Desargues)의 대합 정리(involution theorem)의 한 경우이

다. 더 읽어 보고 싶다면 콕서터(Coxeter)와 Greitzer의 *Geometry Revisited*(기하학 다시 보기)가 훌륭한 출발점이다.

풀이

STEP III 2009, 문제 2

순수수학 • 멱급수 해

> **STEP III 2009, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/09-s3-q2

핵심 아이디어

y가 거듭제곱급수(power series)이면 y', y'', x^3y도 거듭제곱급수이고, 미분방정식(differential equation)은 이들을 합친 하나의 거듭제곱급수가 항등적으로 0이라는 것을 말해 준다. 모든 x에 대하여 0이 되는 거듭제곱급수는 모든 계수가 0이므로, 미분방정식은 a_n 사이의 간단한 관계식들의 목록이 된다. 실제로 해야 할 일은 꼼꼼한 정리 작업이다. 계수를 비교하기 전에 첨자를 옮겨(shift indices) 모든 급수를 같은 x의 거듭제곱으로 나타내야 한다.

풀이

소문항 (i)

항별로 미분하면 (모든 급수가 수렴한다고 주어졌으므로 이것이 허용된다고 받아들인다),

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(a_n x^n\right) = n a_n x^{n-1}.$$

$n = 0$ 항 a_0은 상수이고 그 도함수는 0이므로, 합은 $n = 1$부터 시작한다:

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

이것이 요구된 결과이다. 같은 일을 한 번 더 하면, y'의 $n = 1$ 항 a_1은 상수이므로

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

a_3까지 풀어 쓰면 다음과 같다:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots,$$
$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots,$$
$$y'' = 2a_2 + 6a_3 x + \cdots.$$

소문항 (ii)

$xy'' - y' + 4x^3 y$의 모든 항을 x^{n-1}에 관한 급수로 쓴다. 먼저,

$$xy'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1}.$$

이 합의 $n = 1$ 항은 $1 \cdot 0 \cdot a_1 = 0$이 될 것이므로, 이 합도 $n = 1$부터 시작해도 된다. 그러면

$$xy'' - y' = \sum_{n=1}^{\infty} \left[n(n-1) - n\right] a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-2)a_n x^{n-1}.$$

마지막 항은 $4x^3 y = \sum_{m=0}^{\infty} 4a_m x^{m+3}$이고, $m = n - 4$로 놓으면 거듭제곱이 x^{n-1}이 된다:

$$4x^3 y = \sum_{n=4}^{\infty} 4a_{n-4}\, x^{n-1}.$$

? 생각해 보기 애초에 왜 계수를 비교할 수 있을까?

방정식은 급수가 수렴하는 구간의 모든 x에 대하여 $xy'' - y' + 4x^3 y = 0$이라는 뜻이므로, 합친 거듭제곱급수는 그 구간에서 영함수이다. 수렴하는 거듭제곱급수가 어떤 구간에서 0이 되는 것은 모든 계수가 0일 때뿐이다 ($x = 0$을 대입하여 상수항을 얻고, x로 나누고, 이를 반복한다). 따라서 x의 각 거듭제곱의 계수는 0이어야 한다.

계수는 다음과 같다:

- x^0 ($n = 1$): $1 \cdot (-1)\, a_1 = 0$이므로, 요구된 대로 $a_1 = 0$이다.
- x^1 ($n = 2$): $2 \cdot 0 \cdot a_2 = 0$은 자동으로 성립하므로, a_2는 자유롭게 정할 수 있다.
- x^2 ($n = 3$): $3 \cdot 1 \cdot a_3 = 0$이므로 $a_3 = 0$이다.
- $n \geq 4$일 때 x^{n-1}: $n(n-2)a_n + 4a_{n-4} = 0$.

$n \geq 4$이면 $n(n-2) \neq 0$이므로 이것으로 나눌 수 있고, 그러면

$$a_n = -\frac{4}{n(n-2)}\, a_{n-4} \qquad (n \geq 4),$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다. (어떤 방정식도 그것 하나만을 단독으로 포함하지 않으므로 a_0 역시 자유롭게 정할 수 있다.)

$a_0 = 1, a_2 = 0$인 경우. 점화식(recurrence)은 a_n을 a_{n-4}에만 연결하므로, 계수들은 n을 4로 나눈 나머지에 따라 네 개의 사슬로 나뉜다. $a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0$에서 시작하는 사슬은 전부 0이므로, a_{4k}만 0이 아닐 수 있다. $k \geq 1$에 대하여 $n = 4k$로 놓으면,

$$a_{4k} = -\frac{4}{4k(4k-2)}\, a_{4k-4} = -\frac{1}{2k(2k-1)}\, a_{4k-4}.$$

$a_0 = 1$에서 시작하여 각 단계마다 -1을 곱하고 계승(factorial)의 다음 두 인수로 나누므로,

$$a_{4k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}.$$

(검산: $a_4 = -\frac{1}{2}, a_8 = -\frac{1}{12} \cdot (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{24}$.) 따라서

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{4k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x^2)^{2k}}{(2k)!} = \cos(x^2),$$

이고, 이는 매클로린 급수(Maclaurin series) $\cos u = \sum_k (-1)^k u^{2k}/(2k)!$에 $u = x^2$를 대입한 것이다. 이것이 요구된 결과이다.

$a_0 = 0, a_2 = 1$인 경우. 이제 a_0, a_1, a_3에서 시작하는 사슬은 모두 0이고, a_{4k+2}만 살아남는다. $k \geq 1$에 대하여 $n = 4k + 2$로 놓으면,

$$a_{4k+2} = -\frac{4}{(4k+2)\,4k}\, a_{4k-2} = -\frac{1}{(2k+1)\,2k}\, a_{4k-2},$$

이고, $a_2 = 1$로부터 $a_{4k+2} = (-1)^k/(2k+1)!$를 얻는다. 그러므로

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{4k+2}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x^2)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin(x^2).$$

검산

직접 대입해 본다. $y = \sin(x^2)$에 대하여 $y' = 2x\cos(x^2)$이고 $y'' = 2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2)$이므로

$$xy'' - y' + 4x^3 y = 2x\cos(x^2) - 4x^3\sin(x^2) - 2x\cos(x^2) + 4x^3\sin(x^2) = 0.$$

$\cos(x^2)$에 대해서도 마찬가지로 성립한다. 수치적으로, $x = 1.2$에서 코사인 급수의 처음 40개 항의 합은 $0.1304237\ldots$이며, 이는 $\cos(1.44)$와 일치한다. 또한 두 답 모두 $x = 0$에서 타당하다: $\cos 0 = 1 = a_0$이고, 0 근처에서 $\sin(x^2) \approx x^2$이므로 $a_2 = 1$이다.

흔한 실수

- 첨자를 옮기기 전에 계수를 비교하여, 한 급수의 a_n을 다른 급수의 a_n과 짝지어 버리는 실수. 이 둘은 서로 다른 x의 거듭제곱에 곱해져 있는데도 말이다.

- $a_3 = 0$임을 잊는 실수. 이것이 있어야 사슬 $a_3, a_7, a_{11}, \ldots$이 모두 없어진다.
- $n(n-2)$가 $n \geq 4$에서 0이 아님을 밝히지 않고 이것으로 나누는 실수. $n = 2$에서는 이것이 0이며, 바로 그 때문에 a_2를 자유롭게 정할 수 있다.

STEP 너머

이것은 가장 단순한 형태의 프로베니우스 방법(method of Frobenius)이다. 점 $x = 0$은 이 방정식의 **정칙 특이점**(*regular singular point*)인데, 그곳에서 y''의 계수가 0이 되기 때문이다. 일반 이론은 때로는 실패하는 보통의 거듭제곱급수 하나가 왜 여기서는 성공하는지를 설명해 준다 (결정 방정식의 근(indicial roots)인 0과 2는 정수만큼 차이가 난다). 같은 방법으로 베셀(Bessel) 함수와 르장드르(Legendre) 함수를 얻는다. 항별 미분을 정당화하려면 균등수렴(uniform convergence)이 필요한데, 이는 대학 1학년 해석학에서 다룬다. 두 아이디어 모두에 대해서는 Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*와 Abbott, *Understanding Analysis*를 참고하라.

풀이

STEP III 2009, 문제 3

순수수학 • 극한과 곡선의 개형

STEP III 2009, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/09-s3-q3

핵심 아이디어

이 함수가 $t = 0$에서 정의되지 않는 것은 오직 $0/0$ 꼴 때문이므로, 거듭제곱급수(power series)를 쓰면 그곳에서 함숫값이 "무엇이어야 하는지" 알 수 있다. 소문항 (ii)는 모든 것을 공통분모(common denominator)로 통분하는 문제이다. 이때 나타나는 우함수(even function)는 사실 $\frac{t}{2}\coth\frac{t}{2}$가 모습을 바꾼 것이다. 소문항 (iii)에서 $f'(t)$의 부호는 전적으로 분자(numerator)에 의해 결정되는데, 그 분자가 바로 $\mathrm{e}^t(1-t)-1$이다. 문제에 이 부등식(inequality)이 등장하는 이유가 여기에 있다.

풀이

소문항 (i)

$\mathrm{e}^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \cdots$를 이용하면, $t \neq 0$일 때 인수 t를 약분할 수 있다.

$$f(t) = \frac{t}{t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \cdots} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{6}t^2 + \cdots} \longrightarrow 1 \quad \text{단, } t \to 0,$$

분모(denominator)가 1로 수렴하기 때문이다. 따라서 $\lim_{t\to 0} f(t) = 1$이다.

몫의 미분법(quotient rule)에 의해

$$f'(t) = \frac{(\mathrm{e}^t - 1) - t\,\mathrm{e}^t}{(\mathrm{e}^t - 1)^2}.$$

분자와 분모가 모두 0으로 수렴하므로 각각을 전개한다. 분자는

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^t - 1 - t\,\mathrm{e}^t &= \left(t + \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{6}t^3 + \cdots\right) - \left(t + t^2 + \tfrac{1}{2}t^3 + \cdots\right) \\ &= -\tfrac{1}{2}t^2 - \tfrac{1}{3}t^3 + \cdots,\end{aligned}$$

이고, 분모는 $\left(t+\frac{1}{2}t^2+\cdots\right)^2 = t^2\left(1+\frac{1}{2}t+\cdots\right)^2$이다. 분자와 분모를 t^2으로 나누면

$$f'(t) = \frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}t+\cdots}{\left(1+\frac{1}{2}t+\cdots\right)^2} \longrightarrow -\frac{1}{2} \quad \text{단, } t \to 0.$$

소문항 (ii)

$g(t) = f(t) + \frac{1}{2}t$라 하자. 통분하면

$$g(t) = \frac{t}{\mathrm{e}^t-1} + \frac{t}{2} = \frac{2t+t(\mathrm{e}^t-1)}{2(\mathrm{e}^t-1)} = \frac{t\,(\mathrm{e}^t+1)}{2(\mathrm{e}^t-1)}.$$

이제 t를 $-t$로 바꾸고 분자와 분모에 e^t를 곱한다.

$$g(-t) = \frac{-t\,(\mathrm{e}^{-t}+1)}{2(\mathrm{e}^{-t}-1)} = \frac{-t\,(1+\mathrm{e}^t)}{2(1-\mathrm{e}^t)} = \frac{t\,(\mathrm{e}^t+1)}{2(\mathrm{e}^t-1)} = g(t).$$

따라서 요구한 대로 $f(t)+\frac{1}{2}t$는 우함수이다. (분자와 분모를 $\mathrm{e}^{t/2}$로 나누면 $g(t) = \frac{t}{2}\coth\frac{t}{2}$임을 알 수 있는데, 이는 두 기함수(odd function)의 곱이므로 이것도 같은 사실을 보는 또 다른 방법이다.)

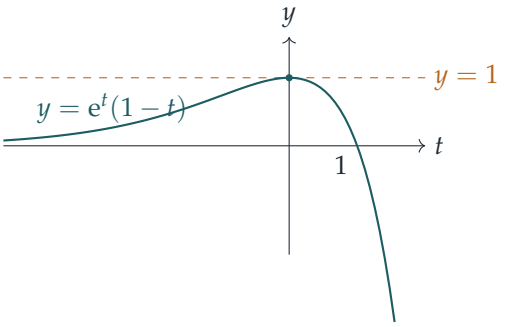
그래프를 그릴 때 유용한 결과가 하나 있다. $f(t) - f(-t) = -t$이므로, f의 그래프는 우함수의 그래프를 직선 $y = -\frac{1}{2}t$만큼 기울인 것이다.

소문항 (iii)

$h(t) = \mathrm{e}^t(1-t)$라 하자. 그러면

$$h'(t) = \mathrm{e}^t(1-t) - \mathrm{e}^t = -t\,\mathrm{e}^t,$$

이고, 이는 $t < 0$에서 양수, $t > 0$에서 음수이다. 따라서 h는 $t = 0$까지 증가하다가 그 뒤로 감소한다. 즉 유일한 전환점(turning point)은 극댓값(maximum) $h(0) = 1$이다. 또한 $t \to -\infty$일 때 $h(t) \to 0$이고, $t > 1$에서 $h(t) < 0$이다.



이 곡선은 $t = 0$에서 $y = 1$에 접하고 그 밖의 모든 곳에서는 엄격하게 그 아래에 있으므로

$$e^t(1 - t) \le 1, \quad \text{등호는 다음일 때만 성립: } t = 0.$$

? 생각해 보기 이 부등식이 $f'(t)$에 대해 무엇을 알려 주는가?

소문항 (i)에서 구한 $f'(t)$의 분자를 다시 보자.

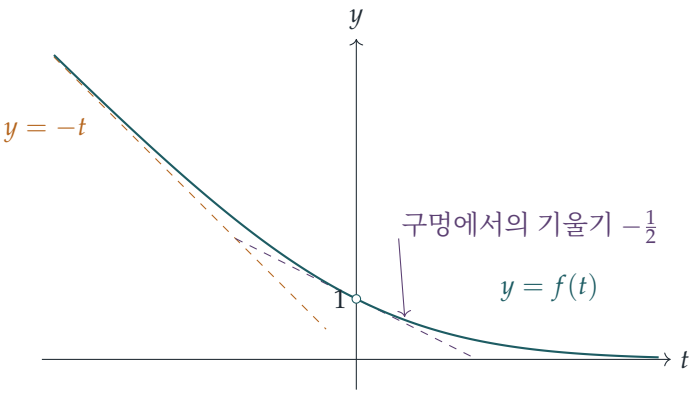
$$e^t - 1 - t\,e^t = e^t(1 - t) - 1.$$

위의 엄격한 부등식에 의해, $t \neq 0$이면 이 값은 엄격하게 음수이다. 분모 $(e^t - 1)^2$은 $t \neq 0$에서 엄격하게 양수이다. 따라서 모든 $t \neq 0$에 대해 $f'(t) < 0$이다. 특히 $f'(t) \neq 0$이므로 f는 정상점(stationary point)을 갖지 않으며, 0의 양쪽에서 각각 감소한다.

f의 그래프 그리기

지금까지 얻은 사실을 정리한다.

- t와 $e^t - 1$의 부호가 같으므로 모든 $t \neq 0$에 대해 $f(t) > 0$이다.
- 0 근처에서 그래프는 기울기(gradient) $-\frac{1}{2}$로 $(0, 1)$에 가까워진다(소문항 (i)). 단, $f(0)$이 정의되지 않으므로 그 점 자체는 빠져 있다.
- f는 전 구간에서 감소한다(소문항 (iii)).
- $t \to \infty$일 때, 지수함수가 t보다 빠르게 커지므로 $f(t) = t/(e^t - 1) \to 0^+$이다.
- $t \to -\infty$일 때 $f(t) + t = \dfrac{t\,e^t}{e^t - 1} \to 0$이므로, $y = -t$는 사점근선(oblique asymptote)이다. 이는 소문항 (ii)로부터도 얻을 수 있다. $f(t) = f(-t) - t$이고 $f(-t) \to 0$이기 때문이다.



검산

- 소문항 (ii)에 따르면 $f(-1) - f(1) = 1$이어야 한다. 수치로 계산하면 $f(1) = 1/(\mathrm{e} - 1) \approx 0.58198$, $f(-1) = \mathrm{e}/(\mathrm{e} - 1) \approx 1.58198$이고, 둘의 차는 정확히 1이다.
- 도함수 공식에 $t = \pm 10^{-4}$를 대입하면 -0.49998과 -0.50002가 나오며, 이는 극한값 $-\frac{1}{2}$와 일치한다.
- coth 꼴을 쓰면 작은 t에 대해 $g(t) \approx 1 + \frac{1}{12}t^2$이므로 $f(t) \approx 1 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{12}t^2$이고, 이는 소문항 (i)의 두 극한과 모두 맞아떨어진다.

흔한 실수

- $f'(t)$에 로피탈(L'Hôpital) 정리를 한 번만 적용하고 또 다른 $0/0$ 꼴에서 멈추는 것. 분자와 분모를 모두 t^2 차수까지 전개하면 이를 피할 수 있다.
- $\mathrm{e}^t(1 - t) \leq 1$만 증명하고 $f'(t) \neq 0$이라고 주장하는 것. $t \neq 0$에서 부등식이 **엄격해야** 하며, 이는 $t = 0$이 h의 유일한 정상점이라는 사실에서 나온다.
- 그래프를 $(0, 1)$을 채워진 점으로 지나가게 그리는 것. f는 그 점에서 정의되지 않는다.

STEP 너머

전개식 $\dfrac{t}{\mathrm{e}^t - 1} = \sum_{n \geq 0} B_n \dfrac{t^n}{n!}$은 베르누이 수(Bernoulli numbers) B_n을 정의한다. 소문항 (i)은 $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$임을 보여 주고, 소문항 (ii)는 $n \geq 3$인 모든 홀수에 대해 $B_n = 0$임을 보여 준다. 이 수들은 오일러-매클로린 합 공식(Euler–Maclaurin summation formula), 거듭제곱의 합 $1^k + 2^k + \cdots + n^k$, 그리고 $\sum 1/n^{2k}$에 대한 오일러(Euler)의 공식에 등장한다. $t = 0$에서와 같은 "구멍"을 메우는 것은 제거 가능한 특이점(removable singularity)이라는 개념이다. 극한(limit)과 연속성(continuity)을 엄밀하게 다룬 책으로는 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 이해하기)를 읽어 보라.

풀이

STEP III 2009, 문제 4

순수수학 • 라플라스 변환

> **STEP III 2009, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/09-s3-q4

핵심 아이디어

(i)–(iii)은 모두 정의 적분에 미적분을 한 줄 적용하면 된다. (i)은 두 지수함수를 합치기만 하면 되고, (ii)는 치환(substitution), (iii)은 부분적분(integration by parts)이다. (iv)는 부분적분을 두 번 해서 풀 수도 있지만, (iii)을 두 번 쓰고 sin과 cos의 변환(transform)이 서로를 결정하게 하는 편이 더 깔끔하다. 마지막 소문항에서는 목표인 $\mathrm{e}^{-pt}\cos qt$를 $\sin t \to \cos t \to \cos qt \to \mathrm{e}^{-pt}\cos qt$의 세 단계로 만들어진 것으로 보고, 각 단계에 네 결과 중 하나를 쓴다.

풀이

함수 g의 라플라스 변환(Laplace transform)을 $\mathcal{L}[g](s)$로 쓰면 $F = \mathcal{L}[f]$이다. "적당한"이라는 말은 적분이 수렴(converge)한다는 뜻이고, 특히 $s > 0$일 때 $t \to \infty$이면 $\mathrm{e}^{-st}f(t) \to 0$이라고 가정한다.

소문항 (i)

지수함수를 합치면

$$\mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{-bt}f(t)\right](s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathrm{e}^{-bt}f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s+b)t}f(t)\,\mathrm{d}t = F(s+b),$$

이고, 이는 F의 정의에 $s+b$를 대입한 값이다. $s+b > 0$이므로 이렇게 해도 된다.

소문항 (ii)

$u = at$로 치환하면 $t = u/a$이고 $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u/a$이다. $a > 0$이므로 적분 구간의 끝 0과 ∞는 그대로이고, 따라서

$$\mathcal{L}\big[f(at)\big](s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(at)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s/a)u} f(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{a}F\Big(\frac{s}{a}\Big),$$

이다. 여기서도 $s/a > 0$임을 이용했다.

소문항 (iii)

e^{-st}를 미분하고 $f'(t)$를 적분하는 방식으로 부분적분하면

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f'](s) &= \Big[\mathrm{e}^{-st}f(t)\Big]_0^\infty - \int_0^\infty (-s)\mathrm{e}^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \big(0 - f(0)\big) + s\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= sF(s) - f(0),\end{aligned}$$

이다. 위끝에서의 값이 사라지는 것은 $t \to \infty$일 때 $\mathrm{e}^{-st}f(t) \to 0$이기 때문이다($f$가 적당하다는 조건의 일부이다).

소문항 (iv)

$S(s) = \mathcal{L}[\sin t](s)$, $C(s) = \mathcal{L}[\cos t](s)$라 하자. $|\mathrm{e}^{-st}\sin t| \le \mathrm{e}^{-st}$이고 cos에 대해서도 마찬가지이므로 $s > 0$일 때 두 적분은 모두 수렴한다. 또 $\mathrm{e}^{-st}\sin t$와 $\mathrm{e}^{-st}\cos t$는 모두 0으로 가므로 각각에 (iii)을 적용할 수 있다.

도함수가 cos이고 $\sin 0 = 0$인 $f = \sin$에 (iii)을 적용하면

$$C(s) = sS(s).$$

도함수가 $-\sin$이고 $\cos 0 = 1$인 $f = \cos$에 (iii)을 적용하면

$$-S(s) = sC(s) - 1.$$

(상수배는 적분 밖으로 그대로 나오므로 $-\sin t$의 변환은 $-S(s)$이다.) 첫째 식을 둘째 식에 대입하면

$$-S(s) = s^2S(s) - 1 \quad\Longrightarrow\quad (s^2+1)S(s) = 1 \quad\Longrightarrow\quad S(s) = \frac{1}{s^2+1},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. 덤으로

$$C(s) = \frac{s}{s^2+1}.$$

도 얻는다.

마지막 소문항

생각해 보기 새로운 적분 없이 $\sin t$를 어떻게 $\cos qt$로 바꿀 수 있을까?

미분하면 sin이 cos이 되고(이것이 (iii)이다), t의 척도를 바꾸면 $\cos t$가 $\cos qt$가 되며(이것이 (ii)이다), 지수함수를 곱하는 것은 (i)이다. 그러니 세 단계로 나아간다.

1단계: $\cos t$. $f(t) = \sin t$로 두고 (iii)을 쓰되 F에는 (iv)를 쓰면

$$\mathcal{L}[\cos t](s) = s \cdot \frac{1}{s^2+1} - \sin 0 = \frac{s}{s^2+1}.$$

(이것은 소문항 (iv)에서 덤으로 얻은 결과이다.)

2단계: $\cos qt$. $f(t) = \cos t$, $a = q > 0$으로 두고 (ii)를 쓰면

$$\mathcal{L}[\cos qt](s) = \frac{1}{q} \cdot \frac{s/q}{(s/q)^2+1} = \frac{1}{q} \cdot \frac{sq}{s^2+q^2} = \frac{s}{s^2+q^2}.$$

3단계: $\mathrm{e}^{-pt}\cos qt$. $f(t) = \cos qt$, $b = p > 0$으로 두고 (i)을 쓰면 s를 $s+p$로 바꾸게 된다.

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{-pt}\cos qt\right](s) = \frac{s+p}{(s+p)^2+q^2}} \qquad (s > 0).$$

검산

- $p \to 0$, $q = 1$로 두면 $s/(s^2+1)$이 되어 1단계에서 구한 $\cos t$의 변환과 같다. $q \to 0$으로 두면 $1/(s+p)$가 되는데, 실제로 $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s+p)t}\,\mathrm{d}t = 1/(s+p)$이다.
- $s \to \infty$이면 $sF(s) \to 1 = \cos 0$이며, 이는 당연하다. s가 크면 가중치 $s\mathrm{e}^{-st}$가 $t = 0$ 근처에 몰리므로 $sF(s)$는 함수의 0에서의 값으로 가기 때문이다.
- 수치적으로, $s = 1$, $p = \frac{1}{2}$, $q = 2$일 때 공식은 $1.5/6.25 = 0.24$를 주고, 적분에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용한 값도 이와 일치한다. 컴퓨터로 임의의 매개변수 값에서 (i)–(iv)와 최종 답을 확인한 결과 10^{-12} 이내로 일치했다.

흔한 실수

- (ii)에서 $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u/a$에서 나오는 인수 $1/a$를 빠뜨리거나, $F(s/a)$ 대신 $F(as)$로 쓰는 실수.
- 3단계에서 s의 일부만 옮기는 실수: **모든** s가 $s+p$가 되므로 분자는 s가 아니라 $s+p$이다.
- (iii)에서 $f(0)$의 부호를 틀리는 실수: 경계항은 $0 - f(0)$이다.

STEP 너머

이 규칙들은 미분방정식(differential equation)을 푸는 라플라스 변환법의 핵심 동력이다. (iii)은 미분을 s를 곱하는 것으로 바꾸므로, 상수계수 선형 상미분방정식(linear ODE)은 $F(s)$에 대한 대수방정식이 된다. 이 방정식을 푼 다음, 여기서 얻은 것과 같은 결과들로 만든 표에서 답을 "찾아보면" 된다. 이동 규칙 (i)은 바로 감쇠 진동(damped oscillation) $\mathrm{e}^{-pt}\cos qt$가 $s = -p \pm \mathrm{i}q$에서의 극(pole)으로 나타나는 이유이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에 이 방법을 다루는 장이 통째로 있다.

풀이

STEP III 2009, 문제 5

순수수학 • 근의 대칭함수

> **STEP III 2009, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/09-s3-q5

핵심 아이디어

여기서 다루는 모든 것은 세 개의 **기본 대칭함수**(*elementary symmetric functions*)

$$e_1 = x + y + z, \qquad e_2 = yz + zx + xy, \qquad e_3 = xyz,$$

에 관한 것이다. 이 값들을 알고 나면 x, y, z는 이미 알려진 삼차방정식(cubic) $t^3 - e_1 t^2 + e_2 t - e_3 = 0$의 근(roots)이 되기 때문이다. 새로운 정보는 모두 주어진 거듭제곱의 합(power sums) 두 개를 곱하고, 어떤 교차항이 나타나는지 살펴보는 데서 나온다. 그러면 점화식(recurrence)은 삼차방정식에서 자연스럽게 따라 나온다. x, y, z 각각이 이 방정식을 만족하므로, 그 거듭제곱들도 각각 만족하는 것이다.

풀이

$S_n = x^n + y^n + z^n$으로 놓자. 그러면 주어진 조건은 $S_1 = 1$, $S_2 = 2$, $S_3 = 3$이다.

$yz + zx + xy$의 값

S_1을 제곱하면

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(yz + zx + xy),$$

이므로 $1 = 2 + 2(yz + zx + xy)$이고, 따라서

$$yz + zx + xy = -\tfrac{1}{2},$$

이다. 이것이 구하려던 결과이다.

$\sum x^2y$의 값, 그리고 xyz의 값

(한 변수의 제곱)×(그와 다른 변수) 꼴의 여섯 항을 모두 더한 것을 $T = x^2y + x^2z + y^2z + y^2x + z^2x + z^2y$로 놓자. S_2와 S_1을 곱하면 아홉 개의 항이 나오는데, 세 개의 세제곱과 T의 여섯 항이다.

$$(x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z) = (x^3 + y^3 + z^3) + T.$$

따라서 $2 \times 1 = 3 + T$이고,

$$T = -1,$$

이다. 이것이 두 번째 결과이다.

생각해 보기 이미 아는 양들의 어떤 곱에 T와 xyz가 함께 들어 있을까?

$(x + y + z)(yz + zx + xy)$를 생각해 보자. 전개하면 아홉 개의 항이 나온다. 그중 여섯 개는 $x \cdot xy = x^2y$ 꼴이고, 이것들이 바로 T의 여섯 항이다. 나머지 세 개는 $x \cdot yz, y \cdot zx, z \cdot xy$이고, 각각 xyz와 같다. 그러므로

$$(x + y + z)(yz + zx + xy) = T + 3xyz.$$

아는 값들을 대입하면 $1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 + 3xyz$이므로 $3xyz = \frac{1}{2}$이고,

$$xyz = \frac{1}{6},$$

이다. 이것이 구하려던 결과이다.

점화식

이제 $e_1 = 1, e_2 = -\frac{1}{2}, e_3 = \frac{1}{6}$임을 안다.

$$(t - x)(t - y)(t - z) = t^3 - e_1t^2 + e_2t - e_3 = t^3 - t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{6},$$

이므로 x, y, z는 각각 이 삼차방정식의 근이다. 특히

$$x^3 = x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6},$$

이고, y와 z에 대해서도 마찬가지이다. 양변에 x^{n-2}를 곱하면

$$x^{n+1} = x^n + \frac{1}{2}x^{n-1} + \frac{1}{6}x^{n-2},$$

이고, x 대신 y나 z를 넣어도 같은 식이 성립한다. 세 식을 더하면

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{2}S_{n-1} + \frac{1}{6}S_{n-2},$$

이므로

$$a = 1, \qquad b = \frac{1}{2}, \qquad c = \frac{1}{6}.$$

생각해 보기 "모든 n에 대하여"라는 조건 때문에 음의 거듭제곱에서 문제가 생기지는 않을까?

$n \geq 2$이면 x^{n-2}를 곱하는 데 아무 문제가 없다. 더 작은 n에 대해서는 x, y, z의 음의 거듭제곱이 필요한데, 이들 중 어느 것도 0이 아니므로(곱이 $\frac{1}{6} \neq 0$이다) 음의 거듭제곱이 존재한다. 따라서 이 관계식은 모든 정수 n에 대하여 성립한다. (x, y, z가 모두 실수가 아니어도 성립하며, 실제로 모두 실수인 것은 아니다. 이 삼차방정식은 약 1.431인 실근 하나와 서로 켤레인 두 복소근(complex conjugate roots)을 가진다.)

검산

- $n = 2$일 때 점화식은 $S_0 = 3$을 이용하여 주어진 값을 다시 만들어 내야 한다. 실제로 $S_2 + \frac{1}{2}S_1 + \frac{1}{6}S_0 = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3 = S_3$이다.
- 점화식에 따르면 $S_4 = 3 + 1 + \frac{1}{6} = \frac{25}{6}$이고 $S_5 = \frac{25}{6} + \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = 6$이다. 삼차방정식을 수치적으로 풀어 (근은 1.43085와 $-0.21542 \pm 0.26471\,\mathrm{i}$) 네제곱과 다섯제곱을 더하면 4.16667과 6.00000이 나와 일치한다. 같은 근들은 음의 n에 대해서도 점화식을 만족한다.

흔한 실수

- 삼차방정식의 부호를 틀리는 것. 삼차방정식은 $t^3 - e_1 t^2 + e_2 t - e_3$이므로, 여기서 $b = -e_2 = +\frac{1}{2}$이고 $c = e_3 = \frac{1}{6}$이다.
- $n = 2$에서 점화식을 확인할 때 S_0이 1이 아니라 $S_0 = 3$이라는 것을 잊는 것.

STEP 너머

이것은 뉴턴(Newton) 항등식(Newton's identities)으로, 변수가 몇 개이든 거듭제곱의 합과 기본 대칭함수를 연결해 준다. 그 바탕에는 **대칭다항식의 기본정리**(*fundamental theorem of symmetric polynomials*)가 있다. 즉, $x_1, \ldots, x_k$에 대한 모든 대칭다항식은 $e_1, \ldots, e_k$의 다항식으로 나타낼 수 있다. S_n에 대한 점화식은 특성방정식(characteristic equation)이 바로 그 삼차방정식인 선형 점화식(linear recurrence)이며, 이는 선형 차분방정식(linear difference equations)을 풀고 피보나치(Fibonacci) 수의 공식을 얻는 것과 같은 아이디어이다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 이러한 관점에서 다항식과 그 근을 전개한다.

풀이

STEP III 2009, 문제 6

순수수학 • 프톨레마이오스 정리

STEP III 2009, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/09-s3-q6

핵심 아이디어

단위원(unit circle) 위의 두 점 사이의 거리는 두 점 사이의 각에만 의존하며, 이 거리를 구하는 요령은 "평균" 각을 묶어 내는 것이다: $e^{i\beta} - e^{i\alpha}$는 $e^{i(\alpha+\beta)/2}$에 순허수를 곱한 것이다. 모든 현(chord)의 길이를 각의 차의 절반에 대한 사인으로 나타내고 나면, 큰 항등식은 삼각 항등식(trigonometric identity)이 되고, 곱을 합으로 바꾸는 공식(product-to-sum formulae)을 쓰면 두어 줄 만에 해결된다. 이때 네 점은 원에 내접하는 사각형을 이루며, 이 항등식은 그 사각형에 관한 유명한 정리이다.

풀이

현의 길이

$e^{i(\alpha+\beta)/2}$를 묶어 낸다:

$$\begin{aligned} e^{i\beta} - e^{i\alpha} &= e^{i(\alpha+\beta)/2}\left(e^{i(\beta-\alpha)/2} - e^{-i(\beta-\alpha)/2}\right) \\ &= e^{i(\alpha+\beta)/2} \cdot 2i \sin \tfrac{1}{2}(\beta-\alpha). \end{aligned}$$

$\left|e^{i(\alpha+\beta)/2}\right| = 1$이고 $|2i| = 2$이므로

$$\left|e^{i\beta} - e^{i\alpha}\right| = 2\left|\sin \tfrac{1}{2}(\beta-\alpha)\right|.$$

마지막으로 $0 < \alpha < \beta < 2\pi$이면 $0 < \frac{1}{2}(\beta-\alpha) < \pi$이므로 사인 값이 양수이고, 따라서 절댓값(modulus) 기호를 없앨 수 있다: $\left|e^{i\beta} - e^{i\alpha}\right| = 2\sin \frac{1}{2}(\beta-\alpha)$. 이로써 원하는 결과를 얻는다.

생각해 보기 애초에 $\alpha < \beta$라는 조건은 왜 있는 것일까?

이 조건이 없으면 $\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$가 $(-\pi, 0)$에 속할 수 있어서 사인 값이 음수가 되고, 공식은 음수인 길이를 내놓게 된다. 각의 순서를 정해 두는 것이 바로 절댓값 기호를 없앨 수 있게 해 주는 것이다. 또한 $|e^{i\alpha} - e^{i\beta}| = |e^{i\beta} - e^{i\alpha}|$이므로 절댓값 안의 순서는 상관없다는 점에도 주목하자.

항등식

$0 < \alpha < \beta < \gamma < \delta < 2\pi$이므로 항등식에 나타나는 모든 쌍은 증가하는 순서로 되어 있고, 따라서 첫 번째 결과를 여섯 개의 절댓값 모두에 적용할 수 있다. 공통인수 $2 \cdot 2 = 4$로 양변을 나누면, 보여야 할 것은

$$\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha)\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\gamma) + \sin\tfrac{1}{2}(\gamma-\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\alpha) = \sin\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha)\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\beta).$$

이다. 자연스러운 변수는 이웃한 점들 사이의 세 간격이다.

$$x = \tfrac{1}{2}(\beta-\alpha), \qquad y = \tfrac{1}{2}(\gamma-\beta), \qquad z = \tfrac{1}{2}(\delta-\gamma),$$

로 두면 $\frac{1}{2}(\gamma-\alpha) = x+y$, $\frac{1}{2}(\delta-\beta) = y+z$, $\frac{1}{2}(\delta-\alpha) = x+y+z$이다. 보일 명제는

$$\sin x \sin z + \sin y \sin(x+y+z) = \sin(x+y)\sin(y+z).$$

이다. 각 곱에 $2\sin P \sin Q = \cos(P-Q) - \cos(P+Q)$를 적용하면

$$\begin{aligned} 2\sin x \sin z &= \cos(x-z) - \cos(x+z), \\ 2\sin y \sin(x+y+z) &= \cos(x+z) - \cos(x+2y+z), \\ 2\sin(x+y)\sin(y+z) &= \cos(x-z) - \cos(x+2y+z). \end{aligned}$$

첫 두 줄을 더하면 $\cos(x+z)$ 항이 소거되어 정확히 세 번째 줄이 된다. 따라서 삼각 항등식이 성립하며(사실 모든 x, y, z에 대하여 성립한다), 다시 4를 곱하고 현의 길이 공식을 쓰면

$$|e^{i\alpha} - e^{i\beta}|\,|e^{i\gamma} - e^{i\delta}| + |e^{i\beta} - e^{i\gamma}|\,|e^{i\alpha} - e^{i\delta}| = |e^{i\alpha} - e^{i\gamma}|\,|e^{i\beta} - e^{i\delta}|,$$

를 얻어 증명이 끝난다.

생각해 보기 삼각 항등식은 모든 x, y, z에 대하여 성립한다. 그렇다면 $\alpha < \beta < \gamma < \delta$라는 순서는 어디에서 쓰였을까?

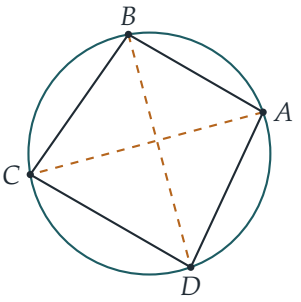
각 절댓값을 절댓값 기호 없이 $2\sin$(차의 절반)으로 바꾸는 곳에서 쓰였다. 점들의 순서가 맞지 않으면 그 사인 값 중 일부가 음수가 되어, 길이 사이의 항등식은 일반적으로 성립하지 않는다. 예를 들어 각이 $0.3, 2, 1, 4$이면($\gamma < \beta$인 경우) 좌변은 약 4.84, 우변은 약 1.15이다.

해석

A, B, C, D를 각각 점 $e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, e^{i\delta}$라 하자. 이 점들은 단위원 위에 있고, 각의 순서에 따라 시계 반대 방향으로 돌면 A, B, C, D의 순서로 만나게 된다. 따라서 $ABCD$는 변이 AB, BC, CD, DA이고 대각선(diagonal)이 AC, BD인 (볼록한) 원에 내접하는 사각형(cyclic quadrilateral)이며, 항등식은

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD.$$

임을 말해 준다.



모든 원은 단위원을 확대·축소하고 평행이동하여 얻을 수 있으며, 이 등식의 양변은 같은 비율(닮음비의 제곱)로 변하므로, 이 결과는 원에 내접하는 모든 사각형에 대하여 성립한다: **원에 내접하는 사각형에서 두 쌍의 대변의 곱의 합은 두 대각선의 곱과 같다.** 이것이 톨레미의 정리(Ptolemy's theorem)이다.

검산

- 단위원에 내접하는 정사각형($\alpha, \beta, \gamma, \delta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$)은 변의 길이가 $\sqrt{2}$이고 대각선의 길이가 2이다: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4 = 2 \cdot 2$.
- 변의 길이가 a, b인 직사각형에서는 $a^2 + b^2 =$ (대각선)^{2}을 얻는다: 톨레미의 정리는 피타고라스(Pythagoras)의 정리를 포함한다.
- 수치적으로, 순서대로 정렬된 각 네 개의 무작위 조합 10^5개에 대하여 양변이 2×10^{-15} 이내로 일치하였다.

흔한 실수

- 사인 값이 양수인지 확인하지 않고 $|e^{i\beta} - e^{i\alpha}| = 2\sin\frac{1}{2}(\beta - \alpha)$라고 쓰는 것.
- $\sin\frac{1}{2}(\delta - \alpha)$ 같은 식들을 원래의 네 각으로 나타내어 삼각함수의 덧셈정리(compound-angle formulae)로 전개하는 것: 이렇게 해도 되기는 하지만, 세 간격 x, y, z를 쓰는 것보

다 훨씬 복잡하다.

- 항등식이 성립하려면 꼭짓점이 원 위의 순서대로 놓여 있어야 한다는 것을 잊는 것: 우변에 오는 것은 아무 두 현이 아니라 대각선이다.

STEP 너머

일반적인 위치에 있는 네 점에 대해서는 같은 양들이 톨레미의 **부등식** $AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD$만을 만족하며, 등호는 네 점이 그 순서대로 한 원 위에 있을 때, 그리고 그때에만 성립한다. 복소수 항등식 $(a-b)(c-d) + (a-d)(b-c) = (a-c)(b-d)$와 삼각부등식(triangle inequality)을 이용하면 깔끔하게 증명할 수 있다. 그 배경에는 복비(cross-ratio)가 있는데, 이것은 원을 원으로 보내며 복소기하학의 중심에 있는 뫼비우스 변환(Möbius transformation)의 불변량이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이러한 아이디어를 아름답게 전개한다.

풀이

STEP III 2009, 문제 7

순수수학 • 반복 미분과 수학적 귀납법

STEP III 2009, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/09-s3-q7

핵심 아이디어

모든 것은 하나의 단순한 항등식(identity) $(1+x^2)f_0(x) = 1$에서 출발한다. 이 식을 거듭 미분하면 연속한 도함수(derivative)들 사이의 관계식이 나오고, 어떤 n에 대해 성립하는 관계식을 한 번 더 미분하면 다음 관계식이 나온다. 이것이 바로 귀납 단계(induction step)의 모양이다. (ii)에서는 $1+x^2$의 알맞은 거듭제곱을 곱하여 모든 분모를 없애고, 두 번째 귀납법(induction)으로 최고차항을 추적하여 차수(degree)를 확정한다.

풀이

소문항 (i)

$f_n(x)$를 f_n으로 쓰고, 다음 명제를 $P(n)$이라 하자.

$$(1+x^2)f_{n+1} + 2(n+1)xf_n + n(n+1)f_{n-1} = 0.$$

기저 단계(*base case*). 모든 x에 대해 $(1+x^2)f_0 = 1$이므로, 이를 미분하면($f_0' = f_1$을 이용하여) 다음을 얻는다.

$$(1+x^2)f_1 + 2xf_0 = 0.$$

각 항에 곱의 미분법(product rule)을 써서 한 번 더 미분하면

$$(1+x^2)f_2 + 2xf_1 + 2xf_1 + 2f_0 = 0, \qquad \text{즉,} \qquad (1+x^2)f_2 + 4xf_1 + 2f_0 = 0,$$

이고, 이것이 $P(1)$이다.

귀납 단계. 어떤 $n \geq 1$에 대해 모든 x에서 $P(n)$이 성립한다고 가정하자. 이는 x에 관한 항등

식이므로 미분할 수 있다. $f_k' = f_{k+1}$을 이용하면

$$\begin{aligned} 0 &= (1+x^2)f_{n+2} + 2xf_{n+1} + 2(n+1)f_n + 2(n+1)xf_{n+1} + n(n+1)f_n \\ &= (1+x^2)f_{n+2} + 2(n+2)xf_{n+1} + (n+1)(n+2)f_n, \end{aligned}$$

이다. 여기서 $2 + 2(n+1) = 2(n+2)$이고 $2(n+1) + n(n+1) = (n+1)(n+2)$임을 썼다. 이것이 $P(n+1)$이다. 따라서 귀납법에 의해 모든 $n \geq 1$에 대해 $P(n)$이 성립한다.

(같은 내용을 다르게 보면, 라이프니츠(Leibniz) 법칙을 써서 $(1+x^2)f_0 = 1$을 정확히 $n+1$번 미분하면 된다. $1+x^2$의 삼계도함수가 0이므로 세 항만 남고, 그 세 항이 바로 $P(n)$의 세 항이다.)

소문항 (ii)

처음 세 개. $P_0 = (1+x^2)f_0 = 1$이다. 다음으로

$$f_1 = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, \qquad \text{이므로} \qquad P_1 = (1+x^2)^2 f_1 = -2x.$$

몫의 미분법(quotient rule)으로 f_1을 미분하면

$$f_2 = \frac{-2(1+x^2)^2 + 2x \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{-2(1+x^2) + 8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3},$$

이므로 $P_2 = (1+x^2)^3 f_2 = 6x^2 - 2$이다. ((i)에서 $n=1$로 두어도 같은 결과 $(1+x^2)f_2 = -4xf_1 - 2f_0$을 얻는다.)

점화식. $P_n = (1+x^2)^{n+1} f_n$을 곱의 미분법으로 미분하면

$$P_n' = 2(n+1)x(1+x^2)^n f_n + (1+x^2)^{n+1} f_{n+1}.$$

양변에 $1+x^2$를 곱하면 각 항이 P로 바뀐다.

$$(1+x^2)P_n' = 2(n+1)x\,(1+x^2)^{n+1} f_n + (1+x^2)^{n+2} f_{n+1} = 2(n+1)xP_n + P_{n+1}.$$

이항하여 정리하면, 모든 $n \geq 0$에 대해

$$P_{n+1} - (1+x^2)P_n' + 2(n+1)xP_n = 0$$

이 성립하여 원하는 점화식(recurrence)을 얻는다. 여기서는 귀납법이 필요 없다. 각 n에 대해 그대로 성립하는 직접 계산이다.

생각해 보기 최고차항들이 소거되어 차수가 더 작아지는 것이 아니라, 차수가 정확히 n임을 어떻게 알 수 있을까?

귀납 과정에서 필요한 정보를 함께 실어 나르도록 조금 더 강한 명제를 증명한다. P_n은 **최고차항 계수**(*leading coefficient*)가 $a_n \neq 0$인 n**차 다항식**(*polynomial*)**이다**. $P_0 = 1$이므로 $n = 0$일 때 성립한다.

어떤 $n \geq 0$에 대해 성립한다고 가정하자. 즉 $a_n \neq 0$이고 $P_n = a_n x^n + (\text{낮은 차수 항})$이다. 점화식에 의해

$$P_{n+1} = (1+x^2)P_n' - 2(n+1)xP_n.$$

P_n이 다항식이므로 P_n'도 다항식이고, 따라서 우변은 다항식이다. 이제 $P_n' = na_n x^{n-1} + \cdots$이므로($n = 0$일 때는 이것이 0이며, $na_n = 0$과 일치한다) $(1+x^2)P_n'$은 차수가 $n+1$ 이하이고 x^{n+1}의 계수는 na_n이다. 또 $2(n+1)xP_n$은 최고차항 계수가 $2(n+1)a_n$인 $n+1$차 다항식이다. 따라서 P_{n+1}의 차수는 $n+1$ 이하이고, x^{n+1}의 계수는

$$a_{n+1} = na_n - 2(n+1)a_n = -(n+2)a_n.$$

$a_n \neq 0$이고 $n+2 > 0$이므로 이 값은 0이 아니다. 따라서 최고차항은 소거될 수 없고, P_{n+1}의 차수는 정확히 $n+1$이다. 귀납법에 의해 모든 $n \geq 0$에 대해 P_n은 n차 다항식이다.

덤으로, $a_0 = 1$과 $a_{n+1} = -(n+2)a_n$으로부터 $a_n = (-1)^n(n+1)!$을 얻으며, 이는 위의 $a_1 = -2$, $a_2 = 6$과 일치한다.

검산

- $x = 0$, $n = 1$에서 (i): P_n으로부터 $f_0(0) = 1$, $f_1(0) = 0$, $f_2(0) = -2$를 얻고, $f_2 + 0 + 2f_0 = -2 + 2 = 0$이다.
- $n = 1$일 때 점화식: $(1+x^2)P_1' - 4xP_1 = -2 - 2x^2 + 8x^2 = 6x^2 - 2 = P_2$.
- $x = 0.7$에서 수치로 확인하면, 중심차분(central difference)으로 $f_0''(0.7) \approx 0.284164$를 얻고, $(6x^2-2)/(1+x^2)^3 = 0.284164$이다. 또한 (i)과 점화식을 $n = 12$까지, 무작위로 고른 유리수 점 200개에서 유리수 연산으로 정확히 확인하였다.

흔한 실수

- 주어진 범위에 맞는 기저 단계를 증명하지 않는 것: (i)의 항등식은 $n = 1$부터 시작하므로 기저 단계는 $n = 1$이어야 하고, 이를 위해서는 f_2가 필요하다.
- $(1+x^2)P_n'$과 $2(n+1)xP_n$의 x^{n+1} 항이 소거되지 않는지 확인하지 않고 "차수가 매번 하나씩 올라간다"고 말하는 것. $n \neq 2(n+1)$이므로 소거되지 않지만, 이 점을 반드시 밝혀야 한다.

STEP 너머

복소수(complex number)를 써서 부분분수(partial fractions)로 분해하면 $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{x-\mathrm{i}} - \frac{1}{x+\mathrm{i}}\right)$이 되어 모든 도함수를 쉽게 구할 수 있고, 닫힌 형태(closed form) $P_n(x) = (-1)^n\, n!\, \mathrm{Im}\,(x+\mathrm{i})^{n+1}$을 얻는다($n = 1, 2$에 대해 확인해 보라). 이어서 $x = \cot\theta$로 놓으면 P_n의 영점(zero)이 $k = 1, \ldots, n$에 대해 $\cot\frac{k\pi}{n+1}$임을 알 수 있다. 이 영점들은 모두 실수이고 서로 다르다. 이는 고전적인 직교다항식(orthogonal polynomial)의 영점과 닮았는데, 직교다항식 역시 간단한 함수를 거듭 미분하여 만들어진다. Needham의 *Visual Complex Analysis*는 복소수가 왜 이런 계산을 길들이는지 보여 주는 훌륭한 책이다.

풀이

STEP III 2009, 문제 8

순수수학 • 극한과 점화 공식

STEP III 2009, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/09-s3-q8

이 문제는 *Beyond STEP*의 4.5 절 2학년생의 꿈에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch04/sophomores-dream.html

핵심 아이디어

모든 소문항은 로그(logarithm)가 "약하다"는 사실에 관한 것이다. 0 근처에서 $\ln x$는 아주 느리게 발산하므로, x의 어떤 양의 거듭제곱도 $\ln x$의 어떤 거듭제곱보다 강하다. 치환(substitution) $x = \mathrm{e}^{-t}$를 하면 이 사실은 지수함수가 거듭제곱보다 강하다는 주어진 사실로 바뀐다. 그리고 이 극한(limit)은 부분적분(integration by parts)을 할 때 경계항(boundary term)을 없애 준다. 마지막 소문항에서는 지수함수의 급수를 $x^x = \mathrm{e}^{x \ln x}$에 적용하면 정확히 소문항 (ii)의 적분들이 나온다.

풀이

소문항 (i)

$\ln x$는 $x > 0$에서만 정의되므로, 이 극한은 $x \to 0^+$를 뜻한다. $x = \mathrm{e}^{-t}$로 놓으면 $\ln x = -t$이고, $x \to 0^+$인 것과 $t \to \infty$인 것은 같다. 그러면

$$x^m (\ln x)^n = \mathrm{e}^{-mt}(-t)^n = (-1)^n \mathrm{e}^{-mt} t^n.$$

인수 $(-1)^n$은 고정된 부호일 뿐이고, 주어진 결과에 의해 $t \to \infty$일 때 $\mathrm{e}^{-mt} t^n \to 0$이다. 따라서

$$\lim_{x \to 0} x^m (\ln x)^n = 0.$$

두 번째 결과를 위해 $m = n = 1$로 놓으면, $x \to 0$일 때 $x \ln x \to 0$을 얻는다. 지수함수는 연

속(continuous)이므로

$$x^x = \mathrm{e}^{x\ln x} \to \mathrm{e}^0 = 1 \qquad (\text{단}, x \to 0,$$

이고, 이것이 증명하려던 것이다.

소문항 (ii)

먼저 이 적분이 의미가 있음을 확인한다. 피적분함수(integrand) $x^m(\ln x)^n$은 $(0,1]$에서 연속이고, 소문항 (i)에 의해 $x \to 0$일 때 0으로 수렴한다. 따라서 $(0,1]$에서 유계이고, I_n은 보통의 (수렴하는) 적분이다.

$u = (\ln x)^{n+1}$, $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = x^m$으로 놓고 I_{n+1}을 부분적분하면, $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{(n+1)(\ln x)^n}{x}$, $v = \dfrac{x^{m+1}}{m+1}$이므로

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \left[\frac{x^{m+1}(\ln x)^{n+1}}{m+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{m+1}}{m+1}\cdot\frac{(n+1)(\ln x)^n}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^{m+1}(\ln x)^{n+1}}{m+1}\right]_0^1 - \frac{n+1}{m+1}\int_0^1 x^m(\ln x)^n\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

? **생각해 보기** $\ln x$가 정의조차 되지 않는 $x = 0$에서 경계항은 무엇인가?

아래끝은 실제로는 $x \to 0^+$일 때의 극한을 뜻한다. 소문항 (i)에서 m과 n 대신 $m+1$과 $n+1$을 쓰면 ($m+1 \geq 1$이고 $n+1 \geq 0$이므로 둘 다 허용된다) $x^{m+1}(\ln x)^{n+1} \to 0$이다. 위끝에서는 $\ln 1 = 0$이고 $n+1 \geq 1$이므로 그 항도 0이다. 따라서 대괄호 부분은 사라지고

$$I_{n+1} = -\frac{n+1}{m+1}\,I_n,$$

이며, 이것이 증명하려던 것이다.

I_n의 값을 구하기 위해

$$I_0 = \int_0^1 x^m\,\mathrm{d}x = \frac{1}{m+1}.$$

에서 출발한다. 점화식(recurrence relation)의 각 단계는 $k = 1, 2, \ldots, n$에 대하여 $-\dfrac{k}{m+1}$을 곱하므로

$$I_n = \left(-\frac{1}{m+1}\right)\left(-\frac{2}{m+1}\right)\cdots\left(-\frac{n}{m+1}\right)\frac{1}{m+1} = \frac{(-1)^n\,n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

(한 줄짜리 귀납법(induction)으로 이를 확인할 수 있다. n에 대해 성립하면 점화식에 의해 $-\frac{n+1}{m+1}\cdot\frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(m+1)^{n+2}}$이다.)

소문항 (iii)

$0 < x \le 1$에 대하여 $x^x = \mathrm{e}^{x\ln x}$로 쓰고 지수급수(exponential series)를 이용하면

$$x^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x\ln x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n(\ln x)^n}{n!}.$$

($x = 0$에서의 값은 적분에 영향을 주지 않는다. 소문항 (i)에 의해 함수 x^x는 그곳에서 1로 수렴하므로 유계이고, 이 적분은 보통의 적분이다.)

이제 항별로 적분한다. $n = 0$인 항은 $\int_0^1 1\,\mathrm{d}x = 1$이다. $n \ge 1$이면 n번째 항은 소문항 (ii)에서 $m = n$인 I_n이다 (이때 m은 양의 정수이므로 허용된다).

$$\frac{1}{n!}\int_0^1 x^n(\ln x)^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n!}\cdot\frac{(-1)^n\,n!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

이 공식은 $n = 0$일 때에도 1을 준다. 따라서

$$\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} = 1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{3}\right)^3 - \left(\tfrac{1}{4}\right)^4 + \cdots,$$

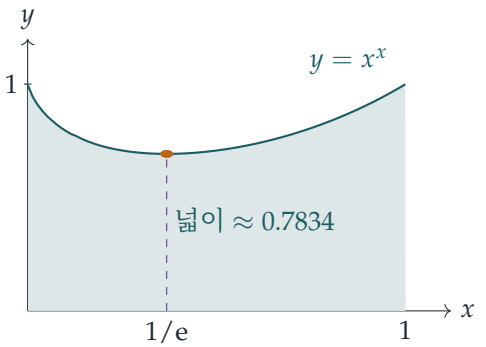
이고, 이것이 구하려던 결과이다.

? 생각해 보기 무한합을 항별로 적분해도 되는가?

자동으로 되는 것은 아니지만, 여기서는 $x\ln x$가 작게 유지되므로 안전하다. 그 도함수는 $\ln x + 1$이므로 $(0,1]$에서 $x = 1/\mathrm{e}$일 때 최솟값을 가지며, $|x\ln x| \le 1/\mathrm{e} < 1$이다. $u = x\ln x$라 하고 급수를 u^N 항까지에서 멈추면, $(0,1]$의 모든 x에 대하여 나머지는

$$\left|\sum_{n>N}\frac{u^n}{n!}\right| \le \sum_{n>N}\frac{|u|^n}{n!} \le \sum_{n>N}\frac{1}{n!} \le \frac{2}{(N+1)!}$$

를 만족한다. 길이가 1인 구간에서 적분하면, 잘라낸 항별 적분(term-by-term integration)의 오차는 많아야 $2/(N+1)!$이고, 이는 0으로 수렴한다. 따라서 적분은 급수의 합과 같다.



검산

- 소문항 (ii)에서 $m = 1, n = 1$로 놓으면 $\int_0^1 x \ln x \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{4}$이고, 이는 직접 부분적분한 결과 ($[\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2]_0^1 = -\frac{1}{4}$)와 일치한다.
- 수치적으로, 중점 공식(midpoint rule)에 의해 $\int_0^1 x^x \, \mathrm{d}x \approx 0.7834305$이고, 부분합(partial sums) $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{27} - \frac{1}{256} + \frac{1}{3125} - \cdots$은 항들이 매우 빠르게 작아지므로 몇 개의 항만으로 0.7834305에 자리 잡는다.
- 그래프는 최솟값 $\mathrm{e}^{-1/\mathrm{e}} \approx 0.69$와 1 사이에 있으므로 넓이는 0.69와 1 사이여야 하며, 실제로 그렇다.

흔한 실수

- 0에서의 경계항을 아무 설명 없이 버리는 것. 이것이 바로 소문항 (i)의 핵심이며, $m + 1 \geq 1$이 필요하다.
- I_n의 부호를 틀리는 것. $(0, 1)$에서 $\ln x < 0$이므로 I_n은 $(-1)^n$과 같은 부호를 가진다.
- 소문항 (iii)에서 $n = 0$인 항을 잊는 것. 맨 앞의 1은 여기서 나온다.

STEP 너머

마지막 항등식은 "2학년생의 꿈"(sophomore's dream)이라고 불리며, 1697년에 요한 베르누이(Johann Bernoulli)가 발견했다. 우리가 정당화해야 했던 단계, 즉 적분과 무한합의 순서를 바꾸는 것은 대학 1학년 해석학(analysis)의 중심 주제이다. 이는 급수가 **균등하게** 수렴할 때, 즉 균등수렴(uniform convergence)할 때 안전하며, 우리의 나머지 항 評價가 보여준 것이 바로 이것이다 (이는 바이어슈트라스 M-판정법(Weierstrass M-test)의 한 예이다). Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 균등수렴과 항별 적분이 언제 가능한지를 매우 읽기 쉽게 설명한다.

풀이

STEP III 2009, 문제 9

역학 • 포물체 궤적의 각

STEP III 2009, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

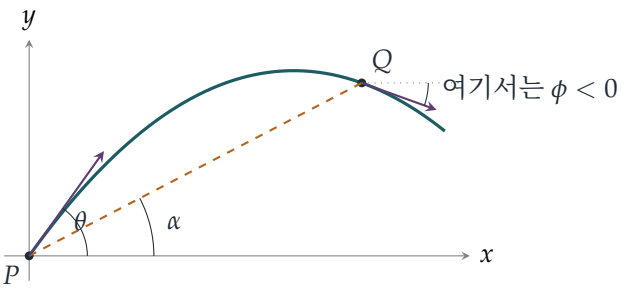
step.maths.org/questions/09-s3-q9

핵심 아이디어

포물체 운동(projectile motion)에서 수평 방향 속도는 변하지 않고, 수직 방향 속도는 일정한 비율로 변한다. 따라서 P와 Q 사이의 평균 수직 속도는 양 끝에서의 값의 평균일 뿐이고, 현(chord) PQ의 기울기(gradient)는 양 끝에서의 기울기의 평균이다. 이것으로 소문항 (i)이 한 줄에 해결된다. 소문항 (ii)에서는 ($\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$로 쓰고 나면) 궤적(trajectory)의 방정식이 $\tan\theta$에 대한 이차방정식(quadratic equation)이 되고, 나머지는 근의 합과 곱(sums and products of roots)이 해결해 준다.

풀이

입자는 공기 저항 없이 일정한 중력 g만 받으며 자유롭게 움직인다고 모형화한다. P를 원점으로 잡고, x축은 수평 방향의 양의 방향으로, y축은 연직 위쪽으로 잡는다. 발사 속력을 u라 하고 $Q = (X, Y)$라 하자. $X > 0$이라고 가정한다. 즉 Q는 P의 양의 방향 쪽에 있으므로 수평 속도 $u\cos\theta$는 양수이고, 각 $\theta, \phi, \theta', \phi'$는 모두 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$에 속한다. ($Q$가 P의 바로 위나 바로 아래에 있다면 P와 Q에서의 각이 모두 $\pm\frac{\pi}{2}$가 되어 문제가 아무 내용도 담지 않게 된다.) 그러면 $\tan\alpha = Y/X$이다.



소문항 (i)

수평 속도는 $u\cos\theta$로 일정하다. 수직 속도는 P에서 $u\sin\theta$이고 Q에서는 v_Q라 하자. 수직 속도는 일정한 비율 g로 감소하므로 시간에 대한 일차함수(linear function)이다. 따라서 P에서 Q까지 날아가는 데 걸리는 시간을 T라 하면

$$X = (u\cos\theta)\,T, \qquad Y = \frac{u\sin\theta + v_Q}{2}\,T,$$

이다. 구간에서 일차함수의 평균은 양 끝값의 평균이기 때문이다. 각 점에서 운동 방향은 속도의 방향이므로 $\tan\theta = \dfrac{u\sin\theta}{u\cos\theta}$이고 $\tan\phi = \dfrac{v_Q}{u\cos\theta}$이다. 나누면

$$\tan\alpha = \frac{Y}{X} = \frac{1}{2}\left(\frac{u\sin\theta}{u\cos\theta} + \frac{v_Q}{u\cos\theta}\right) = \tfrac{1}{2}(\tan\theta + \tan\phi),$$

이 되고, 이는 곧 $\tan\theta + \tan\phi = 2\tan\alpha$이다. 이로써 증명되었다.

소문항 (ii)

이차방정식. $x = ut\cos\theta$, $y = ut\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$에서 t를 소거하면 궤적

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\theta} = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2}\left(1+\tan^2\theta\right).$$

을 얻는다. $k = \dfrac{gX^2}{2u^2}$라 두면 이는 양수이다. 경로가 (X, Y)를 지나므로 $T = \tan\theta$는

$$kT^2 - XT + (Y + k) = 0.$$

을 만족한다. 두 번째 궤적도 같은 u, X, Y를 가지므로 $\tan\theta'$도 같은 방정식을 만족한다. 두 궤적은 서로 다르므로 $\theta \neq \theta'$이고, tan은 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$에서 일대일(one-to-one)이므로 $\tan\theta$와 $\tan\theta'$는 이 방정식의 **두** 근이다. 따라서

$$\tan\theta + \tan\theta' = \frac{X}{k}, \qquad \tan\theta\tan\theta' = \frac{Y+k}{k} = 1 + \frac{Y}{k}.$$

첫 번째 결과. 탄젠트의 덧셈정리(compound-angle formula)에 의해

$$\tan(\theta+\theta') = \frac{\tan\theta + \tan\theta'}{1 - \tan\theta\tan\theta'} = \frac{X/k}{-Y/k} = -\frac{X}{Y} = -\cot\alpha.$$

이다. 여기에는 $Y \neq 0$이 필요하다. $Y = 0$이면($\alpha = 0$이므로 $\cot\alpha$가 정의되지 않는다) 두 근의 곱이 1이 되고, 이는 $\theta + \theta' = \frac{\pi}{2}$를 뜻한다. 평지에서 같은 사거리를 주는, 익숙한 서로 여각(complementary angles)인 두 각이다. 그런 의미에서 결과는 여전히 성립한다.

두 번째 결과. $t = \tan\alpha = Y/X$, $s = \tan\theta + \tan\theta' = X/k$라 하자. 그러면 $Y/k = ts$이므로 $\tan\theta\tan\theta' = 1 + ts$이다. 소문항 (i)을 각 궤적에 적용하면

$$\tan\phi = 2t - \tan\theta, \qquad \tan\phi' = 2t - \tan\theta'.$$

이다. 따라서

$$\tan\phi + \tan\phi' = 4t - s,$$
$$1 - \tan\phi\tan\phi' = 1 - \left(4t^2 - 2ts + \tan\theta\tan\theta'\right) = 1 - 4t^2 + 2ts - 1 - ts = t(s - 4t).$$

이 두 값이 동시에 0일 수는 없다. $\tan\phi' = -\tan\phi$이면 $\tan\phi\tan\phi' = -\tan^2\phi \le 0 \neq 1$이기 때문이다. $Y \neq 0$이고(따라서 $t \neq 0$) $s \neq 4t$일 때

$$\tan(\phi + \phi') = \frac{4t - s}{t(s - 4t)} = -\frac{1}{t} = -\cot\alpha = \tan(\theta + \theta').$$

이다. 나머지 경우에는 $1 - \tan\phi\tan\phi'$와 $1 - \tan\theta\tan\theta'$가 모두 0이거나($t = 0$), $\tan(\phi + \phi')$와 $\tan(\theta + \theta')$가 모두 무한대이다. 따라서 어느 경우든 $\phi + \phi'$와 $\theta + \theta'$는 탄젠트 값이 같거나, 둘 다 $\frac{\pi}{2}$의 홀수 배이다. 어느 쪽이든

$$\theta + \theta' - (\phi + \phi') = n\pi \quad \text{적당한 정수} n.$$

생각해 보기 탄젠트 값이 같다는 것만으로는 각이 π의 배수 차이까지만 결정된다. 그 배수가 정확히 π 하나라는 것을 어떻게 알 수 있을까?

각의 크기를 이용한다. 각 궤적에서 기울기는 $\tan\theta - \dfrac{gx}{u^2\cos^2\theta}$이고, 이는 x가 증가함에 따라 순감소한다. $X > 0$이므로 $\tan\phi < \tan\theta$이고, 따라서 $\phi < \theta$이다. 마찬가지로 $\phi' < \theta'$이다. 네 각 모두 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$에 속하므로 $0 < \theta - \phi < \pi$이고 $0 < \theta' - \phi' < \pi$이다. 더하면

$$0 < n\pi = (\theta + \theta') - (\phi + \phi') < 2\pi,$$

이므로 $n = 1$이고, $\theta + \theta' = \pi + \phi + \phi'$이다. 이로써 증명되었다.

검산

- $X = 1$, $Y = \frac{1}{2}$, $u^2 = 4g$로 잡으면 $k = \frac{1}{8}$이다. 이차방정식은 $T^2 - 8T + 5 = 0$이 되고, 근은 $4 \pm \sqrt{11}$이다. 그러면 $\tan(\theta + \theta') = 8/(1 - 5) = -2 = -\cot\alpha$이다. 수치로 계산하면 $\theta + \theta' \approx 2.0344$이고 $\pi + \phi + \phi' \approx 2.0344$이다. 여기서 $\tan\phi = 1 - \tan\theta$, $\tan\phi' = 1 - \tan\theta'$이다.
- 평지($Y = 0$): $\theta + \theta' = \frac{\pi}{2}$이고, 대칭성에 의해 $\phi = -\theta$, $\phi' = -\theta'$이다. 따라서 $\pi + \phi + \phi' = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$로, 당연히 그래야 하는 대로이다.
- 운동을 수치적으로 단계별 계산하여 소문항 (i)을 확인했고, 두 궤적이 존재하는 u, X, Y의 무작위 선택 20,000가지에 대해 소문항 (ii)의 두 결과를 모두 검증했다.

흔한 실수

- 탄젠트 값이 같다는 것만으로 $\theta + \theta' = \pi + \phi + \phi'$라고 결론 내리는 것. 탄젠트 값이 같으면 각은 π의 배수 차이까지만 정해지므로, 어떤 배수인지 확정하려면 부등식 $\phi < \theta$와 $\phi' < \theta'$가 필요하다.
- $\tan\theta$와 $\tan\theta'$가 왜 같은 이차방정식의 **서로 다른 두** 근인지 설명하지 않는 것. 궤적이 서로 다르고 tan이 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$에서 일대일이므로 두 값은 서로 다르다.

STEP 너머

소문항 (ii)는 가역성(reversibility)의 관점에서 멋지게 해석할 수 있다. 어느 경로든 거꾸로 따라가면 Q에서 P로, 각 $\phi + \pi$로 발사된 포물체가 된다. 따라서 네 각은 양 끝 사이의 대칭성으로 서로 묶여 있고, 관계식 $\theta + \theta' = \pi + \phi + \phi'$가 바로 그 대칭성을 표현한다. (마찰이나 항력이 없을 때) 뉴턴(Newton)의 법칙이 갖는 시간 반전 대칭(time-reversal symmetry)은 대학 역학 전반을 관통하는 주제이다. 포물체 운동을 비롯한 여러 내용을 대학 1학년 수준에서 꼼꼼하게 다룬 책으로는 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 참고하라.

풀이

STEP III 2009, 문제 10

역학 • 단순 조화 운동

STEP III 2009, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/09-s3-q10

핵심 아이디어

평형(equilibrium) 상태의 압축량(compression) d는 용수철의 강성(stiffness)을 직접 언급하지 않고도 알려 주기 위해 주어진 것이다. 평형 상태에서는 용수철의 힘이 무게와 균형을 이루므로 $k/m = g/d$이다. 그다음에는 뉴턴의 제2법칙(Newton's second law)에 의해 평형 위치를 중심으로 한 단순 조화 운동(simple harmonic motion)이 나오고, 낙하 높이 h는 오직 초기 속력을 통해서만 들어온다. 입자는 용수철이 더 이상 입자를 밀 수 없게 될 때 용수철에서 떨어지는데, 이는 압축량이 다시 0이 될 때 일어난다.

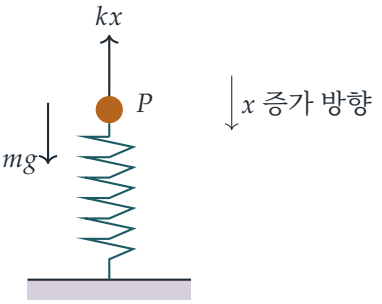
풀이

미분방정식

P를 질량 m인 입자로, 용수철을 강성 k로 훅의 법칙(Hooke's law)을 따르는 가벼운 용수철로 모형화하고, 공기 저항(air resistance)은 무시한다. P가 용수철 위에 정지해 있을 때 P에 작용하는 힘은 아래 방향의 무게 mg와 위 방향의 용수철 힘 kd이므로

$$kd = mg, \qquad \text{즉,} \qquad \frac{k}{m} = \frac{g}{d}.$$

이제 떨어뜨린 경우를 생각하자. x를 아래 방향으로 측정하고(이것이 압축량이다), 충돌하는 순간을 $t = 0$으로 잡는다. P가 용수철에 닿아 있는 동안 P에 작용하는 힘은 그림과 같다.



용수철이 가벼우므로 용수철이 P에 작용하는 힘은 정확히 위 방향으로 kx이다(가벼운 용수철은 양 끝에서 힘을 그대로 전달한다). 아래 방향을 양으로 잡고 뉴턴의 제2법칙을 적용하면 $m\ddot{x} = mg - kx$이므로

$$\ddot{x} + \frac{g}{d}x = g, \qquad 0 \le t \le T.$$

방정식 풀기

이것은 $x = d$를 중심으로 하는 단순 조화 운동이며

$$\omega = \sqrt{g/d}.$$

특수해(particular solution)는 상수 $x = d$이고 여함수(complementary function)는 $B\cos\omega t + C\sin\omega t$이므로, 일반해(general solution)는

$$x = d + B\cos\omega t + C\sin\omega t.$$

초기 조건(initial conditions)은 낙하 과정에서 얻는다. $t = 0$일 때 용수철에 막 닿았으므로 $x(0) = 0$이다. 또 P는 높이 h만큼 자유 낙하(free fall)했으므로 속력은 $\sqrt{2gh}$이고 방향은 아래, 즉 x가 증가하는 방향이다. 따라서

$$\begin{aligned} x(0) = d + B = 0 \qquad &\Rightarrow \quad B = -d, \\ \dot{x}(0) = C\omega = \sqrt{2gh} \qquad &\Rightarrow \quad C = \sqrt{2gh}\,\sqrt{d/g} = \sqrt{2hd}. \end{aligned}$$

그러므로

$$x = d - d\cos\omega t + \sqrt{2hd}\,\sin\omega t, \qquad A = d, \quad B = -d, \quad C = \sqrt{2hd}, \quad \omega = \sqrt{g/d}.$$

분리되는 시각

? 생각해 보기 P는 정확히 언제 접촉을 잃는가?

용수철은 P에 붙어 있지 않으므로 밀 수는 있어도 당길 수는 없다. P에 작용하는 접촉력은 용수철 힘 kx이며, 이 힘은 $x > 0$인 동안 양수로 유지되다가 P가 위로 움직이면서 x가 다시

0이 될 때 O으로 떨어진다. 만약 운동이 그 지점을 넘어 계속된다면 방정식은 용수철이 아래로 당기는 힘을 요구하게 되는데, 용수철은 그런 힘을 줄 수 없다. 따라서 T는 $x = 0$이 되는 첫 번째 양의 시각이다.

이를 구하기 위해 진동하는 부분을 하나의 코사인으로 나타낸다. $R = \sqrt{d^2 + 2hd}$로 두고 예각 φ를

$$\cos\varphi = \frac{d}{R}, \qquad \sin\varphi = \frac{\sqrt{2hd}}{R},$$

로 정의하면 $\tan\varphi = \sqrt{2h/d}$이고 $\varphi = \arctan\sqrt{2h/d}$이다. 그러면 $d\cos\omega t - \sqrt{2hd}\sin\omega t = R\cos(\omega t + \varphi)$이고

$$x = d - R\cos(\omega t + \varphi).$$

따라서 $x = 0$인 것은 정확히 $\cos(\omega t + \varphi) = d/R = \cos\varphi$일 때이다. t가 0부터 증가하면 각 $\omega t + \varphi$는 φ에서 출발하고, 구간 $\varphi < \omega t + \varphi < 2\pi - \varphi$에서는 $\cos(\omega t + \varphi) < \cos\varphi$이므로 그 구간에서 $x > 0$이다. 처음으로 다시 $\cos\varphi$가 되는 것은

$$\omega T + \varphi = 2\pi - \varphi, \qquad \text{즉,} \qquad \omega T = 2\pi - 2\varphi.$$

일 때이다. $\omega = \sqrt{g/d}$로 나누면

$$T = \sqrt{d/g}\left(2\pi - 2\arctan\sqrt{2h/d}\right),$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

검산

- $h = 0$이면 입자는 자연 길이 상태의 용수철 위에 속력 0으로 놓이고, $\varphi = 0$이며 $T = 2\pi\sqrt{d/g}$이다. 즉 한 주기(period) 전체이고, 그 뒤 P는 속력 0으로 맨 위에 돌아온다. 정확히 맞는 결과이다.
- $h \to \infty$이면 $\varphi \to \frac{\pi}{2}$이고 $\omega T \to \pi$이다. 매우 빠른 입자는 용수철 위에서 반 주기만 머무는데, 진폭(amplitude)에 비해 평형 위치의 이동 d가 무시할 만큼 작아지기 때문이다.
- 에너지 보존(energy conservation)에 따르면 P는 속력 $\sqrt{2gh}$로 떠나야 한다. 실제로 $\dot{x}(T) = R\omega\sin(2\pi - \varphi) = -R\omega\sin\varphi = -\sqrt{2gh}$이다.
- 수치적으로, $d = 0.1\,\mathrm{m}$, $h = 0.2\,\mathrm{m}$, $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$로 운동을 단계별로 계산하면 접촉 시간이 0.411 s로 나와 공식과 일치한다. d와 h에 임의의 값을 넣어도 소수점 아래 여섯째 자리까지 일치한다.

흔한 실수

- 평형 위치로부터 측정해 놓고 문제의 x가 압축량이라는 사실을 잊어서 $A = 0$을 얻는 것.

- 초기 속력을 $\sqrt{2gh}$로 잡되 부호를 틀리는 것. 아래 방향이 x가 증가하는 방향이다.
- 분리가 평형 위치 $x = d$에서, 또는 반 주기 후에 일어난다고 가정하는 것. 용수철은 자연 길이로 돌아올 때까지 계속 민다.

STEP 너머

이것은 **일방적 구속**(*unilateral constraint*)의 가장 간단한 예이다. 용수철은 밀 수는 있지만 당길 수는 없다. 운동은 단계마다 서로 다른 미분방정식을 따르고, 이 단계들은 위치와 속도를 맞추어 이어 붙인다. 여기서 자유 낙하 단계를 용수철 단계에 이어 붙인 것과 같은 방식이다. 같은 아이디어가 충돌(impact)과 튀는 계의 이론 전반에 걸쳐 나타난다. 진동자와 위의 검산에서 쓴 것과 같은 에너지 방법에 대해 더 알고 싶다면 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 참고하라.

풀이

STEP III 2009, 문제 11

역학 • 질량이 변하는 운동

STEP III 2009, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/09-s3-q11

핵심 아이디어

질량이 변할 때는 $F = ma$가 올바른 법칙이 아니다. 이때는 힘 = 운동량(momentum)의 시간 변화율을 사용해야 한다. 먼지는 정지해 있으므로 그 자체로는 운동량을 가져오지 않으며, 혜성의 운동량 $M(1+bx)v$는 오직 외력 때문에만 변한다. 이로부터 곧바로 제1적분(first integral)을 얻는다. 그런 다음 $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$로 쓰면 이 식은 변수분리형 방정식(separable equation)이 되고, 그 해는 x에 대한 이차식이다.

풀이

혜성을 입자로 모형화한다. 혜성이 모으는 먼지는 정지해 있었으므로 혜성에 운동량을 가져오지 않고, 계(혜성과 모은 먼지)에 작용하는 힘은 운동 방향으로 작용하는 중력 Mf뿐이다.

소문항 (i)

$f = 0$이면 외력이 없으므로 운동량이 보존된다. 진입할 때의 운동량은 MV이고, 시각 t에서의 운동량은 $M(1+bx)v$이다. 따라서

$$(1+bx)\,v = V.$$

이제 $v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$를 대입하고 변수를 분리하면

$$\int_0^x (1+bu)\,\mathrm{d}u = \int_0^t V\,\mathrm{d}s \quad\Longrightarrow\quad x + \tfrac{1}{2}bx^2 = Vt,$$

이다. 여기서 $t = 0$일 때 $x = 0$임을 이용하였다. 그러므로 $bx^2 + 2x - 2Vt = 0$이고, $x \geq 0$이므로 양의 제곱근을 택한 근이 필요하다.

$$x = \frac{\sqrt{1 + 2bVt} - 1}{b}.$$

소문항 (ii)

이제 외력은 Mf이므로

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[M(1 + bx)v\right] = Mf.$$

M과 f는 상수이므로 0부터 t까지 적분하면 $M(1 + bx)v - MV = Mft$이다($t = 0$에서 $x = 0, v = V$). 따라서

$$v = \frac{ft + V}{1 + bx},$$

이고, 이것이 구하려던 식이다.

? **생각해 보기** 왜 그냥 $M(1 + bx)\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = Mf$로 쓰면 안 되는가?

그 식은 새로 붙는 먼지 알갱이 하나하나를 정지 상태에서 속력 v까지 끌어올리는 데 필요한 운동량을 무시한다. 곱의 미분법을 쓰면 차이가 드러난다. 운동량의 변화율은 $M(1 + bx)\dot{v} + Mb\dot{x}\,v$이고, 둘째 항이 바로 그 "따라잡는" 비용이다.

소문항 (i)에서처럼 $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$로 쓰고 변수를 분리하면

$$\int_0^x (1 + bu)\,\mathrm{d}u = \int_0^t (fs + V)\,\mathrm{d}s \quad \Longrightarrow \quad x + \tfrac{1}{2}bx^2 = \tfrac{1}{2}ft^2 + Vt.$$

그러므로 $bx^2 + 2x - (ft^2 + 2Vt) = 0$이고, 다시 음이 아닌 근을 택하면

$$x = \frac{\sqrt{1 + bft^2 + 2bVt} - 1}{b}.$$

이다. ($f = 0$으로 두면 소문항 (i)의 결과가 다시 나온다.)

일정한 속력. 혜성이 일정한 속력 V로 움직이는 것은 모든 t에 대해 $x = Vt$일 때, 즉 $\sqrt{1 + bft^2 + 2bVt} = 1 + bVt$일 때와 정확히 같다. 양변을 제곱하면

$$1 + bft^2 + 2bVt = 1 + 2bVt + b^2V^2t^2 \quad \text{모든} t,$$

가 성립해야 하고, 이는 $f = bV^2$일 때 그리고 그때에만 성립한다. 이때 $v = \dfrac{bV^2t + V}{1 + bVt} = V$이므로, 이렇게 택하면 혜성은 실제로 일정한 속력으로 움직인다. 중력이 혜성이 쓸어 모으는 먼지를 가속하는 데 필요한 운동량을 정확히 공급하는 것이다.

극한 속력. 일반적인 경우, x에 대한 공식에서 얻은 $1+bx=\sqrt{1+bft^2+2bVt}$를 이용하면

$$v=\frac{ft+V}{\sqrt{1+2bVt+bft^2}}=\frac{f+V/t}{\sqrt{bf+2bV/t+1/t^2}}\longrightarrow\frac{f}{\sqrt{bf}}=\sqrt{\frac{f}{b}}\quad\text{극한}t\to\infty,$$

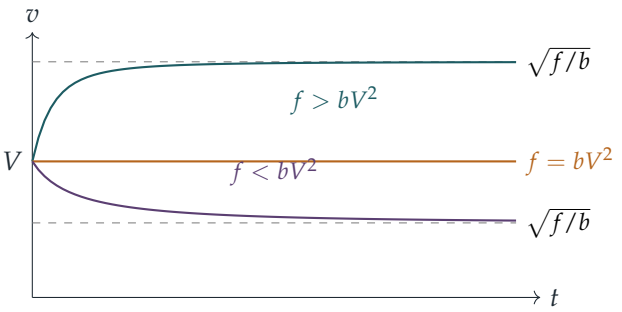
이다. 여기서 분자와 분모를 $t>0$으로 나누었고, $bf>0$임을 이용하였다(힘이 운동 방향으로 작용하므로 $f>0$이어야 한다). 따라서 속력은 상수 $\sqrt{f/b}$로 수렴(converge)한다.

? **생각해 보기** 이 결과는 일정한 속력의 경우와 모순이 없는가?

그렇다. $f=bV^2$이면 $\sqrt{f/b}=V$이고, 이는 혜성이 처음부터 줄곧 가졌던 속력이다. 실제로 v^2을 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}(v^2)}{\mathrm{d}t}=\frac{2(ft+V)(f-bV^2)}{(1+2bVt+bft^2)^2},$$

이므로, 속력은 $f>bV^2$이면 $\sqrt{f/b}$를 향해 꾸준히 증가하고, $f<bV^2$이면 그 값을 향해 꾸준히 감소하며, $f=bV^2$이면 V로 유지된다.



검산

- 단위: b의 단위는 1/길이이고 f는 가속도이므로, f/b의 단위는 속력의 제곱이고 $\sqrt{f/b}$는 속력이다. 또한 bft^2과 bVt는 제곱근 안에 있어야 하므로 당연히 무차원(dimensionless)이다.
- $b=1, V=1, f=3$으로 두고 방정식 $\dot{x}=p/(1+bx)$, $\dot{p}=f$를 수치적으로 단계별 계산하면 x와 v에 대한 공식과 소수점 아래 여덟 자리까지 일치하며, $t=10^6$에서 속력은 $1.7320508\ldots\approx\sqrt{3}$이다.
- $b\to0$(먼지가 없는 경우)일 때 $x=\left(\sqrt{1+bft^2+2bVt}-1\right)/b\to\frac{1}{2}ft^2+Vt$이고, 이는 익숙한 등가속도 운동의 결과이다.

흔한 실수

- 질량이 변하는 물체에 (질량) $\times \dot{v} =$ 힘을 사용하는 것.
- 이차방정식의 음의 근을 택하여 $x < 0$을 얻는 것.
- 운동량 방정식을 적분할 때 적분상수 MV를 빠뜨리는 것.

STEP 너머

가변 질량 문제는 대학 1학년의 고전적인 주제이다. 같은 방식으로 운동량을 따져 보면 로켓 방정식(rocket equation)을 얻고, 구름 속을 떨어지며 커지는 빗방울은 이와 매우 비슷한 방정식으로 이어진다. 극한 속력 $\sqrt{f/b}$는 종단 속도(terminal velocity)로, 힘이 새로운 질량에 운동량을 쓰는 비율과 정확히 균형을 이루는 속력이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 가변 질량계를 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP III 2009, 문제 12

확률과 통계 • 확률생성함수

STEP III 2009, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/09-s3-q12

핵심 아이디어

소문항 (i)에서는 한 번 던질 때마다 동전 개수의 기댓값(expected value)이 절반으로 줄어든다. 그러나 던지는 횟수 자체가 확률변수이므로 그 값에 대해 조건부(conditioning)로 생각한다. 이전 개수가 주어지면 다음 개수는 이항분포(binomial distribution)를 따르고, 그 평균은 쉽게 구할 수 있다. 이렇게 하면 기댓값들이 등비수열(geometric sequence)을 이룬다. 소문항 (ii)에서는 합계가 서로 독립(independent)이고 같은 분포를 따르는 조각들의 합이다. 확률생성함수(probability generating function)를 쓰면 "독립인 확률변수들의 합"이 "생성함수들의 곱"으로 바뀐다.

풀이

소문항 (i)

각 시행에서 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이고 시행들은 서로 독립이므로 $X_1 \sim \mathrm{B}(k, \frac{1}{2})$이고

$$\mathrm{E}(X_1) = \tfrac{1}{2}k.$$

이다.

$X_1 = x_1$이 주어지면 Albert는 새로 서로 독립인 x_1번의 시행을 하므로 $X_2 \mid X_1 = x_1 \sim \mathrm{B}(x_1, \frac{1}{2})$이고

$$\mathrm{E}(X_2 \mid X_1 = x_1) = \tfrac{1}{2}x_1.$$

이다. ($x_1 = 0$이면 Albert는 동전을 던지지 않고 $X_2 = 0$이므로 이 식과 일치한다.) 전체 기

댓값의 법칙(law of total expectation)에 따라 X_1이 가질 수 있는 값들에 대해 평균을 내면

$$\mathrm{E}(X_2) = \sum_{x_1=0}^{k} \mathrm{E}(X_2 \mid X_1 = x_1)\,\mathrm{P}(X_1 = x_1) = \tfrac{1}{2}\sum_{x_1=0}^{k} x_1\,\mathrm{P}(X_1 = x_1) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{E}(X_1) = \tfrac{1}{4}k,$$

이므로 요구한 결과를 얻는다.

? **생각해 보기** 왜 그냥 "X_2는 $\mathrm{B}(\frac{1}{2}k, \frac{1}{2})$를 따른다"고 말할 수 없을까?

두 번째 단계에서 던지는 횟수는 수 $\frac{1}{2}k$가 아니라 확률변수 X_1이기 때문이다. 실제로 $\frac{1}{2}k$는 정수가 아닐 수도 있다. X_1에 대해 조건을 걸어야 던지는 횟수가 고정되고, 그때에야 비로소 이항분포의 평균을 쓸 수 있다.

모든 단계에서 똑같은 논증이 성립한다. $X_i = x_i$가 주어지면 $X_{i+1} \sim \mathrm{B}(x_i, \frac{1}{2})$이므로 $\mathrm{E}(X_{i+1}) = \frac{1}{2}\mathrm{E}(X_i)$이다. 수학적 귀납법(induction)에 의해

$$\mathrm{E}(X_i) = \frac{k}{2^i} \qquad (i \geq 1),$$

이고, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비급수(geometric series)를 더하면

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{E}(X_i) = k\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \cdots\right) = k.$$

이다.

소문항 (ii)

동전 하나에 대해 $Y_i = n$은 앞면이 n번 나온 뒤 뒷면이 나온다는 뜻이므로

$$\mathrm{P}(Y_i = n) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \cdot \tfrac{1}{2} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

이다. 이 분포의 확률생성함수는 $|t| < 2$에서 수렴(convergent)하는 등비급수이다.

$$G_{Y_i}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1} t^n = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}t} = \frac{1}{2 - t}.$$

k개의 동전은 따로따로 던지므로 $Y_1, \ldots, Y_k$는 서로 독립이고, 독립인 확률변수들의 합의 생성함수는 각 생성함수의 곱이다. 따라서

$$G_Y(t) = \mathrm{E}\left(t^{Y_1 + \cdots + Y_k}\right) = \prod_{i=1}^{k} \mathrm{E}\left(t^{Y_i}\right) = (2 - t)^{-k}.$$

이다.

평균과 분산. 미분하면

$$G_Y'(t) = k(2-t)^{-k-1}, \qquad G_Y''(t) = k(k+1)(2-t)^{-k-2},$$

이므로 $G_Y'(1) = k$, $G_Y''(1) = k(k+1)$이다. 따라서

$$\mathrm{E}(Y) = G_Y'(1) = k,$$

이고, $G_Y''(1) = \mathrm{E}\big(Y(Y-1)\big)$이므로

$$\mathrm{Var}(Y) = G_Y''(1) + G_Y'(1) - \big(G_Y'(1)\big)^2 = k(k+1) + k - k^2 = 2k.$$

이다.

분포. $\mathrm{P}(Y=r)$는 $G_Y(t)$에서 t^r의 계수이다.

$$G_Y(t) = 2^{-k}\left(1 - \tfrac{1}{2}t\right)^{-k},$$

로 쓰고, 음의 지수에 대한 이항급수(binomial series)를 이용한다($|t| < 2$에서 성립).

$$(1-x)^{-k} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{k+r-1}{r} x^r.$$

(계수는 $\dfrac{k(k+1)\cdots(k+r-1)}{r!}$이고, 이는 $\binom{k+r-1}{r}$과 같다.) $x = \frac{1}{2}t$를 대입하면

$$\mathrm{P}(Y=r) = \binom{k+r-1}{r}\frac{1}{2^{k+r}}, \qquad r = 0, 1, 2, \ldots$$

이다.

? 생각해 보기 이 공식을 직접 알아볼 방법이 있을까?

있다. 모든 시행을 한 줄로 길게 늘어놓았다고 생각하자. $Y = r$은 k번째 뒷면이 $k+r$번째 시행에서 나온다는 뜻이다. $k+r$번의 시행으로 이루어진 특정한 결과열 하나의 확률은 $2^{-(k+r)}$이고, 마지막 시행은 반드시 뒷면이어야 하므로 처음 $k+r-1$번의 시행 중 어느 r번이 앞면인지만 고르면 된다. 그 방법의 수는 $\binom{k+r-1}{r}$가지이다. 이것이 음이항분포(negative binomial distribution)이다.

검산

- $k = 1$이면 $\mathrm{P}(Y=r) = 2^{-(r+1)}$로 동전 하나의 기하분포(geometric distribution)이고, $\mathrm{E}(Y) = 1$, $\mathrm{Var}(Y) = 2$는 0부터 세는 $p = \frac{1}{2}$인 기하분포 확률변수의 익숙한 값이다.
- 모든 생성함수가 만족해야 하듯이 $G_Y(1) = 1$이다.

- $k = 2$이면 $\mathrm{P}(Y = 0) = \frac{1}{4}$(두 동전 모두 첫 시행에서 뒷면)이고 $\mathrm{P}(Y = 1) = \binom{2}{1}\frac{1}{8} = \frac{1}{4}$(한 동전은 앞면 다음 뒷면, 다른 동전은 뒷면: 두 가지 경우가 있고 각각 $\frac{1}{8}$)이다.
- 분수를 이용한 정확한 계산으로 $k \leq 7, i < 40$에 대해 $\mathrm{E}(X_i) = k/2^i$임을 확인했고(따라서 부분합이 k에 가까워진다), $k \leq 6$에 대해 $\mathrm{P}(Y = r)$의 공식, 평균 k, 분산 $2k$를 확인했다.

흔한 실수

- 마지막 뒷면을 잊고 $\mathrm{P}(Y_i = n) = (\frac{1}{2})^n$으로 놓는 것. 이렇게 하면 확률의 합이 2가 된다.
- $\mathrm{Var}(Y) = G''(1) - \big(G'(1)\big)^2$을 쓰는 것. 이는 $G'(1)$ 항을 빠뜨려 $2k$ 대신 k를 준다.
- 계수를 $\binom{k+r}{r}$로 쓰는 것. 마지막 시행은 뒷면으로 고정되어 있으므로 자유로운 시행은 $k + r - 1$번뿐이다.

STEP 너머

소문항 (i)은 분기 과정(branching process)이다. 각 "개체"(앞면)는 다음 세대에 무작위 개수의 "자손"을 남기는데, 여기서는 그 개수가 $\mathrm{B}(1, \frac{1}{2})$를 따른다. 자손 수의 평균이 1보다 작으므로 개체군은 결국 소멸한다. 조건부 단계 $\mathrm{E}(X_{i+1}) = \mathrm{E}\big(\mathrm{E}(X_{i+1} \mid X_i)\big)$는 탑 성질(tower property)이며, 대학 1학년 과정에서는 X_i의 생성함수가 자손 생성함수를 i번 합성한 것임을 보인다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 생성함수와 분기 과정을 모두 다룬다.

풀이

STEP III 2009, 문제 13

확률과 통계 • 중심극한정리

STEP III 2009, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/09-s3-q13

핵심 아이디어

모든 것은 하나의 각 θ의 함수이다: $X = \cos\theta$이고 $Y = \sin\theta$이다. 따라서 X의 분포는 누적분포함수(cumulative distribution function)로부터 구할 수 있고(원의 어느 호에서 $\cos\theta \le x$가 되는지 따져 보면 된다), 평균, 분산, 공분산은 삼각함수를 한 바퀴 전체에 걸쳐 평균한 값에 불과하다. 소문항 (ii)에서 $\overline{X}$는 서로 독립이고 같은 분포를 따르는 많은 확률변수의 평균인데, 이는 바로 중심극한정리(central limit theorem)가 적용되는 상황이다.

풀이

소문항 (i)

P가 단위원 위에 있으므로 $X = \cos\theta$, $Y = \sin\theta$이고, 여기서 θ는 $[0, 2\pi)$에서 확률밀도 $\frac{1}{2\pi}$를 가진다.

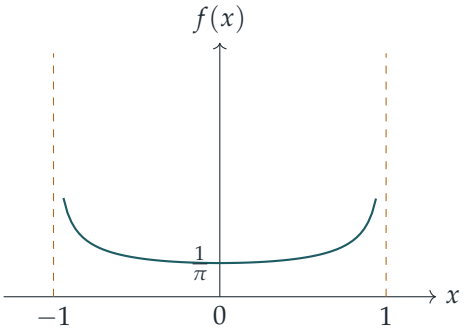
X의 확률밀도함수. 분명히 $-1 \le X \le 1$이다. $-1 < x < 1$인 x를 잡고 $\alpha = \arccos x \in (0, \pi)$라 하자. $[0, 2\pi)$에서 $\cos\theta > x$인 것은 정확히 $\theta < \alpha$ 또는 $\theta > 2\pi - \alpha$일 때이며, 이는 전체 길이가 2α인 호이다. 따라서

$$F(x) = \mathrm{P}(X \le x) = 1 - \frac{2\alpha}{2\pi} = 1 - \frac{\arccos x}{\pi}.$$

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arccos x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$을 이용하여 미분하면

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \qquad (-1 < x < 1),$$

이고, 그 밖의 경우에는 $f(x) = 0$이다. (간단한 검산: $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\big[\arcsin x\big]_{-1}^{1} = 1$.)



확률밀도는 $x = 0$에서 가장 작고 $x = \pm 1$에서 무한히 커진다. 점 P는 수평 지름의 양 끝 근처에서 수평 방향으로 가장 느리게 움직이므로, X는 대부분의 시간을 그곳에서 보낸다.

분산. 대칭성에 의해(f는 우함수이다) $\mathrm{E}(X) = 0$이다. θ를 직접 사용하여 계산하면

$$\mathrm{E}(X^2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2},$$

이므로

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \big(\mathrm{E}(X)\big)^2 = \tfrac{1}{2}.$$

같은 논법으로(또는 $\theta - \frac{\pi}{2}$도 한 바퀴 전체에서 균등분포를 따르므로) $\mathrm{E}(Y) = 0$이고 $\mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{2}$이다.

상관관계가 없음.

$$\mathrm{E}(XY) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\theta \sin\theta \,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \sin 2\theta \,\mathrm{d}\theta = 0,$$

이므로 $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) = 0 - 0 = 0$이다. 따라서 X와 Y는 서로 상관관계가 없다(uncorrelated).

독립이 아님. $X^2 + Y^2 = 1$이므로 두 확률변수는 결코 독립(independent)이 아니다. X가 정해지면 Y는 $\pm\sqrt{1-X^2}$ 중 하나로 고정된다. 구체적인 사건으로 보면, $\mathrm{P}(X > 0.8) > 0$이고 $\mathrm{P}(Y > 0.8) > 0$이지만 $\mathrm{P}(X > 0.8 \text{이고} Y > 0.8) = 0$이다. 그런 경우에는 $X^2 + Y^2 > 1.28$이 되기 때문이다. 독립이라면 이 결합확률이 (양수인) 두 확률의 곱과 같아야 한다. 상관계수가 0이라는 것은 **선형** 관계가 없다는 것만을 말해 준다. 여기서 두 변수의 관계는 원이며, 원은 충분히 대칭적이어서 선형 경향이 전혀 없다.

소문항 (ii)

각 쌍 (X_i, Y_i)는 소문항 (i)의 분포를 따르고, 점들이 독립적으로 선택되므로 첨자가 다른 쌍끼리는 서로 독립이다.

$\overline{X}$와 $\overline{Y}$는 상관관계가 없다. 공분산은 쌍선형(bilinear)이므로

$$\mathrm{Cov}(\overline{X},\overline{Y}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Cov}(X_i,Y_j).$$

$i \neq j$이면 X_i는 P_i에만, Y_j는 P_j에만 의존하고 이 둘은 서로 독립이므로 $\mathrm{Cov}(X_i,Y_j)=0$이다. $i=j$이면 소문항 (i)에 의해 $\mathrm{Cov}(X_i,Y_i)=0$이다. 모든 항이 0이므로 $\mathrm{Cov}(\overline{X},\overline{Y})=0$이다. 즉 $\overline{X}$와 $\overline{Y}$는 상관관계가 없다.

근사 확률. X_i들은 서로 독립이고 평균이 0, 분산이 $\frac{1}{2}$인 같은 분포를 따른다. 따라서

$$\mathrm{E}(\overline{X})=0, \qquad \mathrm{Var}(\overline{X}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i) = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{n}{2} = \frac{1}{2n},$$

이다. 여기서 분산을 더할 수 있는 것은 X_i들이 서로 독립이기 때문이다.

> **생각해 보기** X는 정규분포와 전혀 닮지 않았다(확률밀도함수를 보라). 그런데 왜 정규근사를 쓸 수 있을까?

중심극한정리는 각 항이 서로 독립이고 같은 분포를 따르며 분산이 유한하기만 하면 되고, 그 분포의 모양은 상관없다. 따라서 n이 크면 $\overline{X}$는 근사적으로 $\mathrm{N}\left(0,\frac{1}{2n}\right)$을 따르고, 표준편차는 $\sigma = \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$이다. 이제

$$\sqrt{\frac{2}{n}} = \frac{2}{\sqrt{2n}} = 2\sigma,$$

이므로 $Z\sim\mathrm{N}(0,1)$이라 하면

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(|\overline{X}| \le \sqrt{\tfrac{2}{n}}\right) &= \mathrm{P}\left(\frac{|\overline{X}|}{\sigma} \le 2\right) \approx \mathrm{P}(|Z|\le 2)\\ &= 2\Phi(2)-1 = 2(0.9772)-1 \approx 0.954 \approx 0.95,\end{aligned}$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

검산

- 분산이 $\frac{1}{2}$인 것은 타당하다. $X^2+Y^2=1$이고 대칭성에 의해 $\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{E}(Y^2)$이므로 각각은 $\frac{1}{2}$이어야 한다. 적분할 필요조차 없다!
- 4×10^5개의 무작위 각으로 모의실험한 결과, 여러 x값에서 $F(x)=1-\frac{1}{\pi}\arccos x$와 소수점 아래 셋째 자리 정도까지 일치했고, $\mathrm{Var}(X)\approx 0.5007$, $\mathrm{Cov}(X,Y)\approx 0.001$을 얻었다.
- $n=50$으로 40 000번 반복했을 때 모의실험으로 얻은 $\mathrm{Var}(\overline{X})$는 0.00997(이론값 0.01)이었고, $|\overline{X}|\le\sqrt{2/50}=0.2$인 비율은 0.954로 $\mathrm{P}(|Z|\le 2)=0.9545$와 비교된다.

흔한 실수

- $1 - \frac{1}{\pi}\arccos x$를 미분할 때 부호를 잘못 처리하여 음수인 "확률밀도"를 얻는 것. 확률밀도는 결코 음수가 될 수 없으니 부호를 확인하라.
- 공분산이 0이라는 것으로부터 독립이라고 결론 내리는 것. 독립이면 공분산이 0이지만, 그 역은 성립하지 않는다.
- $\mathrm{Var}(\overline{X}) = \frac{1}{2}$ 또는 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$을 쓰는 것. 독립인 n개의 복사본의 평균의 분산은 하나의 분산을 n으로 나눈 것이다. $1/\sqrt{n}$에 비례하는 것은 **표준편차**이다.

STEP 너머

확률밀도 $1/(\pi\sqrt{1-x^2})$은 **아크사인 분포**(arcsine distribution)이며, 놀라울 만큼 자주 등장한다. 예를 들어 무작위 행보(random walk)가 양수 쪽에 머무는 시간의 비율의 극한 분포가 바로 이것이다. 이 문제의 나머지 부분은 상관관계가 없음과 독립 사이의 차이, 그리고 중심극한정리에 관한 것인데, 중심극한정리는 대학 1학년 확률론 강의에서 적률생성함수(moment generating function)나 특성함수(characteristic function)를 이용하여 증명하게 된다. 사실 $(\overline{X}, \overline{Y})$는 근사적으로 이변량 정규분포(bivariate normal distribution)를 따르며, 결합 정규분포를 따르는 확률변수들에 대해서는 상관계수가 0이면 독립이 **성립한다**. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)이 이 모든 내용을 잘 다루고 있다.

Beyond STEP

STEP은 대부분의 학생이 학창 시절에 치르는 수학 시험 가운데 가장 어려운 시험이다. 또한 가장 훌륭한 시험 가운데 하나이기도 하다. 문제는 짧고 낯설며 깊이가 있고, 그중 가장 뛰어난 문제들은 대학 수학의 작은 조각이 모습을 감추고 있는 것이다.

이 책은 1987년 첫 시험에 앞서 나온 예시 시험지(specimen papers)부터 2025년 시험지까지 가운데 가장 흥미로운 STEP 문제들을 골라, 각 문제를 하나의 문으로 삼는다. 모든 문제는 뛰어난 학생이 풀어 가면서 던질 법한 질문들과 함께 꼼꼼하게 풀이하고, 그런 다음 책은 그 문을 지나 한 걸음 더 나아간다. 그 아이디어가 어디에서 왔는지, 대학에서는 무엇으로 발전하는지, 그리고 다음에는 무엇을 읽으면 좋은지를 살펴본다.

이 책은 STEP을 준비하면서 기출 문제 연습 이상의 것을 원하는 재능 있는 예비 수학자를 위해 쓰였다. 수학과 학부생처럼 생각하기 시작하고, 앞으로 무엇이 자신을 기다리고 있는지 알아보고 싶은 학생들을 위한 책이다.

- 순수수학(pure mathematics), 역학(mechanics), 확률(probability)과 통계(statistics)를 아우르는 13개의 장
- 이 36개의 STEP 기출 문제와 각 문제의 안내식 풀이
- 모든 문제 뒤에 숨은 대학 수학
- 답이 실린 후속 연습 문제와 더 읽을거리

2009년 풀이. 책 전체와 모든 장,
모든 풀이를 다음 주소에서 무료로 읽고, 내려받고, 공유할 수 있다.

beyondstep.keithmcnulty.org

본문은 퍼블릭 도메인(CC0 1.0)으로 공개한다. STEP 문제 © Cambridge University Press & Assessment.

