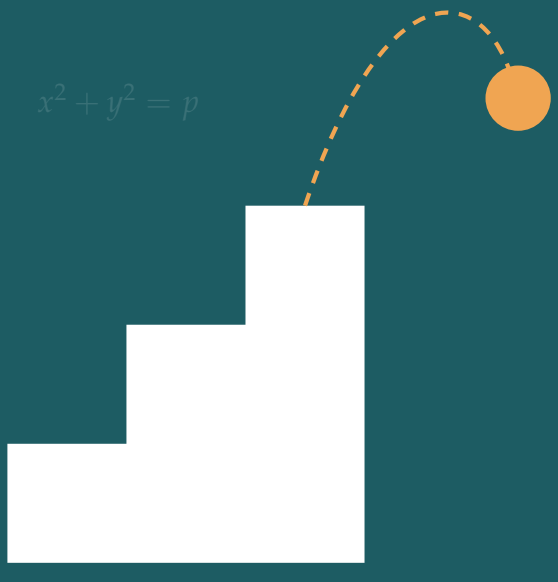
STEP 대비 · 대학 수학

Beyond STEP

STEP I, II 및 III

2008년 풀이



KEITH McNULTY

Beyond STEP

STEP 기출문제로 여는
대학 수학의 세계

STEP I, II 및 III

2008년 풀이

Keith McNulty

Beyond STEP: STEP 기출문제로 여는 대학 수학의 세계

2008년 풀이

2008년 STEP 문제지(STEP I, II 및 III)의 39개 문제 전체에 대한 풀이. 견본 문제지 이후 모든 STEP 문제의 풀이와 *Beyond STEP* 책 전체, 그리고 각 장을 `beyondstep.keithmcnulty.org`에서 무료로 읽고 내려받을 수 있다.

풀이를 읽기 전에 먼저 문제를 제대로 풀어 보자. 모든 답은 수치적으로 검증하였지만, 풀이가 이렇게 많으면 실수가 어느 정도 있을 수밖에 없다. 무언가 잘못된 것처럼 보이면 자신의 풀이를 믿고 꼼꼼히 확인해 보자.

영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.

2026년 11월 온라인 초판 발행.

이 PDF에서 지은이가 직접 만든 모든 것, 곧 본문, 풀이, 그림, 연습문제와 해답은 크리에이티브 커먼즈 CC0 1.0 Universal 라이선스에 따라 퍼블릭 도메인(public domain)으로 공개한다. 누구든 허락을 구하지 않고 어떤 목적으로든 복사하고, 고쳐 쓰고, 공유할 수 있다. 자세한 내용은 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`을 보라.

여기에서 다루는 STEP 문제의 저작권은 Cambridge University Press & Assessment에 있다. 문제는 이 책에 싣지 않았으며, 각 문제마다 공식 출처인 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스나 OCR의 기출 시험지로 가는 링크를 달았다.

오류 제보는 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty에 이슈로 남겨 주기 바란다.

차례

STEP I

Q1 귀류법 순수수학 . . . 3

Q2 치환적분 순수수학 . . . 7

Q3 재배열을 이용한 부등식 순수수학 . . . 10

Q4 볼록함수 순수수학 . . . 14

Q5 다항식의 상계와 하계 순수수학 . . . 18

Q6 역함수와 넓이 순수수학 . . . 22

Q7 회전과 거리 순수수학 . . . 26

Q8 클레로 미분방정식 순수수학 . . . 30

Q9 굴러가는 고리의 운동량 역학 . . . 34

Q10 포물체 운동 역학 . . . 38

Q11 최대 정지 마찰과 평형 역학 . . . 42

Q12 이산 균등분포의 최댓값 확률과 통계 . . . 47

Q13 원순열 확률과 통계 . . . 51

STEP II

Q1 복소 반복 순수수학 . . . 55

Q2 부분분수와 급수 순수수학 . . . 59

Q3 부등식과 귀류법 순수수학 . . . 63

Q4 음함수 미분법 순수수학 . . . 67

Q5 치환적분 순수수학 . . . 71

Q6 합을 곱으로 바꾸는 공식 순수수학 . . . 75

Q7 일계 미분방정식 순수수학 . . . 79

Q8 벡터와 각의 이등분선 순수수학 . . . 83

Q9 포물체 운동 역학 . . . 87

Q10 벽과의 비스듬한 충돌 역학 91
Q11 움직이는 쐐기 위의 입자 역학 95
Q12 독립사건 확률과 통계 99
Q13 비복원추출 확률과 통계 102

STEP III

Q1 비선형 연립방정식 순수수학 106
Q2 거듭제곱의 합 순수수학 110
Q3 타원의 접선과 초점 순수수학 114
Q4 역쌍곡선함수 부등식 순수수학 118
Q5 점화식 순수수학 122
Q6 일계 미분방정식 순수수학 126
Q7 복소수와 기하 순수수학 130
Q8 급수와 점화식 순수수학 134
Q9 마찰과 변하는 힘 역학 138
Q10 탄성 끈과 에너지 역학 143
Q11 회전 역학 역학 147
Q12 적률생성함수 확률과 통계 151
Q13 지시확률변수의 합 확률과 통계 155

풀이

STEP I 2008, 문제 1

순수수학 • 귀류법

> **STEP I 2008, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/08-s1-q1

핵심 아이디어

유리수(rational number)는 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 그리고 0이 아닌 수로 나누는 나눗셈에 대하여 닫혀 있다(closed). 여기서 다루는 거의 모든 내용은 이 한 가지 사실에서 나온다. 어떤 수들이 유리수이면, 그 수들로부터 이 연산들을 써서 만든 수도 모두 유리수이다. 마지막 소문항에서는 네 수 가운데 두 수가 유리수라고 가정하고, 그 두 수를 교묘하게 조합하여 무리수라고 주어진 수 가운데 하나를 만들어 낸다.

풀이

정의

실수 x가 정수 m, n과 $n \neq 0$에 대하여 $x = \frac{m}{n}$ 꼴로 나타내어지면 이 실수를 **유리수**라 한다. 실수가 유리수가 아니면, 즉 $x = \frac{m}{n}$을 만족하는 정수 m과 $n \neq 0$이 존재하지 않으면, 이 실수를 **무리수**(irrational number)라 한다.

명제 A

귀류법(proof by contradiction)을 쓰기 위해, pq는 무리수이지만 p와 q 모두 무리수가 아니라고 가정하자. 그러면 두 수 모두 유리수이므로, 정수 a, b, c, d와 $b, d \neq 0$에 대하여 $p = \frac{a}{b}$, $q = \frac{c}{d}$로 쓸 수 있다. 그러면

$$pq = \frac{ac}{bd},$$

이고, 여기서 ac와 bd는 정수이며 b와 d 모두 0이 아니므로 $bd \neq 0$이다. 따라서 pq는 유리수이고, 이는 가정에 모순이다. 그러므로 p와 q 가운데 적어도 하나는 무리수이다.

명제 B

같은 방법으로, $p+q$는 무리수이지만 $p=\frac{a}{b}$와 $q=\frac{c}{d}$가 모두 유리수이고 $b,d\neq 0$이라고 가정하자. 그러면

$$p+q=\frac{ad+bc}{bd},$$

은 분모가 0이 아닌 정수의 비이므로 $p+q$는 유리수이다. 이 모순으로부터 p와 q 가운데 적어도 하나는 무리수임을 알 수 있다.

명제 C

$p=\sqrt{2}, q=-\sqrt{2}$로 잡자. 두 수 모두 무리수이지만 $p+q=0=\frac{0}{1}$은 유리수이므로 C는 거짓이다.

완전함을 위해 $\sqrt{2}$가 무리수인 이유를 밝혀 둔다. $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$을 기약분수(lowest terms)로 나타냈다고 하면 $m^2=2n^2$이므로 m^2은 짝수이고, 따라서 m도 짝수이다(홀수의 제곱은 홀수이기 때문이다). $m=2k$로 쓰면 $n^2=2k^2$이 되어 n도 짝수가 되는데, 이는 기약분수라는 데에 모순이다. 또 $-\sqrt{2}=\frac{m}{n}$이면 $\sqrt{2}=\frac{-m}{n}$이므로 $-\sqrt{2}$도 무리수이다.

마지막 소문항

π, π^2, $\mathrm{e}\pi$가 무리수라는 사실이 주어져 있다(필요한 것은 이 세 가지 사실뿐이다). 다음 두 가지 간단한 관찰을 되풀이하여 사용한다.

- r와 s가 유리수이면 $r+s$, $r-s$, rs도 유리수이고, $s\neq 0$일 때 r/s도 유리수이다(논증은 A와 B에서 쓴 것과 완전히 같다).
- 따라서 r가 유리수이면 $\frac{1}{2}$이 유리수이므로 $\frac{1}{2}r$도 유리수이다.

또한 $\pi>3>\mathrm{e}>0$이므로 $\pi+\mathrm{e}>0$이고 $\pi-\mathrm{e}>0$이다. 특히 두 수 모두 0이 아니다.

귀류법을 쓰기 위해, 네 수

$$\pi+\mathrm{e},\quad \pi-\mathrm{e},\quad \pi^2-\mathrm{e}^2,\quad \pi^2+\mathrm{e}^2$$

가운데 두 수가 유리수라고 가정하자. 가능한 쌍은 여섯 가지이며, 각각을 하나씩 배제한다.

1. **$\pi+\mathrm{e}$와 $\pi-\mathrm{e}$가 유리수인 경우.** 두 수를 더하면 2π가 유리수이므로 π가 유리수이다. 모순이다.
2. **$\pi^2-\mathrm{e}^2$와 $\pi^2+\mathrm{e}^2$가 유리수인 경우.** 두 수를 더하면 $2\pi^2$이 유리수이므로 π^2이 유리수이다. 모순이다.
3. **$\pi+\mathrm{e}$와 $\pi^2+\mathrm{e}^2$가 유리수인 경우.** 첫 번째 수를 제곱하면 $(\pi+\mathrm{e})^2$이 유리수이고,

$$2\mathrm{e}\pi=(\pi+\mathrm{e})^2-(\pi^2+\mathrm{e}^2),$$

이므로 $e\pi$가 유리수이다. 모순이다.

4. $\pi - e$와 $\pi^2 + e^2$가 유리수인 경우. 마찬가지로

$$2e\pi = (\pi^2 + e^2) - (\pi - e)^2$$

이 유리수이므로 $e\pi$가 유리수이다. 모순이다.

5. $\pi + e$와 $\pi^2 - e^2$가 유리수인 경우. $\pi + e \neq 0$이므로

$$\pi - e = \frac{\pi^2 - e^2}{\pi + e}$$

는 분모가 0이 아닌 유리수끼리의 몫이고, 따라서 유리수이다. 그러면 $\pi + e$와 $\pi - e$가 모두 유리수가 되는데, 이는 경우 1에 의해 불가능하다.

6. $\pi - e$와 $\pi^2 - e^2$가 유리수인 경우. $\pi - e \neq 0$이므로

$$\pi + e = \frac{\pi^2 - e^2}{\pi - e}$$

는 유리수이고, 이번에도 경우 1에 의해 모순이 생긴다.

? **생각해 보기** 경우 6에서 왜 $\pi - e \neq 0$이 필요할까?

0으로 나누는 것은 허용되지 않기 때문이다. "유리수를 유리수로 나누면 유리수이다"라는 단계는 분모가 0이 아닐 때에만 성립한다. 만약 $\pi = e$였다면 $\pi^2 - e^2 = 0$은 유리수이겠지만 $\pi + e$에 대해서는 아무것도 알려 주지 않는다. 여기서는 $\pi - e \approx 0.42$이므로 문제가 없다.

모든 쌍이 모순으로 이어지므로 네 수 가운데 어느 두 수도 동시에 유리수일 수 없다. 따라서 네 수 가운데 유리수는 많아야 하나이며, 이로써 증명이 끝난다.

검산

사용한 항등식은 수치로 쉽게 확인할 수 있다. $\pi \approx 3.14159$, $e \approx 2.71828$로 두면 $(\pi + e)(\pi - e) \approx 5.85987 \times 0.42331 \approx 2.48055 \approx \pi^2 - e^2$이고, $(\pi + e)^2 - (\pi^2 + e^2) \approx 17.0795 \approx 2e\pi$이다. 쌍의 개수도 세어 보자. 네 수에서 $\binom{4}{2} = 6$개의 쌍이 나오고, 여섯 쌍을 모두 다루었다. e와 e^2이 무리수라는 사실은 한 번도 쓰지 않았음에 주목하자. 대칭성에 의해 경우 1과 2에서 π와 π^2 대신 이 두 수를 써도 되었을 것이다.

흔한 실수

- 실수로 A나 B의 역(converse)을 증명하는 것. A는 "곱이 무리수 $\Rightarrow$ 어느 한 인수가 무리수"라는 명제이며, 그 역은 거짓이다($\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$).

- $\pi \pm e$가 0이 아니라는 언급 없이 이 수로 나누는 것.
- 명제 C를 참인 것처럼 사용하는 것. 예를 들어 "π와 e가 무리수이므로 $\pi + e$는 무리수이다"라고 주장하는 것이다. 사실 $\pi + e$가 무리수인지는 아직 풀리지 않은 미해결 문제(open problem)이다.

STEP 너머

여기서 사용한 닫혀 있음에 관한 사실들은 유리수 전체가 **체**(field)를 이룬다는 것을 말해 준다. 체란 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈(0으로 나누는 것은 제외)을 해도 그 집합을 벗어나지 않는 집합이다. 체는 대학 1학년 대수학(algebra) 강의의 핵심 대상이며, "$\pi + e$는 무리수인가?"와 같은 질문은 초월수론(transcendence theory)으로 이어지는데, 이 분야에서는 놀라울 만큼 알려진 것이 적다. 대수학에 대해서는 Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)를, 유리수와 무리수에 관한 정수론(number theory)에 대해서는 Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)을 읽어 보자.

풀이

STEP I 2008, 문제 2

순수수학 • 치환적분

> **STEP I 2008, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/08-s1-q2

핵심 아이디어

이 치환(substitution)은 제곱근이 간단한 식인 $t - x$가 되도록 고른 것이다. x에 대해 풀어서 복잡한 분수식을 미분하는 대신, 양변을 제곱하여 근호를 없앤 다음 그 결과로 얻은 관계식을 음함수 미분(implicit differentiation)한다. 도함수에는 피적분함수(integrand)의 제곱근을 정확히 약분하는 인수 $t - x$가 들어 있으므로, 적분은 $\int \frac{1}{t+b}\,\mathrm{d}t$로 간단해진다. 마지막 문항은 그 약분과 나눗셈이 언제 정당한지를 묻는 시험이다.

풀이

도함수

$R = \sqrt{x^2 + 2bx + c}$라 두면 $t - x = R$이다. 양변을 제곱하면

$$t^2 - 2tx + x^2 = x^2 + 2bx + c \quad \Longrightarrow \quad t^2 - 2tx - 2bx - c = 0.$$

이 식을 t에 대하여 미분하면(x는 t의 함수이다)

$$2t - 2x - 2t\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - 2b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0, \qquad \text{따라서} \qquad (t+b)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = t - x.$$

$t + b$로 나누려면 이것이 0이 아니어야 한다. $b^2 < c$이므로

$$x^2 + 2bx + c = (x+b)^2 + (c - b^2) > (x+b)^2,$$

따라서 $R > |x + b|$이고, 그러므로

$$t + b = (x+b) + R > (x+b) + |x+b| \geq 0.$$

즉 모든 x에 대하여 $t+b>0$이고,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{t-x}{t+b},$$

이므로 원하는 결과가 성립한다. (제곱한 관계식을 직접 풀 수도 있다. $x=\dfrac{t^2-c}{2(t+b)}$이고, 이것을 미분하면 약간의 계산 끝에 같은 답을 얻는다.)

적분

이차식 $x^2+2bx+c$는 모든 x에 대하여 양수이므로 피적분함수는 어디서나 정의된다. 치환하고 $R=t-x$를 이용하면

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{x^2+2bx+c}}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{1}{t-x}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t=\int\frac{1}{t-x}\cdot\frac{t-x}{t+b}\,\mathrm{d}t\\&=\int\frac{1}{t+b}\,\mathrm{d}t=\ln(t+b)+C,\end{aligned}$$

이다. 여기서 $t+b>0$이므로 절댓값(modulus)은 필요 없다. $R>0$이므로 $t-x=R$을 약분하는 것도 문제없다. 다시 x로 돌아가면

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+2bx+c}}\,\mathrm{d}x=\ln\left(x+b+\sqrt{x^2+2bx+c}\right)+C.$$

미분하여 이를 확인할 수 있다. $x+b+R$의 도함수는 $1+\dfrac{x+b}{R}=\dfrac{R+x+b}{R}$이고, 이것을 $x+b+R$로 나누면 $\dfrac{1}{R}$이 남는다.

$b^2=c$인 경우

이제 $x^2+2bx+c=(x+b)^2$이므로 $\sqrt{x^2+2bx+c}=|x+b|$이고, 피적분함수는 $\dfrac{1}{|x+b|}$이다($x\neq -b$에서 정의된다).

> **?** **생각해 보기** $\sqrt{(x+b)^2}$은 왜 단순히 $x+b$가 아닌가?

제곱근 기호는 음이 아닌 제곱근을 뜻하므로 $\sqrt{(x+b)^2}=|x+b|$이고, 이는 $x+b<0$일 때 $-(x+b)$와 같다. 바로 이 부호가 공식이 살아남는지를 결정한다.

$x+b>0$인 경우: 직접 계산하면

$$\int\frac{1}{x+b}\,\mathrm{d}x=\ln(x+b)+C.$$

공식으로 구하면

$$\ln\left(x+b+(x+b)\right)=\ln 2+\ln(x+b),$$

이고, 이는 직접 구한 답과 상수 $\ln 2$만큼만 다르다. 따라서 이 결과는 여전히 성립한다.

$x + b < 0$인 경우: 직접 계산하면

$$\int \frac{1}{-(x+b)}\,\mathrm{d}x = -\ln\big(-(x+b)\big) + C = -\ln|x+b| + C.$$

그런데 공식으로 구하면 $\ln\big(x+b+|x+b|\big) = \ln\big((x+b)-(x+b)\big) = \ln 0$이 되어 정의되지 않는다. 따라서 이 경우에는 결과가 성립하지 않는다.

유도 과정의 어디가 무너지는지 살펴볼 만하다. $x+b<0$이면 모든 x에 대하여 $t = x-(x+b) = -b$이다. 즉 t는 상수이므로 새로운 변수로 전혀 쓸 수 없고, $t+b=0$은 바로 우리가 나누었던 양이다. 엄격한 부등식 $b^2 < c$가 $t+b>0$을 보장해 주었던 것이다. $b^2 = c$일 때는 약한 부등식 $t+b \geq 0$만 남고, 등호는 정확히 $x+b \leq 0$일 때 성립한다.

검산

- $b=0, c=1$이면 결과는 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \ln\big(x+\sqrt{x^2+1}\big)+C = \operatorname{arsinh} x + C$가 되어 잘 알려진 결과와 같다.
- 수치적으로, 임의의 b와 $c > b^2$에 대하여 임의의 구간에서 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 구한 적분값은 로그 공식의 차와 10^{-7}보다 작은 오차로 일치한다. $b^2 = c$이고 $b = 1.3$일 때 $\int_{0.5}^{4} \frac{\mathrm{d}x}{|x+b|} \approx 1.07992$이며, 이는 공식에서 얻은 $\ln\frac{5.3}{1.8}$과 일치한다.

흔한 실수

- $t+b>0$임을 알아차리지 못한 채 $\ln|t+b|$라고 써서, $b^2=c$일 때 무엇이 잘못되는지를 놓친다.
- 마지막 문항에서 $\sqrt{(x+b)^2} = x+b$라고 두어, $x+b<0$일 때의 실패를 완전히 가려 버린다.

STEP 너머

치환 $t = x + \sqrt{x^2+2bx+c}$는 **오일러 치환**(*Euler's substitutions*) 가운데 하나이다. 오일러(Euler) 치환은 x와 $\sqrt{ax^2+bx+c}$의 유리함수(rational function)의 적분을 모두 t의 유리함수의 적분으로 바꾸어 준다. 마지막 문항은 변수변환(change of variable)에서 새 변수가 옛 변수에 매끄럽고 일대일(one-to-one)로 의존해야 하는 이유를 보여 준다. t가 상수가 되면 이 방법은 무너진다. Bartle and Sherbert, *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)에는 이러한 가정을 엄밀하게 밝힌 변수변환 정리가 실려 있다.

풀이

STEP I 2008, 문제 3

순수수학 • 재배열을 이용한 부등식

> **STEP I 2008, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/08-s1-q3

핵심 아이디어

부등식 $(*)$는 사실 음이 아닌 두 인수의 곱이 모양을 바꾼 것에 지나지 않는다. 일단 이것을 얻으면, 이후의 모든 부등식은 $(*)$의 양변이 우리가 원하는 양변이 되도록 a, b, c, d를 고르고, 그와 동시에 조건 $c \geq a$와 $d \geq b$가 실제로 성립하는지 확인하는 문제가 된다. 목표로 하는 부등식들이 대칭적(symmetric)이므로 먼저 변수들의 크기 순서를 정해 놓아도 되며, 바로 그 순서가 이 조건들을 보장해 준다.

풀이

$(*)$의 증명

모든 항을 한쪽으로 옮기고 인수분해(factorise)한다.

$$ab + cd - bc - ad = a(b-d) - c(b-d) = (c-a)(d-b).$$

$c \geq a$이고 $d \geq b$이면 두 인수가 모두 음이 아니므로 그 곱도 음이 아니다. 따라서 $ab + cd \geq bc + ad$이고, 등호는 정확히 $c = a$ 또는 $d = b$일 때 성립한다.

소문항 (i)

변수가 두 개인 경우. $x \geq y$라고 하자. $(*)$에서

$$a = y, \quad b = y, \quad c = x, \quad d = x.$$

로 놓는다. 조건 $c \geq a$와 $d \geq b$는 둘 다 $x \geq y$를 뜻하며, 이는 주어진 조건이다. 그러면 $ab + cd = y^2 + x^2$이고 $bc + ad = xy + xy$이므로 $(*)$에서

$$x^2 + y^2 \geq 2xy.$$

를 얻는다.

변수가 세 개인 경우. 이제 $x \geq z$이고 $y \geq z$라고도 가정하자.

$$a = z, \quad b = z, \quad c = x, \quad d = y.$$

로 놓는다. 여기서 $c \geq a$는 $x \geq z$이고 $d \geq b$는 $y \geq z$이며, 둘 다 주어진 조건이다. 이제 $ab + cd = z^2 + xy$이고 $bc + ad = zx + zy$이므로

$$z^2 + xy \geq xz + yz.$$

이다. 이것을 $x^2 + y^2 \geq 2xy$($x \geq y$이므로 사용할 수 있다)와 더하면

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy \geq 2xy + xz + yz,$$

이고, 양변에서 xy를 빼면

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx.$$

를 얻는다. 지금까지는 $x \geq y \geq z$인 경우에만 증명된 것이다.

생각해 보기 $x \geq y \geq z$인 경우에만 증명된 결과로부터 어떻게 모든 x, y, z에 대한 결과를 얻을 수 있을까?

$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$의 양변은 모두 대칭적이다. 즉 어느 두 변수를 서로 바꾸어도 각 변은 변하지 않는다. 임의의 실수 x, y, z가 주어지면, 이들을 큰 것부터 차례로 $X \geq Y \geq Z$로 늘어놓는다. 방금 보인 것에 의해 $X^2 + Y^2 + Z^2 \geq XY + YZ + ZX$이다. 그런데 이것은 x, y, z에 대한 부등식과 항의 순서만 다를 뿐 같은 부등식이다. 따라서 이 부등식은 모든 실수 x, y, z에 대하여 성립한다.

(등호가 성립하려면 더한 두 부등식에서 모두 등호가 성립해야 하고, 이로부터 $x = y = z$이어야 한다.)

소문항 (ii)

주어진 식은 어떤 수와 그 역수(reciprocal)의 합으로 이루어진 세 쌍의 합이다.

$$\left(\frac{s}{t} + \frac{t}{s}\right) + \left(\frac{t}{r} + \frac{r}{t}\right) + \left(\frac{r}{s} + \frac{s}{r}\right).$$

따라서 임의의 양수 p, q에 대하여 $\dfrac{p}{q} + \dfrac{q}{p} \geq 2$임을 보이면 충분하다. 이는 $x^2 + y^2 \geq 2xy$에 대응하는 부등식이다.

식 $\frac{p}{q} + \frac{q}{p}$는 p와 q에 대하여 대칭적이므로 $p \geq q > 0$이 되도록 이름을 붙여도 된다. $(*)$에서

$$a = q, \quad b = \frac{1}{p}, \quad c = p, \quad d = \frac{1}{q}.$$

로 놓는다. 그러면 $c \geq a$는 $p \geq q$이고, $d \geq b$는 $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p}$인데, p와 q가 양수이므로 이 역시 $p \geq q$로부터 나온다. 이제

$$ab + cd = \frac{q}{p} + \frac{p}{q}, \qquad bc + ad = \frac{p}{p} + \frac{q}{q} = 2,$$

이므로 $(*)$에서 $\frac{p}{q} + \frac{q}{p} \geq 2$를 얻는다.

이것을 쌍 (s,t), (t,r), (r,s)에 적용하고 세 결과를 더하면, 모든 양수 r, s, t에 대하여

$$\frac{s}{t} + \frac{t}{r} + \frac{r}{s} + \frac{t}{s} + \frac{r}{t} + \frac{s}{r} \geq 2 + 2 + 2 = 6$$

이 되어 증명이 끝난다. 각 쌍에서 두 수가 같아야 하므로, 등호는 정확히 $r = s = t$일 때 성립한다.

검산

- 소문항 (i)에 $x = 3, y = 1, z = -2$를 대입해 보자. 좌변은 14이고 우변은 $3 - 2 - 6 = -5$이다. 세 값을 어떻게 바꾸어 배열해도 양변은 변하지 않으며, 이는 대칭성 논증에서 필요한 성질이다.
- 소문항 (i)의 독립적인 증명: $2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0$.
- $r = 2, s = 1, t = 1$일 때 소문항 (ii)의 식은 $1 + \frac{1}{2} + 2 + 1 + 2 + \frac{1}{2} = 7 \geq 6$이다. 무작위로 고른 20,000개의 정확한 유리수 경우에 대해 컴퓨터로 모든 단계를 확인한 결과 반례는 없었으며, $r = 1.001, s = 1, t = 0.999$와 같은 값에서는 합이 6보다 아주 조금 크다.

흔한 실수

- $c \geq a$와 $d \geq b$를 확인하지 않고 $(*)$를 사용하는 것. 대입을 잘못하면 부등식의 방향이 반대가 될 수 있다.
- 소문항 (ii)에서 $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p}$가 양수 조건을 사용한다는 점을 잊는 것. 음수에서는 역수를 취할 때 순서가 같은 방식으로 뒤집히지 않는다.
- 소문항 (i)을 $x \geq y \geq z$인 경우에만 증명하고, 대칭성으로부터 왜 일반적인 경우가 나오는지 설명하지 않는 것.

STEP 너머

부등식 $(*)$는 **재배열 부등식**(rearrangement inequality)의 두 항인 경우이다. 재배열 부등식이란 두 수열이 정렬되어 있을 때, 곱의 합은 같은 순서로 짝지을 때 가장 크고 반대 순서

로 짝지을 때 가장 작다는 것이다. 여기서 다룬 두 결과와 두 항에 대한 산술-기하 평균 부등식(AM–GM)이 모두 이로부터 곧바로 나오며, 이는 체비쇼프(Chebyshev)의 합 부등식과도 밀접한 관련이 있다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제)에는 STEP 형식의 부등식 연습 문제가 더 실려 있고, Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)는 이러한 순서 논증이 해석학의 바탕을 어떻게 이루는지 보여 준다.

풀이

STEP I 2008, 문제 4

순수수학 • 볼록함수

STEP I 2008, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/08-s1-q4

핵심 아이디어

두 함수는 모두 $\mathrm{e}^{h(x)}$ 꼴의 지수함수(exponential)이고, 두 번 미분하면 $\left(h'' + (h')^2\right)\mathrm{e}^h$가 된다. 지수함수 인수는 항상 양수이므로 볼록성(convexity)은 $h'' + (h')^2$의 부호, 즉 순수한 삼각함수 부등식으로 귀결된다. (i)에서는 이 부등식이 바로 그리라고 한 두 곡선을 비교하는 것임이 드러난다. (ii)에서는 이 부등식이 $\sin 2x$와 $\sin 2\alpha$의 비교로 단순해진다.

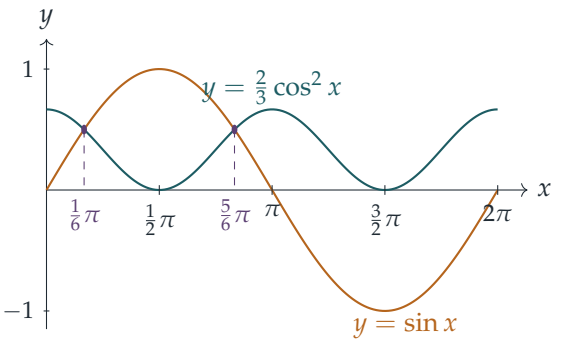
풀이

소문항 (i)

그래프 그리기. 곡선 $y = \frac{2}{3}\cos^2 x$는 0과 $\frac{2}{3}$ 사이에 놓인다. 이 곡선은 $x = 0, \pi, 2\pi$에서 $\frac{2}{3}$이고 $x = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$에서 축에 접하며, 주기(period)는 π이다. 곡선 $y = \sin x$는 익숙한 사인 곡선이다. 두 곡선이 만나는 점을 찾기 위해 $s = \sin x$로 놓고 $\cos^2 x = 1 - s^2$를 대입하면

$$\tfrac{2}{3}(1 - s^2) = s \iff 2s^2 + 3s - 2 = 0 \iff (2s - 1)(s + 2) = 0.$$

$s = -2$는 불가능하므로 $\sin x = \frac{1}{2}$이고, 따라서 두 곡선은 $x = \frac{1}{6}\pi$와 $x = \frac{5}{6}\pi$에서만 만난다. $(\pi, 2\pi)$에서는 사인 곡선이 음수이고 다른 곡선은 음이 아니므로 그 구간에서는 만나지 않는다.



f의 볼록성. $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\sin x}$일 때 연쇄법칙(chain rule)에 의해 $f'(x) = \frac{2}{3}\cos x\, f(x)$이고, 이어서 곱의 미분법(product rule)에 의해

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\tfrac{2}{3}\sin x\, f(x) + \tfrac{2}{3}\cos x\, f'(x) \\ &= f(x)\left(\tfrac{4}{9}\cos^2 x - \tfrac{2}{3}\sin x\right) \\ &= \tfrac{2}{3}f(x)\left(\tfrac{2}{3}\cos^2 x - \sin x\right). \end{aligned}$$

생각해 보기 왜 괄호 안의 식만 보면 모든 것이 결정되는가?

$f(x)$는 지수함수이므로 항상 양수이다. 따라서 $f''(x) \geq 0$인 것은 정확히 $\frac{2}{3}\cos^2 x \geq \sin x$일 때이다. 다시 말해, f는 정확히 청록색 곡선이 호박색 곡선과 같거나 그보다 위에 있는 곳에서 볼록하다. 문제에서 그래프를 먼저 그리라고 한 이유가 바로 이것이다.

그래프와 앞에서 구한 교점으로부터, $0 < x \leq \frac{1}{6}\pi$와 $\frac{5}{6}\pi \leq x < 2\pi$에서 $\frac{2}{3}\cos^2 x \geq \sin x$이다. $\frac{1}{6}\pi$와 $\frac{5}{6}\pi$ 사이에서는 사인 곡선이 위에 있다(예를 들어 $x = \frac{1}{2}\pi$에서 두 값은 0과 1이다). 따라서 f가 볼록인 구간은

$$0 < x \leq \tfrac{1}{6}\pi \qquad \text{그리고} \qquad \tfrac{5}{6}\pi \leq x < 2\pi,$$

이며, 이보다 더 큰 구간에서는 볼록하지 않다. ($f'' = 0$인 끝점 $\frac{1}{6}\pi$와 $\frac{5}{6}\pi$를 포함할지는 취향의 문제이다.)

소문항 (ii)

$g(x) = \mathrm{e}^{-k\tan x}$이면 $g'(x) = -k\sec^2 x\, g(x)$이다. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec^2 x = 2\sec^2 x\tan x$와 곱의 미분법을 이용하면

$$\begin{aligned} g''(x) &= -2k\sec^2 x\tan x\, g(x) - k\sec^2 x\, g'(x) \\ &= g(x)\left(k^2\sec^4 x - 2k\sec^2 x\tan x\right) \\ &= k\sec^2 x\, g(x)\left(k\sec^2 x - 2\tan x\right). \end{aligned}$$

여기서 $0 < 2\alpha < \frac{1}{2}\pi$이므로 $k = \sin 2\alpha > 0$이고, $\sec^2 x > 0$, $g(x) > 0$이다. 따라서 $g''(x) \geq 0$인 것은 정확히 $k\sec^2 x \geq 2\tan x$일 때이다. 양변에 $\cos^2 x > 0$을 곱하면 이 조건은 다음과 같이 된다.

$$k \geq 2\tan x \cos^2 x = 2\sin x \cos x = \sin 2x.$$

따라서 g가 볼록인 곳은 정확히 다음 조건을 만족하는 곳이다.

$$\sin 2x \leq \sin 2\alpha.$$

생각해 보기 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$일 때 $\sin 2x \leq \sin 2\alpha$인 곳은 어디인가?

x가 $(0, \frac{1}{2}\pi)$를 움직이면 $2x$는 $(0, \pi)$를 움직인다. 이 구간에서 sin은 $\frac{1}{2}\pi$까지 증가한 뒤 감소하며, $\frac{1}{2}\pi$에 대해 대칭이다. 값 $\sin 2\alpha (0 < 2\alpha < \frac{1}{2}\pi)$는 $2x = 2\alpha$와 $2x = \pi - 2\alpha$에서 나타난다. 따라서 $\sin 2x \leq \sin 2\alpha$인 것은 정확히 $2x \leq 2\alpha$ 또는 $2x \geq \pi - 2\alpha$일 때이다. 즉 다음과 같다.

$$0 < x \leq \alpha \qquad \text{또는} \qquad \tfrac{1}{2}\pi - \alpha \leq x < \tfrac{1}{2}\pi.$$

특히 $0 < x < \alpha$이면 $0 < 2x < 2\alpha < \frac{1}{2}\pi$이고 이 범위에서 sin은 증가하므로 $\sin 2x < \sin 2\alpha = k$, 따라서 $g''(x) > 0$이다. 그러므로 요구한 대로 g는 $0 < x < \alpha$에서 볼록하다.

다른 하나의 구간은 다음과 같다.

$$\tfrac{1}{2}\pi - \alpha < x < \tfrac{1}{2}\pi.$$

$\alpha < \frac{1}{4}\pi$이므로 $\frac{1}{2}\pi - \alpha > \frac{1}{4}\pi > \alpha$이고, 따라서 이 구간은 첫 번째 구간과 실제로 다르다. 그 사이 구간 $\alpha < x < \frac{1}{2}\pi - \alpha$에서 g는 볼록하지 않다.

검산

- $x = \frac{1}{6}\pi$에서 $\frac{2}{3}\cos^2 x = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2} = \sin x$이므로 그 점에서 $f'' = 0$이다. 경계점이라면 당연히 그래야 한다.
- (ii)에서 $\sin 2x$는 $x \mapsto \frac{1}{2}\pi - x$에 대해 변하지 않으므로 문제는 이 변환에 대해 대칭이다. 두 번째 구간이 첫 번째 구간과 거울상인 이유가 이것이다.
- 수치적으로 $\alpha = 0.5 (k \approx 0.841)$로 놓고 유한차분(finite difference)으로 g의 이계도함수(second derivative)를 계산하면 $x = 0.3$과 $x = 1.3$에서 양수이고 $x = 0.8$에서 음수이다. $\frac{1}{2}\pi - \alpha \approx 1.071$이므로 이는 구한 구간과 일치한다. 무작위로 고른 많은 α와 x로 컴퓨터를 이용해 확인한 결과도 두 소문항 모두와 일치했다.

흔한 실수

- $e^{h(x)}$를 두 번 미분할 때 $(h')^2$ 항을 빠뜨리는 실수. 이계도함수는 단순히 $h''e^h$가 아니다.
- (i)에서 $(\pi, 2\pi)$ 전체를 놓치는 실수. 그 구간에서는 $\sin x < 0 \leq \frac{2}{3}\cos^2 x$이므로 f는 $\frac{5}{6}\pi$부터 2π까지 줄곧 볼록하다.
- $\sin 2x \leq \sin 2\alpha \Rightarrow x \leq \alpha$에서 멈추는 실수. sin은 $(0, \pi)$에서 단조(monotonic)가 아니므로 이렇게 하면 두 번째 구간을 잃게 된다.

STEP 너머

이계도함수 판정법은 볼록성의 한 면에 불과하다. 진짜 정의는 기하학적이다. 즉 모든 현(chord)이 그래프와 같거나 그보다 위에 놓인다는 것이다. 미분가능한(differentiable) 함수에서는 이것이 f'이 증가한다는 것과 동치이며, 이로부터 옌센 부등식(Jensen's inequality)이 나온다. 옌센 부등식은 산술-기하 평균 부등식(AM–GM)과 확률론 및 최적화의 많은 부분의 바탕이 된다. 볼록함수는 Bartle and Sherbert, *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)에서 꼼꼼하게 다룬다. Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에는 STEP 유형의 연습 문제가 더 실려 있다.

풀이

STEP I 2008, 문제 5

순수수학 • 다항식의 상계와 하계

STEP I 2008, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/08-s1-q5

핵심 아이디어

$n = 1$일 때 다항식(polynomial)은 직선이고, 구간 양 끝에서의 값은 서로 묶여 있다. 두 값의 차가 정확히 2이므로 둘 다 작을 수는 없다. 소문항 (ii)의 요령은 최고차항의 계수(leading coefficient)로 나누어 체비쇼프(Chebyshev)의 정리를 곡선 자체에 적용할 수 있게 만드는 것이다. 그러면 정리에 의해 $[-1, 1]$의 어딘가에서 $|y|$가 커야 하는 반면, 양 끝점에서의 값은 작다. 양 끝점의 값보다 더 높이 올라가는(또는 둘 다보다 더 낮게 내려가는) 곡선은 그 사이 어딘가에서 방향을 바꾸어야 한다.

풀이

소문항 (i)

$n = 1$인 경우. 이때 $\mathrm{p}(x) = x + a_0$이고, $M \geq 2^0 = 1$임을 보여야 한다. M은 $[-1, 1]$의 임의의 점에서의 $|\mathrm{p}|$의 값 이상이므로, 특히 양 끝점에서의 값 이상이다.

$$M \geq |\mathrm{p}(1)| = |1 + a_0| \quad \text{그리고} \quad M \geq |\mathrm{p}(-1)| = |a_0 - 1|.$$

두 식을 더하고 삼각부등식(triangle inequality) $|u| + |v| \geq |u - v|$를 쓰면

$$2M \geq |1 + a_0| + |a_0 - 1| \geq \big|(1 + a_0) - (a_0 - 1)\big| = 2,$$

이므로 $M \geq 1 = 2^{1-n}$이고, 따라서 $n = 1$일 때 정리가 증명된다. ($\mathrm{p}(x) = x$일 때 등호가 성립하므로 이 하한은 더 개선할 수 없다.)

(a) $\mathrm{p}(x) = x^2 - \frac{1}{2}$이고 $|x| \leq 1$이면 $0 \leq x^2 \leq 1$이므로 $-\frac{1}{2} \leq \mathrm{p}(x) \leq \frac{1}{2}$이다. 값 $\frac{1}{2}$는 $x = \pm 1$에서 (그리고 $-\frac{1}{2}$는 $x = 0$에서) 얻어지므로

$$M = \tfrac{1}{2} = 2^{1-2}.$$

정리가 등호와 함께 성립한다.

(b) $\mathrm{p}(x) = x^3 - x$에 대해서는 $M \geq 2^{1-3} = \frac{1}{4}$임을 보여야 한다. $|\mathrm{p}| \geq \frac{1}{4}$인 점을 하나만 찾으면 충분하다. 정류점(stationary point)은 $3x^2 - 1 = 0$인 곳, 즉 $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$이고, 둘 다 $[-1, 1]$에 속하며

$$\mathrm{p}\left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

$\mathrm{p}(\pm 1) = 0$이므로 이것이 실제로 최댓값이다. 즉 $M = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \approx 0.385$이다. 계산기 없이 $\frac{1}{4}$와 비교하려면 양변을 제곱한다.

$$\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{4}{27} > \frac{4}{64} = \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{4}\right)^2,$$

따라서 $M > \frac{1}{4}$이고 정리가 성립한다(이번에는 여유 있게).

소문항 (ii)

$f(x) = 64x^5 + 25x^4 - 66x^3 - 24x^2 + 3x + 1$이라 하자. 체비쇼프의 정리는 최고차항의 계수가 1인 다항식에 관한 것이므로, 다음 다항식에 정리를 적용한다.

$$\mathrm{p}(x) = \tfrac{1}{64} f(x) = x^5 + \tfrac{25}{64}x^4 - \tfrac{66}{64}x^3 - \tfrac{24}{64}x^2 + \tfrac{3}{64}x + \tfrac{1}{64},$$

이것은 $n = 5$인 요구된 꼴이다. 정리에 의해 $\max_{|x|\leq 1} |\mathrm{p}(x)| \geq 2^{-4} = \frac{1}{16}$이고, 양변에 64를 곱하면

$$\max_{|x|\leq 1} |f(x)| \geq 4.$$

따라서 $|f(x_0)| \geq 4$인 $x_0 \in [-1, 1]$이 존재한다.

이제 양 끝점을 살펴보자.

$$f(1) = 64 + 25 - 66 - 24 + 3 + 1 = 3,$$
$$f(-1) = -64 + 25 + 66 - 24 - 3 + 1 = 1.$$

두 값 모두 절댓값이 4보다 작으므로 x_0은 끝점이 아니다. 즉 $-1 < x_0 < 1$이다.

> **생각해 보기** $|f|$가 구간 안쪽에서 커진다는 것은 안다. 왜 이로부터 전환점이 반드시 생기는가?

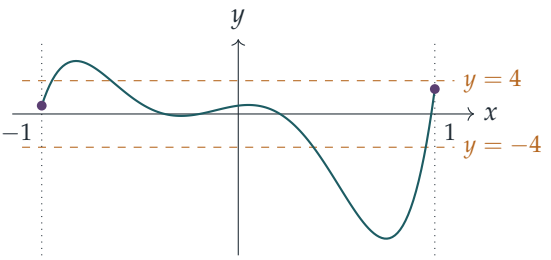
두 경우로 나눈다.

- $f(x_0) \geq 4$이면 $f(x_0)$은 $f(-1) = 1$과 $f(1) = 3$보다 모두 크다. 연속함수(continuous function) f는 닫힌구간(closed interval) $[-1, 1]$에서 최댓값을 가진다. 이 값은 $f(x_0) \geq 4$ 이상이므로 어느 끝점에서도 얻어지지 않는다. 따라서 최댓값은 구간 내부의 점에서 얻어지고, 그 점은 f의 극댓값(local maximum)이다.

- $f(x_0) \leq -4$이면 $f(x_0)$은 두 끝점의 값보다 모두 작고, 같은 방법으로 $[-1,1]$에서 f의 최솟값은 내부의 점에서 얻어지며, 그 점은 극솟값(local minimum)이다.

어느 경우든 f는 $(-1,1)$의 내부에서 극댓값 또는 극솟값을 가진다. 그 점에서 $f' = 0$이고, f는 상수가 아닌 다항식이므로 f'의 영점은 유한개뿐이다. 따라서 그 점의 바로 왼쪽에서 f'의 부호는 일정하고, 바로 오른쪽에서도 일정하다. 그 점이 극댓값 또는 극솟값이므로 두 부호는 반대여야 하고, 따라서 그 점은 진짜 전환점(turning point)이다. 그러므로 곡선은 $-1 \leq x \leq 1$에서 적어도 하나의 전환점을 가진다.

사차방정식(quartic) $f'(x) = 0$을 한 번도 풀 필요가 없었다는 점에 주목하자. 바로 그것이 이 문제의 핵심이다.



그림은 $[-1,1]$에서의 곡선을 보여 준다. 두 끝점의 값은 모두 점선 $y = \pm 4$ 사이에 있지만, 곡선은 그 띠 밖으로 나간다. 실제로 곡선은 구간 안에 전환점을 네 개 가지며, 가장 깊은 것은 $x \approx 0.75$ 근처에서 $y \approx -15$이다.

검산

- $n = 1$일 때 a_0에 몇 가지 값을 넣어 보면 $\max(|1 + a_0|, |1 - a_0|)$는 결코 1보다 작지 않고, $a_0 = 0$일 때만 1과 같다.
- (b)에서 $\frac{2}{3\sqrt{3}} \approx 0.3849$로, 0.25보다 넉넉히 크다. 촘촘한 격자에서 $x^3 - x$의 값을 조사하면 이것이 $|x^3 - x|$의 최댓값임을 확인할 수 있다.
- (ii)에서 $[-1,1]$ 위의 f를 수치적으로 조사하면 $\max|f| \approx 15.0$ (이때 $x \approx 0.753$이고 $f \approx -15.0$)으로, 보장된 값 4보다 훨씬 크다. 또한 f'의 부호가 $x \approx -0.825, -0.292, 0.052, 0.753$에서 바뀐다는 것도 알 수 있다.

흔한 실수

- 정리를 f에 바로 적용하는 것. f의 최고차항의 계수는 1이 아니라 64이므로 먼저 64로 나누어야 한다. 그러면 하한은 $64 \cdot 2^{-4} = 4$가 된다.

- "어딘가에서 $|f| \geq 4$"에서 멈추는 것. 그것만으로는 전환점이 생기지 않는다. 극값이 구간 내부에서 얻어진다는 것을 보이려면 끝점의 값 1과 3이 필요하다.
- (b)에서 $\frac{2}{3\sqrt{3}}$와 $\frac{1}{4}$를 부주의하게 비교하는 것. 두 양수를 제곱하면 비교가 정확해진다.

STEP 너머

체비쇼프 정리에서 등호는 정확히 $2^{1-n}T_n(x)$일 때 성립한다. 여기서 T_n은 $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$로 정의되는 체비쇼프 다항식(Chebyshev polynomial)이다. 소문항 (a)는 $\frac{1}{2}T_2$이고, $n = 1$인 경우는 $T_1(x) = x$이다. 이 다항식들은 근사 이론(approximation theory)의 출발점이다. 이 다항식들은 보간(interpolation)이 등간격 점보다 체비쇼프 점(Chebyshev nodes)에서 가장 잘 작동하는 이유를 설명해 준다. 소문항 (ii)의 논증은 최대·최소 정리(extreme value theorem, 닫힌구간에서 연속인 함수는 최댓값과 최솟값을 가진다)를 사용하는데, 이 정리는 대학 첫 해석학(analysis) 과목에서 엄밀하게 증명된다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)가 이를 읽어 보기에 좋은 책이다.

풀이

STEP I 2008, 문제 6

순수수학 • 역함수와 넓이

STEP I 2008, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/08-s1-q6

핵심 아이디어

역함수(inverse function)의 그래프는 원래 함수의 그래프를 직선 $y = x$에 대하여 대칭이동(reflection)한 것이다. 따라서 g를 y에 대하여 적분한 값은 곡선 $y = f(x)$와 y축 사이의 넓이를 **옆으로** 잰 것이다. 위끝 k는 우연히 정해진 값이 아니다. 이 값은 정확히 $f(\frac{1}{2})$이다. 이 사실을 알아차리면 두 넓이가 맞물려 하나의 직사각형을 채운다.

풀이

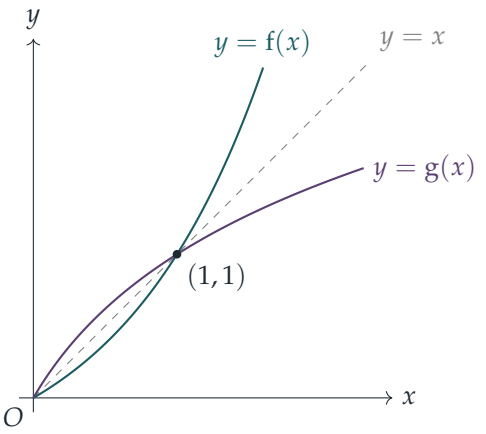
그래프 그리기

함수 f는 증가함수이고 $f(0) = 0$, $f(1) = 1$이다. $f''(x) = e^x/(e-1) > 0$이므로 아래로 볼록(convex)하고, 원점에서의 기울기(gradient)는 $f'(0) = 1/(e-1) \approx 0.58 < 1$이다. 따라서 $0 < x < 1$에서 곡선은 직선 $y = x$보다 아래에 있고, $(1,1)$에서 그 직선과 만난 뒤 지수적으로 증가한다.

g를 구하기 위해 $y = \dfrac{e^x - 1}{e - 1}$을 x에 대하여 풀면

$$g(x) = \ln\big(1 + (e-1)x\big), \qquad x \geq 0,$$

이다. 이는 f의 치역이 $[0, \infty)$이기 때문이다. 이 함수의 그래프는 $y = f(x)$를 $y = x$에 대하여 대칭이동한 것이다. 즉 기울기 $e - 1 \approx 1.72$로 $(0,0)$을 지나고, 위로 볼록(concave)하며, $(1,1)$에서 $y = x$와 만난 뒤 로그함수처럼 천천히 증가한다.



첫 번째 적분

$$\int_0^{1/2} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{e}-1}\Big[\mathrm{e}^x - x\Big]_0^{1/2} = \frac{1}{\mathrm{e}-1}\Big(\sqrt{\mathrm{e}} - \tfrac{1}{2} - 1\Big) = \frac{\sqrt{\mathrm{e}} - \frac{3}{2}}{\mathrm{e}-1}.$$

두 번째 적분

먼저 다음을 관찰하자.

$$\mathrm{f}(\tfrac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\mathrm{e}}-1}{\mathrm{e}-1} = \frac{\sqrt{\mathrm{e}}-1}{(\sqrt{\mathrm{e}}-1)(\sqrt{\mathrm{e}}+1)} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}+1} = k,$$

여기서 제곱의 차(difference of two squares) $\mathrm{e}-1 = (\sqrt{\mathrm{e}})^2 - 1$을 이용하였다. 같은 말로 $\mathrm{g}(k) = \frac{1}{2}$이고, $1 + (\mathrm{e}-1)k = 1 + (\sqrt{\mathrm{e}}-1) = \sqrt{\mathrm{e}}$이다.

> **?** **생각해 보기** $\ln\big(1 + (\mathrm{e}-1)x\big)$는 어떻게 적분할까?

$u = 1 + (\mathrm{e}-1)x$로 치환(substitution)하면 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/(\mathrm{e}-1)$이고, 적분 구간의 끝은 $u = 1$과 $u = \sqrt{\mathrm{e}}$가 된다. 그다음 $\int \ln u\,\mathrm{d}u = u\ln u - u$($\ln u$와 1의 곱으로 보고 부분적분(integration by parts)한 결과)를 이용하면

$$\begin{aligned}\int_0^k \mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\mathrm{e}-1}\int_1^{\sqrt{\mathrm{e}}} \ln u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\mathrm{e}-1}\Big[u\ln u - u\Big]_1^{\sqrt{\mathrm{e}}} \\ &= \frac{1}{\mathrm{e}-1}\Big(\tfrac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}} - \sqrt{\mathrm{e}} - (0-1)\Big) = \frac{1 - \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}-1},\end{aligned}$$

이다. 여기서 $\ln\sqrt{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}$를 이용하였다.

더하기

$$\int_0^{1/2} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{k} \mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\mathrm{e}} - \frac{3}{2} + 1 - \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}-1} = \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{\mathrm{e}}-1)}{(\sqrt{\mathrm{e}}-1)(\sqrt{\mathrm{e}}+1)} = \frac{1}{2(\sqrt{\mathrm{e}}+1)},$$

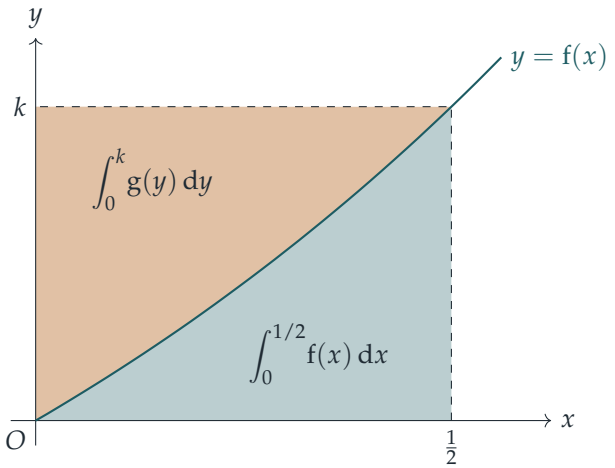
이므로 증명하려던 식이 성립한다.

결과 해석하기

답은 $\frac{1}{2} \times k$이고, 이는 두 꼭짓점이 $(0,0)$과 $(\frac{1}{2},k)$인 직사각형의 넓이이다. 그 이유는 다음과 같다.

? **생각해 보기** $\int_0^k \mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x$는 f의 그래프에서 어디에 나타나는가?

$y = x$에 대한 대칭이동은 넓이를 보존한다. $0 \le x \le k$에서 $y = \mathrm{g}(x)$ 아래의 영역은 대칭이동하면 $0 \le y \le k$에서 곡선 $y = \mathrm{f}(x)$와 y축 사이의 영역이 된다. 다시 말해 이 값은 곡선 $y = \mathrm{f}(x)$를 따라 잰 $\int_0^k x\,\mathrm{d}y$, 곧 곡선 **왼쪽**의 넓이이다. $\mathrm{f}(\frac{1}{2}) = k$이므로 곡선은 직사각형의 꼭짓점 $(0,0)$에서 꼭짓점 $(\frac{1}{2},k)$까지 이어지며 직사각형을 두 조각으로 나눈다. 하나는 곡선 아래의 넓이(첫 번째 적분, 청록색)이고, 다른 하나는 곡선 왼쪽의 넓이(두 번째 적분, 호박색)이다.



따라서 두 적분을 합하면 직사각형 전체가 되고, 그 넓이는 $\frac{1}{2}k = \dfrac{1}{2(\sqrt{\mathrm{e}}+1)}$이다. 같은 그림으로부터 $\mathrm{f}(0) = 0$인 증가함수에 대하여 다음 일반적인 사실을 얻는다.

$$\int_0^{a} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\mathrm{f}(a)} \mathrm{f}^{-1}(y)\,\mathrm{d}y = a\,\mathrm{f}(a).$$

검산

수치적으로 첫 번째 적분은 약 0.08655, 두 번째 적분은 약 0.10222이다. 각각에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면 정확한 값과 소수점 아래 열두 자리까지 일치하고, 두 값의 합 0.18877은 $1/\left(2(\sqrt{\mathrm{e}}+1)\right)$과 같다. 그래프가 맞는지 확인하는 차원에서 보면, 두 조각은 모두 양수이고 청록색 조각이 더 작은데, 이는 당연하다. 아래로 볼록한 곡선이 직사각형의 대각선보다 아래로 처져 있기 때문이다.

흔한 실수

- $k = \mathrm{f}(\frac{1}{2})$임을 알아차리지 못해서 $1 + (\mathrm{e}-1)k = \sqrt{\mathrm{e}}$로 간단히 하는 과정을 놓친다.
- 원점 근처에서 f를 $y = x$보다 위에 그린다. 그곳에서의 기울기는 $1/(\mathrm{e}-1) < 1$이다.
- 그림에서 $y = \mathrm{g}(x)$ 아래의 넓이를 별도의 그림에 색칠하고, 그것이 $y = \mathrm{f}(x)$ 옆의 영역과 어떤 관계인지 설명하지 않는다. 핵심은 대칭이동이 한 영역을 다른 영역으로 옮긴다는 점이다.

STEP 너머

항등식 $\int_0^a \mathrm{f} + \int_0^{\mathrm{f}(a)} \mathrm{f}^{-1} = a\,\mathrm{f}(a)$는 **영 부등식**(Young's inequality)에서 등호가 성립하는 경우이다. 즉 임의의 $b \geq 0$에 대하여 $\int_0^a \mathrm{f} + \int_0^b \mathrm{f}^{-1} \geq ab$이다. $\mathrm{f}(x) = x^{p-1}$로 두면 $1/p + 1/q = 1$일 때 $ab \leq a^p/p + b^q/q$를 얻는데, 이는 해석학에서 휠더 부등식(Hölder's inequality)의 출발점이다. 이와 같은 적분을 어떻게 엄밀하게 다루는지 보려면 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)가 좋다.

풀이

STEP I 2008, 문제 7

순수수학 • 회전과 거리

STEP I 2008, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/08-s1-q7

핵심 아이디어

원점을 지나는 직선까지의 수직 거리(perpendicular distance)는 그 직선이 x축 위에 놓이도록 평면을 회전(rotation)시키면 쉽게 구할 수 있다. 이때 거리는 새로운 y좌표의 크기일 뿐이다. 첫 번째 부분의 회전 공식이 세 변 가운데 두 변에 대해 바로 이 일을 해 준다. 마지막 부분의 요령은 절댓값(modulus) 기호를 떼어 내는 것이다. 세 개의 **부호 있는** 거리(signed distance)의 합은 언제나 같은 상수이고, 절댓값을 씌우면 합은 커질 수만 있다.

풀이

회전 공식

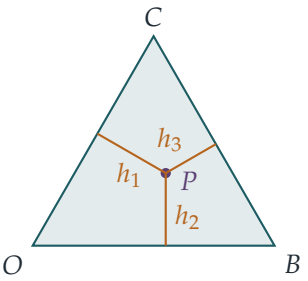
$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$로 놓는다. 여기서 $r = OP$이고 θ는 양의 x축에서 OP까지의 각이다. OP를 시계 방향으로 60° 회전시키면 r은 그대로이고 각은 $\theta - 60^\circ$로 바뀌므로, 새로운 y좌표는

$$\begin{aligned} r\sin(\theta - 60^\circ) &= r\sin\theta\cos 60^\circ - r\cos\theta\sin 60^\circ \\ &= \tfrac{1}{2}y - \tfrac{\sqrt{3}}{2}x = \tfrac{1}{2}\left(y - \sqrt{3}\,x\right), \end{aligned}$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. 시계 반대 방향으로 회전시키면 각은 $\theta + 60^\circ$가 되고, $\sin 60^\circ$의 부호만 바꾸어 같은 방식으로 전개하면 새로운 y좌표는

$$\tfrac{1}{2}\left(y + \sqrt{3}\,x\right).$$

세 거리



h_1. 직선 OC는 x축과 $60°$의 각을 이룬다. 그림 전체를 O를 중심으로 시계 방향으로 $60°$ 회전시키면 OC가 x축 위로 옮겨지고 거리는 보존된다. 회전된 그림에서 P에서 x축까지의 거리는 새로운 y좌표의 절댓값이므로

$$h_1 = \tfrac{1}{2}\left| y - \sqrt{3}\,x \right|.$$

h_2. 직선 OB는 x축이므로 $h_2 = |y|$이다.

h_3. 이번에는 O를 중심으로 시계 반대 방향으로 $60°$ 회전시킨다. 이 회전은 $B = (1,0)$을 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$으로 보내고, (각 $60°$에 있는) C를 각 $120°$에 있는 점, 즉 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$으로 보낸다. 따라서 직선 BC는 수평선 $y = \frac{1}{2}\sqrt{3}$이 되고, P의 y좌표는 $\frac{1}{2}(y + \sqrt{3}\,x)$가 된다. 그러므로

$$h_3 = \left| \tfrac{1}{2}(y + \sqrt{3}\,x) - \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \right| = \tfrac{1}{2}\left| \sqrt{3}\,x + y - \sqrt{3} \right|.$$

(같은 방법으로, BC의 방정식은 $\sqrt{3}\,x + y = \sqrt{3}$이고 $\sqrt{3+1} = 2$이므로 일반적인 점과 직선 사이의 거리 공식으로도 같은 답을 얻는다.)

마지막 부분

부호 있는 양

$$s_1 = \tfrac{1}{2}(\sqrt{3}\,x - y), \qquad s_2 = y, \qquad s_3 = \tfrac{1}{2}(\sqrt{3} - \sqrt{3}\,x - y),$$

를 정의하면 $i = 1,2,3$에 대해 $h_i = |s_i|$이다. 이들을 더하면

$$s_1 + s_2 + s_3 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,x - \tfrac{1}{2}y + y + \tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,x - \tfrac{1}{2}y = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

이고, 이는 **모든** 점 (x,y)에 대해 성립한다.

> **생각해 보기** s_1, s_2, s_3의 부호는 삼각형과 어떤 관계가 있는가?

각 s_i는 삼각형의 한 변 위에서 0이 되는 일차식이다. 내부에 있는 무게중심(centroid) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\sqrt{3})$을 대입해 보면 $s_1 = s_2 = s_3 = \frac{1}{6}\sqrt{3} > 0$이다. 따라서 $s_2 \geq 0$은 OB를 기준으로

C가 있는 쪽이고, $s_1 \geq 0$은 OC를 기준으로 B가 있는 쪽이며, $s_3 \geq 0$은 BC를 기준으로 O가 있는 쪽이다. 경계를 포함한 삼각형 OBC는 정확히 이 세 반평면(half-plane)의 교집합이므로

$$P \text{ 가 다음 삼각형의 경계 또는 내부에 있다: } OBC \iff s_1 \geq 0,\ s_2 \geq 0,\ s_3 \geq 0.$$

이제 임의의 실수 s에 대해 $|s| \geq s$이고, 등호는 $s \geq 0$일 때만 성립한다. 따라서

$$h_1 + h_2 + h_3 = |s_1| + |s_2| + |s_3| \ \geq\ s_1 + s_2 + s_3 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3},$$

이고, 등호는 모든 i에 대해 $|s_i| = s_i$일 때, 즉 세 s_i가 모두 음이 아닐 때만 성립한다. 앞 문단에 의해 이는 정확히 P가 삼각형 OBC의 경계 또는 내부에 있을 때이다. 이로써 양방향이 한꺼번에 증명된다.

$$h_1 + h_2 + h_3 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \iff P \text{ 가 다음 삼각형의 경계 또는 내부에 있다: } OBC.$$

또한 삼각형 바깥에서는 합이 $\frac{1}{2}\sqrt{3}$보다 엄밀히 크다는 점도 알 수 있다.

검산

- 꼭짓점, 예를 들어 $P = B = (1, 0)$에서: $h_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $h_2 = 0$, $h_3 = 0$이고 합은 $\frac{1}{2}\sqrt{3}$이다. 맞다.
- 무게중심에서는 각 거리가 $\frac{1}{6}\sqrt{3}$이고, 세 개를 더하면 삼각형의 높이인 $\frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0.8660$이 된다.
- 바깥의 점 $P = (2, 0)$에서: $h_1 = \sqrt{3}$, $h_2 = 0$, $h_3 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$이고 합은 $\frac{3}{2}\sqrt{3} > \frac{1}{2}\sqrt{3}$이다.
- 무작위로 고른 10^5개의 점에서 세 공식을 점과 직선 사이의 거리를 직접 계산한 값과 비교했고(10^{-15}까지 일치), 변 위의 점을 다수 포함한 2×10^5개의 점에서 "필요충분조건"을 검사했는데 예외는 없었다.

흔한 실수

- 회전의 부호를 틀리는 것: 시계 방향은 각이 **줄어든다**는 뜻이므로 $\theta - 60^\circ$가 된다.
- 한 방향만 증명하는 것. 삼각형 내부에서 합이 $\frac{1}{2}\sqrt{3}$임을 확인하는 것만으로는 충분하지 않다. 바깥에서는 합이 $\frac{1}{2}\sqrt{3}$이 **아님**도 보여야 한다. 부등식 $|s| \geq s$가 두 가지를 한꺼번에 해결해 준다.
- h_1, h_2, h_3에서 절댓값 기호를 빠뜨리는 것: 거리는 절대 음수가 아니다.

STEP 너머

이것은 비비아니 정리(Viviani's theorem)이다. 정삼각형에서 내부의 한 점에서 세 변까지의 거리의 합은 높이와 같다. 부호 있는 거리 s_1, s_2, s_3은 (상수배를 제외하면) P의 **무게중심 좌표**(barycentric coordinates) 또는 **삼선 좌표**(trilinear coordinates)이다. 이 좌표들의 합은 언제나 상수이고, 정확히 삼각형 내부에서 모두 음이 아니다. 이들은 기하학, 컴퓨터 그래픽스, 볼록 해석(convex analysis)의 표준적인 도구이다. 회전 공식은 2×2 회전 행렬(rotation matrix)의 두 번째 행이며, 회전을 선형 사상(linear map)으로 이해하려면 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수 입문)가 좋은 출발점이다.

풀이

STEP I 2008, 문제 8

순수수학 • 클레로 미분방정식

> **STEP I 2008, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/08-s1-q8

핵심 아이디어

두 방정식 모두 y'은 포함하지만 y''은 포함하지 않으며, 변수를 분리하거나 바로 적분할 수 있는 꼴도 아니다. 한 번 더 미분하는 것이 요령이다. 그러면 y'만 있는 항들이 소거되고, 남은 식은 y''을 한 인수로 갖도록 인수분해(factorise)된다. 각 인수가 하나의 경우를 주며, 각 경우에 적분하는 대신 **원래** 방정식에 다시 대입하면 임의상수(arbitrary constant)가 저절로 결정된다.

풀이

풀이 전체에서 $p = y'$로 쓰므로 $p' = y''$이다.

소문항 (i)

xp에 곱의 미분법(product rule)을 써서 $p^2 - xp + y = 0$을 x에 대하여 미분하면

$$2p\,y'' - \left(p + x\,y''\right) + p = 0 \quad \Longrightarrow \quad y''\,(2p - x) = 0.$$

두 p 항이 소거되므로, 각 점에서 $y'' = 0$ 또는 $2y' = x$이다. 이것이 보이려던 것이다.

경우 $y'' = 0$. 이때 y'은 상수 m이고 $y = mx + c$이다. 이를 $(*)$에 대입하면

$$m^2 - xm + (mx + c) = 0 \quad \Longrightarrow \quad c = -m^2.$$

따라서 곡선은 직선 $y = mx - m^2$이다.

경우 $2y' = x$. $p = \frac{1}{2}x$를 $(*)$에 대입하면

$$\tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{2}x^2 + y = 0 \quad \Longrightarrow \quad 4y = x^2.$$

생각해 보기 그냥 $y' = \frac{1}{2}x$를 적분하여 $y = \frac{1}{4}x^2 + k$를 얻으면 왜 안 될까?

그렇게 할 수도 있지만, $(*)$를 미분하는 과정에서 정보가 버려졌다. $y = \frac{1}{4}x^2 + k$ 꼴의 함수는 모두 $2y' = x$를 만족하지만, $(*)$ 자체를 만족하는 것은 $k = 0$뿐이다(예를 들어 $k = 1$이면 $x = 0$에서 $0 - 0 + 1 \neq 0$이다). $(*)$에 곧바로 다시 대입하면 모든 정보를 한꺼번에 사용하므로 상수가 바로 결정된다. 첫 번째 경우에 $c = -m^2$인 이유도 같은 설명으로 이해된다.

따라서 곡선은 $c = -m^2$인 직선 $y = mx + c$이거나 포물선(parabola) $4y = x^2$이다.

두 답은 서로 연결되어 있다. 직선 $y = mx - m^2$은 $x^2 - 4mx + 4m^2 = 0$, 즉 $(x - 2m)^2 = 0$인 곳에서 $4y = x^2$과 만나므로, 각 직선은 점 $(2m, m^2)$에서 포물선에 접하는 접선(tangent)이다. 포물선은 이 직선족의 **포락선**(envelope)이다.

소문항 (ii)

$(x^2 - 1)p^2 - 2xyp + y^2 - 1 = 0$을 x에 대하여 미분하면

$$2xp^2 + 2(x^2 - 1)p\,y'' - 2yp - 2xp^2 - 2xy\,y'' + 2yp = 0.$$

y''이 없는 항들은 짝지어 소거되고, 다음이 남는다.

$$2y''\big[(x^2 - 1)p - xy\big] = 0.$$

경우 $y'' = 0$. 이때 $y = mx + c$이다. 방정식을

$$(y - xp)^2 = 1 + p^2,$$

로 변형할 수 있음을 알아차리면 도움이 된다. 실제로 $(y - xp)^2 - p^2 - 1 = y^2 - 2xyp + (x^2 - 1)p^2 - 1$이기 때문이다. 직선에 대해서는 $y - xp = c$이고 $p = m$이므로

$$c^2 = 1 + m^2, \qquad \text{즉,} \qquad y = mx \pm \sqrt{1 + m^2}.$$

경우 $(x^2 - 1)p = xy$. $x^2 \neq 1$인 곳에서는 $p = \dfrac{xy}{x^2 - 1}$이므로

$$y - xp = y - \frac{x^2 y}{x^2 - 1} = \frac{-y}{x^2 - 1}.$$

이를 $(y - xp)^2 = 1 + p^2$에 대입하고 $(x^2 - 1)^2$을 곱하면

$$\begin{aligned} y^2 &= (x^2 - 1)^2 + x^2 y^2 \\ y^2(1 - x^2) &= (1 - x^2)^2 \\ y^2 &= 1 - x^2, \end{aligned}$$

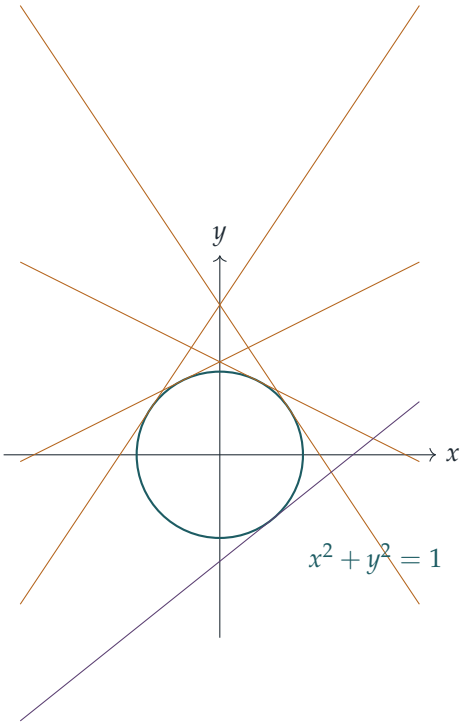
이다. 마지막 단계에서는 $1-x^2 \neq 0$으로 나누었다. 따라서 곡선은 원 $x^2+y^2=1$이다. ($x=\pm 1$에서는 조건 $(x^2-1)p=xy$에 의해 $y=0$이어야 하므로 점 $(\pm 1, 0)$을 얻는데, 이 점들도 같은 원 위에 있다.)

역으로 이 원은 실제로 방정식을 만족한다. 원 위에서 $p=-x/y$이므로 $y-xp=(y^2+x^2)/y=1/y$이고 $1+p^2=(x^2+y^2)/y^2=1/y^2$이 되어 두 식이 일치한다.

따라서 곡선은 $c^2=1+m^2$인 직선 $y=mx+c$이거나 단위원(unit circle) $x^2+y^2=1$이다.

? **생각해 보기** 직선 $y=mx\pm\sqrt{1+m^2}$은 원과 어떤 관계가 있을까?

원점에서 $y=mx+c$까지의 거리는 $|c|/\sqrt{1+m^2}$이고, 여기서는 정확히 1이다. 따라서 이 직선들은 바로 단위원의 (수직이 아닌) 접선들이며, 이는 (i)의 직선들이 포물선의 접선이었던 것과 똑같다.



검산

- (i)에서 $m=1$로 두자. $y=x-1$은 $p=1$이고, $1-x+x-1=0$이다. 이 직선은 $(2,1)$에서 $4y=x^2$에 접한다.
- (ii)에서 원 위의 점 $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$에서는 $p=-\frac{3}{4}$이다. 그러면 $(x^2-1)p^2-2xyp+y^2-1=$

$-\frac{16}{25}\cdot\frac{9}{16}+\frac{18}{25}+\frac{16}{25}-1=0$이다.

- 수치적으로, 임의의 삼차곡선들을 따라 두 도함수 인수분해를 모두 확인했고, 직선, 포물선, 원은 잔차가 (10^{-13} 이내로) 0인 반면 $y=\frac{1}{4}x^2+1$과 $x^2+y^2=4$는 그렇지 않음을 확인했다.

흔한 실수

- $y'=\frac{1}{2}x$나 $y''=0$을 적분하고 임의상수를 그대로 남겨 두는 것. 상수는 원래 방정식으로 결정해야 한다.
- $c=\pm\sqrt{1+m^2}$에서 $\pm$을 빠뜨리는 것. 각 기울기(gradient)마다 평행한 접선이 두 개 있다.

STEP 너머

소문항 (i)은 **클레로 방정식**(Clairaut equation) $y=xp-f(p)$이다. 이 방정식의 일반해(general solution)는 직선족 $y=mx-f(m)$이고, 그 밖에 이 직선족의 포락선인 **특이해**(singular solution)도 갖는데, 특이해는 상수를 어떻게 선택해도 얻어지지 않는다. 소문항 (ii)도 같은 현상으로, $y=xp\pm\sqrt{1+p^2}$이며 원이 포락선이다. 특이해는 일계(first-order) 방정식이 각 점을 지나는 해를 유일하게 가질 필요가 없음을 보여 준다. 언제 유일성이 성립하는지는 처음 배우는 상미분방정식(ODE) 강좌에서 다루는 존재성과 유일성 정리(existence and uniqueness theorems)의 주제이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 이에 대해 읽어 보기 좋은 책이다.

풀이

STEP I 2008, 문제 9

역학 • 굴러가는 고리의 운동량

STEP I 2008, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/08-s1-q9

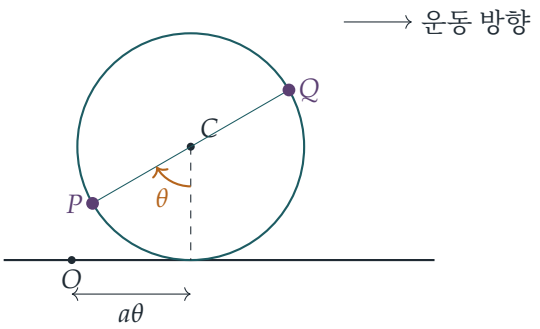
핵심 아이디어

미끄러지지 않고 구르는 운동(rolling without slipping)에서는 병진(translation)과 회전(rotation)이 서로 묶여 있다. 고리가 θ만큼 돌았을 때 그 중심은 $a\theta$만큼 이동하는데, 이는 테이블에 닿았던 테두리의 길이와 같다. 따라서 각 입자의 위치는 "중심 더하기 회전하는 반지름"이고, 이를 미분하면 속도를 얻는다. 마지막 부분에서는 외력(external force)에 수평 성분이 없으므로 전체 수평 운동량(momentum)이 변할 수 없고, 그 운동량이 $\dot{\theta}$의 상수배가 된다는 점에 주목한다.

풀이

P의 위치와 속력

P와 Q를 가벼운 고리 위의 입자로 모형화한다. 원점을 P의 출발점에 두고, x축은 구르는 직선을 따라(고리가 움직이는 방향으로), y축은 연직 위쪽으로 잡는다. 고리가 양의 x방향으로 구른다고 하면, 아래 그림에서 고리는 시계 방향으로 돈다.



고리가 미끄러지지 않으므로 테이블 위로 굴러 닿은 테두리의 호의 길이는 중심이 이동한 거리와 같고, 따라서 중심 C는 $(a\theta,\, a)$에 있다. 처음에 CP는 바로 아래를 향한다. 시계 방향으로 θ만큼 돈 뒤 벡터 $\overrightarrow{CP}$는 $(-a\sin\theta,\, -a\cos\theta)$이다. 따라서

$$\boxed{P = \big(a\theta - a\sin\theta,\; a - a\cos\theta\big)}$$

이다(사이클로이드(cycloid)). 연쇄법칙(chain rule)을 써서 t에 대해 미분하면

$$\dot{x}_P = a\dot{\theta}(1-\cos\theta), \qquad \dot{y}_P = a\dot{\theta}\sin\theta,$$

이므로

$$v_P^2 = a^2\dot{\theta}^2\big[(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta\big] = 2a^2\dot{\theta}^2(1-\cos\theta) = 4a^2\dot{\theta}^2\sin^2\tfrac{1}{2}\theta,$$

이다. 여기서 $1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{1}{2}\theta$를 이용했다. 따라서 P의 속력은

$$v_P = 2a\left|\dot{\theta}\sin\tfrac{1}{2}\theta\right| \qquad \big(= 2a\dot{\theta}\sin\tfrac{1}{2}\theta, \text{단} 0 \le \theta \le 2\pi,\; \dot{\theta} \ge 0\big).$$

이다. 이 값은 θ가 2π의 배수일 때, 즉 정확히 P가 접점일 때 0이 되며, 이는 구르는 운동이 요구하는 바와 같다.

운동에너지

Q는 지름의 반대쪽 끝에 있으므로 $\overrightarrow{CQ} = -\overrightarrow{CP}$이고

$$Q = \big(a\theta + a\sin\theta,\; a + a\cos\theta\big), \qquad \dot{x}_Q = a\dot{\theta}(1+\cos\theta), \quad \dot{y}_Q = -a\dot{\theta}\sin\theta.$$

이다. 같은 방법으로

$$v_Q^2 = a^2\dot{\theta}^2\big[(1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta\big] = 2a^2\dot{\theta}^2(1+\cos\theta) = 4a^2\dot{\theta}^2\cos^2\tfrac{1}{2}\theta.$$

이다. 고리는 가벼우므로 운동에너지(kinetic energy)는 입자들만의 운동에너지이다.

$$T = \tfrac{1}{2}mv_P^2 + \tfrac{1}{2}mv_Q^2 = 2ma^2\dot{\theta}^2\big(\sin^2\tfrac{1}{2}\theta + \cos^2\tfrac{1}{2}\theta\big) = 2ma^2\dot{\theta}^2,$$

따라서 요구한 결과를 얻는다.

일정한 속력

외력은 입자들의 무게 mg와 테이블의 반력(reaction)이며, 모두 연직 방향이다. 따라서 계에 작용하는 전체 수평 힘은 0이고, 계에 대한 뉴턴(Newton)의 제2법칙에 의해 전체 수평 운동량은 일정하다. (고리는 가벼우므로 운동량을 갖지 않는다.)

생각해 보기 입자들이 연직 방향으로도 움직이는데, 왜 수평 운동량만으로 충분할까?

수평 운동량이 공교롭게도 $\dot\theta$에만 의존하기 때문이다. 수평 속도를 더하면

$$m\dot x_P + m\dot x_Q = ma\dot\theta(1-\cos\theta) + ma\dot\theta(1+\cos\theta) = 2ma\dot\theta.$$

이다. $\cos\theta$ 항들이 소거된다. 계의 질량중심(centre of mass)은 C이고, 이 점은 항상 속도 $a\dot\theta$로 수평으로 움직이기 때문이다. $2ma\dot\theta$가 일정하므로 $\dot\theta$가 일정하고, 따라서 고리의 속력(중심의 속력 $a\dot\theta$)도 일정하다. □

에너지로 보이는 방법. P와 Q의 높이의 합은 $(a-a\cos\theta)+(a+a\cos\theta)=2a$이므로 위치에너지(potential energy) $2mga$는 전혀 변하지 않는다. 반력은 접점에 작용하는데, 구르는 동안 접점은 순간적으로 정지해 있으므로 반력은 일을 하지 않는다. 따라서 $T = 2ma^2\dot\theta^2$는 일정하고, $|\dot\theta|$도 일정하다. 또 $\dot\theta$는 연속적으로 변하며 0을 지나지 않고는 한 부호에서 다른 부호로 건너뛸 수 없으므로 $\dot\theta$ 자체가 일정하다. 운동량을 이용한 논증은 이 마지막 단계가 필요 없으며, 그래서 그것을 먼저 사용했다.

검산

- $\theta = \pi$일 때 P는 꼭대기에 있다. 공식은 $P = (a\pi, 2a)$와 속력 $2a\dot\theta$를 주는데, 이는 중심 속력의 두 배로, 구르는 바퀴의 꼭대기에 대해 잘 알려진 결과이다.
- 운동에너지는 $\frac12(2m)(a\dot\theta)^2 + \frac12(2ma^2)\dot\theta^2$와 같다. 즉 질량중심의 병진 운동에 질량중심에 대한 회전을 더한 것이며, 관성모멘트(moment of inertia)는 $2ma^2$이다. 두 항은 각각 $ma^2\dot\theta^2$이다.
- 수치적으로 $a = 1.3$, $\dot\theta = 2.1$, $\theta = 1$로 두고 위치를 유한차분으로 미분하면 $v_P^2 + v_Q^2 = 4a^2\dot\theta^2 \approx 29.8$을 얻고, $\dot\theta$가 일정할 때 P와 Q의 수평 가속도는 서로 상쇄된다.

흔한 실수

- 중심을 (a, a)에 두거나 중심이 움직인다는 사실 자체를 잊는 것. $a\theta$ 항이 바로 구르는 운동이 기여하는 부분이다.
- P의 위치에서 $\sin\theta$의 부호를 틀리는 것. P가 속도 0으로 출발하는지 확인하라.
- $\dot\theta$의 부호가 왜 바뀔 수 없는지 설명하지 않은 채, 운동에너지가 일정하다는 것만으로 속력이 일정하다고 결론짓는 것.

STEP 너머

이것은 계의 전체 운동량이 외력에 의해서만 변한다는 일반적인 사실의 두 입자 예이다. 내력(internal force)(여기서는 고리가 전달하는 힘)은 쌍으로 상쇄된다. 검산에서 본 운동에너지의 분해는 쾨니히(König)의 정리로, 운동에너지는 질량중심의 운동에너지와 질량중심에 대한 상대 운동의 운동에너지의 합과 같다는 것이며, 이는 강체 동역학(rigid-body dynamics)의 출발점이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 구르는 운동과 이러한 개념들을 주의 깊게 다룬다.

풀이

STEP I 2008, 문제 10

역학 • 포물체 운동

STEP I 2008, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/08-s1-q10

핵심 아이디어

중력은 연직 방향으로만 작용하므로 수평 속도 $V\cos\alpha$는 전혀 변하지 않고, 사거리(range)는 단순히 $V\cos\alpha$에 전체 비행 시간(time of flight)을 곱한 값이다. 비행 시간은 연직 운동만으로 정해지며, 연직 운동은 세 단계로 나뉜다. 아래층을 지나 올라가는 단계, 높이 h 위에서 머무는 단계, 그리고 다시 아래층을 지나 내려오는 단계이다. 각 단계는 등가속도(constant acceleration) 문제이고, 대부분의 일은 대칭성(symmetry)이 해 준다.

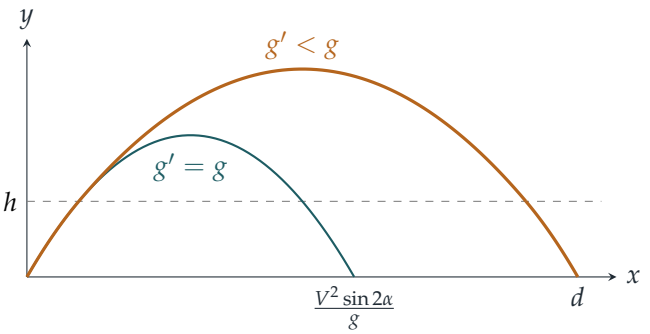
풀이

입자를 공기 저항(air resistance)이 없는 점으로 모형화하고, 평평한 지면 위의 연직 평면에서 움직인다고 하자. x축을 수평 방향, y축을 연직 위 방향으로 잡고, 원점을 발사 지점으로 한다.

개형 그리기

높이 h 아래에서는 두 궤적이 정확히 같은 방정식을 따르므로 그 구간에서 일치한다. 조건 $V^2\sin^2\alpha > 2gh$는 처음의 연직 운동 에너지(kinetic energy)가 가속도 g 아래에서 높이 h만큼 올라가기에 충분하다는 뜻이므로, 입자는 실제로 $y = h$ 위로 올라간다.

h 위에서 $g' < g$인 경우는 중력이 더 약하므로 연직 속력이 더 천천히 줄어든다. 따라서 입자는 더 높이 올라가고 그곳에서 더 오래 머물며, 더 납작하고 넓은 포물선(parabola)을 그린다. $y = h$에서 속도는 연속이므로(가속도만 갑자기 바뀐다) 두 호는 꺾인 점 없이 매끄럽게 이어지지만, 곡률(curvature)은 갑자기 바뀐다. 내려올 때 입자는 (위쪽 호의 대칭성에 의해) 아래층을 떠날 때와 같은 속력과 각도로 다시 아래층에 들어오고, 마지막 호는 첫 번째 호의 거울상이 된다. 따라서 $g' < g$인 경로가 더 먼 곳에 떨어진다.



사거리

처음 속도의 연직 성분은 $V\sin\alpha$이고, $y < h$인 동안 가속도는 $-g$이다.

1단계: 높이 h까지 올라가기. $y = h$에 도달할 때의 (위 방향) 연직 속력을 w라 하자. $v^2 = u^2 + 2as$에 의해

$$w^2 = V^2\sin^2\alpha - 2gh = \sin^2\alpha\left(V^2 - 2gh\,\mathrm{cosec}^2\alpha\right) = V'^2\sin^2\alpha,$$

이므로 $w = V'\sin\alpha$이다. 여기서 $\sin\alpha > 0$이고 입자가 아직 올라가는 중이므로 양의 제곱근을 택했다. (주어진 조건이 바로 V'이 양의 실수가 되게 하는 조건이다.) 걸린 시간은 $v = u + at$에 의해

$$t_1 = \frac{V\sin\alpha - V'\sin\alpha}{g} = \frac{(V - V')\sin\alpha}{g}.$$

이다.

2단계: 높이 h 위. 이제 입자는 $y = h$에서 출발하여 속력 w로 위로 움직이며, 가속도는 $-g'$이다. 입자는 $wt - \frac{1}{2}g't^2 = 0$일 때, 즉

$$t_2 = \frac{2w}{g'} = \frac{2V'\sin\alpha}{g'},$$

이 지난 뒤 $y = h$로 돌아오고, 이때 연직 속력 w로 아래로 움직이고 있다.

? **생각해 보기** 마지막 단계에 걸리는 시간이 왜 첫 단계와 같을까?

3단계에서 입자는 $y = h$에서 출발하여 속력 w로 아래로 움직이고, 아래 방향 가속도 g를 받으며 $y = 0$까지 떨어진다. 이것은 1단계를 시간을 거꾸로 돌려 진행한 것이다. 등가속도 운동은 가역적(reversible)이고, 1단계는 같은 가속도 아래에서 속력 $V\sin\alpha$로 $y = 0$을 출발하여 속력 w로 $y = h$에 도달했다. 따라서 입자는 시간 $t_3 = t_1$이 지난 뒤 연직 속력 $V\sin\alpha$로 지면에 닿는다. (직접 계산하면, 연직 속력이 비율 g로 w에서 $V\sin\alpha$까지 변하므로 $(V\sin\alpha - w)/g$만큼의 시간이 걸린다.)

따라서 전체 비행 시간은

$$T = 2t_1 + t_2 = 2\sin\alpha\left(\frac{V - V'}{g} + \frac{V'}{g'}\right).$$

이다. 수평 방향의 힘이 없으므로 수평 속도는 내내 $V\cos\alpha$로 유지되고,

$$\begin{aligned} d = V\cos\alpha \cdot T &= \left(\frac{V - V'}{g} + \frac{V'}{g'}\right) 2V\sin\alpha\cos\alpha \\ &= \left(\frac{V - V'}{g} + \frac{V'}{g'}\right) V\sin 2\alpha, \end{aligned}$$

이다. 여기서 $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$를 이용했다. 이것이 구하려던 결과이다.

검산

- $g' = g$이면 괄호 안은 V/g가 되고 $d = V^2\sin 2\alpha/g$이다. 이것은 지구에서의 익숙한 사거리이다.
- $g' < g$이면 $V'/g' > V'/g$이므로 d는 균일한 중력에서의 사거리보다 크다. 이는 개형과 일치한다.
- $V^2\sin^2\alpha = 2gh$가 정확히 성립하면 $V' = 0$이다. 입자는 $y = h$에 겨우 닿을 뿐 g'의 영향을 전혀 받지 않으며, 이때에도 $d = V^2\sin 2\alpha/g$이다.
- 수치로 확인하면, $V = 10$, $\alpha = 60°$, $g = 10$, $h = 2$, $g' = 5$일 때 $V' = \sqrt{140/3} \approx 6.83$이고 $d \approx 14.576$이다. 운동을 수치적으로 단계별 계산해도 상대 오차 10^{-5} 이내에서 같은 착지점을 얻는다. (이것이 개형에 사용한 값이다.)

흔한 실수

- 아래층을 지나 내려오는 단계를 빠뜨려서 $2t_1 + t_2$ 대신 $t_1 + t_2$를 얻는 실수.
- 높이 h에서의 연직 속력을 $V'\sin\alpha$가 아니라 V'으로 보는 실수. V'은 $\operatorname{cosec}\alpha$만큼 배율이 조정된 속력이지, 연직 성분 자체가 아니다.
- 호가 만나는 곳에 꺾인 점을 그리는 실수. 속도가 연속이므로 이음매는 매끄럽다.

STEP 너머

위치에 따라 달라지는 중력은 예외가 아니라 오히려 일반적인 경우이다. 실제 중력은 행성의 중심으로부터의 거리에 대해 $1/r^2$로 약해지며, 이때 포물체의 경로는 포물선이 아니라 타원(ellipse)의 호가 된다. 운동을 힘의 법칙이 간단한 영역들로 나누고 경계에서 위치

와 속도를 맞추는 것은 표준적인 기법으로, 입자의 굴절(refraction)이나 계단 퍼텐셜(step potential)을 다루는 양자역학(quantum mechanics)에서도 다시 쓰인다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 등가속도 운동의 도구들과 역제곱(inverse-square) 중력 아래의 궤도 운동을 모두 다룬다.

풀이

STEP I 2008, 문제 11

역학 • 최대 정지 마찰과 평형

STEP I 2008, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/08-s1-q11

핵심 아이디어

$\angle P_1OP_2$가 직각이므로 반지름(radius) OP_2는 P_1에서의 접선(tangent)과 평행하고, 반지름 OP_1은 P_2에서의 접선과 평행하다. 따라서 두 반지름 방향으로 힘을 분해하면, 각 방정식에는 수직항력(normal reaction) 하나와 마찰력(friction force) 하나만 나타난다. 여기에 두 수직항력의 모멘트가 모두 0인 점 O에 대한 모멘트(moment) 방정식을 더하고, 양 끝에서 한계 마찰(limiting friction) $F = \mu R$를 적용하면 세 방정식을 얻으며, 이로부터 α가 소거된다. 마지막 부분은 모습을 바꾼 배각 공식(double-angle formulae)이다.

풀이

모형과 힘

막대를 질량중심(centre of mass) G가 중점에 있는 균일한 강체(rigid body) 막대로, 고리는 질량이 없는 것으로 보고, 철사의 반지름을 a라 하자. 고리의 질량이 없으므로 철사가 각 고리에 작용하는 힘은 그대로 막대에 전달된다. 따라서 막대가 P_1과 P_2에서 철사에 닿아 있는 것으로 볼 수 있다. 양 끝에는 각각 반지름 방향의 수직항력과 접선 방향의 마찰력이 작용한다.

원점을 O로 하고, x축은 오른쪽, y축은 위쪽을 향하도록 좌표축을 잡으며, P_1이 철사의 최저점보다 왼쪽에 있도록 한다. $\angle P_1OP_2 = 90^\circ$이고 P_1이 아래쪽 연직선과 각 α를 이루므로, OP_2는 반대쪽에서 연직선과 각 $90^\circ - \alpha$를 이룬다.

$$P_1 = a(-\sin\alpha, -\cos\alpha), \qquad P_2 = a(\cos\alpha, -\sin\alpha).$$

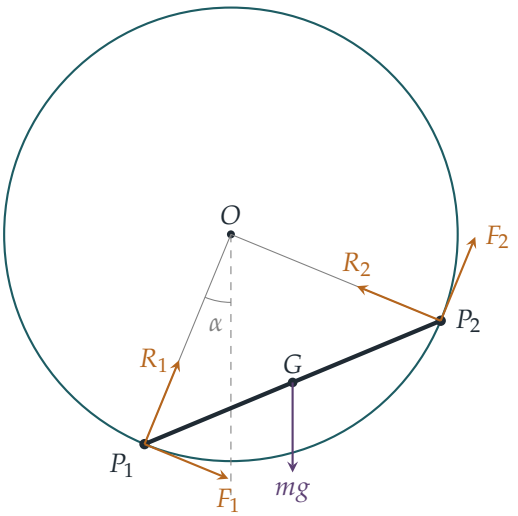
$0 < \alpha < 45^\circ$이므로 $\cos\alpha > \sin\alpha$이고, 따라서 실제로 P_1이 P_2보다 낮으며 두 점 모두 O보다 아래에 있다.

중점은 $G = \frac{a}{2}(\cos\alpha - \sin\alpha, -\cos\alpha - \sin\alpha)$이고, 이는 O를 지나는 연직선의 **오른쪽**에 있다. 따라서 무게는 O에 대해 시계 방향의 모멘트를 가지며, 막대는 철사를 따라 시계 방향으로 미끄러지기 직전이다(P_2는 아래로, P_1은 위로 움직인다). 마찰력은 이를 방해하므로 양 끝 모두에서 **반시계 방향**으로 작용한다. 즉 P_1에서는 철사를 따라 아래로, P_2에서는 철사를 따라 위로 작용한다.

P_1과 P_2에서 O를 향하는 단위벡터(unit vector)를 각각 $\mathbf{u}_1$과 $\mathbf{u}_2$라 하자.

$$\mathbf{u}_1 = (\sin\alpha, \cos\alpha), \qquad \mathbf{u}_2 = (-\cos\alpha, \sin\alpha), \qquad \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 0.$$

P_1에서 반시계 방향의 접선 방향은 $-\mathbf{u}_2$이고, P_2에서는 $\mathbf{u}_1$이다. (O를 향하는) 수직항력을 R_1, R_2, 마찰력을 F_1, F_2라 하자.



평형 방정식

무게 mg는 연직 아래 방향으로 작용하므로, $\mathbf{u}_1$과 $\mathbf{u}_2$ 방향의 성분은 각각 $-mg\cos\alpha$와 $-mg\sin\alpha$이다.

$\mathbf{u}_1$ 방향(즉 P_1O 방향)으로 분해하자. R_1과 F_2가 기여하고, R_2와 F_1은 이 방향에 수직이다. 따라서

$$R_1 + F_2 = mg\cos\alpha. \tag{1}$$

$\mathbf{u}_2$ 방향(P_2O 방향)으로 분해하자. R_2는 $+R_2$만큼 기여하고, $-\mathbf{u}_2$ 방향을 향하는 F_1은 $-F_1$만큼 기여한다. 따라서

$$R_2 - F_1 = mg\sin\alpha. \tag{2}$$

O에 대한 모멘트를 구하자. 수직항력은 O를 지난다. 각 마찰력은 O로부터 거리 a인 곳에서 접선 방향으로 작용하므로, 반시계 방향의 모멘트 aF_1과 aF_2를 준다. 무게는 O로부터 수평

거리 $\frac{a}{2}(\cos\alpha - \sin\alpha)$인 곳에서 시계 방향으로 작용한다. 그러므로

$$F_1 + F_2 = \tfrac{1}{2}mg(\cos\alpha - \sin\alpha). \tag{3}$$

한계 마찰과 $\tan\alpha$

막대는 양 끝에서 미끄러지기 직전이므로 $F_1 = \mu R_1$, $F_2 = \mu R_2$이다. $c = \cos\alpha$, $s = \sin\alpha$로 쓰면 식 (1)과 (2)는

$$R_1 + \mu R_2 = mgc, \qquad -\mu R_1 + R_2 = mgs,$$

가 되고, 그 해는

$$R_1 = \frac{mg(c - \mu s)}{1 + \mu^2}, \qquad R_2 = \frac{mg(s + \mu c)}{1 + \mu^2}.$$

이다. μ가 작을 때(아래에서 보듯이 여기서는 반드시 그래야 한다) 둘 다 양수이므로, 수직항력은 그림처럼 실제로 O를 향한다. 이제 (3)은 $\mu(R_1 + R_2) = \frac{1}{2}mg(c - s)$를 뜻하므로,

$$\begin{aligned} 2\mu\left(c - \mu s + s + \mu c\right) &= (1 + \mu^2)(c - s) \\ c\,(2\mu + 2\mu^2 - 1 - \mu^2) + s\,(2\mu - 2\mu^2 + 1 + \mu^2) &= 0 \\ s\,(1 + 2\mu - \mu^2) &= c\,(1 - 2\mu - \mu^2). \end{aligned}$$

$c\,(1 + 2\mu - \mu^2)$로 나누면(곧 보듯이 $c > 0$이고 $\tan\alpha > 0$이므로 μ가 작아야 하여, 이 값은 0이 아니다)

$$\tan\alpha = \frac{1 - 2\mu - \mu^2}{1 + 2\mu - \mu^2},$$

를 얻으며, 이것이 보이려던 식이다.

> **생각해 보기** 마찰력이 시계 방향이 아니라 반시계 방향으로 작용한다는 것을 어떻게 알 수 있는가?

G가 O의 오른쪽에 있으므로 O에 대한 무게의 모멘트는 시계 방향이고, 수직항력은 O에 대한 모멘트가 없다. 따라서 마찰력만이 반시계 방향의 모멘트를 제공해야 하며, 마찰력이 없다면 막대는 시계 방향으로 미끄러질 것이다. 만약 마찰력을 반대 방향으로 그렸다면, μ 대신 $-\mu$가 들어간 같은 계산을 하게 되어 $\tan\alpha > 1$을 얻고, 이는 $\alpha < 45^\circ$에 모순이다.

막대의 각

P_1에서 P_2로 가는 벡터는 $a(\cos\alpha + \sin\alpha,\ \cos\alpha - \sin\alpha)$이고, 그 성분은 모두 양수이다. 따라서 막대가 수평과 이루는 예각 θ는

$$\tan\theta = \frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha} = \frac{1 - \tan\alpha}{1 + \tan\alpha} = \tan(45^\circ - \alpha),$$

를 만족하고, $0 < 45^\circ - \alpha < 45^\circ$이므로 $\theta = 45^\circ - \alpha$이다.

이제 $\tan\alpha$의 식에 $\mu = \tan\lambda$를 대입하고 분자와 분모에 $\cos^2\lambda$를 곱하자.

$$\tan\alpha = \frac{(\cos^2\lambda - \sin^2\lambda) - 2\sin\lambda\cos\lambda}{(\cos^2\lambda - \sin^2\lambda) + 2\sin\lambda\cos\lambda} = \frac{\cos 2\lambda - \sin 2\lambda}{\cos 2\lambda + \sin 2\lambda} = \frac{1 - \tan 2\lambda}{1 + \tan 2\lambda} = \tan(45^\circ - 2\lambda).$$

$0 < \lambda < 22.5^\circ$이므로 각 $45^\circ - 2\lambda$는 α와 마찬가지로 0°와 45° 사이에 있다(양 끝 제외). 탄젠트 함수는 이 구간에서 일대일(one-to-one)이므로 $\alpha = 45^\circ - 2\lambda$이다. 그러므로

$$\theta = 45^\circ - \alpha = 2\lambda,$$

이고, 이것이 증명해야 할 내용이다. (이로써 조건 $\lambda < 22.5^\circ$, 즉 $\mu < \sqrt{2} - 1$의 의미도 설명된다. 이 조건은 정확히 $\tan\alpha > 0$이 되게 하는 조건이다.)

검산

- $\mu = 0$(매끄러운 철사)이면 $\tan\alpha = 1$이므로 $\alpha = 45^\circ$이고 막대는 수평이다. 이는 매끄러운 원 위의 막대가 정지할 수 있는 유일한 위치이다.
- $\mu = 0.2$이면 $\tan\alpha = 0.56/1.36$이므로 $\alpha \approx 22.38^\circ$이고 $\theta = 45^\circ - \alpha \approx 22.62^\circ$이며, 이는 $2\arctan 0.2 \approx 22.62^\circ$와 일치한다.
- 수치적으로, $\mu \in (0, \sqrt{2} - 1)$, a, m의 무작위 값 10^4개에 대해 이 R_1, R_2, F_1, F_2를 전체 벡터 방정식에 대입하면 합력(resultant force)과 모멘트가 (10^{-14} 정도의 오차로) 0이 되었고, $R_1, R_2 > 0$이며 $\theta = 2\lambda$였다.

흔한 실수

- 수평 방향과 연직 방향으로 분해하는 것. 이 방법도 통하지만, 그러면 모든 방정식에 네 힘이 모두 들어간다. 서로 수직인 두 반지름 방향으로 분해하는 편이 훨씬 깔끔하다.
- 한쪽 끝에서 마찰력의 방향을 잘못 잡는 것. 두 고리는 원을 따라 같은 방향으로 미끄러지므로, 마찰력은 **양** 끝 모두에서 반시계 방향이다.
- $\theta = 45^\circ - \alpha$에 간단한 근거가 필요하다는 것을 잊는 것. 현은 $\angle P_1OP_2$의 이등분선에 수직이다.

STEP 너머

더 매끈한 기하학적 관점도 있다. 한계 마찰에서 각 끝의 전체 반력은 반지름과 각 λ를 이루고, 세 힘을 받아 평형(equilibrium) 상태에 있는 물체에서는 세 힘이 한 점에서 만나야

하므로, 곧바로 $\theta = 2\lambda$를 얻는다. 이 "마찰각(angle of friction)" 개념과, 마찰력이 등식이 아니라 부등식 $|F| \leq \mu R$라는 사실은, 여러 접촉점이 있어 어느 접촉점이 먼저 미끄러지는지 따져야 하는 정역학 문제의 출발점이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 마찰과 강체의 평형을 이처럼 세심하게 다룬다.

풀이

STEP I 2008, 문제 12

확률과 통계 • 이산 균등분포의 최댓값

> **STEP I 2008, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/08-s1-q12

핵심 아이디어

X는 두 점수 중 더 큰 값일 뿐이다. "큰 값이 r과 같다"를 직접 구하려면 여러 경우를 따져야 하지만, "큰 값이 r 이하이다"는 쉽다. 이는 정확히 두 점수가 모두 r 이하일 때 일어나기 때문이다. 그래서 먼저 누적분포(cumulative distribution) $\mathrm{P}(X \le r)$를 구한 뒤 차를 취한다. 같은 누적분포를 이용하면 중앙값(median)도 거의 바로 구할 수 있다.

풀이

X_1과 X_2를 서로 독립(independent)인 두 점수라 하고, $X = \max(X_1, X_2)$라 하자 ($X_1 = X_2$일 때 정의의 두 경우가 일치하므로 X는 잘 정의된다(well defined)).

소문항 (i)

$r = 0, 1, \ldots, N$에 대하여 사건 $\{X \le r\}$는 사건 $\{X_1 \le r$ 그리고 $X_2 \le r\}$와 같다. 두 사건의 확률은 각각 r/N이고, X_1과 X_2가 독립이므로 두 사건도 독립이다. 따라서

$$\mathrm{P}(X \le r) = \frac{r}{N} \cdot \frac{r}{N} = \frac{r^2}{N^2}.$$

이 식은 $r = 0$일 때도 성립하며, 이때 값은 0이다. 그러므로 $r = 1, 2, \ldots, N$에 대하여

$$\mathrm{P}(X = r) = \mathrm{P}(X \le r) - \mathrm{P}(X \le r - 1) = \frac{r^2 - (r-1)^2}{N^2} = \frac{2r - 1}{N^2},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. (확인 삼아 보면, $\sum_{r=1}^{N}(2r-1) = N^2$이므로 이 확률들의 합은 1이다.)

소문항 (ii)

주어진 두 합 공식을 이용하면

$$\begin{aligned}\mu = \sum_{r=1}^{N} r\,\frac{2r-1}{N^2} &= \frac{1}{N^2}\left(2\sum_{r=1}^{N} r^2 - \sum_{r=1}^{N} r\right)\\ &= \frac{1}{N^2}\left(\frac{N(N+1)(2N+1)}{3} - \frac{N(N+1)}{2}\right)\\ &= \frac{N+1}{N}\cdot\frac{2(2N+1)-3}{6} = \frac{(N+1)(4N-1)}{6N}.\end{aligned}$$

$N = 100$일 때

$$\mu = \frac{101\times 399}{600} = \frac{40\,299}{600} = 67.165,$$

이고, 이것이 구하려던 값이다.

소문항 (iii)

소문항 (i)에서 $\mathrm{P}(X \le m) = m^2/N^2$이고 $\mathrm{P}(X \ge m) = 1 - \mathrm{P}(X \le m-1) = 1 - (m-1)^2/N^2$이다. 중앙값에 대한 두 조건은 다음과 같이 바뀐다.

$$\mathrm{P}(X \le m) \ge \tfrac{1}{2} \iff m^2 \ge \tfrac{1}{2}N^2 \iff m \ge \frac{N}{\sqrt{2}},$$
$$\mathrm{P}(X \ge m) \ge \tfrac{1}{2} \iff (m-1)^2 \le \tfrac{1}{2}N^2 \iff m-1 \le \frac{N}{\sqrt{2}},$$

여기서 양의 제곱근을 취했는데, $m \ge 1$이어서 m과 $m-1$이 음이 아니므로 이는 타당하다. 따라서 m은 다음 부등식을 만족하는 정수여야 한다.

$$\frac{N}{\sqrt{2}} \le m \le \frac{N}{\sqrt{2}} + 1.$$

생각해 보기 길이가 1인 구간에는 정수가 두 개 들어갈 수 있다. 중앙값이 두 개일 수도 있을까?

그러려면 양 끝점이 모두 정수여야 하고, 이는 $N/\sqrt{2}$가 정수여야 함을 뜻한다. 그런데 $N/\sqrt{2} = k$이면 $\sqrt{2} = N/k$가 유리수(rational number)가 되어 모순이다. 따라서 두 부등식은 모두 등호 없이 성립하고, 길이가 1인 이 열린구간에는 정수가 정확히 하나 들어 있으며,

$$m = \left\lceil \frac{N}{\sqrt{2}} \right\rceil,$$

즉 $N/\sqrt{2}$보다 큰 가장 작은 정수이다.

$N = 100$일 때 $N/\sqrt{2} = 50\sqrt{2} \approx 70.71$이므로 $m = 71$이다. 직접 확인하면 $71^2 = 5041 \ge 5000 = \frac{1}{2}\times 100^2$이고 $70^2 = 4900 \le 5000$이므로 두 조건이 모두 성립한다.

소문항 (iv)

소문항 (iii)에서 어떤 $0 < \theta < 1$에 대하여 $m = N/\sqrt{2} + \theta$이므로

$$\frac{m}{N} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\theta}{N} \to \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{단, } N \to \infty.$$

소문항 (ii)에서

$$\frac{\mu}{N} = \frac{(N+1)(4N-1)}{6N^2} = \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{N}\right)\left(4-\frac{1}{N}\right) \to \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

그러므로 N이 클 때

$$\frac{\mu}{m} = \frac{\mu/N}{m/N} \approx \frac{2/3}{1/\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

검산

- $N = 2$일 때: 확률이 같은 네 쌍 가운데 $X = 1$인 경우가 한 번, $X = 2$인 경우가 세 번이므로 소문항 (i)에서 구한 $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$와 일치하고, $\mu = \frac{7}{4}$도 $\frac{3\times 7}{12}$와 일치한다.
- $N \le 40$에 대하여 컴퓨터로 N^2개의 쌍을 모두 나열하면 소문항 (i)과 (ii)가 정확히 확인된다. $N \le 2000$에 대하여 모든 정수를 중앙값의 정의에 대입해 보면 항상 중앙값이 정확히 하나 있고, 그 값은 $\lceil N/\sqrt{2} \rceil$이다.
- $N = 10^5$일 때 $\mu/m \approx 0.942812$이고, 이는 $2\sqrt{2}/3 \approx 0.942809$와 거의 같다.

흔한 실수

- $\mathrm{P}(X = r)$를 $2 \times \frac{r}{N} \cdot \frac{1}{N}$로 계산하는 실수. 이렇게 하면 $X_1 = X_2 = r$인 경우를 두 번 세게 된다. 올바르게 세면 $2(r-1)+1 = 2r-1$이다.
- $\mathrm{P}(X \ge m) = 1 - m^2/N^2$로 쓰는 실수. 이것은 $\mathrm{P}(X > m)$이지 $\mathrm{P}(X \ge m)$가 아니다.
- $N = 100$일 때 70.71을 올림하지 않고 가장 가까운 정수로 반올림하여 $m = 70$이라고 답하는 실수.

STEP 너머

X는 **순서통계량**(order statistic)의 가장 간단한 예, 즉 표본의 최댓값이다. $N \to \infty$이면 X/N은 $[0,1]$ 위에서 확률밀도(density)가 $2x$인 연속확률변수(continuous random variable)에 가까워지는데, 이 확률변수의 평균은 $\frac{2}{3}$이고 중앙값은 $1/\sqrt{2}$이다. 바로 이 때문에

소문항 (iv)의 비가 나타난다. 더 큰 표본의 순서통계량을 다루면 베타분포(beta distribution)로 이어진다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)는 순서통계량을 이해하기 쉽게 다룬다.

풀이

STEP I 2008, 문제 13

확률과 통계 • 원순열

> **STEP I 2008, 13번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/08-s1-q13

핵심 아이디어

원탁에서는 사람들 사이의 상대적인 위치만 의미가 있으므로, 한 사람의 의자를 고정하고 나머지 다섯 명을 그 주위에 배열한다. 그러면 $5! = 120$가지의 똑같이 일어날 법한(equally likely) 배열이 생기고, 모든 확률은 120가지 중 몇 가지인가를 세는 문제가 된다. 반드시 붙어 앉아야 하는 부부는 하나의 "묶음(block)"으로 붙여 생각할 수 있고, 이 묶음 안에는 두 가지 순서가 있다. "정확히"와 "하나도 없는" 경우는 직접 세거나, "k번째 부부가 붙어 앉는다"라는 사건(event)들에 대해 포함배제의 원리(inclusion–exclusion)를 쓴다.

풀이

부부를 A, a; B, b; C, c라 하자. 모든 사람을 탁자 둘레로 한 자리씩 회전시켜도 서로에 대한 상대적인 배치는 같다. 그래서 A의 의자를 고정하고 나머지 다섯 명을 시계 방향으로 남은 의자에 차례로 앉힌다. 그러면 $5! = 120$가지 배열이 생기고, 이들은 모두 똑같이 일어날 법하다.

만약 의자에 번호를 붙인다면 배열은 $6! = 720$가지가 된다. 이때 각 상대적 배열은 A가 앉을 수 있는 의자마다 한 번씩, 모두 6번 나타나므로 확률은 같다.

유용한 일반적인 개수 세기: 원 둘레에 n개의 대상을 배열하는 방법의 수는 $(n-1)!$이다(한 대상을 고정한 뒤 나머지를 순서대로 배열한다). 이를 원순열(circular arrangement)이라 한다.

소문항 (i)

모든 부부가 붙어 앉는다면, 각 부부를 하나의 묶음으로 붙인다. 그러면 탁자 둘레에 3개의 묶음이 있고, 이들을 배열하는 방법은 $(3-1)! = 2$가지이다. 각 묶음 안에서 남편은 아내의 어느 쪽에나 앉을 수 있으므로 $2^3 = 8$가지 선택이 있다. 따라서

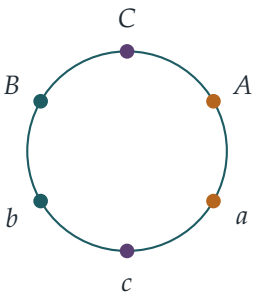
$$\mathrm{P}(\text{세 부부가 모두 붙어 앉음}) = \frac{2 \times 8}{120} = \frac{16}{120} = \frac{2}{15},$$

이고, 이것이 보이려던 것이다.

소문항 (ii)

먼저 어느 부부가 붙어 앉지 **않는지** 고른다. 선택은 3가지이다. 그 부부를 C, c라 하면, A, a와 B, b는 붙어 앉고 C와 c는 붙어 앉지 않는다.

Aa와 Bb를 각각 묶음으로 붙인다. 이제 탁자 둘레에는 Aa, Bb, C, c의 4개 단위가 있고, 이들을 배열하는 방법은 $3! = 6$가지이다. C를 고정하고, 이 4개 단위로 이루어진 원에서 나머지 세 자리 중 c가 어디에 오는지 살펴보자. 그중 두 자리에서는 c가 C의 옆이고, 한 자리에서는 c가 정반대편이다. 따라서 6가지 배열 중 정확히 $6/3 = 2$가지에서 C와 c가 떨어져 앉는다. 이 경우에는 그림처럼 C와 c 사이의 두 빈 곳에 묶음이 하나씩 들어간다.



생각해 보기 왜 이것이 보기보다 간단할까?

C와 c가 마주 보고 있으면, 남은 자유는 어느 묶음이 어느 쪽에 앉는지(2가지)와 각 묶음 안의 순서($2 \times 2 = 4$가지)뿐이다. 따라서 배열은 $2 \times 4 = 8$가지이다. 떨어져 앉는 부부를 고르는 세 가지 경우를 모두 고려하면

$$\mathrm{P}(\text{정확히 두 부부가 붙어 앉음}) = \frac{3 \times 8}{120} = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}.$$

소문항 (iii)

$k = 1, 2, 3$에 대하여 E_k를 k번째 부부가 붙어 앉는 사건이라 하자. 각 유형의 배열이 120가지 중 몇 가지인지 센다.

- $|E_1|$: 1번 부부를 하나의 묶음으로 붙인다. 그러면 탁자 둘레에 5개 단위가 남으므로 배열은 $4! = 24$가지이고, 각각 묶음 안의 순서가 2가지이므로 48이다.
- $|E_1 \cap E_2|$: 두 묶음과 두 사람으로 4개 단위가 된다. 배열은 $3! = 6$가지이고, 묶음 안의 순서가 $2^2 = 4$가지이므로 24이다.
- 소문항 (i)에서 $|E_1 \cap E_2 \cap E_3| = 16$이다.

대칭성에 의해 어느 부부를 고르든 같은 개수가 성립한다. 포함배제의 원리에 의해, 적어도 한 부부가 붙어 앉는 배열의 수는

$$|E_1 \cup E_2 \cup E_3| = 3(48) - 3(24) + 16 = 144 - 72 + 16 = 88.$$

따라서 어느 부부도 붙어 앉지 않는 배열은 $120 - 88 = 32$가지이고,

$$\mathrm{P}(\text{어떤 남편도 아내 옆에 앉지 않음}) = \frac{32}{120} = \frac{4}{15}.$$

생각해 보기 같은 개수들로부터 소문항 (ii)의 답을 바로 읽어 낼 수 있을까?

그렇다. 각 $|E_i \cap E_j|$는 정확히 i, j 두 부부만 붙어 앉는 배열과 세 부부가 모두 붙어 앉는 배열을 함께 센다. 따라서 정확히 두 부부가 붙어 앉는 배열의 수는 $3(24) - 3(16) = 24$이고, 이는 소문항 (ii)와 일치한다.

검산

- 네 가지 경우를 합하면 120가지 배열 전체가 되어야 한다. 정확히 한 부부가 붙어 앉는 배열의 수는 $3(48) - 2 \cdot 3(24) + 3(16) = 48$이고, $32 + 48 + 24 + 16 = 120$이다.
- 의자에 번호를 붙인 720가지 배치를 컴퓨터로 모두 나열하면, 붙어 앉는 부부가 $0, 1, 2, 3$쌍일 확률은 각각 $\frac{4}{15}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{15}$이다. 이는 위의 답과 일치한다.
- 타당성 점검: 어떤 아내의 양옆 두 사람은 5명 중에서 정해지므로, 남편이 그 옆에 앉을 확률은 $\frac{2}{5}$이다. 이는 $|E_1|/120 = 48/120$과 일치한다.

흔한 실수

- 전체 배열은 6!가지로 쓰면서 유리한 배치는 원순열로 세거나, 그 반대로 하는 것. 분자와 분모는 같은 약속을 따라야 한다.
- 각 묶음 안에서 두 사람의 순서에 대한 인수 2를 빠뜨리는 것.
- 소문항 (ii)에서 세 번째 부부까지 붙어 앉는 배열을 빼는 것을 잊는 것. 그러면 $\frac{3\times 24}{120} = \frac{3}{5}$가 되어 너무 크다.

STEP 너머

이것은 **메나주 문제**(*ménage problem*)의 축소판이다. 고전적인 메나주 문제에서는 남자와 여자가 번갈아 앉아야 한다는 조건도 있으며, 그 일반적인 답(Touchard의 공식)은 바로 이런 종류의 포함배제에서 나온다. 조건이 없는 우리 문제에서 부부가 n쌍이면, 붙어 앉는 부부 수의 기댓값(expected value)은 $n \cdot \frac{2}{2n-1} \to 1$이다. 어느 부부도 붙어 앉지 않을 확률은 유명한 교란순열(derangement)의 극한처럼 e^{-1}로 수렴(converge)한다. 남녀가 번갈아 앉는 메나주 문제에서는 이 확률이 e^{-2}로 수렴한다. 포함배제의 원리와 이런 극한은 Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)에 잘 다루어져 있다.

풀이

STEP II 2008, 문제 1

순수수학 • 복소 반복

> **STEP II 2008, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/08-s2-q1

핵심 아이디어

식 $x^2 - y^2$와 $2xy$는 $(x + \mathrm{i}y)^2$의 실수부(real part)와 허수부(imaginary part)이다. 따라서 각 점을 복소수(complex number) $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$으로 쓰면, 두 성분으로 이루어진 규칙은 하나의 복소수 상수 c를 가진 단일 방정식 $z_{n+1} = z_n^2 + c$가 된다. 그러면 "상수 수열(constant sequence)"과 "주기(period) 2"라는 조건은 복소수 미지수 하나에 대한 이차방정식이 되고, 이는 근의 공식(quadratic formula)으로 풀 수 있다.

풀이

$z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$, $c = a + (b+2)\mathrm{i}$로 놓자.

$$z_n^2 + c = (x_n^2 - y_n^2 + a) + \mathrm{i}\,(2x_n y_n + b + 2),$$

이고, 두 복소수는 실수부와 허수부가 각각 같을 때 그리고 그때에만 같으므로, 주어진 규칙은 다음과 동치이다.

$$z_{n+1} = z_n^2 + c.$$

a, b, x_n, y_n이 실수이므로 모든 점 (x, y)는 정확히 하나의 복소수에 대응하고, 그 역도 성립한다. 따라서 z로 계산해도 잃는 것이 없다.

소문항 (i)

$a = 1, b = -1$이면 $c = 1 + \mathrm{i}$이다. 수열은 $z_2 = z_1$일 때 그리고 그때에만 상수가 된다. 그러면 이후의 모든 단계가 같은 계산을 반복하기 때문이다. 따라서 다음이 성립해야 한다.

$$z^2 - z + (1 + \mathrm{i}) = 0, \qquad z = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(1+\mathrm{i})}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3 - 4\mathrm{i}}}{2}.$$

$-3-4\mathrm{i}$의 제곱근을 구하기 위해 실수 p, q에 대하여 $(p+q\mathrm{i})^2 = -3-4\mathrm{i}$인 것을 찾자. 즉 $p^2-q^2=-3$이고 $pq=-2$이다. 그러면 $p=1$, $q=-2$가 조건을 만족하는데, $(1-2\mathrm{i})^2 = 1-4\mathrm{i}-4 = -3-4\mathrm{i}$이기 때문이다. 따라서

$$z = \frac{1 \pm (1-2\mathrm{i})}{2} = 1-\mathrm{i} \quad \text{또는} \quad \mathrm{i}.$$

그러므로 수열이 상수일 필요충분조건은 다음과 같다.

$$(x_1, y_1) = (1,-1) \quad \text{또는} \quad (x_1, y_1) = (0,1).$$

직접 확인하면 $(1,-1) \mapsto (1-1+1,\ -2+1) = (1,-1)$이고 $(0,1) \mapsto (0-1+1,\ 0+1) = (0,1)$이다.

소문항 (ii)

이제 $z_1 = -1+\mathrm{i}$이므로 $z_1^2 = 1-2\mathrm{i}-1 = -2\mathrm{i}$이고

$$z_2 = c - 2\mathrm{i}.$$

$w = z_2$로 쓰자. 수열의 주기가 2라는 것은 $z_3 = z_1$이지만 $z_2 \neq z_1$인 경우이다. 일단 $z_3 = z_1$이면 규칙에 의해 수열은 $z_1, z_2, z_1, z_2, \ldots$와 같이 반복된다. $c = w + 2\mathrm{i}$를 이용하면

$$z_3 = w^2 + c = w^2 + w + 2\mathrm{i},$$

이므로 $z_3 = z_1$은 다음이 된다.

$$w^2 + w + 2\mathrm{i} = -1+\mathrm{i} \quad \Longleftrightarrow \quad w^2 + w + (1+\mathrm{i}) = 0.$$

? **생각해 보기** 왜 $w = z_2$를 미지수로 택하고, c를 택하지 않는가?

조건 $z_3 = z_1$은 어느 쪽으로 보아도 c에 대한 이차식이지만, w로 나타내면 상수 수열에 해당하는 $w = z_1$이 반드시 한 근이 된다. 따라서 이차방정식의 한 근은 이미 알고 있고, 나머지 근이 우리가 원하는 것이다. 실제로 $w = -1+\mathrm{i}$는 이 식을 만족한다: $(-1+\mathrm{i})^2 + (-1+\mathrm{i}) + 1 + \mathrm{i} = -2\mathrm{i} + 2\mathrm{i} = 0$. 두 근의 합은 -1이므로 다른 근은 $w = -\mathrm{i}$이다. (근의 공식으로도 같은 결과를 얻는다: $w = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{-3-4\mathrm{i}}\right) = \frac{1}{2}\left(-1 \pm (1-2\mathrm{i})\right)$이며, 이는 (i)에서와 같은 제곱근이다.)

- $w = -1+\mathrm{i} = z_1$이면 $c = -1+3\mathrm{i}$, 즉 $a=-1$, $b=1$이다. 이때 $z_2 = z_1$이고 수열은 상수이므로, 주기는 2가 아니라 1이다.
- $w = -\mathrm{i}$이면 $c = \mathrm{i}$, 즉 $a=0$이고 $b+2=1$이다.

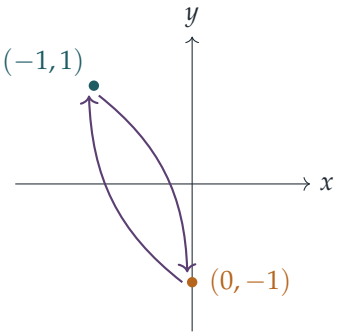
따라서 수열의 주기가 정확히 2일 필요충분조건은 다음과 같다.

$$a = 0, \qquad b = -1.$$

좌표로 확인하자. $a = 0, b = -1$이면

$$(-1,1) \mapsto (1-1+0,\ -2+1) = (0,-1) \mapsto (0-1+0,\ 0+1) = (-1,1),$$

이고 두 점이 서로 다르므로 주기는 정확히 2이다.



검산

- 원래의 좌표 규칙을 반복 적용하면, $(1,-1)$과 $(0,1)$은 $a = 1, b = -1$일 때 고정점(fixed point)이고, $(-1,1) \to (0,-1) \to (-1,1)$은 $a = 0, b = -1$일 때 성립함을 알 수 있다.
- 제곱근 $1 - 2\mathrm{i}$는 제곱해서 확인할 수 있고, 인수분해 $w^2 + w + 1 + \mathrm{i} = (w + 1 - \mathrm{i})(w + \mathrm{i})$도 마찬가지로 확인할 수 있다. 두 근의 곱은 $(-1+\mathrm{i})(-\mathrm{i}) = 1 + \mathrm{i}$이다.
- 임의의 시작값들에서 수치적으로 근을 찾아본 결과, (i)에서는 다른 고정점이 없었고, (ii)에서는 (a,b) 가운데 $z_3 = z_1$을 만족하는 것이 상수 수열을 주는 $(-1,1)$ 외에는 없었다.

흔한 실수

- 둘째 성분의 "$+2$"를 잊어서 $a + (b+2)\mathrm{i}$ 대신 $c = a + b\mathrm{i}$로 잡는 것.
- (ii)의 두 번째 답으로 $a = -1, b = 1$을 제시하는 것. 이 수열은 상수이므로 주기가 1이다.
- 실수 좌표로만 계산하다가 연립 이차방정식에서 길을 잃는 것. 이 방법으로도 풀 수 있지만, 복소수 형태가 훨씬 짧다.

STEP 너머

사상 $z \mapsto z^2 + c$는 복소 동역학(complex dynamics)에서 가장 유명한 예이다. 망델브로 집합(Mandelbrot set)은 0의 궤도가 유계로 남는 c들의 집합이며, 그 가장 큰 두 부분인 주 카디

오이드(main cardioid)와 그 왼쪽의 원판은 이 사상이 끌개 고정점(attracting fixed point) 또는 끌개 2-주기(2-cycle)를 갖는 c들로 이루어진다. 여기서도 2-주기에 대한 방정식에는 고정점에서 오는 인수가 있었다. 일반적으로 $(z^2+c)^2+c-z=(z^2-z+c)(z^2+z+c+1)$이다. 이 배경에 있는 기하학에 대한 읽기 쉬운 입문서로는 Needham, *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석)를 보라.

풀이

STEP II 2008, 문제 2

순수수학 • 부분분수와 급수

> **STEP II 2008, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/08-s2-q2

핵심 아이디어

부분분수(partial fractions)를 이용하면 다루기 까다로운 유리함수(rational function) 하나를, 전개식을 이미 잘 알고 있는 세 조각으로 나눌 수 있다. 바로 등비급수(geometric series), 그 도함수(derivative), 그리고 $-x^2$에 대한 등비급수이다. 앞의 두 조각은 n에 비례하여 커지는 계수를 주고, 세 번째 조각은 언제나 $\pm\frac{1}{2}$만을 기여하며 주기 4로 반복된다. 문제의 "둘 중 하나"라는 결론은 바로 여기에서 나온다. 마지막 부분에서는 함수를 주어진 분수로 바꾸어 주는 x의 값을 찾아보자.

풀이

부분분수

$(1-x)^2$은 중복된 일차인수이고 $1+x^2$은 기약(irreducible) 이차식이므로

$$\frac{1+x}{(1-x)^2(1+x^2)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{Cx+D}{1+x^2},$$

로 놓는다. 그러면 모든 x에 대하여

$$1+x = A(1-x)(1+x^2) + B(1+x^2) + (Cx+D)(1-x)^2.$$

이 성립한다.

- $x=1$을 대입하면 $2=2B$이므로 $B=1$이다.
- $x=0$을 대입하면 $1=A+B+D$이므로 $A=-D$이다.
- $x=\mathrm{i}$를 대입하면(이것은 다항식 항등식이므로 허용된다) $1+\mathrm{i} = (C\mathrm{i}+D)(1-\mathrm{i})^2 =$

$(Ci + D)(-2i) = 2C - 2Di$이다. 실수부와 허수부를 비교하면 $C = \frac{1}{2}$, $D = -\frac{1}{2}$이고, 따라서 $A = \frac{1}{2}$이다.

검산으로, 우변의 x^3의 계수는 $-A + C = 0$으로 좌변과 일치한다. 따라서

$$\frac{1+x}{(1-x)^2(1+x^2)} = \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1-x}{2(1+x^2)}.$$

이다.

계수

$|x| < 1$이면 세 전개식이 모두 수렴(converge)하고,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2(1-x)} &= \tfrac{1}{2}\sum_{n\geq 0} x^n, \qquad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n\geq 0}(n+1)x^n, \\
-\frac{1-x}{2(1+x^2)} &= -\tfrac{1}{2}(1-x)\left(1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots\right) \\
&= -\tfrac{1}{2}\left(1 - x - x^2 + x^3 + x^4 - x^5 - x^6 + x^7 + \cdots\right).
\end{aligned}$$

이다. 마지막 줄의 괄호 안의 계수는 $1, -1, -1, 1$이 주기 4로 반복된다. 즉 $n = 2k$이면 x^n의 계수는 $(-1)^k$이고, $n = 2k+1$이면 $-(-1)^k$이다. 따라서 세 번째 조각은 $n \equiv 0$ 또는 $3 \pmod 4$일 때 x^n에 $-\frac{1}{2}$를, $n \equiv 1$ 또는 $2 \pmod 4$일 때 $+\frac{1}{2}$를 기여한다.

> **생각해 보기** 주기가 4인 패턴이 왜 네 가지가 아니라 정확히 두 가지 경우를 만들어 내는가?

부호만이 중요하기 때문이다. 세 기여를 더하면

$$a_n = \tfrac{1}{2} + (n+1) \mp \tfrac{1}{2} = \begin{cases} n+1, & n \equiv 0 \text{ 또는 } 3 \pmod 4, \\ n+2, & n \equiv 1 \text{ 또는 } 2 \pmod 4, \end{cases}$$

이고, 이것이 구하는 결과이다. 이 수열(sequence)은 $1, 3, 4, 4, 5, 7, 8, 8, 9, 11, 12, 12, \ldots$로 시작한다.

소수 근삿값

> **생각해 보기** x가 어떤 값일 때 함수의 값이 $\frac{11\,000}{8181}$이 되는가?

분모를 보면 $x = \frac{1}{10}$이 떠오른다. 이때 $(1-x)^2 = 0.81$, $1 + x^2 = 1.01$이므로 $(1-x)^2(1+x^2) = 0.8181$이고,

$$\frac{1 + \frac{1}{10}}{0.8181} = \frac{1.1}{0.8181} = \frac{11\,000}{8181}.$$

이다. $\frac{1}{10} < 1$이므로 급수 전개가 유효하고,

$$\frac{11\,000}{8181} = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{10^n} = 1 + 0.3 + 0.04 + 0.004 + 0.0005 + 0.00007 + \cdots .$$

이다. $a_n \leq 9$인 동안(즉 $n = 8$까지)은 계수가 그대로 소수점 아래 각 자리의 숫자가 된다: 1.34457889. 그 다음부터는 계수가 두 자리 수이므로 받아올림을 해야 한다.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{8} \frac{a_n}{10^n} &= 1.344\,578\,89 \\
+ 11 \times 10^{-9} &\to 1.344\,578\,901 \\
+ 12 \times 10^{-10} &\to 1.344\,578\,902\,2 \\
+ 12 \times 10^{-11} &\to 1.344\,578\,902\,32 \\
+ 13 \times 10^{-12} &\to 1.344\,578\,902\,333.
\end{aligned}$$

이후의 항들은 열한 번째 유효숫자(significant figure)부터만 바꾸므로, 유효숫자 아홉 자리까지

$$\frac{11\,000}{8181} \approx 1.344\,578\,90.$$

이다.

검산

- 함수에 $x = 0$을 대입하면 $1 = a_0$이고, $n = 0$은 $n + 1$인 경우에 해당한다. $(1 + x)(1 + 2x + \cdots)(1 - x^2 + \cdots)$를 전개하면 $1 + 3x + \cdots$이므로 $a_1 = 3 = 1 + 2$이다.
- 직접 나눗셈을 하면 $11\,000/8181 = 1.344\,578\,902\,33\ldots$로 급수의 결과와 일치한다. 또한 $n < 60$에 대하여 정확한 멱급수 나눗셈으로 a_n을 확인하였고, 부분분수 항등식도 여러 개의 무작위 유리수 점에서 확인하였다.

흔한 실수

- 받아올림을 잊는 것: a_n에서 숫자를 그대로 읽으면 1.34457889…가 되는데, 이는 아홉 번째 유효숫자에서 틀린다.
- $\frac{Cx+D}{1+x^2}$ 대신 $\frac{D}{1+x^2}$로 쓰는 것: 기약 이차식에는 일차식 분자가 필요하다.
- 1.344578902…를 1.34457890으로 반올림한 뒤 마지막 0을 빼 버리는 것: 여기서는 이 0도 유효숫자이다.

STEP 너머

유리함수는 언제나 멱급수(power series)로 나타낼 수 있으며, 그 계수는 n에 대한 다항식에 r^n 꼴의 항과 주기적인 패턴을 더한 것으로, 분모의 각 근마다 하나씩 대응한다. 이것이 **선형 점화식**(*linear recurrences*)과 **생성함수**(*generating functions*)의 이론이다. 여기서는 근 1(중근)과 $\pm$i가 각각 선형 증가와 주기 4의 흔들림을 만들어 낸다. 모든 분수가 결국에는 순환하는 소수로 나타나는 이유도 바로 이것이다. Wilf의 *generatingfunctionology*는 생생하고 무료로 볼 수 있는 입문서이며, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*에는 이와 같은 취지의 문제가 더 실려 있다.

풀이

STEP II 2008, 문제 3

순수수학 • 부등식과 귀류법

> **STEP II 2008, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/08-s2-q3

핵심 아이디어

그래프를 그려 보면 $x \geq 0$인 범위에서 삼차함수(cubic)의 곡선은 x축 아래로 내려가지 않으며, "$y \geq 0$"을 정리하면 부등식 $x^2(1-x) \leq 4/27$을 얻는다. 귀류법(proof by contradiction) 부분에서는, 세 수 $bc(1-a)$, $ca(1-b)$, $ab(1-c)$를 하나씩 보면 다루기 까다롭지만 이들의 곱은 $a^2(1-a)\cdot b^2(1-b)\cdot c^2(1-c)$로 다시 묶을 수 있고, 이것은 첫 번째 결과로 제어된다는 점에 주목한다. 소문항 (ii)는 삼차식 대신 이차식(quadratic)을 써서 같은 기법을 적용하는 것이다.

풀이

소문항 (i): 곡선

$y = 27x^3 - 27x^2 + 4$를 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 81x^2 - 54x = 27x(3x-2),$$

이고, 이는 $x = 0$과 $x = \frac{2}{3}$에서 0이 된다. $x = 0$에서 $y = 4$이고, $x = \frac{2}{3}$에서는

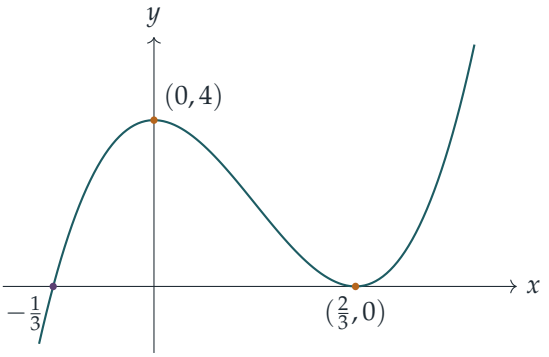
$$y = 27\cdot\tfrac{8}{27} - 27\cdot\tfrac{4}{9} + 4 = 8 - 12 + 4 = 0.$$

이다. $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2 = 162x - 54$는 $x = 0$에서 $-54 < 0$이고 $x = \frac{2}{3}$에서 $54 > 0$이므로, 두 극점(turning point)은 $(0,4)$에서의 극대(maximum)와 $(\frac{2}{3},0)$에서의 극소(minimum)이다.

극소점이 x축 위에 있으므로 곡선은 그곳에서 축에 접하고, 따라서 $(3x-2)^2$이 인수이다. x^3의 계수(coefficient)와 상수항(constant term)을 비교하면

$$27x^3 - 27x^2 + 4 = (3x-2)^2(3x+1),$$

이므로 곡선이 축과 만나는 나머지 한 곳은 $x = -\frac{1}{3}$뿐이다. 곡선은 $-\infty$에서 올라와 $x = -\frac{1}{3}$에서 축을 가로지르고, $(0,4)$에서 최고점에 이른 뒤 내려와 $(\frac{2}{3},0)$에서 축에 접하고, 다시 올라간다.



소문항 (i): 부등식

$x \geq 0$이면 $3x+1 > 0$이고 $(3x-2)^2 \geq 0$이므로, 인수분해(factorisation)로부터 $27x^3 - 27x^2 + 4 \geq 0$이다. (그래프로 보아도 마찬가지이다. $x \geq 0$에서 곡선의 가장 낮은 점은 극소점 $(\frac{2}{3},0)$이다.) 이를 정리하면

$$4 \geq 27x^2 - 27x^3 = 27x^2(1-x), \qquad \text{따라서} \qquad x^2(1-x) \leq \frac{4}{27} \quad \text{임의의} x \geq 0,$$

이고, 등호는 $x = \frac{2}{3}$일 때만 성립한다. 이것이 구하는 결과이다.

소문항 (i): 모순

모순을 이끌어 내기 위해 세 수가 모두 $4/27$보다 크다고 가정하자.

$$bc(1-a) > \tfrac{4}{27}, \qquad ca(1-b) > \tfrac{4}{27}, \qquad ab(1-c) > \tfrac{4}{27}.$$

여기에 나오는 여섯 개의 양은 모두 양수이므로, 세 부등식을 서로 곱할 수 있다.

$$bc(1-a)\cdot ca(1-b)\cdot ab(1-c) > \left(\tfrac{4}{27}\right)^3.$$

? **생각해 보기** 첫 번째 결과가 이렇게 뒤섞인 곱에 대해 어떤 정보를 줄 수 있을까?

좌변을 각 문자가 자신의 괄호와 함께 모이도록 다시 묶는다.

$$bc(1-a)\cdot ca(1-b)\cdot ab(1-c) = \left[a^2(1-a)\right]\left[b^2(1-b)\right]\left[c^2(1-c)\right].$$

a, b, c는 각각 음이 아니므로, 첫 번째 결과에 의해 각 괄호는 0 이상(왜냐하면 $1-a \geq 0$ 등이 성립하므로)이고 $4/27$ 이하이다. 음이 아닌 수들 사이의 이 세 부등식을 곱하면

$$\left[a^2(1-a)\right]\left[b^2(1-b)\right]\left[c^2(1-c)\right] \leq \left(\tfrac{4}{27}\right)^3.$$

이다. 이는 위의 엄격한 부등식에 모순이다. 따라서 가정이 거짓이었고, $bc(1-a)$, $ca(1-b)$, $ab(1-c)$ 중 적어도 하나는 $4/27$ 이하이다.

소문항 (ii)

같은 아이디어가 이차식에서도 통한다. 임의의 실수 t에 대하여, 완전제곱식 만들기(completing the square)로

$$t(1-t) = \tfrac{1}{4} - \left(t - \tfrac{1}{2}\right)^2 \leq \tfrac{1}{4},$$

이다. 모순을 이끌어 내기 위해 $p(1-q) > \frac{1}{4}$이고 $q(1-p) > \frac{1}{4}$라고 가정하자. 양변이 모두 양수이므로 곱하면

$$p(1-q)\cdot q(1-p) > \tfrac{1}{16}.$$

이다. 그런데 좌변은 $\left[p(1-p)\right]\left[q(1-q)\right]$로 다시 묶을 수 있고, $0 < p, q < 1$이므로 각 괄호는 0과 $\frac{1}{4}$ 사이에 있어 곱은 많아야 $\frac{1}{16}$이다. 이는 모순이므로, $p(1-q)$와 $q(1-p)$ 중 적어도 하나는 $\frac{1}{4}$ 이하이다.

검산

- 등호가 성립하는 경우: $a = b = c = \frac{2}{3}$이면 (i)의 세 수가 모두 $\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{3} = \frac{4}{27}$이 되고, $p = q = \frac{1}{2}$이면 (ii)의 두 수가 모두 $\frac{1}{4}$가 된다. 따라서 상계 $4/27$과 $1/4$은 더 좋게 할 수 없다.
- $(3x-2)^2(3x+1) = (9x^2-12x+4)(3x+1) = 27x^3 - 27x^2 + 4$로 전개하면 인수분해가 맞음을 확인할 수 있다.
- 수치적으로, $[0,3]$에서 $x^2(1-x)$의 최댓값은 $0.148148\ldots = 4/27$이다. $(0,1)$에서 무작위로 뽑은 백만 개의 순서쌍 (a,b,c)에 대해 세 곱 중 가장 작은 값은 한 번도 0.1468을 넘지 않았고, 무작위로 뽑은 백만 개의 쌍에 대해 $p(1-q)$, $q(1-p)$ 중 작은 값은 한 번도 0.24998을 넘지 않았다.

흔한 실수

- 모든 것이 양수라는 말 없이 부등식을 곱하는 것. "$A > \alpha$, $B > \beta$이면 $AB > \alpha\beta$"라는 단계는 음수에 대해서는 성립하지 않으므로, 가정 $0 < a, b, c < 1$이 정말로 필요하다.
- 부등식 $x^2(1-x) \leq 4/27$을 거짓인 범위인 $x < 0$에서 사용하는 것($x = -1$을 대입해 보라).
- 특정한 한 수, 예를 들어 $bc(1-a)$만 작다는 것을 증명하는 것. 이 수는 작을 필요가 없다. a가 0에 가깝고 $b = c$가 1에 가까우면 이 수는 1에 가깝다.

STEP 너머

대칭적인 상계를 적용할 수 있도록 여러 양의 곱을 취하는 방법은 산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)과 가까운 사이이며, 이 부등식을 쓰면 첫 번째 결과를 바로 얻는다. $0 \leq x \leq 1$일 때, 합이 1인 $\frac{x}{2}, \frac{x}{2}, 1-x$에 산술-기하 평균 부등식을 적용하면 $\frac{x^2}{4}(1-x) \leq \left(\frac{1}{3}\right)^3$을 얻는다. 이 논증에는 비둘기집 원리(pigeonhole principle)의 느낌도 있다. 곱이 작으면 모든 인수가 클 수는 없다. 이처럼 값을 어림하고 최적화하는 아이디어는 대학 1학년 해석학(analysis)에서 발전시킨다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 시작하기에 친절한 책이고, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제집)에는 이런 유형의 STEP 문제가 더 실려 있다.

풀이

STEP II 2008, 문제 4

순수수학 • 음함수 미분법

> **STEP II 2008, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/08-s2-q4

핵심 아이디어

두 직선 사이의 각은 벡터(vector)로 다루는 것이 가장 쉽다. $F(x,y)=1$의 법선(normal)은 ∇F 방향을 향하고, 평면 위의 두 벡터 $\mathbf{p}$와 $\mathbf{n}$에 대하여 둘 사이의 각의 tan 값은 |외적|을 내적(dot product)으로 나눈 값이다. 여기서 내적은 정확히 곡선의 방정식의 좌변, 즉 1이 된다. 그다음에는 θ가 정상(stationary)일 필요충분조건이 y^2-x^2가 정상인 것이 되고, 나머지는 x^2+y^2와 xy를 이용한 대수 계산이다.

풀이

기울기

$x^2+y^2+2axy=1$을 x에 대하여 음함수 미분(implicit differentiation)하면

$$2x+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2a\left(y+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=0 \quad\Longrightarrow\quad (ax+y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-(x+ay).$$

따라서 $ax+y\neq 0$이면 기울기(gradient)는 $-\dfrac{x+ay}{ax+y}$이고, 이것이 구하려던 결과이다.

각 θ

접선(tangent)의 방향은 $(ax+y,\ -(x+ay))$이므로, 법선의 방향은 이에 수직인 벡터

$$\mathbf{n}=(x+ay,\ ax+y),$$

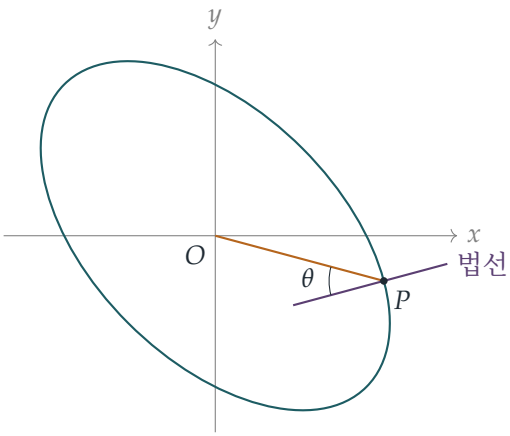
이다. (이것은 $F = x^2 + y^2 + 2axy$에 대한 $\frac{1}{2}\nabla F$이며, $ax + y = 0$인 곳에서도 의미가 있다.) 벡터 $\overrightarrow{OP}$는 $\mathbf{p} = (x, y)$이다. $\mathbf{p}$와 $\mathbf{n}$ 사이의 각을 ϕ라 하자. 그러면

$$|\mathbf{p}||\mathbf{n}|\cos\phi = \mathbf{p}\cdot\mathbf{n} = x(x+ay) + y(ax+y) = x^2 + y^2 + 2axy = 1,$$
$$|\mathbf{p}||\mathbf{n}|\sin\phi = |x(ax+y) - y(x+ay)| = |ax^2 - ay^2| = a|y^2 - x^2|,$$

이다. 여기서 둘째 줄은 2차원 외적(cross product)의 크기(즉 $\mathbf{p}$와 $\mathbf{n}$이 만드는 평행사변형(parallelogram)의 넓이)이고, $a > 0$이다.

내적이 $+1 > 0$이므로 ϕ는 이미 예각(acute)(또는 0)이고, 따라서 $\phi = \theta$이다. 두 줄을 나누면

$$\tan\theta = a\,|y^2 - x^2|.$$



그림($a = \frac{1}{2}$인 경우)은 곡선을 보여 준다. $0 < a < 1$이므로 이 곡선은 축이 $y = \pm x$ 위에 놓인 타원(ellipse)이다. 그림에 표시한 점 P는 θ가 최대가 되는 점 가운데 하나이다.

소문항 (i)

함수 $t \mapsto \arctan(t)$는 순증가하므로, $f \neq 0$인 곳에서 θ는 $f = y^2 - x^2$의 매끄러운 증가함수이다.

? **생각해 보기** 절댓값 때문에 꺾이는 점, 즉 $y^2 = x^2$인 점에서는 어떻게 되는가?

그런 점에서는 $\theta = 0$이다. 그런 점에서 θ의 도함수가 0이면 $a|f|$를 x의 변화량으로 나눈 값이 0으로 수렴하므로, $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x = 0$이어야 한다. 따라서 모든 경우에

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = 0 \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y^2 - x^2) = 0 \implies y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x.$$

여기서는 기울기 공식을 쓰고 있으므로 $ax + y \neq 0$이다(이 조건이 자동으로 성립함은 아래

에서 확인한다). 대입하고 $ax+y$를 곱하면

$$-y(x+ay) = x(ax+y) \implies -xy - ay^2 = ax^2 + xy \implies a(x^2+y^2) + 2xy = 0.$$

이것이 (i)이다.

덧붙여, 만약 $ax+y=0$이면 (i)로부터 $ax^2(1+a^2) - 2ax^2 = -a(1-a^2)x^2 = 0$이 되어 $x=y=0$인데, 이 점은 곡선 위에 있지 않다. 따라서 그런 점은 결코 문제를 일으키지 않는다.

소문항 (ii)

$S = x^2+y^2$라 하자. (i)에 의해 $2xy = -aS$이다. 이를 곡선의 방정식에 대입하면

$$S + a(-aS) = 1 \quad \implies \quad S = \frac{1}{1-a^2}.$$

그러므로

$$x^2+y^2+2xy = S - aS = \frac{1-a}{1-a^2} = \frac{1}{1+a},$$

즉 $(1+a)(x^2+y^2+2xy) = 1$이고, 이것이 구하려던 결과이다.

소문항 (iii)

$|y^2-x^2|$를 구해야 한다. $(y^2-x^2)^2 = (x^2+y^2)^2 - 4x^2y^2 = S^2 - (2xy)^2$을 이용하면

$$(y^2-x^2)^2 = S^2 - a^2S^2 = (1-a^2)\cdot\frac{1}{(1-a^2)^2} = \frac{1}{1-a^2}.$$

양의 제곱근을 취하면($0<a<1$이므로 가능하다) $|y^2-x^2| = 1/\sqrt{1-a^2}$이고, 따라서

$$\tan\theta = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}.$$

검산

- 축을 회전한다. $u = (x+y)/\sqrt{2}$, $v = (x-y)/\sqrt{2}$로 두면 곡선은 $(1+a)u^2 + (1-a)v^2 = 1$이 되고 $y^2-x^2 = -2uv$이다. 산술-기하 평균 부등식(AM–GM)에 의해 $1 \geq 2\sqrt{(1-a^2)}\,|uv|$이므로 $\tan\theta = 2a|uv| \leq a/\sqrt{1-a^2}$이고, 등호는 $(1+a)u^2 = \frac{1}{2}$일 때 성립한다. $x^2+y^2+2xy = 2u^2$이므로 이 등호 조건은 정확히 (ii)이다. 따라서 정상값은 θ의 최댓값이다.
- $a = \frac{1}{2}$일 때: $P \approx (1.1154, -0.2989)$는 곡선의 방정식과 (i)을 만족하고, $\tan\theta = \frac{1}{2}|y^2-x^2| \approx 0.5774 = 1/\sqrt{3}$이므로 $\theta = 30^\circ$이다. 여러 a 값에 대하여 타원을 따라 $\tan\theta$를 수치적으로 조사하면 최댓값이 정확히 이 값들에서 나타난다.

- $a \to 0$이면 곡선은 단위원(unit circle)이 되고, 단위원의 법선은 O를 지나므로 $\theta \to 0$이다. 이는 $\tan\theta \to 0$과 일치한다.

흔한 실수

- OP와 법선의 기울기로 $\tan(\alpha - \beta)$를 쓰는 것: 이 방법도 되기는 하지만 $x = 0$인 경우와 부호에 주의해야 하며, 벡터를 이용하면 두 문제를 모두 피할 수 있다.
- 구한 각이 왜 **예각**인지를 잊는 것: 내적이 $+1$이라는 사실이 이를 결정한다.
- $|y^2 - x^2|$를 구하려고 제곱한 뒤 양의 제곱근을 취하는 것을 잊는 것.

STEP 너머

$x^2 + y^2 + 2axy$를 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$에 대한 이차형식(quadratic form) $\mathbf{x}^{\mathsf{T}} A \mathbf{x}$로 쓰면, 타원의 축은 A의 고유벡터(eigenvector) $(1,1)$과 $(1,-1)$이고, 고윳값(eigenvalue) $1 \pm a$가 반축(semi-axis)을 결정한다. 이러한 대칭행렬(symmetric matrix)의 대각화(diagonalisation)는 대학 1학년 선형대수학(linear algebra)의 핵심 아이디어이다. Strang, *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)를 참고하라.

풀이

STEP II 2008, 문제 5

순수수학 • 치환적분

> **STEP II 2008, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/08-s2-q5

핵심 아이디어

두 적분(integral) 모두 도함수(derivative)를 알아보면 풀린다. 첫 번째 적분에서는 분자(numerator) $\sin 2x = 2\sin x \cos x$가 분모(denominator) $1+\sin^2 x$의 도함수와 정확히 같으므로, 보자마자 적분이 로그(logarithm)가 됨을 알 수 있다. 두 번째 적분에서는 $1+\sin^2 x = 2-\cos^2 x$로 고쳐 쓴 다음, 분자에 홀로 있는 $\sin x$를 보고 $c = \cos x$로 치환(substitution)하면 된다. 그러면 전형적인 부분분수(partial fractions) 적분이 남는다. 그다음 두 답을 비교하는 일은 $\sqrt{2}$가 들어간 두 수를 비교하는 일로 바뀌며, 마지막 부분의 부등식(inequality)들은 바로 이 비교를 해결하도록 만들어져 있다.

풀이

두 적분

분자가 $\sin 2x$인 적분을 I_1, 분자가 $\sin x$인 적분을 I_2라 하자.

I_1의 경우, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+\sin^2 x) = 2\sin x\cos x = \sin 2x$이므로 피적분함수(integrand)는 $f(x) = 1+\sin^2 x > 0$에 대하여 $f'(x)/f(x)$ 꼴이다. 따라서

$$I_1 = \Big[\ln\big(1+\sin^2 x\big)\Big]_0^{\pi/2} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

I_2의 경우, $1+\sin^2 x = 2-\cos^2 x$로 쓰고 $c = \cos x$로 치환하면 $\mathrm{d}c = -\sin x\,\mathrm{d}x$이다. x가 0에서 $\frac{1}{2}\pi$까지 변할 때 c는 1에서 0까지 줄어든다. 음의 부호 때문에 적분 구간의 위끝과 아래끝이 뒤바뀐다.

$$I_2 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}c}{2-c^2}.$$

부분분수를 이용하면

$$\frac{1}{2-c^2} = \frac{1}{(\sqrt{2}-c)(\sqrt{2}+c)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}-c} + \frac{1}{\sqrt{2}+c}\right),$$

이고, $0 \le c \le 1$에서 두 분모는 모두 양수이므로

$$I_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big[\ln(\sqrt{2}+c) - \ln(\sqrt{2}-c)\Big]_0^1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}.$$

이 식은 깔끔하게 정리된다. $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = 1$이므로 $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = (\sqrt{2}+1)^2$이고, 따라서

$$I_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot 2\ln(1+\sqrt{2}) = \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}.$$

부등식

$(\sqrt{2})^2 = 2$, $(\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$, $(\sqrt{2})^4 = 4$, $(\sqrt{2})^5 = 4\sqrt{2}$를 이용하여 이항정리(binomial theorem)를 적용하면

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{2})^5 &= 1 + 5\sqrt{2} + 10\cdot 2 + 10\cdot 2\sqrt{2} + 5\cdot 4 + 4\sqrt{2} \\ &= 41 + 29\sqrt{2}.\end{aligned}$$

이제 $2 < 4$이므로 $\sqrt{2} < 2$이고, 따라서 $29\sqrt{2} < 58$이며 $(1+\sqrt{2})^5 < 41 + 58 = 99$이다. 이로써 요구된 부등식이 성립한다.

다음으로 $1.4^2 = 1.96 < 2$이고, 1.4와 $\sqrt{2}$가 모두 양수이므로 제곱해도 대소 관계가 보존된다. 따라서 $\sqrt{2} > 1.4$이다.

> ? **생각해 보기** $(1+\sqrt{2})^5 < 99$와 $\sqrt{2} > 1.4$가 도대체 어떻게 $2^{\sqrt{2}}$에 대해 무언가를 알려 줄 수 있을까?

$1.4 = \frac{7}{5}$로 쓰자. 그러면 $2^{7/5}$는 $2^7 = 128$의 다섯제곱근이고, $1+\sqrt{2}$의 다섯제곱은 방금 위로 유계임을 보인 값이다. 정확히 말하면, $t \mapsto 2^t$가 증가함수(increasing function)이고 $\sqrt{2} > \frac{7}{5}$이므로

$$2^{\sqrt{2}} > 2^{7/5}.$$

또한 $(1+\sqrt{2})^5 < 99 < 128 = \left(2^{7/5}\right)^5$이고, $y > 0$에서 $y \mapsto y^5$가 증가함수이므로 양의 다섯제곱근을 취하면 $1+\sqrt{2} < 2^{7/5}$를 얻는다. 이를 합치면

$$2^{\sqrt{2}} > 2^{7/5} > 1 + \sqrt{2}.$$

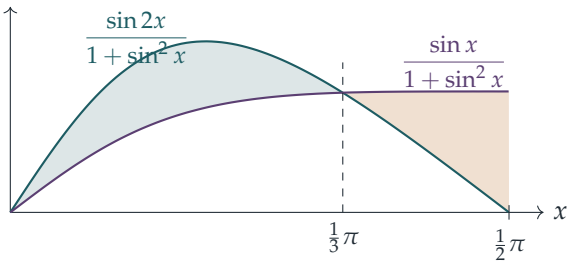
어느 적분이 더 큰가?

함수 ln은 증가함수이므로 마지막 부등식에서 $\ln\left(2^{\sqrt{2}}\right) > \ln(1+\sqrt{2})$, 즉 $\sqrt{2}\ln 2 > \ln(1+\sqrt{2})$를 얻는다. $\sqrt{2} > 0$으로 나누면

$$I_1 = \ln 2 > \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}} = I_2.$$

따라서 분자가 $\sin 2x$인 적분이 더 크다.

이 비교 결과는 피적분함수만 보고 바로 읽어 낼 수 있는 것이 아니다. $\sin 2x - \sin x = \sin x\,(2\cos x - 1)$이므로 첫 번째 피적분함수는 $0 < x < \frac{1}{3}\pi$에서는 더 크고 $\frac{1}{3}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$에서는 더 작다.



문제는 청록색 영역이 호박색 영역보다 큰가 하는 것인데, 실제로 더 크기는 하지만 그 차이는 약 0.07에 불과하다. 그래서 $\sqrt{2}$를 다루는 세심한 계산이 필요했던 것이다.

검산

- 원래의 피적분함수에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면 $I_1 \approx 0.693147$, $I_2 \approx 0.623225$를 얻으며, 이는 소수점 아래 열째 자리까지 $\ln 2$ 및 $\ln(1+\sqrt{2})/\sqrt{2}$와 일치한다.
- $(1+\sqrt{2})^5 \approx 82.01$이고 $41 + 29\sqrt{2} \approx 82.01$이다. 99보다 한참 작다.
- $2^{\sqrt{2}} \approx 2.665$, $2^{1.4} \approx 2.639$, $1+\sqrt{2} \approx 2.414$로, 주장한 순서와 같다.
- I_2에 대한 타당성 검사: 피적분함수는 $\frac{1}{2}\sin x$와 $\sin x$ 사이에 있으므로 $\frac{1}{2} < I_2 < 1$이어야 하며, 0.62는 실제로 그렇다.

흔한 실수

- $\mathrm{d}c = -\sin x\,\mathrm{d}x$ 때문에 적분 구간이 뒤바뀐다는 것을 잊어, 양의 피적분함수의 적분값이 음수로 나오는 경우.

- I_2를 $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$로 남겨 두는 경우: 이것이 $(\sqrt{2}+1)^2$임을 알아채지 못하면, 마지막 부분의 $1+\sqrt{2}$와의 연결 고리가 드러나지 않는다.
- 계산기로 $2^{\sqrt{2}} > 1+\sqrt{2}$를 확인하고 그냥 주장하는 경우. 문제는 2^t와 y^5의 단조성(monotonicity)을 밝히면서 $2^{7/5}$를 거치는 부등식의 연쇄를 요구한다.

STEP 너머

$2^{\sqrt{2}}$는 도대체 무슨 뜻일까? 대학에서는 이것을 $e^{\sqrt{2}\ln 2}$로 **정의**하며, 우리가 사용한 사실, 즉 t가 유리수일 때뿐만 아니라 무리수일 때에도 2^t가 t에 대하여 증가한다는 사실은 첫 해석학(analysis) 강의에서 엄밀하게 증명하는 지수함수(exponential function)의 성질들로부터 따라 나온다. (겔폰트(Gelfond)와 슈나이더(Schneider)의 유명한 정리에 따르면 $2^{\sqrt{2}}$는 사실 초월수(transcendental number)이다.) e^x와 $\ln x$를 엄밀하게 구성하는 방법은 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학의 이해)를 참고하라.

풀이

STEP II 2008, 문제 6

순수수학 • 합을 곱으로 바꾸는 공식

> **STEP II 2008, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/08-s2-q6

핵심 아이디어

각이 서로 다른 코사인과 사인의 합은 다루기 불편하지만, 두 코사인의 합은 합을 곱으로 바꾸는 공식(sum-to-product formula)을 이용하여 곱으로 인수분해할 수 있다. 먼저 사인을 코사인으로 바꾸어 쓴다. 그러면 f의 영점(zero)은 두 간단한 인수의 영점이 되고, 두 인수가 **모두** 0이 되는 점이 곡선이 축에 접하는 점이다. 마지막 소문항에서는 코사인과 사인이 각각 1보다 클 수 없다는 사실을 기억하자.

풀이

풀이 전체에서 다음과 같이 쓴다.

$$A = 2x + \frac{\pi}{3}, \qquad \sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos B, \quad \text{여기서} B = \frac{3\pi}{4} - \frac{3x}{2},$$

그러면 $f(x) = \cos A + \cos B$이다.

소문항 (i)

항 $\cos(2x + \frac{\pi}{3})$의 주기(period)는 π이고, $\sin(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4})$의 주기는 $\frac{2\pi}{3/2} = \frac{4\pi}{3}$이다. 공통 주기는 각 주기의 정수배여야 한다. $p\pi = q \cdot \frac{4\pi}{3}$은 $3p = 4q$를 뜻하고, 가장 작은 양의 해는 $p = 4, q = 3$이다. 따라서 모든 x에 대하여 $f(x + 4\pi) = f(x)$이고, f의 주기는

$$4\pi.$$

이다. 이보다 작은 주기는 없다. 소문항 (iii)에서 보겠지만 $f(x) = 2$인 것은 정수 t에 대하여 $x = \frac{11\pi}{6} + 4t\pi$일 때뿐이므로, f가 최댓값(maximum)에 이르는 점들은 4π 간격으로 떨어져 있고, 따라서 어떤 주기든 4π의 배수여야 한다.

소문항 (ii)

$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$를 이용하면,

$$\frac{A+B}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} + \frac{13\pi}{12}\right) = \frac{x}{4} + \frac{13\pi}{24},$$
$$\frac{A-B}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{7x}{2} - \frac{5\pi}{12}\right) = \frac{7x}{4} - \frac{5\pi}{24},$$

이므로 다음을 얻는다.

$$f(x) = 2\cos\left(\frac{x}{4} + \frac{13\pi}{24}\right)\cos\left(\frac{7x}{4} - \frac{5\pi}{24}\right).$$

따라서 $f(x) = 0$인 것은 두 코사인 중 하나가 0일 때이고, 그때뿐이다.

첫째 인수. $\frac{x}{4} + \frac{13\pi}{24} = \frac{\pi}{2} + k\pi$에서 $x = -\frac{\pi}{6} + 4k\pi$를 얻는다. 이 가운데 $[-\pi, \pi]$에 속하는 것은 $x = -\frac{\pi}{6}$뿐이다.

둘째 인수. $\frac{7x}{4} - \frac{5\pi}{24} = \frac{\pi}{2} + k\pi$에서 $\frac{7x}{4} = \frac{17\pi}{24} + k\pi$이므로

$$x = \frac{(17 + 24k)\pi}{42}.$$

$-42 \le 17 + 24k \le 42$이어야 하므로 $k = -2, -1, 0, 1$이고, 이로부터 $x = -\frac{31\pi}{42}$, $-\frac{7\pi}{42} = -\frac{\pi}{6}$, $\frac{17\pi}{42}$, $\frac{41\pi}{42}$를 얻는다.

둘을 합치면 $-\pi \le x \le \pi$에서 f의 영점은

$$x = -\frac{31\pi}{42}, \quad -\frac{\pi}{6}, \quad \frac{17\pi}{42}, \quad \frac{41\pi}{42}.$$

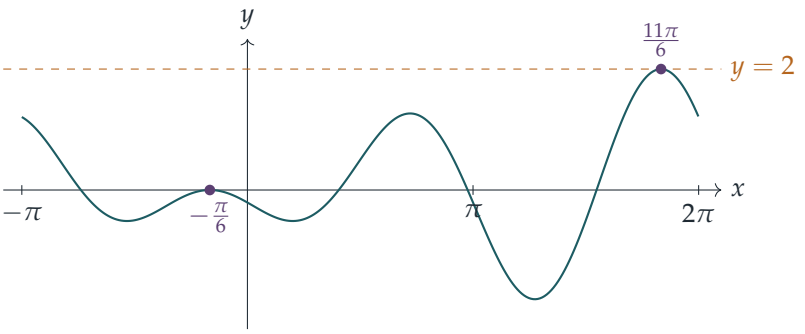
이다.

? 생각해 보기 두 목록에 모두 나타나는 값은 왜 특별할까?

$x = -\frac{\pi}{6}$에서는 두 코사인 인수가 모두 0이다. 각 인수는 영점을 지나는 코사인이므로 그 점에서 부호가 바뀐다(cos가 0인 곳에서 sin은 ± 1이므로 도함수(derivative)가 0이 아니다). 그러므로 $x = -\frac{\pi}{6}$ 근처에서 f는 상수와 $(x + \frac{\pi}{6})^2$의 곱처럼 행동한다. 부호 변화 두 번을 곱하면 부호 변화가 없다. 실제로 x가 증가하며 $-\frac{\pi}{6}$을 지날 때, 첫째 인수는 양에서 음으로 바뀌고(그 각이 증가하며 $\frac{\pi}{2}$를 지난다) 둘째 인수는 음에서 양으로 바뀐다(그 각이 증가하며 $-\frac{\pi}{2}$를 지난다). 따라서 f는 양쪽 모두에서 음이다. 그러므로 곡선은 다음 점에서 x축을 가로지르지 않고 접한다.

$$x = -\frac{\pi}{6}.$$

나머지 세 영점에서는 인수 하나만 0이 되므로 f의 부호가 바뀌고 곡선은 축을 가로지른다.



소문항 (iii)

$\cos A \le 1$이고 $\cos B \le 1$이므로 $f(x) \le 2$이며, 등호는 $\cos A = 1$ 이고 $\cos B = 1$일 때, 그리고 그때에만 성립한다. 원래 함수로 나타내면 다음과 같다.

$$\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=1 \iff 2x+\frac{\pi}{3}=2m\pi \iff x=-\frac{\pi}{6}+m\pi,$$
$$\sin\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=1 \iff \frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2n\pi \iff x=\frac{\pi}{2}+\frac{4n\pi}{3},$$

여기서 m, n은 정수이다. 두 조건이 함께 성립하는 것은 $-\frac{\pi}{6}+m\pi=\frac{\pi}{2}+\frac{4n\pi}{3}$일 때이다. 양변에 $\frac{6}{\pi}$를 곱하면 $6m-1=3+8n$, 즉

$$3m-4n=2.$$

이다. 한 해는 $m=2$, $n=1$이고, 3과 4가 서로소(coprime)이므로 일반해는 $m=2+4t$, $n=1+3t$이다. 따라서 $f(x)=2$인 것은

$$x=-\frac{\pi}{6}+(2+4t)\pi=\frac{11\pi}{6}+4t\pi, \qquad t\in\mathbb{Z}.$$

일 때이고, 그때뿐이다. 이러한 값 가운데 $0 \le x \le 2\pi$에 속하는 것은

$$x=\frac{11\pi}{6}.$$

뿐이다. 확인: $2\cdot\frac{11\pi}{6}+\frac{\pi}{3}=4\pi$이고 $\frac{3}{2}\cdot\frac{11\pi}{6}-\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{2}$이므로 $f=\cos 4\pi+\sin\frac{5\pi}{2}=1+1=2$이다.

검산

- 인수분해한 식은 임의로 고른 10^4개의 점에서 원래의 f와 (10^{-12} 이내로) 일치한다.
- $[-\pi,\pi]$를 수치적으로 훑어보면 부호 변화는 $-\frac{31\pi}{42}$, $\frac{17\pi}{42}$, $\frac{41\pi}{42}$ 근처에서만 나타난다. $-\frac{\pi}{6}$에서는 **양쪽** 모두에서 $f(-\frac{\pi}{6}\pm10^{-3})\approx-8.7\times10^{-7}$이므로, 부호 변화 없이 접하는 영점임이 확인된다.
- $[0,2\pi]$에서 f의 최댓값은 2이고, $x\approx1.8333\pi=\frac{11\pi}{6}$에서 이 값을 가진다.

흔한 실수

- $-\frac{\pi}{6}$을 두 번 적거나, 이 값이 두 인수 모두에서 나온다는 점을 놓치는 것. 바로 이 점이 접점을 찾는 단서이다.
- $\cos A = 1$과 $\cos B = 1$을 따로 풀고 멈추는 것. 두 조건은 같은 x에서 동시에 성립해야 하며, 이를 위해서는 정수 방정식 $3m - 4n = 2$가 필요하다.

STEP 너머

소문항 (iii)은 사실 두 주기 운동이 언제 맞아떨어지는가에 관한 문제이다. 조건 $3m - 4n = 2$는 일차 디오판토스 방정식(linear Diophantine equation)이고, $\gcd(3,4)$가 2를 나누므로 해를 가진다. 같은 아이디어를 여러 진동수에 한꺼번에 적용하면 푸리에 급수(Fourier series)로 이어지고, 주기함수들의 합이 언제 다시 주기함수가 되는가 하는 질문(주기들의 비가 유리수일 때뿐이다)으로도 이어진다. 그 바탕에 있는 정수론(number theory)을 알고 싶다면 Davenport의 *The Higher Arithmetic*을 읽어 보자.

풀이

STEP II 2008, 문제 7

순수수학 • 일계 미분방정식

STEP II 2008, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/08-s2-q7

핵심 아이디어

좌변 $\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$는 $\ln y$의 도함수(derivative)이므로, 이 치환은 로그를 취해서 다루는 것이 가장 좋다. 곱 $y = u\,(1+x^2)^{1/2}$는 로그를 취하면 합이 되고, 우변의 항 $\frac{x}{1+x^2}$는 정확히 $\ln(1+x^2)^{1/2}$의 도함수이다. 이 항이 소거되어 u에 대한 변수분리형 방정식(separable equation)이 남는다. 소문항 (ii)는 세제곱근으로 같은 아이디어를 적용한 것이고, 두 답을 나란히 놓으면 (iii)의 규칙이 분명히 드러난다.

풀이

소문항 (i)

$x = 0$에서 $y = 1 \neq 0$이고 방정식에 $1/y$가 들어 있으므로, $x = 0$을 포함하면서 $y \neq 0$인 구간에서 생각한다. $(1+x^2)^{1/2} > 0$이므로 치환하면 그 구간에서 $u \neq 0$이기도 하고, $u(0) = 1$이다.

$|y| = |u|\,(1+x^2)^{1/2}$의 양변에 로그를 취하고 미분하면

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{x}{1+x^2}.$$

이것을 미분방정식(differential equation)과 비교하면 $\frac{x}{1+x^2}$ 항이 소거되어

$$\frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = xy = x\,u\,(1+x^2)^{1/2}, \qquad \text{따라서} \qquad \frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = x(1+x^2)^{1/2},$$

가 남는다. 여기서 u로 나누었는데, $u \neq 0$이므로 그렇게 해도 된다.

? **생각해 보기** $x(1+x^2)^{1/2}$를 번거롭지 않게 적분하려면 어떻게 해야 할까?

인수 x는 $1+x^2$의 도함수의 절반이므로, 연쇄법칙을 거꾸로 적용(reverse chain rule)하면 $\int x(1+x^2)^{1/2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} = \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}$에 상수를 더한 것이다. (미분해서 확인해 보라.)

양변을 x에 대하여 적분하면

$$-\frac{1}{u} = \tfrac{1}{3}(1+x^2)^{3/2} + C.$$

$x=0$에서 $u=1$이므로 $-1 = \frac{1}{3} + C$이고 $C = -\frac{4}{3}$이다. 따라서

$$\frac{1}{u} = \frac{4-(1+x^2)^{3/2}}{3}, \qquad u = \frac{3}{4-(1+x^2)^{3/2}},$$

이고, 그러므로

$$\boxed{y = \frac{3\,(1+x^2)^{1/2}}{4-(1+x^2)^{3/2}}}$$

이다. 이 식은 0을 포함하면서 분모가 양수인 구간, 즉 $(1+x^2)^{3/2} < 4$, 다시 말해 $|x| < \sqrt{2^{4/3}-1} \approx 1.233$에서 성립한다. $|x|$가 이 값에 가까워지면 $y \to \infty$이다.

소문항 (ii)

이번에는 추가된 항이 $\frac{x^2}{1+x^3}$이고, 이는 $\frac{1}{3}\ln(1+x^3) = \ln(1+x^3)^{1/3}$의 도함수이다. 따라서 $x=0$ 근처($1+x^3>0$인 곳)에서 $y = u\,(1+x^3)^{1/3}$로 놓으면 된다. 앞에서와 똑같이

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{x^2}{1+x^3},$$

이므로 방정식은

$$\frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = x^2 y = x^2 u\,(1+x^3)^{1/3}, \qquad \frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = x^2(1+x^3)^{1/3}.$$

이 된다. 이번에는 x^2이 $1+x^3$의 도함수의 3분의 1이므로

$$-\frac{1}{u} = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{3}{4}(1+x^3)^{4/3} + C = \tfrac{1}{4}(1+x^3)^{4/3} + C.$$

$x=0$에서 $u=1$이므로 $-1 = \frac{1}{4} + C$이고 $C = -\frac{5}{4}$이다. 따라서 $\frac{1}{u} = \frac{5-(1+x^3)^{4/3}}{4}$이고

$$\boxed{y = \frac{4\,(1+x^3)^{1/3}}{5-(1+x^3)^{4/3}}}$$

이며, 이 식은 0 근처의 $-1 < x < \left(5^{3/4}-1\right)^{1/3} \approx 1.33$에서 성립한다.

소문항 (iii)

두 답을 비교하면, 분자에는 거듭제곱근 $(1+x^n)^{1/n}$이, 분모에는 거듭제곱 $(1+x^n)^{(n+1)/n}$이 나타나고, 상수는 $n+1$과 $n+2$이다. 따라서 다음과 같이 추측한다.

$$\boxed{y = \frac{(n+1)\,(1+x^n)^{1/n}}{n+2-(1+x^n)^{(n+1)/n}}}$$

이 식은 $n=2$와 $n=3$일 때 (i)과 (ii)의 답을 준다. (증명은 요구되지 않았지만, 같은 치환 $y = u(1+x^n)^{1/n}$으로 증명할 수 있다. $\int x^{n-1}(1+x^n)^{1/n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}(1+x^n)^{(n+1)/n}$이고, $x=0$에서의 조건으로부터 상수 $-\frac{n+2}{n+1}$을 얻는다.)

검산

- $x=0$에서 각 식은 요구된 대로 $\frac{n+1}{n+2-1} = 1$을 준다.
- (i)에서 $x=0$ 근처를 보면, 방정식으로부터 $y'(0)=0$이고, 실제로 $(1+x^2)^{1/2}$와 $(1+x^2)^{3/2}$ 모두 0에서 기울기가 0이다.
- 방정식을 수치적으로 풀면($x=0$에서 시작하는 룽게-쿠타(Runge–Kutta) 단계), $n=2,3,4,5,7$에 대하여 여러 점에서 공식과 10^{-8}보다 작은 오차로 일치한다. 예를 들어 (i)에서 $x=1$일 때 $y = \frac{3\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}} \approx 3.6213$이고, (ii)에서 $x=1$일 때 $y = \frac{4\cdot 2^{1/3}}{5-2^{4/3}} \approx 2.0320$이다.

흔한 실수

- $y = u(1+x^2)^{1/2}$를 대입하고 곱의 미분법으로 곧바로 미분하는 것: 가능하기는 하지만 지저분하다. 양변을 y로 나누면(로그를 취하는 것과 같다) 소거가 분명히 보인다.
- $\int u^{-2}\,\mathrm{d}u = -u^{-1}$에서 음의 부호를 빠뜨려 상수를 망치는 것.
- 상수를 잘못된 단계에서 정하는 것: 식을 정리하기 전에 $u(0)=1$을 적용해야 한다(u에 대한 방정식에 $y(0)=1$을 쓰면 안 된다).

STEP 너머

이 방정식은 **베르누이 방정식**(Bernoulli equation) $y' = P(x)y + Q(x)y^2$이며, 일반적인 기법은 치환 $v = 1/y$로 이를 선형 방정식으로 만드는 것이다. 여기서는 문제에 주어진 치환이 그 일을 두 단계로 해낸다. 적분인자(integrating factor)와 비슷한 $(1+x^n)^{1/n}$으로 P 항을 없앤 다음 변수를 분리하는 것이다. 또한 방정식이 무해해 보이는데도 해가 유한한 x에서 발산한다는 점에 주목하라. 이러한 "유한 시간 폭발(finite-time blow-up)"은 y^2 항이 있

는 방정식에서 전형적으로 나타나며, 상미분방정식(ODE) 첫 강좌에서 다룬다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 베르누이 방정식과 해의 존재성을 다룬다.

풀이

STEP II 2008, 문제 8

순수수학 • 벡터와 각의 이등분선

STEP II 2008, 8번 문제

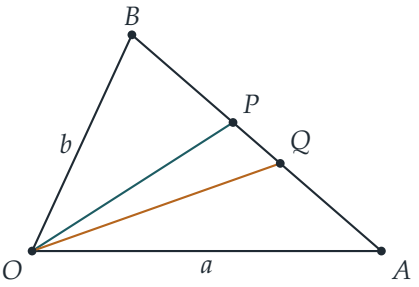
더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/08-s2-q8

핵심 아이디어

$\angle AOB$의 이등분선(angle bisector) 방향의 벡터는 OA와 OB 방향의 **단위벡터**(unit vector)의 합이다. 길이가 같은 두 벡터를 더하면 마름모(rhombus)의 대각선이 되고, 마름모의 대각선은 그 각을 이등분하기 때문이다. 이것을 P의 위치벡터(position vector)와 맞추어 보면 λ가 정해진다. 그다음 Q는 P에서 A와 B의 역할을 바꾼 것일 뿐이고, 마지막 항등식은 스칼라곱(scalar product)을 이용한 직접 계산으로 얻어지며, 이때 다루기 까다로운 항 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$가 소거된다.

풀이



그림에서는 $a > b$이므로 (청록색으로 그린 이등분선 위의 점) P는 B에 더 가깝고, Q는 B로부터의 거리가 P에서 A까지의 거리와 같은 점이다.

P의 위치벡터

$AP : PB = (1-\lambda) : \lambda$이고 두 부분을 더하면 AB이므로 $AP = (1-\lambda)AB$이다. 따라서 $\overrightarrow{AP} = (1-\lambda)(\mathbf{b}-\mathbf{a})$이고

$$\overrightarrow{OP} = \mathbf{a} + (1-\lambda)(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = \lambda\mathbf{a} + (1-\lambda)\mathbf{b}.$$

(확인: 비가 말해 주는 대로 $\lambda = 1$이면 A, $\lambda = 0$이면 B가 된다.)

λ 구하기

벡터 $\mathbf{a}/a$와 $\mathbf{b}/b$는 OA와 OB 방향의 단위벡터이다. 이 둘의 합은 변이 OA와 OB 방향인 마름모의 대각선이므로, $\angle AOB$의 이등분선 방향을 가리킨다. P는 이 이등분선 위에 있으므로, 어떤 스칼라 k에 대하여

$$\lambda\mathbf{a} + (1-\lambda)\mathbf{b} = k\left(\frac{\mathbf{a}}{a} + \frac{\mathbf{b}}{b}\right)$$

이다.

생각해 보기 왜 $\mathbf{a}$의 계수와 $\mathbf{b}$의 계수를 각각 따로 비교해도 되는가?

O, A, B가 한 직선 위에 있지 않으므로(not collinear) $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$는 영벡터가 아니고 서로 평행하지도 않다. 따라서 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$는 일차독립(linearly independent)이다. 즉 $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \mathbf{0}$이면 $\alpha = \beta = 0$이다. 그러므로

$$\lambda = \frac{k}{a}, \qquad 1-\lambda = \frac{k}{b}.$$

두 식을 더하면 $1 = k\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$이므로 $k = \dfrac{ab}{a+b}$이고

$$\boxed{\lambda = \frac{b}{a+b}}, \qquad 1-\lambda = \frac{a}{a+b}.$$

이것은 모습을 바꾼 각의 이등분선 정리(angle bisector theorem)이다. 즉 $AP : PB = (1-\lambda) : \lambda = a : b = OA : OB$이다. 따라서

$$\overrightarrow{OP} = \frac{b\,\mathbf{a} + a\,\mathbf{b}}{a+b}.$$

점 Q와 항등식

Q는 AB 위에 있고 $BQ = AP = (1-\lambda)AB$이므로, P의 경우와 같은 논리를 A 대신 B에서부터 재어 적용하면

$$\overrightarrow{OQ} = \mathbf{b} + (1-\lambda)(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = (1-\lambda)\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} = \frac{a\,\mathbf{a} + b\,\mathbf{b}}{a+b}.$$

$c = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$로 놓고 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = a^2$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = b^2$을 이용하면

$$(a+b)^2\,OQ^2 = (a\mathbf{a}+b\mathbf{b})\cdot(a\mathbf{a}+b\mathbf{b}) = a^2\cdot a^2 + 2ab\,c + b^2\cdot b^2 = a^4+b^4+2abc,$$
$$(a+b)^2\,OP^2 = (b\mathbf{a}+a\mathbf{b})\cdot(b\mathbf{a}+a\mathbf{b}) = b^2a^2 + 2ab\,c + a^2b^2 = 2a^2b^2+2abc.$$

두 식을 빼면 c가 들어 있는 항이 소거된다.

$$(a+b)^2\left(OQ^2-OP^2\right) = a^4-2a^2b^2+b^4 = (a^2-b^2)^2 = (a-b)^2(a+b)^2.$$

$(a+b)^2\neq 0$으로 나누면

$$OQ^2-OP^2 = (a-b)^2 = (b-a)^2,$$

이므로 증명하려던 식이 성립한다.

검산

$\mathbf{a}=(3,0)$, $\mathbf{b}=(0,4)$로 잡으면 $a=3$, $b=4$이고 $\angle AOB$는 직각이다. 이때 $\lambda=\frac{4}{7}$이고 $\overrightarrow{OP}=\left(\frac{12}{7},\frac{12}{7}\right)$인데, 이 점은 직각의 이등분선인 $y=x$ 위에 있다. 또 $\overrightarrow{OQ}=\left(\frac{9}{7},\frac{16}{7}\right)$이므로 $OQ^2-OP^2=\frac{337}{49}-\frac{288}{49}=1=(4-3)^2$이다. $a=b$이면 삼각형은 이등변삼각형(isosceles triangle)이고, $P=Q$는 AB의 중점이며, 차는 마땅히 그래야 하듯 0이다. 2차원과 3차원에서 무작위로 만든 삼각형 20,000개에 대한 수치 실험에서도 모든 결과가 10^{-13} 이내에서 일치했다.

흔한 실수

- $\overrightarrow{OP}=(1-\lambda)\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$로 쓰는 것. 비에서 큰 몫인 $1-\lambda$는 A로부터의 거리이므로 $\mathbf{b}$에 붙는다. $\lambda=1$을 넣어 확인해 보자.
- $\mathbf{a}+\mathbf{b}$를 이등분선의 방향으로 쓰는 것. 이것은 $a=b$일 때만 맞으며, 단위벡터를 써야 한다.
- $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2$을 전개할 때 교차항(cross term) $2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$를 빠뜨리고 a^2+b^2으로 쓰는 것. 여기서는 이 항이 소거되지만, 그것은 두 전개식 모두에 이 항이 있을 때에만 그렇다.

STEP 너머

마지막 계산은 선형사상(linear map)에 의해 길이가 어떻게 변환되는가를 보여 주는 특수한 경우이다. OP^2과 OQ^2은 이차형식(quadratic form) $\mathbf{x}\mapsto\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}$의 값이고, 교차항은 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$의 그람 행렬(Gram matrix)이 결정한다. 단위벡터를 더하면 이등분선이 된다는 사

실도 일반화된다. 임의의 내적 공간(inner-product space)에서 두 벡터 사이의 "한가운데" 방향은 각 벡터를 정규화한 다음 더해서 찾는다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 이러한 관점에서 스칼라곱, 길이, 각을 전개한다.

풀이

STEP II 2008, 문제 9

역학 • 포물체 운동

STEP II 2008, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

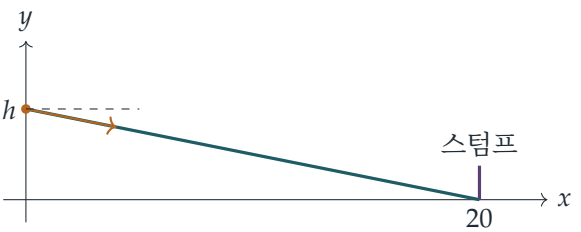
step.maths.org/questions/08-s2-q9

핵심 아이디어

수평 운동으로부터 비행 시간(time of flight)이 α에 대한 식으로 정해지고, 그 시간을 수직 운동에 대입하면 α와 h를 잇는 방정식 하나를 얻는다. $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$로 바꿔 쓰면 이 방정식은 $\tan\alpha$에 대한 이차방정식(quadratic equation)이 되는데, 이것이 "어떤 각도로 던져야 목표에 맞는가?" 유형의 문제에서 쓰는 표준적인 기법이다. 그다음에는 크리켓에 대한 상식으로 알맞은 근(root)을 고르고, 작은 각 근사(small-angle approximation)로 마무리한다.

풀이

공을 공기 저항(air resistance)과 회전 없이 중력만 받으며 자유롭게 움직이는 입자(particle)로 모형화한다. 원점을 발사점 바로 아래의 지면에 잡고, x축은 스텀프(stumps) 쪽을 향하는 수평 방향, y축은 연직 위쪽 방향으로 잡는다. 그러면 공은 $(0, h)$에서 속력 $40\,\mathrm{m\,s^{-1}}$로 수평선 위쪽 α의 각도로 출발한다(α가 음수이면 아래쪽을 향해 던진 것이다).



소문항 (i)

수평 방향으로는 힘이 작용하지 않으므로 $x = 40t\cos\alpha$이다. 공이 $x = 20$에 도달하는 시각은

$$t = \frac{20}{40\cos\alpha} = \frac{1}{2\cos\alpha}.$$

이다. 수직 방향의 가속도는 $-10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$이므로

$$y = h + 40t\sin\alpha - 5t^2.$$

이다. 이 시각에 공은 지면, 즉 $y = 0$에 있으므로

$$0 = h + 40\sin\alpha\cdot\frac{1}{2\cos\alpha} - \frac{5}{4\cos^2\alpha} = h + 20\tan\alpha - \tfrac{5}{4}\sec^2\alpha.$$

이다. 이제 $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$를 이용하고 $T = \tan\alpha$로 놓으면

$$h + 20T - \tfrac{5}{4}(1 + T^2) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad 5T^2 - 80T + 5 - 4h = 0.$$

이다. 근의 공식(quadratic formula)에 의해

$$T = \frac{80 \pm \sqrt{6400 - 20(5-4h)}}{10} = \frac{80 \pm \sqrt{6300 + 80h}}{10},$$

이므로 가능한 두 값은

$$\tan\alpha = 8 \pm \sqrt{63 + \tfrac{4}{5}h}.$$

이다. $h \geq 0$이므로 두 값 모두 실수이다.

생각해 보기 속구 투수(fast bowler)라면 실제로 어느 근을 쓰겠는가?

$\sqrt{63} \approx 7.9$이므로 큰 근은 $\tan\alpha \approx 16$, 즉 $\alpha \approx 86°$를 준다. 이것은 약 80 m 높이까지 치솟았다가 약 8 s 뒤에야 스텀프 위로 떨어지는 높은 로브이다. 이는 결코 속구 투수의 투구가 아니다. 따라서 작은 근

$$\tan\alpha = 8 - \sqrt{63 + \tfrac{4}{5}h},$$

이 알맞은 근이다. 현실적인 투구 높이(2미터 남짓)에서는 $63 + \frac{4}{5}h$가 64에 가까우므로 $\tan\alpha$는 0에 가깝다. 예를 들어 0과 3 사이의 어떤 h에 대해서도 $|\tan\alpha| < 0.09$이다. 그러므로 α는 작은 각이고 $\cos\alpha \approx 1$이며, 스텀프에 도달하는 시간은

$$t = \frac{1}{2\cos\alpha} \approx \tfrac{1}{2}\,\mathrm{s},$$

로 요구된 결과와 같다. (실제로 $t = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \tan^2\alpha}$이고, 이 값은 $|\tan\alpha| < 0.1$이면 언제나 $\frac{1}{2}$와 0.5% 이내로 차이 난다.)

소문항 (ii)

공이 수평선 아래쪽으로 던져지는 것은 정확히 $\tan\alpha < 0$일 때이다. 큰 근은 항상 양수이므로 작은 근을 쓴다.

$$8 - \sqrt{63 + \tfrac{4}{5}h} < 0 \iff \sqrt{63 + \tfrac{4}{5}h} > 8 \iff 63 + \tfrac{4}{5}h > 64 \iff h > \tfrac{5}{4},$$

여기서 양변이 모두 양수이므로 제곱하는 과정은 거꾸로도 성립한다. 따라서 $h > 1.25$일 때 투수는 공을 수평선 아래쪽으로 던진다. 정확히 $h = 1.25$이면 공은 수평으로 던져진다.

소문항 (iii)

$h = 2.5$일 때 소문항 (ii)로부터 α는 작은 음수임을 안다. $\cos\alpha \approx 1$이고 $\sin\alpha \approx \alpha$(라디안(radian) 단위)이므로 $\tan\alpha \approx \alpha$이고 $\sec^2\alpha \approx 1$이다. 따라서 소문항 (i)의 방정식 $0 = h + 20\tan\alpha - \frac{5}{4}\sec^2\alpha$는

$$0 \approx 2.5 + 20\alpha - 1.25, \qquad \text{따라서} \qquad \alpha \approx -\frac{1.25}{20} = -0.0625 \text{ rad}.$$

가 된다. 도로 환산하면

$$\alpha \approx -0.0625 \times \frac{180}{\pi} \approx -3.58^\circ,$$

이므로 $\alpha \approx -3.6^\circ$이다. 공은 수평선 아래쪽으로 약 3.6°의 각도로 던져진다.

다른 방법으로 보면, 이항 근사(binomial approximation)를 이용하여 $\tan\alpha = 8 - \sqrt{65} = 8 - 8\sqrt{1 + \frac{1}{64}} \approx 8 - 8\left(1 + \frac{1}{128}\right) = -\frac{1}{16}$이다. 이것도 같은 답을 준다.

검산

- **정확한 값.** $\tan\alpha = 8 - \sqrt{65} = -0.06226$이므로 $\alpha = -3.563^\circ$이고, 이는 유효숫자(significant figures) 두 자리로 -3.6°로서 근삿값과 일치한다.
- **시뮬레이션.** $(0, 2.5)$에서 $40\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, -3.563°로 출발하는 운동을 수치적으로 단계별 계산하면, 공은 $0.501\,\mathrm{s}$ 뒤에 높이 $0.0000\,\mathrm{m}$에서 $x = 20$에 도달한다.
- **경계.** $h = 1.25$에서 작은 근은 $8 - \sqrt{64} = 0$이다. 공은 수평으로 던져지고, 0.5초 동안 날아가며 $5(0.5)^2 = 1.25\,\mathrm{m}$ 떨어져 정확히 스텀프에 닿는다.

흔한 실수

- $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$를 떠올리지 못하고 $\sin\alpha$와 $\cos\alpha$로 따로 풀려고 하여 계산이 복잡해진다.

- 각을 라디안으로 답하거나, 작은 각 근사를 도 단위로 사용한다. $\sin\theta \approx \theta$는 θ가 라디안일 때만 성립한다.
- 소문항 (iii)에서 음의 부호를 빠뜨린다. 소문항 (ii)에서 예측한 대로 각은 수평선 아래쪽이다.

STEP 너머

근이 두 개인 구조는 일반적인 사실을 반영한다. 일정한 속력으로 던진 포물체는 자신의 "포락선(envelope)"(안전 포물선(parabola of safety)) 안쪽의 어떤 점에든 두 가지 궤적으로 도달할 수 있다. 포락선 위에서는 두 궤적이 하나로 합쳐지고, 포락선 바깥의 점에는 전혀 도달할 수 없다. 실제 크리켓 공은 항력(drag)과 회전에 의한 마그누스 효과(Magnus effect)의 영향도 받으며, 이로부터 대개 수치적으로 풀어야 하는 비선형 미분방정식(nonlinear differential equation)이 나온다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 대학 1학년 수준에서 포물체 운동과 저항을 받는 운동을 다룬다.

풀이

STEP II 2008, 문제 10

역학 • 벽과의 비스듬한 충돌

STEP II 2008, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/08-s2-q10

핵심 아이디어

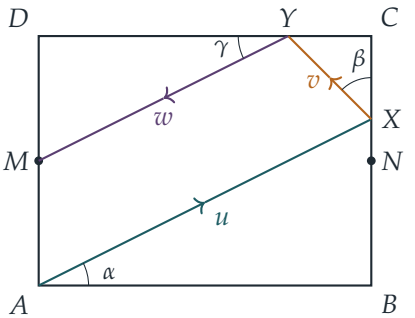
매끄러운(smooth) 벽에서는 충격량(impulse)이 벽에 수직이므로, 벽을 따르는 속도 성분(component)은 변하지 않고 벽으로 향하는 성분만 e배가 된다. 속도를 AB에 평행한 성분과 AD에 평행한 성분으로 나누면 모든 것이 명료해진다. 한 번 튕길 때마다 두 성분 중 하나만 e배가 되기 때문이다. 두 번 튕기고 나면 두 성분이 모두 e배가 되었으므로, 최종 방향과 운동 에너지(kinetic energy)가 한꺼번에 결정된다. 그러면 소문항 (ii)의 기하는 수평거리를 더하는 문제일 뿐이다.

풀이

공을 입자(particle)로, 당구대의 변을 매끄러운 벽으로 모형화한다. 원점을 A로, x축을 AB 방향으로, y축을 AD 방향으로 잡으면

$$B = (a, 0), \quad C = (a, 2b), \quad D = (0, 2b), \quad M = (0, b), \quad N = (a, b).$$

이다. 간단히 $t = \tan\alpha$라 쓰자.



소문항 (i)

처음 속도는 $(u\cos\alpha,\ u\sin\alpha)$이다.

*X*에서의 충돌. 변 BC는 y축에 평행하다. 이 변은 매끄러우므로 공이 받는 충격량은 x 방향이고, 따라서 y 성분 $u\sin\alpha$는 변하지 않는다. 뉴턴(Newton)의 반발 법칙(law of restitution)에 따라 x 성분은 방향이 반대가 되고 e배가 된다. 충돌 후의 속도는

$$(-eu\cos\alpha,\ u\sin\alpha).$$

이다. 각 $\beta = \angle CXY$는 y의 양의 방향을 가리키는 XC로부터 잰다. 따라서

$$\tan\beta = \frac{eu\cos\alpha}{u\sin\alpha} = \frac{e}{\tan\alpha}, \qquad \text{즉,} \qquad \tan\alpha\tan\beta = e,$$

이며, 이것이 보이려던 것이다.

*Y*에서의 충돌. 변 DC는 x축에 평행하므로, 이번에는 x 성분이 변하지 않고 y 성분이 방향이 반대가 되며 e배가 된다. 충돌 후의 속도는

$$(-eu\cos\alpha,\ -eu\sin\alpha) = -e\,(u\cos\alpha,\ u\sin\alpha).$$

이다. 이는 처음 속도의 음수배이므로, 경로의 마지막 구간은 AX에 평행하고 반대 방향으로 진행한다. 각 $\gamma = \angle DYM$은 x의 음의 방향을 가리키는 YD로부터 재며, 방향 $(-\cos\alpha, -\sin\alpha)$는 이와 각 α를 이룬다. 따라서

$$\gamma = \alpha.$$

이다.

소문항 (ii)

경로를 따라 x좌표를 추적한다.

*A*에서 *X*까지. 공은 너비 a를 가로지르는 동안 $a\tan\alpha$만큼 올라가므로 $X = (a,\ at)$이다.

*X*에서 *Y*까지. 공은 $2b - at$만큼 더 올라가며, 이 구간에서는 한 단위 올라갈 때마다 x 방향으로 $\tan\beta$만큼 움직인다(β를 세로 변으로부터 재기 때문이다). 소문항 (i)에서 얻은 $\tan\beta = e/t$를 쓰면, 공은 왼쪽으로 $(2b - at)\,e/t$만큼 움직이므로

$$x_Y = a - \frac{e(2b - at)}{t}.$$

이다.

*Y*에서 *M*까지. 공은 높이 $2b$에서 높이 b로, 즉 b만큼 내려가며, 수평선 아래로 각 $\gamma = \alpha$를 이룬다. 따라서 이동하는 수평 거리는 $b/\tan\alpha$이고, 이 거리만큼 가서 정확히 $x = 0$에 도달해야 한다.

$$x_Y = \frac{b}{t}.$$

? 생각해 보기 왜 x좌표만 추적해도 괜찮을까?

각 직선 구간은 앞 구간이 끝난 곳에서 시작하고, 그 방향은 소문항 (i)에서 알고 있다. 한 구간에서 공이 얼마나 오르내리는지 알면, 각이 옆으로 얼마나 움직이는지를 정해 준다. 각 구간 끝의 높이는 정해져 있으므로(o, 그다음 DC에서 $2b$, 그다음 M에서 b), 남은 조건은 옆으로 움직인 거리들이 맞아떨어져야 한다는 것뿐이다.

x_Y에 대한 두 식을 같게 놓고 t를 곱하면

$$\begin{aligned} b &= at - e(2b - at) \\ &= at(1+e) - 2be, \end{aligned}$$

이므로 $at(1+e) = b(1+2e)$이고, 따라서

$$\tan\alpha = \frac{(1+2e)b}{(1+e)a},$$

이며, 이것이 보이려던 것이다.

이 샷은 언제나 가능하다. 이 $\tan\alpha$의 값은 모든 $e > 0$에 대해 양수이므로 $(0, \frac{\pi}{2})$에 속하는 각 α를 정한다. 이제 튕기는 점들이 원래 닿아야 할 변 위에 떨어지는지 확인해야 한다.

- X의 높이는 $at = \dfrac{1+2e}{1+e}\,b$이다. $e > 0$이면 $1+e < 1+2e < 2+2e$이므로, 이 값은 b와 $2b$ 사이에 엄격하게 놓인다. 따라서 X는 실제로 BC 위에 있고, C보다 아래, 포켓(pocket) N보다 위에 있으므로 공이 도중에 N에 빠지지 않는다.
- Y는 $x_Y = b/t = \dfrac{1+e}{1+2e}\,a$에 있고, 이 값은 $e > 0$일 때 0과 a 사이에 엄격하게 놓인다. 따라서 Y는 실제로 DC 위, D와 C 사이에 있다.

그러면 마지막 구간은 당구대 안에서 Y에서 M까지 직선으로 이어진다. 그러므로 e의 값이 무엇이든 경로의 모든 구간이 가능하다.

소문항 (iii)

소문항 (i)에서 최종 속도는 처음 속도의 $-e$배이므로 $w = eu$이다. (각 성분이 정확히 한 번씩 e배가 되었다는 점에서도 바로 알 수 있다.) 공의 질량을 m이라 하면 운동 에너지는 $\frac{1}{2}mu^2$에서 $\frac{1}{2}me^2u^2$으로 줄어든다. 따라서 잃은 비율은

$$\frac{\frac{1}{2}mu^2 - \frac{1}{2}me^2u^2}{\frac{1}{2}mu^2} = 1 - e^2.$$

이다. 이 값은 a, b나 각들과 무관하다. ($e > 1$이면 "손실"이 음수가 되어 벽이 에너지를 더해 주는 셈이 된다. 물리적으로는 맞지 않지만 계산은 성립한다.)

검산

- $a = 4$, $b = 1.5$, $e = \frac{1}{2}$(그림의 경우)이면 공식에서 $\tan\alpha = \frac{1}{2}$이다. 그러면 $X = (4, 2)$, $Y = (3, 3)$이고, Y에서 기울기(gradient) $\frac{1}{2}$로 그은 직선은 수평으로 3 가는 동안 1.5 내려가 정확히 $M = (0, 1.5)$에 닿는다. 잃은 운동 에너지의 비율은 $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$이다.
- $e = 1$(완전 탄성(perfectly elastic))이면 $\tan\alpha = 3b/(2a)$이다. 당구대를 BC에 대해, 이어서 DC에 대해 대칭이동하여 펼치면, 경로는 A에서 M의 상까지 가는 직선이 되며, 이 상은 가로로 $2a$, 위로 $3b$ 떨어져 있다. 그러면 기울기가 똑같이 $3b/(2a)$이다. 에너지 손실은 없으며 $1 - e^2 = 0$과도 일치한다.
- a, b, e, u를 무작위로 20,000번 골라 튕김을 시뮬레이션한 결과, $\tan\alpha\tan\beta = e$, $\gamma = \alpha$, M에 도달함, 비율 $1 - e^2$이 모두 10^{-13} 이내에서 확인되었다.

흔한 실수

- 충돌할 때 속력 전체에 e를 곱하는 것. 벽에 수직인 성분만 바뀐다. 매끄러운 벽을 따르는 성분은 그대로이다.
- β를 XC가 아니라 BC의 법선으로부터 재는 것. 그러면 $\tan\beta$가 그 역수로 바뀐다.
- X가 N보다 위에 있고 Y가 D와 C 사이에 있는지 확인하는 것을 잊는 것. 이 확인이 바로 "샷이 가능하다"는 말의 내용이다.

STEP 너머

$e = 1$일 때 당구대를 대칭이동하여 당구 경로를 "펼치면" 경로가 직선이 된다. 이것이 수학적 당구(mathematical billiards)의 출발점이며, 수학적 당구는 동역학계(dynamical systems)와, 그리고 변의 각이 유리수배인 당구대의 경우에는 곡면 위의 기하와 연결된다. $e < 1$이면 반사는 더 이상 거울 반사와 같지 않지만, 속도를 성분으로 나누면 여전히 쉽게 다룰 수 있다. 충격량과 반발의 역학에 대해서는 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 보라. 이런 종류의 문제를 더 풀어 보고 싶다면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제)에 도전해 보라.

풀이

STEP II 2008, 문제 11

역학 • 움직이는 쐐기 위의 입자

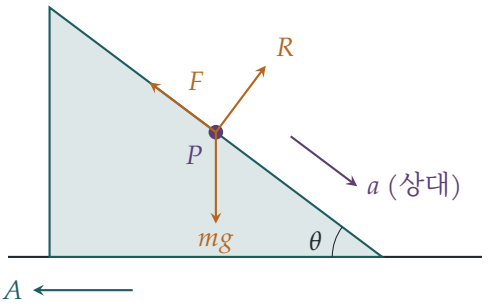
> **STEP II 2008, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/08-s2-q11

핵심 아이디어

계 바깥에서 수평 방향으로 미는 것이 없으므로(바닥이 매끄럽다), 입자와 쐐기를 합친 계의 수평 운동량(momentum)은 계속 0이다. 이 사실에서 쐐기의 가속도가 거의 저절로 나온다. 나머지는 모두 입자의 **실제** 가속도를 "쐐기에 대한 상대 가속도 더하기 쐐기의 가속도"로 쓴 다음, 입자에 작용하는 힘을 경사면에 평행한 방향과 수직인 방향으로 분해하면 얻어진다. 모든 것이 정지 상태에서 출발하고 가속도가 일정하므로, 정지한 관찰자가 보는 경로는 실제 가속도 방향의 직선이다.

풀이

P를 입자(particle)로, 쐐기(wedge)를 강체(rigid body)로 모형화한다. 바닥은 매끄럽고, 경사면은 마찰계수(coefficient of friction)가 μ인 거친 면이다. 수직인 면을 왼쪽에 두어 경사면이 오른쪽 아래로 내려가도록 한다. P가 오른쪽 아래로 미끄러지면 쐐기는 왼쪽으로 밀린다. 쐐기의 가속도를 **왼쪽** 방향으로 A라 하고, **쐐기에 대한** P의 경사면 아래 방향 가속도를 a라 하자. R을 P에 작용하는 수직항력(normal reaction), F를 마찰력(friction)이라 하자. 마찰력은 P가 미끄러져 내려가는 동안 경사면 위쪽으로 작용한다.



x축은 오른쪽으로, y축은 위쪽으로 잡는다. 경사면 아래 방향의 단위벡터(unit vector)는 $(\cos\theta, -\sin\theta)$이므로, P의 실제 가속도는 다음과 같다.

$$\big(a\cos\theta - A,\ -a\sin\theta\big).$$

소문항 (i): 쐐기의 가속도

"P와 쐐기"로 이루어진 계에 작용하는 외력은 중력과 매끄러운 바닥의 수직항력뿐이고, 둘 다 연직 방향이다. 따라서 전체 수평 운동량은 일정하며, 모든 것이 정지 상태에서 출발하므로 그 값은 0이다. 그러므로 $m\times$(가속도)의 수평 성분들의 합은 0이다.

$$m(a\cos\theta - A) + km(-A) = 0 \quad\Longrightarrow\quad A = \frac{a\cos\theta}{k+1},$$

이것이 구하는 결과이다. (P와 쐐기 사이의 힘 R과 F는 내력이며, 뉴턴(Newton)의 제3법칙에 의해 상쇄된다.)

소문항 (i): 45° 경로

? **생각해 보기** 관찰되는 경로가 왜 실제 가속도 방향의 직선이어야 하는가?

아래의 운동 방정식(equations of motion)에 의해 a와 A는 상수로 정해지므로, P의 실제 가속도는 상수 벡터이다. 정지 상태에서 출발하므로 속도는 항상 그 벡터의 t배이고 변위는 그 벡터의 $\frac{1}{2}t^2$배이다. 따라서 P는 그 방향의 고정된 직선을 따라 움직인다.

P의 가속도의 수평 성분은

$$a\cos\theta - \frac{a\cos\theta}{k+1} = \frac{k}{k+1}\,a\cos\theta,$$

이고, 연직 성분의 크기는 $a\sin\theta$이다. 경로가 45° 직선이라는 것은 이 둘이 같다는 뜻이다.

$$a\sin\theta = \frac{k}{k+1}\,a\cos\theta \quad\Longrightarrow\quad \tan\theta = \frac{k}{k+1},$$

여기서 $a\cos\theta \neq 0$으로 나누었다(P가 실제로 미끄러지므로 $a > 0$이다). 이것이 구하는 결과이다.

소문항 (i): $k = 3$인 경우

이제 $\tan\theta = \frac{3}{4}$이므로 $\sin\theta = \frac{3}{5}$, $\cos\theta = \frac{4}{5}$이고, $A = \frac{a\cdot 4/5}{4} = \frac{a}{5}$이다.

P에 대해 힘을 분해한다. P의 실제 가속도는 경사면 아래 방향 성분이 $a - A\cos\theta$이고, 바깥쪽 법선 방향 성분이 $-A\sin\theta$이다(쐐기의 왼쪽 방향 가속도가 이 성분들을 가지며, 상대 가속도는 순전히 경사면 방향이다).

경사면에 수직인 방향:

$$R - mg\cos\theta = -mA\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad R = m\left(\tfrac{4}{5}g - \tfrac{3}{25}a\right).$$

R이 $mg\cos\theta$보다 작다는 점에 주목하자. 쐐기가 P로부터 멀어지며 떨어지고 있기 때문이다.

경사면 아래 방향에서는 P가 미끄러지고 있으므로 $F = \mu R$이다.

$$mg\sin\theta - \mu R = m(a - A\cos\theta) = m\left(a - \tfrac{4}{25}a\right) = \tfrac{21}{25}ma.$$

R을 대입하고 $25/m$을 곱하면

$$15g - 20\mu g + 3\mu a = 21a \quad\Longrightarrow\quad a = \frac{5g(3-4\mu)}{3(7-\mu)}.$$

이 값은 정확히 $\mu < \frac{3}{4} = \tan\theta$일 때 양수이며, P가 미끄러지려면 당연히 그래야 한다. 이 사실은 곧바로 소문항 (ii)로 이어진다.

소문항 (ii)

$\tan\theta \le \mu$이면 P는 그 자리에 머물고 쐐기도 움직이지 않는다고 주장한다.

정지 상태가 가능하다. 두 물체가 모두 움직이지 않는다면, P에 대해 $R = mg\cos\theta$이고 경사면 위쪽 방향의 마찰력 $F = mg\sin\theta$가 필요하다. 거친 접촉면은 $F \le \mu R$, 즉 $\sin\theta \le \mu\cos\theta$, 곧 $\tan\theta \le \mu$이면 이 마찰력을 제공할 수 있으며, 이것이 바로 주어진 조건이다. 이때 쐐기는 방향이 반대인 R과 F를 받는다. 이들의 수평 성분은 왼쪽으로 $R\sin\theta = mg\sin\theta\cos\theta$, 오른쪽으로 $F\cos\theta = mg\sin\theta\cos\theta$이므로 상쇄된다. 따라서 쐐기도 평형 상태(equilibrium)에 있고, 바닥은 연직 방향의 힘만 제공한다.

> ? **생각해 보기** 정지 상태가 가능하더라도, 그럼에도 P가 미끄러질 수 있을까?

미끄러지는 것은 불가능하다. 일반적인 k와 θ에 대해 P가 $F = \mu R$인 채로 미끄러져 내려간다고 가정하자. $s = \sin\theta - \mu\cos\theta$라 하자. 쐐기의 수평 방향 방정식은 $kmA = R\sin\theta - \mu R\cos\theta = Rs$이다. 이것을 법선 방향 방정식 $R = m(g\cos\theta - A\sin\theta)$와 결합하면

$$R = \frac{kmg\cos\theta}{k + s\sin\theta}, \qquad a = \frac{(k+1)\,gs}{k + s\sin\theta}.$$

접촉이 유지되려면 $R > 0$이어야 하고, 이로부터 $k + s\sin\theta > 0$이다. 그러면 a는 s와 부호가 같다. 그런데 $\tan\theta \le \mu$는 $s \le 0$을 뜻하므로 $a \le 0$이 되어, 미끄러져 내려간다는 가정에 모순이다. 또한 P를 경사면 **위로** 미끄러지게 할 수 있는 것도 없다. 상대 운동을 시작하게 할 수 있는 것은 경사면 아래 방향 성분을 가진 중력뿐이기 때문이다. 따라서 $\tan\theta \le \mu$이면 P는 쐐기 위에 정지해 있고 쐐기도 바닥 위에 정지해 있다. ($\tan\theta = \mu$일 때는 마찰력이 한계 마찰력(limiting friction)이지만 P는 여전히 움직이지 않는다.)

검산

- $\mu = 0, k = 3$이면 $a = \frac{5g}{7}$, $A = \frac{g}{7}$이다. 그러면 P의 실제 가속도의 수평 성분은 $\frac{4}{5}\cdot\frac{5g}{7} - \frac{g}{7} = \frac{3g}{7}$이고 연직 성분은 $\frac{3}{5}\cdot\frac{5g}{7} = \frac{3g}{7}$이므로, 실제로 45° 방향이다.
- $k \to \infty$일 때(움직이지 않는 쐐기), $A \to 0$이고 일반식은 $a \to g(\sin\theta - \mu\cos\theta)$가 되어, 고정된 경사면에 대한 익숙한 결과와 같다.
- 수치적으로 $g = 9.8, k = 3, \mu = 0.2$로 두고 세 운동 방정식을 직접 풀면 $a \approx 5.284\ \mathrm{m\,s^{-2}}$를 얻으며, 이는 $\frac{5g(3-0.8)}{3(6.8)}$과 일치한다. 운동을 시간에 따라 단계적으로 계산해 보면 수평 운동량은 0으로 유지되고 경로는 정확히 45°이다.

흔한 실수

- $R = mg\cos\theta$로 두는 것. 이는 쐐기가 고정되어 있을 때만 성립한다. 여기서는 쐐기가 멀어지는 방향으로 가속하므로 R이 더 작다.
- 쐐기의 가속도를 잊고 상대 가속도 a만으로 힘을 분해하는 것. 뉴턴의 제2법칙에는 실제 가속도가 필요하다.
- 소문항 (ii)에서 P가 미끄러지지 않는데도 마찰력을 μR로 가정하는 것. 마찰력은 **최대** μR이며, 필요한 만큼의 값을 가진다.

STEP 너머

소문항 (i)의 깔끔한 단계는 보존 법칙(conservation law)이다. 외력에 수평 성분이 없으므로 운동량의 한 성분이 보존된다. 대학 1학년 역학에서는 이것이 대칭성과 보존 법칙을 잇는 일반 원리가 된다. 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)에서는 라그랑지안이 의존하지 않는 좌표(여기서는 계 전체의 수평 위치)가 자동으로 보존되는 운동량을 준다. 매끄러운 쐐기와 블록은 그곳에서 다루는 표준적인 첫 예제이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)에서 바로 이런 종류의 문제들을 자세히 다룬다.

풀이

STEP II 2008, 문제 12

확률과 통계 • 독립사건

> **STEP II 2008, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/08-s2-q12

핵심 아이디어

개수의 기댓값(expectation)은 그 개수를 이루는 개별 사건들의 확률의 합이므로, 첫 번째 부분은 p에 대한 이차방정식 하나로 귀결된다. 두 번째 부분에서는 판사들이 피고인을 보지도 않고 마음속으로 동전을 던지므로, 왕의 선고는 진실과 독립(independent)이다. 올바른 선고가 내려질 확률을 t로 나타낸 뒤 $\frac{1}{2}$을 중심으로 정리하면 답이 한 줄로 나온다.

풀이

p 구하기

당나귀, 비버, 켄타우로스가 각각 유죄 판결을 내리는 사건을 A, B, C라 하고, 이들의 지시확률변수(indicator variable)를 I_A, I_B, I_C라 하자(사건이 일어나면 1, 그렇지 않으면 0이다). 그러면 $X = I_A + I_B + I_C$이고, $\mathrm{E}(I_A) = \mathrm{P}(A)$ 등이 성립하므로 기댓값의 선형성(linearity of expectation)에 의해

$$\mathrm{E}(X) = p + \frac{p}{3} + p^2.$$

이다. (선형성에는 독립성이 필요하지 않다. 독립성은 나중에만 사용한다.) 이 값을 $\frac{4}{3}$으로 놓고 양변에 3을 곱하면

$$3p^2 + 4p - 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (3p-2)(p+2) = 0.$$

이다. 확률은 음수가 될 수 없으므로 $p + 2 \neq 0$이고, 따라서

$$p = \frac{2}{3}.$$

이다. 그러므로 세 판사가 "유죄"라고 말할 확률은

$$\mathrm{P}(A) = \frac{2}{3}, \qquad \mathrm{P}(B) = \frac{2}{9}, \qquad \mathrm{P}(C) = \frac{4}{9},$$

이며, 당연히 모두 $[0,1]$에 속한다.

왕이 "유죄"라고 말할 확률

적어도 두 판사가 유죄 판결을 내리는 사건을 K라 하자. 그러면 K는 왕이 피고인에게 유죄를 선고하는 사건이다. 위의 세 확률을 a, b, c로 쓰자. 정확히 두 명이 유죄 판결을 내리는 경우는 세 가지, 세 명 모두 유죄 판결을 내리는 경우는 한 가지이다. 판사들의 독립성을 이용하면

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(K) &= ab(1-c) + ac(1-b) + bc(1-a) + abc \\ &= ab + ac + bc - 2abc.\end{aligned}$$

이다. 여기서 $ab = \frac{4}{27}$, $ac = \frac{8}{27}$, $bc = \frac{8}{81}$, $abc = \frac{16}{243}$이므로

$$\mathrm{P}(K) = \frac{36}{243} + \frac{72}{243} + \frac{24}{243} - \frac{32}{243} = \frac{100}{243}.$$

이다. 간단히 이 값을 g라 하자.

t 구하기

피고인이 실제로 유죄인 사건을 D라 하면 $\mathrm{P}(D) = t$이다. 왕의 선고가 옳은 것은 D와 K가 둘 다 일어나거나 둘 다 일어나지 않을 때이다.

> **생각해 보기** 왜 $\mathrm{P}(D)$와 $\mathrm{P}(K)$를 곱할 수 있는가?

판사들은 "완전히 무작위로" 결정한다. 즉 그들의 판결은 증거에 의존하지 않으므로 K는 D와 독립이다. 따라서

$$\mathrm{P}(\text{옳은 선고}) = \mathrm{P}(D)\,\mathrm{P}(K) + \mathrm{P}(D')\,\mathrm{P}(K') = tg + (1-t)(1-g).$$

이다. 이제 $\frac{1}{2}$을 빼고 인수분해하면

$$\begin{aligned}tg + (1-t)(1-g) - \tfrac{1}{2} &= 2tg - t - g + \tfrac{1}{2} \\ &= (2t-1)\left(g - \tfrac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

이다. 그러므로 왕의 선고가 옳을 확률이 $\frac{1}{2}$인 것은 $(2t-1)(g-\frac{1}{2}) = 0$일 때이고, 그때뿐이다. $g = \frac{100}{243} \neq \frac{1}{2}$이므로 두 번째 인수는 0이 아니고, 따라서

$$t = \frac{1}{2}.$$

이어야 한다. 인수분해를 쓰지 않고 같은 결과를 얻을 수도 있다. $\frac{100}{243}t + \frac{143}{243}(1-t) = \frac{1}{2}$에서 $143 - 43t = \frac{243}{2}$이므로 $43t = \frac{43}{2}$, 즉 $t = \frac{1}{2}$이다.

여기서 p의 값은 거의 상관이 없다는 점에 주목하자. 판사들의 확률이 무엇이든 $\mathrm{P}(K) \neq \frac{1}{2}$이기만 하면, 증거를 무시하는 법정이 절반의 경우에 옳은 판결을 내리는 것은 유죄인 피고인과 무죄인 피고인이 똑같이 흔할 때이고, 그때뿐이다.

검산

- $p = \frac{2}{3}$일 때 $\frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$으로, 요구 조건을 만족한다.
- 여덟 가지 판결 패턴을 모두 분수로 정확히 나열하면 $\mathrm{P}(K) = \frac{100}{243} \approx 0.412$, $\mathrm{E}(X) = \frac{4}{3}$을 얻는다.
- $t = \frac{1}{2}$로 200 000회 시행한 시뮬레이션에서 왕의 선고가 옳은 비율은 0.5007이었다.
- 공식의 타당성 점검: $t = 1$(모든 피고인이 유죄)이면 왕이 옳을 확률은 g이고, $t = 0$이면 $1 - g$이다. 이 확률은 t에 대한 일차식이므로 중점에서 $\frac{1}{2}$을 지난다.

흔한 실수

- "적어도 두 명"을 $ab + ac + bc$로 계산하는 것. 이렇게 하면 세 명 모두인 경우가 세 번 세어진다. 올바른 식은 $2abc$를 빼야 한다(또는 서로소인 네 가지 경우를 직접 더한다).
- $p = -2$를 버리는 것을 잊거나, p^2과 $p/3$이 올바른 확률인지 확인하지 않는 것.
- "왕이 옳게 선고한다"를 $\mathrm{P}(K)$만으로 생각하여, 올바르게 무죄 방면된 무고한 피고인들을 빠뜨리는 것.

STEP 너머

첫 번째 부분은 강력한 기법의 작은 예이다. 개수를 지시확률변수들의 합으로 나타내면, 사건들이 서로 독립이 아니더라도 그 기댓값은 단순히 확률들의 합이 된다. 대학 확률론에서는 이 기법을 끊임없이 사용하는데, 예를 들어 무작위 순열(permutation)의 고정점(fixed point) 개수의 기댓값을 구할 때 쓴다. 두 번째 부분은 출력이 진실과 독립인 분류기(classifier)에 관한 것으로, 검사에서의 민감도(sensitivity), 특이도(specificity), 베이즈 정리(Bayes' theorem)를 생각하는 출발점이 된다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)는 지시확률변수를 많이 활용하며, 다음 단계로 읽기에 좋은 책이다.

풀이

STEP II 2008, 문제 13

확률과 통계 • 비복원추출

STEP II 2008, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/08-s2-q13

핵심 아이디어

모든 말을 추적할 필요는 없다. 검은 말만 추적하면 된다. 각 검은 말의 운명은 두 번의 추출로 결정되며, 각 추출에서 특정한 말 하나가 뽑힐 확률(probability)은 단순히 (뽑는 개수)/(주머니에 든 개수)이다. 첫 번째 추출에서 일어나는 일에 따라 경우를 나누면 두 소문항 모두 짧은 합으로 바뀌고, 둘 다 예상보다 훨씬 간단하게 정리된다.

풀이

이 풀이 전체에서 "무작위로 뽑는다"는 것은 주머니 안의 k개의 말로 이루어진 모든 집합이 뽑힐 가능성이 똑같다는 뜻이다. 반복해서 사용할 사실은 다음과 같다. m개가 든 주머니에서 k개의 말을 무작위로 뽑으면, 대칭성(symmetry)에 의해 **특정한** 말 하나가 그 안에 포함될 확률은 k/m이다(m개의 말 각각이 포함될 가능성은 똑같고, 평균적으로 그중 k개가 포함되기 때문이다).

첫 번째 옮기기가 끝나면 주머니 P에는 $n-k$개, 주머니 Q에는 $n+k$개의 말이 들어 있다. 두 번째 옮기기에서는 그 $n+k$개 가운데 k개를 뽑아 P로 옮긴다.

소문항 (i)

P에서 출발하는 검은 말을 B라 하자. 첫 번째 옮기기에서 B가 움직이는지에 따라 경우를 나눈다.

- B가 P에서 뽑히지 않는 경우: 확률은 $\dfrac{n-k}{n}$이다. 이때 두 번째 옮기기는 Q에서만 말을 꺼내므로 B는 끝까지 P에 남는다.
- B가 P에서 뽑히는 경우: 확률은 $\dfrac{k}{n}$이다. 이제 B는 Q에 있는 $n+k$개의 말 중 하나이고,

다시 뽑혀 돌아오는 k개에 포함될 때에만 P로 돌아온다. 그 확률은 $\dfrac{k}{n+k}$이다.

이 두 경우는 서로 배반이고 모든 경우를 포함하므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B\text{의 최종 위치가}P) &= \frac{n-k}{n} + \frac{k}{n}\cdot\frac{k}{n+k} = \frac{(n-k)(n+k)+k^2}{n(n+k)} \\ &= \frac{n^2}{n(n+k)} = \frac{n}{n+k}.\end{aligned}$$

이 값은 k에 대하여 순감소하므로, $0 \le k \le n$에서 최댓값을 갖는 것은 오직 $k=0$일 때이며 그 값은 1이다. (놀랄 일은 아니다. 아무것도 옮기지 않으면 검은 말은 당연히 제자리에 있다.)

소문항 (ii)

이제 P에서 출발하는 검은 말을 B_1, Q에서 출발하는 검은 말을 B_2라 하자. 두 말이 같은 주머니에서 끝나는 사건을 S라 하자. 이번에도 첫 번째 옮기기에서 B_1이 움직이는지에 따라 경우를 나눈다.

경우 1: B_1이 P에 남는 경우 (확률 $\frac{n-k}{n}$). 이때 B_1은 무슨 일이 있어도 P에서 끝나므로, S는 B_2가 Q의 $n+k$개 말 가운데 뽑히는 k개에 포함될 때에만 일어난다.

$$\mathrm{P}(S \mid \text{경우 1}) = \frac{k}{n+k}.$$

경우 2: B_1이 Q로 옮겨지는 경우 (확률 $\frac{k}{n}$). 이제 두 검은 말이 모두 Q의 $n+k$개 가운데 있고, S는 두 번째 추출에서 두 말을 **모두** 뽑거나 **둘 다** 뽑지 않을 때 일어난다.

> **생각해 보기** $n+k$개의 말에서 무작위로 고른 k개짜리 집합이 주어진 두 말을 모두 포함하거나, 둘 다 포함하지 않을 확률은 얼마인가?

부분집합의 개수를 센다. 가능성이 똑같은 선택은 모두 $\binom{n+k}{k}$가지이다. 두 검은 말을 모두 포함하는 선택은 나머지 $n+k-2$개에서 다른 $k-2$개를 고르는 것이고, 둘 다 포함하지 않는 선택은 $n+k-2$개의 흰 말에서 k개를 모두 고르는 것이다. 나누면

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\text{둘 다}) &= \binom{n+k-2}{k-2}\Big/\binom{n+k}{k} = \frac{k(k-1)}{(n+k)(n+k-1)}, \\ \mathrm{P}(\text{둘 다 아님}) &= \binom{n+k-2}{k}\Big/\binom{n+k}{k} = \frac{n(n-1)}{(n+k)(n+k-1)}.\end{aligned}$$

(이 식들은 $k=0,1$일 때에도 성립하며, 이때 $\mathrm{P}(\text{둘 다})=0$이다.) 따라서

$$\mathrm{P}(S \mid \text{경우 2}) = \frac{k(k-1)+n(n-1)}{(n+k)(n+k-1)}.$$

두 경우 합치기. 전확률 법칙(law of total probability)에 의해

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(S) &= \frac{n-k}{n}\cdot\frac{k}{n+k} + \frac{k}{n}\cdot\frac{k(k-1)+n(n-1)}{(n+k)(n+k-1)} \\ &= \frac{k\big[(n-k)(n+k-1)+k^2-k+n^2-n\big]}{n(n+k)(n+k-1)}.\end{aligned}$$

대괄호 안에서 $(n-k)(n+k-1) = n^2-k^2-n+k$이므로, 대괄호 전체는 $2n^2-2n = 2n(n-1)$이다. 그러므로

$$\boxed{\mathrm{P}(S) = \frac{2k(n-1)}{(n+k)(n+k-1)}}$$

최댓값 구하기. $k=0$이면 확률은 0이므로 $1\le k\le n$으로 두고 역수를 최소화한다. 양의 상수 $2(n-1)$을 제외하면

$$\frac{(n+k)(n+k-1)}{k} = k + (2n-1) + \frac{n(n-1)}{k},$$

이므로 정수 범위에서 $g(k) = k + \dfrac{n(n-1)}{k}$를 최소화하면 된다. 이웃한 값끼리 비교하면

$$g(k+1) - g(k) = 1 - \frac{n(n-1)}{k(k+1)}.$$

이 값은 $k(k+1) < n(n-1)$일 때, 즉 $k < n-1$일 때 음수이고, $k = n-1$이면 $k(k+1) = (n-1)n$이므로 정확히 0이다. 따라서 g는 $k=1$부터 $k=n-1$까지 순감소하고, $g(n) = g(n-1)$이다. 그러므로 확률이 최대가 되는 것은

$$k = n-1 \quad \text{그리고} \quad k = n,$$

일 때이며, $n\ge 2$이므로 둘 다 허용된 범위 안에 있다. $k=n-1$일 때 최댓값은

$$\frac{2(n-1)^2}{(2n-1)(2n-2)} = \frac{n-1}{2n-1},$$

이고, $k=n$일 때도 $\dfrac{2n(n-1)}{2n(2n-1)} = \dfrac{n-1}{2n-1}$로 같은 값을 준다. ($g$를 연속함수로 볼 때의 최소점은 $\sqrt{n(n-1)}$이며, 이는 $n-1$과 n 사이에 엄격하게 놓인다. 두 정수에서 값이 같다는 것은 근사가 아니라 정확한 사실이다.)

검산

- 소문항 (i)에서 $k=n$이면 $\frac{1}{2}$이다. 이때 $2n$개의 말이 모두 Q를 거치고 그중 n개가 돌아오므로, 검은 말은 어느 주머니에서 끝날 가능성도 똑같다. 맞다.
- 소문항 (ii)에서 $k=0$이면 0이 나오는데, 검은 말들이 한 번도 만나지 않으므로 옳다. $n=2, k=1$이면 $\frac{2}{3\cdot 2} = \frac{1}{3}$이 나오며, 이는 손으로 직접 확인할 수 있다.

- $2 \le n \le 7$인 경우와 모든 k에 대하여 가능한 모든 추출 쌍을 (분수로) 정확히 나열해 보았다. 두 공식 모두 모든 경우에 일치했고, (ii)의 최대점은 항상 $\{n-1, n\}$이었다. 예를 들어 $n = 4$일 때 최댓값은 $\frac{3}{7} \approx 0.4286$이다.

흔한 실수

- 두 번째 추출에서 $k/(n+k)$ 대신 k/n을 쓰는 실수: 주머니 Q에는 말이 $n+k$개로 늘어나 있다.
- 소문항 (ii)의 경우 2에서 "둘 다 뽑히지 않는" 가능성을 빠뜨리는 실수: 두 검은 말이 모두 Q에 남아도 여전히 함께 있다.
- 미적분으로 최댓값을 구한 뒤 $\sqrt{n(n-1)}$을 정수 하나로 반올림하는 실수. 이산적인 비교를 하면 최대점이 두 개이고 그 값이 같음을 알 수 있다.

STEP 너머

두 소문항의 바탕에 있는 도구는 **초기하분포**(hypergeometric distribution)이다. 이는 비복원추출(without replacement)로 뽑은 무작위 표본 안에 표시된 원소가 몇 개 있는지를 나타내는 분포이다. 첫 단계의 결과에 대해 조건을 걸고(conditioning) 그것을 두 번째 단계에 이용하는 것이 바로 전확률 법칙이며, 이와 같은 두 단계 추론은 에렌페스트(Ehrenfest) 항아리 모형처럼 용기 사이의 섞임과 확산을 다루는 모형의 바탕이 된다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)는 초기하분포와 조건부 확률을 바로 이런 방식으로 다룬다.

풀이

STEP III 2008, 문제 1

순수수학 • 비선형 연립방정식

STEP III 2008, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/08-s3-q1

핵심 아이디어

$s_k = ax^k + by^k$라 두면, 주어진 방정식들은 s_0, s_1, s_2, s_3의 값을 알려 준다. $p = x + y$, $q = xy$라 할 때 x와 y는 $t^2 - pt + q = 0$의 두 근이므로, 거듭제곱 합(power sum)은 점화식(recurrence)을 만족한다. 각 s_k는 바로 앞 항에 p를 곱한 것에서 그 앞 항에 q를 곱한 것을 뺀 값이다. 힌트의 "$x + y$를 곱하라"가 만들어 내는 것이 바로 이것이다. 그러면 네 개의 비선형 방정식이 p와 q에 대한 두 개의 **일차** 방정식이 된다. 그다음에는 이차방정식으로 x와 y를 구하고, 처음 두 방정식으로 a와 b를 구한다.

풀이

$k = 0, 1, 2, 3$에 대하여 $s_k = ax^k + by^k$라 하면 $s_0 = 1, s_1 = \frac{1}{3}, s_2 = \frac{1}{5}, s_3 = \frac{1}{7}$이다. $p = x + y$, $q = xy$로 둔다.

거듭제곱 합의 점화식

임의의 a, b, x, y와 임의의 $k \geq 1$에 대하여

$$(x + y)(ax^k + by^k) = ax^{k+1} + by^{k+1} + xy\,(ax^{k-1} + by^{k-1}),$$

이다. 교차항이 $axyx^{k-1}$과 $bxy\,y^{k-1}$이기 때문이다. 우리의 기호로 쓰면

$$s_{k+1} = p\,s_k - q\,s_{k-1}.$$

이것은 항등식이므로 연립방정식의 **모든** 해에 대하여 성립한다.

$x+y$와 xy 구하기

$k=1, k=2$를 택하고 알려진 값을 대입하면

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{3}p - q,$$
$$\frac{1}{7} = \frac{1}{5}p - \frac{1}{3}q.$$

첫째 식에서 $q = \frac{1}{3}p - \frac{1}{5}$이다. 이를 둘째 식에 대입하면

$$\frac{1}{7} = \frac{1}{5}p - \frac{1}{9}p + \frac{1}{15} \quad \Longrightarrow \quad \frac{4}{45}p = \frac{1}{7} - \frac{1}{15} = \frac{8}{105} \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{6}{7},$$

이고, 따라서 $q = \frac{2}{7} - \frac{1}{5} = \frac{3}{35}$이다. 이 일차 연립방정식의 행렬식(determinant)은 0이 아니므로 이 값들은 반드시 이렇게 정해진다. 즉 **모든** 해에서 $x+y = \frac{6}{7}$, $xy = \frac{3}{35}$이다.

x와 y 구하기

따라서 x와 y는

$$t^2 - \frac{6}{7}t + \frac{3}{35} = 0, \qquad \text{즉,} \qquad 35t^2 - 30t + 3 = 0,$$

의 두 근이고, 이를 풀면

$$t = \frac{30 \pm \sqrt{900-420}}{70} = \frac{30 \pm 4\sqrt{30}}{70} = \frac{15 \pm 2\sqrt{30}}{35}.$$

판별식(discriminant)이 양수이므로 $x \neq y$이고, $\{x, y\}$는 이 두 값을 어느 한 순서로 짝지은 것이다.

> **생각해 보기** x와 y를 알면 a와 b가 정해진다고 확신할 수 있는가?

그렇다. x와 y를 알고 나면 처음 두 방정식 $a+b=1$과 $ax+by=\frac{1}{3}$은 a와 b에 대한 일차방정식이고, 그 행렬식은 $y-x$이다. $x \neq y$이므로 이 값은 0이 아니며, 따라서 순서쌍 (a, b)는 정확히 하나 존재한다.

a와 b 구하기

$x = \frac{15+2\sqrt{30}}{35}, y = \frac{15-2\sqrt{30}}{35}$로 택하면 $x-y = \frac{4\sqrt{30}}{35}$이다. $a+b=1$과 $ax+by=\frac{1}{3}$에서 b를 소거하면 $a(x-y) = \frac{1}{3} - y$이다. 이제

$$\frac{1}{3} - y = \frac{35 - 3(15-2\sqrt{30})}{105} = \frac{6\sqrt{30}-10}{105},$$

이므로

$$a = \frac{6\sqrt{30}-10}{105} \cdot \frac{35}{4\sqrt{30}} = \frac{6\sqrt{30}-10}{12\sqrt{30}} = \frac{1}{2} - \frac{5}{6\sqrt{30}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{30}}{36},$$

이고 $b = 1-a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{30}}{36}$이다.

이들이 실제로 해임을 확인하기

지금까지는 어떤 해든 이런 꼴이어야 한다는 것만 보였으므로, 이것이 실제로 성립하는지 확인해야 한다. 만든 방법에 의해 $s_0 = 1, s_1 = \frac{1}{3}$이다. p와 q가 위의 두 일차방정식을 만족하므로, 점화식에 의해 $s_2 = ps_1 - qs_0 = \frac{1}{5}$이고, 이어서 $s_3 = ps_2 - qs_1 = \frac{1}{7}$이다. 따라서 네 방정식이 모두 성립한다.

x와 y의 역할을 바꾸면 a와 b도 서로 바뀐다. 따라서 해는 정확히 두 개이다.

$$(a, b, x, y) = \left(\frac{18 - \sqrt{30}}{36}, \frac{18 + \sqrt{30}}{36}, \frac{15 + 2\sqrt{30}}{35}, \frac{15 - 2\sqrt{30}}{35} \right)$$

그리고 여기서 $a \leftrightarrow b$와 $x \leftrightarrow y$를 동시에 바꾼 것이다. 두 해 모두에서 x, y 중 큰 값은 작은 계수와 짝을 이룬다.

검산

수치로 보면 $x \approx 0.741556$, $y \approx 0.115587$, $a \approx 0.347855$, $b \approx 0.652145$이다. 그러면 $ax + by \approx 0.333333$, $ax^2 + by^2 \approx 0.200000$, $ax^3 + by^3 \approx 0.142857$이고, 이는 기계 정밀도(machine precision) 안에서 $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}$과 일치한다. 간단한 타당성 점검도 해 보자. x와 y는 모두 $(0, 1)$에 있고, a와 b는 모두 양수이다. 이는 우변이 $[0, 1]$에서 t^{2k}의 평균값이라는 사실(아래 참고)과 잘 맞는다.

흔한 실수

- x와 y를 구하고 나서 짝짓기가 중요하다는 것을 잊는 것. a는 x와 짝을 이루므로, a와 b를 함께 바꾸지 않고 x와 y만 바꿀 수는 없다.
- 필요조건(necessary condition)을 찾고 나서 멈추는 것. 문제가 "모두 구하라"고 하므로, 모든 해가 이 꼴이라는 것과 이 값들이 실제로 네 방정식을 모두 만족한다는 것을 둘 다 보여야 한다.

STEP 너머

수 $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}$은 $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t^{2k}\,\mathrm{d}t$이다. 따라서 이 연립방정식은 7차 이하의 다항식에 대하여 정확한 규칙 $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f \approx \frac{a}{2}\left(f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})\right) + \frac{b}{2}\left(f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})\right)$를 찾으라는 문제이다. 이것이 바로 4점 **가우스–르장드르 구적법**(Gauss–Legendre quadrature)이다. 그 절점은 $\pm\sqrt{x}$와 $\pm\sqrt{y}$이고, $a \approx 0.3479$와 $b \approx 0.6521$은 잘 알려진 그 가중치이다. 여기서 한 것처럼 거듭제곱 합에서 점화식을 찾아내는 것은 신호 처리에서 쓰이는 프로니 방법(Prony's method)의 바탕이 되는 아이디어이기도 하다. 더 알고 싶다면 Süli and Mayers, *An Introduction to*

Numerical Analysis(수치해석 입문)를 읽어 보라.

풀이

STEP III 2008, 문제 2

순수수학 • 거듭제곱의 합

> **STEP III 2008, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/08-s3-q2

핵심 아이디어

$(r+1)^k - r^k$의 합은 망원급수(telescoping sum)가 되므로 항 하나만 남는다. 한편 이항정리(binomial theorem)로 각 괄호를 전개할 수도 있으며, 그러면 같은 합이 더 낮은 차수의 거듭제곱 합 $S_j(n)$들의 결합으로 바뀐다. 두 결과를 같다고 놓으면 각 S_{k-1}을 그보다 앞선 합들로부터 만들어 내는 점화식(recurrence)을 얻는다. 그리고 이 점화식이 바로 소문항 (ii)에서 다항식 구조를 파악하는 데 필요한 도구이다.

풀이

소문항 (i)

먼저 망원급수를 살펴본다. 합을 풀어 쓰면

$$\sum_{r=0}^{n}\left[(r+1)^k - r^k\right] = (1^k - 0^k) + (2^k - 1^k) + \cdots + \left((n+1)^k - n^k\right) = (n+1)^k,$$

이다. 중간의 모든 항이 소거되고, $k \geq 1$이므로 $0^k = 0$이기 때문이다.

다음으로 이항정리를 쓴다. 각 r에 대하여

$$(r+1)^k - r^k = \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}r^j = 1 + \binom{k}{1}r + \binom{k}{2}r^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}r^{k-1},$$

이다. r^k 항이 소거되기 때문이다. 이를 $r = 0, 1, \ldots, n$에 대하여 더하면, 상수 1은 $n+1$을 기여하고(r의 값이 $n+1$개이므로), $j \geq 1$인 각 r^j는 $S_j(n)$을 기여한다. 따라서

$$(n+1)^k = (n+1) + \binom{k}{1}S_1(n) + \binom{k}{2}S_2(n) + \cdots + \binom{k}{k-2}S_{k-2}(n) + \binom{k}{k-1}S_{k-1}(n).$$

마지막 계수는 $\binom{k}{k-1} = k$이다. 나머지 계수에는 대칭성 $\binom{k}{j} = \binom{k}{k-j}$를 이용하면 $S_{k-j}(n)$의 계수는 $\binom{k}{k-j} = \binom{k}{j}$이다. 특히 $S_1(n)$의 계수는 $\binom{k}{1} = \binom{k}{k-1}$이다. $kS_{k-1}(n)$만 한쪽에 남기고 나머지를 모두 반대쪽으로 옮기면

$$kS_{k-1}(n) = (n+1)^k - (n+1) - \binom{k}{2}S_{k-2}(n) - \binom{k}{3}S_{k-3}(n) - \cdots - \binom{k}{k-1}S_1(n),$$

이고, 이것이 바로 구하려던 $(*)$이다. (여기서 S_{k-1}이 우리가 다루는 합 가운데 하나가 되려면 $k \geq 2$여야 한다.)

? **생각해 보기** $j = 0$ 항을 $S_0(n)$으로 쓰지 않고 따로 다룬 이유는 무엇인가?

S_k는 양의 k에 대해서만 정의되어 있고, $r = 0$일 때의 "0^0"은 뜻이 모호하다. 상수를 따로 빼내어 $n+1$로 직접 세면 두 문제를 모두 피할 수 있으며, $(*)$에 $-(n+1)$이 홀로 나타나는 이유도 이것으로 설명된다.

$S_3(n)$. $(*)$에서 $k = 4$로 두면 $\binom{4}{2} = 6$, $\binom{4}{3} = 4$이므로

$$\begin{aligned} 4S_3(n) &= (n+1)^4 - (n+1) - 6S_2(n) - 4S_1(n) \\ &= (n+1)^4 - (n+1) - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1). \end{aligned}$$

모든 항이 인수 $n+1$을 가지므로

$$\begin{aligned} 4S_3(n) &= (n+1)\left[(n+1)^3 - 1 - n(2n+1) - 2n\right] \\ &= (n+1)\left[n^3 + 3n^2 + 3n - 2n^2 - n - 2n\right] \\ &= (n+1)(n^3 + n^2) = n^2(n+1)^2. \end{aligned}$$

따라서

$$S_3(n) = \tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2 = \big(S_1(n)\big)^2.$$

$S_4(n)$. $k = 5$로 두면 $\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10$, $\binom{5}{4} = 5$이므로

$$5S_4(n) = (n+1)^5 - (n+1) - 10S_3(n) - 10S_2(n) - 5S_1(n).$$

이번에도 S_3, S_2, S_1에 대한 식을 이용하여 인수 $n+1$을 묶어 낸다.

$$\begin{aligned} 5S_4(n) &= (n+1)\left[(n+1)^4 - 1 - \tfrac{5}{2}n^2(n+1) - \tfrac{5}{3}n(2n+1) - \tfrac{5}{2}n\right] \\ &= (n+1)\Big[n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n - \tfrac{5}{2}n^3 - \tfrac{5}{2}n^2 \\ &\qquad - \tfrac{10}{3}n^2 - \tfrac{5}{3}n - \tfrac{5}{2}n\Big] \\ &= (n+1)\left[n^4 + \tfrac{3}{2}n^3 + \tfrac{1}{6}n^2 - \tfrac{1}{6}n\right] \\ &= \tfrac{1}{6}n(n+1)\left(6n^3 + 9n^2 + n - 1\right). \end{aligned}$$

S_4도 S_2처럼 인수 $2n+1$을 가질 것으로 기대되므로, 삼차식에 $n = -\frac{1}{2}$를 대입해 본다. $-\frac{3}{4} + \frac{9}{4} - \frac{1}{2} - 1 = 0$이다. 그러므로 $2n+1$은 인수이고, $6n^3 + 9n^2 + n - 1 = (2n+1)(3n^2+3n-1)$이다. 따라서

$$S_4(n) = \tfrac{1}{30}\, n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1).$$

소문항 (ii)

k에 대한 강한 수학적 귀납법(strong induction)을 사용한다. $S_1(n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$의 차수가 2이므로 $k = 1$일 때 명제가 성립한다($k = 2$일 때도 성립한다).

어떤 $k \geq 2$에 대하여 $S_1(n), \ldots, S_{k-1}(n)$이 각각 n에 대한 다항식이고 S_j의 차수가 $j+1$이라고 가정하자. $(*)$에서 k 대신 $k+1$을 대입하면

$$(k+1)\, S_k(n) = (n+1)^{k+1} - (n+1) - \binom{k+1}{2} S_{k-1}(n) - \cdots - \binom{k+1}{k} S_1(n).$$

우변을 살펴보면 다음과 같다.

- $(n+1)^{k+1}$은 최고차항의 계수가 1인 $k+1$차 다항식이다.
- $n+1$의 차수는 1이다.
- $1 \leq j \leq k-1$인 각 $S_j(n)$은 가정에 의하여 차수가 $j+1 \leq k$인 다항식이다.

따라서 우변은 다항식이고, 그 n^{k+1} 항은 오직 $(n+1)^{k+1}$에서만 나오므로 소거될 수 없다. $k+1 \neq 0$으로 나누면 $S_k(n)$은 차수가 정확히 $k+1$인 다항식이다(최고차항의 계수는 $\frac{1}{k+1}$이다). 이로써 귀납법이 완성된다.

? 생각해 보기 다항식 $P(n)$의 "상수항"과 "계수의 합"은 각각 무엇에 해당하는가?

각각 $P(0)$과 $P(1)$이다. $S_k(n) = P(n) = a_{k+1}n^{k+1} + \cdots + a_1 n + a_0$이라 쓰자. 이 식은 $n \geq 0$인 모든 정수 n에 대하여 합 $\sum_{r=0}^{n} r^k$와 일치하므로, $n = 0$과 $n = 1$을 대입할 수 있다.

- 상수항: $k \geq 1$이므로 $a_0 = P(0) = S_k(0) = 0^k = 0$이다.
- 계수의 합: $a_{k+1} + \cdots + a_1 + a_0 = P(1) = S_k(1) = 0^k + 1^k = 1$이다.

두 결과가 모두 증명되었다.

검산

- 작은 값: $S_3(3) = 1 + 8 + 27 = 36 = \frac{1}{4} \cdot 9 \cdot 16$이고, $S_4(3) = 1 + 16 + 81 = 98 = \frac{1}{30} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 35$이다.

- 구한 답에 소문항 (ii)를 적용해 보면: $S_4(n) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$의 상수항은 0이고 계수의 합은 $\frac{6+15+10-1}{30} = 1$이다. 또한 최고차항의 계수는 귀납법이 예측한 대로 $\frac{1}{5} = \frac{1}{k+1}$이다.
- $2 \le k \le 9, 0 \le n \le 30$에 대하여 $(*)$를, $0 \le n < 200$에 대하여 두 닫힌 형태의 식을 직접 더하여 정확히 확인하였다.

흔한 실수

- $\sum 1$에서 $r = 0$ 항을 빠뜨리는 실수: 이 합은 n이 아니라 $n+1$이다.
- 공통인수 $n+1$을 먼저 묶어 내지 않고 모두 전개하는 것. 그러면 S_4를 구하는 계산이 훨씬 번거로워진다.
- 소문항 (ii)에서 차수가 "$k+1$ 이하"라고만 말하는 것. 문제는 차수가 정확히 $k+1$임을 요구하므로, n^{k+1} 항이 소거될 수 없음을 짚어야 한다.

STEP 너머

이 다항식들의 계수는 베르누이 수(Bernoulli numbers)가 결정하며, 파울하버의 공식(Faulhaber's formula)은 $S_k(n)$을 n의 거듭제곱들의 결합으로 나타내는데, 그 계수는 이항계수와 베르누이 수의 곱이다. $S_k(n)$이 최고차항이 $\frac{n^{k+1}}{k+1}$인 $k+1$차 다항식이라는 사실은 $\int_0^x t^k \, \mathrm{d}t = \frac{x^{k+1}}{k+1}$의 이산적 유사물이며, 이 생각은 유한차분법(calculus of finite differences)에서 엄밀하게 다루어진다. 이와 같은 성격의 문제를 더 풀어 보고 싶다면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)를 참고하라.

풀이

STEP III 2008, 문제 3

순수수학 • 타원의 접선과 초점

STEP III 2008, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

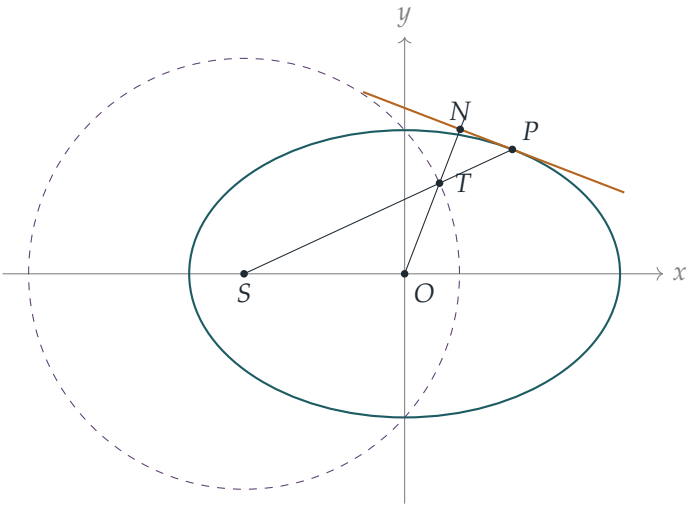
step.maths.org/questions/08-s3-q3

핵심 아이디어

이 문제는 처음부터 끝까지 두 직선에 관한 것이므로, 할 일은 두 직선의 방정식을 깔끔하게 쓰고 교점을 구하는 것이다. 직선 ON은 접선(tangent)에 수직이므로 그 방향은 접선의 법선벡터(normal vector)이고, 이는 접선의 방정식에서 바로 읽어 낼 수 있다. SP를 S에서 출발하도록 매개변수화(parametrisation)하면 교점은 한 줄 계산으로 구해지며, 이때 얻는 매개변수(parameter)가 바로 원에 관한 부분에 필요한 값이다. 그 값은 점 T가 SP 위에서 전체 길이의 몇 분의 몇 지점에 있는지를 알려 준다.

풀이

풀이 전체에서 $0 < e < 1$이다. $e^2 = 1 - b^2/a^2$이고, $a > b > 0$이므로 이 값은 0과 1 사이에 (양 끝을 제외하고) 놓인다. 또한 $\sin\theta \neq 0$이라고 가정한다. 만약 $\sin\theta = 0$이면 $P = (\pm a, 0)$이고 접선은 $x = \pm a$, $N = P$가 되며, ON과 SP가 모두 x축이 되므로 T가 정의되지 않는다.



(그림은 $a = 3, b = 2, \theta = 60°$인 경우이다. 타원(ellipse)은 청록색, P에서의 접선은 호박색이며, 점선으로 그린 원은 중심이 S이고 반지름이 a이다.)

T의 y좌표

$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$을 음함수 미분(implicit differentiation)하거나 잘 알려진 결과를 이용하면, (x_1, y_1)에서의 접선은 $xx_1/a^2 + yy_1/b^2 = 1$이다. P에서 이는

$$\frac{x\cos\theta}{a} + \frac{y\sin\theta}{b} = 1.$$

이다. 직선 $px + qy = 1$의 법선벡터는 (p, q)이므로, 접선의 법선은 $\left(\frac{\cos\theta}{a}, \frac{\sin\theta}{b}\right)$이고, ab를 곱하면 $(b\cos\theta, a\sin\theta)$이다. 직선 ON은 O를 지나고 이 방향을 가지므로(접선에 수직이므로) 그 위의 점은 $\mu(b\cos\theta, a\sin\theta)$이고, 방정식은

$$a\sin\theta\, x = b\cos\theta\, y. \tag{1}$$

이다.

이제 SP를 S에서 출발하도록 매개변수화하자. 그 위의 점은

$$\big(-ea + \lambda a(\cos\theta + e),\ \lambda b\sin\theta\big),$$

이고, S에서 $\lambda = 0$, P에서 $\lambda = 1$이다. 이를 (1)에 대입하고 인수 $\sin\theta \neq 0$을 약분하면

$$a\big(-ea + \lambda a(\cos\theta + e)\big) = \lambda b^2\cos\theta$$
$$\lambda\big(a^2\cos\theta + a^2e - b^2\cos\theta\big) = ea^2.$$

이다. 바로 여기서 초점(focus)에 관한 조건이 제 몫을 한다. $a^2 - b^2 = a^2e^2$이므로 괄호 안은 $a^2e^2\cos\theta + a^2e = a^2e(1 + e\cos\theta)$이다. $a^2e \neq 0$으로 나누면

$$\lambda = \frac{1}{1 + e\cos\theta},$$

이고, $1+e\cos\theta \geq 1-e > 0$이므로 이 나눗셈은 정당하다. 따라서 T의 y좌표는

$$y_T = \lambda b\sin\theta = \frac{b\sin\theta}{1+e\cos\theta},$$

이며, 이것이 구하려던 결과이다. (나중을 위해 덧붙이면, (1)로부터 $x_T = \dfrac{b\cos\theta}{a\sin\theta}\,y_T = \dfrac{a(1-e^2)\cos\theta}{1+e\cos\theta}$이다.)

T는 중심이 S이고 반지름이 a인 원 위에 있다

생각해 보기 선분 ST가 SP의 몇 분의 몇인지는 이미 안다. 그 밖에 무엇이 더 필요할까?

$\lambda > 0$이고 $T = S + \lambda(P-S)$이므로 $ST = \lambda SP$이다. 따라서 P의 초점 거리(focal distance)인 길이 SP만 구하면 된다.

$$\begin{aligned} SP^2 &= (a\cos\theta + ea)^2 + b^2\sin^2\theta \\ &= a^2\left[\cos^2\theta + 2e\cos\theta + e^2 + (1-e^2)\sin^2\theta\right] \\ &= a^2\left[(\cos^2\theta+\sin^2\theta) + 2e\cos\theta + e^2(1-\sin^2\theta)\right] \\ &= a^2\left[1 + 2e\cos\theta + e^2\cos^2\theta\right] = a^2(1+e\cos\theta)^2, \end{aligned}$$

여기서 둘째 줄에서 $b^2 = a^2(1-e^2)$을 이용하였다. $a > 0$이고 $1+e\cos\theta > 0$이므로 $SP = a(1+e\cos\theta)$이다. 따라서

$$ST = \lambda SP = \frac{a(1+e\cos\theta)}{1+e\cos\theta} = a,$$

이므로 T는 중심이 S이고 반지름이 a인 원 위에 있다.

(좌표로 직접 계산하고 싶다면, $x_T + ea = \dfrac{a(\cos\theta+e)}{1+e\cos\theta}$이고, $(x_T+ea)^2 + y_T^2$은 위의 SP^2와 똑같은 계산으로 a^2이 된다.)

검산

- $\theta = \frac{\pi}{2}$이면 $P = (0,b)$이고 접선은 $y = b$이므로, ON은 y축이고 $T = (0, y_T)$이며 공식에서 $y_T = b$이다. 그러면 $ST^2 = e^2a^2 + b^2 = a^2$으로, 예상대로이다.
- $a = 3$, $b = 2$, $\theta = 60°$(그림의 경우)일 때 두 직선의 교점을 수치로 구하면 $T \approx (0.4857, 1.2618)$이다. 공식은 $y_T = \sqrt{3}/(1+\sqrt{5}/6) \approx 1.2618$을 주고, $ST \approx 3.0000$이다.
- 원이 되는 극한 $e \to 0$에서는 $S \to O$, $T \to P$이며, 이 점은 실제로 O를 중심으로 하는 반지름 a인 원 위에 있다.

흔한 실수

- ON을 접선에 수직이 아니라 평행하게 잡는 것. ON의 방향은 법선 $(b\cos\theta, a\sin\theta)$이지 $(-a\sin\theta, b\cos\theta)$가 아니다.
- $a^2 - b^2$을 a^2e^2으로 바꾸는 것을 잊어, λ에 대한 식이 간단해지지 않는 것.
- 아무 언급 없이 $\sin\theta$로 나누는 것. $\sin\theta = 0$인 경우에는 실제로 성립하지 않는다.

STEP 너머

결과 $SP = a(1 + e\cos\theta) = a + ex_P$는 초점–준선 성질이 모습을 바꾼 것이다. 즉 초점까지의 거리는 준선(directrix) $x = -a/e$까지의 거리의 e배이다. 원뿔곡선(conic)을 초점을 중심으로 한 극좌표(polar coordinates)로 $r = \ell/(1 + e\cos\phi)$와 같이 나타내는 것이 대학 1학년 역학에서 케플러(Kepler) 궤도를 기술하는 방법이며, 여기서도 같은 분모 $1 + e\cos\theta$가 나타났다. 원뿔곡선의 기하와 STEP 스타일의 문제를 더 많이 보려면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*를, 궤도에 대해서는 Kleppner와 Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*를 보라.

풀이

STEP III 2008, 문제 4

순수수학 • 역쌍곡선함수 부등식

STEP III 2008, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/08-s3-q4

핵심 아이디어

$x = \cosh y$로 놓는다. 반각 공식(half-angle formula)을 쓰면 $\tanh(y/2)$가 x에 대한 대수함수(algebraic function)로 바뀌므로, tanh에 관한 자명한 부등식(inequality)이 arcosh에 관한 자명하지 않은 부등식이 된다. 그다음부터 이 문제는 작은 기계 하나를 돌린다. 부등식을 1부터 x까지 적분하고 정리하면 더 정밀한 부등식을 얻는다. 이 기계를 두 번 돌리면 (ii)가, 이어서 (iii)이 나온다.

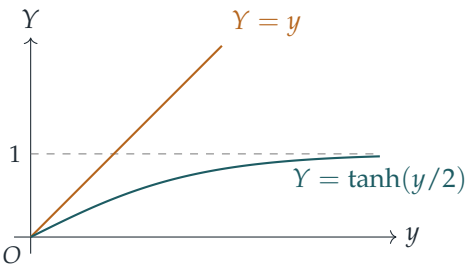
풀이

이 풀이 전체에서 $x \geq 1$에 대하여 $A(x) = \operatorname{arcosh} x$, $S(x) = \sqrt{x^2 - 1}$로 쓴다. 앞으로 필요한 두 도함수(derivative)는 다음과 같다.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{arcosh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sqrt{x^2 - 1} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \qquad (x > 1).$$

소문항 (i)

곡선 $Y = \tanh(y/2)$는 원점을 기울기(gradient) $\frac{1}{2}$로 지나고, $y > 0$에서 위로 볼록(concave)이며, 결코 1에 도달하지 않는다. 반면 직선 $Y = y$의 기울기는 1이다.



모든 $y > 0$에 대하여 직선은 곡선보다 위에 있다. 이를 엄밀하게 보이기 위해 $g(t) = t - \tanh t$로 놓자. 그러면 $g(0) = 0$이고

$$g'(t) = 1 - \operatorname{sech}^2 t = \tanh^2 t > 0 \quad \text{단, } t > 0,$$

이므로 g는 순증가(strictly increasing)하고, $t > 0$이면 $\tanh t < t$이다. $t = y/2$로 놓으면

$$\tanh(y/2) < \tfrac{1}{2}y < y \qquad (y > 0).$$

이제 $x > 1$이라 하고 $y = \operatorname{arcosh} x$로 놓으면 $y > 0$, $\cosh y = x$이고 $\sinh y = +\sqrt{x^2 - 1}$이다($y > 0$이므로 양수이다). $\sinh y = 2\sinh \frac{y}{2}\cosh \frac{y}{2}$와 $1 + \cosh y = 2\cosh^2 \frac{y}{2}$를 이용하면

$$\tanh \frac{y}{2} = \frac{\sinh y}{1 + \cosh y} = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x + 1} = \frac{x^2 - 1}{(x+1)\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

따라서 $y > \tanh(y/2)$는

$$\operatorname{arcosh} x > \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 1}} \qquad (x > 1),$$

이 되고, 이것이 바로 $(*)$이다.

소문항 (ii)

$x > 1$을 고정하고, t를 변수로 하여 $(*)$를 $[1, x]$에서 적분한다.

> **생각해 보기** $(*)$의 우변은 분모에 $\sqrt{t^2 - 1}$이 있다. $t = 1$부터 적분해도 괜찮을까? 또 적분한 뒤에도 부등식이 **등호 없이** 성립할까?

두 가지 모두 그렇다. $t > 1$일 때 $\dfrac{t - 1}{\sqrt{t^2 - 1}} = \sqrt{\dfrac{t - 1}{t + 1}}$이고, 이는 $t \to 1$일 때 0으로 수렴하므로 양변 모두 $[1, x]$에서 연속이다. 두 변의 차는 연속이고 $(1, x]$에서 순양수이므로, 그 차를 $[1, x]$에서 적분한 값도 순양수이다.

좌변은 $u = \operatorname{arcosh} t$로 두고 부분적분(integration by parts)하면

$$\int_1^x \operatorname{arcosh} t \, \mathrm{d}t = \Big[t \operatorname{arcosh} t\Big]_1^x - \int_1^x \frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}} \, \mathrm{d}t = x\,A(x) - S(x),$$

이다. $\operatorname{arcosh} 1 = 0$이고 $\sqrt{1^2-1} = 0$이기 때문이다.

우변은 두 개의 기본적인 적분으로 나뉜다.

$$\int_1^x \frac{t-1}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t - \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t = S(x) - A(x).$$

그러므로

$$x\,A(x) - S(x) > S(x) - A(x) \quad\Longrightarrow\quad (x+1)A(x) > 2S(x).$$

$x+1>0$으로 나누고 소문항 (i)에서처럼 정리하면

$$\operatorname{arcosh} x > \frac{2\sqrt{x^2-1}}{x+1} = 2\,\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad (x>1),$$

이 되어 증명이 끝난다. 이것은 정확히 $(*)$의 하계의 두 배이다.

소문항 (iii)

소문항 (ii)에 따르면 $t>1$일 때 $\operatorname{arcosh} t > 2\cdot\dfrac{t-1}{\sqrt{t^2-1}}$이다. 즉 $(*)$와 같은 우변을 두 배 한 것이다. 그러므로 같은 기계를 다시 돌린다. 앞에서와 같은 근거로 $[1,x]$에서 적분하고 이미 구한 두 적분을 이용하면

$$x\,A(x) - S(x) > 2\big(S(x) - A(x)\big) \quad\Longrightarrow\quad (x+2)A(x) > 3S(x).$$

$x+2>0$이므로

$$\operatorname{arcosh} x > 3\,\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+2} \qquad (x>1),$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

> **생각해 보기** 왜 여기서 멈출까? 한 번 더 적분할 수는 없을까?

이 기계가 돌아가려면 우변이 적분을 알고 있는 $\dfrac{t-1}{\sqrt{t^2-1}}$의 상수배여야 한다. 새 하계 $3\sqrt{t^2-1}/(t+2)$는 그런 꼴이 아니므로, 이 방법은 여기서 바닥난다.

독립적인 검증으로("otherwise" 경로), $f(x) = A(x) - 3S(x)/(x+2)$로 놓자. 그러면 $f(1)=0$이고, 몫의 미분법(quotient rule)에 의해

$$f'(x) = \frac{(x+2)^2 - 3x(x+2) + 3(x^2-1)}{(x+2)^2\sqrt{x^2-1}} = \frac{(x-1)^2}{(x+2)^2\sqrt{x^2-1}} > 0 \quad (x>1),$$

이므로 f는 순증가하고, 앞에서와 마찬가지로 $x>1$이면 $f(x)>0$이다.

검산

$x = 2$에서 $\operatorname{arcosh} 2 = \ln(2 + \sqrt{3}) \approx 1.3170$이고, 세 하계는 $1/\sqrt{3} \approx 0.577$, $2/\sqrt{3} \approx 1.155$, $3\sqrt{3}/4 \approx 1.299$이다. 각 하계는 앞의 것보다 나으며, 모두 1.3170보다 작다. $x = 1$ 근처에서는 하계가 매우 정확해진다. $x = 1.001$에서 $\operatorname{arcosh} x \approx 0.04471763$인데, (ii)의 하계는 약 7×10^{-6}만큼, (iii)의 하계는 겨우 약 10^{-9}만큼 모자란다. 각 하계가 $x - 1$에 대하여 더 높은 차수까지 $\operatorname{arcosh} x$와 일치하기 때문이다. 두 적분을 수치적으로 검증하고($x = 1.5, 2, 5$에서 중점 구적법(midpoint quadrature)으로), 세 부등식을 무작위로 고른 10 000개의 $x > 1$에서 확인했지만 어긋나는 경우는 없었다.

흔한 실수

- 부호를 정하지 않고 $\sinh(\operatorname{arcosh} x) = \pm\sqrt{x^2 - 1}$로 두는 것. $\operatorname{arcosh} x > 0$이므로 양의 제곱근이다.
- 1 대신 0부터 적분하는 것. arcosh는 $x \geq 1$에서만 정의되며, 아래끝이 1이어야 경계항이 사라진다.
- 적분한 부등식이 왜 여전히 등호 없이 성립하는지 설명하지 않는 것.

STEP 너머

하계가 점점 좋아지는 것은 적분할 때마다 $x = 1$에서 오차가 사라지는 차수가 하나씩 높아지기 때문이다. 이것은 점점 더 정확해지는 유리식 꼴 근사들의 수열(sequence)의 시작이며, 파데 근사(Padé approximants)와 가까운 친척이다. 풀이 전체에서 쓴 원리($f(a) = 0$이고 $f' > 0$이면, 또는 이를 적분한 형태이면, $f > 0$)는 모습을 바꾼 평균값 정리(mean value theorem)이며, 해석학의 상당 부분이 이 원리 위에 서 있다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 평균값 정리와 적분을 엄밀하게 다룬다.

풀이

STEP III 2008, 문제 5

순수수학 • 점화식

STEP III 2008, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/08-s3-q5

핵심 아이디어

양 $\mathrm{T}_n^2 - \mathrm{T}_{n-1}\mathrm{T}_{n+1}$은 이 점화식(recurrence)의 **불변량**(invariant)이다. n을 하나 늘리면 점화식에 의해 $\mathrm{T}_{n+1} + \mathrm{T}_{n-1}$을 $2x\mathrm{T}_n$으로 바꿀 수 있으므로 차가 사라진다. 불변량이 0이면 이웃한 항의 비가 모두 같으므로 수열은 등비수열(geometric sequence)이 된다. 이제 등비수열을 점화식에 대입하면 공비(common ratio)가 어떤 이차방정식(quadratic)의 근으로 결정된다.

풀이

이 풀이 전체에서 x는 고정되어 있고, $\mathrm{T}_n(x)$를 T_n으로, $\mathrm{f}(x)$를 f로 쓴다. 점화식 $(*)$는 다음을 뜻한다.

$$\mathrm{T}_{n+1} + \mathrm{T}_{n-1} = 2x\,\mathrm{T}_n \qquad (n \geq 1).$$

불변량

$n \geq 1$에 대하여 $D_n = \mathrm{T}_n^2 - \mathrm{T}_{n-1}\mathrm{T}_{n+1}$이라 하자. 모든 $n \geq 1$에 대하여 $D_n = f$임을 수학적 귀납법(induction)으로 증명한다.

기저 단계(*base case*). $D_1 = \mathrm{T}_1^2 - \mathrm{T}_0\mathrm{T}_2$이고, 이는 정의에 의해 f이다.

귀납 단계(*inductive step*). 어떤 $k \geq 1$에 대하여 $D_k = f$라 가정하자. 그러면

$$\begin{aligned} D_{k+1} - D_k &= \mathrm{T}_{k+1}^2 - \mathrm{T}_k\mathrm{T}_{k+2} - \mathrm{T}_k^2 + \mathrm{T}_{k-1}\mathrm{T}_{k+1} \\ &= \mathrm{T}_{k+1}\big(\mathrm{T}_{k+1} + \mathrm{T}_{k-1}\big) - \mathrm{T}_k\big(\mathrm{T}_{k+2} + \mathrm{T}_k\big) \\ &= \mathrm{T}_{k+1} \cdot 2x\mathrm{T}_k - \mathrm{T}_k \cdot 2x\mathrm{T}_{k+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

이다. 여기서 셋째 줄에서는 첫째 괄호에 $n = k$인 $(*)$를, 둘째 괄호에 $n = k+1$인 $(*)$를 사용하였다($k \geq 1$이므로 둘 다 사용할 수 있다). 따라서 $D_{k+1} = D_k = f$이고, 수학적 귀납법에 의해

$$\mathrm{T}_n^2 - \mathrm{T}_{n-1}\mathrm{T}_{n+1} = f \quad \text{모든} n \geq 1$$

이 성립한다. 이로써 증명이 끝난다.

$f \equiv 0$인 경우

먼저 $f = 0$이 $r = \mathrm{T}_1/\mathrm{T}_0$에 대하여 무엇을 말해 주는지 살펴보자. $n = 1$인 $(*)$에 의해 $\mathrm{T}_2 = 2x\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_0$이므로, $\mathrm{T}_1 = r\mathrm{T}_0$으로 쓰면

$$f = \mathrm{T}_1^2 - \mathrm{T}_0(2x\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_0) = \mathrm{T}_0^2\big(r^2 - 2xr + 1\big)$$

이다. 그러므로 $\mathrm{T}_0 \neq 0$이므로

$$f = 0 \iff r^2 = 2xr - 1. \tag{†}$$

> **생각해 보기** 불변량에 의하면 $\mathrm{T}_n^2 = \mathrm{T}_{n-1}\mathrm{T}_{n+1}$이므로 비가 모두 같다. 그냥 나누면 되지 않을까?

T_{n-1}로 나누려면 그것이 0이 아니어야 하고, 이를 보이려면 추가 논증이 필요하다. "비가 모두 같다"는 생각으로 답을 추측한 다음, (†)를 이용하여 점화식 자체로 증명하는 편이 더 깔끔하다.

주장. 모든 $n \geq 0$에 대하여 $\mathrm{T}_n = \mathrm{T}_0\, r^n$이다.

증명. 강한 귀납법(strong induction)을 사용한다(이웃한 두 경우를 한꺼번에 다룬다). $n = 0$일 때 주장은 자명하게 성립하고, $n = 1$일 때는 r의 정의에 의해 $\mathrm{T}_1 = r\mathrm{T}_0$이므로 성립한다. $k \geq 1$에 대하여 $n = k-1$과 $n = k$일 때 주장이 성립한다고 가정하자. 그러면 $(*)$에 의해

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_{k+1} &= 2x\mathrm{T}_k - \mathrm{T}_{k-1} = 2x\mathrm{T}_0 r^k - \mathrm{T}_0 r^{k-1} \\ &= \mathrm{T}_0 r^{k-1}\big(2xr - 1\big) = \mathrm{T}_0 r^{k-1} \cdot r^2 = \mathrm{T}_0 r^{k+1} \end{aligned}$$

이고, 넷째 단계에서 (†)를 사용하였다. 따라서 $n = k+1$일 때도 주장이 성립하고, 수학적 귀납법에 의해 모든 $n \geq 0$에 대하여 다음이 성립한다.

$$\boxed{\mathrm{T}_n(x) = \mathrm{T}_0(x)\left(\mathrm{r}(x)\right)^n}$$

$\mathrm{r}(x)$의 가능한 꼴

(†)에 의해 r은 $r^2 - 2xr + 1 = 0$을 만족하므로, 근의 공식(quadratic formula)에 의해

$$\mathrm{r}(x) = x + \sqrt{x^2-1} \qquad \text{또는} \qquad \mathrm{r}(x) = x - \sqrt{x^2-1}$$

이다. 역으로 어느 쪽을 택하든 (†)를 만족하므로 $f \equiv 0$이고, 수열 $\mathrm{T}_0 r^n$은 실제로 $(*)$를 만족한다. 두 근의 곱은 1이므로 두 근은 서로 역수이다. $|x| < 1$이면 두 근은 복소수 $x \pm \mathrm{i}\sqrt{1-x^2}$이고, $x = \cos\theta$로 쓰면 두 근은 $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\theta}$가 되며 $\mathrm{T}_n = \mathrm{T}_0 \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}n\theta}$이다.

검산

- 체비쇼프(Chebyshev) 다항식 $\mathrm{T}_0 = 1, \mathrm{T}_1 = x, \mathrm{T}_2 = 2x^2 - 1$을 택하면 $f = x^2 - (2x^2 - 1) = 1 - x^2$이고, 실제로 모든 n에 대하여 $\cos^2 n\theta - \cos(n-1)\theta\cos(n+1)\theta = \sin^2\theta$이다. $x = \frac{3}{7}$이면 D_n의 처음 열네 개 값이 모두 $\frac{40}{49}$이다.
- $r = 2$로 택하면 $x = \frac{1}{2}(2 + \frac{1}{2}) = \frac{5}{4}$이고, $\mathrm{T}_0 = 1$, $\mathrm{T}_1 = 2$로 두자. 점화식에 의해 $\mathrm{T}_2 = \frac{5}{2}\cdot 2 - 1 = 4$, $\mathrm{T}_3 = \frac{5}{2}\cdot 4 - 2 = 8$이므로, 주장대로 2의 거듭제곱이 나온다. 또한 $x - \sqrt{x^2-1} = \frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$는 다른 한 근이다.

흔한 실수

- $n = 0$인 $(*)$를 적용하는 것: 점화식은 $n = 1$부터 시작하므로 기저 단계는 D_0이 아니라 D_1이어야 한다(D_0은 정의조차 되지 않는다).
- T_{n-1}이 0이 아님을 확인하지 않고 $\mathrm{T}_n^2 = \mathrm{T}_{n-1}\mathrm{T}_{n+1}$을 T_{n-1}로 나누는 것.

STEP 너머

상수계수 선형 점화식(linear recurrence with constant coefficients)의 해는 $\alpha r_1^n + \beta r_2^n$ 꼴이며, 여기서 r_1, r_2는 특성방정식(characteristic equation)의 근이고, 이 문제에서 특성방정식은 $r^2 - 2xr + 1 = 0$이다. 조건 $f = 0$은 정확히 등비수열 항 하나만 남는 경우를 골라내며, 일반적으로 f는 $\alpha\beta$의 상수배이다. 불변량 D_n은 이계 미분방정식(second-order differential equation)의 론스키안(Wronskian)의 이산판이라 할 수 있는데, 론스키안은 $y'' + q(x)y = 0$에 대하여 상수이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정

식)에서 론스키안을 다루고, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에는 STEP 스타일의 점화식 문제가 더 실려 있다.

풀이

STEP III 2008, 문제 6

순수수학 • 일계 미분방정식

STEP III 2008, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/08-s3-q6

핵심 아이디어

각 방정식은 y를 x와 기울기(slope) p로 직접 나타내지만, p에 대해 풀려 있지 않으므로 그냥 적분할 수는 없다. x에 대해 미분하면 y가 사라지고($\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = p$이므로) x, p, $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$ 사이의 관계식이 남는다. 이 관계식을 뒤집으면 p의 함수로서의 x에 대한 **선형**(linear) 일계(first-order) 방정식이 되고, 이는 적분인자(integrating factor)로 풀 수 있다. 그런 다음 $x(p)$를 원래 방정식에 다시 대입하여 y를 구한다.

풀이

소문항 (i)

$y = p^2 + 2xp$를 x에 대해 미분한다. 이때 p^2에는 연쇄법칙(chain rule)을, $2xp$에는 곱의 미분법(product rule)을 쓰고, $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$를 p로 바꾼다.

$$p = 2p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + 2p + 2x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \quad \Longrightarrow \quad -p = (2p + 2x)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}.$$

? **생각해 보기** $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$를 뒤집어서 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}p$를 얻어도 되는가?

$\mathrm{d}p/\mathrm{d}x \neq 0$이어야 한다. 위 식을 보면 $p \neq 0$인 곳에서는 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$와 $2p + 2x$가 모두 0이 아니다. (어차피 p로 나누므로 처음부터 끝까지 $p \neq 0$이 필요하다.) 따라서

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} = -\frac{2p + 2x}{p} = -2 - \frac{2x}{p},$$

로 쓸 수 있고, 이것이 요구된 결과이다.

이를 정리하면 x에 대한 선형 방정식이 된다.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} + \frac{2}{p}x = -2.$$

적분인자는 $\mathrm{e}^{\int 2/p\,\mathrm{d}p} = p^2$이고, 양변에 곱하면

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}(p^2x) = -2p^2 \quad\Longrightarrow\quad p^2x = -\tfrac{2}{3}p^3 + A \quad\Longrightarrow\quad x = -\tfrac{2}{3}p + Ap^{-2},$$

이다. 여기서 A는 임의의 상수이다. 이것이 문제에서 제시한 결과이다.

이제 $x = 2$일 때 $p = -3$이라는 조건을 쓰면

$$2 = -\tfrac{2}{3}(-3) + \frac{A}{9} = 2 + \frac{A}{9},$$

이므로 $A = 0$이고 $x = -\frac{2}{3}p$, 즉 $p = -\frac{3}{2}x$이다. 이를 원래 방정식에 대입하면

$$y = p^2 + 2xp = \tfrac{9}{4}x^2 + 2x\left(-\tfrac{3}{2}x\right) = \tfrac{9}{4}x^2 - 3x^2,$$

이므로

$$y = -\tfrac{3}{4}x^2.$$

검산해 보면 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = -\frac{3}{2}x$로 실제로 p와 같고, $x = 2$에서 그 값은 -3이다.

소문항 (ii)

여기서는 $\ln p$가 나오므로 $p > 0$이다. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}(p\ln p) = \ln p + 1$을 이용하여 $y = 2xp + p\ln p$를 x에 대해 미분하면

$$p = 2p + 2x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + (\ln p + 1)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \quad\Longrightarrow\quad -p = (2x + \ln p + 1)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}.$$

앞에서와 마찬가지로 $p \neq 0$이면 반드시 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x \neq 0$이므로

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} = -\frac{2x + \ln p + 1}{p} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} + \frac{2}{p}x = -\frac{\ln p + 1}{p}.$$

적분인자는 이번에도 p^2이다.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}(p^2x) = -p\ln p - p.$$

$u = \ln p$, $\mathrm{d}v = p\,\mathrm{d}p$로 놓고 부분적분(integration by parts)하면

$$\int p\ln p\,\mathrm{d}p = \tfrac{1}{2}p^2\ln p - \int \tfrac{1}{2}p\,\mathrm{d}p = \tfrac{1}{2}p^2\ln p - \tfrac{1}{4}p^2,$$

이므로

$$\begin{aligned} p^2x &= -\tfrac{1}{2}p^2\ln p + \tfrac{1}{4}p^2 - \tfrac{1}{2}p^2 + B \\ &= -\tfrac{1}{2}p^2\ln p - \tfrac{1}{4}p^2 + B, \end{aligned}$$

이고

$$x = -\tfrac{1}{2}\ln p - \tfrac{1}{4} + Bp^{-2}.$$

$x = -\frac{1}{4}$일 때 $p = 1$이라는 조건을 쓰면 $-\frac{1}{4} = 0 - \frac{1}{4} + B$이므로 $B = 0$이고

$$x = -\tfrac{1}{2}\ln p - \tfrac{1}{4},$$

이다. 이것이 보이라고 한 결과이다.

y를 구하기 위해, 이 식이 $\ln p = -2x - \frac{1}{2}$를 뜻한다는 데 주목하자. 모든 곳에 p를 대입하는 것보다 이것을 원래 방정식에 대입하는 편이 더 빠르다.

$$y = 2xp + p\left(-2x - \tfrac{1}{2}\right) = -\tfrac{1}{2}p,$$

그리고 $p = \mathrm{e}^{-2x-1/2}$이므로

$$y = -\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x-\frac{1}{2}}.$$

검산: $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-2x-\frac{1}{2}} = p$로 마땅히 그래야 하는 대로이고, $x = -\frac{1}{4}$에서 그 값은 $\mathrm{e}^0 = 1$이다.

검산

각 소문항에서 최종적으로 얻은 y를 미분하여, 그 도함수가 실제로 사용한 p와 같은지 확인한다. $y = -\frac{3}{4}x^2$이면 $p = -\frac{3}{2}x$이고, $p^2 + 2xp = \frac{9}{4}x^2 - 3x^2 = y$이다. 소문항 (ii)에서 $x = 0$일 때 $p = \mathrm{e}^{-1/2} \approx 0.6065$이고 $2xp + p\ln p = 0.6065 \times (-0.5) \approx -0.3033 = y(0)$이다. 또한 수치 검산을 통해, 임의로 고른 A와 B 값에 대해 일반적인 매개변수 곡선(parametric curve) $(x(p), y(p))$의 기울기 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$가 p와 같음을 확인하였다.

흔한 실수

- 좌변의 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$가 p라는 사실을 잊어서, 소거되고 $-p$가 남는 것을 보지 못하는 실수.
- 초기 조건(initial condition)을 쓰기 전에 적분상수(constant of integration)를 빠뜨리는 실수. 여기서는 마침 그 값이 0이 되지만, 그것은 실제로 구해 본 뒤에야 알 수 있다.
- 소문항 (ii)에서 $p\ln p$를 x에 대해 미분할 때 $\ln p$만 쓰고, 인수 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$와 추가 항 $+1$을 빠뜨리는 실수.

STEP 너머

$y = xf(p) + g(p)$ 꼴의 방정식을 달랑베르(d'Alembert) 방정식(또는 라그랑주(Lagrange) 방정식)이라 하고, 특수한 경우인 $y = xp + g(p)$를 클레로(Clairaut) 방정식이라 한다. p를

독립변수(independent variable)로 다루는 방법은 이 모든 방정식에 통한다. 이 방정식들은 **특이해**(singular solutions)를 가질 수도 있는데, 특이해는 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$로 나누었던 곳에서 생기며 일반해(general solution)들이 이루는 곡선족의 포락선(envelope)이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 일계 방정식과 그 풀이 방법을 다룬다.

풀이

STEP III 2008, 문제 7

순수수학 • 복소수와 기하

STEP III 2008, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/08-s3-q7

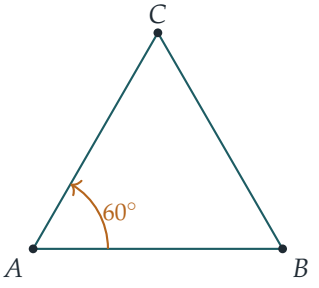
핵심 아이디어

아르강 도표(Argand diagram)에서 $e^{i\pi/3}$를 곱하는 것은 반시계 방향으로 $60°$ 회전(rotation)하는 것이다. 정삼각형(equilateral triangle)은 정확히 한 변을 한 꼭짓점을 중심으로 $60°$ 회전한 것이므로, 처음 관계식은 "정삼각형"이라는 조건을 a, b, c에 대한 일차방정식으로 바꾸어 준다. 그다음부터 두 소문항은 모두 장부 정리에 불과하다. 새로운 점을 모두 원래 점들로 나타낸 뒤, 원하는 조건을 확인하면 된다. 그 조건은 평행사변형(parallelogram)의 경우 $p + r = q + s$이고, 정삼각형의 경우 처음 관계식 그 자체이다.

풀이

처음 관계식

$\omega = e^{i\pi/3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$라 하자. ABC가 정삼각형이므로 AC는 AB와 길이가 같고, 그것과 $60°$의 각을 이룬다. 삼각형이 반시계 방향으로 기술되므로, $\overrightarrow{AB}$에서 $\overrightarrow{AC}$로 **반시계 방향으로** 돌아간다. 따라서 $\overrightarrow{AC}$는 $\overrightarrow{AB}$를 $+60°$만큼 회전한 것이다.



$$c-a=\omega(b-a)=\tfrac{1}{2}(b-a)+\tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}(b-a),$$
$$2c=2a+(b-a)+\mathrm{i}\sqrt{3}(b-a)=(a+b)+\mathrm{i}\sqrt{3}(b-a),$$

이것이 구하는 결과이다.

삼각형이 시계 방향으로 기술되면 $\overrightarrow{AC}$는 $\overrightarrow{AB}$를 $-60°$만큼 회전한 것이므로, $\bar{\omega}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$에 대하여 $c-a=\bar{\omega}(b-a)$이다. 같은 계산으로

$$2c=(a+b)-\mathrm{i}\sqrt{3}(b-a).$$

를 얻는다. 역(converse)으로, 두 관계식 중 하나를 만족하는 c는 모두 ABC를 정삼각형으로 만든다. 각 관계식이 $c-a=\omega^{\pm1}(b-a)$와 동치이기 때문이다. 따라서 어떤 삼각형이 정삼각형임을 **보이려면** 이 관계식 중 하나를 확인하는 것으로 충분하다.

소문항 (i)

네 꼭짓점은 우리가 고를 수 있고, 각각은 해당 변의 어느 쪽에 두어도 된다. 꼭짓점이 c의 역할을 하도록 처음 결과를 이용하여 다음과 같이 놓자.

$$\begin{aligned}
2p&=(d+e)+\mathrm{i}\sqrt{3}(e-d) && (D,E,P\text{ 반시계 방향}),\\
2q&=(e+f)-\mathrm{i}\sqrt{3}(f-e) && (E,F,Q\text{ 시계 방향}),\\
2r&=(f+g)+\mathrm{i}\sqrt{3}(g-f) && (F,G,R\text{ 반시계 방향}),\\
2s&=(g+d)-\mathrm{i}\sqrt{3}(d-g) && (G,D,S\text{ 시계 방향}).
\end{aligned}$$

처음에 한 작업에 의해 PDE, QEF, RFG, SGD는 각각 정삼각형이 된다.

> ? **생각해 보기** 모든 삼각형을 변의 같은 쪽에 두지 않고, 왜 방향을 번갈아 바꾸는가?

직접 해 보자. $PQRS$가 평행사변형일 필요충분조건은 $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}$, 즉 $q-p=r-s$, 곧 $p+r=q+s$이다. (이는 대각선 PR과 QS의 중점이 같다는 뜻이다.) 위와 같이 선택하면

$$2(p+r)=(d+e+f+g)+\mathrm{i}\sqrt{3}\,(e-d+g-f),$$
$$2(q+s)=(d+e+f+g)-\mathrm{i}\sqrt{3}\,(f-e+d-g)=(d+e+f+g)+\mathrm{i}\sqrt{3}\,(e-d+g-f).$$

이다. 두 값이 같으므로 $p+r=q+s$이고 $PQRS$는 평행사변형이다. 만약 모두 "+" 부호를 썼다면 허수 부분은 $\mathrm{i}\sqrt{3}(e-d+g-f)$와 $\mathrm{i}\sqrt{3}(f-e+d-g)$가 되었을 것이다. 이 둘은 $d+f=e+g$일 때만, 즉 $DEFG$가 이미 평행사변형일 때만 일치한다. 부호를 번갈아 쓰는 것이 바로 모든 사각형에 대하여 $\sqrt{3}$ 항들을 맞추어 주는 것이다.

(어떤 사각형에서는 네 점이 우연히 한 직선 위에 있을(collinear) 수도 있는데, 이때는 퇴화된(degenerate) 평행사변형이 된다. 이 경우에도 조건 $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}$는 여전히 성립한다.)

소문항 (ii)

LMN이 시계 방향으로 기술되면 도형 전체를 실수축에 대하여 대칭이동한다(즉 켤레복소수(complex conjugate)를 취한다). 대칭이동은 정삼각형, 무게중심(centroid), 그리고 변 위의 삼각형이 바깥쪽으로 그려졌는지 여부를 보존하므로, LMN이 **반시계 방향으로** 기술되는 경우만 다루면 충분하다.

그러면 N은 방향이 있는 변 $L \to M$의 왼쪽에 있고, LM 위의 바깥쪽 삼각형 LMX는 꼭짓점 X가 오른쪽에 있으므로 L, M, X는 시계 방향으로 기술된다.

$$2x = (l+m) - \mathrm{i}\sqrt{3}(m-l).$$

LMX의 무게중심은

$$u = \tfrac{1}{3}(l+m+x) = \tfrac{1}{3}(l+m) + \tfrac{1}{6}(l+m) - \tfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{6}(m-l) = \frac{l+m}{2} + \frac{\mathrm{i}(l-m)}{2\sqrt{3}},$$

이다. 여기서 $\frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$을 이용했다. 반시계 방향의 순서를 유지하는 순환 치환 $l \to m \to n \to l$을 적용하면

$$v = \frac{m+n}{2} + \frac{\mathrm{i}(m-n)}{2\sqrt{3}}, \qquad w = \frac{n+l}{2} + \frac{\mathrm{i}(n-l)}{2\sqrt{3}}.$$

을 얻는다. 이제 U, V, W가 반시계 방향 관계식 $2w = (u+v) + \mathrm{i}\sqrt{3}(v-u)$를 만족함을 보이자. 먼저

$$\begin{aligned} u+v &= \tfrac{1}{2}l + m + \tfrac{1}{2}n + \frac{\mathrm{i}(l-n)}{2\sqrt{3}}, \\ v-u &= \tfrac{1}{2}(n-l) + \frac{\mathrm{i}(2m-l-n)}{2\sqrt{3}}, \\ \mathrm{i}\sqrt{3}(v-u) &= \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}(n-l) - \tfrac{1}{2}(2m-l-n). \end{aligned}$$

? 생각해 보기 m은 어떻게 사라지는가?

첫째 줄과 셋째 줄을 더한다. 실수 부분은 $\frac{1}{2}l + m + \frac{1}{2}n - m + \frac{1}{2}l + \frac{1}{2}n = l + n$이 되므로, 실수 부분에서 m이 소거되고, 허수 부분에는 애초에 나타나지 않았다. 허수 부분을 합치면

$$(n-l)\Big(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\Big)\mathrm{i} = (n-l)\,\frac{3-1}{2\sqrt{3}}\,\mathrm{i} = \frac{\mathrm{i}(n-l)}{\sqrt{3}}.$$

이다. 따라서

$$(u+v) + \mathrm{i}\sqrt{3}(v-u) = (n+l) + \frac{\mathrm{i}(n-l)}{\sqrt{3}} = 2w.$$

처음 결과(와 그 역)에 의해 UVW는 반시계 방향으로 기술되는 정삼각형이다. 이것이 나폴레옹 정리(Napoleon's theorem)이다.

검산

- 처음 관계식: $a = 0, b = 2$이면 $c = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$인데, 이는 실수축 위쪽의 꼭짓점으로, 반시계 방향 삼각형에서 마땅히 그래야 하는 결과이다.
- $l = 0, m = 6, n = 6\mathrm{i}$일 때의 소문항 (ii): 공식에 의해 $u = 3 - \mathrm{i}\sqrt{3}, v = (3 + \sqrt{3})(1 + \mathrm{i})$, $w = -\sqrt{3} + 3\mathrm{i}$이다. 이때 UVW의 세 변의 길이의 제곱은 모두 $24 + 12\sqrt{3}$이다.
- 처음 관계식들, 평행사변형 조건, 나폴레옹 정리를 무작위 배치 10^4개에 대하여 수치적으로 확인했다. 또한 소문항 (i)에서 모든 변에 같은 방향을 쓰면 일반적으로 성립하지 않음도 확인했다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)에서 바깥쪽 방향을 잘못 잡는 것. 반시계 방향인 LMN에 대하여 LM 위의 바깥쪽 꼭짓점은 L, M에서 **시계 방향**이다. 부호를 잘못 쓰면 안쪽 나폴레옹 삼각형을 얻게 된다. (그것도 정삼각형이지만, 문제에서 묻는 것은 아니다.)
- 소문항 (i)에서 네 삼각형이 모두 같은 쪽을 향하게 하려는 것. 이는 $DEFG$ 자체가 평행사변형일 때만 성립한다.
- 평행사변형 판정에 $p + q = r + s$를 쓰는 것. 마주 보는 꼭짓점끼리 짝을 지어야 하므로, 조건은 $p + r = q + s$이다.

STEP 너머

근본적인 아이디어는 사상 $z \mapsto \alpha z + \beta$가 정확히 평면의 회전, 확대(enlargement), 평행이동(translation)이라는 것이다. 그래서 기하학적 조건이 $\mathbb{C}$ 위의 일차방정식이 된다. 처음 관계식을 깔끔하게 다시 쓰면, ABC가 정삼각형일 필요충분조건은 $a + \omega^2 b + \omega^4 c = 0$ 또는 $a + \omega^4 b + \omega^2 c = 0$이라는 것이고, 그러면 나폴레옹 정리는 몇 줄의 계산으로 곧바로 나온다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 복소수 곱셈에 대한 이러한 기하학적 관점을 아름답게 전개한다.

풀이

STEP III 2008, 문제 8

순수수학 • 급수와 점화식

STEP III 2008, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/08-s3-q8

핵심 아이디어

계수가 선형 점화식(linear recurrence)을 만족한다는 것은 급수에 알맞은 다항식을 곱하면 거의 모든 항이 소거된다는 뜻이다. 그 다항식은 점화식에서 바로 읽어 낼 수 있다. $a_{r+1} + pa_r = 0$이면 $1 + px$를, $a_{r+2} + pa_{r+1} + qa_r = 0$이면 $1 + px + qx^2$를 곱하면 된다. 소거되지 않고 남는 것은 짧은 다항식이므로 합은 유리함수(rational function)가 된다. 유한합의 경우에는 같은 방법을 쓰면 맨 끝 쪽에 항이 몇 개 더 남는다. 또 다른 방법으로, 부분분수(partial fractions)를 이용하면 급수를 합을 구할 줄 아는 등비급수(geometric series)들로 나눌 수 있다.

풀이

소문항 (i)

이 급수는 x항부터 시작하므로 $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{1}{6}$, $a_3 = \frac{1}{12}$이다. 각 계수는 바로 앞 계수의 절반이므로 $a_{r+1} - \frac{1}{2}a_r = 0$이고

$$p = -\tfrac{1}{2}.$$

이다. (상수항은 없다. 점화식은 $a_1, a_2, a_3, \ldots$을 서로 연결할 뿐이며 $r = 0$에 대해서는 아무것도 말해 주지 않는다.) 점화식을 풀면 $a_r = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{r-1}$이다.

무한급수의 합. $1 - \frac{1}{2}x$를 곱하면

$$\left(1 - \tfrac{1}{2}x\right) S = a_1 x + \sum_{r \geq 1} \left(a_{r+1} - \tfrac{1}{2}a_r\right) x^{r+1} = \tfrac{1}{3}x,$$

이다. 점화식에 의해 모든 괄호가 0이 되기 때문이다. 따라서

$$S = \frac{\frac{1}{3}x}{1-\frac{1}{2}x} = \frac{2x}{3(2-x)}.$$

이다. 이것은 공비가 $\frac{1}{2}x$인 등비급수이므로, 무한급수의 합은 정확히 $|x| < 2$일 때 존재한다.

처음 $n+1$개 항. 이들은 $x, x^2, \ldots, x^{n+1}$의 항이다. $S_{n+1} = \sum_{r=1}^{n+1} a_r x^r$이라 하자. 같은 곱셈을 되풀이하면 가운데 항들은 여전히 모두 소거되지만, 맨 위 항 $-\frac{1}{2}a_{n+1}x^{n+2}$는 짝이 없다.

$$\left(1-\tfrac{1}{2}x\right) S_{n+1} = \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{2}a_{n+1}x^{n+2} = \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1} x^{n+2} = \tfrac{1}{3}x\left(1-\left(\tfrac{x}{2}\right)^{n+1}\right).$$

그러므로 $x \neq 2$일 때

$$S_{n+1} = \frac{2x}{3(2-x)}\left(1-\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}\right).$$

이다. $x = 2$이면 모든 항이 $\frac{2}{3}$이므로 $S_{n+1} = \frac{2}{3}(n+1)$이다.

소문항 (ii)

이번에는 $a_0 = 2, a_1 = 8, a_2 = 18, a_3 = 37$이다. 점화식에 $r = 0$과 $r = 1$을 대입하면 두 방정식

$$18 + 8p + 2q = 0, \qquad 37 + 18p + 8q = 0.$$

을 얻는다. 첫 번째 식에서 $q = -9 - 4p$이다. 이를 두 번째 식에 대입하면 $37 + 18p - 72 - 32p = 0$이므로 $p = -\frac{5}{2}$이고, 따라서 $q = 1$이다. 점화식은

$$a_{r+2} - \tfrac{5}{2}a_{r+1} + a_r = 0.$$

이다.

무한급수의 합. $1 + px + qx^2 = 1 - \frac{5}{2}x + x^2$를 곱한다. 곱에서 x^{r+2}의 계수는 모든 $r \geq 0$에 대해 $a_{r+2} - \frac{5}{2}a_{r+1} + a_r = 0$이다. x^0과 x^1의 계수만 남는다.

$$\left(1-\tfrac{5}{2}x+x^2\right) T = a_0 + \left(a_1 - \tfrac{5}{2}a_0\right)x = 2 + 3x.$$

분자와 분모에 2를 곱하고 $2 - 5x + 2x^2 = (1-2x)(2-x)$로 인수분해하면

$$T = \frac{4+6x}{(1-2x)(2-x)}.$$

이다.

부분분수. $\dfrac{4+6x}{(1-2x)(2-x)} = \dfrac{A}{1-2x} + \dfrac{B}{2-x}$라 하자. 가리기 방법(cover-up)을 $x=\frac{1}{2}$에서 쓰면 $A = \dfrac{7}{3/2} = \frac{14}{3}$이고, $x=2$에서 쓰면 $B = \dfrac{16}{-3} = -\frac{16}{3}$이다. 그러므로

$$T = \frac{14}{3}\cdot\frac{1}{1-2x} - \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}x}.$$

이다. 각 항을 등비급수로 전개하면

$$a_r = \tfrac{14}{3}\,2^r - \tfrac{8}{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^r.$$

이다. 확인해 보자. $r=0,1,2,3$을 넣으면 $2,\ \frac{28}{3}-\frac{4}{3}=8,\ \frac{56}{3}-\frac{2}{3}=18,\ \frac{112}{3}-\frac{1}{3}=37$이 되어 예상대로이다.

? **생각해 보기** 어떤 x에 대해 무한급수의 합이 실제로 존재하는가?

두 등비급수가 모두 수렴(converge)해야 하므로 $|2x|<1$이고 $|\frac{1}{2}x|<1$이어야 한다. 첫 번째 조건이 더 엄격하므로 $|x|<\frac{1}{2}$이어야 한다.

처음 $n+1$개 항. 이들은 x^0부터 x^n까지의 항이다. 각 등비급수를 $n+1$개 항까지 더하면, $x \neq \frac{1}{2}, 2$일 때

$$\sum_{r=0}^{n} a_r x^r = \frac{14}{3}\cdot\frac{1-(2x)^{n+1}}{1-2x} - \frac{16}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}}{2-x}.$$

이다. (두 번째 분수는 $\frac{8}{3}\cdot\frac{1-(x/2)^{n+1}}{1-x/2}$의 분자와 분모에 2를 곱한 것이다.) $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$이면, 해당하는 등비급수의 합은 단순히 1을 $n+1$번 더한 것이다.

검산

- $|x|<\frac{1}{2}$에서 $n\to\infty$로 보내자. 거듭제곱 $(2x)^{n+1}$과 $(x/2)^{n+1}$이 0으로 가므로 T의 부분분수 꼴을 다시 얻는다. 소문항 (i)에서도 $|x|<2$일 때 같은 일이 일어난다.
- $n=0$이면 소문항 (i)의 공식은 $\frac{2x}{3(2-x)}\cdot\frac{2-x}{2} = \frac{1}{3}x$를 준다. 소문항 (ii)의 공식은 $\frac{14}{3}-\frac{16}{3}\cdot\frac{1}{2}=2$를 준다. 둘 다 예상대로 첫째 항이다.
- 수치로 확인하면, $x=0.3$에서 $T = \dfrac{5.8}{0.4\times 1.7} \approx 8.5294$이고, $2+8x+18x^2+37x^3+\cdots$의 부분합은 이 값에 가까워진다.

흔한 실수

- 소문항 (i)에서 첫째 항을 a_0x^0으로 잡는 것. 급수는 x^1부터 시작하므로 처음 $n+1$개 항은 x^{n+1}까지 이어진다.

- **유한합**에 $1 + px$를 곱할 때 끝에 남는 항을 빠뜨리는 것. 바로 이 항들이 $(\frac{x}{2})^{n+1}$ 인수를 만들어 낸다.
- T에 대해 $|x| < 2$라고 쓰는 것. 원점에 더 가까운 근 $x = \frac{1}{2}$가 수렴반지름(radius of convergence)을 결정한다.

STEP 너머

거듭제곱급수(power series) $\sum a_r x^r$을 수열 (a_r)의 **생성함수**(generating function)라 한다. 상수 계수 선형 점화식은 언제나 유리함수인 생성함수를 주며, 그 함수의 극(pole)이 a_r의 닫힌 꼴과 수렴반지름을 모두 결정한다. 생성함수는 조합론과 확률론의 표준 도구이며, 거듭제곱급수의 수렴반지름은 대학 1학년 해석학(analysis)에서 꼼꼼히 다룬다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)가 수렴에 관한 내용을 잘 다룬다.

풀이

STEP III 2008, 문제 9

역학 • 마찰과 변하는 힘

STEP III 2008, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

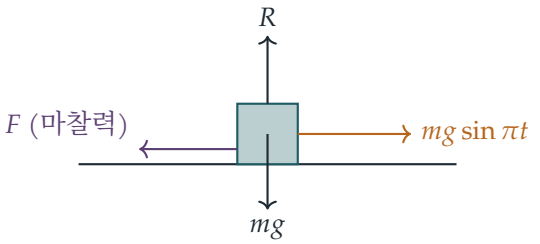
step.maths.org/questions/08-s3-q9

핵심 아이디어

마찰력(friction)에는 두 가지 상태가 있다. 입자가 정지해 있는 동안에는 정지 마찰력(static friction)이 한계값 μmg까지 가해진 힘과 정확히 같은 크기로 작용하므로 가속도는 0이다. 일단 입자가 미끄러지기 시작하면 마찰력은 일정한 크기 μmg를 가지며 속도의 반대 방향으로 작용한다. 따라서 가속도 그래프는 값이 0인 평평한 부분과 평행이동한 사인 곡선이 이어진 모양이 된다. "정지한다"는 것은 운동이 시작된 뒤로 가속도 그래프 아래의 넓이인 속도가 다시 0이 된다는 뜻이다.

풀이

물체를 거친 수평면 위의 입자로 모형화한다. 수직항력(normal reaction)은 $R = mg$이므로, 마찰력의 크기는 정지 상태에서는 최대 μmg이고 미끄러질 때는 정확히 μmg이다. $\sin \pi t > 0$일 때 힘이 작용하는 방향을 양의 방향으로 잡고, 가속도와 속도를 각각 a와 v라 하자.



움직이기 시작할 때

연직 방향으로 힘을 분해하면 $R = mg$이다. 입자가 정지해 있는 동안 수평 방향의 평형을 이루려면 크기가 $mg|\sin \pi t|$인 마찰력이 필요하고, 이는 $mg|\sin \pi t| \leq \mu mg$인 한 가능하다. 입자는 가해진 힘이 처음으로 최대 정지 마찰력(limiting friction)을 넘어설 때 처음 움직이므로 ($\mu < 1$일 때)

$$\sin \pi T_0 = \mu, \qquad \text{즉,} \qquad T_0 = \frac{1}{\pi} \arcsin \mu, \quad 0 \leq T_0 < \tfrac{1}{2}.$$

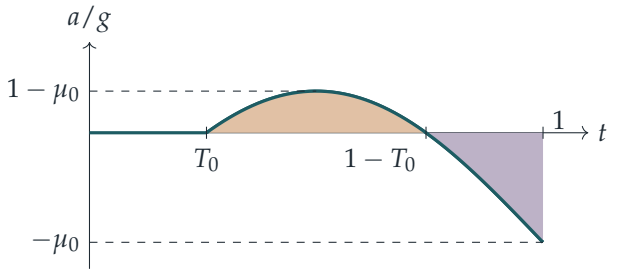
이다. ($\mu \geq 1$이면 입자는 결코 움직이지 않는다.)

소문항 (i)

$0 \leq t \leq T_0$에서 입자는 정지해 있으므로 $a = 0$이다. $t > T_0$에서는 입자가 양의 방향으로 미끄러지고 마찰력 $\mu_0 mg$가 뒤쪽으로 작용하므로, 뉴턴(Newton)의 운동 제2법칙(second law)에 의해

$$a = g(\sin \pi t - \mu_0) \qquad (\text{단, } v > 0).$$

이다. 이 값은 $t = T_0$일 때 0에서 시작하여 $t = \frac{1}{2}$에서 $g(1 - \mu_0)$까지 커지고, ($\sin \pi(1 - t) = \sin \pi t$라는 대칭성에 의해) $t = 1 - T_0$에서 다시 0으로 떨어지며, 그 뒤로는 음수가 되어 $t = 1$에서 $-\mu_0 g$에 이른다.



속도는 T_0부터 잰 이 그래프 아래의 넓이이다. 곡선이 축 위에 있는 동안(호박색 영역)에는 속도가 커지고, $1 - T_0$ 이후(자주색 영역)에는 작아진다. 두 넓이가 같아질 때까지 속도는 양수로 유지되며, 바로 그 순간에 입자가 멈춘다. 따라서 다음이 성립해야 한다.

$$v(1) = \int_{T_0}^{1} g(\sin \pi t - \mu_0)\, \mathrm{d}t = 0.$$

그런데

$$\begin{aligned} \int_{T_0}^{1} (\sin \pi t - \mu_0)\, \mathrm{d}t &= \Big[-\frac{\cos \pi t}{\pi}\Big]_{T_0}^{1} - \mu_0(1 - T_0) \\ &= \frac{1 + \cos \pi T_0}{\pi} - \mu_0 + \mu_0 T_0. \end{aligned}$$

이다. 이 값을 0으로 놓고 π를 곱하면

$$1 + \cos \pi T_0 - \mu_0 \pi + \mu_0 \, \pi T_0 = 0.$$

이다.

생각해 보기 $\cos \pi T_0$를 μ_0로 나타낼 때 부호는 어느 쪽을 택해야 하는가?

$0 \leq \pi T_0 < \frac{\pi}{2}$이므로 코사인 값은 양수이고, 따라서 $\cos \pi T_0 = \sqrt{1 - \sin^2 \pi T_0} = (1 - \mu_0^2)^{1/2}$이다. 또한 $\pi T_0 = \arcsin \mu_0$이다. 두 식을 모두 대입하면

$$1 + \left(1 - \mu_0^2\right)^{\frac{1}{2}} - \mu_0 \pi + \mu_0 \arcsin \mu_0 = 0,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. (수치적으로는 $\mu_0 \approx 0.7246$이고 $T_0 \approx 0.258$이다.)

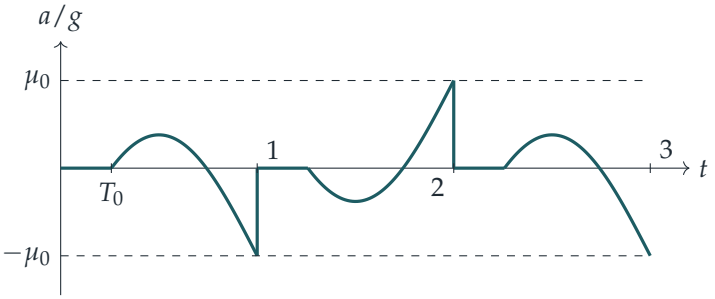
소문항 (ii)

$t = 1$에서 입자는 정지해 있고 가해진 힘은 $mg \sin \pi = 0$이다. $1 < t < 2$에서 힘은 음의 방향을 향하며 크기는 $mg|\sin \pi t|$이다. 이 값은 $|\sin \pi t| = \mu_0$가 될 때까지 $\mu_0 mg$보다 작은데, $(\sin \pi(1 + T_0) = -\sin \pi T_0$이므로) 이는 $t = 1 + T_0$에서 처음 일어난다. 따라서 $1 \leq t \leq 1 + T_0$에서 입자는 $a = 0$인 채로 정지해 있다.

그 뒤로 입자는 음의 방향으로 미끄러지고 마찰력은 양의 방향으로 작용하므로

$$a = g(\sin \pi t + \mu_0).$$

이다. $\sin \pi(t + 1) = -\sin \pi t$이므로, 이는 소문항 (i)에서 시각 $t - 1$일 때의 가속도에 정확히 음의 부호를 붙인 것이다. 따라서 $[1, 2]$에서의 운동은 $[0, 1]$에서의 운동을 거울에 비춘 것과 같다. 속도는 앞선 속도에 음의 부호를 붙인 것이므로, 입자는 같은 거리를 되돌아온 뒤 $t = 2$에서 다시 정지한다. 그때 입자는 가해진 힘이 0인 상태로 정지해 있는데, 이는 정확히 $t = 0$일 때의 상황이므로 $[2, 3]$에서는 $[0, 1]$의 운동이 반복된다.



$t = 1$과 $t = 2$에서의 수직 선분은 가속도가 불연속적으로 뛰는 곳을 나타낸다. 입자가 멈추는 순간 (크기가 $\mu_0 mg$인) 운동 마찰력(kinetic friction)이 정지 마찰력으로 바뀌는데, 정지 마찰력은 0인 가해진 힘과만 평형을 이루면 된다.

$\mu = \mu_0$일 때의 운동. 입자는 $t = T_0$까지 정지해 있다가 앞으로 미끄러져 $t = 1$에서 멈추고, $t = 1 + T_0$까지 기다렸다가 뒤로 미끄러져 $t = 2$에 출발점에서 멈추며, 이것이 계속 반복된다. 입자는 주기 2로 같은 구간을 왕복하며, 양 끝에서 각각 시간 T_0 동안 멈춘다. (한 번 더 적분하면 이 구간의 길이가 $g[\mu_0/\pi^2 - (1 - T_0)(1 - \sqrt{1 - \mu_0^2})/(2\pi)] \approx 0.0367g$임을 알 수 있지만, 문제에서 묻지는 않았다.)

$\mu = 0$일 때의 운동. 이제 $T_0 = 0$이고 모든 시각에서 $a = g\sin\pi t$이므로

$$v = \frac{g}{\pi}(1 - \cos\pi t) \geq 0, \qquad x = \frac{g}{\pi}\left(t - \frac{\sin\pi t}{\pi}\right).$$

이다. 속도는 결코 음수가 되지 않으며 $t = 0, 2, 4, \ldots$에서만 0이 된다. 따라서 입자는 결코 되돌아오지 않는다. 입자는 짝수 시각마다 순간적으로 정지하면서 밀려가듯 앞으로 나아가고, 주기 2마다 $2g/\pi$씩 전진하므로 평균 속력은 g/π이다. 거친 면의 경우 $t = 1$에서 입자를 멈추게 하는 것은 마찰력이다. 마찰이 없으면 힘의 뒤쪽 방향 절반은 입자의 속도를 0까지 줄일 뿐이다.

검산

소문항 (i)의 방정식을 이분법(bisection)으로 풀면 $\mu_0 \approx 0.72461$이고, 따라서 $T_0 \approx 0.25798$이다. $g = 9.8$로 두고 정지 마찰력과 운동 마찰력 사이를 전환하며 $0 \leq t \leq 3$에서 운동을 수치 시뮬레이션해 보면, 입자는 $t \approx 0.258$에서 움직이기 시작하여 0.3598만큼 이동한 뒤 $t = 1.000$에서 멈추고, $t \approx 1.258$에서 되돌아가기 시작하여 $t = 2.000$에 출발점에서 멈춘다. 이는 $0.0367g$와 일치한다. $\mu = 0$일 때 시뮬레이션 결과는 $x = g(t - \sin\pi t/\pi)/\pi$와 일치한다. 방정식에 대한 간단한 확인: $\mu_0 = 0$일 때 좌변은 $2 > 0$이고 $\mu_0 = 1$일 때는 $1 - \pi/2 < 0$이므로, $(0, 1)$에 근이 존재한다.

흔한 실수

- $t = 0$부터 $a = g(\sin\pi t - \mu)$로 놓는 것: T_0 이전에는 입자가 정지해 있고 마찰력은 정지 마찰력이므로 $a = 0$이다.
- 소문항 (ii)에서 입자가 방향을 바꾼 뒤에도 마찰력을 같은 방향으로 두는 것. 마찰력은 언제나 속도의 반대 방향으로 작용한다.
- 입자가 $t = 1 - T_0$에서 멈춘다고 생각하는 것. 이때 0이 되는 것은 속도가 아니라 가속도이다.

STEP 너머

"달라붙음"과 "미끄러짐" 사이를 오가는 마찰력은 운동 방정식을 구간별로 정의되게 만들고 가속도를 불연속으로 만든다. 이것이 삐걱거리는 문이나 활로 켜는 바이올린 줄의 바탕이 되는 고착–미끄럼(stick–slip) 현상이며, 비매끄러운 동역학계(non-smooth dynamical system)의 첫 번째 예이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 마찰 모형과 강제 운동을 알맞은 수준에서 다룬다.

풀이

STEP III 2008, 문제 10

역학 • 탄성 끈과 에너지

STEP III 2008, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/08-s3-q10

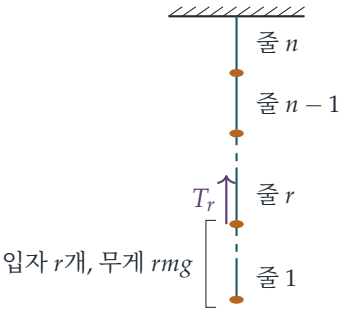
핵심 아이디어

각각의 짧은 줄은 그 아래에 매달린 모든 것을 떠받치므로 그 장력(tension)은 쉽게 적을 수 있다. 그러면 훅의 법칙(Hooke's law)으로 늘어난 길이(extension)와 저장된 에너지를 구할 수 있고, 그 합은 r과 r^2의 잘 알려진 합이 된다. 밧줄은 질량이 퍼져 있다는 점만 다를 뿐 같은 그림이다. 밧줄을 n개의 같은 조각으로 자르고, 각 조각의 질량을 그 아래쪽 끝에 있는 입자로 취급한 다음 $n \to \infty$로 보낸다. 그러면 합이 적분이 되고, 길이에 나타나는 인수 $\frac{1}{2}$는 밧줄의 한 조각이 평균적으로 밧줄 무게의 절반을 떠받치기 때문에 생긴다.

풀이

입자들이 달린 줄

짧은 줄들은 훅의 법칙을 따르는 가벼운 탄성 줄로, 질량들은 입자로 모형화한다. 문제에서처럼 줄에 아래에서부터 번호를 붙이면, 줄 r 아래에는 입자 r개가 있다. 곧 자기 자신의 입자와 줄 $1, \ldots, r-1$의 입자들이다.



계 전체는 정지해 있다. 줄 r의 위쪽 끝보다 아래에 있는 모든 것, 곧 줄 r, 줄 $1,\dots,r-1$, 그리고 그 위의 입자 r개를 생각하자. 여기에 작용하는 외력은 아래쪽으로 작용하는 무게 rmg와 위쪽으로 작용하는 줄 r의 장력 T_r뿐이다(줄은 가볍다). 따라서

$$T_r = rmg.$$

훅의 법칙에 따라 줄 r의 늘어난 길이는

$$x_r = \frac{T_r\,\ell}{\lambda} = \frac{rmg\ell}{\lambda}.$$

그러므로 긴 줄의 길이는

$$\sum_{r=1}^{n}(\ell + x_r) = n\ell + \frac{mg\ell}{\lambda}\sum_{r=1}^{n} r = n\ell + \frac{n(n+1)mg\ell}{2\lambda}.$$

자연 길이(natural length)가 ℓ이고 x만큼 늘어난 줄에 저장된 탄성 에너지(elastic energy)는 $\lambda x^2/(2\ell)$이다. 줄 r의 경우 이는

$$\frac{\lambda}{2\ell}\left(\frac{rmg\ell}{\lambda}\right)^2 = \frac{r^2m^2g^2\ell}{2\lambda},$$

이고, $\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$을 이용하면 전체 탄성 에너지는

$$\frac{m^2g^2\ell}{2\lambda}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)\,m^2g^2\ell}{12\lambda}.$$

무거운 밧줄

생각해 보기 질량이 연속적으로 퍼져 있는 밧줄에 앞 부분이 어떻게 도움이 되는가?

밧줄을 n개의 같은 조각으로 자른다. 각 조각의 자연 길이는 $\ell = L_0/n$, 질량은 $m = M/n$이고, 각 조각의 탄성 계수(modulus)는 밧줄과 같은 λ이다(탄성 계수는 조각의 길이에 의존하지 않는다). 각 조각의 질량을 그 아래쪽 끝에 모으면 정확히 위의 긴 줄이 된다. $n\to\infty$이면 조각이 짧아지고, 질량을 모은 모형은 실제 밧줄에 가까워진다.

길이에 대입하면

$$n\ell + \frac{n(n+1)mg\ell}{2\lambda} = L_0 + \frac{n(n+1)}{2\lambda}\cdot\frac{Mg}{n}\cdot\frac{L_0}{n} = L_0 + \frac{MgL_0}{2\lambda}\left(1+\frac{1}{n}\right) \longrightarrow L_0\left(1+\frac{Mg}{2\lambda}\right)$$

이다($n\to\infty$일 때). 따라서

$$L = L_0\left(1+\frac{Mg}{2\lambda}\right),$$

로 요구된 결과를 얻는다.

이것을 직접 구할 수도 있다. 어떤 점 아래에 있는 밧줄의 자연 길이를 s라 하면, 그 점은 무게 Mgs/L_0을 떠받친다. 그곳에 있는 자연 길이 δs인 작은 요소의 장력은 $T = Mgs/L_0$이므로, 그 요소는 $T\,\delta s/\lambda$만큼 늘어난다. 이를 모두 더하면

$$L - L_0 = \int_0^{L_0} \frac{Mgs}{\lambda L_0}\,\mathrm{d}s = \frac{MgL_0}{2\lambda}.$$

에너지도 같은 방식으로 대입하면

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{12\lambda}\cdot\frac{M^2g^2}{n^2}\cdot\frac{L_0}{n} = \frac{M^2g^2L_0}{12\lambda}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) \longrightarrow \frac{M^2g^2L_0}{6\lambda}.$$

(직접 구하면: 요소에 저장되는 에너지는 $T^2\,\delta s/(2\lambda)$이고, $\int_0^{L_0}\frac{M^2g^2s^2}{2\lambda L_0^2}\,\mathrm{d}s = \frac{M^2g^2L_0}{6\lambda}$이다.)

이것을 L, L_0, λ로 나타내기 위해 길이 식을 이용하여 Mg를 소거한다.

$$L - L_0 = \frac{MgL_0}{2\lambda} \quad\Longrightarrow\quad Mg = \frac{2\lambda(L-L_0)}{L_0}.$$

따라서 밧줄에 저장된 탄성 에너지는

$$\frac{L_0}{6\lambda}\cdot\frac{4\lambda^2(L-L_0)^2}{L_0^2} = \frac{2\lambda(L-L_0)^2}{3L_0}.$$

검산

- $n = 1$이면 앞 부분에서 길이는 $\ell + mg\ell/\lambda$, 에너지는 $m^2g^2\ell/(2\lambda)$이다. 입자 하나를 매단 줄 하나이므로 당연히 그래야 한다.
- 전체 늘어난 길이가 같은 $e = L - L_0$이지만 **균일한** 장력을 받는 밧줄과 비교해 보자. 그 밧줄에 저장되는 에너지는 $\lambda e^2/(2L_0)$이다. 우리의 답은 이것의 $\frac{4}{3}$배인데, 늘어남이 위쪽 근처에 몰려 있고 에너지는 국소 변형률(strain)의 제곱에 비례하여 커지므로 타당하다.
- 수치적으로 $M = 3$, $L_0 = 2$, $\lambda = 50$, $g = 9.8$일 때, 공식으로는 $L = 2.588$, 에너지 5.7624를 얻는다. $n = 100\,000$인 이산 사슬로는 2.58801과 5.76249를 얻고, $2\lambda(L-L_0)^2/(3L_0) = 5.7624$이다.

흔한 실수

- 줄 r의 장력을 $(n-r+1)mg$로 잡는 것. 번호 매기는 방식에 따라 줄 n이 맨 위에 있으므로, 줄 r은 입자 r개를 떠받친다.
- 밧줄의 각 조각에 탄성 계수 λ/n을 주는 것. 탄성 계수는 길이가 아니라 재료와 단면의 성질이다. 바뀌는 것은 강성(stiffness) λ/ℓ이다.
- 에너지를 L, L_0, λ로 나타내라고 했는데 M과 g로 나타낸 채로 두는 것.

STEP 너머

질량을 모은 n개의 입자에서 연속적인 밧줄로 넘어가는 것은 연속체 역학(continuum mechanics)의 기본적인 방법이다. 장력은 함수 $T(s)$가 되고, 훅의 법칙은 국소 응력(stress)과 변형률 사이의 관계가 되며, 에너지는 에너지 밀도(energy density)의 적분이 된다. 같은 질량과 용수철의 사슬을 진동시키면, 그 극한에서 줄의 파동 방정식(wave equation)을 얻는다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 아이디어가 전개되는 과정을 살펴보기에 좋은 책이다.

풀이

STEP III 2008, 문제 11

역학 • 회전 역학

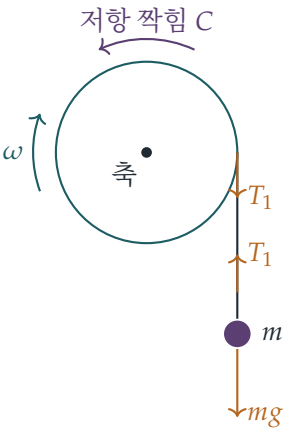
> **STEP III 2008, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/08-s3-q11

핵심 아이디어

짝힘(couple)이 일정하다는 것은 각감속도(angular deceleration)가 일정하다는 뜻이다. 따라서 실이 떨어져 나간 뒤에는 바퀴가 "suvat" 공식의 회전 버전을 따르고, 첫 번째 결과는 그저 "거리 = 평균 속력 × 시간"일 뿐이다. 같은 단계에서 저항 짝힘의 크기를 I로 나타낼 수도 있다. 내려가는 단계에서는 에너지 방정식이 자연스러운 도구이다. 모든 것이 얼마나 움직이는지 알고 있고, 일정한 짝힘에 맞서 한 일은 단순히 짝힘 × 각이기 때문이다.

풀이

모형. 바퀴는 고정된 매끄러운 축을 중심으로 회전하는 강체(rigid body)이다. 다만 크기가 C로 일정한 저항 짝힘이 운동 내내(입자가 내려가는 동안에도, 그 이후에도) 작용한다. 실은 가볍고 늘어나지 않으며 미끄러지지 않으므로, 실이 붙어 있는 동안 입자의 속력은 $v = r\omega$이다. 여기서 ω는 바퀴의 각속력(angular speed)이다.



실은 바퀴의 오른쪽에서 풀려 나오므로, 입자가 떨어질 때 바퀴는 시계 방향으로 돌고, 짝힘 C는 반시계 방향으로 작용하여 운동을 방해한다. (에너지를 이용하므로 실의 장력(tension) T_1은 실제로 필요하지 않다.)

실이 떨어져 나간 뒤

이제 바퀴에 작용하는 짝힘은 C뿐이므로, 축에 대한 모멘트를 취하면

$$I\dot{\omega} = -C,$$

이고 각감속도 C/I는 일정하다. 따라서 각속력은 시간 T 동안 ω_0에서 0으로 **일차적으로** 줄어들고,

$$\omega_0 = \frac{C}{I}\,T, \qquad \text{즉,} \qquad C = \frac{I\omega_0}{T}. \tag{1}$$

각속력이 일차적으로 줄어들 때 평균 각속력은 $\frac{1}{2}(\omega_0 + 0)$이고, 회전한 각은 평균 각속력에 시간을 곱한 것이다. 그 각은 n_2회전, 즉 $2\pi n_2$라디안이므로

$$\tfrac{1}{2}\omega_0 T = 2\pi n_2,$$

이고, 이것이 첫 번째 결과이다. (이는 $s = \frac{1}{2}(u+v)t$의 회전 버전이다.) 이로부터 다음도 얻는다.

$$\omega_0 = \frac{4\pi n_2}{T}, \qquad \text{따라서 (1)에 의해} \qquad C = \frac{4\pi n_2 I}{T^2}. \tag{2}$$

입자가 내려가는 동안

바퀴가 n_1회전, 즉 $2\pi n_1$라디안 도는 동안 실은 길이 $2\pi n_1 r$만큼 풀리므로, 입자는 거리 $2\pi n_1 r$만큼 떨어진다. 실이 떨어져 나가는 순간 바퀴의 각속력은 ω_0이고, 실이 미끄러지지 않았으므로 입자의 속력은 $r\omega_0$이다.

? 생각해 보기 저항이 있는데도 왜 여기서 에너지를 쓸 수 있을까?

에너지는 보존되지 않지만, 일-에너지 원리(work–energy principle)는 여전히 성립한다. 즉 위치 에너지의 감소량은 운동 에너지의 증가량과 저항에 맞서 한 일의 합과 같다. 각 θ만큼 회전하는 동안 일정한 짝힘 C에 맞서 한 일은 $C\theta$이며, 이는 일정한 힘에 맞서 한 일이 힘 $\times$ 거리인 것과 마찬가지이다. 실은 가볍고 늘어나지 않으며 미끄러지지 않으므로, 장력이 계 전체에 하는 알짜 일은 없다. 장력이 바퀴에 하는 일은 정확히 입자로부터 빼앗는 일과 같기 때문이다.

따라서 놓는 순간부터 실이 떨어져 나가는 순간까지

$$mg\,(2\pi n_1 r) = \tfrac{1}{2}m(r\omega_0)^2 + \tfrac{1}{2}I\omega_0^2 + C\,(2\pi n_1).$$

이제 (2)의 ω_0와 C를 대입하면

$$2\pi mgrn_1 = \tfrac{1}{2}\,(mr^2 + I)\,\frac{16\pi^2 n_2^2}{T^2} + 2\pi n_1 \cdot \frac{4\pi n_2 I}{T^2}.$$

양변에 $T^2/(2\pi)$를 곱하면

$$\begin{aligned} mgrn_1T^2 &= 4\pi n_2^2\,(mr^2 + I) + 4\pi n_1 n_2 I \\ &= 4\pi mr^2 n_2^2 + 4\pi n_2(n_1 + n_2)\,I. \end{aligned}$$

식을 정리하고 양수인 $4\pi n_2(n_1 + n_2)$로 나누면

$$I = \frac{mgrn_1T^2 - 4\pi mr^2 n_2^2}{4\pi n_2(n_1 + n_2)},$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

검산

- **차원**(*dimensions*). 분자의 두 항 $mgrT^2$과 mr^2은 모두 관성 모멘트(moment of inertia)의 단위($\mathrm{kg\,m^2}$)를 가지며, n_1, n_2는 순수한 수이다.
- **수치 검산**. $I = 0.5\,\mathrm{kg\,m^2}$, $m = 1\,\mathrm{kg}$, $r = 0.2\,\mathrm{m}$, $C = 0.5\,\mathrm{N\,m}$, $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $n_1 = 5$로 두고 운동을 단계별로 계산하였다. 그러면 $\omega_0 \approx 13.03\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$, $T \approx 13.03\,\mathrm{s}$, $n_2 \approx 13.52$를 얻는다. 이때 $\frac{1}{2}\omega_0 T \approx 84.94 \approx 2\pi n_2$이고, 공식은 $I = 0.5000$을 돌려준다.
- **저항이 없는 경우**. $C \to 0$이면 바퀴는 결코 멈추지 않으므로 T와 n_2가 모두 무한대가 된다. 이때 공식의 분자는 T^2처럼, 분모는 $n_2^2 \propto T^2$처럼 커지므로 공식은 합리적으로 행동한다.

흔한 실수

- 내려가는 동안 저항에 맞서 한 일을 빠뜨리는 것. 문제에서 짝힘이 일정하다고 했고, 이 짝힘은 실이 떨어져 나간 뒤만이 아니라 내내 작용한다. 이를 빠뜨리면 공식이 틀리게 나온다. 위의 예에서는 0.5 대신 $I \approx 0.39$를 얻게 된다.
- 입자의 운동 에너지 $\frac{1}{2}mr^2\omega_0^2$을 잊는 것. $-4\pi mr^2 n_2^2$ 항은 바로 여기서 나온다.
- 회전수와 라디안을 혼동하는 것. n회전은 $2\pi n$라디안이다.

STEP 너머

이것은 깔끔한 실험 방법이다. 바퀴가 멈출 때까지의 시간을 재고 회전수를 세면, 관성 모멘트와 베어링의 마찰을 둘 다 미리 알지 못하더라도 바퀴의 관성 모멘트 와 베어링의 마찰을 동시에 측정할 수 있다. 대학 역학에서는 이를 강체 회전의 완전한 이론으로 발전시키는데, 거기서는 각운동량(angular momentum)과 토크(torque)가 운동량과 힘의 역할을 하고, 임의의 축을 중심으로 회전하는 물체에 대해서는 관성 모멘트가 텐서(tensor)가 된다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이 내용을 꼼꼼하게 전개하며, 바로 이런 성격의 문제를 많이 담고 있다.

풀이

STEP III 2008, 문제 12

확률과 통계 • 적률생성함수

STEP III 2008, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/08-s3-q12

이 문제는 *Beyond STEP*의 12.24 절 **중심극한정리**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch12/clt.html

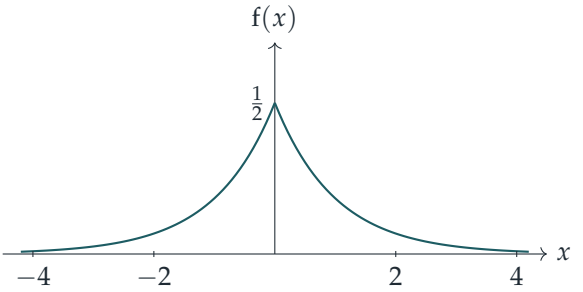
핵심 아이디어

확률밀도함수(density)에 있는 절댓값(absolute value) 때문에 모든 적분은 $x < 0$과 $x > 0$의 두 부분으로 나뉘고, 각 부분은 단순한 지수함수의 적분이 된다. 그다음부터 문제 전체는 적률생성함수(moment generating function, m.g.f.)에 관한 두 가지 사실로 풀린다. 하나는 독립(independent)인 확률변수들의 합의 적률생성함수가 각 적률생성함수의 곱이라는 것이고, 다른 하나는 $\mathrm{M}_{aY}(\theta) = \mathrm{M}_{Y}(a\theta)$라는 것이다. 로그를 취하면 n제곱이 작은 값의 n배로 바뀌는데, 이것이 바로 매클로린 급수(Maclaurin series)가 다루기 좋은 형태이다. 이것은 중심극한정리(central limit theorem)를, 모든 단계를 손으로 직접 계산할 수 있는 경우에서 보는 것이다.

풀이

그래프 개형

이 확률밀도함수는 우함수이고, $x = 0$에서 최댓값 $\frac{1}{2}$를 가지며 그곳에서 뾰족한 꼭짓점을 이룬다(그 점에서의 좌미분계수와 우미분계수는 각각 $+\frac{1}{2}$와 $-\frac{1}{2}$이다). 그리고 양쪽으로 지수적으로 감소하여 0에 가까워진다.



적률생성함수

정의에 따라 $\mathrm{M}_X(\theta) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{\theta X})$이다. 0을 기준으로 나누면

$$\begin{aligned}\mathrm{M}_X(\theta) &= \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{(1+\theta)x}\,\mathrm{d}x + \tfrac{1}{2}\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(1-\theta)x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2(1+\theta)} + \frac{1}{2(1-\theta)} = \frac{(1-\theta)+(1+\theta)}{2(1-\theta^2)} = \frac{1}{1-\theta^2}.\end{aligned}$$

첫 번째 적분은 $1+\theta > 0$일 때만, 두 번째 적분은 $1-\theta > 0$일 때만 수렴하므로, 이 식은 $-1 < \theta < 1$에서 성립한다. $\theta = 0$ 근방에서는 이것으로 충분하다. 이로써 요구된 결과를 얻는다.

분산(variance)을 구하기 위해 $|\theta| < 1$에서 등비급수(geometric series)로 전개하면

$$\mathrm{M}_X(\theta) = 1 + \theta^2 + \theta^4 + \cdots.$$

이것을 $\mathrm{M}_X(\theta) = 1 + \mathrm{E}(X)\,\theta + \frac{1}{2}\mathrm{E}(X^2)\,\theta^2 + \cdots$와 비교하면 $\mathrm{E}(X) = 0$이고 $\frac{1}{2}\mathrm{E}(X^2) = 1$이다. 따라서

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \big(\mathrm{E}(X)\big)^2 = 2.$$

(두 번 미분한 뒤 $\theta = 0$을 대입해도 같은 결과를 얻지만, 급수를 쓰는 편이 더 빠르다.)

개구리: $Y/\sqrt{2n}$의 적률생성함수

점프 $X_1, \ldots, X_n$이 독립이므로 $\mathrm{e}^{\theta X_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\theta X_n}$도 독립이고, 따라서 이들의 곱의 기댓값은 기댓값들의 곱이다.

$$\mathrm{M}_Y(\theta) = \mathrm{E}\big(\mathrm{e}^{\theta X_1}\cdots\mathrm{e}^{\theta X_n}\big) = \prod_{i=1}^{n}\mathrm{M}_{X_i}(\theta) = (1-\theta^2)^{-n}.$$

$Z = Y/\sqrt{2n}$으로 두면 $\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\theta Z}) = \mathrm{E}\big(\mathrm{e}^{(\theta/\sqrt{2n})Y}\big) = \mathrm{M}_Y\big(\theta/\sqrt{2n}\big)$이므로

$$\mathrm{M}_Z(\theta) = \left(1 - \frac{\theta^2}{2n}\right)^{-n}, \qquad |\theta| < \sqrt{2n}.$$

$\sqrt{2n}$으로 나누는 것은 자연스럽다. $\mathrm{Var}(Y) = 2n$이므로 Z의 평균은 0, 분산은 1이 되기 때문이다.

극한

θ를 고정한다. $n > \frac{1}{2}\theta^2$이면 $0 \le \theta^2/(2n) < 1$이므로 로그를 취할 수 있고, $|u| < 1$에서 $\ln(1-u) = -u - \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{3}u^3 - \cdots$를 이용하면

$$\begin{aligned}\ln \mathrm{M}_Z(\theta) &= -n \ln\left(1 - \frac{\theta^2}{2n}\right) = n\left(\frac{\theta^2}{2n} + \frac{\theta^4}{8n^2} + \frac{\theta^6}{24n^3} + \cdots\right) \\ &= \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{8n} + \frac{\theta^6}{24n^2} + \cdots .\end{aligned}$$

> **생각해 보기** $n \to \infty$일 때 이 급수의 나머지 부분이 정말로 사라진다는 것을 어떻게 알 수 있는가?

$u = \theta^2/(2n)$으로 두면, 첫 번째 항 이후의 모든 항의 합은 $n\left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 + \cdots\right) \le n \cdot \frac{1}{2}u^2(1 + u + u^2 + \cdots) = \dfrac{nu^2}{2(1-u)} = \dfrac{\theta^4}{8n(1-u)}$이고, $u \to 0$이므로 이 값은 0으로 수렴한다. 따라서 $\ln \mathrm{M}_Z(\theta) \to \frac{1}{2}\theta^2$이고, exp가 연속이므로

$$\mathrm{M}_{Y/\sqrt{2n}}(\theta) \to \exp\left(\tfrac{1}{2}\theta^2\right) \quad \text{단, } n \to \infty,$$

이므로 요구된 결과를 얻는다.

최소 점프 횟수

이 극한은 표준정규분포(standard Normal)의 적률생성함수이므로, n이 클 때 $Z = Y/\sqrt{2n}$이 근사적으로 $\mathrm{N}(0,1)$을 따른다고 본다. "출발점에서 25 cm 이상 떨어진 곳에 착지한다"는 것은 어느 방향으로든 $|Y| \ge 25$라는 뜻이므로

$$\mathrm{P}(|Y| \ge 25) = \mathrm{P}\left(|Z| \ge \frac{25}{\sqrt{2n}}\right) \approx 2\left(1 - \Phi\left(\frac{25}{\sqrt{2n}}\right)\right).$$

이 확률은 n에 따라 증가하므로(개구리가 점점 더 멀리 퍼져 나가므로), 이 확률이 5%에 이르는 최소의 n을 구하면 된다. $\Phi(1.96) = 0.975$이므로 다음이 필요하다.

$$\frac{25}{\sqrt{2n}} \le 1.96 \iff 2n \ge \left(\frac{25}{1.96}\right)^2 \approx 162.7 \iff n \ge 81.3.$$

따라서 최소 점프 횟수는 $n = 82$이다. ($n = 81$일 때 근사 확률은 약 4.95%이고, $n = 82$일 때는 약 5.09%이다.)

검산

- 모든 적률생성함수가 그래야 하듯이 $\mathrm{M}_X(0) = 1$이고, M_X는 우함수로서 그래프의 대칭성과 일치한다.

- $\int x^2 \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$를 수치 구적(numerical quadrature)으로 계산하면 2.0000이고, $\int \mathrm{e}^{0.3x}\mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$는 $1.0989 = 1/0.91$이다.
- $\theta = 1$일 때 $(1 - \frac{1}{2n})^{-n}$의 값은 $n = 10$이면 1.6702, $n = 100$이면 1.6508로, $\mathrm{e}^{1/2} = 1.6487$에 가까워진다.
- 각각 82번의 라플라스(Laplace) 점프를 하는 개구리 10^5마리를 시뮬레이션하면, 그중 약 5.1%가 출발점에서 25 cm 이상 떨어진 곳에서 끝났다.

흔한 실수

- 단측(one-tailed) 값 1.645를 쓰는 것: 개구리는 어느 쪽으로든 25 cm 떨어진 곳에 도달할 수 있으므로 양쪽 꼬리를 모두 세어야 한다.
- $\mathrm{M}_{Y/\sqrt{2n}}(\theta) = \mathrm{M}_Y(\theta)/\sqrt{2n}$으로 쓰는 것. 확률변수에 상수를 곱하면 적률생성함수의 **변수**가 그만큼 곱해진다.
- 81.3을 가장 가까운 정수로 반올림하여 $n = 81$이라고 답하는 것: $n = 81$에서는 확률이 5%보다 약간 작다.

STEP 너머

여러분이 증명한 것은 라플라스 걸음에 대한 중심극한정리이며, 일반적인 증명도 같은 길을 따른다. 즉 $\ln \mathrm{M}(\theta/\sqrt{n})$을 2차항까지 전개하고 나머지가 사라짐을 보이는 것이다. 대학 1학년 과정에서는 "연속성 정리(continuity theorem)"를 배우게 되는데, 이 정리는 적률생성함수(또는 항상 존재하는 특성함수(characteristic function))의 수렴으로부터 확률의 수렴으로 넘어가는 것을 정당화한다. 이것이 여기서 믿고 넘어간 단계이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)이 두 가지를 모두 다룬다.

풀이

STEP III 2008, 문제 13

확률과 통계 • 지시확률변수의 합

> **STEP III 2008, 13번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/08-s3-q13

이 문제는 *Beyond STEP*의 12.10 절 **느슨한 끈 끝 묶기**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch12/loose-ends.html

핵심 아이디어

각 단계에서 무슨 일이 일어나든 끈 조각의 개수는 언제나 정확히 하나씩 줄어든다. 고리 하나가 판에서 빠지거나, 두 조각이 하나로 합쳐지기 때문이다. 따라서 이전에 무슨 일이 있었든, 매 단계가 끝나면 조각이 하나 적은 같은 상황으로 돌아온다. 그래서 전체 고리의 개수를 **독립**(*independent*)인 지시변수(indicator variable)들의 합으로 쓸 수 있고, 평균(mean)과 분산(variance)은 단순히 합으로 구해진다.

풀이

첫 번째 단계

조각이 n개이면 자유로운 끝이 $2n$개 있으므로, 두 끝을 고르는 방법은

$$\binom{2n}{2} = n(2n-1)$$

가지이고 모두 같은 확률(probability)로 일어난다. 두 끝이 같은 조각에 속할 때 정확히 고리가 만들어지며, 그런 쌍은 조각마다 하나씩 n개 있다. 따라서

$$\mathrm{P}(\text{첫 번째 단계에서 고리가 생김}) = \frac{n}{n(2n-1)} = \frac{1}{2n-1}.$$

같은 이야기를 다르게 하면, 먼저 어느 끝을 고르든 남은 $2n-1$개의 끝 가운데 그 짝은 정확히 하나이다. 첫 번째 단계에서 고리가 생기면 1, 그렇지 않으면 0인 값을 X_n이라 하면, 첫

번째 단계에서 생기는 고리 개수의 기댓값(expectation)은

$$\mathrm{E}(X_n) = \frac{1}{2n-1}.$$

고리 개수의 기댓값

첫 번째 단계가 끝나면 끈 조각은 $n-1$개가 되고, 각 조각에는 자유로운 끝이 두 개씩 있다. 이는 두 경우 모두 성립한다. 고리가 생기면 조각 하나가 판에서 빠지고, 서로 다른 두 조각을 이으면 두 조각이 하나가 된다. 조각의 길이는 상관없고 끝만이 중요하다.

> ? **생각해 보기** 이제 어떤 조각이 다른 조각보다 길다는 사실이나, 앞에서 고리가 만들어졌는지 아닌지가 문제가 될까?

그렇지 않다. 어떤 끝의 쌍이 선택되는지에 영향을 주는 것은 남아 있는 조각의 개수(따라서 끝의 개수)뿐이다. 따라서 조각이 k개 남아 있을 때, 그 단계에서 고리가 생길 확률은 앞선 모든 단계와 관계없이 $\frac{1}{2k-1}$이다.

각 단계를 그 직전에 있는 조각의 개수 $k = n, n-1, \ldots, 1$로 이름 붙이고, 그 단계에서 고리가 생기는 사건의 지시변수를 X_k라 하자. 그러면 $\mathrm{P}(X_k = 1) = \frac{1}{2k-1}$이고, 과정은 $k = 1$인 단계 뒤에 끝난다($X_1 = 1$이므로 이 단계에서는 언제나 고리가 생긴다). 전체 고리의 개수는

$$R = X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$$

이므로 기댓값의 선형성(linearity of expectation)에 의해

$$\mathrm{E}(R) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}.$$

분산

분산을 구하려면 선형성만으로는 부족하고, X_k들이 독립이어야 한다. 실제로 독립이다. 앞선 단계들의 결과가 어떻게 주어지든, 조각이 k개인 단계에서 고리가 생길 확률은 여전히 $\frac{1}{2k-1}$이다. 따라서 앞선 모든 X들이 주어졌을 때 X_k의 조건부 분포(conditional distribution)는 조건이 없을 때의 분포와 같고, 그러므로 X_k들은 독립이다.

각 X_k는 $p_k = \frac{1}{2k-1}$인 베르누이(Bernoulli) 확률변수이므로 $\mathrm{Var}(X_k) = p_k(1-p_k)$이고, 독립인 확률변수들의 분산은 더해진다.

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(R) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}\left(1 - \frac{1}{2k-1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k-2}{(2k-1)^2} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$n = 40\,000$인 경우

$H_m = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}$이라 쓰자. $2n-1$까지의 홀수의 역수의 합은 $2n$까지의 모든 역수의 합에서 짝수의 역수를 뺀 것이다.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = H_{2n} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = H_{2n} - \tfrac{1}{2}H_n.$$

m이 클 때 $H_m \approx \ln m$을 이용하면

$$\mathrm{E}(R) \approx \ln(2n) - \tfrac{1}{2}\ln n = \tfrac{1}{2}\left(2\ln 2n - \ln n\right) = \tfrac{1}{2}\ln(4n).$$

$n = 40\,000$이면 $4n = 160\,000 = 20^4$이므로

$$\mathrm{E}(R) \approx \tfrac{1}{2}\ln\left(20^4\right) = 2\ln 20 \approx 6.$$

따라서 끈 조각 40 000개로부터 기대할 수 있는 고리는 약 여섯 개에 불과하다.

검산

- $n = 1$: 조각이 하나이면 고리는 반드시 하나 생긴다. 공식에서도 $\mathrm{E}(R) = 1$, $\mathrm{Var}(R) = 0$이 나오므로 맞다.
- $n = 2$: 첫 번째 단계에서 고리가 생길 확률은 $\frac{1}{3}$이고 마지막 단계에서는 언제나 고리가 생기므로, R는 확률 $\frac{1}{3}$로 2이고 그 밖의 경우 1이다. 그러면 평균은 $\frac{4}{3}$, 분산은 $\frac{2}{9}$이며, 공식에서 얻은 $1 + \frac{1}{3}$, $\frac{2}{9}$와 일치한다.
- $n \le 5$에 대해 모든 선택의 순서를 정확히 나열해 보고 $n = 6$을 시뮬레이션해 보면 두 공식과 모두 일치한다. $n = 40\,000$일 때 정확한 합은 $\mathrm{E}(R) \approx 6.28$이다. 우리의 추정값보다 0.29만큼 더 큰 것은 $H_m \approx \ln m$이라는 거친 근사 때문이다(아래 참고).

흔한 실수

- 고리가 생길 확률을 $\frac{1}{2n-1}$(두 **끝**을 고름) 대신 $\frac{1}{n}$(두 **끈**을 고름)으로 잡는 것.
- X_k들이 독립임을 먼저 정당화하지 않고 분산을 더하는 것. 평균에는 선형성으로 충분하지만 분산에는 그렇지 않다.
- 짝수 항을 떼어 내지 않고 $\sum \frac{1}{2k-1}$을 $\ln n$이나 $\frac{1}{2}\ln n$으로 근사하는 것.

STEP 너머

더 정밀한 추정은 $H_m = \ln m + \gamma + o(1)$이며, 여기서 $\gamma \approx 0.5772$는 오일러-마스케로니 상수(Euler–Mascheroni constant)이다. 이로부터 $\mathrm{E}(R) \approx \frac{1}{2}\ln(4n) + \frac{1}{2}\gamma$를 얻고,

$\sum 1/(2k-1)^2 = \pi^2/8$이므로 $\mathrm{Var}(R) \approx \frac{1}{2}\ln(4n) + \frac{1}{2}\gamma - \frac{\pi^2}{8}$도 얻는다. 같은 "확률이 $1/k$인 독립 지시변수들의 합" 구조는 무작위 순열(random permutation)의 순환(cycle)의 개수와 무작위 수열의 기록값(record)의 개수를 센다. 두 경우 모두 그 개수는 $\ln n$처럼 증가한다. 지시변수와 이러한 무작위 구조를 더 깊이 공부하려면 Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)이 좋은 출발점이다.

Beyond STEP

STEP은 대부분의 학생이 학창 시절에 치르는 수학 시험 가운데 가장 어려운 시험이다. 또한 가장 훌륭한 시험 가운데 하나이기도 하다. 문제는 짧고 낯설며 깊이가 있고, 그중 가장 뛰어난 문제들은 대학 수학의 작은 조각이 모습을 감추고 있는 것이다.

이 책은 1987년 첫 시험에 앞서 나온 예시 시험지(specimen papers)부터 2025년 시험지까지 가운데 가장 흥미로운 STEP 문제들을 골라, 각 문제를 하나의 문으로 삼는다. 모든 문제는 뛰어난 학생이 풀어 가면서 던질 법한 질문들과 함께 꼼꼼하게 풀이하고, 그런 다음 책은 그 문을 지나 한 걸음 더 나아간다. 그 아이디어가 어디에서 왔는지, 대학에서는 무엇으로 발전하는지, 그리고 다음에는 무엇을 읽으면 좋은지를 살펴본다.

이 책은 STEP을 준비하면서 기출 문제 연습 이상의 것을 원하는 재능 있는 예비 수학자를 위해 쓰였다. 수학과 학부생처럼 생각하기 시작하고, 앞으로 무엇이 자신을 기다리고 있는지 알아보고 싶은 학생들을 위한 책이다.

- 순수수학(pure mathematics), 역학(mechanics), 확률(probability)과 통계(statistics)를 아우르는 13개의 장
- 이 36개의 STEP 기출 문제와 각 문제의 안내식 풀이
- 모든 문제 뒤에 숨은 대학 수학
- 답이 실린 후속 연습 문제와 더 읽을거리

2008년 풀이. 책 전체와 모든 장,
모든 풀이를 다음 주소에서 무료로 읽고, 내려받고, 공유할 수 있다.

beyondstep.keithmcnulty.org

본문은 퍼블릭 도메인(CC0 1.0)으로 공개한다. STEP 문제 © Cambridge University Press & Assessment.

