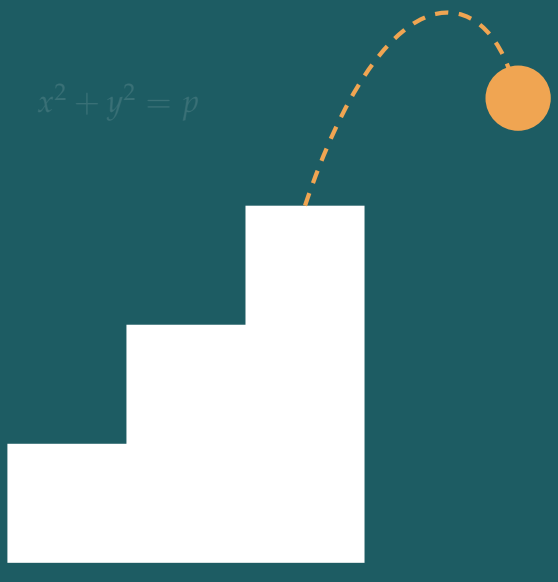
STEP 대비 · 대학 수학

Beyond STEP

STEP I, II 및 III

2007년 풀이



KEITH McNULTY

Beyond STEP

STEP 기출문제로 여는
대학 수학의 세계

STEP I, II 및 III

2007년 풀이

Keith McNulty

Beyond STEP: STEP 기출문제로 여는 대학 수학의 세계

2007년 풀이

2007년 STEP 문제지(STEP I, II 및 III)의 42개 문제 전체에 대한 풀이. 견본 문제지 이후 모든 STEP 문제의 풀이와 *Beyond STEP* 책 전체, 그리고 각 장을 `beyondstep.keithmcnulty.org`에서 무료로 읽고 내려받을 수 있다.

풀이를 읽기 전에 먼저 문제를 제대로 풀어 보자. 모든 답은 수치적으로 검증하였지만, 풀이가 이렇게 많으면 실수가 어느 정도 있을 수밖에 없다. 무언가 잘못된 것처럼 보이면 자신의 풀이를 믿고 꼼꼼히 확인해 보자.

영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.

2026년 11월 온라인 초판 발행.

이 PDF에서 지은이가 직접 만든 모든 것, 곧 본문, 풀이, 그림, 연습문제와 해답은 크리에이티브 커먼즈 CC0 1.0 Universal 라이선스에 따라 퍼블릭 도메인(public domain)으로 공개한다. 누구든 허락을 구하지 않고 어떤 목적으로든 복사하고, 고쳐 쓰고, 공유할 수 있다. 자세한 내용은 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`을 보라.

여기에서 다루는 STEP 문제의 저작권은 Cambridge University Press & Assessment에 있다. 문제는 이 책에 싣지 않았으며, 각 문제마다 공식 출처인 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스나 OCR의 기출 시험지로 가는 링크를 달았다.

오류 제보는 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty에 이슈로 남겨 주기 바란다.

차례

STEP I

Q1 숫자 배열의 개수 세기 순수수학 . . . 3

Q2 역탄젠트 항등식 순수수학 . . . 6

Q3 삼각함수의 적분 순수수학 . . . 10

Q4 이차방정식의 공통근 순수수학 . . . 14

Q5 다면체의 기하 순수수학 . . . 18

Q6 디오판토스 방정식 순수수학 . . . 22

Q7 두 직선 사이의 거리 순수수학 . . . 25

Q8 삼차곡선의 접함 순수수학 . . . 30

Q9 빗면 위의 최대 정지 마찰 역학 . . . 36

Q10 변위-시간 그래프 역학 . . . 40

Q11 포물체 운동 역학 . . . 44

Q12 조건부 확률 확률과 통계 . . . 48

Q13 조건부 확률 확률과 통계 . . . 52

Q14 푸아송 모수의 유일성 확률과 통계 . . . 56

STEP II

Q1 이항 근사 순수수학 . . . 61

Q2 삼차곡선과 넓이 순수수학 . . . 64

Q3 치환적분 순수수학 . . . 68

Q4 삼각방정식 순수수학 . . . 71

Q5 반복 함수 순수수학 . . . 75

Q6 일계 미분방정식 순수수학 . . . 79

Q7 옌센 부등식 순수수학 . . . 82

Q8 벡터를 이용한 체바 정리 순수수학 . . . 86

Q9 반발 계수가 있는 비스듬한 충돌 역학 90
Q10 마찰이 있는 정역학 역학 94
Q11 3차원 공간의 포물체 역학 98
Q12 기하분포의 최댓값 확률과 통계 102
Q13 생일 문제 확률과 통계 106
Q14 구간별로 정의된 확률밀도함수 확률과 통계 110

STEP III

Q1 탄젠트의 합과 비에트 정리 순수수학 113
Q2 이항 멱급수 순수수학 117
Q3 피보나치 항등식 순수수학 121
Q4 매개변수 곡선과 곡률 순수수학 124
Q5 고계 도함수와 귀납법 순수수학 128
Q6 복소수와 원 순수수학 132
Q7 치환적분 순수수학 136
Q8 리카티 방정식 순수수학 140
Q9 단순 조화 운동 역학 144
Q10 경사면 위의 포물체 운동 역학 148
Q11 모서리를 넘어 구르기 역학 152
Q12 무작위 합 확률과 통계 157
Q13 무작위 행보의 기댓값 확률과 통계 160
Q14 기하학적 확률 확률과 통계 164

풀이

STEP I 2007, 문제 1

순수수학 • 숫자 배열의 개수 세기

> **STEP I 2007, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/07-s1-q1

핵심 아이디어

균형수(balanced number)를 하나하나 나열하려고 하지 말자. 대신 두 자릿수 합의 공통값 s에 따라 분류한다. 각 s에 대하여 앞의 두 자리와 뒤의 두 자리는 서로 독립적으로 고를 수 있으므로, 그 합을 갖는 균형수의 개수는 두 개수의 곱이 된다. 그러면 모든 것은 s를 두 숫자의 합으로 나타내는 방법의 수를 세는 문제로 귀결되는데, 이는 정사각형 격자의 대각선 위에 있는 격자점(lattice point)의 개수를 세는 것과 같다.

풀이

네 자리 균형수를 $abcd$로 쓰자. 여기서 각 숫자는 $\{0, 1, \ldots, k\}$에 속하고, $a \geq 1$(맨 앞자리는 0일 수 없다)이며, $0 \leq s \leq 2k$인 어떤 s에 대하여

$$a + b = c + d = s$$

이다. 각 s에 대하여 다음과 같이 둔다.

- $N(s)$는 $c + d = s$를 만족하는 숫자의 순서쌍(ordered pair) (c, d)의 개수이다.
- $M(s)$는 $a \geq 1$이고 $a + b = s$를 만족하는 숫자의 순서쌍 (a, b)의 개수이다.

s를 고정하면 허용되는 앞쪽 쌍은 허용되는 뒤쪽 쌍 어느 것과도 짝지을 수 있으므로, 자릿수 합이 s인 균형수의 개수는 $M(s)N(s)$이다. 서로 다른 s의 값은 서로 다른 수를 주므로

$$\text{총개수} = \sum_{s=0}^{2k} M(s)\, N(s).$$

쌍의 개수 세기

$N(s)$. $0 \le s \le k$이면 c는 $0, 1, \ldots, s$ 중 어느 것이든 될 수 있고, $d = s - c$는 자동으로 숫자가 된다. 따라서 $N(s) = s + 1$이다. $k < s \le 2k$이면 $d = s - c \le k$에서 $c \ge s - k$이어야 하므로 c는 $s - k$부터 k까지 변하고, $N(s) = 2k + 1 - s$이다.

$M(s)$. 이는 같은 개수에서 $a = 0$인 쌍이 존재하면 그것만 빼면 된다. 그 쌍은 $(0, s)$이고, $s \le k$일 때만 허용된다. 따라서

$$M(s) = \begin{cases} s, & 0 \le s \le k, \\ 2k + 1 - s, & k < s \le 2k. \end{cases}$$

특히 $M(0) = 0$이다. 즉 자릿수 합이 0인 균형수는 없는데, $a \ge 1$이므로 이는 옳다.

> **생각해 보기** $a + b = c + d$인 네 자리 숫자열을 모두 세고 거기서 끝내면 왜 안 될까?

0312와 같은 숫자열은 네 자리 수가 아니기 때문이다. 조건 $a \ge 1$은 앞쪽 쌍에만, 그것도 합이 작을 때에만 영향을 주며, 바로 이 때문에 $M(s)$와 $N(s)$는 $s \le k$일 때에만 다르다.

소문항 (i)

여기서 $k = 4$이고, 합은 0부터 8까지 변한다.

s	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$M(s)$	0	1	2	3	4	4	3	2	1
$N(s)$	1	2	3	4	5	4	3	2	1
$M(s)N(s)$	0	2	6	12	20	16	9	4	1

맨 아래 행을 더하면 $(2 + 6 + 12 + 20) + (16 + 9 + 4 + 1) = 40 + 30 = 70$이다. 따라서 숫자 0부터 4까지로 만들 수 있는 네 자리 균형수는 요구한 대로 70개이다.

소문항 (ii)

이제 M과 N에 대한 공식을 이용하여 합을 $s = k$에서 나눈다.

$$\text{총개수} = \sum_{s=1}^{k} s(s+1) \; + \; \sum_{s=k+1}^{2k} (2k + 1 - s)^2.$$

($s = 0$인 항은 0이다.) 두 번째 합에서 $r = 2k + 1 - s$로 둔다. s가 $k+1$부터 $2k$까지 변할 때 r은 k부터 1까지 내려가므로, 두 번째 합은 $\sum_{r=1}^{k} r^2$이다. 따라서

$$\begin{aligned} \text{총개수} &= \sum_{r=1}^{k}(r^2 + r) + \sum_{r=1}^{k} r^2 = 2\sum_{r=1}^{k} r^2 + \sum_{r=1}^{k} r \\ &= \tfrac{1}{3}k(k+1)(2k+1) + \tfrac{1}{2}k(k+1) \\ &= \tfrac{1}{6}k(k+1)\big(2(2k+1)+3\big) \\ &= \tfrac{1}{6}k(k+1)(4k+5), \end{aligned}$$

이다. 여기서 $\sum r^2$에 대해 주어진 항등식($r = 0$인 항은 기여하지 않는다)과 $\sum_{r=1}^{k} r = \frac{1}{2}k(k+1)$을 이용하였다. 이것이 요구한 결과이다.

검산

- 공식에 $k = 4$를 대입하면 $\frac{1}{6} \cdot 4 \cdot 5 \cdot 21 = 70$이 되어 소문항 (i)과 일치한다.
- $k = 1$이면 공식은 3을 준다. 직접 확인하면 0과 1만 사용하는 네 자리 균형수는 1001, 1010, 1111이다.
- $a \geq 1$인 모든 숫자열 $abcd$에 대한 전수 조사(brute force)로 센 개수는 1부터 15까지의 모든 k에 대해 공식과 일치한다(예를 들어 십진법의 숫자 전체를 쓰는 $k = 9$일 때 615).

흔한 실수

- 맨 앞자리 조건을 잊는 것. 그러면 대신 $\sum N(s)^2 = \frac{1}{3}(k+1)(2k^2+4k+3)$을 얻게 되며, 이는 $k = 4$일 때 85이다.
- $s > k$일 때 쌍의 개수를 잘못 세는 것. 두 숫자 모두 k 이하로 제한되므로 그 개수는 $s+1$이 아니라 $2k+1-s$이다.
- 가운데 합 $s = k$를 나눈 두 부분 모두에서 세거나, 어느 쪽에서도 세지 않는 것.

STEP 너머

개수 $N(s)$는 $(1 + x + \cdots + x^k)^2$에서 x^s의 계수이고, 균형수의 총개수는 이러한 다항식들의 곱의 한 계수이다. 이 **생성함수**(*generating function*) 방법은 직접 세기로는 금세 감당할 수 없게 되는 $2n$자리 균형수도 다룰 수 있다. 이는 대학 조합론의 핵심 도구이다. 이런 성격의 세기 문제를 더 풀어 보고 싶다면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)를 참고하자.

풀이

STEP I 2007, 문제 2

순수수학 • 역탄젠트 항등식

STEP I 2007, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/07-s1-q2

핵심 아이디어

역탄젠트(inverse tangent) 사이의 등식은 양변에 탄젠트를 취하고 $\tan(A+B)$의 덧셈 정리(addition formula)를 쓰는 순간 보통의 분수 사이의 등식이 된다. 그 대가로, tan는 주기 π마다 반복되므로 $\tan(A+B)=1$로부터는 $A+B=\frac{1}{4}\pi+k\pi$라는 것만 알 수 있다. k를 정하려면 각의 크기에 대해 한마디 덧붙여야 한다. 그다음부터는 각 소문항이 작은 정수론(number theory) 문제가 된다. 인수분해(factorise)를 하거나, 나누어떨어짐(divisibility)에 관한 논증을 쓰면 된다.

풀이

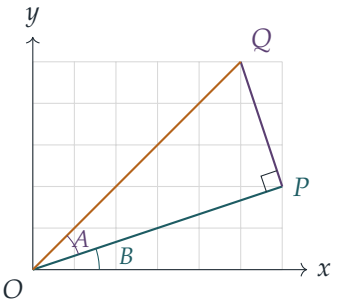
소문항 (i)

$\tan A=\frac{1}{2}$이고 $\tan B=\frac{1}{3}$이므로

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}=1.$$

이제 A와 B는 예각이므로 $0<A+B<\pi$이고, $(0,\pi)$에서 탄젠트 값이 1인 각은 $\frac{1}{4}\pi$뿐이다. 따라서 요구한 대로 $A+B=\frac{1}{4}\pi$이다.

아래 그림은 같은 사실을 모눈종이 위에 나타낸 것이다. $O=(0,0)$, $P=(6,2)$, $Q=(5,5)$라 하면, 직선 OP는 x축과 각 $\arctan\frac{1}{3}$을 이룬다. $PQ=(-1,3)$은 $OP=(6,2)$에 수직이고 길이가 그 절반이므로 각 POQ는 $\arctan\frac{1}{2}$이다. 그리고 Q는 직선 $y=x$ 위, 즉 $\frac{1}{4}\pi$의 방향에 있다.



소문항 (i): 정수 p와 q

먼저 덧셈정리에서 0으로 나누게 되는 경우인 $pq = 1$을 배제한다. 이 경우 $p = q = 1$ 또는 $p = q = -1$이고, 좌변은 각각 $\frac{1}{2}\pi$와 $-\frac{1}{2}\pi$가 되어 어느 것도 $\frac{1}{4}\pi$가 아니다. 따라서 $pq \neq 1$이고, 주어진 등식의 양변에 탄젠트를 취하면

$$\frac{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}}{1 - \frac{1}{pq}} = 1.$$

분자와 분모에 pq를 곱하면 $\dfrac{p+q}{pq-1} = 1$이므로

$$p + q = pq - 1 \quad \Longrightarrow \quad pq - p - q + 1 = 2 \quad \Longrightarrow \quad (p-1)(q-1) = 2,$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

$p-1$과 $q-1$은 곱이 2인 정수이므로, 순서쌍 $(p-1, q-1)$은 다음 중 하나이다.

$$(1,2), \quad (2,1), \quad (-1,-2), \quad (-2,-1),$$

따라서 $(p,q) = (2,3), (3,2), (0,-1)$ 또는 $(-1,0)$이다. 마지막 두 경우는 p와 q가 0이 아니므로 제외된다. 그러므로 $\{p,q\} = \{2,3\}$이고, 소문항 (i)의 앞부분에 의해 두 순서 모두 실제로 등식을 만족한다.

> **생각해 보기** 우리는 해가 반드시 $(p-1)(q-1) = 2$를 만족해야 한다는 것만 보였다. 왜 그 후에 후보들을 확인해야 할까?

탄젠트를 취하면 정보가 사라진다. $(p-1)(q-1) = 2$는 $\tan(\arctan\frac{1}{p} + \arctan\frac{1}{q}) = 1$과 동치이며, 이는 $-\frac{3}{4}\pi$와 같은 합도 허용한다. 여기서 후보 순서쌍은 0을 포함하거나(그러면 $\frac{1}{p}$는 의미가 없다) 2와 3이며, 후자는 성립함을 이미 알고 있다.

소문항 (ii)

$\theta = \arctan\frac{1}{r}, \phi = \arctan\dfrac{s}{s+t}$라 하자. 주어진 등식에 탄젠트를 취하면

$$\frac{\frac{1}{r} + \frac{s}{s+t}}{1 - \frac{s}{r(s+t)}} = 1.$$

분모는 0이 아니다. $r \geq 1$이고 $t \geq 1$이므로 $r(s+t) > s$이기 때문이다. 분자와 분모에 $r(s+t)$를 곱하면

$$\frac{(s+t)+rs}{r(s+t)-s} = 1 \quad \Longrightarrow \quad s+t+rs = rs+rt-s \quad \Longrightarrow \quad t(r-1) = 2s.$$

생각해 보기 s와 t의 최대공약수에 관한 조건은 어디에서 쓰일까?

등식 $t(r-1) = 2s$는 t가 $2s$를 나눈다는 뜻이다. $\mathrm{hcf}(s,t) = 1$이므로 t는 s와 공통인 소인수를 갖지 않고, 따라서 t의 모든 소인수는 2에서 와야 한다. 즉 t는 2를 나눈다. t는 양의 정수이므로 가능한 값은

$$t = 1 \quad \text{또는} \quad t = 2.$$

뿐이다.

- $t = 1$이면 $r - 1 = 2s$이므로 $r = 2s + 1$이다.
- $t = 2$이면 $2(r-1) = 2s$이므로 $r = s + 1$이다. (이때 $\mathrm{hcf}(s,2) = 1$이므로 s는 홀수여야 한다.)

두 경우 모두 실제로 일어난다. 실제로 $0 < \frac{1}{r} \leq 1$이고 $0 < \frac{s}{s+t} < 1$이므로 θ와 ϕ는 모두 $(0, \frac{1}{4}\pi]$에 속하고 $0 < \theta + \phi < \frac{1}{2}\pi$이다. 위의 계산을 거꾸로 따라가면 $t(r-1) = 2s$로부터 $\tan(\theta+\phi) = 1$을 얻고, 따라서 정확히 $\theta + \phi = \frac{1}{4}\pi$이다. 예를 들어 $t = 1$, $s = 1$이면 $\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{2}$를, $t = 2$, $s = 1$이면 $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$을 얻는다. 소문항 (i)의 항등식을 양쪽 순서로 얻는 것이다.

검산

- 계산기로 계산하면 $\arctan 0.5 + \arctan(1/3) = 0.4636 + 0.3218 = 0.7854 = \frac{1}{4}\pi$이다.
- $|p|, |q| \leq 200$인 0이 아닌 모든 p, q에 대해 컴퓨터로 탐색하면 $(2,3)$과 $(3,2)$만 나온다.
- $\mathrm{hcf}(s,t) = 1$인 $r < 400$, $s, t < 150$에 대해 탐색하면 $t = 1$, $r = 2s + 1$과 $t = 2$, $r = s + 1$만 나온다. 예를 들어 $\arctan\frac{1}{8} + \arctan\frac{7}{9} = \frac{1}{4}\pi$ ($s = 7$, $t = 2$)는 기계 정밀도 안에서 성립한다.

흔한 실수

- $A+B$가 왜 $\frac{5}{4}\pi$일 수 없는지 말하지 않고 $\tan(A+B)=1$로부터 $A+B=\frac{1}{4}\pi$라고 결론 짓는 것.
- 2의 음수 인수분해 $(-1)(-2)$와 $(-2)(-1)$을 잊거나, 이들이 o을 주므로 버려야 한다는 것을 잊는 것.
- $\mathrm{hcf}(s,t)=1$을 언급하지 않고 "t가 $2s$를 나누므로 t는 2를 나눈다"라고 말하는 것. 바로 이 지점에서 가정이 필요하다.

STEP 너머

tan의 덧셈정리는 사실 복소수(complex number)의 곱셈이다. $\arctan\frac{1}{p}$는 $p+\mathrm{i}$의 편각(argument)이므로, 소문항 (i)은 $(2+\mathrm{i})(3+\mathrm{i})=5+5\mathrm{i}$의 편각이 $\frac{1}{4}\pi$라는 명제이다. 한때 π를 수백 자리까지 계산하는 데 쓰였던 마친(Machin)의 공식 $4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}=\frac{1}{4}\pi$ 같은 항등식은 바로 이런 방식으로 가우스 정수(Gaussian integers)를 인수분해하여 얻어진다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 복소수 곱셈의 기하학을 아름답게 전개하며, 대븐포트(Davenport)의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 소문항 (ii)에서 쓰인 나누어떨어짐 논증을 다룬다.

풀이

STEP I 2007, 문제 3

순수수학 • 삼각함수의 적분

> **STEP I 2007, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/07-s1-q3

핵심 아이디어

$\cos^4\theta$와 $\sin^4\theta$는 각각 따로 적분하기가 쉽지 않다. 그러나 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$을 이용하여 2θ의 함수로 정리하면, 둘의 **차**와 **합**은 모두 쉽게 적분된다. 합과 차를 적분하면 구하려는 두 적분에 대한 간단한 일차방정식 두 개를 얻는다. 같은 방법을 한 차수 높여 적용하면 여섯제곱도 해결된다.

풀이

항등식

제곱의 차(difference of two squares)를 인수분해하면

$$\cos^4\theta - \sin^4\theta = (\cos^2\theta - \sin^2\theta)(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \cos 2\theta \cdot 1 = \cos 2\theta.$$

합에 대해서는 완전제곱식(completing the square)을 만든다.

$$\begin{aligned}\cos^4\theta + \sin^4\theta &= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)^2 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta \\ &= 1 - \tfrac{1}{2}(2\sin\theta\cos\theta)^2 \\ &= 1 - \tfrac{1}{2}\sin^2 2\theta,\end{aligned}$$

여기서 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$를 이용하였다. 이로써 두 항등식(identity)이 모두 증명되었다.

네제곱

$C_4 = \int_0^{\pi/2} \cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta$, $S_4 = \int_0^{\pi/2} \sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta$라 하자. 첫 번째 항등식을 적분하면

$$C_4 - S_4 = \int_0^{\pi/2} \cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta = \left[\tfrac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/2} = 0.$$

두 번째 항등식에 대해서는 $\int_0^{\pi/2} \sin^2 2\theta\,\mathrm{d}\theta$가 필요하다. $\sin^2 2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 4\theta)$를 이용하면

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 2\theta\,\mathrm{d}\theta = \left[\tfrac{1}{2}\theta - \tfrac{1}{8}\sin 4\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4},$$

이다. $\sin 2\pi = 0$이기 때문이다. 따라서

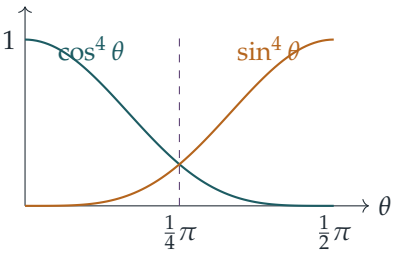
$$C_4 + S_4 = \int_0^{\pi/2} \left(1 - \tfrac{1}{2}\sin^2 2\theta\right)\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{8}.$$

두 식을 더하고 빼면

$$\int_0^{\pi/2} \cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{3\pi}{16}.$$

생각해 보기 계산 없이도 $C_4 = S_4$임을 알아볼 수 있었을까?

그렇다. 치환(substitution) $\phi = \frac{1}{2}\pi - \theta$를 하면 $\cos\theta$는 $\sin\phi$가 되고 적분 구간의 끝 0과 $\frac{1}{2}\pi$가 서로 바뀌므로, 모든 n에 대하여 $\int_0^{\pi/2} \cos^n\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^n\phi\,\mathrm{d}\phi$이다. $\cos^4\theta$와 $\sin^4\theta$의 그래프는 직선 $\theta = \frac{1}{4}\pi$에 대하여 서로 대칭이므로, 둘러싸는 넓이가 같다.



따라서 실제로 필요한 것은 합에 대한 항등식뿐이다. 차의 적분이 0이 되는 것은 대칭성(symmetry)이 모습을 바꾸어 나타난 것이다.

여섯제곱

같은 방법을 되풀이한다. $c = \cos\theta$, $s = \sin\theta$라 하면 $c^2 + s^2 = 1$이고

$$\begin{aligned} c^6 - s^6 &= (c^2 - s^2)(c^4 + c^2s^2 + s^4) = \cos 2\theta\left(1 - \tfrac{1}{2}\sin^2 2\theta + \tfrac{1}{4}\sin^2 2\theta\right) \\ &= \cos 2\theta\left(1 - \tfrac{1}{4}\sin^2 2\theta\right), \end{aligned}$$

이다. 여기서 앞에서 증명한 항등식과 $c^2s^2 = \frac{1}{4}\sin^2 2\theta$를 이용하였다. 합에 대해서는 $c^2 + s^2$의 세제곱을 이용한다.

$$c^6 + s^6 = (c^2 + s^2)^3 - 3c^2s^2(c^2 + s^2) = 1 - \tfrac{3}{4}\sin^2 2\theta.$$

두 적분을 C_6, S_6이라 하자. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\sin^3 2\theta = 6\sin^2 2\theta\cos 2\theta$이므로

$$C_6 - S_6 = \left[\tfrac{1}{2}\sin 2\theta - \tfrac{1}{24}\sin^3 2\theta\right]_0^{\pi/2} = 0,$$

이고, 이는 대칭성 논증으로 예측한 결과와도 같다. 또 $\int_0^{\pi/2}\sin^2 2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{4}\pi$를 다시 이용하면

$$C_6 + S_6 = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{16}.$$

그러므로

$$\int_0^{\pi/2}\cos^6\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2}\sin^6\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{5\pi}{32}.$$

검산

- 지수가 커질수록 답이 작아진다. $n = 0$일 때 $\frac{1}{2}\pi$, $n = 2$일 때 $\frac{1}{4}\pi$, 그다음은 $\frac{3}{16}\pi$와 $\frac{5}{32}\pi$이다. 구간에서 $0 \le \cos\theta \le 1$이므로 당연히 그래야 한다.
- 수치적으로, 심프슨 공식(Simpson's rule)을 쓰면 $\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta \approx 0.589049$, $\int_0^{\pi/2}\cos^6\theta\,\mathrm{d}\theta \approx 0.490874$로 $3\pi/16$, $5\pi/32$와 일치한다. 사인의 적분도 같은 정확도로 이 값과 일치한다.
- 합에 대한 항등식에 $\theta = \frac{1}{4}\pi$를 대입하면 $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{2}$와 $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1 - \frac{3}{4}$를 얻으며, 둘 다 참이다.

흔한 실수

- $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$에서 유추하여 $\cos^4\theta + \sin^4\theta = 1$이라고 쓰는 실수. 교차항 $2\sin^2\theta\cos^2\theta$가 빠져 버린다.
- $\cos 2\theta$나 $\cos 4\theta$를 적분할 때 연쇄 법칙(chain rule)에서 나오는 인수 $\frac{1}{2}$를 빠뜨리는 실수. 이 문제에서 $\cos 2\theta$의 경우에는 (어차피 적분값이 0이므로) 상관없지만, $\sin^2 2\theta$의 경우에는 결과가 달라진다.

STEP 너머

이 적분들은 월리스(Wallis) 적분(Wallis's integrals) $I_n = \int_0^{\pi/2}\sin^n\theta\,\mathrm{d}\theta$의 특수한 경우이며, 이 적분은 점화식(reduction formula) $I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$를 만족한다(부분적분(integration

by parts)을 하면 된다). $I_4 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$와 $I_6 = \frac{5}{6} I_4$가 위의 답을 다시 만들어 냄을 확인해 볼 수 있다. I_{2n}과 I_{2n+1}을 비교하면 π에 대한 월리스의 유명한 무한곱(infinite product)에 이른다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에는 점화식을 다루는 STEP 형식의 연습 문제가 더 실려 있고, Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)는 극한 논증을 엄밀하게 다룬다.

풀이

STEP I 2007, 문제 4

순수수학 • 이차방정식의 공통근

STEP I 2007, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/07-s1-q4

핵심 아이디어

첫 번째 부분은 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$의 고전적인 인수분해(factorisation)이며, $x + b + c$가 인수라는 것을 알고 나면 계수 비교를 통해 이차식을 얻을 수 있다. 두 번째 부분에서는 근을 공유하는 두 이차방정식이 주어진다. 표준적인 기법은 **소거**(*elimination*)이다. 즉 두 방정식을 결합하여 k의 거듭제곱 하나가 상쇄되도록 한다. 이를 두 가지 방법으로 하면 k와 k^2를 비(ratio)로 나타낼 수 있고, 그러면 $k^2 = (k)^2$로부터 계수들만의 관계식을 얻는다. 그 관계식은 알고 보면 첫 번째 부분에서 $x = a$로 둔 것이다.

풀이

인수분해

$P(x) = x^3 - 3xbc + b^3 + c^3$에 $x = -(b + c)$를 대입하면

$$\begin{aligned} P(-b-c) &= -(b+c)^3 + 3bc(b+c) + b^3 + c^3 \\ &= -(b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3) + 3b^2c + 3bc^2 + b^3 + c^3 = 0, \end{aligned}$$

이므로 인수 정리(factor theorem)에 의해 $x + b + c$는 인수이다. 계수를 비교하면(P의 x^2항은 0이고 상수항은 $b^3 + c^3$이다)

$$x^3 - 3xbc + b^3 + c^3 = (x + b + c)\,\mathrm{Q}(x), \qquad \mathrm{Q}(x) = x^2 + b^2 + c^2 - xb - bc - cx.$$

를 얻는다. 우변을 전개하면 이를 확인할 수 있다. x^2항은 $x^2(b + c) - x^2(b + c) = 0$이고, x항을 모으면 $-3bcx$이며, 상수항은 $b^3 + c^3$이다.

제곱의 합으로 나타내기 위해 살펴보면, $2\mathrm{Q}(x)$에서 x^2, b^2, c^2는 각각 두 번씩 나타나고 각

교차항은 $-2xb$ 등의 꼴로 나타나므로

$$2\mathrm{Q}(x) = (x-b)^2 + (b-c)^2 + (c-x)^2.$$

이다.

공통근

k는 두 방정식의 근이므로

$$ak^2 + bk + c = 0, \tag{1}$$
$$bk^2 + ck + a = 0. \tag{2}$$

이다. k^2를 없애기 위해 $b \times (1) - a \times (2)$를 계산하면

$$(b^2 - ac)k + bc - a^2 = 0, \qquad \text{따라서} \qquad (ac - b^2)\,k = bc - a^2.$$

이다. 대신 k항을 없애기 위해 $c \times (1) - b \times (2)$를 계산하면

$$(ac - b^2)k^2 + c^2 - ab = 0, \qquad \text{따라서} \qquad (ac - b^2)\,k^2 = ab - c^2.$$

이다. 이것이 k^2를 포함하는 비슷한 식이다.

이제 $k^2 = k \cdot k$를 이용한다. $ac \neq b^2$이므로 $ac - b^2$로 나눌 수 있고, $k = \dfrac{bc - a^2}{ac - b^2}$를 얻으므로

$$(ac - b^2)\,\frac{(bc - a^2)^2}{(ac - b^2)^2} = ab - c^2 \quad \Longrightarrow \quad (ac - b^2)(ab - c^2) = (bc - a^2)^2,$$

이다. 여기서 마지막 식은 양변에 $ac - b^2$를 곱하여 얻는다. 이것이 구하는 결과이다.

양변을 전개하면

$$a^2bc - ac^3 - ab^3 + b^2c^2 = b^2c^2 - 2a^2bc + a^4,$$
$$\text{따라서} \quad 0 = a^4 + ab^3 + ac^3 - 3a^2bc = a\left(a^3 - 3abc + b^3 + c^3\right).$$

이다. $a \neq 0$이므로 $a^3 - 3abc + b^3 + c^3 = 0$을 얻고, 이것이 구하는 결과이다.

? 생각해 보기 $a^3 - 3abc + b^3 + c^3$을 어디에서 본 적이 있는가?

이것은 첫 번째 부분에서 $x = a$로 둔 것이다. 따라서

$$(a + b + c)\,\mathrm{Q}(a) = 0, \qquad 2\mathrm{Q}(a) = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2.$$

이다. 그러므로 $a + b + c = 0$이거나 $\mathrm{Q}(a) = 0$이다.

$Q(a) = 0$**인 경우.** a, b, c가 실수이므로 세 제곱은 모두 음이 아니고, 그 합이 0이 되는 것은 각각이 0일 때뿐이다. 따라서 $a = b = c$이고, 두 방정식은 모두 $a(y^2 + y + 1) = 0$이 되어 서로 같다.

$a + b + c = 0$**인 경우.** k에 대한 식에 $c = -a - b$를 대입하면

$$bc - a^2 = -ab - b^2 - a^2, \qquad ac - b^2 = -a^2 - ab - b^2,$$

이므로 $bc - a^2 = ac - b^2$이고, 이 값은 0이 아니므로 $k = 1$이다. (실제로 $y = 1$은 두 방정식을 모두 만족한다. 이때 각 방정식은 $a + b + c = 0$이 되기 때문이다.)

따라서 $k = 1$이거나 두 방정식이 서로 같으며, 이로써 문제가 해결된다.

같은 방정식이 되는 경우에는 $a = b = c$로부터 $ac = b^2$가 되는데, 이는 가정에서 배제된 것임에 주목하자. 따라서 주어진 조건 아래에서 공통근은 사실 항상 $k = 1$이다. "같은 방정식"이라는 다른 경우는 $ac \neq b^2$라는 조건을 없앴을 때 일어나는 일이며, 그때 공통근은 1의 복소 세제곱근(complex cube roots of unity)이다.

검산

$a = 1, b = 2, c = -3$으로 두면 $a + b + c = 0$이다. 방정식은 $y^2 + 2y - 3 = (y - 1)(y + 3) = 0$과 $2y^2 - 3y + 1 = (2y - 1)(y - 1) = 0$이고, 공통근 $k = 1$을 가진다. 이때 $ac - b^2 = -7$, $bc - a^2 = -7$, $ab - c^2 = -7$이므로 $(ac - b^2)k = bc - a^2$, $(ac - b^2)k^2 = ab - c^2$, $(-7)(-7) = (-7)^2$이 모두 성립하고, $a^3 - 3abc + b^3 + c^3 = 1 + 18 + 8 - 27 = 0$이다. 또한 첫 번째 부분의 두 항등식과 전개식 $(ac - b^2)(ab - c^2) - (bc - a^2)^2 = -a(a^3 - 3abc + b^3 + c^3)$을 무작위로 고른 1000개의 세 수 쌍에 대해 정확한 산술로 확인하였다.

흔한 실수

- 상수항을 소거하면 $(a \times (1) - c \times (2))\, k\big((a^2 - bc)k + ab - c^2\big) = 0$을 얻는데, 이것이 쓸모 있으려면 $k \neq 0$이 더 필요하다. $c \times (1) - b \times (2)$의 결합을 쓰면 이 문제를 피할 수 있다.
- 문제에서 $ac - b^2$가 0이 아님을 보장한다는 것을 언급하지 않고 $ac - b^2$로 나누는 것.
- a, b, c가 실수라는 사실을 쓰지 않고 $Q(a) = 0$으로부터 $a = b = c$라고 결론짓는 것. 제곱의 합을 이용한 논증은 복소수에서는 성립하지 않는다.

STEP 너머

두 다항식이 공통근을 가질 조건은 일반적으로 계수들로 만든 행렬식인 **종결식**(*resultant*)으로 주어진다. 관계식 $(ac-b^2)(ab-c^2)=(bc-a^2)^2$은 바로 이 두 이차식의 종결식을 0으로 둔 것이다. 식 $a^3+b^3+c^3-3abc$는 순환행렬(circulant matrix)의 행렬식이기도 하며, ω를 1의 복소 세제곱근이라 할 때 $(a+b+c)(a+\omega b+\omega^2 c)(a+\omega^2 b+\omega c)$로 완전히 인수분해된다. 다항식과 그 근에 대해 더 알고 싶다면 Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)를 읽어 보라.

풀이

STEP I 2007, 문제 5

순수수학 • 다면체의 기하

STEP I 2007, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/07-s1-q5

핵심 아이디어

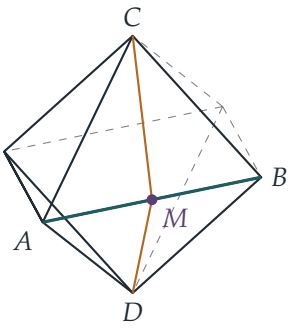
정팔면체(regular octahedron)는 좌표 위에 아주 깔끔하게 놓인다. 여섯 꼭짓점(vertex)을 양과 음의 각 좌표축 위에서 원점으로부터 한 단위 떨어진 점으로 잡을 수 있다. 이 모형을 쓰면 두 소문항 모두 벡터(vector) 계산일 뿐이다. 두 면(face) 사이의 각은 공통 모서리(edge)에 수직인 평면에서 재므로, 모서리의 중점(midpoint)에서 각 면을 가로질러 맞은편 꼭짓점까지 가는 두 선분을 이용한다. 면의 중심(centre)은 세 꼭짓점의 단순한 평균이다.

풀이

모든 정팔면체는 다른 정팔면체를 확대하거나 축소한 것이며, 각의 크기와 부피의 비는 확대·축소로 변하지 않는다. 따라서 꼭짓점이

$$(\pm 1, 0, 0), \qquad (0, \pm 1, 0), \qquad (0, 0, \pm 1).$$

인 정팔면체를 다루어도 된다. 이 점들 가운데 서로 반대편에 있지 않은 두 점 사이의 거리는 항상 $\sqrt{2}$이므로 모서리는 12개이고, 면은 각 축 위에 꼭짓점을 하나씩 가지는 8개의 삼각형으로, 부호를 고르는 방법 하나마다 하나씩 대응한다. 모든 면이 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인 정삼각형이므로, 이것은 정말로 정팔면체이다.



소문항 (i)

모서리 하나를 공유하는 두 면을 잡자. 대칭성에 의해 모든 모서리의 모양이 같으므로 하나만 보면 충분하다. $A=(1,0,0)$, $B=(0,1,0)$, $C=(0,0,1)$, $D=(0,0,-1)$이라 하면, 면 ABC와 ABD는 AB를 따라 만난다. $M=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$을 AB의 중점이라 하자.

생각해 보기 한 직선을 따라 만나는 두 평면 사이의 각은 어떻게 재는가?

공통 직선 위의 한 점을 잡고, 각 평면 안에서 그 점을 지나며 공통 직선에 수직인 직선을 긋는다. 이 두 직선 사이의 각이 두 면 사이의 각이다. 각 면은 정삼각형이므로 삼각형 ABC의 중선(median) MC는 AB에 수직이고, 삼각형 ABD의 중선 MD도 마찬가지이다. 따라서 구하는 각은 $\angle CMD$이다.

이제

$$\overrightarrow{MC}=\left(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},1\right),\qquad \overrightarrow{MD}=\left(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},-1\right),$$

이고, 예상대로 둘 다 $\overrightarrow{AB}=(-1,1,0)$에 수직이다. 각각의 길이의 제곱은 $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1=\frac{3}{2}$이고,

$$\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}=\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}-1=-\tfrac{1}{2}.$$

이다. 그러므로

$$\cos\angle CMD=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=-\frac{1}{3},$$

이고, 두 면 사이의 각은 $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$, 약 109.5°로, 요구된 결과와 같다. 코사인 값이 음수이므로 이 각은 둔각(obtuse angle)이다. 즉 정팔면체는 모서리를 따라 정육면체(cube)보다 덜 뾰족하다.

좌표 없이 같은 계산을 하면 삼각형 CMD에서의 코사인법칙(cosine rule)이 된다. 모서리의 길이를 a라 하면 중선의 길이는 $MC=MD=\frac{\sqrt{3}}{2}a$이고, C와 D는 서로 반대편 꼭짓점이다. 네 점 A, C, $(-1,0,0)$, D는 한 변의 길이가 a인 정사각형을 이루므로 $CD=\sqrt{2}\,a$이다. 그러면

$$2a^2=\tfrac{3}{4}a^2+\tfrac{3}{4}a^2-2\cdot\tfrac{3}{4}a^2\cos\angle CMD\quad\Longrightarrow\quad\cos\angle CMD=-\tfrac{1}{3}.$$

소문항 (ii)

면의 중심은 그 면의 세 꼭짓점의 평균이다. 한 면은 $(\pm1,0,0)$ 꼴의 꼭짓점 하나, $(0,\pm1,0)$ 꼴의 꼭짓점 하나, $(0,0,\pm1)$ 꼴의 꼭짓점 하나를 가지므로 그 중심은

$$\left(\pm\tfrac{1}{3},\pm\tfrac{1}{3},\pm\tfrac{1}{3}\right),$$

이고, 부호를 고르는 여덟 가지 방법이 여덟 개의 중심을 준다. 이 점들은 정확히 한 변의 길이가 $\frac{2}{3}$인 정육면체의 꼭짓점이므로

$$V_{\text{정육면체}} = \left(\tfrac{2}{3}\right)^3 = \tfrac{8}{27}.$$

정팔면체는 두 개의 정사각뿔(square-based pyramid)을 꼭짓점이 $(\pm1,0,0)$, $(0,\pm1,0)$인 정사각형을 따라 붙여 놓은 것이다. 이 정사각형의 대각선 길이는 2이므로 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2 = 2$이고, 각 사각뿔의 높이는 1이다. 따라서

$$V_{\text{정팔면체}} = 2\times\tfrac{1}{3}\times 2\times 1 = \tfrac{4}{3}.$$

그 비는

$$\frac{V_{\text{정팔면체}}}{V_{\text{정육면체}}} = \frac{4/3}{8/27} = \frac{9}{2},$$

이므로 정팔면체의 부피와 정육면체의 부피의 비는 $9:2$이다.

검산

- $\arccos(-\frac{1}{3}) \approx 109.47^\circ$이다. 좌표 모형의 12개 모서리 모두에 대해 중점을 이용한 계산을 수치적으로 반복하면 매번 $\cos = -\frac{1}{3}$이 나온다.
- 정팔면체는 $|x|+|y|+|z|\le 1$이다. $[-1,1]^3$에서 무작위로 뽑은 10^6개의 점으로 부피를 몬테카를로(Monte Carlo) 방법으로 추정하면 1.330이 나오며, 정확한 값은 $\frac{4}{3}$이다.
- 정육면체는 정팔면체 안에 있으므로(각 중심이 $|x|+|y|+|z|=1$을 만족한다) 그 비는 1보다 커야 한다. 실제로 $\frac{9}{2}$는 1보다 크다.

흔한 실수

- 바깥쪽 법선(outward normal) $(1,1,1)$과 $(1,1,-1)$ 사이의 각을 구해 $\arccos\frac{1}{3}$을 얻는 것. 두 면 자체 사이의 각은 그 각의 보각(supplement)이다.
- 두 모서리 CA와 DA처럼 공통 모서리에 수직이 아닌 선분을 따라 각을 재는 것. 이 경우 그 각은 90°이며, 두 면 사이의 각이 아니다.
- 정육면체의 한 변의 길이를 서로 마주 보는 두 면의 중심 사이의 거리로 생각하는 것. 그 거리 $\frac{2}{\sqrt{3}}$은 정육면체의 공간 대각선(space diagonal)이다.

STEP 너머

정육면체와 정팔면체는 **쌍대**(dual) 다면체(polyhedra)이다. 어느 한쪽의 면의 중심들을 이으면 다른 쪽이 나오며, 이때 면과 꼭짓점의 역할이 서로 바뀐다. 쌍대성은 두 입체의 대칭군(symmetry group)이 위수(order) 48인 같은 군(group)이라는 첫 번째 신호이며, 이 군은 대학의 첫 군론 강의에서 만나게 된다. 플라톤 입체(Platonic solids)의 대칭군에 대해서는 Armstrong의 *Groups and Symmetry*(군과 대칭)를 읽어 보라.

풀이

STEP I 2007, 문제 6

순수수학 • 디오판토스 방정식

STEP I 2007, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/07-s1-q6

핵심 아이디어

두 소문항 모두 거듭제곱의 차로 시작하며, $x-y$는 그 모든 식의 인수(factor)이다. 이 인수를 약분하면($d \neq 0$이므로 가능하다) x와 y에 대한 대칭식(symmetric expression)이 남는다. 이 식과 $x-y=d$를 함께 쓰면 x와 y가 결정된다. 정수해(integer solution)를 얻으려면 공식의 값이 정수가 되도록 d를 고른다. 소문항 (ii)에서는 이것이 제곱근을 유리수(rational number)로 만드는 것을 뜻한다.

풀이

소문항 (i)

좌변을 인수분해하면

$$(x-y)(x+y) = (x-y)^3.$$

$x-y=d\neq 0$이므로 $x-y$로 나누어 $x+y=(x-y)^2=d^2$을 얻는다. 이 식과 $x-y=d$를 더하고 빼면

$$x=\frac{d^2+d}{2}=\frac{d(d+1)}{2}, \qquad y=\frac{d^2-d}{2}=\frac{d(d-1)}{2}.$$

정수 쌍을 구하기 위해 $x=\sqrt{m}, y=\sqrt{n}$으로 놓는다. 그러면 $x^2-y^2=m-n$이고, 요구되는 조건은 정확히 $x^2-y^2=(x-y)^3$이다. $m>n$이므로 0이 아닌 $d=\sqrt{m}-\sqrt{n}$에 대해 다음을 얻는다.

$$m=\left(\frac{d(d+1)}{2}\right)^2, \qquad n=\left(\frac{d(d-1)}{2}\right)^2.$$

d가 양의 정수이면 $d(d\pm 1)$은 연속한 정수의 곱이므로 짝수이다. 그러면 $\sqrt{m}$과 $\sqrt{n}$은 정수이고, 따라서 m과 n도 정수이다. 또한 $d>0$이므로 $m>n$이다. $n>100$이어야 하므로

$\frac{1}{2}d(d-1) > 10$이어야 한다. $d = 5$이면 $\frac{1}{2}d(d-1) = 10$이 되어 충분하지 않으므로 $d = 6$으로 잡는다.

$$\sqrt{m} = 21, \quad \sqrt{n} = 15, \qquad m = 441, \quad n = 225.$$

검산: $m - n = 216 = 6^3 = (21-15)^3$. ($d = 7$일 때 $m = 784, n = 441$과 같은 다른 답도 똑같이 옳다.)

소문항 (ii)

다시 인수분해하면 $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$이다. $x - y = d \neq 0$으로 나누면

$$x^2 + xy + y^2 = d^3.$$

또한 $(x-y)^2 = d^2$, 즉 $x^2 - 2xy + y^2 = d^2$이다. 앞의 식에서 이 식을 빼면 요구한 대로 $3xy = d^3 - d^2$을 얻는다.

이제 $y = x - d$를 대입하면

$$3x(x-d) = d^3 - d^2 \quad \Longrightarrow \quad 3x^2 - 3dx - (d^3 - d^2) = 0.$$

근의 공식(quadratic formula)에 의해

$$x = \frac{3d \pm \sqrt{9d^2 + 12(d^3 - d^2)}}{6} = \frac{3d \pm \sqrt{3d^2(4d-1)}}{6}.$$

이때 $\sqrt{3d^2(4d-1)} = |d|\sqrt{3(4d-1)}$이고, $\pm$가 이미 두 부호를 모두 포함하므로 $|d|$를 d로 바꾸어도 된다. 2를 곱하면

$$2x = d \pm \frac{d\sqrt{3(4d-1)}}{3} = d \pm d\sqrt{\frac{4d-1}{3}},$$

이것이 요구한 결과이다.

생각해 보기 x와 y가 정수가 되도록 d를 어떻게 골라야 할까?

$m = x$와 $n = y$가 정수이면 $d = m - n$은 0이 아닌 정수이다. x가 유리수이려면 $\sqrt{(4d-1)/3}$이 유리수여야 한다. 이를 k라 하자. 그러면 $k^2 = (4d-1)/3$은 정수이고, 정수의 제곱근은 그 정수가 완전제곱수(perfect square)일 때만 유리수이므로 k는 정수이다. 따라서 다음이 필요하다.

$$4d - 1 = 3k^2 \quad \text{어떤 정수} k \geq 0.$$

좌변은 홀수이므로 k는 홀수이다. 그러면 $2x = d(1 \pm k)$는 짝수이므로 x는 정수이고, $y = x - d$도 정수이다.

- $k = 1$이면 $d = 1$이므로 $x = 1, y = 0$ 또는 $x = 0, y = -1$이다. 어느 쌍도 두 양의 정수로 이루어져 있지 않다.

- $k = 3$이면 $d = 7$이므로 $2x = 7 \pm 21$이다. 플러스 부호를 택하면 $x = 14, y = 7$이다.

따라서 $m = 14, n = 7$이 조건을 만족한다.

$$m^3 - n^3 = 2744 - 343 = 2401 = 7^4 = (m-n)^4.$$

순서가 중요하다. $m = 7, n = 14$이면 좌변은 -2401이지만 우변은 $+2401$이다.

검산

- 소문항 (i): $21^2 - 15^2 = 441 - 225 = 216$이고 $(21-15)^3 = 216$이다.
- 소문항 (ii): $d = 7$일 때 $3xy = 3 \cdot 14 \cdot 7 = 294$이고 $d^3 - d^2 = 343 - 49 = 294$이다.
- 컴퓨터로 $1 \le m, n < 200$ 범위를 탐색하면 정확히 $(14,7)$, $(57,38)$, $(148,111)$만 나온다. 이들은 $k = 3, 5, 7$(즉 $d = 7, 19, 37$)에서 나오며, 공식과 일치한다. 이 탐색은 또한 $(441, 225)$가 $n > 100$인 소문항 (i)의 해 중 가장 작은 것임을 확인해 준다.

흔한 실수

- 약분하려면 $x - y \neq 0$이어야 한다는 것을 잊는다. 문제에서 $d \neq 0$을 가정하는 이유가 바로 이것이다.
- 소문항 (i)에서 $d = 5$로 잡으면 $n = 100$이 되어 엄격한 부등식 $n > 100$을 만족하지 못한다.
- 아무 설명 없이 $\sqrt{d^2} = d$라고 쓴다. 이 값은 $|d|$이며, 절댓값(modulus)을 없앨 수 있게 해 주는 것은 $\pm$이다.

STEP 너머

소문항 (ii)는 디오판토스 방정식(Diophantine equation) $m^3 - n^3 = (m-n)^4$을 완전히 푼다. $d = (3k^2+1)/4$ (단, $k \ge 3$은 홀수)로 두면 해는 $m = \frac{1}{2}d(k+1), n = \frac{1}{2}d(k-1)$이다. 제곱근이 유리수가 되도록 요구하는 것은 이러한 방정식을 훨씬 간단한 조건 $4d - 1 = 3k^2$으로 바꾸는 표준적인 방법이다. 이와 같은 방정식과 그 배경에 있는 이차 형식(quadratic form)의 산술은 Davenport의 *The Higher Arithmetic*에서 다룬다.

풀이

STEP I 2007, 문제 7

순수수학 • 두 직선 사이의 거리

> **STEP I 2007, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/07-s1-q7

핵심 아이디어

각 직선 위의 일반적인 점을 적고, 두 점을 빼서 그 길이를 제곱한다. 그러면 D^2은 두 매개변수에 대한 이차식(quadratic)이 된다. 요령은 이 이차식을 제곱의 합(sum of squares)으로 나타내는 것이다. 제곱의 합은 각 제곱이 가능한 한 작을 때 가장 작기 때문이다. 소문항 (ii)에서도 같은 방법이 통하며, k의 값에 따라 제곱들이 어떻게 나뉘는지가 기하학적 상황을 알려 준다.

풀이

소문항 (i)

L_1 위의 일반적인 점은 $P = (1+2\lambda,\ 2\lambda,\ 2-3\lambda)$이고 L_2 위의 일반적인 점은 $Q = (4+\mu,\ -2+2\mu,\ 9-2\mu)$이다. 따라서

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 3+\mu-2\lambda \\ -2+2\mu-2\lambda \\ 7-2\mu+3\lambda \end{pmatrix}$$

이고

$$D^2 = (3+\mu-2\lambda)^2 + (-2+2\mu-2\lambda)^2 + (7-2\mu+3\lambda)^2.$$

각 항의 계수를 모으면 다음과 같다.

$$\mu^2: \quad 1+4+4=9, \qquad \lambda^2: \quad 4+4+9=17, \qquad \lambda\mu: \quad -4-8-12=-24,$$
$$\mu: \quad 6-8-28=-30, \qquad \lambda: \quad -12+8+42=38, \qquad \text{상수항}: \quad 9+4+49=62,$$

따라서 $D^2 = 9\mu^2 + 17\lambda^2 - 24\lambda\mu - 30\mu + 38\lambda + 62$이다.

이제 제시된 식을 전개한다.

$$\begin{aligned}(3\mu-4\lambda-5)^2+(\lambda-1)^2+36 &= \left(9\mu^2+16\lambda^2+25-24\lambda\mu-30\mu+40\lambda\right)\\ &\quad+\left(\lambda^2-2\lambda+1\right)+36\\ &= 9\mu^2+17\lambda^2-24\lambda\mu-30\mu+38\lambda+62.\end{aligned}$$

두 식이 일치하므로

$$D^2=(3\mu-4\lambda-5)^2+(\lambda-1)^2+36,$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다.

생각해 보기 왜 두 제곱을 동시에 0으로 만들 수 있을까?

각 제곱은 0 이상이므로, 모든 λ와 μ에 대하여 $D^2\geq 36$이다. 등호가 성립하려면 $\lambda=1$이고 $3\mu=4\lambda+5=9$, 즉 $\mu=3$이어야 한다. 이 두 조건은 서로 모순되지 않으므로(첫째 조건이 λ를 정하고, 그다음 둘째 조건이 μ를 정한다) $D^2=36$은 실제로 달성된다. 따라서 두 직선 사이의 최소 거리는

$$D_{\min}=6,$$

이고, 이는 다음에서 달성된다.

$$\lambda=1:\ P=(3,\,2,\,-1)\quad \text{직선}L_1,\qquad \mu=3:\ Q=(7,\,4,\,3)\quad \text{직선}L_2.$$

검산하면, $\overrightarrow{PQ}=(4,2,4)$의 길이는 $\sqrt{16+4+16}=6$이고, 이 벡터는 두 방향벡터(direction vector)에 모두 수직(perpendicular)이다. 실제로 $(4,2,4)\cdot(2,2,-3)=8+4-12=0$이고 $(4,2,4)\cdot(1,2,-2)=4+4-8=0$이다. 이것은 두 직선을 잇는 가장 짧은 선분에 대해 우리가 기대하는 성질 그대로이다.

소문항 (ii)

L_3 위의 일반적인 점은 $P=(2,\,3+\alpha,\,5)$이고 L_4 위의 일반적인 점은 $Q=\left(3+4k\beta,\,3+(1-k)\beta,\,-2-3k\beta\right)$이다. 따라서

$$\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}1+4k\beta\\(1-k)\beta-\alpha\\-7-3k\beta\end{pmatrix}$$

이고

$$\begin{aligned}D^2&=(1+4k\beta)^2+\left((1-k)\beta-\alpha\right)^2+(7+3k\beta)^2\\&=\left((1-k)\beta-\alpha\right)^2+25k^2\beta^2+50k\beta+50\\&=\left((1-k)\beta-\alpha\right)^2+25(k\beta+1)^2+25,\end{aligned}$$

이다. 왜냐하면 $(1+4k\beta)^2+(7+3k\beta)^2 = 1+8k\beta+16k^2\beta^2+49+42k\beta+9k^2\beta^2$이기 때문이다.

β가 무엇이든, α는 다른 곳에는 나타나지 않으므로 $\alpha=(1-k)\beta$로 택하여 첫째 제곱을 0으로 만들 수 있다. 그러므로 문제는 $25(k\beta+1)^2$을 얼마나 작게 만들 수 있느냐이며, 바로 여기서 두 경우가 갈린다.

> **?** **생각해 보기** $k=0$이면 무엇이 달라지는가?

$k\neq 0$이면 $\beta=-1/k$로 택할 수 있고, 그러면 $k\beta+1=0$이 된다. $k=0$이면 β가 무엇이든 항 $25(k\beta+1)^2$은 25에 고정된다.

경우 $k\neq 0$**.** 모든 제곱은 음이 아니므로 $D^2\geq 25$이고, 등호는 $\beta=-1/k$, $\alpha=(1-k)\beta=(k-1)/k$에서 성립한다. 최소 거리는

$$D_{\min}=5,$$

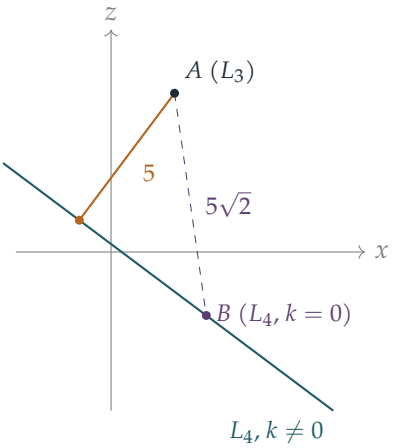
이며, 이는 (0이 아닌) k의 값에 관계없다. 가장 가까운 두 점은 $P=\left(2,\ 3+\frac{k-1}{k},\ 5\right)$와 $Q=\left(-1,\ 3+\frac{k-1}{k},\ 1\right)$이고, $\overrightarrow{PQ}=(-3,0,-4)$의 길이는 5이다. $D_{\min}>0$이므로 두 직선은 만나지 않으며, $k\neq 0$일 때 방향 $(0,1,0)$과 $(4k,1-k,-3k)$는 평행(parallel)하지 않다(둘째 벡터의 첫째 성분과 셋째 성분이 모두 영이 되지는 않는다). 따라서 두 직선은 **꼬인 위치**(skew)에 있으며, 5는 두 직선의 유일한 공통수선(common perpendicular)의 길이이다.

경우 $k=0$**.** 이때 L_4의 방향은 $(0,1,0)$으로 L_3과 같다. 즉 두 직선은 **평행**하다. 여기서 $D^2=(\beta-\alpha)^2+50$이고, 이는 $\alpha=\beta$일 때마다 최소가 되므로

$$D_{\min}=\sqrt{50}=5\sqrt{2},$$

이다. 이 값은 무수히 많은 점의 쌍에서 달성된다. 한 직선 위의 아무 점과, 다른 직선 위에서 그 점의 바로 맞은편에 있는 점(같은 y좌표를 갖는 점)이면 된다. 이는 평행한 두 직선 사이의 일정한 거리일 뿐이다.

기하학적 해석. 두 직선은 y축 방향으로 똑바로 내려다볼 때, 즉 xz평면 위로 사영(projection)할 때 가장 잘 보인다. L_3은 y축에 평행하므로 한 점 $A=(2,5)$로 사영되며, L_3에 수직인 방향의 거리는 이 사영으로 변하지 않는다. $k\neq 0$이면 L_4는 $(3,-2)$를 지나고 방향이 $(4,-3)$인 직선으로 사영되며($1-k$ 성분은 사라진다), A에서 이 직선까지의 거리는 $\left|1\cdot(-3)-(-7)\cdot 4\right|/5=5$로 k와 무관하다. $k=0$이면 L_4는 한 점 $B=(3,-2)$로 사영되고, 거리는 $AB=\sqrt{1+49}=5\sqrt{2}$이다.



따라서 답은 $k \neq 0$일 때 5(꼬인 위치의 두 직선이며, 가장 짧은 선분은 하나뿐이고 두 직선에 모두 수직이다)이고, $k = 0$일 때 $5\sqrt{2}$(평행한 두 직선이며, 거리는 어디서나 같다)이다.

검산

소문항 (i)에서 $\lambda = 1, \mu = 3$을 대입하면 거리가 6인 두 점을 얻고, $\overrightarrow{PQ}$는 두 직선에 모두 수직이다. (λ, μ)의 격자 위에서 수치적으로 탐색해 보아도 $D^2 = 36$보다 작은 값은 나오지 않았다. 소문항 (ii)에서 $k = 0.001,\ 0.3,\ 1,\ -2,\ 5$에 대하여 D^2을 수치적으로 최소화하면 매번 25가 나왔고, $k = 0$일 때는 50이 나왔다. $D_{\min}$이 $k = 0$에서 5에서 $5\sqrt{2}$로 갑자기 바뀐다는 점에 주목하자. k가 아주 작으면 가장 가까운 점들은 $\beta = -1/k$ 근처, 즉 아주 멀리 있으므로 극한이 연속일 필요는 없다.

흔한 실수

- 두 제곱이 **동시에** 0이 될 수 있는지 확인하는 것을 잊는 실수. 여기서는 가능하지만, 이를 가정하지 말고 분명히 밝혀야 한다.
- $k = 0$일 때 k로 나누는 실수. $\beta = -1/k$라는 선택은 $k \neq 0$일 때만 가능하며, 바로 이 때문에 두 경우가 생긴다.
- $k \neq 0$일 때의 두 직선을 "만난다"고 하는 실수. 두 직선은 평행하지 않지만 $D_{\min} = 5 > 0$이므로 꼬인 위치에 있다.

STEP 너머

여러 변수에서 완전제곱식을 만드는 것(completing the square)은 이차형식(quadratic forms) 이론의 출발점이다. D^2을 제곱의 합으로 나타내는 것은 대칭행렬(symmetric matrix)을 대각화(diagonalising)하는 것이고, 최솟값을 구하는 것은 최소제곱(least squares) 문제이다. 마지막에 확인한 수직 조건은 최소제곱법의 "정규방정식"(normal equations)이며, 꼬인 위치에 있는 두 직선 사이의 거리에 대한 일반 공식 $|(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})|/|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|$도 같은 기하학에서 나온다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 사영과 최소제곱을 훌륭하게 다룬다.

풀이

STEP I 2007, 문제 8

순수수학 • 삼차곡선의 접함

STEP I 2007, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/07-s1-q8

핵심 아이디어

두 곡선이 어떤 점에서 접한다(touch)는 것은 교점을 구하는 방정식이 그 점에서 중근(repeated root)을 갖는다는 것과 정확히 같다. 따라서 두 삼차식의 차를 살펴보고 $(x-2)^2$이라는 인수가 나오리라 예상한다. a가 들어 있는 항들의 계수 $1, -6, 12, -8$은 $(x-2)^3$의 이항계수(binomial coefficients)이며, 이를 알아차리면 인수분해(factorisation)와 그래프 그리기가 모두 훨씬 쉬워진다.

풀이

$(2,8)$에서 접함과 다른 교점

a가 들어 있는 항끼리 묶으면

$$ax^3 - 6ax^2 + 12ax - 8a = a(x-2)^3, \qquad \text{이므로} \qquad y = a(x-2)^3 + 12x - 16. \quad (*)$$

$y = x^3$과의 교점은 다음 방정식의 근이다.

$$a(x-2)^3 + 12x - 16 - x^3 = 0.$$

이제 $x^3 - 12x + 16$은 $x = 2$에서 0이 되고, 나눗셈을 하면 $x^3 - 12x + 16 = (x-2)^2(x+4)$를 얻는다. 따라서

$$\begin{aligned} a(x-2)^3 + 12x - 16 - x^3 &= a(x-2)^3 - (x-2)^2(x+4) \\ &= (x-2)^2\big[(a-1)x - 2a - 4\big]. \end{aligned}$$

$x = 2$에서 두 곡선은 모두 $(2,8)$을 지나고, 인수 $(x-2)^2$은 $x = 2$가 교점 방정식의 중근임을 보여 준다. 같은 말이지만 기울기(gradient)가 일치한다고 해도 된다. $(*)$에

서 $y' = 3a(x-2)^2 + 12$이고, 이는 $x = 2$에서 12이며, 그 점에서 $y = x^3$의 기울기도 $3 \cdot 2^2 = 12$이다. 그러므로 a의 값에 관계없이 두 곡선은 $(2, 8)$에서 접한다.

다른 교점은 $(a-1)x = 2a + 4$에서 나온다.

- $a \neq 1$이면 $x = \dfrac{2a+4}{a-1}$이고, 이 값은 결코 2가 아니다(2가 되려면 $2a + 4 = 2a - 2$여야 한다). 따라서 다른 교점은 정확히 하나이며, 그 점은

$$\left(\frac{2a+4}{a-1}, \left(\frac{2a+4}{a-1}\right)^3\right).$$

- $a = 1$이면 괄호 안은 상수 -6이 되므로 다른 교점은 없다.

? **생각해 보기** 어느 곡선이 위에 있고, 어디에서 그런가?

인수분해가 이 질문에 공짜로 답해 준다. $(x-2)^2 \geq 0$이므로 $(*)$에서 x^3을 뺀 값의 부호는 일차 인수 $(a-1)x - 2a - 4$의 부호와 같다. 이것으로 다른 교점의 어느 쪽에서 곡선 $(*)$가 $y = x^3$보다 위에 있는지 알 수 있으며, 그래프를 그리는 데 필요한 것은 대부분 이것이다.

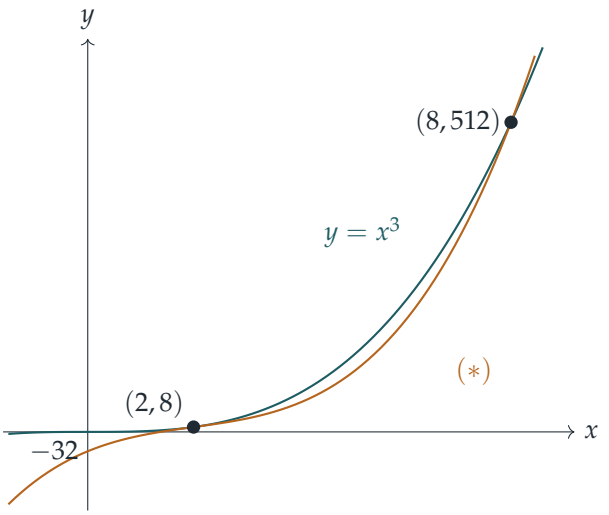
세 그래프 모두에서 $(*)$는 $(2, 8)$에서 기울기가 12인 변곡점(point of inflection)을 갖는다. $a \neq 0$일 때 $y'' = 6a(x-2)$의 부호가 그 점에서 바뀌기 때문이다. 따라서 $(*)$와 $y = x^3$은 $(2, 8)$에서 접선(tangent) $y = 12x - 16$을 공유한다. 그 점에서 $y = x^3$은 아래로 볼록(concave up)이지만 $(*)$는 그렇지 않다.

소문항 (i): $a = 2$

이때 $y = 2(x-2)^3 + 12x - 16$이고

$$y - x^3 = (x-2)^2(x-8).$$

다른 교점은 $(8, 512)$이다. 곡선 $(*)$는 $x < 8$에서 $y = x^3$보다 아래에 있고($x = 2$에서 접함), $x > 8$에서는 위에 있다. 기울기 $6(x-2)^2 + 12$가 항상 양수이므로 이 곡선은 증가하며 극점(turning points)이 없다. y축과는 $(0, -32)$에서 만나고, x축과는 $x \approx 1.37$ 근처에서 한 번 만난다.



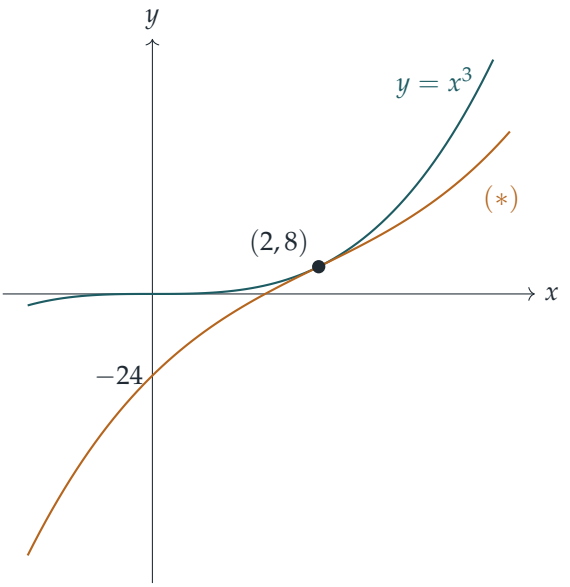
(세로 축척을 크게 줄였기 때문에 $(2,8)$에서 접하는 부분이 평평해 보인다. 두 곡선은 그 점에서 접선을 공유한다.)

소문항 (ii): $a = 1$

이때 $y = (x-2)^3 + 12x - 16 = x^3 - 6x^2 + 24x - 24$이고,

$$y - x^3 = -6(x-2)^2 \leq 0.$$

따라서 $(*)$는 접점 $(2,8)$을 제외한 모든 곳에서 $y = x^3$보다 아래에 있고, 다른 교점은 없다. 두 곡선 사이의 간격 $6(x-2)^2$은 $x = 2$에서 어느 방향으로든 멀어질수록 커진다. 기울기 $3(x-2)^2 + 12$가 항상 양수이므로 $(*)$는 증가한다. y축과는 $(0,-24)$에서 만나고, x축과는 $x \approx 1.36$ 근처에서 한 번 만난다.



소문항 (iii): $a = -2$

이제 다른 교점은 $x = \dfrac{-4+4}{-3} = 0$이므로 원점 $(0,0)$이고,

$$y - x^3 = (x-2)^2(-3x) = -3x(x-2)^2.$$

따라서 $(*)$는 $x < 0$에서 $y = x^3$보다 위에, $x > 0$에서는 아래에 있으며, $(2,8)$에서 접한다.

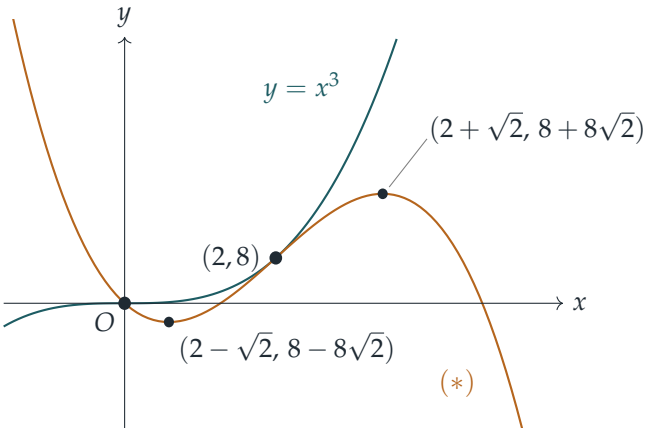
전개하면 $y = -2(x-2)^3 + 12x - 16 = -2x^3 + 12x^2 - 12x = -2x(x^2 - 6x + 6)$이고, 이 곡선은 $x = 0$과 $x = 3 \pm \sqrt{3}$(약 1.27과 4.73)에서 x축과 만난다. 기울기는

$$y' = -6(x-2)^2 + 12,$$

이고, 이는 $(x-2)^2 = 2$, 즉 $x = 2 \pm \sqrt{2}$일 때 영이 된다. 대입하면

$$x = 2 - \sqrt{2}: \quad y = 8 - 8\sqrt{2} \approx -3.31 \quad (\text{극소}),$$
$$x = 2 + \sqrt{2}: \quad y = 8 + 8\sqrt{2} \approx 19.3 \quad (\text{극대}).$$

최고차항의 계수(leading coefficient)가 음수이므로 $x \to -\infty$일 때 $y \to +\infty$이고 $x \to +\infty$일 때 $y \to -\infty$이다. 원점에서 $(*)$의 기울기는 -12이고 $y = x^3$의 기울기는 0이므로, 두 곡선은 그 점에서 실제로 교차한다.



검산

- $x = 2$에서 $(*)$는 모든 a에 대해 $a \cdot 0 + 24 - 16 = 8$을 주고, $y' = 12$이므로 $y = x^3$과 일치한다.
- $a = 2, x = 8$일 때 간단한 꼴에 대입하면 $2 \cdot 6^3 + 96 - 16 = 512 = 8^3$이므로 점 $(8, 512)$가 확인된다.
- $a = 0$일 때 $(*)$는 접선 $y = 12x - 16$이고, 공식은 다른 교점을 $x = -4$로 준다. 실제로 $x^3 - 12x + 16 = (x-2)^2(x+4)$이다.
- 무작위로 고른 수천 개의 유리수 a와 x에 대해 인수분해를 정확히 확인했고, 소문항 (iii)의 극값 $8 \pm 8\sqrt{2} \approx 19.31, -3.31$을 수치적으로 확인했다.

흔한 실수

- $a = 1$인 경우를 빠뜨리는 것. 이때는 다른 교점이 없으므로 다른 교점의 공식이 성립하지 않는다.
- 두 곡선이 모두 $(2, 8)$을 지난다는 것만 보이는 것. 접하려면 기울기도 같아야 하며, 같은 말로 중근이 있어야 한다.
- 소문항 (iii)에서 두 곡선이 원점에서 접하는 것처럼 그리는 것. 두 곡선은 그 점에서 서로 다른 기울기로 교차한다.

STEP 너머

$f(x) - g(x)$의 중근은 접함을 대수적으로 비춘 그림자이다. 즉, 그 점에서 두 곡선은 일차까지 일치한다. 이를 더 밀고 나가면 접촉의 차수(order of contact)는 도함수가 몇 개까지 일치하는지를 세는 것이고, 이것이 테일러(Taylor) 다항식(Taylor polynomials)의 바탕이 되는 아이디어이다. 테일러 다항식은 한 점에서 함수와 가능한 가장 높은 차수로 접촉하는 다항식이다. Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)는 테일러 정리를 꼼꼼하게 전개한다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에는 STEP 스타일의 그래프 그리기 문제가 더 실려 있다.

풀이

STEP I 2007, 문제 9

역학 • 빗면 위의 최대 정지 마찰

STEP I 2007, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

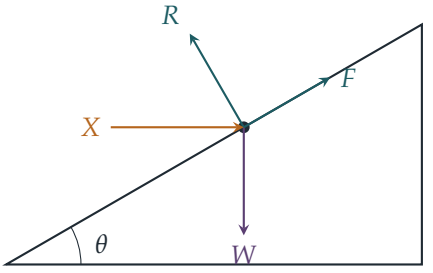
step.maths.org/questions/07-s1-q9

핵심 아이디어

이 문제는 한계 마찰(limiting friction)의 두 경우를 다루며, 두 경우는 마찰력의 방향만 다르다. 각 경우에 힘을 면에 나란한 방향과 수직인 방향으로 분해(resolve)하고 수직항력(normal reaction)을 소거하면, 각 수평력이 W에 삼각함수 식의 비를 곱한 꼴로 나타난다. 한 식을 다른 식으로 나누면 W가 사라지고 k, μ, θ만의 관계식이 남는다. 그러면 부등식(inequality)은 $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$가 결코 $\frac{1}{2}$를 넘을 수 없다는 사실에서 나온다.

풀이

물체를 입자(particle)로 모형화하고, 두 경우 모두 마찰이 한계 상태, 즉 $F = \mu R$라고 가정한다. 계산을 간결하게 하기 위해 $s = \sin\theta$, $c = \cos\theta$로 쓴다.



수평력은 입자를 면 쪽으로 밀므로, 빗면 위쪽 방향으로 성분 Xc, 면 안쪽 방향으로 성분 Xs를 가진다. 무게는 빗면 아래쪽 방향으로 성분 Ws, 면 안쪽 방향으로 성분 Wc를 가진다.

막 미끄러져 내려가려는 경우: 힘 X

입자가 막 아래로 움직이려는 상태이므로, 마찰력 μR는 (그림처럼) 면을 따라 **위쪽**으로 작용한다. 면에 수직인 방향, 그다음 면에 나란한 방향으로 힘을 분해하면

$$R = Wc + Xs, \qquad Xc + \mu R = Ws.$$

R를 대입하면

$$Xc + \mu Wc + \mu Xs = Ws \quad \Longrightarrow \quad X(c + \mu s) = W(s - \mu c). \tag{1}$$

막 미끄러져 올라가려는 경우: 힘 kX

이제 입자가 막 위로 움직이려는 상태이므로, 마찰력은 면을 따라 **아래쪽**으로 작용한다. 마찬가지로

$$R' = Wc + kXs, \qquad kXc = Ws + \mu R',$$

이므로

$$kX(c - \mu s) = W(s + \mu c). \tag{2}$$

? 생각해 보기 여기서 눈에 보이는 식들로 마음대로 나누어도 될까?

물리적 상황을 생각하면 그렇다. 입자가 미끄러져 내려가지 않게 하려면 양의 힘 X가 **필요하므로**, 이 힘이 없으면 입자는 미끄러진다. 즉 $\tan\theta > \mu$, 다시 말해 $s - \mu c > 0$이다. 그러면 (1)에서 $X > 0$이고, $c + \mu s > 0$은 어차피 성립한다. 수평으로 미는 힘이 입자를 빗면 위로 밀어 올릴 수 있으려면, (2)에서 $c - \mu s > 0$, 즉 $\tan\theta < 1/\mu$이어야 한다. 이 둘을 합치면 $\mu < \tan\theta < 1/\mu$이고, 특히 $\mu < 1$이다. 이 사실은 마지막에 필요하다.

관계식

(2)를 (1)로 나누면 X와 W가 모두 사라진다.

$$k\,\frac{c - \mu s}{c + \mu s} = \frac{s + \mu c}{s - \mu c} \quad \Longrightarrow \quad k(c - \mu s)(s - \mu c) = (s + \mu c)(c + \mu s).$$

양변을 각각 전개하고 $s^2 + c^2 = 1$을 이용하면

$$(c - \mu s)(s - \mu c) = sc - \mu c^2 - \mu s^2 + \mu^2 sc = (1 + \mu^2)sc - \mu,$$
$$(s + \mu c)(c + \mu s) = sc + \mu s^2 + \mu c^2 + \mu^2 sc = (1 + \mu^2)sc + \mu.$$

따라서 $k(1 + \mu^2)sc - k\mu = (1 + \mu^2)sc + \mu$이고, 이를 정리하면

$$(k - 1)(1 + \mu^2)\sin\theta\cos\theta = \mu(k + 1),$$

이 되어 요구된 식을 얻는다.

부등식

우변은 양수이고($\mu > 0, k > 0$이므로), θ가 예각이면 $(1+\mu^2)\sin\theta\cos\theta$도 양수이다. 따라서 $k > 1$이다. (이는 놀라운 일이 아니다. 입자를 밀어 올리는 데에는 붙잡아 두는 것보다 큰 힘이 든다.) 이제

$$\sin\theta\cos\theta = \tfrac{1}{2}\sin 2\theta \leq \tfrac{1}{2},$$

이고, $(k-1)(1+\mu^2) > 0$이므로 이 부등식의 양변에 이를 곱할 수 있다.

$$\mu(k+1) = (k-1)(1+\mu^2)\sin\theta\cos\theta \leq \tfrac{1}{2}(k-1)(1+\mu^2).$$

양변을 2배 하고 k가 있는 항을 모으면

$$2\mu k + 2\mu \leq k(1+\mu^2) - (1+\mu^2) \quad \Longrightarrow \quad k(1-2\mu+\mu^2) \geq 1 + 2\mu + \mu^2,$$

즉 $k(1-\mu)^2 \geq (1+\mu)^2$이다. 앞에서 $\mu < 1$임을 보였으므로 $(1-\mu)^2 > 0$이고, 부등호 방향을 바꾸지 않고 이것으로 나눌 수 있다.

$$k \geq \frac{(1+\mu)^2}{(1-\mu)^2}.$$

등호는 정확히 $\sin 2\theta = 1$, 즉 $\theta = 45^\circ$일 때 성립한다.

> **?** **생각해 보기** 마지막 단계 전에 왜 $\mu < 1$임을 알아야 할까?

$\mu = 1$이면 0으로 나누게 된다(그리고 바로 앞 줄은 $0 \geq 4$가 되어 거짓이다). $\mu > 1$이면 나누는 것 자체는 여전히 가능하지만, θ에 대한 조건이 이미 성립하지 않는다. 물리적으로 보면, $\mu \geq 1$일 때 두 조건 $\tan\theta > \mu \geq 1$과 $\tan\theta < 1/\mu \leq 1$은 서로 모순이다. 입자를 붙잡아 둘 필요가 아예 없거나, 어떤 수평력으로도 입자를 빗면 위로 움직이기 시작하게 할 수 없다. 따라서 문제에는 $\mu < 1$이 암묵적으로 전제되어 있다.

검산

- $\mu = \frac{1}{2}$, $\theta = 45^\circ$로 놓으면 $s = c = 1/\sqrt{2}$이다. (1)과 (2)에서 $X = W \cdot \frac{1/2}{3/2} = \frac{1}{3}W$, $kX = W \cdot \frac{3/2}{1/2} = 3W$이므로 $k = 9 = (1.5/0.5)^2$이고, 이는 등호가 성립하는 경우이다. 대신 $\theta = 60^\circ$로 놓으면 같은 식에서 $k \approx 25.2 > 9$를 얻는다.
- $\mu \to 0$이면 $X = kX = W\tan\theta$이고 $k \to 1$이 되어, 항등식(양변 모두 0)과 하한 1에 모두 들어맞는다.
- $\mu \in (0,1)$과 허용되는 θ를 무작위로 10^5번 골라 항등식과 부등식을 수치적으로 확인한 결과, 성립하지 않는 경우는 없었다.

흔한 실수

- $R = W\cos\theta$로 놓는 것. 수평력도 입자를 면 쪽으로 누르므로 수직항력에 $X\sin\theta$를 더한다.
- 두 경우에서 마찰력의 방향을 같게 두는 것. 마찰력은 항상 막 일어나려는 운동을 방해하는 방향으로 작용한다.
- $(1-\mu)^2$이 왜 양수인지(그리고 0이 아닌지) 밝히지 않고 이것으로 나누는 것.

STEP 너머

이 문제를 깔끔하게 보는 방법은 $\tan\lambda = \mu$인 **마찰각**(angle of friction) λ를 이용하는 것이다. 수직항력과 한계 마찰력은 법선과 각 λ를 이루는 하나의 힘으로 합쳐지고, (1)과 (2)는 $X = W\tan(\theta-\lambda)$, $kX = W\tan(\theta+\lambda)$가 된다. 따라서 $k = \tan(\theta+\lambda)/\tan(\theta-\lambda)$이고, 앞의 하한은 이 비가 $\theta = 45°$에서 가장 작다는 명제이다. 이런 종류의 마찰각 논증과 "마찰원뿔(friction cone)"의 개념은 대학 정역학과 접촉 이론에서 다시 등장한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 대학 1학년 과정에서 기대하는 수준의 세심함으로 마찰과 힘의 분석을 다룬다.

풀이

STEP I 2007, 문제 10

역학 • 변위-시간 그래프

STEP I 2007, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/07-s1-q10

핵심 아이디어

변위–시간 그래프(displacement–time graph)에서 각 기수와 각 군대는 하나의 직선(또는 두 개의 선분)으로 나타나며, "서로 지나친다"는 것은 단지 두 직선이 만난다는 뜻이다. 따라서 색슨 군대로부터 변위를 재어 각 직선의 방정식을 쓰고, 그 교점을 구한다. 문제에 주어진 부등식들은 정확히 교차가 우리가 예상하는 순서대로 일어나기 위한 조건이며, 마지막 부분은 그중 하나가 성립하지 않을 때 무슨 일이 일어나는지에 관한 것이다.

풀이

그래프 세우기

군대와 기수를 하나의 직선 위를 움직이는 점으로 모형화한다. s를 (정지해 있는) 색슨 군대로부터 노르만 군대 쪽으로 잰 변위라 하고, 두 군대 사이의 거리가 d일 때 시간을 재기 시작한다. 그러면 다음과 같다.

- 색슨 군대: $s = 0$.
- 노르만 군대: $s = d - ut$.
- 색슨 기수, 가는 길: $s = xt$. 그는 $xt = d - ut$일 때, 즉 $t_S = \dfrac{d}{x+u}$에 $s = \dfrac{xd}{x+u}$에서 노르만 군대에 도착한다. 속력 x로 돌아오므로

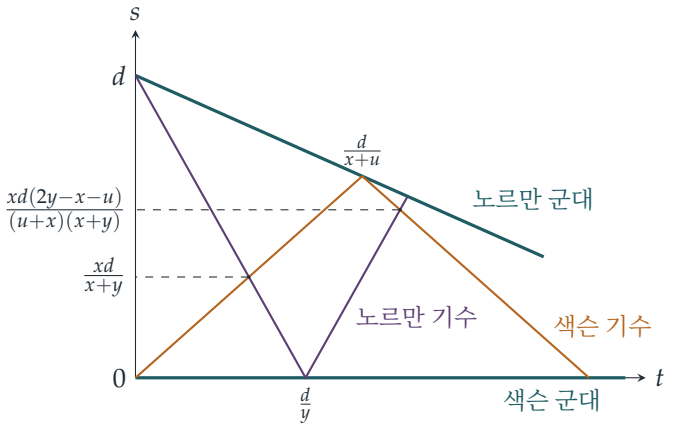
$$s = \frac{xd}{x+u} - x\left(t - \frac{d}{x+u}\right) = \frac{2xd}{x+u} - xt,$$

이고, $t = \dfrac{2d}{x+u}$에 진영으로 돌아온다.

▶ 노르만 기수, 가는 길: $s = d - yt$. 그는 $t_N = \dfrac{d}{y}$에 색슨 군대에 도착하고, 속력 y로 돌아올 때 그의 직선은

$$s = y\left(t - \frac{d}{y}\right) = yt - d.$$

이다. $y > u$이므로 그는 $yt - d = d - ut$일 때, 즉 $t = \dfrac{2d}{y+u}$에 자기 군대를 실제로 따라잡는다.



(그림은 $u = 1, x = 2, y = 4, d = 1$로 그린 것이다.)

첫 번째 지나침

두 기수 모두 가는 길에 있으므로 $s = xt$와 $s = d - yt$의 교점을 구한다. $(x+y)t = d$이므로

$$t = \frac{d}{x+y}, \qquad s = \frac{xd}{x+y}.$$

이다. $\frac{d}{x+y}$는 $\frac{d}{y}$와 $\frac{d}{x+u}$보다 모두 작으므로(두 번째 비교에는 $y > u$를 쓴다), 이는 정말로 어느 쪽도 방향을 돌리기 전이다.

두 번째 지나침

이제 두 기수 모두 돌아오는 길에 있으므로 $s = \dfrac{2xd}{x+u} - xt$와 $s = yt - d$의 교점을 구한다. 양변에 $xt + d$를 더하면

$$(x+y)t = d + \frac{2xd}{x+u} = \frac{d(3x+u)}{x+u}, \qquad \text{따라서} \qquad t_2 = \frac{d(3x+u)}{(x+u)(x+y)}.$$

이다. 그러면

$$s = \frac{2xd}{x+u} - \frac{xd(3x+u)}{(x+u)(x+y)} = \frac{xd\big(2(x+y) - (3x+u)\big)}{(x+u)(x+y)} = \frac{xd(2y-x-u)}{(u+x)(x+y)},$$

이고, 이것이 구하는 두 번째 거리이다.

생각해 보기 시각 t_2에 두 기수가 정말로 돌아오는 길에 있다는 것을 어떻게 알 수 있는가?

바로 여기서 부등식(inequality)이 필요하다. 노르만 기수는 $t_2 \geq \frac{d}{y}$이면 방향을 돌린 상태이다.

$$y(3x+u) \geq (x+u)(x+y) \iff 3xy \geq x^2 + xy + ux \iff u \leq 2y - x.$$

색슨 기수는 $t_2 \geq \frac{d}{x+u}$이면 방향을 돌린 상태이다.

$$3x + u \geq x + y \iff u \geq y - 2x.$$

따라서 조건 $y - 2x < u < 2y - x$는 정확히 t_2가 두 반환점 이후에 오도록 하는 조건이다. 같은 조건 $u < 2y - x$는 $s > 0$도 보장하므로 색슨 기수는 아직 진영에 돌아오지 않았다. (명시되지 않은 조건이 하나 더 있다. 노르만 기수가 그보다 먼저 자기 군대에 도착해서는 안 된다. $t_2 \leq \frac{2d}{y+u}$를 정리하면 $(x-u)(2x-y+u) \geq 0$이 되고, $2x - y + u > 0$이므로 이는 $x \geq u$, 즉 색슨 기수가 노르만 군대보다 느리지 않다는 뜻이다. 이는 분명히 의도된 조건이다. 그렇지 않으면 그가 방향을 돌리는 순간 군대가 그를 추월할 것이다.)

경우 (i): $u > 2y - x$

이제 $t_2 < \frac{d}{y}$이다. 색슨 기수의 돌아오는 길과 노르만 기수의 **가는** 길을 나타내는 직선이 먼저 만난다. $y > u$이므로 이 경우에는 $x > y$, 즉 색슨 기수가 더 빨라야 한다. 그는 노르만 군대에 도착하여 방향을 돌리고, 두 기수가 모두 색슨 군대 쪽으로 향하는 동안 뒤에서 노르만 기수를 따라잡는다. ($s = \frac{2xd}{x+u} - xt$와 $s = d - yt$의 교점을 구하면 이 지점은 색슨 군대로부터 $\frac{xd(x+u-2y)}{(x+u)(x-y)}$만큼 떨어져 있다.) 그는 노르만 기수가 $\frac{d}{y}$에 도착하기 전인 $\frac{2d}{x+u}$에 진영으로 돌아오므로, 두 기수는 두 번째로 마주 보며 만나지 않는다. 노르만 기수는 그저 상대가 이미 돌아와 있는 색슨 군대에 도착할 뿐이다.

경우 (ii): $u < y - 2x$

이제 $t_2 < \frac{d}{x+u}$이다. 노르만 기수가 훨씬 빠르다. 그는 색슨 군대에 도착하여 방향을 돌리고, 아직 노르만 군대를 향해 가고 있는 색슨 기수를 추월한다. $s = yt - d$와 $s = xt$의 교점을 구하면, 이 일은 $t = \frac{d}{y-x}$에 색슨 군대로부터 $\frac{xd}{y-x}$인 곳에서 일어난다. 그 후 노르만 기수는 색슨 기수가 $\frac{d}{x+u}$에 노르만 군대에 도착하기 전인 $\frac{2d}{y+u}$에 진영으로 돌아오며($2(x+u) < y+u$이므로), 열린 들판에서 더 이상의 지나침은 없다.

검산

- $d = 1, u = 1, x = 2, y = 4$(그림과 같음)일 때 공식은 $\frac{1}{3}$과 $\frac{5}{9}$에서의 지나침을 준다. 시간 간격 10^{-5}로 운동을 수치적으로 따라가면 0.3333과 0.5556에서 교차가 일어난다.
- $y = x + u$이면 두 거리는 모두 $\frac{x}{x+y}d$로 같다. 시험해 보기 좋은 특별한 값이다.
- $u \to 2y - x$일 때 두 번째 거리는 0으로 수렴한다. 두 번째 지나침이 바로 색슨 군대에서 일어나며, 이것이 경우 (i)와의 경계이다.

흔한 실수

- 시간의 원점을 방향을 돌리는 순간으로 옮기는 것을 잊고, 기수의 돌아오는 길을 $s = -xt$나 $s = yt$로 쓰는 것.
- 색슨 기수의 반환점을 구할 때, 그가 도착하는 순간이 아니라 $t = 0$에서의 노르만 군대의 위치를 쓰는 것.
- 마지막 부분에서 "그들은 만나지 않는다"라고만 말하는 것. 두 경우 모두 두 번째로 지나치기는 하지만, 같은 방향으로 가면서 한쪽이 다른 쪽을 추월한다.

STEP 너머

이와 같은 그래프는 **세계선**(*world line*)으로, 특수 상대성 이론(special relativity)의 기본 도구이다. 특수 상대성 이론에서는 움직이는 관찰자들 사이에 주고받는 빛 신호를 정확히 이런 방식으로 분석하며(레이더 방법), 직선의 기울기는 상대 속도를 나타낸다. 여기서 한 속력에는 u를 더하고 다른 속력에서는 u를 빼는 계산은 갈릴레이(Galilei) 상대 속도이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 갈릴레이적 관점과 상대론적 관점을 모두 다룬다.

풀이

STEP I 2007, 문제 11

역학 • 포물체 운동

STEP I 2007, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

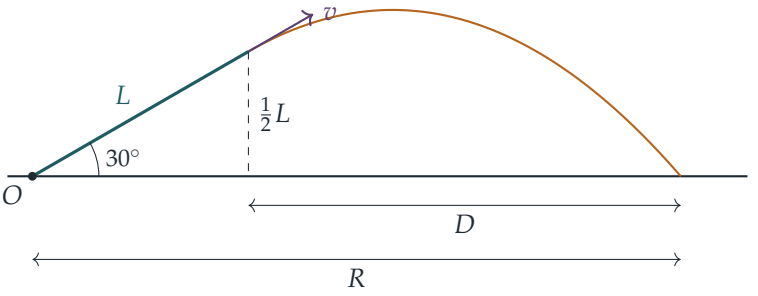
step.maths.org/questions/07-s1-q11

핵심 아이디어

운동을 두 단계로 나눈다. 매끄러운(smooth) 관 안에서 관을 따르는 방향의 힘은 중력의 성분뿐이므로, 에너지(또는 등가속도 공식)로 관을 빠져나올 때의 속력을 구할 수 있다. 그 뒤로는 착지 높이보다 $\frac{1}{2}L$만큼 높은 점에서 30°로 발사된 평범한 포물체(projectile)의 운동이다. 비행 시간을 소거하면 D에 대한 이차방정식(quadratic)을 얻고, 이 식을 **음함수 미분**(implicit differentiation)하면 D를 직접 구하지 않고도 $\mathrm{d}D/\mathrm{d}L$을 얻는다.

풀이

입자는 질점(point mass)으로, 관은 매끄럽다고(따라서 수직항력(normal reaction)은 일을 하지 않으며 관 방향 성분도 없다) 모형화하고, 공기 저항은 무시한다.



관 안에서

관 방향으로 힘을 분해하면, 유일한 힘의 성분은 경사면 아래쪽으로 향하는 $mg\sin 30^\circ = \frac{1}{2}mg$이므로 감속도(deceleration)는 $\frac{1}{2}g$이다. 거리 L을 지나는 동안

$$v^2 = u^2 - 2\cdot\tfrac{1}{2}g\cdot L = u^2 - gL,$$

이고, 여기서 v는 관을 빠져나올 때의 속력이다. (입자가 관을 빠져나오려면 애초에 $u^2 > gL$이어야 한다.) 관의 위쪽 끝은 아래쪽 끝보다 높이 $L\sin 30^\circ = \frac{1}{2}L$만큼 높고, 수평 거리로는 $L\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}L$만큼 떨어져 있다.

포물체 운동 단계

입자는 관의 방향을 따라 빠져나오므로, 속도의 수평 성분은 $\frac{\sqrt{3}}{2}v$이고 연직 성분은 위쪽으로 $\frac{1}{2}v$이다. 빠져나온 점을 기준으로 시간 t가 지난 뒤

$$x = \tfrac{\sqrt{3}}{2}vt, \qquad y = \tfrac{1}{2}vt - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

입자는 $y = -\frac{1}{2}L$일 때 아래쪽 끝의 높이로 돌아오며, 그 순간 $x = D$이다. 첫 번째 식에서 $t = \dfrac{2D}{\sqrt{3}\,v}$이고, 이를 두 번째 식에 대입하면

$$\frac{D}{\sqrt{3}} - \frac{2gD^2}{3v^2} = -\frac{L}{2}.$$

양변에 $-6v^2$을 곱하면

$$4gD^2 - 2\sqrt{3}\,v^2D - 3Lv^2 = 0,$$

이고, $v^2 = u^2 - gL$을 대입하면

$$4gD^2 - 2\sqrt{3}\,(u^2 - gL)D - 3L(u^2 - gL) = 0,$$

이 되어 구하려던 방정식을 얻는다. (두 근의 곱이 $-3Lv^2/(4g) < 0$이므로, 두 근 가운데 D는 양수인 근이다.)

도함수

u를 고정하면 D는 L에 따라 달라지므로, 방정식을 L에 대해 미분한다. 이때 둘을 모두 포함하는 각 항에는 곱의 법칙(product rule)을 쓴다.

$$8gD\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}L} - 2\sqrt{3}(u^2 - gL)\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}L} + 2\sqrt{3}\,gD - 3(u^2 - gL) + 3gL = 0.$$

마지막 두 항을 합치면 $-3(u^2 - 2gL)$이다. $\mathrm{d}D/\mathrm{d}L$이 들어 있는 항끼리 모으면

$$\left(8gD - 2\sqrt{3}(u^2 - gL)\right)\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}L} = -\left(2\sqrt{3}\,gD - 3(u^2 - 2gL)\right),$$

이므로

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}L} = -\frac{2\sqrt{3}\,gD - 3(u^2 - 2gL)}{8gD - 2\sqrt{3}(u^2 - gL)},$$

이 되어 증명이 끝난다.

? **생각해 보기** 왜 $-3L(u^2 - gL)$ 항에서 두 조각이 나오는가?

이 항에는 L이 두 번 나타나기 때문이다. $-3Lu^2 + 3gL^2$을 미분하면 $-3u^2 + 6gL$이고, 이는 $-3(u^2 - gL) + 3gL$과 같다. 괄호 안의 L을 잊어버리는 것이 답의 $2gL$을 놓치는 가장 흔한 길이다.

R이 정상값을 가질 때

아래쪽 끝에서 잰 최종 수평 변위는 관의 수평 길이에 D를 더한 것이다.

$$R = \tfrac{\sqrt{3}}{2}L + D, \qquad \text{따라서} \qquad \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}L} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}L}.$$

그러므로 $\mathrm{d}R/\mathrm{d}L = 0$일 필요충분조건은 $\mathrm{d}D/\mathrm{d}L = -\frac{\sqrt{3}}{2}$이고, 이는 (분모를 양변에 곱하면. 분모가 0이 아님은 아래에서 확인한다)

$$2\sqrt{3}\,gD - 3(u^2 - 2gL) = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\big(8gD - 2\sqrt{3}(u^2 - gL)\big) = 4\sqrt{3}\,gD - 3(u^2 - gL).$$

과 같다. $3u^2$ 항이 소거되어 $6gL - 2\sqrt{3}\,gD = 3gL$이 남으므로 $2\sqrt{3}\,gD = 3gL$, 즉

$$2D = L\sqrt{3}.$$

모든 단계는 거꾸로도 성립하므로, $2D = L\sqrt{3}$일 때 $\mathrm{d}R/\mathrm{d}L = 0$이 되어 증명이 끝난다.

R을 구하기 위해 이차방정식에 $D = \frac{\sqrt{3}}{2}L$을 대입하면

$$4g \cdot \tfrac{3}{4}L^2 - 2\sqrt{3}(u^2 - gL) \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2}L - 3L(u^2 - gL) = 3gL^2 - 6L(u^2 - gL) = 0.$$

$L > 0$이므로 $gL = 2(u^2 - gL)$이고, 따라서 $L = \dfrac{2u^2}{3g}$이다. (이때 $v^2 = u^2 - gL = \frac{1}{3}u^2 > 0$이므로 입자는 실제로 관을 빠져나오며, 분모 $8gD - 2\sqrt{3}v^2 = \frac{8\sqrt{3}}{3}u^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}u^2 = 2\sqrt{3}\,u^2$은 0이 아니다.) 마지막으로

$$R = \tfrac{\sqrt{3}}{2}L + D = \sqrt{3}\,L = \frac{2\sqrt{3}\,u^2}{3g} = \frac{2u^2}{\sqrt{3}\,g}.$$

검산

- $L = 0$이면 이차방정식에서 $D = \sqrt{3}u^2/(2g)$를 얻는데, 이는 30°로 발사했을 때의 익숙한 사거리 $u^2 \sin 60° / g$이다.

- $L = u^2/g$이면 입자는 $v = 0$으로 겨우 위쪽 끝에 도달하므로 $D = 0$이고, 다시 $R = \frac{\sqrt{3}}{2}u^2/g$이다. 정상값 $2u^2/(\sqrt{3}g) \approx 1.155\,u^2/g$는 이 두 경우 사이에 있으면서 둘 모두보다 크므로 최댓값이다.
- 수치적으로, $u = g = 1$로 두고 L을 $[0,1]$에서 훑으면 $L \approx 0.6667$에서 가장 큰 R인 1.1547을 얻으며, 이는 $2/\sqrt{3}$ 및 $L = \frac{2}{3}$과 일치한다. 운동을 직접 단계별로 계산해도 D에 대한 이차방정식이 그대로 재현된다.

흔한 실수

- 관 안에서의 감속도를 $g\sin 30^\circ = \frac{1}{2}g$가 아니라 g로 잡는 것.
- $y = -\frac{1}{2}L$ 대신 $y = 0$으로 두는 것. 입자는 발사점보다 낮은 곳에 떨어진다.
- 관 자체의 수평 길이 $\frac{\sqrt{3}}{2}L$을 잊고 $R = D$로 쓰는 것.

STEP 너머

방정식 $F(D, L) = 0$을 풀지 않고 미분하는 것이 음함수 미분이며, 대학 1학년 해석학(analysis)에서는 이것이 음함수 정리(implicit function theorem)가 된다. 즉 $F_D \neq 0$인 곳이면 어디서든 $\mathrm{d}D/\mathrm{d}L = -F_L/F_D$가 성립하는데, F_D가 바로 우리가 확인한 분모이다. 역학을 더 공부하고 싶다면 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)가 좋은 다음 단계이다.

풀이

STEP I 2007, 문제 12

확률과 통계 • 조건부 확률

STEP I 2007, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/07-s1-q12

핵심 아이디어

두 번째 사탕을 뽑을 때 주머니들이 어떤 상태인지는 앞에서 무슨 일이 일어났는지에 따라 달라지므로 미리 알 수 없다. 그래서 조건화(conditioning)를 한다. 즉 두 번째로 뽑기 전에 일어난 모든 경우로 나누고, 각 경우에 빨간 사탕이 나올 확률(probability)을 구한 다음, 전확률 법칙(law of total probability)을 이용해 더한다. 소문항 (ii)에는 유용한 지름길이 있다. 방금 무작위로 사탕 하나를 받은 주머니에 들어 있는 빨간 사탕 개수의 기댓값(expected value)은 쉽게 적을 수 있으므로, 옮겨진 사탕의 색에 따라 경우를 여러 번 나눌 필요가 없다.

풀이

소문항 (i)

첫 번째 사탕이 빨간색인 사건(event)을 R_1, 두 번째 사탕이 빨간색인 사건을 R_2라 하자. 모든 사탕이 첫 번째로 뽑힐 가능성은 같으므로

$$\mathrm{P}(R_1) = \frac{a}{N}.$$

R_2에 대해서는 첫 번째 사탕의 색으로 조건화한다. 첫 번째 사탕이 빨간색이면 남은 $N-1$개 중 $a-1$개가 빨간색이고, 빨간색이 아니면 남은 $N-1$개 중 a개가 빨간색이다. (여기서

$N \geq 2$이므로 두 번째 사탕이 반드시 존재한다.) 전확률 법칙에 의해

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(R_2) &= \mathrm{P}(R_1)\,\mathrm{P}(R_2 \mid R_1) + \mathrm{P}(R_1')\,\mathrm{P}(R_2 \mid R_1') \\ &= \frac{a}{N} \cdot \frac{a-1}{N-1} + \frac{N-a}{N} \cdot \frac{a}{N-1} \\ &= \frac{a\big[(a-1)+(N-a)\big]}{N(N-1)} = \frac{a(N-1)}{N(N-1)} = \frac{a}{N}. \end{aligned}$$

따라서 요구한 대로 $\mathrm{P}(R_2) = \mathrm{P}(R_1)$이다. (대칭성(symmetry)으로도 같은 결론을 얻는다. 서로 다른 두 사탕의 순서쌍은 모두 같은 확률로 나오므로, 두 번째 사탕이 특정한 사탕일 가능성은 첫 번째 사탕이 그 사탕일 가능성과 같다.)

소문항 (ii)

여기서 "첫 번째 사탕"은 첫 번째 동전 던지기 후에 옮겨지는 사탕이고, "두 번째 사탕"은 두 번째 동전 던지기 후에 고르는 사탕이다. 이 사탕들이 빨간색인 사건을 각각 R_1, R_2라 하자. 두 번의 동전 던지기는 서로 독립(independent)이고, 각각은 어떤 사탕이 뽑히는지와도 독립이다.

첫 번째 사탕. 첫 번째 동전 던지기로 조건화하면

$$\mathrm{P}(R_1) = p \cdot \frac{a}{N} + q \cdot \frac{b}{N} = \frac{pa+qb}{N}.$$

두 번째 사탕. 두 번의 동전 던지기에 대해 네 가지 경우가 있다.

앞면, 앞면. 주머니 1에서 사탕 하나를 꺼내고, 이어서 주머니 1에서 또 하나를 꺼낸다. 이는 정확히 소문항 (i)의 상황을 주머니 1(사탕 N개, 빨간색 a개)에 적용한 것이므로, 두 번째 사탕이 빨간색일 확률은 a/N이다.

앞면, 뒷면. 사탕 하나가 주머니 1에서 주머니 2로 옮겨져 주머니 2에는 이제 사탕이 $N+1$개 있고, 그다음 주머니 2에서 뽑는다. 주머니 2에는 확률 a/N으로 빨간 사탕이 $b+1$개, 확률 $1-a/N$으로 b개 있으므로

$$\mathrm{P}(R_2 \mid \mathrm{HT}) = \frac{a}{N} \cdot \frac{b+1}{N+1} + \left(1-\frac{a}{N}\right)\frac{b}{N+1} = \frac{b+\frac{a}{N}}{N+1} = \frac{Nb+a}{N(N+1)}.$$

> ? **생각해 보기** 두 번째 줄은 왜 이렇게 깔끔하게 정리되는가?

분자는 옮긴 뒤 주머니 2에 있는 빨간 사탕 개수의 기댓값이다. 처음부터 있던 b개에, 들어온 사탕이 빨간색일 확률 a/N을 더한 것이다. 이 경우 주머니 2의 크기는 $N+1$로 고정되어 있으므로, 빨간 사탕을 뽑을 확률은 이 기댓값을 $N+1$로 나눈 것이다.

뒷면, 앞면. 주머니의 역할을 바꾸어 같은 논증을 하면, 주머니 1에는 이제 사탕이 $N+1$개 있고 빨간 사탕 개수의 기댓값은 $a+b/N$이므로

$$\mathrm{P}(R_2 \mid \mathrm{TH}) = \frac{Na+b}{N(N+1)}.$$

뒷면, 뒷면. 소문항 (i)을 주머니 2에 적용하면 확률은 b/N이다.

이제 네 경우를 각각의 확률 p^2, pq, qp, q^2와 함께 합친다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(R_2) &= p^2\frac{a}{N} + pq\,\frac{(Nb+a)+(Na+b)}{N(N+1)} + q^2\frac{b}{N}\\ &= p^2\frac{a}{N} + pq\,\frac{(N+1)(a+b)}{N(N+1)} + q^2\frac{b}{N}\\ &= \frac{p^2a + pqa + pqb + q^2b}{N}\\ &= \frac{pa(p+q)+qb(p+q)}{N} = \frac{pa+qb}{N},\end{aligned}$$

마지막 단계에서 $p+q=1$을 이용했다. 이는 $\mathrm{P}(R_1)$과 같으며, 이것이 보여야 할 내용이었다.

검산

- $p=1$이면 모든 일이 주머니 1에서 일어나고, 두 사탕 모두에 대한 답 a/N은 정확히 소문항 (i)이다. $p=0$이면 주머니 2에 대한 소문항 (i)을 얻는다.
- $a=b=0$이면 빨간 사탕이 없으므로 두 확률 모두 0이고, $a=b=N$이면 모든 사탕이 빨간색이므로 둘 다 1이다.
- $N=5$, $a=2$, $b=4$, $p=0.3$일 때 공식은 $(0.6+2.8)/5=0.68$을 준다. 전체 과정을 200 000번 시뮬레이션(simulation)한 결과 첫 번째 사탕은 0.679, 두 번째 사탕은 0.681이었고, 작은 N, a, b 전체에 대해 정확히 모든 경우를 따져 본 결과도 일치한다.

흔한 실수

- 옮긴 뒤 받는 주머니에는 사탕이 N개가 아니라 $N+1$개 있고, 주는 주머니에는 $N-1$개 있다는 것을 잊는다.
- HH와 TT 경우에 두 번째 뽑기를 첫 번째 뽑기와 독립인 것으로 취급한다. 독립은 아니지만, 어쨌든 소문항 (i)에서 답이 바뀌지 않는다는 것을 알고 있으므로 계산을 다시 하지 말고 그 결과를 이용하면 된다.

STEP 너머

두 소문항 모두 깊은 아이디어의 예이다. 항아리에서 무엇을 꺼냈는지 보지 않고 뽑으면 항아리에 대한 우리의 지식은 바뀌지 않으므로, 다음 뽑기도 같은 분포(distribution)를 가진다. 엄밀하게 말하면 뽑기의 수열은 **교환가능**(*exchangeable*)하며, 소문항 (ii)에서 다음에 뽑는 사탕이 빨간색일 확률인 양 $p \times$ (주머니 1의 빨간 사탕 비율) $+ q \times$ (주머니 2의 빨간 사탕 비율)은 **마팅게일**(*martingale*)이다. 마팅게일이란 미래 값의 기댓값이 현재 값과 같은 양을 말한다. 마팅게일은 도박에서 금융에 이르기까지 현대 확률론의 핵심이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 조건부 기댓값(conditional expectation)과 이러한 아이디어를 처음 접하기에 좋은 책이다.

풀이

STEP I 2007, 문제 13

확률과 통계 • 조건부 확률

STEP I 2007, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/07-s1-q13

이 문제는 *Beyond STEP*의 12.1 절 **조건을 정확하게 걸기**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch12/conditioning.html

핵심 아이디어

원판은 한 번에 하나씩 나오지만 네 개의 원판으로 이루어진 모든 집합이 나올 가능성은 같으므로, 작업의 대부분은 조합(combination)의 개수를 세는 일이다. 흥미로운 부분은 조건에 있다. **어느** 원판이 먼저 나왔는지 알거나, 단순히 특정한 원판이 뽑혔다는 **사실**만 알면, 나머지 세 원판은 남은 열 개 중에서 무작위로 고른 것이 된다. 그러나 **어떤** 번호 원판이 뽑혔다는 것만 아는 경우는 전혀 다른 종류의 정보이며, 마지막 두 소문항은 바로 그 차이를 보여 주기 위한 것이다.

풀이

뽑은 네 원판 가운데 번호 원판의 개수를 N이라 하자. 주머니를 흔들었으므로 서로 다른 네 원판의 모든 순서 있는 나열은 가능성이 같고, 따라서 순서 없는 네 원판의 모든 집합도 가능성이 같다. 이러한 집합은

$$\binom{11}{4} = 330$$

개 있다. 번호 원판이 정확히 k개인 집합은 번호 원판 5개 중 k개, 빈 원판 6개 중 $4-k$개를 골라서 만들어지므로

$$\mathrm{P}(N=k) = \frac{\binom{5}{k}\binom{6}{4-k}}{330}.$$

소문항 (i)

네 개 모두 번호 원판이라는 것은 $k = 4$라는 뜻이다.

$$\mathrm{P}(N = 4) = \frac{\binom{5}{4}\binom{6}{0}}{330} = \frac{5}{330} = \frac{1}{66}.$$

같은 계산을 순서대로 뽑는 방식으로 하면 $\frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{66}$이다.

소문항 (ii)

원판 "3"이 처음에 뽑히는 사건을 T_1이라 하자. T_1이 주어지면 흔든 주머니에는 이제 번호 원판 4개와 빈 원판 6개, 모두 10개의 원판이 들어 있고, 다음 세 원판은 이들 중에서 무작위로 고른 것이다. 네 개가 모두 번호 원판인 것은 이 세 개가 모두 번호 원판일 때이고, 그때뿐이므로

$$\mathrm{P}(N = 4 \mid T_1) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}.$$

소문항 (iii)

여전히 T_1이 주어졌을 때, 남은 열 개에서 뽑은 세 원판 중 번호 원판이 정확히 하나 더 있어야 한다.

$$\mathrm{P}(N = 2 \mid T_1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{6}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{4 \times 15}{120} = \frac{1}{2}.$$

소문항 (iv)

이제 원판 "3"이 어느 시점에든 뽑히는 사건을 T라 하자.

> **생각해 보기** 원판 "3"이 처음에 나왔는지, 아니면 다른 차례에 나왔는지가 중요한가?

중요하지 않다. T가 주어지면 뽑은 네 원판은 원판 "3"과 다른 세 원판으로 이루어지고, 대칭성(symmetry)에 의해 나머지 열 원판에서 고른 세 원판의 모든 집합은 가능성이 같다. 이는 정확히 소문항 (iii)의 상황이며, 거기서도 뽑는 순서는 전혀 중요하지 않았다. 따라서 답은 다시 $\frac{1}{2}$이다.

직접 확인해 보자. $\mathrm{P}(T) = \binom{10}{3}/\binom{11}{4} = \frac{120}{330} = \frac{4}{11}$이고, 원판 "3", 다른 번호 원판 하나, 빈 원판 두 개를 포함하는 집합의 개수는 $\binom{4}{1}\binom{6}{2} = 60$이므로

$$\mathrm{P}(N = 2 \mid T) = \frac{60/330}{120/330} = \frac{1}{2}.$$

소문항 (v)

첫 번째 원판이 번호 원판인 사건을 F라 하자. 첫 번째 원판에 적힌 번호에 따라 F를 나누자. F는 다섯 사건 "원판 j가 처음에 뽑힌다"($j = 1, \ldots, 5$)의 서로소 합집합(disjoint union)이고, 각 사건의 확률은 $\frac{1}{11}$이다. 소문항 (iii)의 논증은 번호가 3이라는 사실을 사용하지 않았으므로, 각 j에 대하여

$$\mathrm{P}(N = 2 \mid \text{원판 } j\text{가 처음}) = \tfrac{1}{2}.$$

따라서 전확률 법칙(law of total probability)에 의해

$$\mathrm{P}(N = 2 \mid F) = \sum_{j=1}^{5} \frac{1/11}{5/11} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

(직접 보면, F가 주어졌을 때 나머지 세 원판은 번호 원판 4개와 빈 원판 6개 중에서 무작위로 고른 세 개이므로 다시 소문항 (iii)과 같다.)

소문항 (vi)

번호 원판이 적어도 하나 뽑히는 사건을 A라 하자. 즉 A는 사건 $N \geq 1$이다. 이것은 앞에서와 같은 종류의 정보가 **아니다**. 어떤 원판 하나를 지목하고 나머지를 무작위로 남겨 두지 않기 때문이다. 대신 조건부 확률(conditional probability)의 정의를 사용한다. $N = 2$이면 A가 성립하므로

$$\mathrm{P}(N = 2 \mid A) = \frac{\mathrm{P}(N = 2)}{\mathrm{P}(N \geq 1)}.$$

> ? **생각해 보기** 왜 "번호 원판 하나가 알려져 있으니 나머지 세 개는 남은 열 개에서 무작위로 고른 것"이라고 그냥 말할 수 없는가?

어느 원판이 알려진 원판인지 모르기 때문이다. 번호 원판이 두 개인 집합도 번호 원판이 네 개인 집합과 똑같은 방식으로 A를 만족하며, 따로 떼어 놓을 수 있는 단 하나의 원판이 없다. 그래서 이 조건은 N 자체에 따라 집합들의 가중치를 다시 매기게 되고, 우리는 개수를 세어야 한다.

계산하면

$$\mathrm{P}(N = 2) = \frac{\binom{5}{2}\binom{6}{2}}{330} = \frac{10 \times 15}{330} = \frac{150}{330}, \qquad \mathrm{P}(N = 0) = \frac{\binom{6}{4}}{330} = \frac{15}{330},$$

이므로 $\mathrm{P}(N \geq 1) = \frac{315}{330}$이고

$$\mathrm{P}(N = 2 \mid A) = \frac{150}{315} = \frac{10}{21}.$$

검산

N의 분포(distribution)는 합이 맞아야 한다. $k = 0, \ldots, 4$에 대한 개수 $\binom{5}{k}\binom{6}{4-k}$는 $15, 100, 150, 60, 5$이고, 합은 330이다. 소문항 (ii)와 (iii)에서 추가로 나오는 번호 원판 개수의 조건부 분포는 120개 중 개수가 $20, 60, 36, 4$이며, 역시 합이 올바르다. 또한 $11 \times 10 \times 9 \times 8 = 7920$가지의 순서 있는 뽑기를 모두 나열하여 정확한 분수로 여섯 개의 답($\frac{1}{66}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{10}{21}$)을 모두 확인하였다. $\frac{10}{21} \approx 0.476$이 $\frac{1}{2}$보다 조금 작다는 점에 주목하자. 이는 당연한 결과이다. $N \geq 1$이라는 조건은 $N = 0$인 경우만 제거하므로, 특정한 원판을 아는 경우보다 $N = 1$에 더 많은 가중치를 남긴다.

흔한 실수

- 소문항 (iv)와 (vi)를 같은 종류의 조건으로 취급하는 것. "원판 3이 뽑힌다"는 원판을 지목하지만 "번호 원판이 뽑힌다"는 그렇지 않으며, 답도 다르다.
- 소문항 (vi)에서 조건이 $N \geq 1$이라는 것을 잊고 $\mathrm{P}(N = 1)$이나 $\frac{5}{11}$로 나누는 것.
- 분자에서는 순서 있는 뽑기를, 분모에서는 순서 없는 집합을 세는 것. 하나를 골라 끝까지 그것을 유지해야 한다.

STEP 너머

소문항 (v)와 (vi)의 대비는 유명한 "아들 또는 딸" 역설과 같은 함정이다. **특정한** 아이가 아들이라는 말을 듣는 것과 **적어도 한** 아이가 아들이라는 말을 듣는 것은 서로 다른 답을 준다. 대학에서는 사건에 대한 조건부를 확률측도(probability measure)를 제한하고 다시 정규화하는 것으로 다루어 이를 엄밀하게 하며, 여기서 센 개수들은 초기하분포(hypergeometric distribution)를 이룬다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문), 그리고 Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문) 모두 이러한 역설을 자세히 논의한다.

풀이

STEP I 2007, 문제 14

확률과 통계 • 푸아송 모수의 유일성

STEP I 2007, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/07-s1-q14

핵심 아이디어

각 정보는 $h(\lambda) =$ 상수 꼴의 방정식을 주며, 여기서 h는 평균에 대한 어떤 함수이다. 이 방정식이 λ를 유일하게 결정하는지는 전적으로 $\lambda > 0$에서 h의 **모양**에 달려 있다. 순단조(strictly monotonic)인 h는 각 값을 많아야 한 번 지나지만, 증가하다가 감소하는 h는 대부분의 값을 두 번 지나고 최댓값만 한 번 지난다. 따라서 이 문제는 결국 각 함수가 어디에서 단조이고 어디에서 최대가 되는지를 찾는 문제이다.

풀이

풀이 전체에서 $\lambda > 0$이고(푸아송(Poisson) 분포의 평균은 양수이다), $k = 0, 1, 2, \ldots$에 대하여 $\mathrm{P}(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k/k!$이다.

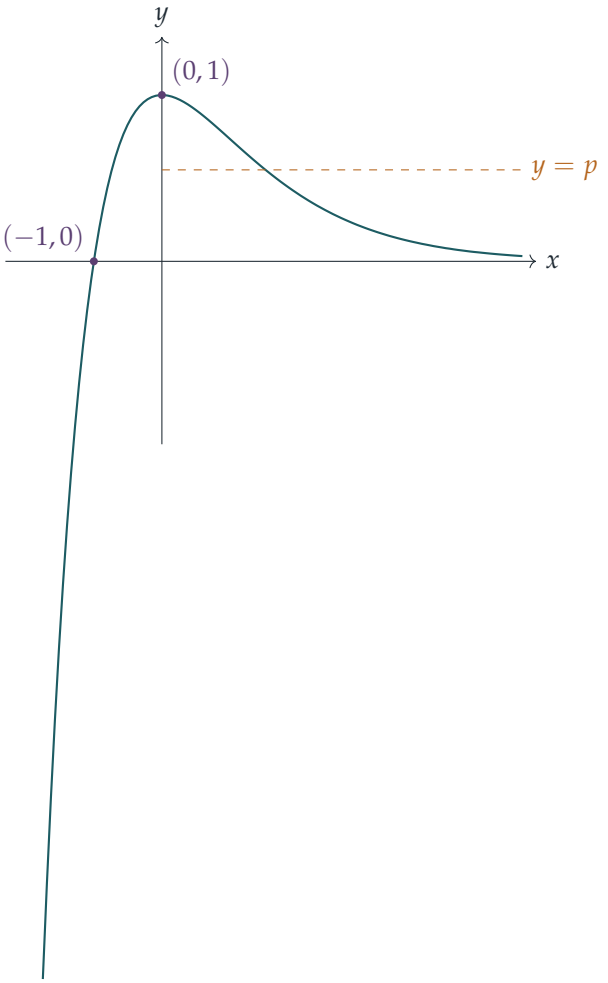
소문항 (i)

$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x}$라 하자. 곱의 미분법(product rule)에 의하여

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - (x+1)\mathrm{e}^{-x} = -x\,\mathrm{e}^{-x}.$$

$\mathrm{e}^{-x} > 0$이므로 $f'(x)$의 부호는 x의 부호와 반대이다. 즉 f는 $x < 0$에서 증가하고 $x > 0$에서 감소한다. 따라서 유일한 극점(turning point)은 $(0, 1)$에서의 극대이며, 이 점은 곡선이 y축과 만나는 점이기도 하다. 곡선은 $x + 1 = 0$인 곳, 즉 $(-1, 0)$에서 x축과 만난다.

양 끝의 행동을 보자. $x \to \infty$일 때 e^{-x}가 일차 인수를 압도하므로 $f(x) \to 0$이고, 위쪽에서 다가간다(x축이 점근선(asymptote)이다). $x \to -\infty$일 때는 두 인수의 크기가 모두 커지므로 $f(x) \to -\infty$이다.



이제 확률을 생각하자.

$$\mathrm{P}(X \geq 2) = 1 - \mathrm{P}(X = 0) - \mathrm{P}(X = 1) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda} - \lambda \mathrm{e}^{-\lambda} = 1 - f(\lambda),$$

이므로, 주어진 정보는 정확히

$$f(\lambda) = (1 + \lambda)\mathrm{e}^{-\lambda} = p.$$

라는 뜻이다. $\lambda > 0$에서 함수 f는 연속이고 순감소하며($f'(\lambda) = -\lambda \mathrm{e}^{-\lambda} < 0$이기 때문이다), $f(0) = 1$에서 시작하여 $\lambda \to \infty$일 때 0을 향해 감소한다. 따라서 $(0, 1)$의 모든 값을 정확히 한 번씩 취한다. 사잇값 정리(intermediate value theorem)에 의하여 해가 적어도 하나 존재하고, 순단조성 때문에 두 번째 해는 없다. 그림에서 $0 < p < 1$인 수평선 $y = p$는 오른쪽 가지와 정확히 한 번 만난다. 따라서 λ는 유일하게 결정된다.

소문항 (ii)

여기서는 $\mathrm{P}(X=1) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda} = q$이다. $g(\lambda) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda}$라 두면

$$g'(\lambda) = (1-\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda},$$

이므로 g는 $(0,1]$에서 순증가하고 $[1,\infty)$에서 순감소하며, 최댓값은 $g(1) = \mathrm{e}^{-1}$이다. 또한 $\lambda \to 0^+$일 때와 $\lambda \to \infty$일 때 모두 $g(\lambda) \to 0$이다. (실제로 $g(\lambda) = \mathrm{e}^{-1} f(\lambda - 1)$이므로, g의 그래프는 소문항 (i)의 곡선을 오른쪽으로 한 칸 평행이동하고 세로 방향으로 e^{-1}배 한 것이다.)

생각해 보기 정점까지 올라갔다가 내려오는 곡선과 수평선은 몇 번 만날 수 있는가?

단조인 각 부분과는 많아야 한 번 만나므로 다음이 성립한다.

- $0 < q < \mathrm{e}^{-1}$이면 $(0,1)$에 해가 하나, $(1,\infty)$에 또 하나 있으므로 가능한 λ의 값은 두 개이다.
- $q > \mathrm{e}^{-1}$이면 해가 없다.
- $q = \mathrm{e}^{-1}$이면 유일한 해는 정점 자체인 $\lambda = 1$이다.

따라서 주어진 정보가 λ를 유일하게 결정하는 q의 값은 정확히 하나뿐이며, 그 값은 다음과 같다.

$$q = \mathrm{e}^{-1}, \qquad \lambda = 1.$$

소문항 (iii)

조건부 확률(conditional probability)의 정의에 의하여, 그리고 사건 $\{X=1\}$이 $\{X \le 2\}$에 포함되므로

$$\mathrm{P}(X=1 \mid X \le 2) = \frac{\mathrm{P}(X=1)}{\mathrm{P}(X \le 2)} = \frac{\lambda \mathrm{e}^{-\lambda}}{\mathrm{e}^{-\lambda}\left(1+\lambda+\frac{1}{2}\lambda^2\right)} = \frac{2\lambda}{2+2\lambda+\lambda^2}.$$

이를 $k(\lambda)$라 하자. 분자와 분모를 λ로 나누면($\lambda > 0$이므로 가능하다)

$$k(\lambda) = \frac{2}{\lambda + \frac{2}{\lambda} + 2}.$$

생각해 보기 $\lambda > 0$일 때 $\lambda + 2/\lambda$의 최솟값은 무엇인가?

산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)에 의하여 $\lambda + \frac{2}{\lambda} \ge 2\sqrt{\lambda \cdot \frac{2}{\lambda}} = 2\sqrt{2}$이고, 등호는 정확히 $\lambda = 2/\lambda$일 때, 즉 $\lambda = \sqrt{2}$일 때 성립한다. 더욱이 $\lambda + 2/\lambda$는 $(0, \sqrt{2}]$에서 순감

소하고 $[\sqrt{2}, \infty)$에서 순증가하며(도함수 $1 - 2/\lambda^2$의 부호는 $\sqrt{2}$에서만 바뀐다), 양 끝에서 ∞로 발산한다. 따라서 k는 소문항 (ii)의 g와 같은 증가 후 감소 모양을 가지며, 최댓값은 다음과 같다.

$$k(\sqrt{2}) = \frac{2}{2\sqrt{2}+2} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1.$$

앞에서와 똑같이, $0 < r < \sqrt{2} - 1$이면 λ의 값이 두 개이고, $r > \sqrt{2} - 1$이면 하나도 없으며, $r = \sqrt{2} - 1$이면 정확히 하나이다. 따라서 λ가 유일하게 결정되는 것은 다음 경우뿐이다.

$$r = \sqrt{2} - 1, \qquad \lambda = \sqrt{2}.$$

다른 방법으로, $k(\lambda) = r$의 분모를 없애면 이차방정식 $r\lambda^2 - 2(1-r)\lambda + 2r = 0$을 얻는다. 두 근의 곱은 $2 > 0$이고 합은 $2(1-r)/r > 0$이므로, 실근이 있다면 둘 다 양수이다. 근이 정확히 하나인 것은 판별식(discriminant) $4\left[(1-r)^2 - 2r^2\right] = 4(1 - 2r - r^2)$이 0이 될 때뿐이며, 이때 $r = \sqrt{2} - 1$(양의 근을 택한다)이고 중근은 $\lambda = (1-r)/r = \sqrt{2}$이다.

검산

- 소문항 (ii): $\lambda = 1$이면 $\mathrm{P}(X = 1) = \mathrm{e}^{-1} \approx 0.3679$이다. $0 < \lambda < 40$ 범위에서 $\lambda \mathrm{e}^{-\lambda}$를 수치적으로 훑어보면 이 값을 넘는 경우가 없고, $q = 0.3$이면 교점이 두 개이다.
- 소문항 (iii): $\lambda = \sqrt{2}$이면 $\dfrac{2\sqrt{2}}{2 + 2\sqrt{2} + 2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 \approx 0.4142$이고, 수치 탐색으로 이것이 최댓값임을 확인할 수 있다. $r = 0.35$이면 λ의 값이 두 개이고, $r = 0.45$이면 하나도 없다.
- 타당성 점검: $\lambda \to 0$일 때는 확률 질량이 거의 모두 0에 몰리고, $\lambda \to \infty$일 때는 $X \le 2$라는 조건 아래의 질량이 2에 쌓이므로, 두 극한 모두에서 $\mathrm{P}(X = 1 \mid X \le 2) \to 0$이다. 이는 공식이 말해 주는 바와 같다.

흔한 실수

- $\lambda > 0$임을 잊는 것: 소문항 (i)에서 곡선은 $x < 0$에서도 존재하지만, 확률과 관련 있는 것은 $x > 0$인 가지뿐이다.
- 소문항 (i)에서 이유를 밝히지 않고 유일성을 주장하는 것: 해가 존재한다는 것(연속성, 그리고 값이 1에서 0까지 내려간다는 것)과 두 번째 해가 없다는 것(순단조성)을 모두 보여야 한다.
- 소문항 (iii)에서 $\mathrm{P}(X = 1 \text{ 이고} X \le 2) = \mathrm{P}(X = 1)\,\mathrm{P}(X \le 2)$를 사용하는 것: 두 사건은 독립이 아니며, $\{X = 1\}$이 $\{X \le 2\}$에 포함될 뿐이다.

STEP 너머

이 문제는 **식별가능성**(*identifiability*)을 처음 맛보게 해 준다. 통계학에서는 관측된 양이 모형의 모수를 결정하는지를 묻는데, 그 답은 모수에서 관측량으로 가는 사상이 일대일일 때 정확히 "그렇다"이다. 여기서 $\mathrm{P}(X \geq 2)$는 λ를 식별하지만, $\mathrm{P}(X = 1)$과 $\mathrm{P}(X = 1 \mid X \leq 2)$는 일반적으로 그렇지 않다. 같은 증가 후 감소 모양은 가능도(likelihood)를 최대화할 때 다시 나타난다. $\lambda \mathrm{e}^{-\lambda}$는 관측값 하나 $X = 1$을 본 뒤의 λ의 가능도이며, $\lambda = 1$에서의 정점이 바로 최대가능도 추정값(maximum likelihood estimate)이다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)는 푸아송 분포와 조건부 확률에 대해 더 읽어 보기에 생동감 넘치는 책이다.

풀이

STEP II 2007, 문제 1

순수수학 • 이항 근사

> **STEP II 2007, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/07-s2-q1

핵심 아이디어

이항급수(binomial series)는 작은 양이 정말로 작을 때에만 빠르게 수렴(converge)한다. 따라서 이 문제의 핵심은 무리수 거듭제곱근(surd)을 $\sqrt{1+\text{아주 작은 수}}$의 간단한 유리수 배로 바꾸어 쓰는 데 있다. 이를 위해 3 또는 6을 곱했을 때 10의 거듭제곱 바로 옆에 오는 완전제곱수(perfect square)(또는 세제곱수)를 찾는다. 그러면 k는 100(또는 1000)에 비해 작고, 몇 개의 항만으로도 필요한 정확도를 얻을 수 있다.

풀이

소문항 (i)

$x = \frac{k}{100}$일 때, $(1+x)^{1/2}$의 이항급수의 계수(coefficient)는 다음과 같다.

$$\binom{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}, \qquad \binom{\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!} = -\frac{1}{8}, \qquad \binom{\frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!} = \frac{1}{16}.$$

$x = k/100$을 대입하면

$$\left(1+\frac{k}{100}\right)^{1/2} \approx 1 + \frac{k}{200} - \frac{k^2}{80\,000} + \frac{k^3}{16\,000\,000}.$$

(a) $k = 8$이면 좌변은 $\sqrt{1.08}$이고, 요점은 $108 = 3\times 36$이라는 것이다.

$$\sqrt{1.08} = \frac{\sqrt{108}}{10} = \frac{6\sqrt{3}}{10} = \frac{3\sqrt{3}}{5}, \qquad \text{따라서} \qquad \sqrt{3} = \frac{5}{3}\sqrt{1.08}.$$

급수로 계산하면

$$\sqrt{1.08} \approx 1 + 0.04 - 0.0008 + 0.000032 = 1.039232,$$

이고, 따라서

$$\sqrt{3} \approx \frac{5}{3} \times 1.039232 = 1.7320533\ldots \approx 1.73205 \text{ (소수점 아래 다섯째 자리까지)}.$$

(b)

? **생각해 보기** 어떤 k 값에서 $1 + \frac{k}{100}$이 깔끔한 제곱수의 6배가 되는가?

k가 작아지도록, $6m^2$이 100에 가까운 정수 m에 대해 $100 + k = 6m^2$이 되게 하고 싶다. $6 \times 16 = 96$이므로 $m = 4$, $k = -4$로 잡는다.

$$\sqrt{0.96} = \frac{\sqrt{96}}{10} = \frac{4\sqrt{6}}{10} = \frac{2\sqrt{6}}{5}, \qquad \text{따라서} \qquad \sqrt{6} = \frac{5}{2}\sqrt{0.96}.$$

$k = -4$이면 첫째 항 이후의 모든 항이 음수이다.

$$\sqrt{0.96} \approx 1 - 0.02 - 0.0002 - 0.000004 = 0.979796,$$

따라서

$$\sqrt{6} \approx \frac{5}{2} \times 0.979796 = 2.44949 \text{ (소수점 아래 다섯째 자리까지)}.$$

이 k는 (a)에서의 값의 절반 크기이므로, 여기서는 무시한 항들이 더욱 작다. ($1.5 = 6/4$에서 나오는 $k = 50$ 같은 값으로도 $\sqrt{6}$을 정확히 나타낼 수 있지만, $x = \frac{1}{2}$이면 급수가 너무 느리게 수렴하여 소수점 아래 다섯째 자리까지 얻기에는 턱없이 부족하다.)

소문항 (ii)

처음 두 항으로 근사하면

$$\left(1 + \frac{k}{1000}\right)^{1/3} \approx 1 + \frac{k}{3000}.$$

? **생각해 보기** 3을 곱했을 때 1000보다 조금 큰 값이 되는 세제곱수는 무엇인가?

k가 작으면서 $1000 + k = 3m^3$이어야 한다. $1000/3 \approx 333$ 근처의 세제곱수는 $6^3 = 216$과 $7^3 = 343$이고, $3 \times 343 = 1029$는 1000에 매우 가깝다. 따라서 $k = 29$로 잡는다.

$$\sqrt[3]{1.029} = \frac{\sqrt[3]{3 \times 7^3}}{10} = \frac{7\sqrt[3]{3}}{10}, \qquad \text{따라서} \qquad \sqrt[3]{3} = \frac{10}{7}\sqrt[3]{1.029}.$$

두 항 근사를 사용하면

$$\sqrt[3]{3} \approx \frac{10}{7}\left(1 + \frac{29}{3000}\right) = \frac{10}{7} \cdot \frac{3029}{3000} = \frac{3029}{2100},$$

이고, 이것이 구하는 근사이다.

검산

계산기로 구하면 $\sqrt{3} = 1.7320508\ldots$, $\sqrt{6} = 2.4494897\ldots$이므로, 두 답 모두 소수점 아래 다섯째 자리까지 일치한다. 소문항 (ii)의 경우 $3029/2100 = 1.44238\ldots$이고 $\sqrt[3]{3} = 1.44225\ldots$이다. 약 1.3×10^{-4}인 오차는 무시한 첫 항의 크기 $\frac{10}{7} \cdot \frac{1}{9} \left(\frac{29}{1000}\right)^2 \approx 1.3 \times 10^{-4}$와 맞아떨어지므로, 이 근사는 참값보다 약간 크다.

흔한 실수

- 셋째 계수를 잘못 구하는 것: $\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{3}{2})/6 = +\frac{1}{16}$이지, $-\frac{1}{16}$이 아니다.
- 급수의 값을 구한 뒤 $\frac{5}{3}$, $\frac{5}{2}$ 또는 $\frac{10}{7}$을 다시 곱하는 것을 잊는 것.
- (b)에서 $k = 50$처럼 큰 k를 고르는 것. 이 경우 서너 개의 항으로는 전혀 부족하다.

STEP 너머

몇 개의 항이 필요한지는 결국 테일러 급수(Taylor series)의 나머지항(remainder)을 한정하는 문제로 귀결된다. 라그랑주(Lagrange) 꼴의 나머지항을 이용하면 이 근사들이 소수점 아래 다섯째 자리까지 정확하다는 것을 그저 믿는 것이 아니라 증명할 수 있다. 급수가 빠르게 수렴하는 영역으로 크기를 조정하는 이 기법은 실제로 계산기와 컴퓨터 라이브러리가 거듭제곱근과 로그를 계산하는 방법이기도 하다. 테일러 급수와 그 나머지항의 이론에 대해서는 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 참고하라.

풀이

STEP II 2007, 문제 2

순수수학 • 삼차곡선과 넓이

> **STEP II 2007, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/07-s2-q2

핵심 아이디어

삼차함수(cubic)의 극점(turning point)에 관한 모든 정보는 그 도함수(derivative)에 담겨 있다. 극점이 $x = p$와 $x = q$에 있으므로 도함수는 $(x - p)(x - q)$의 상수배여야 하고, 계수를 비교(comparing coefficients)하면 b와 c를 곧바로 얻는다. 그다음 $m - n$을 구하는 가장 깔끔한 방법은 두 극점 사이에서 도함수를 적분하는 것이고, 넓이는 $y - n$이 $x = q$에서 중근(double root)을 가진다는 사실을 알아차리면 쉽게 구해진다.

풀이

소문항 (i)

미분하면

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 6x^2 - 2bx + c.$$

이 이차식은 극점 $x = p$와 $x = q$에서 0이 되고 최고차항의 계수가 6이므로

$$6x^2 - 2bx + c = 6(x - p)(x - q) = 6x^2 - 6(p + q)x + 6pq.$$

계수를 비교하면

$$b = 3(p + q), \qquad c = 6pq.$$

나중에 쓸 사실이 두 가지 있다. 첫째, x^3의 계수가 양수이므로 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 6(x - p)(x - q)$는 두 근의 바깥에서 양수이고 두 근 사이에서 음수이다. 따라서 곡선은 증가했다가 감소한 뒤 다시 증가한다. 즉 극대(maximum)가 먼저 나타나고, $p < q$이다.

둘째, 조건 $n > 0$은 q의 범위를 제한한다. $x = q$를 대입하면

$$n = 2q^3 - 3(p + q)q^2 + 6pq^2 = q^2(3p - q),$$

이므로 $n > 0$은 $q < 3p$를 뜻한다. 종합하면 $0 < p < q < 3p$이다.

소문항 (ii)

곡선은 원점을 지나고

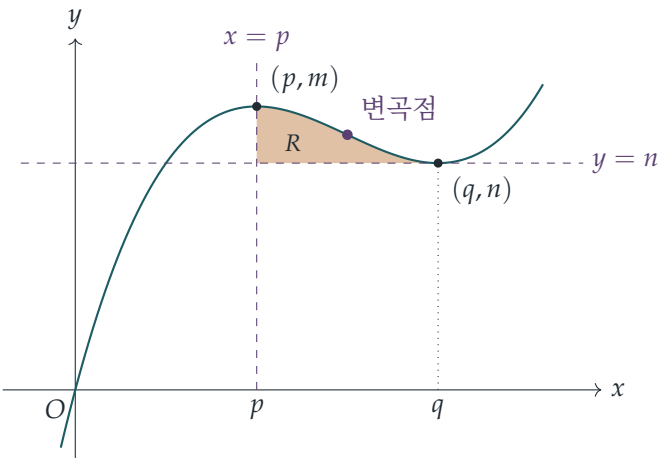
$$y = x\big(2x^2 - bx + c\big),$$

이며, 이차 인수의 판별식(discriminant)은

$$b^2 - 8c = 9(p+q)^2 - 48pq = 3(3p-q)(p-3q).$$

$q < 3p$이고 $p < q < 3q$이므로 첫 번째 괄호는 양수, 두 번째 괄호는 음수이다. 따라서 판별식은 음수이고, 곡선이 x축과 만나는 점은 원점뿐이다. 그러므로 곡선은 $-\infty$에서 올라와 O에서 축을 지나고, 극대점 (p, m)까지 올라간 뒤, 여전히 축 위에 있는 극소점(minimum) (q, n)까지 내려갔다가, 그 뒤로는 계속 증가한다.

변곡점(point of inflection)은 $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2 = 12x - 2b = 0$인 곳, 즉 $x = \frac{b}{6} = \frac{1}{2}(p+q)$로, 두 극점의 한가운데에 있다.



영역 R(색칠한 부분)는 $x = p$와 $x = q$ 사이에서 곡선 아래, 직선 $y = n$ 위에 있다. 곡선은 극소점에서 $y = n$에 접한다.

대칭성. $s = \frac{1}{2}(p+q)$, $h = q - p$로 두고, $x = s + t$로 놓아 변곡점을 기준으로 잰다. 그러면 $x - p = t + \frac{1}{2}h$이고 $x - q = t - \frac{1}{2}h$이므로

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 6\big(t^2 - \tfrac{1}{4}h^2\big),$$

이고, 이는 t에 대한 우함수(even function)이다. 따라서 0부터의 적분, 즉 $y - y(s) = 2t^3 - \frac{3}{2}h^2t$는 t에 대한 기함수(odd function)이다. 그러므로 $y(s+t) - y(s) = -\big(y(s-t) - y(s)\big)$이다. 즉 곡선은 **변곡점에 대하여 위수 2의 회전대칭**(*rotational symmetry*)을 가진

다(그 점을 중심으로 반 바퀴 돌리면 곡선이 자기 자신으로 옮겨진다). 특히 이 반 바퀴 회전은 두 극점을 서로 맞바꾸므로, 변곡점은 (p,m)과 (q,n)의 중점, 즉 $\left(\frac{1}{2}(p+q), \frac{1}{2}(m+n)\right)$이다.

소문항 (iii)

극대에서 극소까지 내려간 양은 기울기(gradient)의 적분이다.

$$m-n = y(p)-y(q) = -\int_p^q 6(x-p)(x-q)\,\mathrm{d}x.$$

생각해 보기 전개하지 않고 $\int_p^q (x-p)(x-q)\,\mathrm{d}x$를 빠르게 계산하는 방법이 있을까?

$x = p+u$로 치환하면 $h = q-p$에 대하여 $x-q = u-h$이고, u는 0부터 h까지 움직인다.

$$\int_0^h u(u-h)\,\mathrm{d}u = \frac{h^3}{3} - \frac{h^3}{2} = -\frac{h^3}{6}.$$

따라서

$$m-n = -6\left(-\frac{(q-p)^3}{6}\right) = (q-p)^3,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

소문항 (iv)

$p \le x \le q$에서 곡선은 m에서 n까지 감소하므로 $y = n$ 위 또는 그 위쪽에 있고,

$$\text{넓이} R = \int_p^q (y-n)\,\mathrm{d}x.$$

삼차식 $y-n = 2x^3 - bx^2 + cx - n$은 $x = q$에서 0이 되고 그 도함수도 거기서 0이 되므로, $x = q$는 중근이고 어떤 r에 대하여

$$y-n = 2(x-q)^2(x-r)$$

이다. x^2의 계수를 비교하면 $-2(2q+r) = -b = -3(p+q)$이므로 $r = \frac{1}{2}(3p-q)$이다. 다시 $h = q-p$로 두고 $u = x-q$($-h$부터 0까지 움직인다)로 놓으면

$$x-r = u+q-\tfrac{1}{2}(3p-q) = u+\tfrac{3}{2}h.$$

그러므로

$$\begin{aligned}\text{넓이} R &= \int_{-h}^0 2u^2\left(u+\tfrac{3}{2}h\right)\mathrm{d}u = \left[\tfrac{1}{2}u^4 + hu^3\right]_{-h}^0 \\ &= -\left(\tfrac{1}{2}h^4 - h^4\right) = \tfrac{1}{2}h^4 = \tfrac{1}{2}(q-p)^4,\end{aligned}$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

검산

$p = 1, q = 2$로 잡자($q < 3p$이므로 허용된다). 그러면 $b = 9, c = 12$이고, $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$는 $y' = 6(x-1)(x-2)$이며 $m = y(1) = 5, n = y(2) = 4 > 0$이다. 따라서 $m - n = 1 = (q-p)^3$이다. 변곡점은 두 극점의 중점인 $(1.5, 4.5)$이고, $[1,2]$에서 $y - 4$를 수치적분하면 $0.5000 = \frac{1}{2}(q-p)^4$를 얻는다. 또한 $0 < p < q < 3p$를 만족하는 무작위 쌍 2000개에 대해서도 네 결과를 모두 확인하였다.

흔한 실수

- $q < p$로 잡는 것: 삼차항의 계수가 양수이면 극대는 언제나 극소의 왼쪽에 있다.
- $y - n$ 대신 y를 적분하는 것: 이렇게 하면 직선 $y = n$ 아래에 있는 높이 n인 직사각형이 더해진다.
- 대칭성을 직선 $x = \frac{1}{2}(p+q)$에 대한 반사로 설명하는 것: 삼차함수는 거울 대칭이 아니라 한 점에 대한 반 바퀴 회전 대칭을 가진다.

STEP 너머

모든 삼차함수의 그래프는 변곡점에 대하여 반 바퀴 회전 대칭인 곡선이다. x를 평행이동하여 x^2항을 없애면(카르다노(Cardano)의 공식에서 쓰이는 "축약 삼차식(depressed cubic)" 치환) 기함수에 상수를 더한 꼴만 남기 때문이다. 소문항 (iv)의 중근 기법은 접함(tangency)과 근의 중복도(multiplicity) 이론의 출발점이며, 이 이론은 대수기하학(algebraic geometry)에서 핵심이 된다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)에 이런 정신의 문제가 더 실려 있다.

풀이

STEP II 2007, 문제 3

순수수학 • 치환적분

STEP II 2007, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/07-s2-q3

핵심 아이디어

모든 것은 $1/(a^2+x^2)$의 표준 적분(standard integral)에 달려 있으므로, 이 문제 전체의 관건은 치환(substitution)을 한 뒤 그 꼴을 알아보는 것이다. (i)(a)에서는 분자(numerator) $\cos x$가 $\sin x$의 도함수(derivative)라는 점이 강력한 힌트이다. (i)(b)에서는 반각 치환(half-angle substitution)이 $1+\sin^2 x$를 t에 대한 사차식(quartic)으로 바꾸는데, 핵심은 같은 과정을 거꾸로 돌릴 수도 있다는 점을 알아차리는 것이다. 즉 (ii)에서는 어떤 삼각함수의 적분이 새로운 사차식을 만들어 내는지 찾아낸다.

풀이

표준 적분

$a \neq 0$이라 하고 $-\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi$인 $x = a\tan\theta$로 놓자. θ가 이 구간 전체를 움직일 때 (a의 부호와 관계없이) x는 모든 실수를 정확히 한 번씩 지나므로 이 치환은 타당하고, $\tan\theta = x/a$로부터 $\theta = \arctan(x/a)$를 얻는다. 이제 $\mathrm{d}x = a\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$이고

$$a^2 + x^2 = a^2(1+\tan^2\theta) = a^2\sec^2\theta,$$

이므로

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{a\sec^2\theta}{a^2\sec^2\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int \frac{1}{a}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\theta}{a} + \text{상수} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + \text{상수},$$

가 되어 요구된 결과를 얻는다.

소문항 (i)(a)

$u = \sin x$로 치환하면 $\mathrm{d}u = \cos x\,\mathrm{d}x$이고, x가 0에서 $\frac{1}{2}\pi$까지 갈 때 u는 0에서 1까지 간다. $a = 1$인 표준 적분을 이용하면

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \Big[\arctan u\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

소문항 (i)(b)

$t = \tan\frac{1}{2}x$로 놓으면 다음의 표준적인 반각 공식을 얻는다.

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t,$$

마지막 식은 $\mathrm{d}t/\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sec^2\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}(1+t^2)$이기 때문이다. 적분 구간의 끝 $x = 0$과 $x = \frac{1}{2}\pi$는 각각 $t = 0$과 $t = \tan\frac{1}{4}\pi = 1$이 된다. 다음으로

$$1 + \sin^2 x = \frac{(1+t^2)^2 + 4t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1+6t^2+t^4}{(1+t^2)^2}.$$

이들을 모두 합치면 $1+t^2$ 인수들이 완전히 약분된다.

$$I = \int_0^1 \frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\frac{(1+t^2)^2}{1+6t^2+t^4}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \frac{1-t^2}{1+6t^2+t^4}\,\mathrm{d}t.$$

2로 나누면 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t^2}{1+6t^2+t^4}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}I$가 되어 요구된 결과를 얻는다. ((i)(a)에 의해 그 값은 $\pi/8$이다.)

소문항 (ii)

생각해 보기 사차식 $1+14t^2+t^4$는 어디에서 나왔을까?

(i)(b)에서 $6t^2$은 $1+t^2$을 제곱해서 생긴 $2t^2$에 $\sin^2 x$에서 생긴 $4t^2 = (2t)^2$이 더해진 것이었다. $14t^2$을 얻으려면 $12t^2 = 3(2t)^2$이 더 필요하고, 이는 곧 $\sin^2 x$ 대신 $3\sin^2 x$를 쓰는 것이다. 실제로 $t = \tan\frac{1}{2}x$로 놓으면

$$1 + 3\sin^2 x = \frac{(1+t^2)^2 + 12t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1+14t^2+t^4}{(1+t^2)^2}.$$

따라서 $1+\sin^2 x$ 대신 $1+3\sin^2 x$를 넣고 (i)(b)와 똑같이 계산하면

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos x}{1+3\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \frac{1-t^2}{1+14t^2+t^4}\,\mathrm{d}t.$$

좌변은 (i)(a)에서처럼 $u = \sin x$로 놓고 계산한다.

$$\int_0^1 \frac{1}{1+3u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{\frac{1}{3}+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\Big[\arctan\left(\sqrt{3}\,u\right)\Big]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{3},$$

여기서 $a = 1/\sqrt{3}$인 표준 적분을 이용하였다. 이를 반으로 나누면

$$\int_0^1 \frac{1-t^2}{1+14t^2+t^4}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{18}.$$

검산

심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 $I \approx 0.785398$ (이는 $\pi/4$이다), (i)(b)의 적분은 ≈ 0.392699 (이는 $\pi/8$이다), (ii)의 적분은 ≈ 0.302300이며, 이는 $\sqrt{3}\,\pi/18 \approx 0.302300$과 일치한다. 간단한 타당성 검사도 해 보자. 두 사차식 피적분함수(integrand)는 모두 $t = 0$에서 1, $t = 1$에서 0이고, 분모에 $14t^2$이 있는 쪽이 구간 전체에서 더 작으므로 그 적분값은 $\pi/8 \approx 0.393$보다 작아야 하는데, 실제로 그렇다.

흔한 실수

- $\mathrm{d}x$에서 나오는 인수 $\frac{2}{1+t^2}$를 빠뜨려서 (i)(b)의 인수 2를 잃어버리는 것.
- 인수 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 없이 $\int \frac{\mathrm{d}u}{1+3u^2} = \arctan(\sqrt{3}u)$라고 쓰는 것. 먼저 3을 묶어 내거나 $v = \sqrt{3}u$로 치환하라.
- 치환한 뒤에도 적분 구간을 x에 대한 값으로 남겨 두는 것. $x = \frac{1}{2}\pi$는 $t = 1$에 대응한다.

STEP 너머

더 직접적인 방법도 있다. 분자와 분모를 t^2으로 나누고 $v = t + 1/t$로 놓으면 $\frac{1-t^2}{1+kt^2+t^4}$는 $-\frac{1}{v^2+k-2}$가 되어, 역시 arctan으로 이어지는 적분이 된다. 여기서 얻는 일반적인 교훈, 즉 $\sin x$와 $\cos x$의 유리함수(rational function)는 $t = \tan\frac{1}{2}x$ 치환을 하면 항상 t의 유리함수가 되므로 원리적으로 항상 적분할 수 있다는 사실은 초등함수로 적분하는 체계적인 이론의 출발점이다. 이런 성격의 문제를 더 보려면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*를 참고하라.

풀이

STEP II 2007, 문제 4

순수수학 • 삼각방정식

> **STEP II 2007, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/07-s2-q4

핵심 아이디어

덧셈정리(compound-angle formulae)로 모든 항을 전개한 뒤 $\cos A \cos B$로 나누면, 주어진 방정식은 $t = \tan A$와 $u = \tan B$에 대한 관계식이 되고, 이 식은 tu항, t항, u항, 상수항으로 이루어진다. 이런 식이 두 일차식의 곱으로 인수분해(factorise)되는 것은 "직사각형 완성하기"(completing the rectangle)를 했을 때 남는 것이 없을 때와 정확히 같고, 그 나머지는 $\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2$의 상수배임이 밝혀진다. 세 방정식은 모두 $\alpha = 2$, $\beta = \sqrt{3}$, $\gamma = 1$이고 이 값들은 조건을 만족하므로, 남은 일은 A와 B를 올바르게 고르는 것뿐이다.

풀이

인수분해

덧셈정리에 의해

$$\begin{aligned}&\alpha \sin(A-B) + \beta\cos(A+B) - \gamma\sin(A+B)\\ &\quad= \alpha(\sin A\cos B - \cos A\sin B) + \beta(\cos A\cos B - \sin A\sin B)\\ &\qquad - \gamma(\sin A\cos B + \cos A\sin B).\end{aligned}$$

$\cos A\cos B \neq 0$이므로 이것으로 나눌 수 있다. $t = \tan A$, $u = \tan B$라 하면, 주어진 방정식은 $P(t,u) = 0$과 동치이다. 여기서

$$P(t,u) = \alpha(t-u) + \beta(1-tu) - \gamma(t+u) = -\beta tu + (\alpha-\gamma)t - (\alpha+\gamma)u + \beta.$$

$\beta \neq 0$이므로

$$m = -\frac{\alpha+\gamma}{\beta}, \qquad n = \frac{\alpha-\gamma}{\beta}.$$

이라 두자. 그러면 $-\beta(t-m)(u-n) = -\beta tu + \beta n\, t + \beta m\, u - \beta mn = -\beta tu + (\alpha-\gamma)t - (\alpha+\gamma)u + \dfrac{\alpha^2-\gamma^2}{\beta}$이고, 이는 상수항을 제외하면 P와 일치한다. 따라서 모든 t와 u에 대해

$$P(t,u) = -\beta(t-m)(u-n) + \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{\beta}. \qquad (*)$$

충분조건. $\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2$이면 $(*)$의 상수항이 사라지므로, ($\beta \neq 0$이므로) 방정식은 $(\tan A - m)(\tan B - n) = 0$이 되고, 여기서 m과 n은 α, β, γ에만 의존한다.

필요조건. 방정식이 상수 m', n'에 대해 $(t-m')(u-n') = 0$으로 간단히 된다고 하자. 즉 $P(t,u) = 0$은 $t = m'$ 또는 $u = n'$일 때, 그리고 그때에만 성립한다. $c = (\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)/\beta$라 쓰고 $c \neq 0$이라 가정하자. 그러면 모든 쌍 (m', u)가 해이므로, $P(m', u) = -\beta(m'-m)(u-n) + c$는 모든 u에 대해 영이다. $m' \neq m$이면 이것은 u에 대한 상수가 아닌 일차함수이므로 항상 영일 수는 없고, $m' = m$이면 이것은 $c \neq 0$과 같으므로 결코 영이 아니다. 어느 경우든 모순(contradiction)이므로 $c = 0$, 즉 $\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2$이다. ("간단히 된다"를 "$P$가 $(t-m)(u-n)$의 상수배이다"로 읽는다면, tu의 계수를 비교하면 그 상수는 $-\beta$일 수밖에 없고, 그러면 다시 $(*)$에 의해 $c = 0$이어야 한다.)

> **생각해 보기** 아래 소문항들에서 나눗셈을 할 수 없는 경우, 즉 $\cos x = 0$이면 어떻게 되는가?

$(*)$에 다시 $\cos A \cos B$를 곱하자. $\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2$일 때

$$\alpha\sin(A-B) + \beta\cos(A+B) - \gamma\sin(A+B) = -\beta(\sin A - m\cos A)(\sin B - n\cos B), \qquad (**)$$

를 얻는다. 이제 양변은 단지 사인과 코사인의 조합이므로, 이 항등식(identity)은 **모든** A와 B에 대해 성립한다(양변은 연속(continuous)이고 $\cos A \cos B \neq 0$일 때마다 일치하기 때문이다). $(**)$를 사용하면 $\cos A = 0$인 경우를 따로 다룰 필요가 전혀 없다.

세 소문항 모두에서 $\alpha = 2, \beta = \sqrt{3}, \gamma = 1$이고 $\alpha^2 = 4 = \beta^2+\gamma^2$이다. 따라서

$$m = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}, \qquad n = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

이고 방정식은 $(\sin A + \sqrt{3}\cos A)(\sin B - \frac{1}{\sqrt{3}}\cos B) = 0$이다. $\sin A + \sqrt{3}\cos A = 0$이면 반드시 $\cos A \neq 0$임에 주목하자(그렇지 않으면 $\sin A = 0$도 되기 때문이다). 따라서 이는 $\tan A = -\sqrt{3}$과 같다. 마찬가지로 두 번째 괄호는 $\tan B = \frac{1}{\sqrt{3}}$일 때, 그리고 그때에만 영이 된다.

소문항 (i)

$A = x$, $B = \frac{1}{4}\pi$로 잡으면 $A - B = x - \frac{1}{4}\pi$, $A + B = x + \frac{1}{4}\pi$이다. $\tan\frac{1}{4}\pi = 1 \neq \frac{1}{\sqrt{3}}$이므로 두 번째 괄호는 영이 아니고, 따라서 $\tan x = -\sqrt{3}$이어야 한다:

$$x = \tfrac{2}{3}\pi \quad \text{또는} \quad x = \tfrac{5}{3}\pi.$$

소문항 (ii)

이번에는 $A = x$, $B = \frac{1}{6}\pi$이다. 그런데 $\tan\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{\sqrt{3}} = n$이므로 두 번째 괄호는 $\sin\frac{1}{6}\pi - \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$이다. $(**)$에 의해 좌변에서 우변을 뺀 것은 항등적으로 영이다. 즉 이 방정식은 항등식이며, $0 \le x < 2\pi$인 **모든** x가 이를 만족한다.

소문항 (iii)

$A - B = x + \frac{1}{3}\pi$이고 $A + B = 3x$이어야 한다. 두 식을 더하고 빼면

$$A = 2x + \tfrac{1}{6}\pi, \qquad B = x - \tfrac{1}{6}\pi.$$

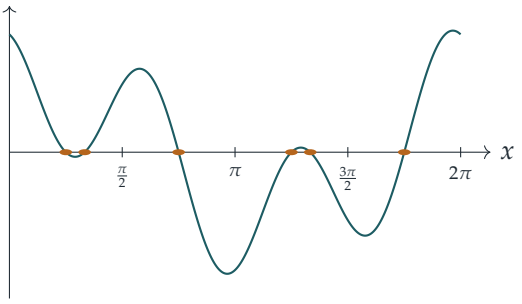
따라서 해는 $\tan(2x + \frac{1}{6}\pi) = -\sqrt{3}$ 또는 $\tan(x - \frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{\sqrt{3}}$으로 주어진다.

첫 번째 경우 $2x + \frac{1}{6}\pi = \frac{2}{3}\pi + k\pi$이므로, 정수 k에 대해 $x = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi$이다. $[0, 2\pi)$에서 이는 $x = \frac{1}{4}\pi,\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$를 준다.

두 번째 경우 $x - \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{6}\pi + k\pi$이므로 $x = \frac{1}{3}\pi + k\pi$이고, $x = \frac{1}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$를 얻는다.

이 여섯 값은 서로 다르므로 해는

$$x = \tfrac{1}{4}\pi,\ \tfrac{1}{3}\pi,\ \tfrac{3}{4}\pi,\ \tfrac{5}{4}\pi,\ \tfrac{4}{3}\pi,\ \tfrac{7}{4}\pi.$$



(iii)의 좌변에서 우변을 뺀 그래프는 표시된 여섯 점에서만 정확히 영을 지난다.

검산

- (i)에서 $x = \frac{2}{3}\pi$일 때: $2\sin\frac{5}{12}\pi \approx 1.932$, $\sqrt{3}\cos\frac{11}{12}\pi \approx -1.673$, $\sin\frac{11}{12}\pi \approx 0.259$이고, 실제로 $1.932 - 1.673 = 0.259$이다.
- (ii)에서 $x = 0$을 대입해 보면: $2\sin(-\frac{1}{6}\pi) + \sqrt{3}\cos\frac{1}{6}\pi = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} = \sin\frac{1}{6}\pi$이다. 다른 어떤 x도 마찬가지로 성립한다.
- (iii)에서 $x = \frac{1}{4}\pi$일 때: $2\sin\frac{7}{12}\pi \approx 1.932$이고 $\sin\frac{3}{4}\pi - \sqrt{3}\cos\frac{3}{4}\pi \approx 0.707 + 1.225 = 1.932$이다. $[0, 2\pi)$에서 수치적으로 근을 찾아보면 정확히 위의 여섯 근이 나온다.

흔한 실수

- (iii)에서 $A = x + \frac{1}{3}\pi$로 잡고 B를 $3x$로부터 정하는 것: $A - B = x + \frac{1}{3}\pi$, $A + B = 3x$를 연립하여 풀어야 한다.
- (iii)에서 $k = 0, 1$에서 멈추어 해를 놓치는 것: $\tan(2x + \frac{1}{6}\pi)$의 주기(period)는 $\frac{1}{2}\pi$이므로, 그 괄호에서 나오는 해는 네 개이다.
- (ii)가 항등식임을 알아채지 못하고 특정한 해를 찾아 헤매는 것.

STEP 너머

식 $-\beta tu + (\alpha - \gamma)t - (\alpha + \gamma)u + \beta$는 이차곡선(conic)의 한 퇴화된 경우이다. 그 영점 집합은 직각쌍곡선(rectangular hyperbola)이지만, 행렬식(determinant)과 비슷한 어떤 양이 영이 되면 두 직선으로 쪼개진다. 이차형식(quadratic form)이 언제 인수분해되는지 판정하는 것은 행렬과 고유값(eigenvalue)을 이용해 이차곡선을 분류하는 첫걸음이며, 이는 대학 1학년 선형대수(linear algebra)에서 다루는 주제이다. Strang, *Introduction to Linear Algebra*(선형대수 입문)를 참고하라. Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에는 이런 흐름의 삼각방정식이 더 실려 있다.

풀이

STEP II 2007, 문제 5

순수수학 • 반복 함수

> **STEP II 2007, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/07-s2-q5

핵심 아이디어

$\dfrac{x+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\,x}$ 꼴은 $\tan B = \sqrt{3}$, 즉 $B = \frac{\pi}{3}$일 때의 $\tan(A+B)$에 대한 덧셈정리(compound-angle formula)이다. 따라서 f는 각에 $\frac{\pi}{3}$을 더할 뿐이고, tan의 주기(period)가 π이므로 세 번 적용하면 처음 자리로 돌아온다. 소문항 (iii)에서도 sin과 $\frac{\pi}{6}$으로 같은 방법이 통하지만 함정이 하나 있다: $\sqrt{1-t^2}$는 각이 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$에 있을 때만 코사인이 되며, 이 때문에 답이 달라진다.

풀이

소문항 (i)

$y = f(x) = \dfrac{x+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\,x}$로 두자. 그러면 $f^2(x) = \dfrac{y+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\,y}$이고, 분자와 분모에 $1-\sqrt{3}\,x$를 곱하면 다음과 같다.

$$f^2(x) = \frac{(x+\sqrt{3})+\sqrt{3}(1-\sqrt{3}\,x)}{(1-\sqrt{3}\,x)-\sqrt{3}(x+\sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{3}-2x}{-2-2\sqrt{3}\,x} = \frac{x-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\,x}.$$

이제 f를 한 번 더 적용한다. 이번에는 $y = f^2(x)$로 두고 분자와 분모에 $1+\sqrt{3}\,x$를 곱하면 다음과 같다.

$$f^3(x) = \frac{(x-\sqrt{3})+\sqrt{3}(1+\sqrt{3}\,x)}{(1+\sqrt{3}\,x)-\sqrt{3}(x-\sqrt{3})} = \frac{4x}{4} = x.$$

따라서 f^3은 항등함수(identity)이다. (제외된 두 점은 바로 모든 단계가 정의되도록 해 주는 점들이다: $f(x)$에는 $x \neq 1/\sqrt{3}$이, $f^2(x)$에는 $x \neq -1/\sqrt{3}$이 필요하고, f는 $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1/\sqrt{3}\}$를 자기 자신 위로 보내므로 계속 적용할 수 있다.)

$2007 = 3 \times 669$이므로

$$f^{2007}(x) = \left(f^3\right)^{669}(x) = x.$$

소문항 (ii)

$x = \tan\theta$라 하자. $\tan\alpha$가 정의되고 $1 - \sqrt{3}\tan\alpha \neq 0$인 임의의 각 α에 대하여, 덧셈정리에 $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$을 쓰면 다음을 얻는다.

$$f(\tan\alpha) = \frac{\tan\alpha + \tan\frac{\pi}{3}}{1 - \tan\alpha\tan\frac{\pi}{3}} = \tan\left(\alpha + \tfrac{\pi}{3}\right).$$

$\alpha = \theta$로 두면 이것이 $n = 1$인 경우이다. $f^k(x) = \tan(\theta + \frac{1}{3}k\pi)$라면 $\alpha = \theta + \frac{1}{3}k\pi$로 두고 이 공식을 적용하여

$$f^{k+1}(x) = f\left(\tan(\theta + \tfrac{1}{3}k\pi)\right) = \tan\left(\theta + \tfrac{1}{3}(k+1)\pi\right),$$

을 얻으므로, 수학적 귀납법(induction)에 의해 모든 양의 정수 n에 대하여 $f^n(x) = \tan(\theta + \frac{1}{3}n\pi)$이다.

그 과정에서 문제가 생기지는 않는다: 공식이 성립하지 않는 것은 어떤 각 $\theta + \frac{1}{3}k\pi$가 π를 법으로 $\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{\pi}{6}$과 합동일 때뿐인데, 그러려면 $\theta = \pm\frac{\pi}{6}$ 또는 $\pm\frac{\pi}{2}$, 즉 $x = \pm 1/\sqrt{3}$이거나 x가 무한대여야 하고, 이는 제외된 경우이다. 이것으로 소문항 (i)도 설명된다: $\frac{\pi}{3}$을 세 번 더하면 tan의 주기인 π를 더하는 셈이다.

소문항 (iii)

$|t| \leq 1$이므로 $\varphi = \arcsin t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$로 두어 $t = \sin\varphi$로 쓸 수 있다.

> **생각해 보기** $\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$는 항상 $\cos\alpha$와 같은가?

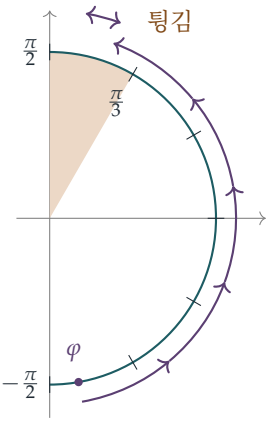
$\cos\alpha \geq 0$일 때만 그렇다. 각 $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$에 대해서는 문제가 없으므로

$$g(\sin\alpha) = \cos\tfrac{\pi}{6}\sin\alpha + \sin\tfrac{\pi}{6}\cos\alpha = \sin\left(\alpha + \tfrac{\pi}{6}\right). \qquad (*)$$

$(*)$를 다시 적용하려면 결과를 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$에 속하는 각의 sin으로 다시 써야 한다. 두 가지 경우가 있다.

- $\alpha \leq \frac{\pi}{3}$이면 $\alpha + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}$이므로 이미 범위 안에 있다.
- $\frac{\pi}{3} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$이면 $\alpha + \frac{\pi}{6}$이 $\frac{\pi}{2}$를 넘어설 수 있지만, $\sin(\alpha + \frac{\pi}{6}) = \sin\left(\pi - \alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{6} - \alpha\right)$이고 $\frac{5\pi}{6} - \alpha \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$이다.

($\alpha = \frac{\pi}{3}$에서는 두 경우 모두 $\frac{\pi}{2}$가 된다.) 따라서 범위 안의 각은 $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$에 도달할 때까지 $\frac{\pi}{6}$씩 **올라가고**, 그 뒤로는 $\alpha \mapsto \frac{5\pi}{6} - \alpha$에 의해 **반사**되는데, 이 반사는 한 번 더 하면 원래대로 돌아온다: 각은 두 값 사이를 오간다.



g를 한 번 적용할 때마다 각은 단위원의 오른쪽 반원을 따라 $\frac{\pi}{6}$만큼 이동한다. 일단 색칠된 구간 $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$에 들어서면 그 안에서 앞뒤로 뒤집힌다.

이제 필요한 올라가기 횟수를 m이라 하자. 즉 $\varphi + \frac{m\pi}{6} \geq \frac{\pi}{3}$을 만족하는 가장 작은 정수 $m \geq 0$이다. $\varphi \geq -\frac{\pi}{2}$이므로 $m \leq 5$이고, t로 나타내면 다음과 같다.

t	$[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$	$[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$	$[0, \frac{1}{2})$	$[-\frac{1}{2}, 0)$	$[-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$	$[-1, -\frac{\sqrt{3}}{2})$
m	0	1	2	3	4	5

$\varphi_n \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\varphi_0 = \varphi$로 하여 $g^n(t) = \sin\varphi_n$으로 쓰자. $n \leq m$이면 그 이전의 각은 모두 $\frac{\pi}{3}$보다 작았으므로 $\varphi_n = \varphi + \frac{n\pi}{6}$이다. 그러면 $\varphi_m \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$이므로 $\varphi_{m+1} = \frac{5\pi}{6} - \varphi_m$, $\varphi_{m+2} = \varphi_m$과 같이 번갈아 나타난다. $\sin\varphi_{m+1} = \sin(\varphi_m + \frac{\pi}{6}) = \sin(\varphi + \frac{(m+1)\pi}{6})$이므로, $\varphi = \arcsin t$와 표의 m을 써서 다음을 얻는다.

$$g^n(t) = \begin{cases} \sin(\varphi + \frac{n\pi}{6}), & n \leq m+1, \\ \sin(\varphi + \frac{m\pi}{6}), & n > m+1,\ n-m \text{ 짝수}, \\ \sin(\varphi + \frac{(m+1)\pi}{6}), & n > m+1,\ n-m \text{ 홀수}. \end{cases}$$

특히 모든 t와 모든 $n \geq 5$에 대하여 $g^{n+2}(t) = g^n(t)$이다.

예를 들어 $t = 0$이면 $\varphi = 0$, $m = 2$이고, 궤도(orbit)는 $0 \mapsto \frac{1}{2} \mapsto \frac{\sqrt{3}}{2} \mapsto 1 \mapsto \frac{\sqrt{3}}{2} \mapsto 1 \mapsto \cdots$이다.

검산

- $x = 1$에서: $f(1) = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = -2-\sqrt{3}$, $f^2(1) = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \sqrt{3}-2$이고 $f(\sqrt{3}-2) = 1$이며, 이는 $\tan\frac{\pi}{4}$, $\tan\frac{7\pi}{12}$, $\tan\frac{11\pi}{12}$와 일치한다.

- 직접 계산하면 $g(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$이고 $g(1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$이다: 튕김은 실제로 일어난다. $g^5(0)$에 대한 순진한 추측 $\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$는 틀렸으며, 실제로 반복하면 1이 나온다.
- 수치적으로, 무작위로 고른 5000개의 $t \in [-1, 1]$에서 출발하여 g를 열아홉 번 반복한 결과는 상자 안의 공식과 2×10^{-12} 이내에서 일치했다.

흔한 실수

- (iii)의 답을 모든 n에 대하여 $\sin(\varphi + \frac{n\pi}{6})$로 쓰는 것. 이는 $\sqrt{1-t^2} \geq 0$이라는 사실, 따라서 각이 결코 $\frac{\pi}{2}$를 넘을 수 없다는 점을 잊은 것이다.
- f^2 계산에서의 산술 실수: 정리하기 전에 분자와 분모 전체에 $1 - \sqrt{3}\,x$를 곱하라.

STEP 너머

$x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ 꼴의 사상은 뫼비우스 변환(Möbius transformation)이고, 두 뫼비우스 변환의 합성(composition)은 각각의 행렬 $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$의 곱에 대응한다. 여기서 f의 행렬은 $2\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & \sin\frac{\pi}{3} \\ -\sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$로, $\frac{\pi}{3}$만큼의 회전을 상수배한 것이며 그 세제곱은 항등행렬의 상수배이다. 이것이 $f^3(x) = x$인 이유이다. 소문항 (iii)은 동역학계(dynamical systems)를 살짝 맛보게 해 준다: 주기적이지는 않지만 **결국 주기적인**(*eventually periodic*) 점들이 나타난다. 뫼비우스 변환에 대한 아름다운 기하학적 설명은 Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)에서 찾아볼 수 있다.

풀이

STEP II 2007, 문제 6

순수수학 • 일계 미분방정식

> **STEP II 2007, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/07-s2-q6

핵심 아이디어

소문항 (i)에서 주어진 두 함수는 도함수(derivative)의 분모에 모두 $\sqrt{3+x^2}$이 들어 있다. 이 둘을 적절히 결합하면 도함수가 $\sqrt{3+x^2}$ 자체의 상수배가 되므로, 적분(integral)이 저절로 얻어진다. 소문항 (ii)의 미분방정식(differential equation)은 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$에 대한 이차방정식이다. 이 이차방정식을 풀면 평범한 1계 방정식 두 개가 나오고, 각각을 풀 때 바로 소문항 (i)의 적분이 필요하다.

풀이

소문항 (i)

$s=\sqrt{3+x^2}$이라 두면 모든 실수 x에 대하여 $s>0$이고 $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x}{s}$이다. 또한 $s>|x|$이므로 $x+s>0$이고, 따라서 로그는 모든 x에서 정의된다.

연쇄법칙(chain rule)에 의하여

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(x+s)=\frac{1+\dfrac{x}{s}}{x+s}=\frac{\dfrac{s+x}{s}}{x+s}=\frac{1}{\sqrt{3+x^2}}.$$

곱의 미분법(product rule)에 의하여

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xs)=s+x\cdot\frac{x}{s}=\frac{s^2+x^2}{s}=\frac{3+2x^2}{\sqrt{3+x^2}}.$$

생각해 보기 이 두 도함수로부터 어떻게 $\int\sqrt{3+x^2}\,\mathrm{d}x$를 얻을 수 있을까?

$\dfrac{3+x^2}{s} = s$이므로, 분모 s 위에 분자 $3+x^2$이 오기를 원한다. 두 번째 도함수의 분자는 $3+2x^2$이다. 여기에 첫 번째 도함수의 3배를 더하면

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(xs + 3\ln(x+s)\Big) = \frac{3+2x^2+3}{s} = \frac{2(3+x^2)}{s} = 2\sqrt{3+x^2}.$$

따라서

$$\int \sqrt{3+x^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}x\sqrt{3+x^2} + \tfrac{3}{2}\ln\big(x+\sqrt{3+x^2}\,\big) + C.$$

소문항 (ii)

$p = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$라 두자. 주어진 방정식은 p에 대한 이차방정식 $3p^2 + 2xp - 1 = 0$이므로

$$p = \frac{-2x \pm \sqrt{4x^2+12}}{6} = \frac{-x \pm \sqrt{3+x^2}}{3}.$$

판별식(discriminant) $4x^2+12$는 항상 양수이므로, 모든 x에서 서로 다른 두 실근이 있다. 두 근의 차 $\frac{2}{3}\sqrt{3+x^2}$은 결코 0이 되지 않으므로, 해가 도중에 한 근에서 다른 근으로 갈아탈 수 없다. (도함수는 중간값 성질(intermediate value property)을 가지므로, 항상 $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ 이상 떨어져 있는 두 값 사이를 건너뛸 수 없다.) 그러므로 모든 해는 모든 x에 대하여

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{3+x^2} \qquad \text{또는} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{3+x^2}$$

중 하나를 만족한다. 소문항 (i)을 이용하여 적분하면

$$y = -\frac{x^2}{6} \pm \Big(\tfrac{1}{6}x\sqrt{3+x^2} + \tfrac{1}{2}\ln\big(x+\sqrt{3+x^2}\,\big)\Big) + C.$$

$x=1$에서 $\sqrt{3+x^2} = 2$이고 $\ln(x+\sqrt{3+x^2}) = \ln 3$이다.

+ 부호를 택하는 경우: $y(1)=0$에서 $0 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\ln 3 + C$이므로 $C = -\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\ln 3$이다. 로그를 하나로 합치면

$$y = \frac{x\sqrt{3+x^2} - x^2 - 1}{6} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+\sqrt{3+x^2}}{3}\right).$$

− 부호를 택하는 경우: $y(1)=0$에서 $0 = -\frac{1}{6} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\ln 3 + C$이므로 $C = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 3$이고

$$y = \frac{3 - x^2 - x\sqrt{3+x^2}}{6} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+\sqrt{3+x^2}}{3}\right).$$

이 둘이 $(1,0)$을 지나는 두 해이며, 둘 다 모든 실수 x에서 유효하다.

검산

- 각 답에 $x = 1$을 대입하면 괄호 부분은 $\frac{2-1-1}{6} = 0$ (또는 $\frac{3-1-2}{6} = 0$)이고, $\ln \frac{1+2}{3} = 0$이다. 따라서 두 경우 모두 $y(1) = 0$이다.
- p에 대한 두 근의 합은 $-\frac{2x}{3}$이므로, 두 해의 합은 $\frac{1-x^2}{3}$이 되어야 한다. 실제로 제곱근과 로그 항이 상쇄되어 정확히 $\frac{2-2x^2}{6} = \frac{1-x^2}{3}$만 남는다.
- 수치적으로, 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 $\int_{-1}^{2} \sqrt{3+x^2}\,\mathrm{d}x \approx 5.949681$이며, 이는 소문항 (i)의 공식과 일치한다. 방정식의 각 가지를 룽게-쿠타 방법(Runge–Kutta method)으로 $(1, 0)$에서 $x = 4$까지 진행하면 $y \approx 0.584957$과 $y \approx -5.584957$을 얻는데, 이는 두 공식과 일치한다. (둘의 합은 $-5 = \frac{1-16}{3}$이다.)

흔한 실수

- $3p^2 + 2xp = 1$을 p에 대한 이차방정식으로 풀지 않고, 선형으로 취급하거나 변수분리를 시도하는 것.
- 두 가지에 하나의 상수 C를 쓰는 것. 각 부호마다 따로 상수가 필요하며, 각각 $y(1) = 0$으로 정해진다.
- $\sqrt{3+x^2}$ 앞의 인수 $\frac{1}{3}$을 빠뜨려서, 소문항 (i)의 적분을 잘못된 배수로 사용하는 것.

STEP 너머

$F\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = 0$처럼 도함수에 대하여 선형이 아닌 방정식을 **음함수 꼴**(*implicit*) 방정식이라 한다. 한 점을 지나는 해가 여러 개일 수 있는데, p에 대한 방정식의 근 하나마다 해가 하나씩 있다. 두 근이 만나는 곳에서는 **특이해**(*singular solution*)가 나타날 수 있다(클레로 방정식(Clairaut's equation)에서처럼 곡선족의 포락선(envelope)이 그 예이다). 이 문제에서는 두 근이 결코 만나지 않으므로 해가 정확히 두 개이다. 소문항 (i)의 $\ln(x + \sqrt{3+x^2})$은 $\operatorname{arsinh}(x/\sqrt{3})$에 상수를 더한 것이며, 이 적분은 사실 표준적인 치환 $x = \sqrt{3}\sinh u$를 모습만 바꾼 것이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 1계 방정식과 그 해의 존재성 및 유일성을 다룬다.

풀이

STEP II 2007, 문제 7

순수수학 • 옌센 부등식

STEP II 2007, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/07-s2-q7

이 문제는 *Beyond STEP*의 3.3 절 **볼록성의 힘**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch03/convexity.html

핵심 아이디어

옌센 부등식(Jensen's inequality)에 따르면 오목함수(concave function)에서는 함숫값들의 평균이 평균에서의 함숫값보다 크지 않다. 각 소문항은 결국 어떤 오목함수를 쓰고 어떤 수들의 평균을 낼지 알아보는 문제가 된다. 삼각형에서는 세 각의 합이 일정하므로 그 평균을 알 수 있다. 산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)에서는 로그가 곱을 합으로 바꾸어 준다. 그다음 (a)와 (b)에서는 AM–GM에 넣을 알맞은 수들의 목록을 정해야 하는데, 여기에는 상수도 몇 개 포함된다.

풀이

오목성

$f(x) = \sin x$이면 $f''(x) = -\sin x$이다. $0 < x < \pi$에서 $\sin x > 0$이므로 $f''(x) < 0$이고, 따라서 $\sin x$는 이 구간에서 오목하다.

$f(x) = \ln x$이면 $f'(x) = 1/x$이고 $f''(x) = -1/x^2$이다. 이 값은 모든 $x > 0$에서 음수이므로 $\ln x$는 $x > 0$에서 오목하다.

소문항 (i)

삼각형의 세 각은 $A, B, C > 0$이고 $A + B + C = \pi$를 만족하므로, 각각은 sin이 오목한 구간 $(0, \pi)$에 속한다. $n = 3$일 때 옌센 부등식을 적용하면

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \leq \sin\left(\frac{A + B + C}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

양변에 3을 곱하면

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. 등호는 정확히 $A = B = C = \pi/3$일 때, 즉 정삼각형일 때 성립한다.

소문항 (ii)

$x > 0$에서 오목한 $f(x) = \ln x$를 택하고 $x_k = t_k > 0$으로 놓는다. 옌센 부등식에 의해

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln t_k \leq \ln\left(\frac{t_1 + t_2 + \cdots + t_n}{n}\right).$$

좌변은 $\frac{1}{n}\ln(t_1 t_2 \cdots t_n) = \ln \sqrt[n]{t_1 t_2 \cdots t_n}$이다. e^x는 증가함수이므로 부등호의 방향을 바꾸지 않고 양변에 지수함수를 취할 수 있다.

$$\sqrt[n]{t_1 t_2 \cdots t_n} \leq \frac{t_1 + t_2 + \cdots + t_n}{n},$$

이고, 등호는 $t_1 = t_2 = \cdots = t_n$일 때만 성립한다. ($n = 1$이면 자명하게 등호가 성립하므로 모순이 없다.)

(a)

? **생각해 보기** 어떤 네 수의 평균을 내야 할까?

좌변에는 항이 네 개 있으므로 $n = 4$를 쓴다. 기하평균이 xyz가 되어야 하는데, x^4, y^4, z^4를 쓰면 $\sqrt[4]{x^4 y^4 z^4} = xyz$가 된다. 상수 16이 네 번째 항이고 $\sqrt[4]{16} = 2$이다. 따라서 모두 양수인 $t_1 = x^4$, $t_2 = y^4$, $t_3 = z^4$, $t_4 = 16$을 택하면

$$\frac{x^4 + y^4 + z^4 + 16}{4} \geq \sqrt[4]{16\, x^4 y^4 z^4} = 2xyz,$$

이다. 여기서 네제곱근을 취할 때 $x, y, z > 0$을 이용했다. 양변에 4를 곱하면

$$x^4 + y^4 + z^4 + 16 \geq 8xyz,$$

가 되어 원하는 결과를 얻는다. 등호가 성립하려면 $x^4 = y^4 = z^4 = 16$, 즉 $x = y = z = 2$이어야 한다.

(b) 이번에는 다섯제곱이므로 $n = 5$로 하고 x^5, y^5, z^5를 수들 가운데 넣는다. 다섯제곱근에서 정확히 xyz가 나오려면 나머지 두 수의 곱이 1이어야 한다. 자연스러운 선택은 $t_4 = t_5 = 1$이다.

$$\frac{x^5 + y^5 + z^5 + 1 + 1}{5} \geq \sqrt[5]{x^5 y^5 z^5 \cdot 1 \cdot 1} = xyz.$$

정리하면 모든 양수 x, y, z에 대하여

$$x^5 + y^5 + z^5 - 5xyz \geq -2$$

이다.

? **생각해 보기** 이것으로 최솟값이 -2임이 보여졌는가?

이것만으로는 아니다. 하한은 실제로 그 값에 도달할 때에만 최솟값이 된다. AM–GM에서 등호는 다섯 수가 모두 같을 때, 즉 $x^5 = y^5 = z^5 = 1$이므로 $x = y = z = 1$일 때 성립한다. 이때 식의 값은 $1 + 1 + 1 - 5 = -2$이다. 따라서 최솟값은

$$\boxed{-2}, \quad \text{최솟값을 갖는 점: } x = y = z = 1.$$

검산

- (i)에서 직각이등변삼각형은 $1 + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 2.414$를 주며, 이는 $3\sqrt{3}/2 \approx 2.598$보다 작다. 삼각형 200 000개를 무작위로 뽑아 확인했을 때도 2.598을 넘는 경우는 없었다.
- (a)에서 $x = y = z = 2$이면 양변이 모두 64이다.
- (b)에서 무작위 시작점으로 수치 최소화를 하면 언제나 $(1, 1, 1)$로 수렴하고 그 값은 -2였다. 또 $x = y = z = 1.1$이면 $3(1.61051) - 5(1.331) \approx -1.82 > -2$이다.

흔한 실수

- 지수함수를 취해도 부등식이 유지되는 것은 e^x가 증가함수이기 때문이라는 점을 잊는 것. 이 점은 한마디 언급할 가치가 있다.
- (b)에서 "≥ -2"에서 멈추고, -2에 도달하는 x, y, z의 값을 제시하지 않는 것.
- x^5, y^5, z^5에 $n = 3$인 AM–GM을 쓰는 것. 그러면 $x^5 + y^5 + z^5 \geq 3(xyz)^{5/3}$을 얻게 되는데, 이는 $5xyz$와 깔끔하게 비교되지 않는다.

STEP 너머

옌센 부등식은 볼록(convex)함수(또는 오목함수)에 관한 명제이며, 그 본래 무대는 해석학과 확률론이다. 기댓값의 언어로 쓰면, 오목함수 f에 대하여 $\mathrm{E}[f(X)] \leq f(\mathrm{E}[X])$가 된다. (a)와 (b)에서 쓴 요령, 즉 기하평균이 알맞게 나오도록 상수를 채워 넣는 방법은 가중 산술-기하 평균 부등식과 휠더(Hölder) 부등식 이론의 출발점이다. 부등식과 볼록성에 대해 더 알고 싶다면 Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)를, 확률론적 형태에 대해서는 Grimmett과 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)을 읽어 보라.

풀이

STEP II 2007, 문제 8

순수수학 • 벡터를 이용한 체바 정리

STEP II 2007, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/07-s2-q8

핵심 아이디어

평면 위의 모든 점은 $\beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$ 꼴로 쓸 수 있고, (i)은 이런 점이 언제 BC 위에 있는지를 정확히 알려 준다. 계수의 합이 1일 때이다. 따라서 어떤 직선이 BC(또는 CA, AB)와 만나는 점을 구하려면, 그 직선 위의 일반적인 점을 $\mathbf{b}$와 $\mathbf{c}$로 나타낸 다음 계수에 알맞은 조건을 걸면 된다. 그러면 각 비가 β와 γ로 표현되고, 곱은 깔끔하게 약분된다.

풀이

이 풀이 전체에서 $BD : DC$와 같은 비는 **부호 있는 비**(signed ratio)를 뜻한다. 즉 $\overrightarrow{BD} = k\overrightarrow{DC}$이면 $BD/DC = k$이고, D가 선분 BC 바깥에 있으면 이 값은 음수이다. A, B, C가 한 직선 위에 있지 않으므로(non-collinear) $\mathbf{b}$와 $\mathbf{c}$는 평행하지 않고 영벡터도 아니다. 따라서 계수를 비교할 수 있다. 즉 $p\mathbf{b} + q\mathbf{c} = p'\mathbf{b} + q'\mathbf{c}$이면 반드시 $p = p'$이고 $q = q'$이다.

소문항 (i)

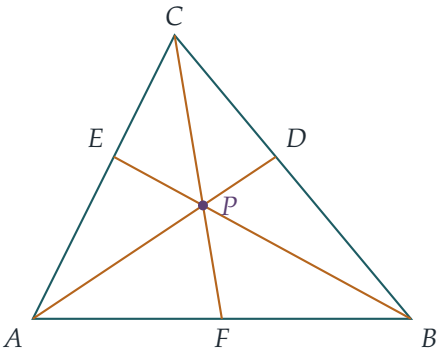
$s + t = 1$이면

$$s\mathbf{b} + t\mathbf{c} = (1 - t)\mathbf{b} + t\mathbf{c} = \mathbf{b} + t(\mathbf{c} - \mathbf{b}),$$

이고, 이것은 t를 매개변수(parameter)로 하여 B를 지나고 방향이 $\overrightarrow{BC}$인 직선의 벡터 방정식(vector equation)이다. t가 모든 실수를 움직이면 X는 이 직선 전체를 덮는다. 따라서 X의 자취(locus)는 B와 C를 지나는 (무한히 뻗은) 직선이며, 선분 BC는 그중 $0 \le t \le 1$인 부분이다.

거꾸로, 계수를 비교하면 점 $\beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$가 직선 BC 위에 있을 필요충분조건은 $\beta + \gamma = 1$이다. 앞으로는 이 판정법을 사용한다. 특히 $\beta + \gamma \neq 1$은 P가 BC 위에 있지 않다는 뜻이고,

$\beta, \gamma \neq 0$은 P가 CA나 AB 위에 있지 않다는 뜻이다.



소문항 (ii)

직선 AP 위의 일반적인 점은 $\lambda(\beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}) = \lambda\beta\,\mathbf{b} + \lambda\gamma\,\mathbf{c}$이다. (i)에 의해 이 점이 BC 위에 있을 필요충분조건은 $\lambda\beta + \lambda\gamma = 1$, 즉

$$\lambda = \frac{1}{\beta + \gamma}.$$

이다. (여기에는 $\beta + \gamma \neq 0$이 필요하다. $\beta + \gamma = 0$이면 $\overrightarrow{AP} = \beta(\mathbf{b} - \mathbf{c})$가 BC와 평행하여 D가 존재하지 않으므로, 문제는 암묵적으로 $\beta + \gamma \neq 0$을 가정하고 있다.) 따라서

$$\mathbf{d} = \frac{\beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}}{\beta + \gamma}.$$

이제

$$\overrightarrow{BD} = \mathbf{d} - \mathbf{b} = \frac{\beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} - (\beta + \gamma)\mathbf{b}}{\beta + \gamma} = \frac{\gamma}{\beta + \gamma}(\mathbf{c} - \mathbf{b}),$$
$$\overrightarrow{DC} = \mathbf{c} - \mathbf{d} = \frac{(\beta + \gamma)\mathbf{c} - \beta\mathbf{b} - \gamma\mathbf{c}}{\beta + \gamma} = \frac{\beta}{\beta + \gamma}(\mathbf{c} - \mathbf{b}).$$

두 벡터 모두 같은 벡터 $\mathbf{c} - \mathbf{b}$의 상수배이므로 $\beta\overrightarrow{BD} = \gamma\overrightarrow{DC}$이고, $\beta \neq 0$이므로

$$BD : DC = \gamma : \beta,$$

이다. 이것이 보이려던 것이다.

소문항 (iii)

E와 F도 같은 방법으로 구한다. 다만 이번에는 목표 직선이 CA($\mathbf{c}$의 상수배)와 AB($\mathbf{b}$의 상수배)이다.

? **생각해 보기** 점 $p\mathbf{b} + q\mathbf{c}$가 직선 CA 위에 있는지는 어떻게 판단할까?

직선 CA는 원점 A를 지나고 방향이 $\mathbf{c}$이므로, 그 위의 점은 정확히 $\mathbf{c}$의 상수배들이다. 즉 $\mathbf{b}$의 계수가 0이어야 한다. 마찬가지로 어떤 점이 AB 위에 있을 필요충분조건은 $\mathbf{c}$의 계수가 0인 것이다.

E 구하기. 직선 BP 위의 일반적인 점은

$$\mathbf{b} + \mu(\beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} - \mathbf{b}) = \big(1 - \mu(1-\beta)\big)\mathbf{b} + \mu\gamma\,\mathbf{c}.$$

이다. $\mathbf{b}$의 계수를 0으로 두면 $\mu = 1/(1-\beta)$를 얻는다($\beta \neq 1$이어야 한다. $\beta = 1$이면 $\overrightarrow{BP} = \gamma\mathbf{c}$가 CA와 평행하여 E가 존재하지 않는다). 따라서

$$\mathbf{e} = e\,\mathbf{c}, \qquad e = \frac{\gamma}{1-\beta}.$$

그러면 $\overrightarrow{CE} = (e-1)\mathbf{c}$, $\overrightarrow{EA} = -e\,\mathbf{c}$이고, $\gamma \neq 0$이므로 $e \neq 0$이다. 따라서

$$\frac{CE}{EA} = \frac{e-1}{-e} = \frac{1-e}{e} = \frac{(1-\beta-\gamma)/(1-\beta)}{\gamma/(1-\beta)} = \frac{1-\beta-\gamma}{\gamma}.$$

F 구하기. B와 C의 역할을 바꾸면(즉 $\mathbf{b} \leftrightarrow \mathbf{c}$, $\beta \leftrightarrow \gamma$로 바꾸면), $\gamma \neq 1$이라는 가정 아래 직선 CP는 AB와 $\mathbf{f} = f\,\mathbf{b}$에서 만나고 $f = \beta/(1-\gamma)$이다. 그러면 $\overrightarrow{AF} = f\,\mathbf{b}$, $\overrightarrow{FB} = (1-f)\mathbf{b}$이며, $\beta + \gamma \neq 1$이므로 $1 - f = (1-\beta-\gamma)/(1-\gamma) \neq 0$이다. 따라서

$$\frac{AF}{FB} = \frac{f}{1-f} = \frac{\beta}{1-\beta-\gamma}.$$

곱. 가운데 인수에 (ii)를 이용하면

$$\frac{AF}{FB} \times \frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} = \frac{\beta}{1-\beta-\gamma} \times \frac{\gamma}{\beta} \times \frac{1-\beta-\gamma}{\gamma} = 1,$$

이고, $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$, $\beta + \gamma \neq 1$이므로 약분된 인수는 모두 0이 아니다. 이것이 구하려던 결과이다. (이 식은 부호 있는 비에 대해 성립하므로, 길이 자체에 대해서도 성립한다.)

검산

- 무게중심(centroid): $\beta = \gamma = \frac{1}{3}$이면 P는 무게중심이다. 이때 $BD : DC = 1 : 1$, $CE/EA = \frac{1/3}{1/3} = 1$, $AF/FB = 1$이므로 세 체바 선분(cevian)은 모두 중선(median)이 되고, 마땅히 그래야 한다.
- $A = (0,0)$, $B = (4,0)$, $C = (1.5,3)$, $\beta = 0.3$, $\gamma = 0.4$(그림의 경우)로 두면 $D = (2.571, 1.714)$, $E = \frac{4}{7}\mathbf{c}$, $F = (2,0)$을 얻고, $\frac{AF}{FB} = 1$, $\frac{BD}{DC} = \frac{4}{3}$, $\frac{CE}{EA} = \frac{3}{4}$이므로 곱은 1이다.
- 삼각형 바깥에 있는 점 P를 포함하여, 1700개가 넘는 무작위 삼각형과 무작위 β, γ에 대해 D, E, F의 공식, 세 개의 부호 있는 비, 그리고 곱을 (분수로) 정확하게 확인하였다.

흔한 실수

- (i)의 자취를 선분 BC라고 답하는 것: s와 t는 양수로 제한되지 않으므로 자취는 직선 전체이다.
- 비를 거꾸로 쓰는 것: $\overrightarrow{BD}$는 $\mathbf{c}$의 계수인 γ에 비례하므로, γ가 크면 D는 C 쪽으로 끌려간다.
- BP와 CP를 따라가는 매개변수가 원점이 아니라 각각 B와 C에서부터 잰 것임을 잊는 것.

STEP 너머

(iii)은 체바 정리(Ceva's theorem)이고, $(1-\beta-\gamma, \beta, \gamma)$는 삼각형 ABC에 대한 P의 **무게중심 좌표**(barycentric coordinates)이다. 이 좌표는 삼각형 PBC, PCA, PAB의 넓이에 비례하며, 세 비는 바로 이 넓이들의 몫이다. 무게중심 좌표는 아핀 기하학(affine geometry)의 자연스러운 틀이다. 아핀 기하학에서는 직선과 직선 위의 비는 의미가 있지만 길이와 각은 의미가 없다. 무게중심 좌표는 컴퓨터 그래픽스와 유한 요소법(finite-element method)에서도 다시 등장한다. 기저(basis)에 대한 좌표가 체계적으로 다루어지는 것을 보려면 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수 입문)가 좋은 출발점이다.

풀이

STEP II 2007, 문제 9

역학 • 반발 계수가 있는 비스듬한 충돌

STEP II 2007, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/07-s2-q9

핵심 아이디어

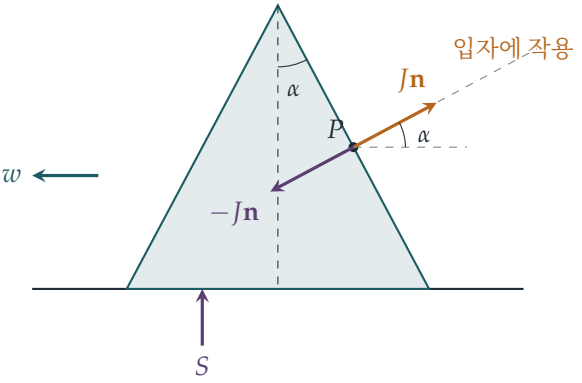
모든 면이 매끄러우므로(smooth) 입자와 원뿔(cone) 사이에 작용하는 충격량(impulse)은 충돌 지점에서의 공통 법선(common normal) 방향으로만 작용하고, 탁자는 연직 방향으로만 밀 수 있다. 이로부터 두 가지를 한꺼번에 알 수 있다. 하나는 면을 **따르는** 방향의 입자 속도가 변하지 않는다는 것이고, 다른 하나는 입자와 원뿔을 합친 계의 수평 방향 운동량이 보존된다는 것(운동량 보존, conservation of momentum)이다. 여기에 법선 방향의 뉴턴의 반발 법칙(Newton's law of restitution)을 결합하면 원뿔의 속력이 바로 나온다. 소문항 (ii)는 떨어지는 입자 속도의 법선 성분에 소문항 (i)을 적용한 것이다.

풀이

입자는 점으로, 원뿔은 (문제에서 주어진 대로) 회전하지도 않고 연직으로 움직이지도 않는 강체(rigid body)로 모형화한다. 따라서 충돌 직후 원뿔은 어떤 속력 w로 수평으로 미끄러진다. 원뿔의 축과 충돌 지점 P를 지나는 연직 평면에서 생각한다. P를 지나는 모선(generator)이 연직축과 이루는 각이 α이므로, P에서의 바깥쪽 법선은 **수평선**과 각 α를 이룬다. 다음 단위 벡터(unit vector)를 잡는다.

$$\mathbf{n} = (\cos\alpha,\ \sin\alpha)\ \text{(바깥쪽 법선)}, \qquad \mathbf{t} = (\sin\alpha,\ -\cos\alpha)\ \text{(빗면 아래 방향)},$$

여기서 첫째 좌표는 (축에서 멀어지는) 수평 방향이고 둘째 좌표는 연직 위쪽 방향이다.



입자가 받는 충격량을 $J\mathbf{n}$ $(J>0)$이라 하면 원뿔은 $-J\mathbf{n}$을 받고, 그 수평 성분은 P에서 멀어지는 방향으로 크기가 $J\cos\alpha$이다. 탁자는 위쪽으로 연직 충격량 $S=J\sin\alpha$를 주는데, 이는 $-J\mathbf{n}$의 아래쪽 성분을 정확히 상쇄하는 데 필요한 양이다. 원뿔이 연직 속도를 갖지 않는 것은 이 때문이다. 따라서

$$Mw = J\cos\alpha, \tag{1}$$

이고, 원뿔은 P에서 멀어지는 방향으로 수평 운동한다.

소문항 (i)

입자는 속도 $-u\mathbf{n}$으로 도착하며, 이 속도는 $\mathbf{t}$ 방향 성분이 없다. 면이 매끄러우므로 입자가 받는 충격량은 순전히 $\mathbf{n}$ 방향이고, $\mathbf{t}$ 방향 성분을 바꿀 수 없다. 따라서 충돌 후에도 그 성분은 여전히 0이고, 입자의 속도는 $\mathbf{n}$의 상수배이다. 즉 입자는 P에서의 법선을 따라 움직인다(바깥쪽으로 움직이거나, 원뿔이 충분히 빨리 달아나는 경우에는 여전히 안쪽으로 움직이되 더 느리게 움직인다).

충돌 후 입자의 속도는 $(-u+J/m)\,\mathbf{n}$이다. 원뿔은 P에서 멀어지는 방향(그림에서 왼쪽)으로 속력 w로 수평 운동하므로, 그 속도는 $(-w,0)$이고 이것의 $\mathbf{n}$ 방향 성분은 $-w\cos\alpha$이다.

> **생각해 보기** 뉴턴의 반발 법칙은 어느 방향의 상대 속도를 비교하는가? 그리고 원뿔은 여기에 어떻게 기여하는가?

반발은 공통 법선 $\mathbf{n}$ 방향으로 작용한다. 충돌 전 $\mathbf{n}$ 방향의 접근 속력은 u이다(원뿔은 정지해 있다). 충돌 후 분리 속력은 입자의 $\mathbf{n}$-성분에서 원뿔의 성분을 뺀 것이다.

$$\left(-u+\frac{J}{m}\right)-(-w\cos\alpha)=eu \quad\Longrightarrow\quad J=m\big((1+e)u-w\cos\alpha\big).$$

이를 (1)에 대입하면

$$Mw=m\cos\alpha\,\big((1+e)u-w\cos\alpha\big) \quad\Longrightarrow\quad \boxed{w=\frac{m(1+e)u\cos\alpha}{M+m\cos^2\alpha}}.$$

같은 이야기를 수평 방향 운동량 보존으로도 할 수 있다(탁자의 충격량은 연직 방향이다). $m(-u\cos\alpha) = m\left(-u + \frac{J}{m}\right)\cos\alpha - Mw$이고, 이는 다시 (1)이다.

소문항 (ii)

이제 입자는 속도 $(0, -u)$로 도착한다. 이를 분해하면

$$(0,-u)\cdot\mathbf{n} = -u\sin\alpha, \qquad (0,-u)\cdot\mathbf{t} = u\cos\alpha.$$

접선 성분(tangential component) $u\cos\alpha$는 충돌의 영향을 받지 않으며(역시 면이 매끄럽기 때문이다) 이후 아무 역할도 하지 않는다. 충격량 $J\mathbf{n}$, 식 (1), 반발 법칙의 식은 모두 법선 성분만 포함한다. 따라서 소문항 (i)의 풀이를 법선 방향 접근 속력 u를 $u\sin\alpha$로 바꾸어 그대로 적용하면

$$w = \frac{m(1+e)(u\sin\alpha)\cos\alpha}{M + m\cos^2\alpha} = \frac{mu(1+e)\sin\alpha\cos\alpha}{M + m\cos^2\alpha},$$

이므로 요구된 결과가 나온다.

α에 대한 최대화. M, m, e, u가 고정되어 있을 때 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$에서 $f(\alpha) = \dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{M + m\cos^2\alpha}$를 최대화해야 한다.

> **생각해 보기** 이 분수식을 미분하는 것은 번거롭다. 식을 깔끔하게 만드는 치환이 있을까?

분자와 분모를 $\cos^2\alpha$로 나누고 $\sec^2\alpha = 1 + T^2$를 이용하여 $T = \tan\alpha > 0$으로 놓으면

$$f = \frac{\tan\alpha}{M\sec^2\alpha + m} = \frac{T}{MT^2 + (M+m)} = \frac{1}{MT + \dfrac{M+m}{T}}.$$

산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)에 의해(두 항은 모두 양수이다)

$$MT + \frac{M+m}{T} \geq 2\sqrt{M(M+m)},$$

이고, 등호는 정확히 $MT = (M+m)/T$, 즉 $T^2 = (M+m)/M$일 때 성립한다. 따라서 f, 그리고 w는 이때 최대이다. $T \mapsto \alpha$는 $(0,\infty)$에서 $(0, \frac{\pi}{2})$로의 전단사(bijection)이므로 이것이 유일한 최댓값이고,

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1}{1+\frac{M+m}{M}} = \frac{M}{2M+m}, \qquad \text{따라서} \qquad \cos\alpha = \sqrt{\frac{M}{2M+m}}$$

이다(α가 예각이므로 양의 제곱근을 택한다). 최대 속력은 $w_{\max} = \dfrac{mu(1+e)}{2\sqrt{M(M+m)}}$이다.

검산

- $\alpha \to \frac{\pi}{2}$이면 원뿔은 평평한 원판이 된다. 연직으로 떨어지는 입자는 수평으로 밀어 주지 못하므로 $w \to 0$이다. 소문항 (i)에서 $\alpha \to \frac{\pi}{2}$이면 법선이 연직 방향이 되고, 이때도 $w \to 0$이다. 잘 맞는다.
- 소문항 (i)에서 $\alpha \to 0$(연직 벽)이면 $w = \dfrac{m(1+e)u}{M+m}$을 얻는데, 이는 질량 M인 자유로운 블록과의 정면충돌에서 익숙하게 보는 답이다.
- $m \ll M$이면 최적의 각은 $\cos^2\alpha \to \frac{1}{2}$, 즉 $\alpha = 45°$이고, 이는 $\sin\alpha\cos\alpha$가 최대가 되는 각이다.
- 수치로 확인하면, $M = 3, m = 1, e = \frac{1}{2}, u = 4, \alpha = \frac{\pi}{6}$일 때 소문항 (ii)는 $w = \frac{2\sqrt{3}}{5} \approx 0.693$을 준다. 충격량을 직접 계산하는 방법(반발 법칙에서 J를 구하는 방법)도 임의의 매개변수에 대해 두 공식과 일치하며, α에 대한 격자 탐색으로도 최대가 되는 각이 확인된다.

흔한 실수

- 원뿔이 움직인다는 사실을 잊고, 분리 속력이 그냥 입자의 속력 eu인 것처럼 반발 법칙의 식을 쓰는 것. 원뿔의 속도는 법선 방향으로 성분 $w\cos\alpha$를 갖는다.
- 법선 방향으로 운동량을 보존시키는 것. 탁자의 충격량은 **n** 방향 성분을 가지므로 **수평 방향** 운동량만 보존된다.
- 법선이 연직선과 각 α를 이룬다고 보는 것. 연직선과 각 α를 이루는 것은 면이므로, 법선은 수평선과 각 α를 이룬다.

STEP 너머

여기서 탁자는 **구속**(constraint)으로 작용한다. 탁자는 원뿔에서 자유도(degree of freedom) 하나를 없애며, 그 충격량은 이 구속을 지키는 데 필요한 만큼의 크기를 갖는다. 대학에서는 이것이 충격 구속(impulsive constraint) 이론이 되는데, 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)에서 일반화 좌표(generalised coordinates)를 이용하면 깔끔하게 다룰 수 있다. 또한 법선 방향으로의 사영은 구속된 물체의 유효 질량(effective mass)이라는 개념 뒤에 있는 것과 같은 아이디어이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 2차원에서의 충돌과 충격량을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP II 2007, 문제 10

역학 • 마찰이 있는 정역학

> **STEP II 2007, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/07-s2-q10

핵심 아이디어

이 문제는 정역학(statics) 문제이며, 까다로운 요소는 단 하나, 질량중심(centre of mass)의 위치뿐이다. G가 축 위의 어디에 있는지 알고 나면, 접촉점에 대한 모멘트(moment)를 취해 수직항력(normal reaction)과 마찰력(friction)을 모두 없애고 곧바로 P를 얻을 수 있다. 그다음 수평 방향으로 힘을 분해(resolving)하면 마찰력의 크기가 P와 같다는 것을 알 수 있고, 나머지는 마찰 법칙 $|F| \leq \mu R$가 해결해 준다. 절댓값(modulus)이 나타나는 까닭은 α에 따라 P가 밀어야 할 수도 있고 당겨야 할 수도 있기 때문이다.

풀이

모형

이 입체를 평면과 한 점 A에서 접하는 강체(rigid body)로 본다. 여기서 A는 평평한 밑면(원기둥의 자유단) 테두리의 가장 낮은 점이다. 그 밑면의 가장 높은 점을 B라 하면, AB는 길이가 $2r$인 지름이고 수평면과 각 α를 이룬다. 작용하는 힘은 다음과 같다. 질량중심 G에 작용하는 무게 W, A에 작용하는 수직항력 R와 마찰력 F, 그리고 B에 작용하는 수평력 P이다.

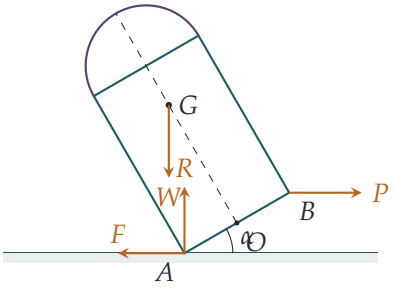
질량중심

밑면의 중심 O로부터 축을 따라 거리를 잰다. 원기둥의 부피는 $3\pi r^3$이므로 질량은 $3\pi r^3\rho$이고, 질량중심은 $\frac{3}{2}r$에 있다. 반구의 부피는 $\frac{2}{3}\pi r^3$이고 밀도는 3ρ이므로 질량은 $2\pi r^3\rho$이다. 반구의 질량중심은 평평한 면에서 $\frac{3}{8}r$만큼 바깥쪽에 있는데, 그 평평한 면이 $3r$에 있으므로 질

량중심은 $\frac{27}{8}r$에 있다. 전체 질량은 $5\pi r^3\rho$이고

$$OG = \frac{3\cdot\frac{3}{2}r + 2\cdot\frac{27}{8}r}{5} = \frac{\frac{9}{2}r + \frac{27}{4}r}{5} = \frac{9}{4}r.$$

따라서 G는 축 위에서 밑면으로부터 $\frac{9}{4}r$ 떨어진 곳에 있고, $W = 5\pi r^3\rho g$이다.



평형

A를 원점으로 하고, x축은 수평 방향(A에서 B의 발 쪽으로 향하는 방향), y축은 연직 위쪽으로 잡는다. P의 x 방향 수평 성분을 X라 하자. 따라서 X는 양수일 수도 음수일 수도 있다. 마찰력도 마찬가지로 x 방향 성분을 F라 하자.

밑면은 A에서 $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ 방향으로 뻗어 있으므로 $B = (2r\cos\alpha, 2r\sin\alpha)$이고 $O = (r\cos\alpha, r\sin\alpha)$이다. 축은 밑면에 수직이고 입체 안쪽을 향하며, 그 방향은 $(-\sin\alpha, \cos\alpha)$이다. 따라서 G의 수평 좌표는

$$x_G = r\cos\alpha - \tfrac{9}{4}r\sin\alpha.$$

연직 방향으로 분해하면 $R = W$이다. 수평 방향으로 분해하면 $F + X = 0$이므로 $|F| = |X|$이다.

? 생각해 보기 어느 점에 대한 모멘트를 취해야 할까?

A에 대해 취한다. 그러면 R와 F의 모멘트는 0이 되고, W와 P만 남는다. 무게는 G를 지나 연직으로 작용하므로 A에 대한 모멘트는 Wx_G이다($x_G > 0$일 때 시계 방향). B에 작용하는 수평력은 높이 $2r\sin\alpha$에서 작용하므로 그 모멘트는 $X\cdot 2r\sin\alpha$이다($X < 0$일 때 반시계 방향, $X > 0$일 때 시계 방향). 시계 방향을 양의 방향으로 잡으면

$$Wx_G + 2r\sin\alpha\, X = 0 \quad\Longrightarrow\quad X = -\frac{W\left(r\cos\alpha - \frac{9}{4}r\sin\alpha\right)}{2r\sin\alpha} = W\left(\tfrac{9}{8} - \tfrac{1}{2}\cot\alpha\right),$$

이다. 여기서 $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$이므로 양수인 $\sin\alpha$로 나누었다.

마찰 조건

평면이 거칠고 입체가 A에서 미끄러지지 않으므로 $|F| \le \mu R$이어야 한다. $|F| = |X|$와 $R = W > 0$을 이용하면

$$W\left|\tfrac{9}{8} - \tfrac{1}{2}\cot\alpha\right| \le \mu W \quad \Longrightarrow \quad \mu \ge \left|\tfrac{9}{8} - \tfrac{1}{2}\cot\alpha\right|,$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

X의 부호는 P가 어느 방향으로 작용하는지 알려 준다. $\tan\alpha > \frac{4}{9}$이면 G는 A를 기준으로 B의 반대쪽에 있어서 입체가 저절로 뒤로 넘어지려 하므로, P는 B를 입체에서 멀어지는 쪽으로 당겨야 한다. $\tan\alpha < \frac{4}{9}$이면 P는 밀어야 한다. 어느 경우든 마찰력은 P와 반대 방향이며, 절댓값이 두 경우를 모두 포괄한다.

검산

- $\tan\alpha = \frac{4}{9}$이면 $x_G = 0$이다. 즉 G가 A의 바로 위에 있어 입체가 저절로 균형을 이루고, $P = 0$이며 마찰력이 전혀 필요하지 않다. 부등식은 $\mu \ge |\frac{9}{8} - \frac{9}{8}| = 0$을 주므로 당연한 결과와 일치한다.
- $\alpha = 45^\circ$일 때 부등식은 $\mu \ge \frac{5}{8}$이다.
- 수치적으로, 입체를 얇은 원판들로 잘라 계산하면 전체 질량 $5\pi\rho r^3$과 $OG = 2.2500r$를 얻는다. 또 10 000개의 무작위 α 값에 대해 세 평형 방정식을 직접 풀면 매번 $|F|/R$가 $|\frac{9}{8} - \frac{1}{2}\cot\alpha|$와 같게 나온다.

흔한 실수

- 반구의 밀도가 세 배라는 것을 잊고 그 질량을 $\frac{2}{3}\pi r^3\rho$로 잡는 실수. 이렇게 하면 G의 위치가 달라지고 상수 $\frac{9}{8}$도 바뀐다.
- 반구의 질량중심 $\frac{3}{8}r$를 높이 $3r$에 있는 반구 자신의 평평한 면이 아니라 원기둥의 밑면에서부터 재는 실수.
- P(또는 마찰력)의 방향을 미리 가정해 버려서 절댓값을 놓치는 실수. 결과는 P가 어느 방향으로 작용하든 성립해야 한다.

STEP 너머

복합체의 질량중심을 구하는 것은 부피 적분(volume integral)의 이산적인 그림자이다. 즉 $\bar{\mathbf{r}} = \int \rho\,\mathbf{r}\,dV \big/ \int \rho\,dV$이며, 애초에 반구의 $\frac{3}{8}r$도 이렇게 유도된다. 대학 1학년 역학에서 이것

은 강체 이론으로 발전하는데, 거기서는 $\mathbf{r}$ 대신 r^2을 넣은 같은 적분이 관성 모멘트(moment of inertia)를 준다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 두 개념을 모두 꼼꼼하게 전개한다.

풀이

STEP II 2007, 문제 11

역학 • 3차원 공간의 포물체

STEP II 2007, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/07-s2-q11

핵심 아이디어

운동을 하나의 위치 벡터(position vector)로 나타낸다. 수평 방향 속도는 일정하고, 중력의 영향을 받는 것은 연직 성분뿐이다. $\mathbf{r}(t)$를 종이에 적어 두면 O로부터의 거리는 그냥 $|\mathbf{r}|$이고, 최단 거리는 이차식을 최소화하여 얻는다. 마지막 소문항이 성립하는 것은 총알이 매우 빨라서 총알이 날아가는 동안 입자가 거의 움직이지 않기 때문이다.

풀이

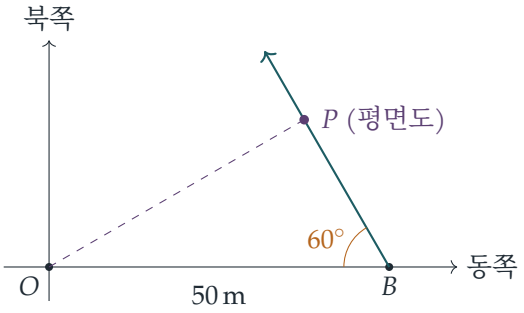
입자를 중력만 받아 움직이는 점으로 모형화하고($g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, 공기 저항 없음), O를 원점으로 잡는다. 그러면 B의 위치 벡터는 $50\mathbf{i}$이다.

소문항 (i)

처음 속도의 성분. $\tan\alpha = \frac{1}{2}$이면 $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$이고 $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$이다(세 변이 1, 2, $\sqrt{5}$인 삼각형). 따라서 처음 속도는 다음과 같다.

$$\text{수평 방향 속력} 25 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 10\sqrt{5}, \qquad \text{연직 방향 속력} 25 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 5\sqrt{5}.$$

수평 방향은 어느 쪽인가? 이 방향은 직선 OB와 60°를 이룬다. 입자가 대략 동쪽으로, 즉 O에서 멀어지는 쪽으로 향한다면 O를 지나갈 수 없다. O의 북쪽을 지나가려면 서쪽으로 되돌아오면서 북쪽으로 향해야 한다. 따라서 수평 방향은 북쪽 편에서 $\overrightarrow{BO}$(서쪽)와 60°를 이루며, 단위 벡터는 $-\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$이다.



따라서 수평 방향 속도는

$$10\sqrt{5}\left(-\tfrac{1}{2}\mathbf{i}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}\right)=-5\sqrt{5}\,\mathbf{i}+5\sqrt{15}\,\mathbf{j},$$

이고, 중력은 연직 방향으로 작용하므로 이 값은 일정하게 유지된다. 연직 방향으로는 $z=5\sqrt{5}\,t-\frac{1}{2}(10)t^2$이다. 출발점 $50\mathbf{i}$를 더하면

$$\mathbf{r}(t)=\left(50-5\sqrt{5}\,t\right)\mathbf{i}+5\sqrt{15}\,t\,\mathbf{j}+\left(5\sqrt{5}\,t-5t^2\right)\mathbf{k}.$$

O로부터의 거리. 각 성분을 제곱하여 더하면

$$\begin{aligned}|\mathbf{r}|^2&=\left(2500-500\sqrt{5}\,t+125t^2\right)+375t^2+\left(125t^2-50\sqrt{5}\,t^3+25t^4\right)\\&=25t^4-50\sqrt{5}\,t^3+625t^2-500\sqrt{5}\,t+2500.\end{aligned}$$

이것을

$$\begin{aligned}25\left(t^2-\sqrt{5}\,t+10\right)^2&=25\left(t^4+5t^2+100-2\sqrt{5}\,t^3+20t^2-20\sqrt{5}\,t\right)\\&=25t^4-50\sqrt{5}\,t^3+625t^2-500\sqrt{5}\,t+2500,\end{aligned}$$

과 비교하면 같다. 따라서 $|\mathbf{r}|=5\left|t^2-\sqrt{5}\,t+10\right|$이다. 이차식 $t^2-\sqrt{5}\,t+10$의 판별식(discriminant)은 $5-40<0$이므로 이 식은 항상 양수이고, 절댓값 기호를 없앨 수 있다.

$$|\mathbf{r}|=5\left(t^2-\sqrt{5}\,t+10\right)\text{ m},$$

이므로 요구된 결과가 성립한다.

점 P. 완전제곱식(completing the square)으로 고치면

$$t^2-\sqrt{5}\,t+10=\left(t-\tfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2+\tfrac{35}{4},$$

이므로 거리는 $t=\frac{\sqrt{5}}{2}$일 때 최소이고, 최단 거리는 $5\cdot\frac{35}{4}=\frac{175}{4}=43.75\,\text{m}$이다. $t=\frac{\sqrt{5}}{2}$를 대입하면 $\sqrt{5}\,t=\frac{5}{2}$이고 $t^2=\frac{5}{4}$이므로

$$\overrightarrow{OP}=\tfrac{75}{2}\,\mathbf{i}+\tfrac{25\sqrt{3}}{2}\,\mathbf{j}+\tfrac{25}{4}\,\mathbf{k}\quad\text{(단위: 미터)}.$$

$\overrightarrow{OP}$의 수평 부분은 동쪽 성분이 $\frac{75}{2}$, 북쪽 성분이 $\frac{25\sqrt{3}}{2}$이다. 방위각(bearing) θ는 북쪽에서 시계 방향으로 잰 각이므로

$$\tan\theta = \frac{\text{동쪽}}{\text{북쪽}} = \frac{75/2}{25\sqrt{3}/2} = \sqrt{3},$$

이고, 두 성분이 모두 양수이므로 $\theta = 60^\circ$이다. 즉 O에서 본 P의 방위각은 060°이다.

소문항 (ii)

속도의 연직 성분은

$$\dot{z} = 5\sqrt{5} - 10t,$$

이고, 이 값은 정확히 $t = \frac{\sqrt{5}}{2}$일 때 0이다. 이것은 입자가 P에 있는 시각과 같으므로, 입자는 P에서 최고점(높이 $\frac{25}{4}\,\text{m}$)에 있다.

소문항 (iii)

총알은 O에서 P까지 $350\,\text{m s}^{-1}$로 직선을 따라 날아가며(총알에 작용하는 중력은 무시한다), $OP = \frac{175}{4}\,\text{m}$를 이동한다. 걸리는 시간은

$$T = \frac{175/4}{350} = \frac{1}{8}\,\text{s}.$$

? 생각해 보기 이 $\frac{1}{8}$초가 더 지난 뒤 입자는 어디에 있는가?

소문항 (ii)에 의해 P에서 입자의 연직 방향 속도는 0이므로, 그 점에서의 속도는 순수하게 수평 방향이고 크기는 $10\sqrt{5}\,\text{m s}^{-1}$이다. 그다음 T초 동안 입자는 수평으로 $10\sqrt{5}\,T$만큼 움직이고 $\frac{1}{2}gT^2$만큼 떨어진다. $T = \frac{1}{8}$이므로

$$\text{수평 이동} = \frac{10\sqrt{5}}{8} \approx 2.80\,\text{m}, \qquad \text{낙하} = 5 \cdot \frac{1}{64} \approx 0.08\,\text{m}.$$

이 둘은 서로 수직이므로 P로부터의 거리는

$$\sqrt{\frac{500}{64} + \frac{25}{4096}} = \frac{5\sqrt{1281}}{64} \approx 2.80\,\text{m},$$

이고, 이는 요구된 대로 약 3 m이다. (낙하는 거의 영향이 없다. 답은 사실상 $10\sqrt{5}/8$이다.) 사수는 빗맞힌다.

검산

▶ $t = 0$일 때 공식은 $5 \cdot 10 = 50\,\text{m}$, 즉 거리 OB를 준다. 맞다.

- $|\overrightarrow{OP}|^2 = 37.5^2 + 21.65^2 + 6.25^2 = 1406.25 + 468.75 + 39.06 = 1914.06 = 43.75^2$이므로 P의 위치 벡터는 최단 거리와 일치한다.
- $|\mathbf{r}(t)|$를 수치적으로 훑어보면 $t \approx 1.118 = \frac{\sqrt{5}}{2}$에서 최솟값 43.75 m를 얻고, 입자를 P에서 0.125 s 동안 더 진행시키면 떨어진 거리는 2.796 m이다.

흔한 실수

- 수평 방향을 $\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$($O$에서 멀어지는 방향)로 잡는 것. 그러면 입자는 결코 O의 북쪽을 지나가지 않고, 거리도 주어진 식대로 나오지 않는다.
- 방위각을 30°로 답하는 것. 이것은 동쪽에서 잰 각이지만, 방위각은 북쪽에서 시계 방향으로 잰다.

STEP 너머

소문항 (iii)은 요격 문제(interception problem)의 간단한 형태이다. 움직이는 표적을 맞히려면 표적이 **있게 될** 곳을 겨누어야 하며, 이는 발사 방향과 시각 모두에 대하여 $|\mathbf{r}_{\text{target}}(t) - \mathbf{r}_{\text{bullet}}(t)| = 0$을 푸는 문제로 이어진다. $|\mathbf{r}(t)|$를 최소화하는 것은 궤도 문제와 충돌 문제에서 "최근접 거리(distance of closest approach)"의 바탕이 되는 아이디어이기도 하며, 이때 거리를 제곱하여 다항식을 얻는 것이 표준적인 첫 단계이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이런 종류의 벡터 운동학을 제대로 전개한다.

풀이

STEP II 2007, 문제 12

확률과 통계 • 기하분포의 최댓값

STEP II 2007, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/07-s2-q12

핵심 아이디어

다소 번거로운 절차 설명은 잊고 각 주사위를 따로따로 살펴보자. 각 주사위는 처음으로 6이 나올 때까지 던져지고, 실험은 두 주사위 중 **더 늦은** 쪽이 6에 도달했을 때 끝난다. 따라서 던지는 횟수는 서로 독립(independent)인 두 기하 확률변수(geometric random variable)의 최댓값이며, 최댓값은 누적 확률(cumulative probability) $\mathrm{P}(\max \le r)$를 통해 다루는 것이 가장 쉽다.

풀이

소문항 (i)

첫 번째 주사위에서 처음으로 6이 나오는 던지기의 번호를 X라 하고, 두 번째 주사위에 대해서도 같은 방식으로 Y를 정의하자. 주사위를 던지는 각 시행은 다른 모든 시행과 독립이므로 X와 Y는 독립이고, 각각은 기하분포를 따른다.

$$\mathrm{P}(X = k) = q^{k-1}p, \qquad \mathrm{P}(X \le r) = 1 - \mathrm{P}(\text{처음 } r\text{번 모두 6이 아님}) = 1 - q^r.$$

주어진 절차는 이것과 어떻게 들어맞을까? 어느 주사위에서도 6이 나오지 않은 동안에는 두 주사위를 모두 던지고, 한쪽에서 6이 나오면 그 뒤로는 다른 쪽만 계속 던진다. 어느 경우든 각 주사위는 정확히 처음 6이 나올 때까지만 던져지고(그 뒤로는 절대 던져지지 않는다), 두 주사위 모두에서 6이 나오는 즉시 멈춘다. 두 주사위에서 같은 던지기에 처음으로 6이 나온다면, 그것이 바로 두 주사위에서 함께 6이 나오는 경우이다. 따라서 던지는 횟수는

$$N = \max(X, Y).$$

? 생각해 보기 왜 $\mathrm{P}(N = r)$를 직접 구하지 않고 $\mathrm{P}(N \le r)$를 다루는가?

사건 $N \le r$는 단순히 "$X \le r$ 이고 $Y \le r$"이며, 독립성에 의해 이것은 곱이 된다. 반면 사건 $N = r$는 번거로운 여러 경우(한 주사위는 r번째에 끝나고 다른 주사위는 그 전에 끝나는 경우, 또는 둘 다 r번째에 끝나는 경우)로 나뉜다. 따라서

$$\mathrm{P}(N \le r) = \mathrm{P}(X \le r)\,\mathrm{P}(Y \le r) = (1 - q^r)^2,$$

이고, $r \ge 1$에 대하여

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(N = r) &= \mathrm{P}(N \le r) - \mathrm{P}(N \le r - 1) \\
&= (1 - q^r)^2 - (1 - q^{r-1})^2 \\
&= \left[(1 - q^r) - (1 - q^{r-1})\right]\left[(1 - q^r) + (1 - q^{r-1})\right] \\
&= (q^{r-1} - q^r)(2 - q^{r-1} - q^r) \\
&= pq^{r-1}\,(2 - q^{r-1} - q^r),
\end{aligned}$$

이다. 여기서 제곱의 차(difference of two squares)를 이용한 뒤 $q^{r-1} - q^r = q^{r-1}(1 - q) = pq^{r-1}$을 사용하였다. 이것이 구하는 결과이다.

기댓값(expectation)을 구하기 위해 확률을 두 부분으로 나누자.

$$\mathrm{P}(N = r) = 2pq^{r-1} - pq^{2r-2}(1 + q).$$

주어진 결과를 미분하면(또는 x로 나누면) $|x| < 1$일 때 $\sum_{r \ge 1} r x^{r-1} = (1 - x)^{-2}$를 얻는다. 이것을 $x = q$와 $x = q^2$에 대해 사용하면($0 < p \le 1$이므로 둘 다 1보다 작다)

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(N) &= 2p \sum_{r=1}^{\infty} rq^{r-1} - p(1 + q) \sum_{r=1}^{\infty} r(q^2)^{r-1} \\
&= \frac{2p}{(1 - q)^2} - \frac{p(1 + q)}{(1 - q^2)^2} \\
&= \frac{2}{p} - \frac{p(1 + q)}{p^2(1 + q)^2} \\
&= \frac{2}{p} - \frac{1}{p(1 + q)} \\
&= \frac{1 + 2q}{p(1 + q)},
\end{aligned}$$

이다. 여기서 $1 - q = p$와 $1 - q^2 = (1 - q)(1 + q) = p(1 + q)$를 사용하였다. p만으로 나타내면($q = 1 - p$를 대입하면)

$$\mathrm{E}(N) = \frac{3 - 2p}{p(2 - p)}.$$

소문항 (ii)

실험을 여러 번 하면 던지는 횟수의 평균은 $\mathrm{E}(N)$에 가까워야 하므로, $\mathrm{E}(N) = m$을 풀어서 p를 추정한다.

$$m\,p(2-p) = 3-2p \quad \Longleftrightarrow \quad mp^2 - 2(m+1)p + 3 = 0,$$

따라서

$$p = \frac{(m+1) \pm \sqrt{(m+1)^2 - 3m}}{m} = \frac{m+1 \pm \sqrt{m^2 - m + 1}}{m}.$$

? 생각해 보기 어느 근을 택해야 하는가?

모든 실험은 적어도 한 번 던지므로 $m \geq 1$이다. 그러면 $\sqrt{m^2 - m + 1} \geq 1$이므로($m^2 - m = m(m-1) \geq 0$이기 때문이다), 더하기 부호를 택한 근은 적어도 $(m+2)/m > 1$이 되어 확률이 될 수 없다. 빼기 부호를 택한 근은 같은 부등식(inequality)에 의해 많아야 $m/m = 1$이고, $(m+1)^2 > m^2 - m + 1$이므로 양수이다. 따라서 추정값은

$$\hat{p} = \frac{m+1-\sqrt{m^2-m+1}}{m}.$$

검산

- $p = 1$이면 모든 실험은 한 번 던지고 끝난다. 실제로 $\mathrm{E}(N) = \frac{1}{1\cdot 1} = 1$이고, $m = 1$이면 $\hat{p} = (2-1)/1 = 1$이다.
- 확률의 합은 1이다. $\sum_r \mathrm{P}(N=r)$는 연이어 소거되어(telescoping) $\lim_{r\to\infty}(1-q^r)^2 = 1$이 된다.
- 공정한 주사위의 경우 $p = \frac{1}{6}$이면 $\mathrm{E}(N) = \frac{8/3}{11/36} = \frac{96}{11} \approx 8.73$으로, 주사위 하나에 평균적으로 필요한 6번보다 조금 많은데, 마땅히 그래야 한다. 200,000번의 실험을 모의실험한 결과 평균은 8.71이었고, $\hat{p}$의 식에 $m = 96/11$을 대입하면 $\frac{1}{6}$이 나온다.

흔한 실수

- 각 주사위의 던지기를 따로 세는 것: 두 주사위를 동시에 던지는 것은 **한 번**의 던지기로 센다. 바로 이 때문에 $N = \max(X, Y)$이다.
- 항 $pq^{2r-2}(1+q)$에는 $x = q$가 아니라 $x = q^2$일 때의 합이 필요하다는 것을 잊는 것.
- 소문항 (ii)에서 어느 근이 확률이 될 수 있는지 확인하지 않고 두 근을 모두 남겨 두는 것.

STEP 너머

$\mathrm{P}(\max \leq r) = \prod \mathrm{P}(X_i \leq r)$라는 기법은 독립인 확률변수들의 최댓값(그리고 $\geq$를 쓰면 최솟값)을 다루는 표준적인 방법이며, **순서통계량**(order statistics)의 출발점이다. 소문항 (ii)는 **적률법**(method of moments)이다. 즉 표본평균(sample mean)을 이론적 평균과 같게 놓고 모수에 대해 푸는 방법이다. 대학 1학년 통계학에서는 이를 최대가능도(maximum likelihood) 방법과 비교하고, 이러한 추정량(estimator)이 얼마나 정확한지를 묻는다. 확률 쪽으로는 Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문서)이 좋은 다음 단계이다.

풀이

STEP II 2007, 문제 13

확률과 통계 • 생일 문제

STEP II 2007, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/07-s2-q13

이 문제는 *Beyond STEP*의 9.9 절 **생일 문제**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch09/birthday.html

핵심 아이디어

어떤 두 손님도 생일이 같지 **않을** 확률(probability)은 $\frac{365-r}{365}$ 꼴의 인수들의 곱이고, 곱은 다루기 불편하다. 첫 번째 부분은 각 인수를 지수함수(exponential)로 바꾸어 주는데, 지수함수의 곱은 합의 지수함수이므로 그 합을 정확히 계산할 수 있다. 주인의 경우에는 손님들에 관한 사건이 서로 독립(independent)이므로 여사건(complement)의 확률이 하나의 거듭제곱이 되고, 같은 근사(approximation)를 적용할 수 있다.

풀이

근사식

임의의 실수 x에 대하여

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots .$$

$x = r/n$으로 놓자. r이 n보다 훨씬 작으므로 x는 작고, x^2 이상의 항은 x에 비해 무시할 수 있다. 따라서

$$e^{-r/n} \approx 1 - \frac{r}{n} = \frac{n-r}{n},$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

적어도 두 손님의 생일이 같은 경우

k명의 손님 가운데 적어도 두 명의 생일이 같은 사건을 A라 하자. k명의 생일이 모두 다를 확률인 $\mathrm{P}(A')$를 구하는 편이 더 쉽다. 손님을 한 명씩 차례로 생각한다. 첫 번째 손님의 생일은 어느 날이어도 된다. 처음 r명의 손님의 생일이 서로 다른 r개의 날이라는 조건 아래에서, $(r+1)$번째 손님은 그 r개의 날을 피해야 하고, 생일은 서로 독립이며 365일에 걸쳐 균등(uniform)하게 분포하므로 그 확률은 $\frac{365-r}{365}$이다. 이들을 곱하면

$$\mathrm{P}(A') = \prod_{r=0}^{k-1} \frac{365-r}{365}.$$

파티 규모가 크지 않다면 여기서 모든 r은 365보다 훨씬 작으므로, 첫 번째 부분에서 $n = 365$로 놓으면

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A') &\approx \prod_{r=0}^{k-1} \mathrm{e}^{-r/365} = \exp\Bigl(-\frac{1}{365}\sum_{r=0}^{k-1} r\Bigr) \\ &= \exp\Bigl(-\frac{1}{365}\cdot\frac{k(k-1)}{2}\Bigr) = \mathrm{e}^{-k(k-1)/730}.\end{aligned}$$

($r = 0$인 인수는 정확히 $1 = \mathrm{e}^0$이므로 포함해도 아무 손해가 없다.) 그러므로

$$\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(A') \approx 1 - \mathrm{e}^{-k(k-1)/730},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

> **생각해 보기** 많은 인수를 한꺼번에 근사하는 것이 걱정스럽지 않은가? 오차가 쌓일 수도 있다.

각 인수의 오차는 $(r/365)^2$ 정도의 크기이고, 지수 자체는 $k^2/730$ 정도의 크기이다. 우리에게 필요한 k의 값(약 20)에서 가장 큰 $r/365$는 약 0.06이고, 지수의 전체 상대 오차는 몇 퍼센트에 불과하다. 실제로 $k = 23$일 때 근사값은 0.500이고 참값은 0.507이다.

확률이 절반 이상이 되는 가장 작은 파티

필요한 조건은

$$1 - \mathrm{e}^{-k(k-1)/730} \geq \tfrac{1}{2} \iff \mathrm{e}^{-k(k-1)/730} \leq \tfrac{1}{2} \iff \frac{k(k-1)}{730} \geq \ln 2,$$

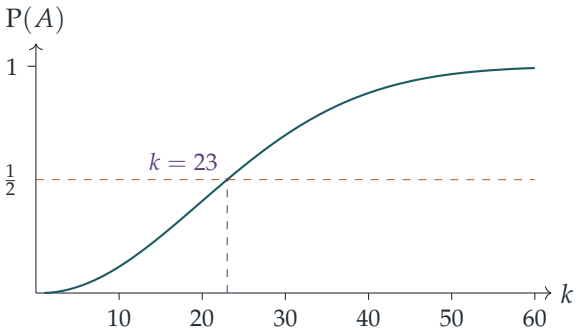
이다. 여기서 로그(logarithm)를 취하고(로그는 증가함수이므로 부등식의 방향이 유지된다) -1을 곱하였다(이때 부등식의 방향이 바뀐다). $\ln 2 \approx \frac{253}{365}$을 이용하면 조건은

$$k(k-1) \geq 730 \times \frac{253}{365} = 2 \times 253 = 506.$$

이 된다. $k \geq 1$일 때 $k(k-1)$은 k에 대하여 증가하고,

$$22 \times 21 = 462 < 506, \qquad 23 \times 22 = 506,$$

이므로 가장 작은 값은 $k = 23$이다.



주인과 생일이 같은 경우

이제 손님의 수를 m이라 하자(주인은 손님 수에 포함하지 않는다). 적어도 한 손님이 주인과 생일이 같은 사건을 B라 하자. 주인의 생일이 언제이든, 각 손님은 독립적으로 확률 $\frac{364}{365}$로 그 날을 비껴가므로

$$\mathrm{P}(B') = \left(\frac{364}{365}\right)^m \approx \left(\mathrm{e}^{-1/365}\right)^m = \mathrm{e}^{-m/365},$$

이다. 여기서 첫 번째 부분을 $n = 365$, $r = 1$로 놓고 사용하였다. 이번에는 m의 크기와 상관없이 $r/n = 1/365$이 정말로 작다.

$\mathrm{P}(B) \geq \frac{1}{2}$, 즉 $\mathrm{e}^{-m/365} \leq \frac{1}{2}$이어야 한다. 앞에서와 똑같이 하면 이는

$$\frac{m}{365} \geq \ln 2 \approx \frac{253}{365} \iff m \geq 253.$$

이다. 따라서 손님이 적어도 253명 있어야 한다.

? 생각해 보기 왜 답이 23보다 훨씬 클까?

첫 번째 문제에서는 어떤 두 손님의 쌍이든 생일이 일치할 수 있고, 23명의 손님은 $\binom{23}{2} = 253$개의 쌍을 만든다. 두 번째 문제에서는 손님과 주인으로 이루어진 m개의 쌍만 고려된다. 일치할 기회의 수를 같게 하려면 $m = 253$이어야 하며, 바로 이 때문에 두 답 모두에 253이 나타난다.

검산

- 정확한 곱을 계산하면 두 답이 모두 확인된다. 생일이 같은 사람이 있을 참 확률은 손님이 22명일 때 0.4757, 23명일 때 0.5073이다. $1 - (364/365)^m$의 참값은 $m = 252$일 때 $\frac{1}{2}$보다 작고 $m = 253$일 때 0.5005이다.

- $\frac{253}{365} = 0.69315\ldots$이고 $\ln 2 = 0.69315\ldots$로 소수점 아래 다섯째 자리까지 일치하므로, 주어진 근사는 어느 답에도 영향을 주지 않는다.
- 23명이 모인 파티 200 000개를 시뮬레이션(simulation)한 결과, 50.7%의 경우에 생일이 같은 사람이 있었다.

흔한 실수

- **특정한** 두 손님의 생일이 같을 확률을 계산하거나, 각 쌍마다 $\frac{1}{365}$를 한 번씩 더하는 것. 서로 겹치는 사건의 확률은 단순히 더할 수 없으며, 여사건을 이용하면 이 문제를 피할 수 있다.
- 첫 번째 곱의 모든 인수에 $\frac{364}{365}$를 사용하는 것. $(r+1)$번째 손님은 하루가 아니라 r개의 날을 피해야 한다.
- 마지막 부분에서 주인을 손님 수에 포함하는 것. 주인은 별개의 사람이므로 손님이 253명 필요하다.

STEP 너머

여기서 얻는 경험적 법칙(heuristic)은, N개의 상자에 넣은 k개의 대상 가운데 일치가 일어날 가능성은 k가 대략 $\sqrt{2N\ln 2} \approx 1.18\sqrt{N}$일 때부터 높아진다는 것이다. 이는 암호학의 "생일 공격(birthday attack)"의 바탕이 되는데, 이 공격은 N비트 해시(hash)에서 2^N번이 아니라 약 $2^{N/2}$번의 시도만으로 충돌(collision)을 찾아낸다. 이 근사의 배후에는 푸아송 극한(Poisson limit)이 있다. 일치하는 쌍의 개수는 대략 평균이 $\binom{k}{2}/365$인 푸아송 분포를 따르고, $\mathrm{P}(\text{일치 없음}) \approx \mathrm{e}^{-k(k-1)/730}$이다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)에서 생일 문제와 그 푸아송 근사를 자세히 다룬다.

풀이

STEP II 2007, 문제 14

확률과 통계 • 구간별로 정의된 확률밀도함수

STEP II 2007, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/07-s2-q14

핵심 아이디어

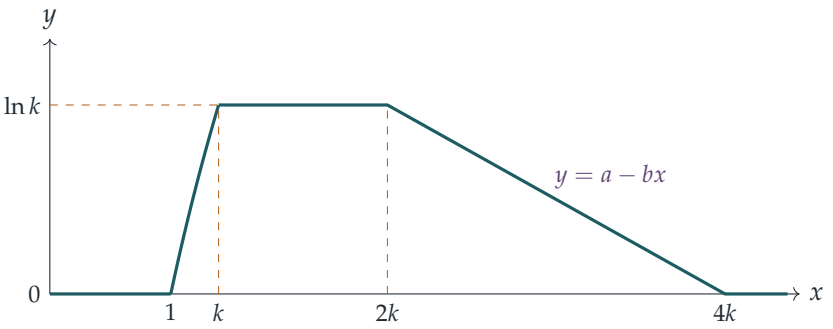
여기서는 **연속**(*continuous*)이라는 단어가 큰 역할을 한다. 구간별로 정의된 확률밀도함수(probability density function)는 모든 경계점에서 이어져야 하고, 이로부터 곧바로 a와 b에 대한 두 방정식을 얻는다. 남은 하나의 조건, 즉 그래프 아래의 전체 넓이가 1이라는 조건이 k를 결정한다. 중앙값(median)을 구할 때는 넓이를 구간별로 더해 나가다가 절반을 넘는 곳을 찾는다.

풀이

전체에 걸쳐 $k > 1$이다. 그렇지 않으면 구간 $1 \le x \le k$가 공집합이 되고, 어쨌든 밀도가 음이 아니면서 $x = 1$ 이후에서 항상 0이 되지 않으려면 $\ln k > 0$이어야 한다.

소문항 (i)

$[1, k]$에서 그래프는 익숙한 로그 곡선으로, $x = 1$일 때 0에서 시작하며(따라서 값이 0인 구간과 연속적으로 이어진다) 증가하고 위로 볼록(concave)하다. $x = k$에서 높이 $\ln k$에 도달하고, $x = 2k$까지 $\ln k$로 일정하게 유지되다가, $x = 4k$에서 0이 되도록 직선으로 내려가며(연속성이 바로 이렇게 되도록 강제한다는 것을 아래에서 보인다), 그 이후로는 0이다. 그림에는 소문항 (ii)에서 구하는 값 $k = \mathrm{e}^{1/3} \approx 1.40$을 사용했으므로, 평평한 부분의 높이는 $\frac{1}{3}$이다.



소문항 (ii)

연속성. $x = k$에서는 두 식 모두 $\ln k$를 주므로 새로운 정보가 없다. $x = 2k$와 $x = 4k$에서 연속이려면

$$a - 2bk = \ln k, \qquad a - 4bk = 0.$$

이어야 한다. 두 식을 빼면 $2bk = \ln k$이므로

$$b = \frac{\ln k}{2k}, \qquad a = 4bk = 2\ln k.$$

이다.

전체 확률. 넓이를 세 부분으로 나눈다. 부분적분(integration by parts)을 하면($u = \ln x$, $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$로 놓는다)

$$\int_1^k \ln x \,\mathrm{d}x = \Big[x\ln x - x\Big]_1^k = k\ln k - k + 1.$$

이다. 평평한 부분은 너비 k, 높이 $\ln k$인 직사각형이므로 넓이는 $k\ln k$이다. 마지막 부분은 밑변 $4k - 2k = 2k$, 높이 $\ln k$인 삼각형이므로 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot 2k\cdot \ln k = k\ln k$이다. 따라서

$$1 = (k\ln k - k + 1) + k\ln k + k\ln k = 3k\ln k - k + 1,$$

이고, 이를 정리하면

$$k(3\ln k - 1) = 0.$$

이다. $k > 1$이므로 $k = 0$일 수 없고, 따라서 $\ln k = \frac{1}{3}$이며

$$k = \mathrm{e}^{1/3} \approx 1.396, \qquad a = 2\ln k = \tfrac{2}{3}, \qquad b = \frac{\ln k}{2k} = \frac{1}{6\,\mathrm{e}^{1/3}} \approx 0.119.$$

이다. $b > 0$이므로 마지막 부분은 그림처럼 실제로 내려가는 직선임에 주목하자.

소문항 (iii)

확률을 누적해 가며 중앙값 m이 어느 구간에 있는지 찾는다. $\ln k = \frac{1}{3}$을 이용하면

$$\mathrm{P}(X \le k) = k\ln k - k + 1 = 1 - \tfrac{2k}{3} \approx 0.070,$$

이고, 평평한 부분이 $k\ln k = \frac{k}{3}$를 더하므로

$$\mathrm{P}(X \le 2k) = 1 - \tfrac{2k}{3} + \tfrac{k}{3} = 1 - \tfrac{k}{3} \approx 0.535.$$

이다.

? 생각해 보기 중앙값은 그래프의 어느 부분에 있는가?

$0.070 < \frac{1}{2} < 0.535$이므로 중앙값은 평평한 부분, 즉 $k \le m \le 2k$에 있다. 이 구간에서 밀도는 $\frac{1}{3}$으로 일정하므로

$$\mathrm{P}(X \le m) = 1 - \tfrac{2k}{3} + \tfrac{1}{3}(m-k) = \tfrac{1}{2}.$$

이다. 양변에 3을 곱하면 $3 - 2k + m - k = \frac{3}{2}$이므로

$$m = 3k - \tfrac{3}{2} = 3\mathrm{e}^{1/3} - \tfrac{3}{2} \approx 2.69.$$

이다. 이 값은 예상대로 $k \approx 1.40$과 $2k \approx 2.79$ 사이에 있다.

검산

- $k = \mathrm{e}^{1/3}$, $a = \frac{2}{3}$, $b = 1/(6\mathrm{e}^{1/3})$일 때 밀도를 수치적분(중점 규칙)하면 전체 넓이는 1.0000000이고, $\int_1^{2.68684} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.5000000$이다.
- 중앙값에 대한 상식적 검토: 확률의 절반을 조금 넘는 양(약 0.535)이 $2k$의 왼쪽에 있으므로, 중앙값은 $2k \approx 2.79$보다 약간 왼쪽에 있어야 한다. 실제로 $m \approx 2.69$이다.

흔한 실수

- $\int_1^k \ln x\,\mathrm{d}x$에서 아래끝을 빠뜨리는 것. $x = 1$에서 $-[x\ln x - x]$가 주는 $+1$ 덕분에 k에 대한 방정식이 깔끔하게 인수분해된다.
- 중앙값이 받침(support) $[1, 4k]$의 "가운데"에 있으니 기울어진 부분에 있을 것이라고 가정하는 것. 항상 넓이를 먼저 누적해 보아야 한다.

STEP 너머

여기서는 밀도를 여러 조각으로 만들고, 상수들을 연속성과 정규화(normalisation) 조건으로 결정했다. 대학에서는 **누적분포함수**(*cumulative distribution function*) $F(x) = \mathrm{P}(X \le x)$를 기본 대상으로 다루게 된다. 누적분포함수는 이산이든 연속이든 모든 확률변수에 대해 존재하며, 중앙값 같은 양은 단순히 $F(m) = \frac{1}{2}$의 해이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)이 이러한 관점을 명료하게 전개한다.

풀이

STEP III 2007, 문제 1

순수수학 • 탄젠트의 합과 비에트 정리

> **STEP III 2007, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/07-s3-q1

핵심 아이디어

여러 각의 합의 탄젠트는 각 탄젠트들의 대칭함수(symmetric function)의 비로 나타나고, 다항식(polynomial)의 근(root)들의 대칭함수는 비에트(Vieta) 공식(Vieta's formulae)이 계수(coefficient)로 정확히 알려 주는 양이다. 마지막 부분의 요령은 삼각방정식을 $t = \tan\theta$에 대한 사차방정식(quartic)으로 바꾸는 것이다. 그러면 그 계수들의 대칭성 때문에 합의 탄젠트가 반드시 0이 된다.

풀이

네 각의 합의 탄젠트

합을 $A = \theta_1 + \theta_2$, $B = \theta_3 + \theta_4$로 두어 $A + B$로 나누면

$$\tan A = \frac{t_1 + t_2}{1 - t_1 t_2}, \qquad \tan B = \frac{t_3 + t_4}{1 - t_3 t_4}.$$

이제 $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$의 분자와 분모에 $(1 - t_1 t_2)(1 - t_3 t_4)$를 곱하면

$$\tan(A+B) = \frac{(t_1 + t_2)(1 - t_3 t_4) + (t_3 + t_4)(1 - t_1 t_2)}{(1 - t_1 t_2)(1 - t_3 t_4) - (t_1 + t_2)(t_3 + t_4)}.$$

분자는 $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 - (t_1 t_3 t_4 + t_2 t_3 t_4 + t_1 t_2 t_3 + t_1 t_2 t_4)$이고, 분모는 $1 - t_1 t_2 - t_3 t_4 + t_1 t_2 t_3 t_4 - (t_1 t_3 + t_1 t_4 + t_2 t_3 + t_2 t_4)$이다. 기본대칭함수(elementary symmetric function)를

$$\sigma_1 = \sum t_i, \quad \sigma_2 = \sum_{i<j} t_i t_j, \quad \sigma_3 = \sum_{i<j<k} t_i t_j t_k, \quad \sigma_4 = t_1 t_2 t_3 t_4$$

로 쓰면, 이는

$$\boxed{\tan(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4)=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{1-\sigma_2+\sigma_4}.}$$

(두 각이나 세 각일 때와 같은 규칙이다. 분자에는 홀수 차수 대칭함수가 부호를 번갈아 가며, 분모에는 짝수 차수 대칭함수가 놓인다.)

계수로 나타내기

$t_1,\dots,t_4$가 $at^4+bt^3+ct^2+dt+e=0$의 근이면 $at^4+bt^3+ct^2+dt+e=a(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)(t-t_4)$이고, 계수를 비교하면 (비에트 공식)

$$\sigma_1=-\frac{b}{a},\qquad \sigma_2=\frac{c}{a},\qquad \sigma_3=-\frac{d}{a},\qquad \sigma_4=\frac{e}{a}.$$

이를 대입하고 분자와 분모에 $a\neq 0$을 곱하면

$$\boxed{\tan(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4)=\frac{d-b}{a-c+e}.}$$

마지막 부분

$1+\cos 2\theta=2\cos^2\theta$이므로 방정식은

$$2p\cos^2\theta+\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha=0.$$

$\cos^2\theta$로 나누면($\cos\theta=0$인 특수한 경우는 제외한다)

$$2p=-(\cos\alpha+t\sin\alpha)\sec\theta,\qquad t=\tan\theta.$$

$\sec\theta$는 t의 유리함수(rational function)가 아니므로, $\sec^2\theta=1+t^2$을 이용하여 양변을 제곱한다.

$$4p^2=(\cos\alpha+t\sin\alpha)^2(1+t^2).$$

전개하면

$$\sin^2\alpha\,t^4+2\sin\alpha\cos\alpha\,t^3+t^2+2\sin\alpha\cos\alpha\,t+(\cos^2\alpha-4p^2)=0, \qquad (*)$$

이때 t^2의 계수에는 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$을 사용하였다.

> ? **생각해 보기** 제곱하면 불필요한 해가 생길 수 있다. $\tan\theta_i$들이 정말로 $(*)$의 네 근인가?

제곱했으므로 $(*)$는 $p\cos 2\theta-\cos(\theta-\alpha)+p=0$의 해들도 만족한다. 그런데 θ를 $\theta+\pi$로 바꾸면 $t=\tan\theta$와 $\cos^2\theta$는 변하지 않고 $\cos(\theta-\alpha)$의 부호만 바뀐다. 따라서 $(*)$의 각 실근 t에 대하여, $[0,2\pi)$에서 탄젠트가 t인 두 각 가운데 정확히 하나만 원래 방정식을 만족한

다(둘 다 만족하려면 $\cos(\theta-\alpha)=0$이어야 하고, 그러면 $p\cos^2\theta=0$이 되어 특수한 경우가 된다). 그러므로 $[0,2\pi)$에서의 해는 $(*)$의 실근과 일대일로 대응하고, 주어진 네 각의 탄젠트는 $(*)$의 네 근이다.

이제 앞의 결과를 $a=\sin^2\alpha$, $b=d=2\sin\alpha\cos\alpha$, $c=1$, $e=\cos^2\alpha-4p^2$로 두고 적용한다 ($a\neq 0$, 즉 $\sin\alpha\neq 0$이어야 한다. 그렇지 않으면 $(*)$는 사차방정식이 아니며, 이것도 특수한 경우이다). 분자는 $d-b=0$이고, 분모는

$$a-c+e=\sin^2\alpha-1+\cos^2\alpha-4p^2=-4p^2,$$

로 0이 아니다($p=0$이면 방정식은 단순히 $\cos(\theta-\alpha)=0$이 되어 해가 두 개뿐이다). 따라서

$$\tan(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4)=0,$$

이므로 어떤 정수 n에 대하여 $\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4=n\pi$이고, 이것이 보이려던 것이다.

검산

- 네 각의 공식에 $t_3=t_4=0$을 넣으면 $(t_1+t_2)/(1-t_1t_2)$가 되어 익숙한 두 각의 공식으로 돌아간다.
- $p=\frac{1}{2}$, $\alpha=3$일 때 방정식을 $[0,2\pi)$에서 수치적으로 풀면 네 근이 나오고, 그 합을 π로 나눈 값은 10^{-9} 이내의 오차로 정수이다. (모든 p와 α에 대해 해가 네 개인 것은 아니다. $p=\frac{1}{2}$, $\alpha=1$이면 해가 두 개뿐이다.) 해가 네 개였던 임의의 (p,α)들을 시험해 보았을 때 모두 같은 결과가 성립하였고, 두 공식 역시 수천 개의 임의의 각과 사차식으로 확인하였다.

흔한 실수

- 비에트 공식에서의 부호 실수: 하나 걸러 나오는 계수 b와 d에는 음의 부호가 붙는다.
- 제곱하지 않고 $\cos(\theta-\alpha)$를 곧바로 $\tan\theta$로 나타내려 하거나, 제곱한 뒤 원치 않는 각이 끼어들지 않았는지 확인하지 않는 것.

STEP 너머

합의 tan를 기본대칭함수로 나타내는 것은 근들에 대한 모든 대칭다항식은 계수들의 다항식이라는 큰 정리의 한 예이다. 이는 복소수로도 깔끔하게 설명된다. $\prod(1+\mathrm{i}t_k)=\prod\sec\theta_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum\theta_k}$이고, 그 실수부와 허수부가 각각 $1-\sigma_2+\sigma_4$와 $\sigma_1-\sigma_3$이기 때문이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이런 기하학적 사고방식

을 발전시키고, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에는 같은 정신의 STEP 문제가 더 실려 있다.

풀이

STEP III 2007, 문제 2

순수수학 • 이항 멱급수

> **STEP III 2007, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/07-s3-q2

핵심 아이디어

모든 것은 하나의 이항급수(binomial series)에서 출발한다. $(1-4x)^{-1/2}$의 계수(coefficient)를 알고 나면, 급수를 미분하면 인수 n이 내려와 $(n!)^2$이 $n!\,(n-1)!$로 바뀌고, 급수를 적분하면 $n+1$로 나누어져 $(n!)^2$이 $n!\,(n+1)!$로 바뀐다. 따라서 뒤에 나오는 각각의 합은 첫 번째 급수의 도함수 또는 적분을 $|x| < \frac{1}{4}$ 안의 잘 고른 점에서 계산한 값이다.

풀이

소문항 (i)

홀수들의 곱에 빠진 짝수들 $2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)$을 곱하고 다시 나눈다.

$$1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1) = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots(2n-1)(2n)}{2\cdot 4\cdots(2n)} = \frac{(2n)!}{2^n\,(1\cdot 2\cdots n)} = \frac{(2n)!}{2^n\,n!},$$

여기서 n개의 짝수 $2k$가 각각 인수 2와 인수 k를 하나씩 내놓기 때문이다.

$|4x| < 1$, 즉 $|x| < \frac{1}{4}$일 때 이항급수에 의해

$$(1-4x)^{-1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!}\,(-4x)^n.$$

분자에는 n개의 인수가 있고 모두 음수이므로, 분자는 $(-1)^n\,\dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n}$과 같다. $(-1)^n$은 $(-4)^n$의 부호와 상쇄되고 $4^n/2^n = 2^n$이므로, 앞의 결과를 이용하면 x^n의 계수는

$$\frac{2^n\cdot 1\cdot 3\cdots(2n-1)}{n!} = \frac{2^n}{n!}\cdot\frac{(2n)!}{2^n\,n!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2},$$

이다. 따라서 $|x| < \frac{1}{4}$일 때

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}\, x^n,$$

이고, 이것이 증명하려던 식이다.

소문항 (ii)

멱급수(power series)는 수렴 구간(interval of convergence), 여기서는 $|x| < \frac{1}{4}$ 안에서 항별로 미분(term-by-term differentiation)할 수 있다. 양변을 미분하면 좌변은

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-4x)^{-1/2} = -\tfrac{1}{2}(1-4x)^{-3/2}\cdot(-4) = 2(1-4x)^{-3/2},$$

이고, 우변에서는 상수항이 사라지고 x^n은 nx^{n-1}이 된다. $n/(n!)^2 = 1/\big(n!\,(n-1)!\big)$이므로

$$2(1-4x)^{-3/2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!\,(n-1)!}\, x^{n-1}.$$

양변에 x를 곱하면 원하는 거듭제곱 x^n을 얻는다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!\,(n-1)!}\, x^n = \frac{2x}{(1-4x)^{3/2}} \qquad (|x| < \tfrac{1}{4}).$$

이제 $x = \frac{6}{25}$를 대입한다. $\frac{6}{25} < \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$이므로 대입할 수 있다. 그러면 $1-4x = \frac{1}{25}$이므로 $(1-4x)^{3/2} = \frac{1}{125}$이고,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!\,(n-1)!} \left(\frac{6}{25}\right)^n = 2\cdot\frac{6}{25}\cdot 125 = 60.$$

소문항 (iii)

> **생각해 보기** 이번에는 계승이 $(n!)^2$이 아니라 $(n+1)!\,n!$이다. 급수에 어떤 연산을 하면 이렇게 될까?

$(n+1)! = (n+1)\,n!$이므로 n번째 계수를 $n+1$로 나누어야 한다. x^n을 적분하면 정확히 이렇게 된다: $\int_0^x t^n\,\mathrm{d}t = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$. 멱급수의 항별 적분 역시 수렴 구간 안에서 성립하므로, $|x| < \frac{1}{4}$일 때 소문항 (i)의 급수를 0부터 x까지 적분한다.

$$\int_0^x (1-4t)^{-1/2}\,\mathrm{d}t = \Big[-\tfrac{1}{2}(1-4t)^{1/2}\Big]_0^x = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2},$$

따라서

$$\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2} = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}\, x^{n+1}.$$

다음으로 구하려는 합의 거듭제곱을 맞춘다. $3^{2n} = 9^n = 9^{n+1}/9$이므로

$$\frac{2^{n+1}}{3^{2n}} = 9\left(\frac{2}{9}\right)^{n+1},$$

이고, 따라서 구하려는 합은 $x = \frac{2}{9}$에서 이 급수의 값의 9배이다. $\frac{2}{9} < \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$이므로 이 값은 허용된다. 이때 $1 - 4x = \frac{1}{9}$이고 $\sqrt{1-4x} = \frac{1}{3}$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}(2n)!}{3^{2n}(n+1)!\,n!} &= 9\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}\left(\frac{2}{9}\right)^{n+1} \\ &= 9\left(\frac{1-\frac{1}{3}}{2} - \frac{2}{9}\right) = 9\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{9}\right) = 1,\end{aligned}$$

이 되어 증명이 끝난다. 합이 $n = 1$부터 시작하므로 첫 항 x(상수 1의 적분)를 빼야 한다는 점에 주의하라.

검산

- (i)에서 $n = 2$이면 $1 \cdot 3 = 3$이고 $\frac{4!}{2^2\,2!} = 3$이다. 급수는 $1 + 2x + 6x^2 + 20x^3 + \cdots$로 시작하며, 제곱해서 확인하면 $(1 + 2x + 6x^2)^2(1 - 4x) = 1 + O(x^3)$으로 일치한다.
- (ii)의 처음 3000개 항을 정확한 분수로 더하면 60.000…이 되고, (iii)의 처음 400개 항을 더하면 기계 정밀도 범위에서 1.000…이 된다.
- (iii)에서 첫 항($n = 1$)은 $\frac{4 \cdot 2}{9 \cdot 2} = \frac{4}{9}$로, 이미 전체 합 1의 상당 부분을 차지한다. 그 뒤의 항들은 대략 $(8/9)^n$처럼 줄어든다.

흔한 실수

- 이항계수에서 부호를 놓치는 실수: 분자에 음수 인수가 n개, $(-4)^n$에 n개 있으므로 정확히 상쇄된다.
- $\frac{6}{25}$와 $\frac{2}{9}$가 $|x| < \frac{1}{4}$ 안에 있는지 확인하지 않는 실수: 이 범위 밖에서는 급수가 발산한다.
- (iii)에서 상수 1을 적분하여 생기는 x항을 잊는 실수: 이렇게 하면 답이 1 대신 3이 된다.

STEP 너머

소문항 (iii)에 나오는 수 $\frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$은 카탈랑 수(Catalan numbers) $1, 1, 2, 5, 14, \ldots$이다. 이 수는 괄호 매기기(bracketings), 이진 트리(binary trees)를 비롯한 여러 구조의 개수를 세며, $\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$는 카탈랑 수의 생성함수(generating function)이다. 우리가 증명 없이 사

용한 사실, 즉 멱급수는 수렴 반경(radius of convergence) 안쪽에서 항별로 미분하고 적분할 수 있다는 것은 대학 1학년 해석학(analysis)의 표준 정리이다. Abbott, *Understanding Analysis*를 참고하라.

풀이

STEP III 2007, 문제 3

순수수학 • 피보나치 항등식

STEP III 2007, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/07-s3-q3

핵심 아이디어

여기서 다루는 모든 항등식(identity)은 같은 방법으로 증명한다. 첨자가 가장 큰 항을 골라 점화식(recurrence) $F_m = F_{m-1} + F_{m-2}$를 이용해 쪼개는 것이다. 이를 한 번 하면 (ii)의 식이 모든 첨자가 1씩 줄어든 식으로 바뀌고, 두 번 하면 첨자가 2씩 줄어든 같은 꼴의 식으로 돌아오는데, 이것이 바로 귀납법(induction)에 필요한 것이다. (iv)의 나누어떨어짐(divisibility)에 대해서는 $F_{2n-1} + F_{2n} = F_{2n+1}$임에 주목하자. 따라서 F_{2n-1}^2과 F_{2n}^2을 F_{2n+1}로 나눈 나머지(remainder)는 같다.

풀이

소문항 (i)

$F_1 = F_2 = 1$에서 시작하여 이웃한 항을 더해 나가면

$$F_3 = 2, \quad F_4 = 3, \quad F_5 = 5, \quad F_6 = 8, \quad F_7 = 13, \quad F_8 = 21.$$

소문항 (ii)

모든 항이 정의되도록 $k \geq 1$이라 하자. 첨자가 가장 큰 항 F_{2k+3}을 $F_{2k+2} + F_{2k+1}$로 바꾸면

$$\begin{aligned} F_{2k+3}F_{2k+1} - F_{2k+2}^2 &= (F_{2k+2} + F_{2k+1})F_{2k+1} - F_{2k+2}^2 \\ &= F_{2k+1}^2 + F_{2k+2}(F_{2k+1} - F_{2k+2}) \\ &= F_{2k+1}^2 - F_{2k+2}F_{2k}, \end{aligned}$$

이다. 점화식에 의해 $F_{2k+2} - F_{2k+1} = F_{2k}$이기 때문이다. 이것은 $-F_{2k+2}F_{2k} + F_{2k+1}^2$이므로 요구된 결과가 성립한다.

소문항 (iii)

명제 $F_{2n+1}F_{2n-1} - F_{2n}^2 = 1$을 $P(n)$이라 하자.

기저 단계(*base case*). $n = 1$일 때 $F_3F_1 - F_2^2 = 2 \cdot 1 - 1^2 = 1$이므로 $P(1)$이 성립한다.

귀납 단계(*inductive step*). 어떤 $k \geq 1$에 대하여 $P(k)$가 성립한다고 가정하자. 소문항 (ii)에 의해

$$F_{2k+3}F_{2k+1} - F_{2k+2}^2 = F_{2k+1}^2 - F_{2k+2}F_{2k}.$$

> ? **생각해 보기** 소문항 (ii)는 첨자를 1만큼만 줄였다. 어떻게 하면 $P(k)$까지 완전히 되돌아갈 수 있을까?

같은 방법을 한 번 더 적용하여, 이번에는 첨자가 가장 큰 항을 $F_{2k+2} = F_{2k+1} + F_{2k}$로 쪼개면

$$\begin{aligned} F_{2k+1}^2 - F_{2k+2}F_{2k} &= F_{2k+1}^2 - (F_{2k+1} + F_{2k})F_{2k} \\ &= F_{2k+1}(F_{2k+1} - F_{2k}) - F_{2k}^2 \\ &= F_{2k+1}F_{2k-1} - F_{2k}^2, \end{aligned}$$

이다. 여기서 $F_{2k+1} - F_{2k} = F_{2k-1}$을 이용했다($2k+1 \geq 3$이므로 성립한다). 가정 $P(k)$에 의해 이 값은 1이다. 위의 두 식을 이어 붙이면

$$F_{2k+3}F_{2k+1} - F_{2k+2}^2 = 1,$$

이고, 이것이 곧 $P(k+1)$이다. 수학적 귀납법에 의해 모든 $n \geq 1$에 대하여 $P(n)$이 성립한다.

결론 이끌어내기. $P(n)$을 정리하면

$$F_{2n}^2 + 1 = F_{2n+1}F_{2n-1},$$

이고, F_{2n-1}은 정수이므로(점화식에 의해 모든 F_m은 정수이다) $F_{2n}^2 + 1$은 F_{2n+1}로 나누어떨어진다.

소문항 (iv)

점화식에 의해 $F_{2n-1} = F_{2n+1} - F_{2n}$이다. 양변을 제곱하면

$$F_{2n-1}^2 = F_{2n+1}^2 - 2F_{2n+1}F_{2n} + F_{2n}^2,$$

이므로

$$F_{2n-1}^2 + 1 = F_{2n+1}(F_{2n+1} - 2F_{2n}) + (F_{2n}^2 + 1).$$

첫째 항은 F_{2n+1}의 배수이고(곱해진 인수가 정수이다), $F_{2n}^2 + 1$은 소문항 (iii)에 의해 F_{2n+1}의 배수이다. 따라서 $F_{2n-1}^2 + 1$은 F_{2n+1}로 나누어떨어진다.

사실 몫(quotient)도 구할 수 있다. $F_{2n}^2 + 1 = F_{2n+1}F_{2n-1}$을 이용하면

$$F_{2n-1}^2 + 1 = F_{2n+1}\left(F_{2n+1} - 2F_{2n} + F_{2n-1}\right) = F_{2n+1}\left(2F_{2n-1} - F_{2n}\right),$$

이고, $n \geq 2$일 때 괄호 안은 $F_{2n-1} - F_{2n-2} = F_{2n-3}$이다. 따라서 $F_{2n-1}^2 + 1 = F_{2n+1}F_{2n-3}$이며, 이는 (iii)의 항등식과 아주 가까운 친척이다.

검산

$n = 3$일 때 $F_6^2 + 1 = 65 = 13 \times 5 = F_7F_5$이고, $F_5^2 + 1 = 26 = 13 \times 2 = F_7F_3$이다. $n = 4$일 때 $F_7^2 + 1 = 170 = 34 \times 5 = F_9F_5$이다. 컴퓨터로 37 이하의 모든 n에 대하여 (ii)와 (iii)의 항등식, 두 나누어떨어짐 명제, 그리고 몫 F_{2n-3}을 확인하였다.

흔한 실수

- (ii)만으로 귀납법을 시도하는 것: (ii)는 첨자를 1만큼만 줄이므로, 그 결과인 $F_{2k+1}^2 - F_{2k+2}F_{2k}$는 아직 귀납 가정의 꼴이 아니다. 점화식을 한 번 더 사용해야 한다.
- 기저 단계를 빠뜨리거나, 잘못된 첨자로 확인하는 것($n = 1$에는 F_1, F_2, F_3이 관련된다).

STEP 너머

소문항 (iii)은 카시니 항등식(Cassini's identity) $F_{m+1}F_{m-1} - F_m^2 = (-1)^m$의 절반에 해당하며, 이 항등식은 행렬식(determinant)으로부터 곧바로 얻어진다. 행렬 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^m$의 성분은 F_{m+1}, F_m, F_m, F_{m-1}이고, 그 행렬식은 $(-1)^m$이기 때문이다. (iv)와 같은 나누어떨어짐 성질은 선형 점화식(linear recurrence)의 정수론의 출발점이며, 그곳에서는 합동식(congruence)이 대부분의 일을 해낸다. 정수론에 대해서는 Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술), 행렬의 관점에 대해서는 Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)가 다음 단계로 좋은 책이다.

풀이

STEP III 2007, 문제 4

순수수학 • 매개변수 곡선과 곡률

STEP III 2007, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/07-s3-q4

핵심 아이디어

모든 것은 $\dot{x}$에 대한 깔끔한 식에 달려 있다. 다루기 까다로운 항 $\ln\tan\frac{1}{2}t$를 미분하면 $1/\sin t$가 되고, 그러면 $\dot{x}$는 $a\cos^2 t/\sin t$로 간단해진다. $\dot{x}$와 $\dot{y}$를 구하고 나면 기울기(gradient), 접선(tangent), 곡률(curvature), 법선(normal)은 모두 간단한 좌표기하로 따라 나온다. 단위 접벡터를 $(\cos t, \sin t)$로 쓰면 마지막 부분이 매우 짧아진다.

풀이

기울기

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\tan\frac{1}{2}t = \dfrac{\frac{1}{2}\sec^2\frac{1}{2}t}{\tan\frac{1}{2}t} = \dfrac{1}{2\sin\frac{1}{2}t\cos\frac{1}{2}t} = \dfrac{1}{\sin t}$이므로 다음을 얻는다.

$$\dot{x} = a\left(-\sin t + \frac{1}{\sin t}\right) = a\,\frac{1-\sin^2 t}{\sin t} = \frac{a\cos^2 t}{\sin t},$$
$$\dot{y} = a\cos t.$$

$0 < t < \frac{1}{2}\pi$에서 둘 다 양수이므로

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = a\cos t\cdot\frac{\sin t}{a\cos^2 t} = \tan t,$$

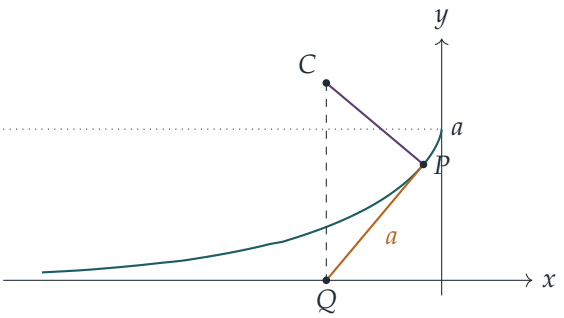
이고, 이것이 보이려던 결과이다.

개형 그리기

- $t \to 0^+$일 때 $\tan\frac{1}{2}t \to 0^+$이므로 $x \to -\infty$이고 $y \to 0$이다. x축이 점근선(asymptote)이다.

- $t \to \frac{1}{2}\pi^-$일 때 $x \to a(0 + \ln 1) = 0$이고 $y \to a$이다. 곡선은 $(0, a)$에서 끝나며, 그곳에서 기울기 $\tan t \to \infty$이므로 접선은 수직이다.
- $\dot{x} > 0$이므로 x는 t와 함께 증가하고, 기울기 $\tan t$도 증가한다. 따라서 곡선은 꾸준히 올라가며 아래로 볼록(concave upwards)하고, y는 0과 a 사이에 있다.

이 곡선을 **추적선**(*tractrix*)이라 한다. 그림에는 뒤의 소문항에 나오는 점 P, Q, C도 함께 나타내었다.



접선: $PQ = a$

$P = (x, y)$에서의 접선의 기울기는 $\tan t$이다. 이 접선은 P에서 수평 방향으로 $y/\tan t$만큼 뒤로 간 곳에서 $y = 0$과 만나므로

$$x_Q = x - \frac{y}{\tan t} = x - \frac{a \sin t \cos t}{\sin t} = x - a\cos t.$$

이다. 따라서 $\overrightarrow{QP} = (a\cos t,\ a\sin t)$이고

$$PQ = \sqrt{a^2\cos^2 t + a^2 \sin^2 t} = a.$$

이다. 즉 곡선에서 x축까지의 접선의 길이는 항상 a이다. (뒤에서 쓰기 위해 적어 두면 $x_Q = a \ln \tan \frac{1}{2}t$이다.)

곡률 반지름

미분하기 쉽도록 $\dot{x} = a\left(\frac{1}{\sin t} - \sin t\right)$로 쓰면

$$\ddot{x} = a\left(-\frac{\cos t}{\sin^2 t} - \cos t\right), \qquad \ddot{y} = -a\sin t.$$

이다. 그러면

$$\begin{aligned}\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x} &= \frac{a\cos^2 t}{\sin t}(-a\sin t) + a\cos t \cdot a\left(\frac{\cos t}{\sin^2 t} + \cos t\right) \\ &= a^2\left(-\cos^2 t + \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} + \cos^2 t\right) = a^2\cot^2 t,\end{aligned}$$

이고

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2\cos^2 t\left(\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} + 1\right) = \frac{a^2\cos^2 t}{\sin^2 t} = a^2\cot^2 t.$$

이다. 주어진 범위에서 $\cot t > 0$이므로 $(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2} = a^3\cot^3 t$이고, 따라서

$$\rho = \frac{a^3\cot^3 t}{a^2\cot^2 t} = a\cot t,$$

이며, 이것이 보이려던 결과이다.

곡률 중심: CQ는 수직이다

P에서의 접선은 단위벡터 $(\cos t, \sin t)$ 방향이므로, 법선은 $(-\sin t, \cos t)$ 방향이거나 그 반대 방향이다.

> **생각해 보기** 두 법선 방향 중 어느 쪽이 "곡선 위쪽"인가?

$\cos t > 0$이므로 벡터 $(-\sin t, \cos t)$의 y성분은 양수이다. 곡선이 아래로 볼록하므로 P에서 이 방향으로 조금 움직이면 곡선 위쪽으로 가게 된다(어쨌든 반대 방향은 아래쪽으로 향한다). 따라서

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP} + \rho(-\sin t, \cos t) = \big(x - a\cot t\sin t,\ a\sin t + a\cot t\cos t\big).$$

이다. 접선 부분의 결과에 의해 x좌표는

$$x_C = x - a\cos t = x_Q$$

이다. 그러므로 C와 Q는 x좌표가 같고, CQ는 y축에 평행하며, 이것이 보이려던 결과이다. (y좌표는 $a\sin t + \dfrac{a\cos^2 t}{\sin t} = \dfrac{a}{\sin t}$로 간단해지므로 $C = \big(a\ln\tan\tfrac{1}{2}t,\ a\operatorname{cosec} t\big)$이다.)

검산

- $a = 1, t = \frac{5\pi}{18}$ (50°)일 때 $P \approx (-0.1202, 0.7660)$이고 $Q \approx (-0.7630, 0)$이므로 $PQ = 1.0000$이다. 공식에 따르면 $C \approx (-0.7630, 1.3054)$로, Q의 바로 위에 있다.
- a와 t의 무작위 값 2000개에 대해 $\dot{x}$, $\ddot{x}$를 유한 차분(finite differences)으로 구해 수치적으로 확인한 결과, 반올림 오차 범위 안에서 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = \tan t$, $PQ = a$, $\rho = a\cot t$, $x_C = x_Q$와 일치하였다.
- $t \to \frac{1}{2}\pi$일 때 $\rho \to 0$이다. 즉 곡선은 $(0, a)$에 가까워질수록 점점 더 급하게 휜다(y축에 대한 대칭 이미지가 그곳에서 첨점(cusp)을 이루며 만난다). $t \to 0$일 때 $\rho \to \infty$이며, 이는 곡선이 점근선 쪽으로 평평해지는 것과 들어맞는다.

흔한 실수

- $\ln\tan\frac{1}{2}t$를 미분할 때 연쇄법칙(chain rule)에서 나오는 인수 $\frac{1}{2}$를 빠뜨리는 실수. 결과는 반드시 $1/\sin t$가 되어야 한다.
- $\dot{x}$를 $a(-\sin t+\operatorname{cosec} t)$로 둔 채 간단히 하지 않는 실수. $a\cos^2 t/\sin t$ 꼴이 뒤의 모든 소문항을 깔끔하게 만들어 준다.
- 법선 방향을 $(\sin t, -\cos t)$로 잡는 실수. 이 방향은 곡선 아래쪽을 향하므로 C가 잘못된 위치에 놓인다.

STEP 너머

추적선은 x축을 따라 걷는 사람이 길이 a인 줄에 매단 추를 끌고 갈 때 추가 그리는 경로이며, $PQ=a$가 바로 그 성질이다. 점 C는 곡선의 곡률 중심들의 자취(locus)인 **축폐선**(*evolute*)을 그린다. 여기서 $C=(a\ln\tan\frac{1}{2}t,\ a\operatorname{cosec} t)$는 현수선(catenary) 위에 놓인다는 것이 밝혀진다. 추적선을 점근선을 축으로 회전시키면 의구(pseudosphere)를 얻는데, 이는 일정한 음의 곡률을 가진 곡면으로 쌍곡기하학(hyperbolic geometry)의 한 모형이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*에는 의구에 대한 아름다운 기하학적 설명이 실려 있다.

풀이

STEP III 2007, 문제 5

순수수학 • 고계 도함수와 귀납법

STEP III 2007, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/07-s3-q5

핵심 아이디어

r와 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x$를 θ만으로 나타내면 모든 것이 간단해진다. $\coth\theta = x$로부터 $r = 1/\sinh\theta$를 얻고, 이어서 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}x = \cosh\theta$와 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x = -\sinh^2\theta$를 얻는다. 그러면 $\cosh n\theta/r^n$을 미분할 때 정확히 $\cosh(n+1)\theta$에 대한 덧셈정리(compound-angle formula)가 나타나고, 이것이 수학적 귀납법(induction)의 발판이 된다.

풀이

준비

$x > 1$이므로 $\coth\theta = x$는 $\theta > 0$인 해를 유일하게 가지고, 따라서 $\sinh\theta > 0$이다. $\coth^2\theta - 1 = \operatorname{cosech}^2\theta$를 이용하면

$$r^2 = x^2 - 1 = \coth^2\theta - 1 = \frac{1}{\sinh^2\theta}, \qquad \text{이므로} \qquad r = \frac{1}{\sinh\theta},$$

이다. 여기서 r와 $\sinh\theta$가 모두 양수이므로 양의 제곱근을 택했다.

두 도함수가 모든 일을 해 준다. $\coth\theta = x$를 x에 대하여 미분하면

$$-\operatorname{cosech}^2\theta\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = 1 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = -\sinh^2\theta = -\frac{1}{r^2}.$$

$r^2 = x^2 - 1$을 미분하면 $2r\,\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x} = 2x$이므로

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{r} = \coth\theta\,\sinh\theta = \cosh\theta.$$

처음 두 도함수

$y = \ln r^2 = 2\ln r$이므로

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x} = \frac{2\cosh\theta}{r},$$

이고, 이것이 요구된 결과이다. 이계도함수는 $1/r = \sinh\theta$로 쓰는 것이 가장 깔끔하다. 그러면 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2\cosh\theta\sinh\theta = \sinh 2\theta$이다. 연쇄법칙(chain rule)에 의하여

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 2\cosh 2\theta\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = -\frac{2\cosh 2\theta}{r^2},$$

이고, 이것이 요구된 결과이다.

삼계도함수

이제 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -2\cosh 2\theta\sinh^2\theta$로 쓰고, $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x = -\sinh^2\theta$와 함께 곱의 미분법(product rule)을 쓰면

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} &= -2\big(2\sinh 2\theta\sinh^2\theta + 2\cosh 2\theta\sinh\theta\cosh\theta\big)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\\ &= 4\sinh^3\theta\big(\cosh 2\theta\cosh\theta + \sinh 2\theta\sinh\theta\big)\\ &= 4\sinh^3\theta\cosh 3\theta,\end{aligned}$$

이다. 마지막 단계에서는 항등식 $\cosh(A+B) = \cosh A\cosh B + \sinh A\sinh B$를 이용했다. 따라서

$$\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} = \frac{4\cosh 3\theta}{r^3}.$$

일반 공식

$2\cosh\theta/r$, $-2\cosh 2\theta/r^2$, $4\cosh 3\theta/r^3$이라는 패턴은 계수가 $2\cdot 0!$, $-2\cdot 1!$, $2\cdot 2!$임을 시사하므로, 다음과 같이 추측한다.

$$\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n} = (-1)^{n-1}\,\frac{2\,(n-1)!\,\cosh n\theta}{r^n} \qquad (n \geq 1).$$

? 생각해 보기 방금 삼계도함수에 대해 한 계산을 일반화하면 어떤 계산이 되는가?

그것은 $\cosh n\theta/r^n = \cosh n\theta\,\sinh^n\theta$의 도함수이다. $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x = -\sinh^2\theta$와 함께 곱의 미분법과 연쇄법칙을 쓰면

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\cosh n\theta\,\sinh^n\theta\big) &= \big(n\sinh n\theta\,\sinh^n\theta + n\cosh n\theta\,\sinh^{n-1}\theta\cosh\theta\big)\big(-\sinh^2\theta\big)\\ &= -n\sinh^{n+1}\theta\,\big(\cosh n\theta\cosh\theta + \sinh n\theta\sinh\theta\big)\\ &= -n\sinh^{n+1}\theta\,\cosh(n+1)\theta,\end{aligned}$$

즉

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\cosh n\theta}{r^n}\right) = -\frac{n\cosh(n+1)\theta}{r^{n+1}}.$$

이제 귀납법을 적용한다. $n = 1$일 때 공식은 성립한다(앞에서 구한 일계도함수이다). 어떤 $n = k \geq 1$에 대하여 공식이 성립한다고 가정하자. 그러면 위의 계산을 $n = k$로 적용하여

$$\frac{\mathrm{d}^{k+1}y}{\mathrm{d}x^{k+1}} = (-1)^{k-1}\,2\,(k-1)!\cdot\left(-\frac{k\cosh(k+1)\theta}{r^{k+1}}\right) = (-1)^k\,\frac{2\,k!\,\cosh(k+1)\theta}{r^{k+1}},$$

을 얻고, 이것은 $n = k+1$일 때의 공식이다. 귀납법에 의하여

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = (-1)^{n-1}\,\frac{2\,(n-1)!\,\cosh n\theta}{r^n} \quad \text{모든} n \geq 1.}$$

이다. ($n = 2$와 $n = 3$인 경우는 직접 구한 결과와 일치한다.)

두 번째 방법

부분분수(partial fractions)를 이용하면 독립적으로 유도할 수 있다. $y = \ln(x-1) + \ln(x+1)$이므로

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = (-1)^{n-1}(n-1)!\left[(x-1)^{-n} + (x+1)^{-n}\right].$$

그런데 $x \pm 1 = \dfrac{\cosh\theta \pm \sinh\theta}{\sinh\theta} = r\,\mathrm{e}^{\pm\theta}$이므로 대괄호 안은 $r^{-n}\left(\mathrm{e}^{-n\theta} + \mathrm{e}^{n\theta}\right) = 2\cosh n\theta / r^n$이 되어 같은 공식을 얻는다. 이것은 치환이 어디에서 왔는지도 설명해 준다. θ는 $\ln\dfrac{x+1}{x-1}$의 절반이다.

검산

- $x = 2$에서: 부분분수로 $\mathrm{d}^3y/\mathrm{d}x^3 = 2\left(1 + \frac{1}{27}\right) = \frac{56}{27} \approx 2.0741$을 얻고, $\theta = \tanh^{-1}\frac{1}{2}$, $r = \sqrt{3}$일 때 $4\cosh 3\theta / r^3$도 같은 값을 준다.
- 처음 세 도함수를 $x > 1$인 무작위 점 200개에서 $\ln(x^2-1)$의 유한차분(finite differences)과 비교했고, 일반 공식을 $n \leq 14$에 대하여 부분분수 꼴과 비교했다(약 10^{-14}까지 일치).
- 부호: $x > 1$에서 $\ln(x^2-1)$은 증가하고 위로 오목(concave)하므로 $y' > 0$, $y'' < 0$과 맞아떨어진다.

흔한 실수

- $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x = +\sinh^2\theta$로 쓰는 실수: $\coth\theta$의 도함수는 $-\operatorname{cosech}^2\theta$이고, 바로 이 음의 부호 때문에 도함수의 부호가 번갈아 바뀐다.

- 계승을 하나 틀리게 쓰는 실수: 일계도함수의 계수가 $2 = 2 \cdot 0!$이므로 n계도함수에는 $(n-1)!$이 붙는다.
- 몇 가지 경우만 확인하고 멈추는 실수: "증명하라"는 일반적인 귀납 단계를 요구한다.

STEP 너머

모든 도함수에 대한 이 깔끔한 닫힌 꼴은 복소해석학(complex analysis)을 엿보게 해 준다. $\ln(x^2-1)$은 $x = \pm 1$에서 특이점(singularities)을 가지며, 그 고계도함수는 이 특이점까지의 거리, 여기서는 $x \mp 1 = re^{\mp\theta}$에 의해 결정된다. 대학 1학년 해석학 강의에서는 테일러 급수(Taylor series)의 나머지항을 어림하고 수렴반지름(radius of convergence)을 구할 때 바로 이런 공식이 필요하다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 왜 특이점이 멱급수(power series)를 지배하는지를 아름답게 설명한다.

풀이

STEP III 2007, 문제 6

순수수학 • 복소수와 원

STEP III 2007, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/07-s3-q6

핵심 아이디어

원점을 중심으로 하는 반지름 a인 원 위에서는 켤레(conjugation)를 취하는 것이 반전(inversion)과 같다. 즉 $pp^* = a^2$이므로 $p^* = a^2/p$이다. 이 한 가지 사실만으로 문제에 나오는 모든 켤레복소수가 평범한 분수로 바뀌고, 항등식(identity)이 저절로 나온다. 수직(perpendicular)인지 판정하려면 두 현(chord) 벡터의 비가 순허수(purely imaginary)인지 확인하면 된다. 그러면 항등식이 이 판정 기준을 간단한 곱의 조건으로 바꾸어 준다. 다각형 문제에서는 이 곱의 조건이 점화식(recurrence)이 된다. B_1을 정하고 나면 나머지 B_k는 모두 강제로 결정되고, 남는 질문은 한 바퀴 돌아 B_1로 돌아왔을 때 사슬이 닫히느냐 하는 것뿐이다.

풀이

항등식

P가 원 위에 있으므로 $|p| = a$이고, 따라서 $pp^* = a^2$, $p^* = a^2/p$이다. 마찬가지로 $q^* = a^2/q$이다. 그러므로

$$p^* - q^* = \frac{a^2}{p} - \frac{a^2}{q} = \frac{a^2(q-p)}{pq} = -\frac{a^2(p-q)}{pq}.$$

$p \neq q$이므로 (그리고 $a > 0$이므로 $p, q \neq 0$이므로) 이 값은 0이 아니고, 따라서 식을 정리할 수 있다.

$$pq = -a^2 \frac{p-q}{p^* - q^*},$$

이것이 증명하려던 식이다.

수직인 현

현 PQ는 복소수 $p-q$의 방향이고, RS는 $r-s$의 방향이다. 두 복소수의 비의 편각이 둘 사이의 각이므로, 0이 아닌 두 복소수가 수직일 필요충분조건은 그 비

$$w = \frac{p-q}{r-s}$$

가 순허수인 것이다.

? 생각해 보기 "w가 순허수이다"를 써먹을 수 있는 방정식으로 어떻게 바꿀까?

0이 아닌 w가 순허수일 필요충분조건은 $w^* = -w$, 즉 $w/w^* = -1$이다. 두 현에 대하여 항등식을 쓰면 (두 번째 현에서는 p, q 대신 r, s를 넣어)

$$\frac{w}{w^*} = \frac{p-q}{p^*-q^*} \cdot \frac{r^*-s^*}{r-s} = \frac{-pq/a^2}{-rs/a^2} = \frac{pq}{rs}.$$

따라서 $PQ \perp RS$일 필요충분조건은 $pq/rs = -1$이다. $rs \neq 0$이므로 이는 곧

$$pq + rs = 0.$$

여기서 모든 단계가 거꾸로도 성립하므로, 문제에서 요구한 것보다 조금 더 많은 것을 보인 셈이다. 즉 이 원의 현에 대하여 $PQ \perp RS \iff pq + rs = 0$이다. 아래에서 이 역(converse) 방향이 필요하다.

다각형 문제

점 A_k와 B_k를 각각 α_k와 β_k로 나타내자. 앞의 결과(와 그 역)에 의해, n개의 수직 조건은 정확히

$$\beta_k\beta_{k+1} = -\alpha_k\alpha_{k+1} \quad (k = 1, \ldots, n-1), \qquad \beta_n\beta_1 = -\alpha_n\alpha_1,$$

이다. 단, 각 B_kB_{k+1}이 실제로 현이 되도록 이웃한 B들은 서로 달라야 한다.

β_1을 정하자. 그러면 $\beta_{k+1} = -\alpha_k\alpha_{k+1}/\beta_k$이므로 처음 $n-1$개의 조건에 의해 $\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$이 차례로 강제로 결정되고, 각 β_{k+1}의 절댓값은 자동으로 a이다. 처음 몇 개를 계산하면

$$\beta_2 = -\frac{\alpha_1\alpha_2}{\beta_1}, \qquad \beta_3 = -\frac{\alpha_2\alpha_3}{\beta_2} = \frac{\alpha_3\beta_1}{\alpha_1}, \qquad \beta_4 = -\frac{\alpha_3\alpha_4}{\beta_3} = -\frac{\alpha_1\alpha_4}{\beta_1},$$

이고, 간단한 수학적 귀납법(induction)으로

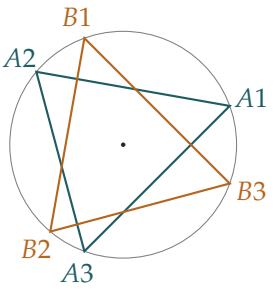
$$\beta_k = \frac{\alpha_k\beta_1}{\alpha_1} \ (k\text{가 홀수}), \qquad \beta_k = -\frac{\alpha_1\alpha_k}{\beta_1} \ (k\text{가 짝수}).$$

를 얻는다. (k일 때 성립하면 $\beta_{k+1} = -\alpha_k\alpha_{k+1}/\beta_k$에 의해 $k+1$일 때 다른 쪽 형태가 나온다.) 이제 모든 것은 마지막 조건 $\beta_n\beta_1 = -\alpha_n\alpha_1$이 성립하느냐에 달려 있다.

$n = 3$. 이 경우 $\beta_3 = \alpha_3\beta_1/\alpha_1$이므로 닫힘 조건은

$$\frac{\alpha_3\beta_1^2}{\alpha_1} = -\alpha_3\alpha_1 \iff \beta_1^2 = -\alpha_1^2 \iff \beta_1 = \pm \mathrm{i}\,\alpha_1.$$

이다. 따라서 B_1을 고르는 방법은 두 가지뿐이다. $\beta_1 = \mathrm{i}\alpha_1$이면 공식에 의해 $\beta_2 = \mathrm{i}\alpha_2$, $\beta_3 = \mathrm{i}\alpha_3$이고, $\beta_1 = -\mathrm{i}\alpha_1$이면 모든 $\beta_k = -\mathrm{i}\alpha_k$이다. 어느 경우든 삼각형 $B_1B_2B_3$은 삼각형 $A_1A_2A_3$을 중심에 대하여 직각만큼 회전한 것이다. 꼭짓점들이 서로 다르므로 두 경우 모두 실제로 조건을 만족하며, 현을 90° 회전하면 당연히 원래 현과 수직이 된다.



그림은 $\beta_1 = \mathrm{i}\alpha_1$을 고른 경우이다. 호박색 삼각형의 각 변은 대응하는 청록색 변을 90° 돌린 것이다.

$n = 4$. 이제 $\beta_4 = -\alpha_1\alpha_4/\beta_1$이므로

$$\beta_4\beta_1 = -\alpha_1\alpha_4$$

는 β_1이 무엇이든 자동으로 성립한다. 따라서 B_1은 원 위 **어디에나** 놓을 수 있고, 고르는 방법은 무수히 많다. 예외는 이웃한 두 B가 일치하게 되는 유한 개의 위치뿐이다. 예를 들어 $\beta_1 = \beta_2$가 되려면 $\beta_1^2 = -\alpha_1\alpha_2$이어야 하므로 두 점이 제외된다. 네 가지 일치 각각이 많아야 두 점을 제외하므로, 제외되는 위치는 많아야 여덟 개이다.

$n > 4$. 같은 계산이 모든 n에 대하여 통하며, 중요한 것은 n의 홀짝성(parity)뿐이다.

- n이 홀수이면 닫힘 조건은 $\beta_1^2 = -\alpha_1^2$이다. 고르는 방법은 정확히 두 가지, $\beta_1 = \pm\mathrm{i}\alpha_1$이고, $B_1B_2\cdots B_n$은 다각형 $A_1A_2\cdots A_n$을 중심에 대하여 $\pm 90°$ 회전한 것이다.
- n이 짝수이면 닫힘 조건은 자동으로 성립한다. B_1은 이웃한 B들을 일치시키는 많아야 $2n$개의 위치를 제외하면 원 위 어느 점이어도 되므로, 고르는 방법은 무수히 많다.

검산

- $p = a$, $q = \mathrm{i}a$로 해 보자. 그러면 $pq = \mathrm{i}a^2$이고, $-a^2(a - \mathrm{i}a)/(a + \mathrm{i}a) = -a^2 \cdot (-\mathrm{i}) = \mathrm{i}a^2$이므로 예상대로이다.

- 서로 수직인 지름 $p = a, q = -a$와 $r = \mathrm{i}a, s = -\mathrm{i}a$로 해 보자. $pq + rs = -a^2 + a^2 = 0$이다.
- 수치적으로, 무작위 배치 1000개에서 항등식과 판정 기준 $PQ \perp RS \iff pq + rs = 0$을 확인했다. $n = 3, \ldots, 9$에 대해서는 무작위 시작점에서 점화식을 돌렸다. n이 홀수일 때 B_1을 원을 따라 0.1° 간격으로 훑어 보니, 사슬은 $\beta_1 = \pm\mathrm{i}\alpha_1$ 근처에서만 닫혔다. n이 짝수일 때는 매번 닫혔고, 모든 현이 반올림 오차 범위 안에서 수직이었다.

흔한 실수

- "수직 $\Rightarrow pq + rs = 0$"만 증명하는 것. 다각형 문제에서는 우리가 구성한 β들이 실제로 수직인 현을 만든다는 것을 알기 위해 역도 필요하다.
- "수직이란 w가 순허수라는 뜻"을 $w \neq 0$이라는 언급 없이 $w + w^* = 0$으로 쓰는 것. 여기서는 점들이 서로 다르므로 $w \neq 0$이 보장된다.
- n이 짝수일 때, 몇몇 위치에서는 이웃한 두 B가 일치하여 "현"의 방향이 정해지지 않는다는 것을 놓치고 "모든 B_1이 된다"고 말하는 것.

STEP 너머

사상 $z \mapsto a^2/z^*$는 원 $|z| = a$에 대한 **반전**이며, 원 위의 점들이 이 사상에 의해 고정된다는 사실($p = a^2/p^*$)이 이 문제 전체를 움직인 원동력이었다. 반전은 뫼비우스 변환(Möbius transformations)의 하나이며, 뫼비우스 변환은 복소해석학(complex analysis)과 기하학 첫 강의의 핵심 주제이다. 다각형 논증에는 **모노드로미**(monodromy)의 느낌이 있다. 즉 강제된 선택의 사슬을 따라 고리를 한 바퀴 돈 다음 출발점으로 돌아오는지를 묻는 것이고, 그 답은 n의 홀짝성에 달려 있다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 반전과 이러한 기하학적 아이디어를 아름답게 전개한다.

풀이

STEP III 2007, 문제 7

순수수학 • 치환적분

STEP III 2007, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/07-s3-q7

핵심 아이디어

"arctan"이나 "π"를 쓸 수 없으므로, 모든 사실은 적분 안에서 변수를 바꾸는 것만으로 얻어야 한다. 각 치환(substitution)은 피적분함수(integrand) $1/(1+u^2)$ (또는 $1/\sqrt{1-u^2}$)가 자기 자신이나 다른 하나로 바뀌고 적분 구간만 달라지도록 고른다. 그러면 적분 구간을 비교하여 t와 s의 값 사이의 등식을 얻고, 소문항 (i)의 대칭성(symmetry) $u \mapsto 1/u$가 이 등식들을 p의 배수로 바꾸어 준다.

풀이

소문항 (i)

$x > 0$이라 하고 $u = v^{-1}$로 놓으면 $\mathrm{d}u = -v^{-2}\,\mathrm{d}v$이다. u가 0에서 x까지 증가할 때 v는 ∞에서 $1/x$까지 감소한다. 또한

$$\frac{1}{1+u^2} = \frac{1}{1+v^{-2}} = \frac{v^2}{v^2+1}.$$

따라서

$$t(x) = \int_{\infty}^{1/x} \frac{v^2}{1+v^2}\left(-\frac{1}{v^2}\right)\mathrm{d}v = \int_{1/x}^{\infty} \frac{1}{1+v^2}\,\mathrm{d}v,$$

이며, 여기서 음의 부호를 이용해 적분 구간의 위끝과 아래끝을 바꾸었다. 이것이 구하려는 결과이다. (피적분함수가 $1/v^2$ 이하이므로 이 이상적분(improper integral)은 수렴한다.)

x 대신 $1/x$를 넣어 이 결과를 적용하면 $t(1/x) = \int_x^{\infty} \frac{1}{1+v^2}\,\mathrm{d}v$를 얻는다. 여기에 $t(x) = \int_0^x \frac{1}{1+v^2}\,\mathrm{d}v$를 더하면 두 구간이 이어져 $[0,\infty)$가 된다.

$$t(x) + t(1/x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+v^2}\,\mathrm{d}v = \tfrac{1}{2}p \qquad (x > 0).$$

$x = 1$을 대입하면 $2t(1) = \frac{1}{2}p$이다.

소문항 (ii)

$u \geq 0$이면 $0 \leq y < 1$이다. 양변을 제곱하면 $y^2(1+u^2) = u^2$이므로 $u^2(1-y^2) = y^2$이고

$$u = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}},$$

이다. u와 y의 부호가 같으므로 양의 제곱근을 택하였다. 몫의 미분법(quotient rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = \frac{\sqrt{1-y^2} + \dfrac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}}{1-y^2} = \frac{(1-y^2)+y^2}{(1-y^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-y^2)^3}},$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

이제 $t(x)$에 치환한다. $u^2 = y^2/(1-y^2)$에서

$$1 + u^2 = \frac{1}{1-y^2},$$

이므로

$$\frac{1}{1+u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = (1-y^2)\cdot\frac{1}{(1-y^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

사상 $u \mapsto y$는 증가함수이고(그 역함수(inverse function)의 도함수(derivative)가 양수이므로), $u = 0 \mapsto y = 0$, $u = x \mapsto y = x/\sqrt{1+x^2}$이며 이 값은 1보다 작다. 따라서

$$t(x) = \int_0^{x/\sqrt{1+x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y = s\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right).$$

$x = 1$일 때 이 식은 소문항 (i)에 의해 $s\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = t(1) = \frac{1}{4}p$가 된다.

소문항 (iii)

$a = \frac{1}{\sqrt{3}}$로 놓으면 $z = \dfrac{u+a}{1-au}$이다. $0 \leq u \leq a$에서 $au \leq \frac{1}{3}$이므로 분모는 양수로 유지되고, 그 구간에서 z는 u의 매끄러운 함수이다. 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u} = \frac{(1-au)+a(u+a)}{(1-au)^2} = \frac{1+a^2}{(1-au)^2}.$$

? **생각해 보기** 이 치환이 왜 $1/(1+u^2)$를 바꾸지 않아야 할까?

$1+z^2$을 통분하여 계산한다. 교차항 $\mp 2au$가 소거된다.

$$1 + z^2 = \frac{(1-au)^2 + (u+a)^2}{(1-au)^2} = \frac{1 + a^2u^2 + u^2 + a^2}{(1-au)^2} = \frac{(1+a^2)(1+u^2)}{(1-au)^2}.$$

나누면

$$\frac{1}{1+z^2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u} = \frac{1}{1+u^2},$$

이므로 피적분함수는 그대로이고 적분 구간만 움직인다. (이 뒤에는 탄젠트의 덧셈 정리(tangent addition formula)가 숨어 있지만, 그것은 필요하지 않다.) $u = 0$일 때 $z = a = \frac{1}{\sqrt{3}}$이다. $u = a$일 때

$$z = \frac{2/\sqrt{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{3}{2} = \sqrt{3}.$$

따라서

$$t\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}.$$

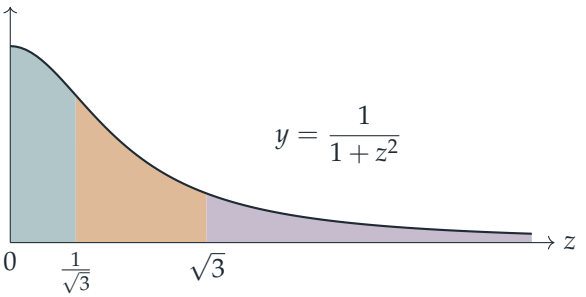
마지막 단계로, 구간 $[0,\infty)$를 $\frac{1}{\sqrt{3}}$과 $\sqrt{3}$에서 나눈다.

$$\tfrac{1}{2}p = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} + \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} + \int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}.$$

첫째 조각은 정의에 의해 $t(\frac{1}{\sqrt{3}})$이고, 둘째 조각은 방금 보인 것에 의해 $t(\frac{1}{\sqrt{3}})$이다. $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$으로 놓고 소문항 (i)을 적용하면 셋째 조각 $\int_{1/x}^{\infty} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} = t(x) = t(\frac{1}{\sqrt{3}})$ 역시 같은 값이다. 따라서

$$3\,t\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \tfrac{1}{2}p.$$

아래 그림은 세 조각을 보여 준다. 0에서 ∞까지 $1/(1+z^2)$ 아래의 넓이가 넓이가 같은 세 영역으로 나뉜다.



검산

수치적으로(심프슨 공식(Simpson's rule)으로) 계산하면 $t(\frac{1}{\sqrt{3}}) \approx 0.5235988$이고 $\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} \approx 0.5235988$이며, $p \approx 3.1415927$이므로 $3t(\frac{1}{\sqrt{3}}) \approx 1.5707963 \approx \frac{1}{2}p$이다. 마찬가지로 $s(\frac{1}{\sqrt{2}}) \approx t(1) \approx 0.7853982 \approx \frac{1}{4}p$이다. 물론 p는 사실 π이고, 이 결과들은 $\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$, $\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$를 말해 준다. 이를 검산에 이용할 수는 있지만 답안에 써서는 안 된다.

흔한 실수

- $u = 1/v$로 치환하면 적분 방향이 뒤집힌다는 것을 잊는 실수. du의 음의 부호가 적분 구간을 다시 올바른 순서로 되돌려 준다.
- 소문항 (iii)에서 치환만 하고 멈추는 실수. $\frac{1}{\sqrt{3}}$에서 $\sqrt{3}$까지의 적분은 같은 세 조각 중 하나일 뿐이며, $\sqrt{3}$ 너머의 조각에는 소문항 (i)이 필요하다.
- 구간에서 $1 - au \neq 0$인지 확인하지 않는 실수. 여기서는 $au \leq \frac{1}{3}$이므로 치환이 타당하다.

STEP 너머

이 문제는 해석학자(analyst)들이 삼각함수(trigonometric functions)를 엄밀하게 정의하는 방법을 엿보게 해 준다. $\arctan x$를 $\int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$로 정의하고, π를 무한대에서의 그 극한(limit)의 두 배로 정의한 다음, 기하를 전혀 쓰지 않고 이와 같은 치환들로부터 모든 성질을 유도한다. 소문항 (iii)의 치환은 모습을 바꾼 tan의 덧셈정리이며, 같은 방법으로 $xy < 1$일 때 $t(x) + t(y) = t\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$를 증명할 수 있다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해하기)는 적분과 멱급수(power series)를 이용해 이러한 정의를 튼튼한 기반 위에 세우는 방법을 보여 준다.

풀이

STEP III 2007, 문제 8

순수수학 • 리카티 방정식

STEP III 2007, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/07-s3-q8

핵심 아이디어

비선형(nonlinear) 방정식 $(*)$는 리카티 방정식(Riccati equation)이다. 즉 y^2 항 때문에 선형성(linearity)이 깨진다. y를 u'/u의 상수배로 놓으면 $y' + y^2$이 u''/u로 바뀌어 제곱 항이 사라지고, u에 대한 **선형 2계**(second-order) 방정식이 남는다. (i)의 앞부분에서 바로 그 선형 방정식의 두 해가 주어지므로, 나머지는 상수를 맞추는 일뿐이다. (ii)에서는 새로운 선형 방정식의 두 해가 필요한데, $1-x$가 $1+x$에서 x를 $-x$로 바꾼 것이라는 점이 실마리이다.

풀이

소문항 (i)

a와 b 구하기. $u = x$이면 $u' = 1$, $u'' = 0$이므로 다음이 성립해야 한다.

$$\mathrm{a}(x) + x\,\mathrm{b}(x) = 0.$$

$u = \mathrm{e}^{-x}$이면 $u' = -\mathrm{e}^{-x}$, $u'' = \mathrm{e}^{-x}$이다. $\mathrm{e}^{-x} \neq 0$으로 나누면 다음을 얻는다.

$$1 - \mathrm{a}(x) + \mathrm{b}(x) = 0.$$

첫째 식에서 $\mathrm{b} = -\mathrm{a}/x$ ($x \neq 0$일 때)이고, 이를 둘째 식에 넣으면 $\mathrm{a}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$이다. 따라서

$$\mathrm{a}(x) = \frac{x}{1+x}, \qquad \mathrm{b}(x) = -\frac{1}{1+x}.$$

(이 함수들은 $x = 0$에서도 두 조건을 모두 만족한다.) 이 방정식은 선형이고 제차(homogeneous)이며, x와 e^{-x}는 서로의 상수배가 아니므로 일반해(general solution)는

$$u = Ax + B\mathrm{e}^{-x},$$

이다. 여기서 A와 B는 임의의 상수이다.

치환. $u \neq 0$일 때 $y = \dfrac{u'}{3u}$로 치환(substitution)한다. 몫의 미분법(quotient rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{u''}{3u} - \frac{(u')^2}{3u^2} = \frac{u''}{3u} - 3\left(\frac{u'}{3u}\right)^2 = \frac{u''}{3u} - 3y^2.$$

따라서 $y' + 3y^2 = \dfrac{u''}{3u}$이다. 제곱 항이 정확히 상쇄되는데, 치환에 인수 3을 넣은 이유가 바로 이것이다. 방정식 $(*)$는

$$\frac{u''}{3u} + \frac{x}{1+x} \cdot \frac{u'}{3u} = \frac{1}{3(1+x)},$$

가 되고, 양변에 $3u$를 곱하면

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} + \frac{x}{1+x}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \frac{1}{1+x}u = 0,$$

을 얻어 요구된 결과가 나온다. 이는 앞에서 구한 a와 b를 넣은, 이 소문항 처음의 방정식이다.

특수해. 따라서 $u = Ax + B\mathrm{e}^{-x}$이고,

$$y = \frac{u'}{3u} = \frac{A - B\mathrm{e}^{-x}}{3(Ax + B\mathrm{e}^{-x})}.$$

생각해 보기 상수는 두 개인데 조건은 하나뿐이다. 문제가 될까?

그렇지 않다. u에 0이 아닌 상수를 곱해도 u'/u는 변하지 않으므로 비 $A : B$만 중요하며, 1계(first-order) 방정식에는 자유로운 상수가 하나만 있어야 한다. $x = 0$에서 $y = 0$이라는 조건으로부터 $A - B = 0$이다. 그러면 $B = A \neq 0$ (그렇지 않으면 $u \equiv 0$)이고, A를 약분하면

$$y = \frac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{3(x + \mathrm{e}^{-x})}.$$

$\mathrm{e}^{-x} \geq 1 - x$에서 $x + \mathrm{e}^{-x} \geq 1$이므로 분모는 결코 0이 되지 않는다. 이로써 소문항 (i)이 끝난다.

소문항 (ii)

이번에는 y^2 항의 계수가 1이므로 $y = \dfrac{u'}{u}$를 쓴다. 앞에서와 똑같이

$$y' = \frac{u''}{u} - \left(\frac{u'}{u}\right)^2 = \frac{u''}{u} - y^2,$$

이므로 $y' + y^2 = u''/u$이다. 방정식에 u를 곱하면 선형 방정식

$$u'' + \frac{x}{1-x}u' - \frac{1}{1-x}u = 0.$$

을 얻는다. 이는 소문항 (i)의 방정식에서 x를 $-x$로 바꾼 것이다. 실제로 w가 소문항 (i)의 방정식의 해이고 $v(x) = w(-x)$이면 $v'(x) = -w'(-x)$, $v''(x) = w''(-x)$이며, 점 $-x$에서 소문항 (i)의 방정식은

$$v''(x) + \frac{-x}{1-x}\big(-v'(x)\big) - \frac{1}{1-x}v(x) = 0,$$

이 되는데, 이것이 바로 새 방정식이다. 따라서 x와 e^{-x}로부터 해 $-x$ (또는 그냥 x)와 e^x를 얻는다. 직접 확인하면, $u = x$일 때 $0 + \frac{x}{1-x} - \frac{x}{1-x} = 0$이고, $u = \mathrm{e}^x$일 때 $\mathrm{e}^x\big(1 + \frac{x}{1-x} - \frac{1}{1-x}\big) = \mathrm{e}^x(1-1) = 0$이다. 그러므로

$$u = Ax + B\mathrm{e}^x, \qquad y = \frac{u'}{u} = \frac{A + B\mathrm{e}^x}{Ax + B\mathrm{e}^x}.$$

$x = 0$에서 이 값은 $(A+B)/B$이고 이것이 2와 같아야 하므로 $A = B$ (그리고 $B \neq 0$)이다. 따라서

$$y = \frac{1 + \mathrm{e}^x}{x + \mathrm{e}^x}.$$

이 해는 0을 포함하면서 $x + \mathrm{e}^x > 0$이고 방정식이 정의되는 구간, 즉 $x_0 < x < 1$에서 유효하다. 여기서 $x_0 \approx -0.567$은 $x + \mathrm{e}^x = 0$의 근이다.

검산

- $x = 0$에서 소문항 (ii)의 답은 $2/1 = 2$이고, 이를 미분하면 $y'(0) = \frac{1\cdot 1 - 2\cdot 2}{1} = -3$이다. 이는 방정식과 일치한다: $1 - 4 - 0 = -3$.
- $x \to \infty$일 때 소문항 (i)의 답은 $\frac{1}{3x}$처럼 0으로 수렴한다. 이때 $y' \approx -\frac{1}{3x^2}$과 $3y^2 \approx \frac{1}{3x^2}$이 상쇄되고, $\frac{x}{1+x}y \approx \frac{1}{3(1+x)}$이므로 $(*)$와 맞아떨어진다.
- 소문항 (ii)의 방정식을 수치적으로 풀어 보았더니($y(0) = 2$에서 출발하는 룽게-쿠타(Runge–Kutta) 방법) $y(0.9) = 1.0297654\ldots$를 얻었으며, 이는 공식과 소수점 아래 10자리까지 일치한다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)에서도 인수 $\frac{1}{3}$을 그대로 두는 것: 곱하는 인수는 y^2의 계수와 맞아야 하므로, 여기서는 $y = u'/u$이다.
- 조건 하나로 A와 B를 둘 다 정하려는 것. y에 영향을 주는 것은 두 상수의 비뿐이다.
- 소문항 (ii)에서 확인 없이 다시 e^{-x}를 쓰는 것: $1 - x$의 부호 변화 때문에 이것은 e^x로 바뀐다.

STEP 너머

$y' + P(x)y^2 + Q(x)y = R(x)$ 꼴의 방정식을 리카티 방정식이라 하며, 치환 $y = u'/(Pu)$는 언제나 이를 선형 2계 방정식으로 바꾼다. 거꾸로, 임의의 2계 선형 방정식의 해에 대한 비 u'/u는 리카티 방정식을 만족한다. 이 때문에 이러한 비선형 방정식은 양자역학(quantum mechanics)에서 제어 이론(control theory)에 이르기까지 물리학 곳곳에 거듭 등장한다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 이 내용과 함께 선형 2계 방정식의 이론(왜 두 개의 독립(independent)인 해가 일반해를 주는지)을 다룬다.

풀이

STEP III 2007, 문제 9

역학 • 단순 조화 운동

STEP III 2007, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/07-s3-q9

핵심 아이디어

용수철은 두 구슬을 같은 직선을 따라 크기가 같고 방향이 반대인 힘으로 당기거나 밀고, 고리의 수직항력은 반지름 방향이므로 중심에 대한 전체 각운동량(angular momentum)은 계속 0이다. 즉 두 구슬은 서로 거울상처럼 움직인다. 이로써 모든 것이 하나의 좌표로 줄어들고, 에너지 보존(conservation of energy)을 쓰면 θ에 대한 단순 조화 운동(simple harmonic motion, SHM)을 얻는다. 함정은 θ가 예각인 반각이라는 점이다. 두 구슬이 충분히 멀어져서 지름의 양 끝을 지나가면 에너지 공식의 꼴이 바뀌고, 운동은 단순 조화 운동의 두 호를 이어 붙여 구해야 한다.

풀이

설정하기

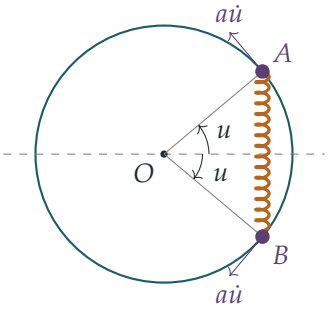
구슬은 고정된 매끄러운 고리 위의 질점으로, 용수철은 질량이 없는 것으로 모형화한다. 구슬에 작용하는 힘은 중력과 고리의 수직항력의 연직 성분(이 둘은 서로 상쇄된다), 수직항력의 수평 성분(고리가 매끄러우므로 반지름 방향), 그리고 용수철의 힘이다. A에 작용하는 용수철의 힘과 B에 작용하는 용수철의 힘은 크기가 같고 방향이 반대이며 같은 직선 AB를 따라 작용하므로, O를 지나는 연직축에 대한 이들의 전체 모멘트(moment)는 0이다. 반지름 방향의 힘은 이 축에 대해 모멘트를 전혀 갖지 않는다. 따라서 이 축에 대한 전체 각운동량은 보존되고, 구슬이 정지 상태에서 출발하므로 그 값은 0이다.

고정된 한 반지름으로부터 고리를 따라 각을 재어, A와 B의 위치를 각각 ϕ_A와 ϕ_B라 하자. 각운동량이 0이라는 것은 $ma^2(\dot{\phi}_A + \dot{\phi}_B) = 0$이라는 뜻이므로 $\phi_A + \phi_B$는 일정하다. 기준

반지름을 처음의 각 AOB를 이등분하도록 잡으면, 모든 시각에서

$$\phi_A = u, \qquad \phi_B = -u,$$

가 하나의 좌표 u에 대해 성립하고, 처음에 $u = \beta$이다. 각 구슬의 속력은 $a\dot{u}$이므로 운동 에너지는 $2 \cdot \frac{1}{2} m a^2 \dot{u}^2 = m a^2 \dot{u}^2$이다.



$0 < u \le \frac{\pi}{2}$인 동안 각 AOB는 $2u$이지만, u가 $\frac{\pi}{2}$를 넘으면 두 구슬은 지름의 양 끝을 지나간 것이고 각 AOB는 $2\pi - 2u$이다. 따라서

$$\theta = u \quad (0 < u \le \tfrac{\pi}{2}), \qquad \theta = \pi - u \quad (\tfrac{\pi}{2} \le u < \pi).$$

구슬이 $u = \beta$에서 정지 상태로부터 놓였으므로, 에너지 보존에 의해

$$m a^2 \dot{u}^2 + m k^2 a^2 (\theta - \alpha)^2 = m k^2 a^2 (\beta - \alpha)^2, \qquad \text{따라서} \qquad \dot{u}^2 = k^2 \left[(\alpha - \beta)^2 - (\theta - \alpha)^2 \right].$$

"압축된 상태"라는 것은 용수철이 자연 길이보다 짧다는 뜻이다. 에너지는 $\theta = \alpha$에서 최소이므로 이때가 자연 길이이고, 길이 $2a \sin\theta$는 $(0, \frac{\pi}{2})$에서 θ에 대해 증가한다. 따라서 $0 < \beta < \alpha$이다.

$u \le \frac{\pi}{2}$인 동안의 운동

이 구간에서는 $\theta = u$이고, 에너지 방정식을 t에 대해 미분한 뒤 $2\dot{u}$로 나누면(구슬이 움직이는 동안에는 성립하고, 나머지는 연속성으로 성립한다)

$$\ddot{\theta} = -k^2 (\theta - \alpha).$$

이것은 $\theta = \alpha$를 중심으로 하고 각진동수(angular frequency)가 k인 단순 조화 운동이다. $\theta = \beta$에서 정지 상태로 출발하므로

$$\theta - \alpha = -(\alpha - \beta) \cos kt,$$

이고, 따라서 두 구슬은 서로 멀어지며, 아무것도 방해하지 않는다면 $t = \frac{\pi}{k}$에 $\theta = 2\alpha - \beta$에 도달한다. 모든 것은 $2\alpha - \beta$가 $\frac{\pi}{2}$보다 작은지, 즉 β가 $2\alpha - \frac{\pi}{2}$와 비교해 어떠한지에 달려 있다. 이 임계값은 바로 $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$이기 때문에 $(0, \alpha)$에 속하므로, 아래의 세 경우가 모두 일어날 수 있다.

경우 1: $2\alpha - \frac{\pi}{2} < \beta < \alpha$

이때 $2\alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$이므로 구슬은 지름의 양 끝에 결코 도달하지 않고, 내내 $\theta = u$이며, 운동은 $\theta = \beta$와 $\theta = 2\alpha - \beta$ 사이의 순수한 단순 조화 운동이다. 주기(period)는

$$T = \frac{2\pi}{k}.$$

경우 2: $0 < \beta < 2\alpha - \frac{\pi}{2}$

이때 θ는 단순 조화 운동이 방향을 바꾸기 전에 $\frac{\pi}{2}$에 도달하며, 그 시각 t_1은

$$\tfrac{\pi}{2} - \alpha = -(\alpha - \beta)\cos kt_1, \qquad \text{따라서} \qquad \cos kt_1 = -\lambda, \quad \text{단, } \lambda = \frac{\tfrac{\pi}{2} - \alpha}{\alpha - \beta}.$$

$\alpha < \frac{\pi}{2}$이고 $\beta < 2\alpha - \frac{\pi}{2}$이므로 $0 < \lambda < 1$이다. 따라서

$$kt_1 = \pi - \arccos\lambda = \tfrac{\pi}{2} + \arcsin\lambda.$$

이 순간 에너지 방정식에 의해 $\dot{u}^2 = k^2[(\alpha - \beta)^2 - (\frac{\pi}{2} - \alpha)^2] > 0$이므로, 구슬은 여전히 서로 멀어지는 중이고 지름의 양 끝을 지나 계속 움직인다.

? 생각해 보기 구슬이 지름의 양 끝을 지난 뒤에는 어떤 일이 일어나는가?

$u \geq \frac{\pi}{2}$이면 $\theta = \pi - u$이므로 에너지 방정식은

$$\dot{u}^2 = k^2\left[(\alpha - \beta)^2 - (u - (\pi - \alpha))^2\right],$$

가 되고, 이것은 $u = \pi - \alpha$를 중심으로 하는 u에 대한 단순 조화 운동이며 각진동수는 역시 k이다. 이것은 지름에 이르기 전의 운동을 $u = \frac{\pi}{2}$에 대해 대칭시킨 거울상이다. 따라서 구슬은 다시 시간 t_1이 걸려 $u = \pi - \beta$에서 정지하고(이때 다시 $\theta = \beta$이며, 구슬은 이제 O의 반대편에 있다), 그다음 전체 경로를 되짚어 $u = \beta$로 돌아온다. 구슬은 이러한 단계를 네 번 거친 뒤 처음 위치로 돌아오므로, 운동의 주기는

$$T = 4t_1 = \frac{4}{k}\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{\tfrac{\pi}{2} - \alpha}{\alpha - \beta}\right) = \frac{2}{k}\left(\pi + 2\arcsin\frac{\pi - 2\alpha}{2(\alpha - \beta)}\right).$$

(구슬이 O의 어느 쪽에 있는지를 구별하지 않는 각 θ 자체는 $2t_1$마다 반복된다.)

경우 3: $\beta = 2\alpha - \frac{\pi}{2}$

이때 θ는 단순 조화 운동이 구슬을 정지시키는 바로 그 순간인 $t = \frac{\pi}{k}$에 $2\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$에 도달한다. 그때 구슬은 지름의 양 끝에 있으므로 용수철은 AOB를 따라 놓이고, 각 구슬에 작용하는 용수철의 힘은 반지름 방향이다. 즉 이 힘은 고리를 따르는 성분이 없고, 고리를 따라 작용하는 다른 힘도 없다. 구슬은 평형 상태에서 정지해 있으므로 그 자리에 머문다. 따라서

$$\beta = 2\alpha - \frac{\pi}{2}$$

가 진동이 일어나지 않는 값이다. 이는 두 주기와도 들어맞는다. β가 아래쪽에서 이 값에 가까워지면 $\lambda \to 1$이 되고 경우 2의 주기는 경우 1 주기의 두 배인 $\frac{4\pi}{k}$로 수렴하는데, 구슬이 지름 근처에 점점 더 오래 머물기 때문이다.

검산

- $k = 1$, $\alpha = \frac{3\pi}{8}$, $\beta = \frac{\pi}{8}$로 잡자. $2\alpha - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$이므로 이것은 경우 2이다. 그러면 $\lambda = \frac{\pi/8}{\pi/4} = \frac{1}{2}$, $\arcsin\lambda = \frac{\pi}{6}$이고, $T = 2(\pi + \frac{\pi}{3}) = \frac{8\pi}{3} \approx 8.378$이다.
- 두 구슬의 운동 방정식을 수치적으로 단계별 계산해 보았다(에너지를 두 구슬 위치 모두의 함수로 두고, 대칭성은 가정하지 않았다). $k = 1$, $\alpha = 1.2$, $\beta = 0.5$일 때 구슬은 8.5162 후에 출발점에서 다시 정지했고, 공식의 값은 8.51622이다. $\beta = 1.0$(경우 1)일 때 주기는 $6.2832 \approx 2\pi$였다.
- 차원: k의 단위는 s^{-1}이므로(에너지는 ma^2k^2에 각의 제곱을 곱한 것이다) $\frac{2\pi}{k}$는 시간이다.

흔한 실수

- 운동 에너지를 $\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2$으로 쓰는 것: 두 구슬이 모두 움직이므로 운동 에너지는 $ma^2\dot{\theta}^2$이다. 인수 2를 빠뜨리면 잘못된 각진동수 $\sqrt{2}\,k$를 얻는다.
- 근거 없이 구슬이 대칭적으로 움직인다고 가정하는 것: 이는 O에 대한 각운동량 보존에서 나오며, 그러려면 각 구슬에 작용하는 용수철의 힘이 같은 직선 AB를 따라 작용해야 한다.
- θ가 예각이라는 것을 잊고 모든 경우에 $\frac{2\pi}{k}$라고 답하는 것.

STEP 너머

보존량을 이용해 두 입자계를 하나의 좌표로 줄이는 것은 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)의 출발점이다. 라그랑주 역학에서는 대칭성(여기서는 전체 배치를 O에 대해 회전시키는 것)이 보존 법칙을 낳으며, 이 생각은 뇌터 정리(Noether's theorem)로 엄밀해진다. 경우 2의 운동은 "이중 우물(double-well)" 퍼텐셜에서의 진동으로, 그 주기는 진폭에 따라 달라지며 에너지가 가운데 장벽의 높이와 같아지는 곳에서 불연속적으로 바뀐다. 보존 법칙과 진동에 대해 더 알고 싶다면 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 보라.

풀이

STEP III 2007, 문제 10

역학 • 경사면 위의 포물체 운동

STEP III 2007, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/07-s3-q10

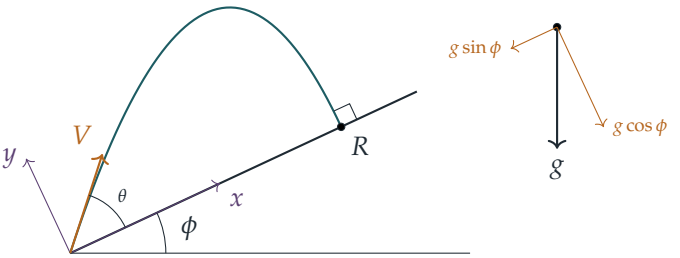
핵심 아이디어

경사면에 나란한 축과 수직인 축을 잡으면, 중력은 두 개의 일정한 가속도, 즉 경사면 아래 방향의 $g\sin\phi$와 경사면 안쪽 방향의 $g\cos\phi$로 나뉜다. 눈에 띄는 조건은 입자가 자신의 경로를 그대로 되짚어 돌아온다는 것이다. 매끄러운(smooth) 평면은 자신에 수직인 방향으로만 밀 수 있으므로, 입자가 평면에 정면으로(수직으로) 부딪칠 때에만 속도를 정반대로 뒤집을 수 있다. 이 한 가지 사실에서 두 결과가 모두 나오고, 나머지는 대수 계산과 산술-기하 평균 부등식(AM–GM)을 이용한 최솟값 구하기이다.

풀이

운동 방정식

입자를 공기 저항 없이 중력만 받아 움직이는 질점(point mass)으로 모형화한다. 무게 mg는 연직 아래 방향으로 작용한다. 이를 경사면 방향과 경사면에 수직인 방향으로 분해(resolving)하면



가속도는 x 방향으로 $-g\sin\phi$, y 방향으로 $-g\cos\phi$이고, 둘 다 일정하다. 주어진 처음 속도와 출발점 $(0,0)$을 이용해 두 번 적분하면

$$x = Vt\cos\theta - \tfrac{1}{2}gt^2\sin\phi, \qquad y = Vt\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2\cos\phi.$$

경로를 되짚어 오기 위한 조건

입자는 $t > 0$에서 $y = 0$이 될 때 처음으로 평면에 돌아온다. 즉

$$t = T = \frac{2V\sin\theta}{g\cos\phi}.$$

일 때이다.

> **생각해 보기** "같은 경로를 따라 되돌아온다"는 것은 충돌에 대해 무엇을 알려 주는가?

튀어 오른 뒤에도 입자는 다시 일정한 중력만 받아 움직인다. 입자가 같은 포물선을 따라 원점까지 되돌아가려면, 튀어 오른 직후의 속도가 튀기 직전 속도의 정확히 반대여야 한다. (필름을 거꾸로 돌린다고 생각해 보라.) 평면이 매끄럽다고 가정하므로, 평면이 입자에 주는 충격량(impulse)은 평면에 수직이다. 따라서 경사면 방향의 성분(component) $\dot{x}$는 튀어 오를 때 변하지 않는다. 이 성분이 반대로 바뀔 수 있는 것은 그 값이 0일 때뿐이다. 그러므로 입자는 평면에 수직으로 부딪쳐야 하며, $t = T$에서 $\dot{x} = 0$이다. (또한 튀어 오를 때 속력의 손실 없이 $\dot{y}$가 반대로 바뀌어야 하므로, 충돌은 완전 탄성(perfectly elastic) 충돌이어야 한다. 문제에서는 이를 당연한 것으로 가정한다.)

이제 $\dot{x} = V\cos\theta - gt\sin\phi$이므로, $\dot{x}(T) = 0$에서

$$V\cos\theta = gT\sin\phi = \frac{2V\sin\theta\sin\phi}{\cos\phi}.$$

를 얻는다. $0 < \theta < \pi/2$이므로 양수인 $V\cos\theta$로 양변을 나누면

$$2\tan\phi\tan\theta = 1,$$

이 되어 요구된 결과가 나온다.

사거리

$\dot{x}(T) = 0$에서 더 깔끔한 꼴 $T = \dfrac{V\cos\theta}{g\sin\phi}$를 얻는다. 그러면

$$\begin{aligned} R = x(T) &= V\cos\theta\cdot\frac{V\cos\theta}{g\sin\phi} - \frac{1}{2}g\sin\phi\cdot\frac{V^2\cos^2\theta}{g^2\sin^2\phi} \\ &= \frac{V^2\cos^2\theta}{g\sin\phi} - \frac{V^2\cos^2\theta}{2g\sin\phi} = \frac{V^2\cos^2\theta}{2g\sin\phi}, \end{aligned}$$

이고, 이것이 요구된 결과이다. (같은 말로, x는 $\dot{x} = 0$일 때 가장 크므로, 착지점은 이 운동이 경사면 위쪽으로 도달할 수 있는 가장 높은 지점이다.)

$2V^2/(gR)$에 대한 항등식

사거리(range)의 식에서

$$\frac{2V^2}{gR} = \frac{4\sin\phi}{\cos^2\theta} = 4\sin\phi\,(1+\tan^2\theta).$$

이다. $\tan\theta = \dfrac{1}{2\tan\phi}$, 따라서 $\tan^2\theta = \dfrac{\cos^2\phi}{4\sin^2\phi}$임을 이용하면

$$\frac{2V^2}{gR} = 4\sin\phi + \frac{\cos^2\phi}{\sin\phi} = 4\sin\phi + \frac{1-\sin^2\phi}{\sin\phi} = 3\sin\phi + \operatorname{cosec}\phi.$$

최대 사거리

주어진 V에 대하여, R은 $3\sin\phi + \operatorname{cosec}\phi$가 가장 작을 때 가장 크다. $s = \sin\phi$라 하자. $0 < \phi < \pi/2$이므로 $0 < s < 1$이다. 양수 $3s$와 $1/s$에 산술-기하 평균 부등식을 적용하면

$$3s + \frac{1}{s} \geq 2\sqrt{3s \cdot \frac{1}{s}} = 2\sqrt{3},$$

이고, 등호는 정확히 $3s = 1/s$, 즉 $s = 1/\sqrt{3}$일 때 성립한다. 이 값은 실제로 $(0,1)$에 속하므로, 이 하한은 실제 경사면에서 달성된다. 따라서

$$\frac{2V^2}{gR} \geq 2\sqrt{3} \quad\Longrightarrow\quad R \leq \frac{V^2}{\sqrt{3}\,g},$$

이고, 등호는 $\sin\phi = 1/\sqrt{3}$일 때 성립한다. 그러므로 가능한 최대 사거리는 $V^2/(\sqrt{3}\,g)$이다.

> ? **생각해 보기** 최대일 때 조건 $\phi + \theta < \pi/2$가 만족되는가?

그렇다. 사실은 항상 만족된다. $\tan\theta\tan\phi = \frac{1}{2}$이고 두 각이 모두 예각이므로

$$\tan(\phi+\theta) = \frac{\tan\phi + \tan\theta}{1 - \tan\phi\tan\theta} = 2(\tan\phi + \tan\theta) > 0,$$

이고, $0 < \phi + \theta < \pi$이므로 반드시 $\phi + \theta < \pi/2$이다. 최대일 때 $\sin\phi = 1/\sqrt{3}$이면 $\tan\phi = 1/\sqrt{2}$이므로 $\tan\theta = 1/\sqrt{2}$도 성립한다. 즉 최선의 경우는 $\theta = \phi \approx 35.3^\circ$이다.

검산

- 단위: V^2/g는 길이이며, 사거리라면 마땅히 그래야 한다.

- 극한: $\phi \to 0$이면 $\operatorname{cosec}\phi \to \infty$이고 $R \to 0$이다. 거의 평평한 평면에서 수직으로 착지하는 유일한 방법은 거의 똑바로 위로 쏘는 것이고, 그러면 사거리는 거의 없다. $\phi \to \pi/2$이면 평면은 연직인 벽이 되고 $\theta \to 0, 2V^2/(gR) \to 4$이므로 $R \to V^2/(2g)$이다. 이는 벽을 따라 똑바로 위로 던진 입자가 도달하는 높이이다. 두 경우 모두 타당하다.
- 수치적으로, $g = 9.8$, $V = 10$, $\phi = 0.7$로 놓고 운동을 시간 단계별로 진행시키면 $x \approx 5.8561$에 착지하여 공식과 일치한다. 착지 속도는 $\dot{x} \approx 0$이고, 이 속도를 반대로 하면 입자는 원점으로 돌아온다. ϕ에 대한 격자 탐색을 하면 $V = 1$일 때 최대 $R \approx 0.05891$을 얻는데, 이는 $1/(9.8\sqrt{3})$과 같다.

흔한 실수

- 중력을 반대로 분해하는 실수. 경사면 **방향** 성분은 $g\sin\phi$이고, 경사면에 **수직인** 성분은 $g\cos\phi$이다. $\phi = 0$을 넣어 확인해 보라.
- 입자가 "수평으로" 또는 "가장 높은 지점에서" 착지해야 한다고 말하는 실수. 조건은 입자가 **평면**에 수직으로 부딪치는 것, 즉 기울어진 축에서 $\dot{x} = 0$이라는 것이다.
- $\sin\phi = 1/\sqrt{3}$이 실제로 가능한 값인지 확인하지 않는 실수. 산술-기하 평균 부등식은 하나의 한계를 줄 뿐이며, 등호가 실제로 성립할 수 있을 때에만 그것이 최댓값이 된다.

STEP 너머

경로를 되짚어 오는 현상은 뉴턴 역학의 **시간 가역성**(time-reversibility)에 바탕을 둔다. 위치에만 의존하는 힘에 대해서는, 모든 속도를 반대로 하면 계가 자신이 지나온 역사를 거슬러 되돌아간다. 기본으로 쓰는 수평·연직 축 대신 기하적 상황에 맞춘 축을 고르는 것은 대학 역학에서 끊임없이 쓰게 될 습관이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이 두 가지 아이디어를 모두 다룬다.

풀이

STEP III 2007, 문제 11

역학 • 모서리를 넘어 구르기

STEP III 2007, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/07-s3-q11

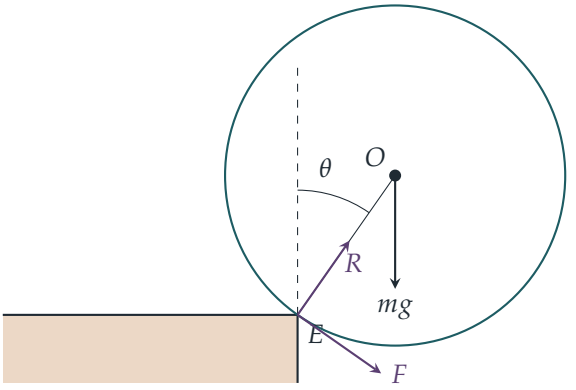
핵심 아이디어

테(rim)가 모서리에 닿으면 모서리는 회전축(pivot) 역할을 한다. 즉 모서리에 닿아 있는 테 위의 점은 정지해 있으므로, 중심은 모서리를 중심으로 반지름 a인 원 위를 움직인다. 모서리에서의 접촉력을 반지름 방향 성분 R(수직항력(normal reaction))와 테를 따르는 성분 F(마찰력(friction))로 나누고, 이를 질량중심(centre of mass)의 운동과 비교한다. 문제 전체는 질량이 어디에 놓여 있느냐에 달려 있다. (i)에서는 질량이 모두 중심에 있으므로, 바퀴는 중심에 대한 관성 모멘트(moment of inertia)가 없다. (ii)에서는 질량이 테 위에 있으며, 바로 이것이 마찰력을 만들어 낸다.

풀이

모형과 기호. 테, 바큇살, 고리(hoop)는 가볍고 강체(rigid)이며, 허브(hub)와 두 입자는 질점(particle)으로 본다. E를 테와 접촉하는 모서리의 점, O를 중심, θ를 EO가 위쪽 연직 방향과 이루는 각이라 하자. 그러면 바퀴가 모서리에 도착하는 순간 $\theta = 0$이다. 테가 미끄러지지 않고 E와 접촉을 유지하는 동안, E에 있는 테의 물질점은 정지해 있다. 따라서 강체는 각속력 $\dot{\theta}$로 E를 중심으로 회전하고, O는 E를 중심으로 반지름 a인 원 위를 속력 $a\dot{\theta}$로 움직인다.

E에서의 접촉력은 EO 방향(E에서 멀어지는 쪽)의 성분 R와, EO에 수직이며 θ가 증가하는 방향을 양으로 잡은 성분 F를 가진다. E가 정지해 있으므로 접촉력은 일을 하지 않고, 따라서 에너지가 보존된다.



여기서 R는 EO 방향으로 작용하고, F는 양의 방향으로 그려져 있다.

E에서 거리 a에 있는 질량중심 G의 가속도는 운동 방향 성분 $a\ddot{\theta}$와 E를 향하는 성분 $a\dot{\theta}^2$를 가진다. 물체 전체에 작용하는 외력(중력 mg와 접촉력)을 분해하면 다음과 같다.

$$\text{운동 방향:}\quad ma\ddot{\theta} = mg\sin\theta + F, \tag{1}$$

$$\text{향하는 점}E:\quad ma\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - R. \tag{2}$$

두 소문항 모두에서 질량중심은 O(허브; 두 입자의 중점)에 있으므로, (1)과 (2)는 양쪽 모두에서 성립한다.

소문항 (i)

탁자 위에서 바퀴는 일정한 속력 u로 움직이므로, $\theta = 0$에서 $\dot{\theta} = u/a$이다. 운동 에너지는 허브의 운동 에너지 $\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2$뿐이고, 허브는 $a(1-\cos\theta)$만큼 내려갔으므로

$$a^2\dot{\theta}^2 = u^2 + 2ga(1-\cos\theta).$$

이다. 시간에 대해 미분하고 $2a\dot{\theta}$로 약분하면($\dot{\theta} \geq u/a > 0$이므로 이 값은 0이 아니다)

$$a\ddot{\theta} = g\sin\theta.$$

를 얻는다. 이를 (1)에 대입하면 $F = 0$이다. 즉 **마찰력은 0이며**, 이것이 보이려던 결과이다.

직접적인 이유도 있다. 테와 바퀏살은 가벼우므로, 이들에 작용하는 힘의 O에 대한 모멘트의 합은 0이어야 한다. 그 힘은 E에서의 접촉력과 O에서 허브가 가하는 힘인데, 후자는 O에 대한 모멘트가 없다. 접촉력의 O에 대한 모멘트는 Fa이므로 $F = 0$이다.

(2)에서 수직항력은

$$R = mg\cos\theta - \frac{m}{a}\left(u^2 + 2ga(1-\cos\theta)\right) = mg(3\cos\theta - 2) - \frac{mu^2}{a}.$$

이다. $u^2 < ag$이므로 $\theta = 0$에서 이 값은 $m(g - u^2/a) > 0$이고, 따라서 바퀴는 곧바로 모서리를 떠나지 않는다. 그다음 θ가 증가함에 따라 R는 감소하고, $R = 0$일 때, 즉

$$\cos\theta = \frac{2ag + u^2}{3ag},$$

일 때 테는 접촉을 잃는다. $u^2 < ag$이므로 이 값은 1보다 작다. 이때 허브가 떨어진 높이는

$$a(1 - \cos\theta) = a \cdot \frac{3ag - 2ag - u^2}{3ag} = \frac{ag - u^2}{3g},$$

이며, 이것이 구하려던 결과이다. 내내 $F = 0$이므로 미끄러지지 않는다는 가정은 마찰의 도움을 전혀 필요로 하지 않고, 분석은 이 지점까지 그대로 성립한다.

소문항 (ii)

? **생각해 보기** 고리가 E를 중심으로 회전하는 동안 두 입자는 어디에 있는가?

$\theta = 0$에서 두 입자를 지나는 지름은 연직이므로, 아래쪽 입자는 접촉점 E에 있다. 이후 고리는 E에 있는 물질점, 즉 그 입자를 중심으로 강체 회전하므로 그 입자는 계속 E에 머문다. 다른 입자는 지름의 반대쪽, 곧 EO를 따라 E에서 거리 $2a$인 곳에 머문다.

따라서 E에 대한 관성 모멘트는 $\frac{m}{2}(2a)^2 = 2ma^2$이다. 탁자 위에서 고리는 일정한 속력 u로 구르므로(어떤 힘도 일을 하지 않는다), $\theta = 0$에서 $\dot\theta = u/a$이다. 움직이는 입자는 E보다 $2a\cos\theta$만큼 높은 곳에 있고, 에너지 보존에 의해

$$\tfrac{1}{2}(2ma^2)\dot\theta^2 + \tfrac{m}{2}g(2a\cos\theta) = \tfrac{1}{2}(2ma^2)\frac{u^2}{a^2} + \tfrac{m}{2}g(2a), \qquad \text{따라서} \qquad a^2\dot\theta^2 = u^2 + ga(1 - \cos\theta).$$

이다. 미분하고 $2a\dot\theta \neq 0$으로 약분하면 $a\ddot\theta = \frac{1}{2}g\sin\theta$를 얻는다. 그러면 (1)에서

$$F = ma\ddot\theta - mg\sin\theta = -\tfrac{1}{2}mg\sin\theta.$$

이다. 따라서 모든 $\theta > 0$에 대해 **마찰력은 0이 아니다**. (그 크기는 $\frac{1}{2}mg\sin\theta$이고, O의 운동 방향과 반대로 작용한다.) (i)과 달리 이제는 테가 질량을 가지므로, 고리의 회전이 O의 운동과 보조를 맞추려면 O에 대한 토크(torque)가 필요하며, 이를 공급할 수 있는 것은 마찰력뿐이다.

(2)에서

$$R = mg\cos\theta - \frac{m}{a}\left(u^2 + ga(1 - \cos\theta)\right) = mg(2\cos\theta - 1) - \frac{mu^2}{a}.$$

이다. $\theta = 0$에서 $R = m(g - u^2/a) > 0$이고 $F = 0$이므로, 모서리를 넘어가는 운동은 미끄러짐 없이 시작된다. 고리가 미끄러지지 않고 접촉을 유지한다면, R는

$$\cos\theta_1 = \frac{ag + u^2}{2ag} < 1,$$

에서 o으로 떨어질 것이다(여기서 $u^2 < ag$를 이용하였다). 따라서 $\theta_1 > 0$이고, 그곳에서 $|F| = \frac{1}{2}mg\sin\theta_1 > 0$이다.

? **생각해 보기** 왜 이 때문에 접촉을 잃기 전에 반드시 미끄러지게 되는가?

마찰계수(coefficient of friction)가 μ일 때, 미끄러지지 않으려면 $|F| \le \mu R$이어야 한다. 아래쪽에서 $\theta \to \theta_1$일 때 $R \to 0^+$이지만 $|F| \to \frac{1}{2}mg\sin\theta_1 > 0$이므로 $|F|/R \to \infty$이다. 그러므로 μ의 (유한한) 값이 무엇이든, R가 아직 양수인 동안 $|F|$가 μR보다 커야만 하는 각 $\theta < \theta_1$이 존재한다. 따라서 고리는 탁자와의 **접촉을 잃기 전에 미끄러진다**.

검산

- (i)에서 $u^2 \to ag$이면 낙하 거리는 0으로 수렴한다. 이때 허브는 $\theta = 0$에서 막 튀어 오르려는 상태이며, 그곳에서 $g = u^2/a$이다. $u \to 0$이면 낙하 거리는 $a/3$이며, 이는 매끄러운 구의 꼭대기에서 정지 상태로 출발해 미끄러져 내려오는 입자에 대한 익숙한 결과이다.
- $a = 1\,\mathrm{m}$, $u = 2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$으로 방정식을 수치적으로 단계별 계산하면 (i)에서 낙하 거리 0.1974 m을 얻으며, 이는 $(ag - u^2)/(3g)$와 일치한다. (ii)에서는 $\cos\theta_1 = 0.7039$를 얻었고, $R = 0$ 직전에 $|F|/R$가 10^4를 넘었다.
- (ii)에서 접촉력을 두 입자의 가속도로부터 직접 계산하면($m\ddot{\mathbf{r}}_G$에서 중력을 뺀 것) F와 R가 모두 그대로 재현된다.

흔한 실수

- (ii)에서 O에 대한 구름 운동 에너지 $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$를 사용하면서, 일단 모서리를 축으로 회전하기 시작하면 한 입자가 E에 고정된다는 사실을 잊는 것. E에 대해 계산하는 편이 더 깔끔하다.
- 모서리에서 힘을 수평과 연직 방향으로 분해하는 것. 모서리에서 "수직" 방향은 연직이 아니라 반지름 EO 방향이다.
- 단지 $F \neq 0$이라는 이유만으로 "미끄러진다"고 결론 내리는 것. 이 논증에는 $|F|$가 o에서 멀리 떨어져 있는 동안 $R \to 0$이 된다는 사실이 필요하다.

STEP 너머

두 소문항의 대비는 질량 분포에 관한 것이다. 같은 질량중심 운동이라도 관성 모멘트에 따라 서로 다른 접촉력이 필요한데, 각운동량 방정식과 선운동량 방정식을 모두 만족해야

하기 때문이다. 대학의 첫 역학 과목에서 이 내용은 강체 동역학(rigid-body dynamics)으로 이어진다. 여기서 물체의 운동은 $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}_G$와 G에 대한 토크 방정식으로 결정되며, 접촉 제약(구름, 미끄러짐, 접촉 상실)은 부등식 $R \geq 0$과 $|F| \leq \mu R$로 확인한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 두 방정식을 모두 철저하게 다룬다.

풀이

STEP III 2007, 문제 12

확률과 통계 • 무작위 합

> **STEP III 2007, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/07-s3-q12

핵심 아이디어

Y는 항의 개수가 **확률적으로 정해지는** 합이므로, 고정된 개수의 확률변수의 합에 대한 규칙을 곧바로 쓸 수는 없다. 요령은 N에 대해 조건을 거는(conditioning) 것이다. $N = k$임을 알고 나면 Y는 평균과 분산을 알고 있는 k개의 독립인 확률변수의 평범한 합이 된다. 그다음 N의 분포에 대해 평균을 내면 되는데, 첫 부분에서 $\mathrm{E}(N)$과 $\mathrm{E}(N^2)$을 구하라고 하는 것도 이 때문이다.

풀이

N의 분포

수가 균등하게 무작위로 선택된다고 하면 $\mathrm{P}(N = k) = \frac{1}{2n-1}$ $(k = 1, 2, \ldots, 2n-1)$이다. $\sum_{k=1}^{m} k = \frac{1}{2}m(m+1)$과 $\sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)$에 $m = 2n-1$을 대입하면 다음을 얻는다.

$$\mathrm{E}(N) = \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{(2n-1)(2n)}{2} = n,$$
$$\mathrm{E}(N^2) = \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{(2n-1)(2n)(4n-1)}{6} = \frac{n(4n-1)}{3}.$$

(평균이 n이라는 것은 대칭성으로도 분명하다. n은 $1, \ldots, 2n-1$의 한가운데 값이다.) 나중에 쓰기 위해 다음도 구해 둔다.

$$\mathrm{Var}(N) = \frac{n(4n-1)}{3} - n^2 = \frac{n^2 - n}{3} = \frac{n(n-1)}{3}.$$

N에 대한 조건부

k를 고정하고 $N = k$라고 하자. X_i들은 N과 독립이므로 $N = k$라는 조건을 걸어도 그 분포는 바뀌지 않는다. 따라서 $N = k$일 때 $Y = X_1 + \cdots + X_k$이고, 이는 각각 평균이 μ, 분산이 σ^2인 k개의 독립인 확률변수의 합이다. 그러므로

$$\mathrm{E}(Y \mid N = k) = k\mu, \qquad \mathrm{Var}(Y \mid N = k) = k\sigma^2,$$

이고, 두 번째 식은 X_i들의 독립성(분산이 더해진다)을 이용한 것이다. 따라서

$$\mathrm{E}(Y^2 \mid N = k) = \mathrm{Var}(Y \mid N = k) + \big(\mathrm{E}(Y \mid N = k)\big)^2 = k\sigma^2 + k^2\mu^2.$$

> **생각해 보기** 조건부 기댓값(conditional expectation)에서 어떻게 보통의 기댓값으로 되돌아올 수 있을까?

전체 기댓값의 법칙(law of total expectation, 분할 정리)에 의해 $\mathrm{E}(g(Y,N)) = \sum_k \mathrm{P}(N = k)\,\mathrm{E}(g(Y,N) \mid N = k)$이다. 각 항 안에서 N은 그냥 수 k이다.

Y의 평균

$$\mathrm{E}(Y) = \sum_k \mathrm{P}(N = k)\, k\mu = \mu\,\mathrm{E}(N) = n\mu,$$

이므로 요구된 결과가 성립한다.

공분산

$N = k$일 때 $YN = kY$이므로 $\mathrm{E}(YN \mid N = k) = k \cdot k\mu = k^2\mu$이다. 따라서 $\mathrm{E}(YN) = \mu\,\mathrm{E}(N^2)$이고

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(Y,N) &= \mathrm{E}(YN) - \mathrm{E}(Y)\,\mathrm{E}(N) = \mu\,\mathrm{E}(N^2) - n\mu \cdot n \\ &= \mu\,\mathrm{Var}(N) = \tfrac{1}{3}n(n-1)\mu,\end{aligned}$$

이므로 요구된 결과를 얻는다.

Y의 분산

$\mathrm{E}(Y^2 \mid N = k) = k\sigma^2 + k^2\mu^2$를 N에 대해 평균 내면

$$\mathrm{E}(Y^2) = \sigma^2\,\mathrm{E}(N) + \mu^2\,\mathrm{E}(N^2) = n\sigma^2 + \frac{n(4n-1)}{3}\mu^2.$$

따라서

$$\mathrm{Var}(Y) = n\sigma^2 + \frac{n(4n-1)}{3}\mu^2 - n^2\mu^2 = n\sigma^2 + \frac{n(n-1)}{3}\mu^2.$$

두 항에는 자연스러운 의미가 있다. $n\sigma^2$은 시행 횟수가 고정되어 있을 때 Y가 퍼진 정도의 평균이고, $\frac{1}{3}n(n-1)\mu^2 = \mu^2\,\mathrm{Var}(N)$은 시행이 몇 번 일어날지 모르기 때문에 생기는 추가적인 퍼짐이다.

검산

- $n = 1$이면 항상 $N = 1$이고, 공식들은 $\mathrm{E}(Y) = \mu$, $\mathrm{Cov}(Y, N) = 0$, $\mathrm{Var}(Y) = \sigma^2$으로 줄어든다. X_1 하나뿐일 때 당연히 그래야 한다.
- $\mu = 0$이면 추가 항이 사라진다. 항의 개수가 더 이상 평균에 영향을 주지 않으므로, 퍼짐을 더하거나 Y와 상관관계를 가질 수 없다.
- $n = 2$로 두고 각 X_i가 확률 $\frac{1}{2}$로 0 또는 1이라고 하자. 그러면 $N \in \{1, 2, 3\}$이고 $Y \mid N \sim \mathrm{B}(N, \frac{1}{2})$이며, 공식은 $\mathrm{Var}(Y) = 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$을 준다. 이 값과 모든 결과를 $n = 1, \ldots, 6$ 및 여러 가지 X_i의 분포에 대해 (N, Y)의 결합분포(joint distribution)를 정확히 열거하여 확인하였다.

흔한 실수

- N 자체가 변한다는 것을 잊고 $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(N)\sigma^2$만 쓰는 것. 두 번째 항이 바로 핵심이다.
- Y와 N을 독립으로 취급하여 $\mathrm{Cov}(Y, N) = 0$을 얻는 것. $\mu > 0$이면 시행이 많을수록 합이 커지므로, 둘은 양의 상관관계를 가진다.

STEP 너머

Y는 **확률적 합**(random sum, 복합분포(compound distribution))이고, 분산에 대한 결과는 전체 분산의 법칙(law of total variance) $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(\mathrm{Var}(Y \mid N)) + \mathrm{Var}(\mathrm{E}(Y \mid N))$의 한 경우로, 여기서는 $\sigma^2\mathrm{E}(N) + \mu^2\mathrm{Var}(N)$이 된다. 확률적 합은 보험금 청구와 분기 과정(branching process)을 모형화하며, 확률생성함수(probability generating function)를 이용하면 우아하게 다룰 수 있다: $G_Y(s) = G_N(G_X(s))$. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 확률적 합과 분기 과정을 이런 방식으로 다룬다.

풀이

STEP III 2007, 문제 13

확률과 통계 • 무작위 행보의 기댓값

STEP III 2007, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

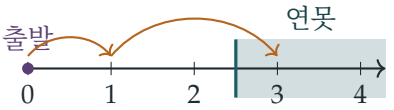
step.maths.org/questions/07-s3-q13

핵심 아이디어

반 미터가 붙어 있는 것은 "가장자리에 정확히 착지하는" 경우에 대한 의심을 없애기 위해서이다. $(n-\frac{1}{2})\,\mathrm{m}$ 떨어진 곳에서 출발하면, 개구리가 뛴 거리의 합이 n 이상일 때 그리고 그때에만 개구리는 연못 안에 있다. 따라서 문제의 핵심은 1과 2로 이루어진 누적합이 처음으로 n에 도달하는 시점이다. 작은 n에 대해서는 가능한 경우를 그냥 나열하면 되고, 일반적인 공식에 대해서는 u_n의 세 값으로부터 세 상수에 대한 세 방정식을 얻는다.

풀이

처음 j번의 점프로 이동한 총거리(미터 단위)를 S_j라 하고, 연못에 도달하는 데 필요한 점프 횟수를 T라 하자. $(n-\frac{1}{2})\,\mathrm{m}$ 떨어진 곳에서 출발하면, 개구리가 j번 점프한 뒤 연못 안에 있을 필요충분조건은 $S_j > n-\frac{1}{2}$이고, S_j가 정수이므로 이는 $S_j \geq n$과 같다. 따라서 $p_n(j) = \mathrm{P}(T=j)$이며, 여기서 T는 $S_j \geq n$을 만족하는 최초의 j이다.



그림은 $n=3$(가장자리가 2.5 m 떨어져 있음)인 경우와 "짧게, 길게"라는 점프 순서를 보여주며, 이 경우 두 번의 점프로 연못에 도달한다.

소문항 (i)

$n = 2$이면 가장자리는 1.5 m 떨어져 있다. 첫 점프가 길면(확률 q) 개구리는 곧바로 연못에 들어가므로 $p_2(1) = q$이다. 그렇지 않으면 첫 점프는 짧고(확률 p), 개구리는 가장자리에서 0.5 m 떨어진 곳에 있게 되어 두 번째 점프가 **어떤 것이든** 연못에 들어간다. 점프들은 독립(independent)이므로

$$p_2(2) = p \times 1 = p,$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. (또한 $j \geq 3$이면 $p_2(j) = 0$이고, $p + q = 1$이므로 확률분포(probability distribution)가 빠짐없이 완성됨을 확인할 수 있다.)

소문항 (ii)

$\frac{1}{2}$ m 떨어진 곳에서는 어떤 점프든 연못에 착지하므로 $u_1 = 1$이다.

소문항 (i)을 이용하면

$$u_2 = 1 \cdot p_2(1) + 2 \cdot p_2(2) = q + 2p = 2 - q.$$

$n = 3$이면 $S_j \geq 3$이어야 한다.

- $S_1 \leq 2$이므로 한 번의 점프로는 결코 충분하지 않다. 즉 $p_3(1) = 0$이다.
- 두 번의 점프가 충분하지 않은 것은 두 점프가 모두 짧은 경우($S_2 = 2$)뿐이고, 나머지 모든 경우에는 $S_2 \geq 3$이다. 따라서 $p_3(2) = 1 - p^2$이다.
- 두 번 짧게 점프한 뒤에는 개구리가 0.5 m 떨어진 곳에 있으므로 세 번째 점프는 반드시 연못에 착지한다. 즉 $p_3(3) = p^2$이다.

그러므로

$$\begin{aligned} u_3 &= 2(1 - p^2) + 3p^2 = 2 + p^2 \\ &= 2 + (1 - q)^2 = 3 - 2q + q^2, \end{aligned}$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

> **생각해 보기** 이 값들을 더 빨리 알아내는 방법이 있을까? 그리고 그 방법은 모든 n으로 확장될까?

있다. 첫 번째 점프에 대해 조건부로 생각하면 된다. 첫 점프 후 개구리는 n이 1 또는 2만큼 줄어든 같은 상황에 놓이므로, $n \geq 2$일 때

$$u_n = 1 + p\,u_{n-1} + q\,u_{n-2}, \qquad u_0 = 0,$$

이 성립한다. 여기서 $u_0 = 0$은 1.5 m에서 첫 점프를 길게 하는 경우를 처리한다. 이로부터 다시 $u_2 = 1 + p$, $u_3 = 1 + p(1 + p) + q = 2 + p^2$을 얻는다. 소문항 (iii)의 형태

가 옳은 이유도 바로 여기에 있다. 특성방정식(auxiliary equation) $\lambda^2 - p\lambda - q = 0$은 $(\lambda - 1)(\lambda + q) = 0$으로 인수분해되어 $(-q)^{n-1}$ 항을 준다. ("+1"에서 비롯된) 중근 1이 $B + Cn$을 설명한다.

소문항 (iii)

$u_n = A(-q)^{n-1} + B + Cn$에 $n = 1, 2, 3$을 대입하고 소문항 (ii)를 이용하면 다음을 얻는다.

$$A + B + C = 1, \tag{1}$$
$$-qA + B + 2C = 2 - q, \tag{2}$$
$$q^2A + B + 3C = 3 - 2q + q^2. \tag{3}$$

빼서 B를 소거하면

$$(2) - (1): \quad -(1+q)A + C = 1 - q, \tag{4}$$
$$(3) - (2): \quad q(1+q)A + C = 1 - q + q^2. \tag{5}$$

이제 $q \times (4) + (5)$로 A를 소거하면

$$(1+q)C = q - q^2 + 1 - q + q^2 = 1, \qquad \text{따라서} \qquad C = \frac{1}{1+q},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. 그러면 (4)로부터

$$(1+q)A = \frac{1}{1+q} - (1-q) = \frac{1-(1-q^2)}{1+q} = \frac{q^2}{1+q}, \qquad \text{따라서} \qquad A = \frac{q^2}{(1+q)^2},$$

이고, (1)로부터

$$B = 1 - \frac{q^2}{(1+q)^2} - \frac{1}{1+q} = \frac{(1+q)^2 - q^2 - (1+q)}{(1+q)^2} = \frac{q}{(1+q)^2}.$$

따라서

$$u_n = \frac{q^2(-q)^{n-1} + q + (1+q)n}{(1+q)^2}.$$

큰 n. $0 \le q \le 1$이므로 항 $A(-q)^{n-1}$과 B는 유계(bounded)이고(각각의 크기는 많아야 $\frac{1}{4}$이다), Cn은 한없이 커진다. 그러므로 큰 n에 대해

$$u_n \approx Cn = \frac{n}{1+q} = \frac{n}{p+2q},$$

이다. 여기서 $1 = p + q$이므로 $1 + q = p + 2q$임을 이용하였다.

이것이 예상되는 이유. 점프 한 번의 평균 길이는 $1 \cdot p + 2 \cdot q = p + 2q$미터이다. 개구리는 약 n미터를 이동해야 하고, 큰수의 법칙(law of large numbers)에 의해 N이 클 때 N번 점프한 총길이는 $N(p+2q)$에 가깝다. 따라서 필요한 점프 횟수는 $n/(p+2q)$에 가깝다. 출발점의 반 미터 차이와 마지막에 넘어서는 거리(개구리는 가장자리를 넘어 많아야 1.5 m 지점에 착지한다)가 유계이므로 이 근사는 좋은 근사이다. 이들은 점프 횟수를 유계인 양만큼만 바꾸며, 이는 n에 비해 무시할 수 있다. 그 유계인 보정이 바로 $A(-q)^{n-1} + B$ 부분이다.

검산

- 공식에 $n = 0$을 대입하면 마땅히 그래야 하듯이 $\left(q^2 \cdot (-1/q) + q\right)/(1+q)^2 = 0 = u_0$이고, 공식은 위의 점화식(recurrence)을 만족한다.
- $q = 0$(모든 점프가 짧음)이면 $u_n = n$인데, 개구리는 정확히 n번의 단위 점프가 필요하므로 옳다.
- 모든 점프 순서를 (분수로) 정확히 열거한 결과가 $n = 1, \ldots, 12$와 여러 p 값에 대해 공식과 일치하였다. $q = 0.7$, $n = 200$으로 한 시뮬레이션에서는 평균 117.90번의 점프가 나왔으며, 공식으로는 117.89, $n/(p+2q) \approx 117.65$이다.

흔한 실수

- "연못에 착지한다"를 정확히 $S_j = n$인 것으로 다루는 실수. 반 미터 때문에 개구리는 넘어설 수 있으며, $S_j \geq n$인 모든 순서가 해당된다.
- $p_3(2) = 2pq + q^2$이라 쓰면서 긴 점프가 먼저 오는 경우를 잊는 실수. 실제로 $pq + qp + q^2 = 1 - p^2$은 두 순서를 모두 포함한다.

STEP 너머

u_n에 대한 점화식은 재생 방정식(renewal equation)이다. μ가 평균 보폭일 때 $u_n \sim n/\mu$라는 결과는 기본 재생 정리(elementary renewal theorem)이다. 왈드의 항등식(Wald's identity) $\mathrm{E}(S_T) = \mu\,\mathrm{E}(T)$로부터 정확한 형태를 얻는다. 여기서 S_T는 n 또는 $n+1$이므로 $(1+q)u_n = n + \mathrm{P}$(넘어섬)이다. Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 이런 관점에서 무작위 행보(random walk)와 생성함수(generating function)를 다룬다.

풀이

STEP III 2007, 문제 14

확률과 통계 • 기하학적 확률

STEP III 2007, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/07-s3-q14

핵심 아이디어

모든 구멍을 둘러싸는 가장 작은 중심원(또는 정사각형)은 **가장 먼** 구멍에 의해 정해진다. 따라서 구해야 하는 것은 최댓값(maximum)의 분포이며, $P(\max \le r)$는 한 번 던졌을 때의 확률(probability)을 n제곱한 것에 지나지 않는다. 원판에서는 한 구멍이 O로부터 떨어진 거리의 제곱 R^2이 $[0,1]$에서 균등분포(uniform distribution)를 따른다는 사실이 드러나고, 덕분에 모든 계산이 깔끔해진다. 정사각형에서는 알맞은 "거리"가 $\max(|x|,|y|)$이며, 이것은 원판에서의 반지름과 정확히 똑같이 행동한다. 이 우연의 일치 덕분에 소문항 (iii)도 거의 공짜로 해결된다.

풀이

소문항 (i)

n개의 구멍이 O로부터 각각 거리 $R_1, \dots, R_n$에 있다고 하자. 던지기가 서로 독립이므로 이 값들도 독립(independent)이다. 한 번 던질 때 $0 \le r \le 1$이면, 구멍이 O로부터 거리 r 이내에 있을 필요충분조건은 반지름 r인 원판 안에 떨어지는 것이므로

$$P(R_i \le r) = \frac{\pi r^2}{\pi \cdot 1^2} = r^2.$$

$U_i = R_i^2$이라 하자. 그러면 $0 \le u \le 1$에 대하여 $P(U_i \le u) = P(R_i \le \sqrt{u}) = u$이므로 각 U_i는 $[0,1]$**에서 균등분포를 따르고**, U_i들은 서로 독립이다.

O를 중심으로 하고 모든 구멍을 둘러싸는 가장 작은 원의 반지름은 $M = \max_i R_i$이고 넓이는 $\pi M^2 = \pi \max_i U_i$이다. $V = \max_i U_i$라 쓰자. 독립성에 의하여

$$P(V \le v) = P(U_1 \le v) \cdots P(U_n \le v) = v^n \qquad (0 \le v \le 1),$$

이므로 V의 확률밀도함수(probability density function)는 nv^{n-1}이고

$$E(V) = \int_0^1 v \cdot nv^{n-1}\,\mathrm{d}v = \frac{n}{n+1}.$$

따라서 n개의 구멍을 모두 둘러싸는 가장 작은 원의 넓이의 기댓값(expected value)은

$$\boxed{\frac{n\pi}{n+1}}.$$

O에 가장 가까운 $n-1$개의 구멍을 둘러싸는 원의 반지름은 **두 번째로 큰** 거리이므로, 그 넓이는 πW이다. 여기서 W는 $U_1, \ldots, U_n$ 가운데 두 번째로 큰 값이다.

? 생각해 보기 두 번째로 큰 값의 분포는 어떻게 구할까?

$W \le w$일 필요충분조건은 U_i 가운데 w를 넘는 것이 많아야 하나라는 것이다. 하나도 넘지 않거나(확률 w^n) 정확히 하나가 넘는다. 후자의 경우 어느 것이 넘는지 고르는 방법이 n가지이므로 확률은 $n(1-w)w^{n-1}$이다. 따라서

$$P(W \le w) = w^n + n(1-w)w^{n-1} = nw^{n-1} - (n-1)w^n.$$

미분하는 대신 $[0,1]$에 값을 갖는 모든 확률변수(random variable)에 대해 성립하는 $E(W) = \int_0^1 P(W > w)\,\mathrm{d}w$를 이용할 수 있다.

$$E(W) = \int_0^1 \left(1 - nw^{n-1} + (n-1)w^n\right)\mathrm{d}w = 1 - 1 + \frac{n-1}{n+1} = \frac{n-1}{n+1}.$$

따라서 가장 가까운 $n-1$개의 구멍을 둘러싸는 원의 넓이의 기댓값은

$$\boxed{\frac{(n-1)\pi}{n+1}}.$$

(이 결과는 보기 좋은 규칙에 들어맞는다. 서로 독립인 n개의 균등분포 점은 $[0,1]$을 기댓값이 모두 $\frac{1}{n+1}$인 $n+1$개의 간격으로 나누므로, k번째로 작은 값의 평균은 $\frac{k}{n+1}$이다.)

소문항 (ii)

Q를 지나고 판의 변에 평행한 좌표축을 잡으면 판은 $-1 \le x, y \le 1$이 된다. 둘러싸는 정사각형의 변도 판의 변에 평행하다고 하자. Q를 중심으로 하고 한 변의 절반이 s인 정사각형은 $\{|x| \le s,\ |y| \le s\}$이므로, 이 정사각형이 구멍 (x, y)를 포함할 필요충분조건은 $\max(|x|, |y|) \le s$이다.

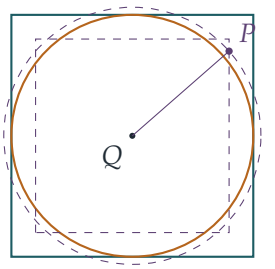
i번째 구멍에 대하여 $S_i = \max(|x_i|, |y_i|)$라 하자. $0 \le s \le 1$이면

$$P(S_i \le s) = \frac{(2s)^2}{2^2} = s^2,$$

이고, 이는 소문항 (i)의 $P(R_i \le r) = r^2$과 같다. 둘러싸는 가장 작은 정사각형은 한 변의 절반이 $\max_i S_i$이고 넓이는 $(2\max_i S_i)^2 = 4\max_i S_i^2$이다. 소문항 (i)와 똑같이 S_i^2들은 서로 독립이고 $[0,1]$에서 균등분포를 따르므로, 그 최댓값의 기댓값은 $\frac{n}{n+1}$이다. 둘러싸는 가장 작은 정사각형의 넓이의 기댓값은

$$\boxed{\frac{4n}{n+1}}.$$

소문항 (iii)



이제 판은 정사각형이고, Q를 중심으로 하여 모든 구멍을 둘러싸는 가장 작은 원을 구하려 한다. 구멍 $P = (x, y)$는 Q로부터 거리 $\sqrt{x^2+y^2}$에 있고

$$\sqrt{x^2+y^2} \;\ge\; \max(|x|, |y|) = S,$$

이며, 등호는 P가 좌표축 위에 있을 때만 성립한다. (그림에서 P를 지나는 점선 원은 P를 지나는 점선 정사각형의 내접원보다 결코 작지 않다.) 따라서 D가 구멍들이 Q로부터 떨어진 거리 가운데 가장 큰 값이면 $D \ge \max_i S_i$이고, 둘러싸는 원의 넓이는

$$\pi D^2 \;\ge\; \pi \max_i S_i^2.$$

을 만족한다. 소문항 (ii)에서 $\max_i S_i^2$은 원형 판에서의 $\max_i R_i^2$과 정확히 같은 분포를 따르므로

$$E(\pi D^2) \;\ge\; \pi\, E\big(\max_i S_i^2\big) = \frac{n\pi}{n+1},$$

이고, 이것은 소문항 (i)에서 구한 원형 판의 답이다. 이 부등식(inequality)은 등호가 성립하지 않는다. 양의 확률로 어떤 구멍도 좌표축 위에 있지 않으며, 그때는 $D > \max_i S_i$이기 때문이다. 따라서 정사각형 판에서의 원의 넓이의 기댓값이 **더 크다**.

직관적으로 설명하면, 정사각형 판은 원형 판을 포함하고(원판은 정사각형의 내접원이다) 다트가 모서리 쪽까지 퍼지므로, 가장 먼 구멍이 더 멀리 있는 경향이 있다.

검산

- $n = 1$이면 공식은 $\frac{\pi}{2}$와 2를 준다. 균등분포를 따르는 R^2의 평균은 $\frac{1}{2}$이므로 맞다. $n \to \infty$이면 넓이는 각각 π와 4, 즉 판 전체의 넓이로 다가가는데, 당연히 그래야 한다.
- $n = 2, 3, 5$에 대하여 2×10^5회 시행한 몬테카를로 시뮬레이션(Monte Carlo simulation)은 $\frac{n\pi}{n+1}$, $\frac{(n-1)\pi}{n+1}$, $\frac{4n}{n+1}$과 유효숫자 세 자리 정도까지 일치했다. 예를 들어 $n = 3$일 때 $\frac{3\pi}{4} \approx 2.3562$에 대하여 2.3561을 얻었다.
- 소문항 (iii)에 대해서는 정확한 분포를 수치 적분(quadrature)한 결과, $n = 3$일 때 넓이의 기댓값이 원판에서는 2.356인 데 비해 정사각형 판에서는 약 3.257이었다. 주장한 대로 더 크다.

흔한 실수

- $E(M)$을 구한 다음 제곱하는 것. 넓이의 기댓값은 $\pi\big(E(M)\big)^2$이 아니라 $\pi E(M^2)$이다.
- 중심으로부터의 거리가 $[0, 1]$에서 균등분포를 따른다고 여기는 것. 넓이에 비례하여 맞는다면 균등분포를 따르는 것은 R이 아니라 R^2이다. 바깥쪽 고리가 더 넓기 때문이다.
- 두 번째로 큰 값을 구할 때, 어느 구멍이 원 밖에 있는지에 해당하는 인수 n을 빠뜨리는 것.

STEP 너머

표본의 최댓값과 두 번째로 큰 값은 **순서통계량**(order statistics)이다. $[0, 1]$에서 균등분포를 따르는 서로 독립인 n개의 확률변수에 대하여 k번째로 작은 값은 평균이 $\frac{k}{n+1}$인 베타 분포(Beta distribution)를 따른다. 소문항 (iii)은 **확률적 지배**(stochastic dominance)(결합(coupling))의 예이다. 한 확률변수가 다른 확률변수보다 항상 크거나 같으면 그 기댓값도 그러하므로, 자세한 계산 없이 비교할 수 있다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문), 그리고 Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)는 모두 순서통계량과 확률변수의 변환을 다룬다.

Beyond STEP

STEP은 대부분의 학생이 학창 시절에 치르는 수학 시험 가운데 가장 어려운 시험이다. 또한 가장 훌륭한 시험 가운데 하나이기도 하다. 문제는 짧고 낯설며 깊이가 있고, 그중 가장 뛰어난 문제들은 대학 수학의 작은 조각이 모습을 감추고 있는 것이다.

이 책은 1987년 첫 시험에 앞서 나온 예시 시험지(specimen papers)부터 2025년 시험지까지 가운데 가장 흥미로운 STEP 문제들을 골라, 각 문제를 하나의 문으로 삼는다. 모든 문제는 뛰어난 학생이 풀어 가면서 던질 법한 질문들과 함께 꼼꼼하게 풀이하고, 그런 다음 책은 그 문을 지나 한 걸음 더 나아간다. 그 아이디어가 어디에서 왔는지, 대학에서는 무엇으로 발전하는지, 그리고 다음에는 무엇을 읽으면 좋은지를 살펴본다.

이 책은 STEP을 준비하면서 기출 문제 연습 이상의 것을 원하는 재능 있는 예비 수학자를 위해 쓰였다. 수학과 학부생처럼 생각하기 시작하고, 앞으로 무엇이 자신을 기다리고 있는지 알아보고 싶은 학생들을 위한 책이다.

- 순수수학(pure mathematics), 역학(mechanics), 확률(probability)과 통계(statistics)를 아우르는 13개의 장
- 이 36개의 STEP 기출 문제와 각 문제의 안내식 풀이
- 모든 문제 뒤에 숨은 대학 수학
- 답이 실린 후속 연습 문제와 더 읽을거리

2007년 풀이. 책 전체와 모든 장,
모든 풀이를 다음 주소에서 무료로 읽고, 내려받고, 공유할 수 있다.

beyondstep.keithmcnulty.org

본문은 퍼블릭 도메인(CC0 1.0)으로 공개한다. STEP 문제 © Cambridge University Press & Assessment.

