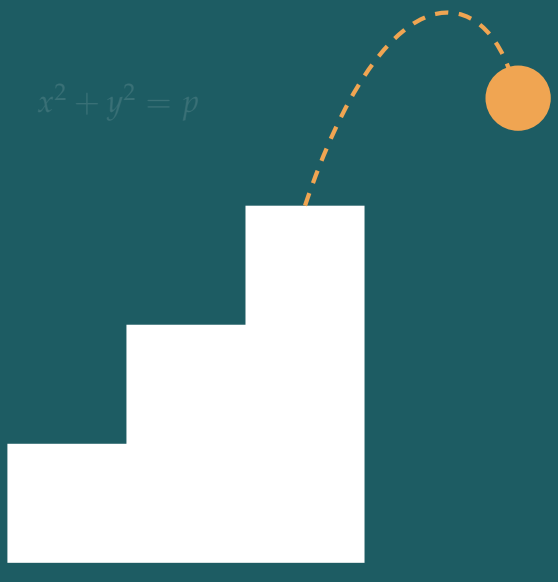
STEP 대비 · 대학 수학

Beyond STEP

STEP I, II 및 III

2006년 풀이



KEITH McNULTY

Beyond STEP

STEP 기출문제로 여는
대학 수학의 세계

STEP I, II 및 III

2006년 풀이

Keith McNulty

Beyond STEP: STEP 기출문제로 여는 대학 수학의 세계

2006년 풀이

2006년 STEP 문제지(STEP I, II 및 III)의 37개 문제 전체에 대한 풀이. 견본 문제지 이후 모든 STEP 문제의 풀이와 *Beyond STEP* 책 전체, 그리고 각 장을 `beyondstep.keithmcnulty.org`에서 무료로 읽고 내려받을 수 있다.

풀이를 읽기 전에 먼저 문제를 제대로 풀어 보자. 모든 답은 수치적으로 검증하였지만, 풀이가 이렇게 많으면 실수가 어느 정도 있을 수밖에 없다. 무언가 잘못된 것처럼 보이면 자신의 풀이를 믿고 꼼꼼히 확인해 보자.

영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.

2026년 11월 온라인 초판 발행.

이 PDF에서 지은이가 직접 만든 모든 것, 곧 본문, 풀이, 그림, 연습문제와 해답은 크리에이티브 커먼즈 CC0 1.0 Universal 라이선스에 따라 퍼블릭 도메인(public domain)으로 공개한다. 누구든 허락을 구하지 않고 어떤 목적으로든 복사하고, 고쳐 쓰고, 공유할 수 있다. 자세한 내용은 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`을 보라.

여기에서 다루는 STEP 문제의 저작권은 Cambridge University Press & Assessment에 있다. 문제는 이 책에 싣지 않았으며, 각 문제마다 공식 출처인 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스나 OCR의 기출 시험지로 가는 링크를 달았다.

오류 제보는 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty에 이슈로 남겨 주기 바란다.

차례

STEP I

Q1 두 제곱의 차 순수수학 . . . 3

Q2 넓이와 최적화 순수수학 . . . 6

Q3 다항식의 근 순수수학 . . . 10

Q4 정다각형의 넓이 순수수학 . . . 14

Q5 치환적분 순수수학 . . . 18

Q6 펠 방정식의 변환 순수수학 . . . 22

Q7 절댓값 기호가 있는 적분 순수수학 . . . 26

Q8 3차원 벡터 순수수학 . . . 30

Q9 연결된 입자 역학 . . . 33

Q10 포물체 운동 역학 . . . 37

Q11 탄성 충돌 역학 . . . 41

Q12 조건부 확률 확률과 통계 . . . 46

Q13 푸아송 혼합분포 확률과 통계 . . . 50

Q14 비복원추출 확률과 통계 . . . 54

STEP II

Q1 주기적인 점화식 순수수학 . . . 57

Q3 무리수와 근삿값 순수수학 . . . 61

Q4 치환적분 순수수학 . . . 65

Q5 바닥 함수와 넓이 순수수학 . . . 69

Q7 타원의 접선 순수수학 . . . 73

Q8 직선의 벡터 기하 순수수학 . . . 77

Q9 마찰과 넘어짐 역학 . . . 81

Q10 충돌과 반발계수 역학 . . . 85

Q14 연속확률변수 확률과 통계 89

STEP III

Q1 곡선 그리기 순수수학 93
Q2 대칭성을 이용한 정적분 순수수학 98
Q3 멱급수의 계수 순수수학 102
Q4 함수방정식 순수수학 106
Q5 복소수와 기하 순수수학 110
Q6 극곡선과 반사 순수수학 114
Q7 일계 미분방정식 순수수학 118
Q8 공리적 미분 순수수학 122
Q9 에너지 보존 역학 126
Q10 각운동량 보존 역학 130
Q11 연결된 계에서의 충돌 역학 134
Q12 정규근사와 기댓값 확률과 통계 139
Q13 기하학적 확률 확률과 통계 143
Q14 공분산과 독립 확률과 통계 147

풀이

STEP I 2006, 문제 1

순수수학 • 두 제곱의 차

> **STEP I 2006, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/06-s1-q1

핵심 아이디어

$(n+m)^2 - 33\,127 = k^2$이면 $33\,127 = (n+m)^2 - k^2$은 두 제곱수의 차(difference of two squares)이므로 $(n+m-k)(n+m+k)$로 인수분해(factorisation)된다. 이것은 페르마(Fermat)의 오래된 인수분해 기법이다. $\sqrt{N}$보다 조금 큰 수에서 출발하여 $a^2 - N$이 제곱수가 될 때까지 하나씩 올라간다. 논증을 거꾸로 따라가면 33 127의 인수분해 하나하나가 m의 값 하나를 주므로, m의 값의 개수를 세는 일은 인수분해의 개수를 세는 일로 귀결된다.

풀이

n 구하기

$180^2 = 32\,400$이므로 33 127의 제곱근은 180보다 조금 크다. 계산하면

$$182^2 = 33\,124 < 33\,127 < 33\,489 = 183^2,$$

이므로 $n = 182$이다. $33\,127 = 182^2 + 3$이므로 이 수 자체는 완전제곱수(perfect square)가 아님에 주목하자.

작은 m의 값

$m = 1, 2, \ldots$을 차례로 대입해 본다.

$$183^2 - 33\,127 = 33\,489 - 33\,127 = 362, \quad \text{제곱수가 아님}(19^2 = 361),$$
$$184^2 - 33\,127 = 33\,856 - 33\,127 = 729 = 27^2.$$

따라서 $m = 2$가 조건을 만족하고, 이때 $(n+m)^2 - 33\,127 = 27^2$이다.

33 127의 인수분해

식을 정리하고 두 제곱수의 차를 이용하면

$$33\,127 = 184^2 - 27^2 = (184 - 27)(184 + 27) = 157 \times 211,$$

이므로 $p = 157, q = 211$로 잡을 수 있고, 둘 다 1보다 크다.

정확히 두 개의 m의 값

두 인수는 모두 소수(prime)이다. 157의 경우, $13^2 = 169 > 157$이므로 소수 $2, 3, 5, 7, 11$만 확인하면 되는데, 어느 것도 157을 나누지 않는다. 211의 경우, $15^2 = 225 > 211$이므로 $2, 3, 5, 7, 11, 13$을 확인하면 되는데, 어느 것도 211을 나누지 않는다. 따라서 $33\,127 = 157 \times 211$은 소인수분해(prime factorisation)이고, 33 127을 $u \le v$인 양의 정수의 곱 uv로 나타내는 방법은

$$1 \times 33\,127 \qquad \text{그리고} \qquad 157 \times 211.$$

뿐이다.

이제 $k \ge 0$에 대하여 $(n + m)^2 - 33\,127 = k^2$이라 하자. $a = n + m > 0$으로 두는데, 이것이 문제가 염두에 둔 상황이다(출발점 n에서 위로 올라간다). 그러면

$$(a - k)(a + k) = 33\,127.$$

이다. 여기서 $a + k > 0$이므로 $a - k > 0$이기도 하고, $a - k \le a + k$이다. 따라서 $(a - k, a + k)$는 위의 두 쌍 (u, v) 중 하나여야 하고, 이때

$$a = \frac{u + v}{2}, \qquad k = \frac{v - u}{2}.$$

이다. u와 v가 모두 홀수이므로 이 값들은 정수이다.

> **생각해 보기** 왜 각 인수분해는 정확히 하나의 m을 주며, 왜 다른 m이 끼어들 수 없을까?

이 대응은 양방향으로 성립한다. a와 k가 주어지면 쌍 $(a - k, a + k)$는 하나의 인수분해이고, 인수분해 (u, v)가 주어지면 위의 공식으로 a와 k를 유일하게 복원할 수 있다. 따라서 a의 값(따라서 $m = a - 182$의 값)은 인수 쌍과 일대일 대응(one-to-one correspondence)을 이루며, 인수 쌍은 정확히 두 개이다.

- $(u, v) = (157, 211)$이면 $a = 184, k = 27$이므로 $m = 184 - 182 = 2$이고, 이는 앞에서 찾은 값이다.
- $(u, v) = (1, 33\,127)$이면 $a = 16\,564, k = 16\,563$이므로

$$m = 16\,564 - 182 = 16\,382.$$

이다.

그러므로 m의 값은 정확히 두 개이며, 그 값은 $m = 2$와 $m = 16\,382$이다. 두 번째 값을 검산하면 $16\,564^2 - 16\,563^2 = 16\,564 + 16\,563 = 33\,127$이다.

($n + m$이 음수인 경우도 허용한다면 a는 -184 또는 $-16\,564$일 수 있고, 이로부터 대칭적인 값 $m = -366$과 $m = -16\,746$을 얻는다. 문제는 분명히 $n + m$이 양수인 경우를 의도하고 있다.)

검산

0부터 16 564까지의 모든 m에 대해 컴퓨터로 직접 탐색하면 $(182 + m)^2 - 33\,127$이 완전제곱수가 되는 것은 $m = 2$와 $m = 16\,382$일 때뿐이고, 33 127의 약수는 정확히 $1, 157, 211, 33\,127$임을 확인할 수 있다. 손으로 계산하면 $157 \times 211 = 157 \times 200 + 157 \times 11 = 31\,400 + 1\,727 = 33\,127$이다.

흔한 실수

- 자명한 인수분해 $1 \times 33\,127$을 빠뜨려서 m의 값을 하나만 찾는 것.
- 157과 211이 소수임을 확인하지 않고 주장하는 것. 값이 **정확히** 두 개라는 논증은 이 사실에 의존한다.
- u와 v의 홀짝성(parity)이 같은지 확인하지 않는 것. 여기서는 둘 다 홀수이므로 a와 k가 정수이지만, 4의 배수가 아닌 짝수의 경우에는 어떤 인수분해도 성립하지 않는다.

STEP 너머

이것은 페르마 인수분해법(Fermat's factorisation method)으로, 여기서처럼 N이 $\sqrt{N}$에 가까운 두 인수를 가질 때 빠르게 작동한다. $a^2 \equiv k^2 \pmod{N}$을 찾는다는 같은 아이디어(정확히 $a^2 - N = k^2$일 필요는 없다)는 가장 빠른 범용 인수분해 알고리즘 중 하나인 이차 체(quadratic sieve)의 기초이다. 인수분해와 두 제곱수의 차로 나타내는 표현 사이의 연결은 Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)에 나오는 초등 정수론(elementary number theory)을 처음 맛보기에 좋은 예이다.

풀이

STEP I 2006, 문제 2

순수수학 • 넓이와 최적화

STEP I 2006, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/06-s1-q2

핵심 아이디어

말뚝의 위치를 한 모서리로부터의 거리 x라는 하나의 수로 정하고, 밧줄이 헛간을 감아 돌아가는 모습을 따라가 본다. 그러면 풀을 뜯을 수 있는 영역은 반원 하나와 사분원 네 개로 나뉘고, 각 사분원의 반지름은 x에 대한 간단한 일차함수(linear function)이다. 따라서 A는 닫힌구간(closed interval)에서 정의된 x에 대한 이차식(quadratic)이고, 문제의 두 부분은 모두 이 이차식의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제가 된다.

풀이

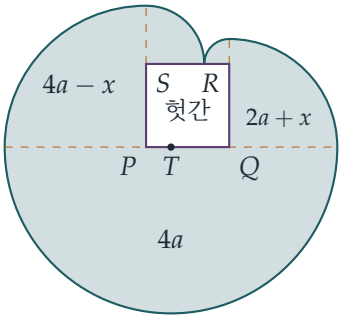
설정하기

헛간을 $PQRS$라 하고, 염소가 변 PQ 위의 점 T에 매여 있다고 하자. 여기서 $0 \leq x \leq 2a$에 대하여 $PT = x$, $TQ = 2a - x$이다. 대칭성(symmetry)에 의해 염소가 어느 변에 매여 있는지는 상관없다.

헛간을 피해 T에서 어떤 점까지 가는 최단 경로의 길이가 $4a$ 이하이면 염소는 그 점에 닿을 수 있다. 밧줄이 팽팽할 때 이 경로는 헛간의 모서리에서 꺾이는 곳을 제외하면 직선이다. T에서 출발하여 헛간을 한 바퀴 돌아가 보자.

- **PQ의 앞쪽.** 직선 PQ의 바깥쪽에 있는 모든 점은 T에서 바로 보이므로, 염소는 반지름이 $4a$인 반원 영역의 풀을 뜯는다.
- **PS와 QR의 옆쪽.** 밧줄이 P를 돌아 꺾이면 $4a - x$가 남고, 이 밧줄은 변 PS 옆으로 P를 중심으로 하는 사분원을 그린다. 마찬가지로 Q에서는 $4a - (2a - x) = 2a + x$가 남아 QR 옆으로 Q를 중심으로 하는 사분원이 생긴다.

▶ **헛간의 뒤쪽.** $x \le 2a$이므로 $4a - x \ge 2a$이다. 따라서 밧줄은 S에 닿고도 $(4a - x) - 2a = 2a - x$가 남으며, 이 밧줄은 변 SR 뒤로 S를 중심으로 하는 사분원을 그린다. 같은 방법으로 밧줄은 R에 닿고도 $(2a + x) - 2a = x$가 남아, R를 중심으로 하고 반지름이 x인 사분원이 생긴다.



? **생각해 보기** 헛간 뒤쪽의 두 조각이 겹쳐서 어떤 풀을 두 번 세게 될 수도 있을까?

S와 R를 중심으로 하는 두 사분원은 직선 SR의 같은 쪽에 놓여 있다. 두 반지름 $2a - x$와 x의 합은 $2a = SR$이므로, 두 원은 SR 위에서 S로부터 $2a - x$만큼 떨어진 점에서 딱 접한다. 따라서 두 조각은 겹치지 않으며, 둘을 합하면 염소는 변 SR 전체에 닿을 수 있다. 다른 조각들도 겹치지 않는다. 반원은 직선 PQ의 한쪽에 있고 네 사분원은 반대쪽에 있으며, 각 사분원은 헛간의 옆이나 뒤에 있는 자신만의 영역에 놓인다. 또한 헛간 뒤쪽의 점은 S 또는 R로부터 남은 밧줄 길이 이내에 있을 때, 그리고 그때에만 닿을 수 있으므로 빠뜨린 부분도 없다.

넓이

반원과 네 사분원의 넓이를 더하면

$$\begin{aligned} A &= \tfrac{1}{2}\pi(4a)^2 + \tfrac{1}{4}\pi\left[(4a-x)^2 + (2a+x)^2 + (2a-x)^2 + x^2\right] \\ &= 8\pi a^2 + \tfrac{1}{4}\pi\left(4x^2 - 8ax + 24a^2\right) \\ &= \pi\left(x^2 - 2ax + 14a^2\right) \\ &= \pi\left[(x-a)^2 + 13a^2\right]. \end{aligned}$$

이 식은 $[0, 2a]$의 모든 x에 대하여 성립한다. 양 끝($x = 0$ 또는 $x = 2a$, 즉 염소가 모서리에 매여 있을 때)에서는 사분원 하나가 한 점으로 줄어들고, 반원과 반지름이 $4a$인 사분원이 합쳐져 원의 4분의 3이 되는데, 이는 예상한 그대로이다.

최댓값과 최솟값

$0 \le x \le 2a$에서 $-a \le x - a \le a$이므로 $0 \le (x-a)^2 \le a^2$이다. 따라서

$$13\pi a^2 \le A \le 14\pi a^2,$$

이므로 $A \le 14\pi a^2$이 증명된다. 오른쪽 등호는 $x = 0$ 또는 $x = 2a$일 때, 즉 염소가 모서리에 매여 있을 때, 그리고 그때에만 성립한다. 왼쪽 경계는 $x = a$일 때 도달하므로 A의 최솟값은

$$A_{\min} = 13\pi a^2,$$

이고, 이는 염소가 한 변의 중점에 매여 있을 때이다.

검산

- 모서리($x = 0$)에서는 반지름이 $4a$인 원의 4분의 3($12\pi a^2$), 이웃한 변의 반대쪽 모서리를 중심으로 하는 반지름 $2a$인 사분원(πa^2), 헛간 뒤쪽의 반지름 $2a$인 사분원(πa^2)이 생긴다. 이를 모두 더하면 식이 말하는 대로 $14\pi a^2$이다.
- $a = 1$로 두고 촘촘한 격자 위에서, 헛간을 돌아가는 실제 최단 거리(직선, 또는 모서리에서 꺾인 선)로 각 점을 판정하여 풀을 뜯은 넓이를 어림하였다. 중점에서는 $13\pi \approx 40.841$에 대해 40.845를, 모서리에서는 $14\pi \approx 43.982$에 대해 43.988을 얻었고, 다른 말뚝 위치에서도 비슷하게 잘 맞았다.

흔한 실수

- 헛간 뒤쪽의 조각을 빠뜨리는 것. 밧줄은 양쪽에서 각각 모서리 두 개를 돌아갈 만큼 길다.
- 헛간 뒤쪽의 두 조각이 겹칠까 걱정하거나, 계산에 억지로 겹치는 부분을 넣는 것. 두 반지름의 합은 항상 정확히 $2a$이므로 두 원은 접하기만 한다.

STEP 너머

팽팽한 밧줄은 장애물이 있는 영역에서의 최단 경로인 **측지선**(geodesic)을 따른다. 여기서 측지선은 헛간의 모서리에서만 꺾이는 선분들로 이루어지므로, 염소가 닿을 수 있는 집합은 비유클리드(non-Euclidean) 방식으로 거리를 재었을 때의 "공"(ball)이다. 장애물을 피해 가는 최단 경로는 변분법(calculus of variations)과 컴퓨터 과학의 운동 계획(motion planning) 문제로 이어진다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제

집)에는 세심한 경우 나누기를 통해 기하 문제를 간단한 대수 문제로 바꾸는 이런 종류의 문제가 더 실려 있다.

풀이

STEP I 2006, 문제 3

순수수학 • 다항식의 근

STEP I 2006, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/06-s1-q3

핵심 아이디어

공식이 아니라 그래프를 생각한다. 축 아래에서 출발해 반드시 축 위에서 끝나는 곡선은 축을 가로질러야 하고, $x = 0$에서의 값(상수항)은 원점에서 곡선이 축의 어느 쪽에 있는지 알려 준다. 삼차식에서는 극점(turning point)이 핵심 역할을 한다. 곡선이 축을 세 번 가로지르는 것은 극댓값(local maximum)이 축 위에 있고 극솟값(local minimum)이 축 아래에 있을 때, 그리고 그때에만이다.

풀이

소문항 (i)

$f(x) = x^2 + bx + c$라 하자. 그래프는 위로 볼록한 대신 아래로 볼록한, 즉 위로 열린 포물선이므로 $x \to \pm\infty$일 때 $f(x) \to +\infty$이다. $c < 0$이면 $f(0) = c < 0$이다. 즉 곡선은 $x = 0$에서 축 아래에 있다.

f는 연속(continuous)이고, 절댓값이 큰 음수 x에서 양수이며 0에서 음수이므로 $(-\infty, 0)$의 어딘가에서 축을 가로지른다. 같은 방식으로 $(0, \infty)$에서도 한 번 더 가로지른다. 이 두 근은 0의 서로 반대쪽에 있으므로 서로 다르다. 이차방정식의 근은 많아야 두 개이므로, 이 방정식은 서로 다른 실근을 정확히 두 개 가지며 하나는 음수, 하나는 양수이다. 따라서 $c < 0$은 **충분조건**(*sufficient condition*)이다.

그러나 이것은 **필요조건**(*necessary condition*)이 아니다. 예를 들어 $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$는 서로 다른 실근 1과 2를 갖지만 $c = 2 > 0$이다. (필요충분조건은 $b^2 > 4c$이다. $c < 0$이면 $b^2 \geq 0 > 4c$이므로 이 조건은 저절로 성립한다.)

소문항 (ii)

방정식이 서로 다른 두 양의 근을 가질 필요충분조건은

$$b^2 > 4c, \qquad b < 0, \qquad c > 0.$$

임을 보이자.

필요성. 두 근이 $\alpha \neq \beta$이고 $\alpha, \beta > 0$이라 하자. 그러면 $x^2 + bx + c = (x-\alpha)(x-\beta)$이므로

$$c = \alpha\beta > 0, \qquad b = -(\alpha+\beta) < 0, \qquad b^2 - 4c = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = (\alpha-\beta)^2 > 0.$$

충분성. $b^2 > 4c$이면 두 근 α, β는 서로 다른 실수이다. 두 근의 곱은 $c > 0$이므로 두 근의 부호는 같다. 두 근의 합은 $-b > 0$이므로 그 공통 부호는 양이다.

> **생각해 보기** 왜 $b < 0$과 $c > 0$만으로는 충분하지 않을까?

$x^2 - x + 1$을 생각하자. 여기서 $b = -1 < 0$이고 $c = 1 > 0$이지만 $b^2 - 4c = -3 < 0$이므로 실근이 전혀 없다. 그래프로 말하면, $c > 0$은 $x = 0$에서 곡선을 축 위에 두고, $b < 0$은 꼭짓점을 $x = -\frac{b}{2} > 0$에 둔다. 여기에 더해 꼭짓점이 축 아래에 있어야 한다. 꼭짓점의 높이는 $c - \frac{b^2}{4}$이고, 이것이 음수일 필요충분조건은 $b^2 > 4c$이다. 세 조건이 모두 필요하다.

소문항 (iii)

$g(x) = x^3 + px + q$라 하면 $g'(x) = 3x^2 + p$이다. 실계수 삼차식은 중복도(multiplicity)를 세어 세 개의 근을 가지며, 실수가 아닌 근은 켤레복소수(complex conjugate) 쌍으로 나타난다. 또한 두 경우 모두 $g(0) = q < 0$임에 주목하자.

$p > 0, q < 0$인 경우. 이때 모든 x에 대하여 $g'(x) = 3x^2 + p > 0$이므로 g는 순증가(strictly increasing)하고 실근을 정확히 하나 갖는다. $g(0) = q < 0$이고 g가 증가하므로 이 근은 양수이다. 나머지 두 근은 실수가 아닌 켤레복소수 쌍이다.

따라서 양수인 단순근(simple root) 하나와 실수가 아닌 켤레복소수 근 두 개가 있다.

$p < 0, q < 0$인 경우. $a > 0$에 대하여 $p = -3a^2$, 즉 $a = \sqrt{-p/3}$으로 쓰자. 그러면 $g'(x) = 3(x^2 - a^2)$이므로 g는 $(-\infty, -a]$에서 증가하고, $[-a, a]$에서 감소하며, $[a, \infty)$에서 증가한다. $x = -a$에서 극대, $x = a$에서 극소이고

$$g(-a) = -a^3 + 3a^3 + q = 2a^3 + q, \qquad g(a) = a^3 - 3a^3 + q = q - 2a^3.$$

이다. $q < 0$이므로 극솟값 $g(a)$는 음수이다. $[0, a]$에서 g는 $g(0) = q < 0$에서부터 감소하므로 이 구간에는 근이 없다. $[a, \infty)$에서는 $g(a) < 0$에서 $+\infty$까지 증가하므로 a보다 큰 근을

정확히 하나 가지며, 이 근은 양수이다. 다른 실근이 있다면 $(-\infty, -a]$ 또는 $(-a, 0)$에 있어야 하므로 음수이고, 그런 근이 존재하는지는 오직 극댓값 $g(-a)$의 부호에 달려 있다.

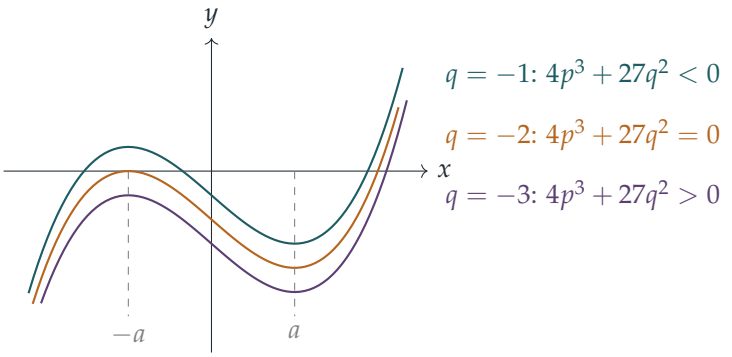
? 생각해 보기 $g(-a)$의 부호는 $4p^3 + 27q^2$와 어떻게 연결될까?

두 극값을 곱하면

$$g(-a)\,g(a) = (q + 2a^3)(q - 2a^3) = q^2 - 4a^6 = q^2 - 4\left(-\frac{p}{3}\right)^3 = \frac{4p^3 + 27q^2}{27}.$$

이다. $g(a) < 0$이므로 $g(-a)$의 부호는 $4p^3 + 27q^2$의 부호와 반대이다. 세 가지 경우가 있다.

- $4p^3 + 27q^2 > 0$. 이때 $g(-a) < 0$이므로 $(-\infty, a]$ 전체에서 $g < 0$이다(음수 값 $g(-a)$까지 증가한 뒤 감소한다). 유일한 실근은 양의 근이다. 앞에서와 같이 양의 실근 하나와 실수가 아닌 켤레복소수 근 두 개가 있다.
- $4p^3 + 27q^2 = 0$. 이때 $g(-a) = 0$이고 $g'(-a) = 0$이므로 $x = -a$는 중근(repeated root)이다. 근의 합이 0이므로(x^2항이 없다) 세 번째 근은 $2a$이다. 근은 $-a$, $-a$, $2a$이다. 즉 음의 이중근 하나와 양의 단순근 하나이며, 모두 실근이다.
- $4p^3 + 27q^2 < 0$. 이때 $g(-a) > 0$이다. $x \to -\infty$일 때 $g(x) \to -\infty$이므로 $(-\infty, -a)$에 근이 하나 있다. $g(-a) > 0 > g(0)$이므로 $(-a, 0)$에 또 하나가 있다. a보다 큰 근과 합하면 서로 다른 세 실근, 즉 음의 근 두 개와 양의 근 하나를 얻는다.



그림은 $q = -1, -2, -3$에 대하여 $y = x^3 - 3x + q (p = -3, a = 1)$를 나타낸다. 극댓값을 축 위로 끌어올리면 실근 하나가 세 개로 바뀐다.

$q < 0$인 모든 경우에 양의 근은 정확히 하나이다. 이는 근의 곱이 $-q > 0$이라는 사실과 일치한다.

검산

- $p = -3, q = -1$이면 $4p^3 + 27q^2 = -108 + 27 = -81 < 0$이고, 수치적으로 근은 약 $-1.532, -0.347, 1.879$이다. 예측대로 음의 근 두 개와 양의 근 하나이다.
- $p = -3, q = -2$이면 $4p^3 + 27q^2 = 0$이고 $x^3 - 3x - 2 = (x+1)^2(x-2)$이므로 근은 $-1, -1, 2$이다.
- 각 경우에 대해 무작위로 고른 수천 개의 (p, q)에 수치적 근 찾기 프로그램을 적용하고, 무작위 (b, c)를 (ii)의 조건과 대조해 본 결과, 위의 모든 주장과 일치하였다.

흔한 실수

- (ii)에서 $b < 0$과 $c > 0$만 제시하고($b < 0, c > 0$은 근이 실수**라면** 양수임을 보장할 뿐이다) $b^2 > 4c$를 빠뜨리는 것.
- (ii)에서 필요성만, 또는 충분성만 증명하는 것. "필요충분"이라면 양방향을 모두 보여야 한다.
- (iii)에서 중근이 생기는 경계의 경우 $4p^3 + 27q^2 = 0$을 빠뜨리는 것.

STEP 너머

$-(4p^3 + 27q^2)$은 삼차식 $x^3 + px + q$의 **판별식**(*discriminant*)으로, $b^2 - 4ac$에 정확히 대응하는 양이다. 이 값은 근들의 차의 제곱을 모두 곱한 것과 같으므로, 중근이 있을 때 그리고 그때에만 0이 되고, 세 근이 모두 서로 다른 실수일 때 그리고 그때에만 양수가 된다. 판별식, 그리고 근과 계수 사이의 관계는 갈루아 이론(Galois theory)과 어떤 방정식이 거듭제곱근으로 풀리는가(solvable by radicals)라는 질문으로 이어진다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 출발점으로 삼기 좋은 책이다.

풀이

STEP I 2006, 문제 4

순수수학 • 정다각형의 넓이

STEP I 2006, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

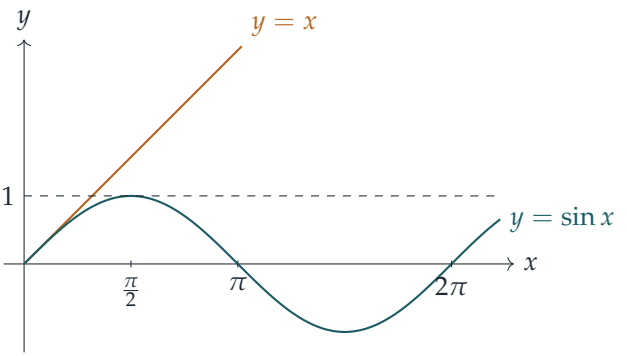
step.maths.org/questions/06-s1-q4

핵심 아이디어

직선 $y = x$는 원점에서 $y = \sin x$에 그은 접선(tangent)이고, 사인 곡선은 이 접선 아래쪽으로 휘어져 멀어진다. 이 그림 하나로 부등식(inequality)과 근사(approximation)를 모두 얻는다. 다각형은 중심에서 만나는 n개의 합동(congruent)인 이등변삼각형(isosceles triangle)으로 나눈다. 그러면 모든 양이 반각 π/n에 대한 삼각함수 문제가 되고, 도함수(derivative)의 부호를 정하는 것이 바로 부등식 $\sin x < x$임을 알게 된다.

풀이

두 그래프



$x = 0$에서 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin x = \cos x = 1$이므로, 두 곡선은 모두 원점을 지나고 그 점에서의 기울기가 1이다. 따라서 $y = x$는 O에서 사인 곡선에 그은 접선이다.

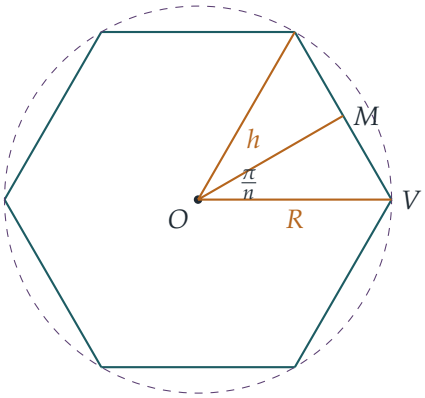
(i) $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$에서 사인 곡선은 위로 볼록(concave)하므로($\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \sin x = -\sin x < 0$), O에

서의 접선 아래에 놓이고, 따라서 $\sin x < x$이다. (같은 내용을 이렇게 말할 수도 있다. $g(x) = x - \sin x$는 $g(0) = 0$이고 $0 < x < 2\pi$에서 $g'(x) = 1 - \cos x > 0$이므로, g는 그 구간에서 순증가(strictly increasing)한다.) $x > \frac{\pi}{2}$이면 $\sin x \leq 1 < \frac{\pi}{2} < x$이다. 따라서 모든 $x > 0$에 대하여 $x > \sin x$이다.

(ii) 직선이 O에서의 접선이므로, 원점 가까이에서 두 그래프는 거의 구별되지 않는다. 즉 x가 작으면 높이 $\sin x$는 높이 x와 매우 가까우므로 $\dfrac{\sin x}{x} \approx 1$이다. (더 정밀하게 말하면, $x > 0$에서 $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$이므로 $1 - \frac{x^2}{6} \leq \frac{\sin x}{x} < 1$이다.)

다각형의 넓이

다각형의 중심 O와 각 꼭짓점을 잇는다. 그러면 다각형은 n개의 합동인 이등변삼각형으로 나뉘고, 각 삼각형의 밑변은 한 변 $s = P/n$이며 O에서의 꼭지각(apex angle)은 $2\pi/n$이다. O에서 한 변의 중점(midpoint) M으로 수선(perpendicular)을 내리면, 이 수선은 꼭지각을 이등분한다.



직각삼각형 OMV(V는 꼭짓점)에서 O에서의 각은 π/n이고 $MV = \frac{1}{2}s$이다. 따라서 중심에서 한 변까지의 거리 $h = OM$은

$$h = \frac{s/2}{\tan(\pi/n)} = \frac{P}{2n\tan(\pi/n)}.$$

이다. n개의 삼각형 각각의 넓이가 $\frac{1}{2}sh$이므로, 다각형의 넓이는

$$A = n \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \frac{P}{n} \cdot \frac{P}{2n\tan(\pi/n)} = \frac{P^2}{4n\tan(\pi/n)},$$

이고, 이것이 증명하려던 식이다.

n이 커지면 넓이가 증가한다

P를 고정하고 $A = \dfrac{P^2}{4f(n)}$으로 쓰자. 여기서 $f(n) = n\tan\dfrac{\pi}{n}$이다. $n \geq 3$이면 $f(n) > 0$이므로, A가 증가하는 것은 정확히 f가 감소할 때이다. 곱의 미분법(product rule)과 연쇄법칙(chain rule)에 의해

$$f'(n) = \tan\frac{\pi}{n} + n\sec^2\frac{\pi}{n}\cdot\left(-\frac{\pi}{n^2}\right) = \tan\theta - \theta\sec^2\theta, \qquad \text{여기서} \theta = \frac{\pi}{n}.$$

생각해 보기 $\tan\theta - \theta\sec^2\theta$의 부호는 어떻게 정할까?

양수인 인수 $\sec^2\theta$를 묶어 내고 $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$를 이용하면

$$f'(n) = \sec^2\theta\left(\sin\theta\cos\theta - \theta\right) = \tfrac{1}{2}\sec^2\theta\left(\sin 2\theta - 2\theta\right).$$

이다. $n \geq 3$이면 $0 < \theta \leq \frac{\pi}{3}$이므로 $2\theta > 0$이고, (i)에 의해 $\sin 2\theta < 2\theta$이다. 따라서 $f'(n) < 0$이고

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}n} = -\frac{P^2 f'(n)}{4f(n)^2} > 0.$$

이다. 그러므로 둘레(perimeter)가 고정되어 있을 때 n이 커지면 넓이는 증가한다.

외접원과의 비교

다각형을 품는 가장 작은 원은 외접원(circumcircle), 즉 중심이 O이고 모든 꼭짓점을 지나는 원이다. 이보다 작은 원으로는 안 된다는 것을 보이기 위해, 꼭짓점을 $V_1, \ldots, V_n$이라 하고 $\overrightarrow{OV_k} = \mathbf{v}_k$, $|\mathbf{v}_k| = R$라 하자. 대칭성에 의해 $\sum \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$이므로, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$인 임의의 점 C에 대하여

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\mathbf{v}_k - \mathbf{c}|^2 = R^2 - \frac{2}{n}\,\mathbf{c}\cdot\sum_{k=1}^{n}\mathbf{v}_k + |\mathbf{c}|^2 = R^2 + |\mathbf{c}|^2 \geq R^2.$$

이다. 따라서 C로부터의 거리가 R 이상인 꼭짓점이 있고, 중심이 C이며 다각형을 품는 원의 반지름은 R 이상이다. 외접원의 반지름(circumradius)은 $R = OV$이고, 같은 직각삼각형에서

$$\tfrac{1}{2}s = R\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad R = \frac{P}{2n\sin\theta}.$$

이다. 따라서 넓이의 비는

$$\frac{A}{\pi R^2} = \frac{P^2}{4n\tan\theta}\cdot\frac{4n^2\sin^2\theta}{\pi P^2} = \frac{n}{\pi}\cdot\frac{\sin^2\theta}{\tan\theta} = \frac{\sin\theta\cos\theta}{\theta} = \frac{\sin 2\theta}{2\theta},$$

이다. 여기서 $n/\pi = 1/\theta$를 이용했다. n이 크면 $2\theta = 2\pi/n$이 작으므로, (ii)에 의해 이 비는 근사적으로 1이다.

검산

정사각형($n = 4, \theta = \pi/4$)의 경우 공식은 $A = P^2/16$을 주는데, 한 변이 $P/4$이므로 옳다. 넓이의 비는 $\sin(\pi/2)/(\pi/2) = 2/\pi \approx 0.637$이며, 이는 단위원에 내접하는 한 변 $\sqrt{2}$인 정사각형과 일치한다. 정육각형의 경우 비는 $3\sqrt{3}/(2\pi) \approx 0.827$이다. $n = 3, \ldots, 39$에 대하여 넓이 공식을 신발끈 공식(shoelace formula)과 대조해 확인했고, $f'(n) < 0$을 수치 미분과 대조해 확인했으며, 비가 $n = 100$에서 0.99934, $n = 1000$에서 0.9999934임을 얻었다.

흔한 실수

- 직각삼각형에서 반각 π/n 대신 꼭지각 전체 $2\pi/n$을 사용한다.
- $\tan(\pi/n)$을 미분할 때 연쇄법칙에서 나오는 인수 $-\pi/n^2$을 빠뜨린다.
- "$\tan\theta \approx \theta$이므로" $\tan\theta < \theta\sec^2\theta$라고 주장한다. 근사로는 부호를 결정할 수 없다. 부호를 결정하는 것은 정확한 부등식 $\sin 2\theta < 2\theta$이다.

STEP 너머

극한(limit) $\sin x/x \to 1$은 $\sin x$의 도함수가 $\cos x$가 되게 하는 사실이며, 대학의 첫 해석학(analysis) 강의에서는 이를 그림이 아니라 sin의 정의로부터 엄밀하게 증명한다. 단조성(monotonicity) 결과는 등주부등식(isoperimetric inequality)을 이산적으로 엿본 것이다. 주어진 길이의 모든 닫힌곡선 가운데 원이 가장 넓은 영역을 둘러싸며, 다각형의 넓이는 원의 넓이 $P^2/(4\pi)$를 향해 증가한다. 극한과 도함수를 엄밀하게 다룬 책으로는 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 읽어 보자.

풀이

STEP I 2006, 문제 5

순수수학 • 치환적분

STEP I 2006, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/06-s1-q5

핵심 아이디어

두 피적분함수(integrand) 모두 다루기 까다로운 제곱근을 포함하고 있다. 일차식의 제곱근을 없애는 가장 깔끔한 방법은 그 제곱근 전체를 새로운 변수로 두는 것이다. 제곱근이 사라지고 나면 남는 것은 유리함수(rational function)이고, 유리함수는 부분분수(partial fractions)를 이용하면 언제나 적분할 수 있다. (ii)에서는 지수함수를 먼저 없애서 제곱근 안이 일차식이 되도록 하는 것이 가장 좋고, 그러면 같은 방법을 그대로 적용할 수 있다.

풀이

소문항 (i)

$x > 4$이므로 $2x+1 > 9$이고, 따라서 $u = \sqrt{2x+1} > 3$으로 둘 수 있다. $u^2 = 2x+1$로부터

$$2u\,\mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x, \qquad \text{따라서} \qquad \mathrm{d}x = u\,\mathrm{d}u,$$

이고

$$x - 4 = \frac{u^2-1}{2} - 4 = \frac{u^2-9}{2}.$$

이다. 치환(substitution)하면

$$\int \frac{3}{(x-4)\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{3}{\frac{1}{2}(u^2-9)\,u}\,u\,\mathrm{d}u = \int \frac{6}{u^2-9}\,\mathrm{d}u.$$

이다. $\mathrm{d}x$에서 나온 인수 u가 제곱근을 정확히 약분한다. 이 치환이 잘 통하는 이유가 바로 이것이다. 이제 $u^2-9 = (u-3)(u+3)$이고

$$\frac{6}{(u-3)(u+3)} = \frac{1}{u-3} - \frac{1}{u+3},$$

이다. 이는 다시 통분해 보면 확인할 수 있다. 분자는 $(u+3)-(u-3)=6$이다. 그러므로

$$\int \frac{6}{u^2-9}\,\mathrm{d}u = \ln(u-3)-\ln(u+3)+K = \ln\left(\frac{u-3}{u+3}\right)+K,$$

이다. 여기서 $u>3$이므로 $u-3$과 $u+3$이 모두 양수이고, 따라서 절댓값 기호(modulus signs)는 필요 없다. $u=\sqrt{2x+1}$을 다시 대입하면

$$\int \frac{3}{(x-4)\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x = \ln\left(\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{2x+1}+3}\right)+K,$$

가 되어 원하는 결과를 얻는다.

소문항 (ii)

주어진 적분을 I라 하자. (i)을 따라 하는 자연스러운 치환은 제곱근에 이름을 붙이는 것이다.

$$w=\sqrt{\mathrm{e}^x+1}, \qquad w^2=\mathrm{e}^x+1.$$

그러면 $2w\,\mathrm{d}w=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$이므로 $\mathrm{d}x=\dfrac{2w}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}w=\dfrac{2w}{w^2-1}\,\mathrm{d}w$이다. 적분 구간의 끝(limits)은 다음과 같이 바뀐다.

$$x=\ln 3:\ w=\sqrt{3+1}=2, \qquad x=\ln 8:\ w=\sqrt{8+1}=3.$$

따라서

$$I=\int_2^3 \frac{2}{(w^2-1)\,w}\cdot\frac{2w}{w^2-1}\,\mathrm{d}w=\int_2^3 \frac{4}{(w^2-1)^2}\,\mathrm{d}w.$$

이다.

? **생각해 보기** 긴 계산 없이 $\dfrac{4}{(w^2-1)^2}$을 부분분수로 나누려면 어떻게 해야 할까?

간단한 분해 $\dfrac{2}{w^2-1}=\dfrac{1}{w-1}-\dfrac{1}{w+1}$에서 출발하여 양변을 제곱한다.

$$\begin{aligned}\frac{4}{(w^2-1)^2} &= \frac{1}{(w-1)^2}-\frac{2}{(w-1)(w+1)}+\frac{1}{(w+1)^2}\\ &= \frac{1}{(w-1)^2}+\frac{1}{(w+1)^2}-\frac{1}{w-1}+\frac{1}{w+1},\end{aligned}$$

여기서 가운데 항에 간단한 분해를 한 번 더 사용하였다. 이제 각 항은 보자마자 적분할 수 있다.

$$\int \frac{4}{(w^2-1)^2}\,\mathrm{d}w=-\frac{1}{w-1}-\frac{1}{w+1}-\ln\left(\frac{w-1}{w+1}\right)+C,$$

적분 구간에서 $w \geq 2$이므로 절댓값 기호는 필요 없다. 값을 계산하면

$$\begin{aligned} \text{위끝} w = 3: &\quad -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} - \ln\tfrac{2}{4} = -\tfrac{3}{4} + \ln 2, \\ \text{아래끝} w = 2: &\quad -1 - \tfrac{1}{3} - \ln\tfrac{1}{3} = -\tfrac{4}{3} + \ln 3. \end{aligned}$$

이다. 그러므로

$$I = \left(-\tfrac{3}{4} + \ln 2\right) - \left(-\tfrac{4}{3} + \ln 3\right) = \frac{7}{12} + \ln\frac{2}{3},$$

이고, 이것이 보여야 할 결과이다.

이 계산은 두 단계로 나누어 할 수도 있다. 먼저 $v = \mathrm{e}^x$로 치환하고($\int_3^8 \frac{2}{v^2\sqrt{v+1}}\,\mathrm{d}v$가 된다) 다음에 $w^2 = v + 1$로 치환하면 된다. 위의 치환은 이 두 단계를 한 번에 처리한 것이다.

검산

- (i)의 답을 미분해 보자. $u = \sqrt{2x+1}$이면 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{u}$이고 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\ln\frac{u-3}{u+3} = \frac{6}{u^2-9}$이므로, 도함수는 $\frac{6}{u(u^2-9)} = \frac{3}{(x-4)\sqrt{2x+1}}$이다.
- 수치로 확인하면 $\frac{7}{12} + \ln\frac{2}{3} \approx 0.58333 - 0.40547 = 0.17787$이고, 원래의 피적분함수에 $[\ln 3, \ln 8]$에서 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면 0.177868을 얻어 유효숫자 여섯 자리까지 일치한다.
- 부호와 크기에 대한 상식적인 점검: (ii)의 피적분함수는 양수이고, 길이가 $\ln\frac{8}{3} \approx 0.98$인 구간에서 약 0.33에서 약 0.08로 감소한다. 따라서 0.2보다 약간 작은 답은 예상과 정확히 맞는다.

흔한 실수

- (ii)에서 변수를 바꿀 때 적분 구간의 끝을 바꾸는 것을 잊거나, x에 대한 구간의 끝을 w에 대한 식에 대입하는 실수.
- $\frac{4}{(w^2-1)^2}$을 $\frac{A}{(w-1)^2} + \frac{B}{(w+1)^2}$로만 쓰는 실수. 중복된 인수가 있을 때는 일차 항 $\frac{1}{w-1}$과 $\frac{1}{w+1}$도 필요하다.
- (i)에서 $\mathrm{d}x = u\,\mathrm{d}u$ 대신 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$를 얻어서 제곱근이 남아 버리는 실수.

STEP 너머

두 소문항이 모두 로그와 유리식 항으로 끝나는 데에는 일반적인 정리가 있다. 모든 유리함수는 부분분수를 통해 유리함수, 로그, 역탄젠트로 이루어진 초등적인 원시함수(antiderivative)를 가진다. 또한 x와 $\sqrt{ax+b}$에 대한 유리식인 피적분함수는 치환

$u^2 = ax + b$를 하면 유리함수가 된다. 이를 이차식의 제곱근으로 확장하면 오일러(Euler) 치환에 이르고, 어떤 적분을 초등함수로 **나타낼 수 없는지** 묻다 보면 리우빌(Liouville)의 유한 형태 적분 이론에 이른다. 적분과 그것이 성립하는 이유를 꼼꼼하게 다룬 책으로는 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해하기)를 읽어 보라.

풀이

STEP I 2006, 문제 6

순수수학 • 펠 방정식의 변환

> **STEP I 2006, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/06-s1-q6

핵심 아이디어

각 소문항은 일차 좌표 변환(linear change of coordinates)이 어떤 이차식(quadratic expression)을 보존하는지를 묻는다. 직접적인 방법은 대입하고 전개한 뒤 a^2, ab, b^2의 계수(coefficient)를 비교하는 것이다. 그 이면에는 더 깔끔한 그림이 있다. $x^2 - 2y^2$은 수 $x + y\sqrt{2}$의 "크기"이고, ($9 - 8 = 1$이라는 크기를 갖는) $3 + 2\sqrt{2}$를 곱해도 그 크기는 변하지 않는다. 이것을 알면 (iii)에서 사상을 어떻게 만들어야 하는지 정확히 알 수 있다.

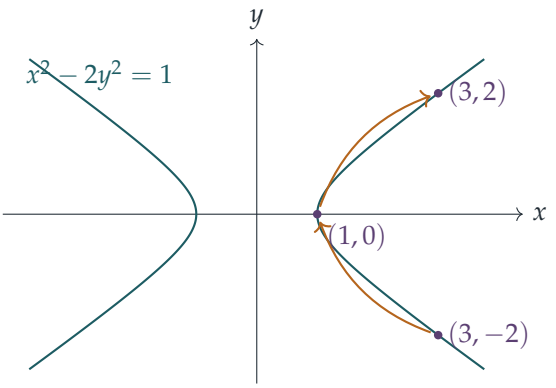
풀이

소문항 (i)

$a^2 - 2b^2 = 1$이라 하자. 그러면

$$\begin{aligned}(3a + 4b)^2 - 2(2a + 3b)^2 &= (9a^2 + 24ab + 16b^2) - 2(4a^2 + 12ab + 9b^2) \\ &= a^2 - 2b^2 \\ &= 1,\end{aligned}$$

이므로 $(3a + 4b,\ 2a + 3b)$는 요구한 대로 $x^2 - 2y^2 = 1$ 위에 있다. 사실 처음 두 줄은 모든 a와 b에 대하여 성립하는 항등식(identity)이다. 즉 이 사상은 곡선 위에서뿐만 아니라 모든 곳에서 $x^2 - 2y^2$을 보존한다.



이 사상은 점들을 오른쪽 가지를 따라 미끄러뜨린다: $(3,-2) \mapsto (1,0) \mapsto (3,2) \mapsto (17,12) \mapsto \cdots$.

소문항 (ii)

$Ma^2 - Nb^2 = 1$이라 하자. 전개하면

$$M(5a+6b)^2 - N(4a+5b)^2 = (25M-16N)a^2 + (60M-40N)ab + (36M-25N)b^2.$$

상(image)인 점이 곡선 위에 있을 필요충분조건은 이 값이 $1 = Ma^2 - Nb^2$과 같은 것이다. $Ma^2 - Nb^2$을 빼면 조건은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} 0 &= (24M-16N)a^2 + (60M-40N)ab + (36M-24N)b^2 \\ &= 4(3M-2N)(2a^2+5ab+3b^2) \\ &= 4(3M-2N)(2a+3b)(a+b). \end{aligned}$$

> **생각해 보기** 정말 $3M = 2N$이어야 할까, 아니면 다른 인수들이 대신 0이 될 수도 있을까?

이 조건은 곡선 위의 **모든** 점에서 성립해야 한다. $M, N > 0$일 때 곡선 $Mx^2 - Ny^2 = 1$은 무한히 많은 점을 갖는 쌍곡선(hyperbola)이다. 직선 $2x+3y=0$과 $x+y=0$은 각각 이 곡선과 많아야 두 점에서 만나므로, 곡선 위의 대부분의 점에서 $(2a+3b)(a+b) \neq 0$이다. 따라서 $3M-2N=0$이어야 한다. 역으로 $3M = 2N$이면 조건은 모든 점에서 성립한다.

그러므로 $3M = 2N$이다. 그러면 $2 \mid 3M$이므로 M은 짝수이다. 가장 작은 선택은 $M=2$이고, 이때 $N=3$이다. 마지막으로 확인하면

$$2(5a+6b)^2 - 3(4a+5b)^2 = (50-48)a^2 + (120-120)ab + (72-75)b^2 = 2a^2 - 3b^2.$$

가장 작은 양의 정수는 $M=2, N=3$이다.

소문항 (iii)

다음을 만족하는 양의 정수를 찾으려 한다.

$$(Pa+Qb)^2-3(Ra+Sb)^2=a^2-3b^2 \quad \text{모든} a,b,$$

이 식이 모든 a,b에 대하여 성립하면 곡선 위의 모든 점의 상이 확실히 곡선 위에 놓인다. 계수를 비교하면

$$P^2-3R^2=1, \qquad PQ=3RS, \qquad Q^2-3S^2=-3.$$

첫 번째 방정식은 $x^2-3y^2=1$ 위의 양의 정수점 (P,R)을 요구한다. 가장 작은 것은 $(2,1)$이므로 $P=2$, $R=1$로 놓아 보자. 그러면 두 번째 방정식에서 $Q=\frac{3}{2}S$이고, 세 번째 방정식은 $\frac{9}{4}S^2-3S^2=-3$, 즉 $S^2=4$가 된다. 따라서 $S=2$, $Q=3$이다:

$$P=2, \quad Q=3, \quad R=1, \quad S=2.$$

확인: $(2a+3b)^2-3(a+2b)^2=4a^2+12ab+9b^2-3a^2-12ab-12b^2=a^2-3b^2=1$. 따라서 $(2a+3b,\ a+2b)$는 $x^2-3y^2=1$ 위에 있다.

생각해 보기 이런 사상은 어디에서 나오는 것일까?

$(a+b\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=(2a+3b)+(a+2b)\sqrt{3}$으로 쓰자. $x+y\sqrt{3}$의 노름(norm) x^2-3y^2은 곱셈적(multiplicative)이고, $2+\sqrt{3}$의 노름은 $4-3=1$이므로 이것을 곱해도 노름이 보존된다. 소문항 (i)도 $3+2\sqrt{2}$로 같은 방식으로 작동한다. (ii)에서는 $(a\sqrt{2}+b\sqrt{3})(5+2\sqrt{6})=(5a+6b)\sqrt{2}+(4a+5b)\sqrt{3}$이며, 그래서 그곳에 형식 $2x^2-3y^2$이 나타나는 것이다. (iii)에는 다른 답도 가능하다. $(2+\sqrt{3})^2=7+4\sqrt{3}$을 곱하면 $(7a+12b,\ 4a+7b)$를 얻는다.

검산

- $x^2-3y^2=1$ 위의 $(1,0)$에서 시작하자. (iii)의 사상을 반복하면 $(2,1)$, $(7,4)$, $(26,15)$, $(97,56)$을 얻고, 각각 $x^2-3y^2=1$을 만족한다(예를 들어 $26^2-3\cdot 15^2=676-675=1$).
- (ii)에서 $(1/\sqrt{2},0)$은 $2x^2-3y^2=1$ 위에 있고 $(5/\sqrt{2},\ 4/\sqrt{2})$로 옮겨진다. 그러면 $2\cdot\frac{25}{2}-3\cdot\frac{16}{2}=25-24=1$이다.
- $1\le M,N<30$ 범위에서 각 쌍곡선의 실제 점들을 검사하는 전수 탐색을 해 보면 $(2,3)$이 조건을 만족하는 가장 작은 쌍임이 확인된다.

흔한 실수

- (ii)에서 ab의 계수만 0으로 놓고, 그때 a^2과 b^2의 계수가 M과 $-N$이 되는지 확인하지 않는 것. 여기서는 그렇게 되지만, 그것은 보여야 한다.
- 문제에서는 곡선 위의 점만 주어졌는데 근거 없이 "항등식이 모든 a, b에 대하여 성립해야 한다"고 말하는 것. 위의 인수분해(factorisation)처럼 다른 인수들이 0이 되는 경우를 배제하는 논증이 필요하다.

STEP 너머

이것들은 펠 방정식(Pell equation) $x^2 - dy^2 = 1$이다. 그 정수해들은 환(ring) $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$에서 기본 단위(fundamental unit) $x_1 + y_1\sqrt{d}$의 거듭제곱으로 생성되며, 여기의 사상들은 바로 이러한 단위를 곱하는 것이다. 행렬(matrix)의 언어로 말하면, 각 사상은 이차형식(quadratic form)을 보존하는 2×2 정수 행렬, 즉 "정수 직교군(integral orthogonal group)"의 원소이다. 대븐포트(Davenport)의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)에는 연분수(continued fractions)를 이용하여 펠 방정식을 다루는 한 장 분량의 훌륭한 설명이 있다.

풀이

STEP I 2006, 문제 7

순수수학 • 절댓값 기호가 있는 적분

STEP I 2006, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/06-s1-q7

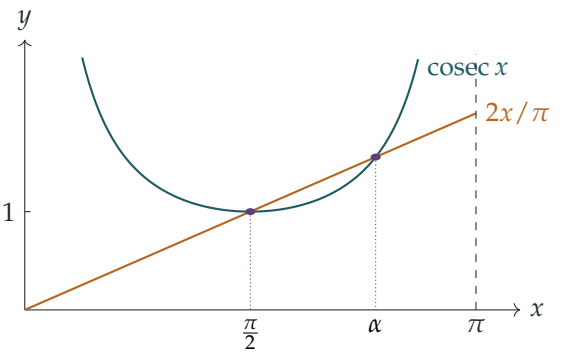
핵심 아이디어

$x \sin x = \pi/2$의 양변을 $\frac{\pi}{2}\sin x$($(0,\pi)$에서 양수이다)로 나누면 $\operatorname{cosec} x = 2x/\pi$가 된다. 따라서 근은 직선이 U자 모양의 곡선과 만나는 점이고, 직선은 볼록(convex)한 곡선과 많아야 두 번 만난다. 적분에서 절댓값(modulus)을 다룰 때 핵심은 절댓값 안의 식의 부호가 바뀌는 곳을 찾아 그곳에서 구간을 나누고, 각 조각을 알맞은 부호로 적분하는 것이다.

풀이

소문항 (i): 그래프와 근

$0 < x < \pi$에서 $\operatorname{cosec} x$는 양 끝에서 $+\infty$로 발산하고, $x = \pi/2$에 대하여 대칭이며, 그곳에서 최솟값 1을 가진다. 직선 $y = 2x/\pi$는 $(0,0)$에서 $(\pi,2)$까지 이어지며, cosec 곡선의 가장 낮은 점인 $(\pi/2, 1)$을 지난다.



$(0,\pi)$에서 $\sin x > 0$이므로

$$x\sin x = \frac{\pi}{2} \iff \frac{1}{\sin x} = \frac{2x}{\pi},$$

이고, 따라서 근은 그래프에서 두 곡선이 만나는 점의 x좌표이다. 그중 하나는 바로 보인다. $\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$이므로 $x = \pi/2$가 근이다.

근이 정확히 두 개임을 확인하기 위해 $h(x) = \operatorname{cosec} x - 2x/\pi$라 하자. 그러면

$$h''(x) = \operatorname{cosec} x\,(\operatorname{cosec}^2 x + \cot^2 x) > 0 \quad \text{구간}(0,\pi),$$

이므로 h는 순볼록(strictly convex)하고, 순볼록함수의 영점은 많아야 두 개이다. (만약 영점이 세 개 $a < b < c$ 있다면, b는 a와 c 사이에 엄밀히 놓이는데 $h(b)$는 $(a,0)$과 $(c,0)$을 잇는 현(chord)의 엄밀히 아래가 아니라 현 위에 놓이게 된다.) 이제 $h'(\pi/2) = -\cot\frac{\pi}{2}\operatorname{cosec}\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} = -\frac{2}{\pi} < 0$ 이므로 $\pi/2$의 바로 오른쪽에서 h는 음수이고, 한편 $x \to \pi^-$일 때 $h(x) \to +\infty$이다. 연속성(continuity)에 의해 h는 $\pi/2 < \alpha < \pi$인 영점 α를 가진다. 따라서 근은 정확히 두 개, 즉 $\pi/2$와 α이며, α가 더 큰 근이다.

소문항 (i): 적분

그래프(와 볼록성 논증)로부터, cosec 곡선은 두 근 사이에서는 직선보다 아래에 있고 α보다 오른쪽에서는 직선보다 위에 있다. $\operatorname{cosec} x \leqslant 2x/\pi$에 양수 $\frac{\pi}{2}\sin x$를 곱하면, 이는 다음을 뜻한다.

$$x\sin x - \frac{\pi}{2} \geq 0 \text{ 구간 } \left[\tfrac{\pi}{2},\alpha\right], \qquad x\sin x - \frac{\pi}{2} \leq 0 \text{ 구간}[\alpha,\pi].$$

생각해 보기 절댓값 기호는 어떻게 처리할까?

부호가 바뀌는 α에서 적분을 나누고, 두 번째 조각에서는 식에 음의 부호를 붙인 것을 적분한다.

$u = x$, $\mathrm{d}v = \sin x\,\mathrm{d}x$로 두고 부분적분(integration by parts)을 하면

$$\int x\sin x\,\mathrm{d}x = -x\cos x + \int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x - x\cos x.$$

따라서 $x\sin x - \pi/2$의 한 원시함수(antiderivative)는

$$F(x) = \sin x - x\cos x - \frac{\pi x}{2},$$

이고, 구하려는 적분은

$$I = \left[F(x)\right]_{\pi/2}^{\alpha} - \left[F(x)\right]_{\alpha}^{\pi} = 2F(\alpha) - F\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - F(\pi).$$

이다. 세 값은 다음과 같다.

$$F(\alpha) = \sin\alpha - \alpha\cos\alpha - \frac{\alpha\pi}{2},$$
$$F\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 1 - 0 - \frac{\pi^2}{4},$$
$$F(\pi) = 0 - \pi(-1) - \frac{\pi^2}{2} = \pi - \frac{\pi^2}{2}.$$

그러므로

$$I = 2\sin\alpha - 2\alpha\cos\alpha - \alpha\pi - 1 + \frac{\pi^2}{4} - \pi + \frac{\pi^2}{2}$$
$$= 2\sin\alpha + \frac{3\pi^2}{4} - \alpha\pi - \pi - 2\alpha\cos\alpha - 1,$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

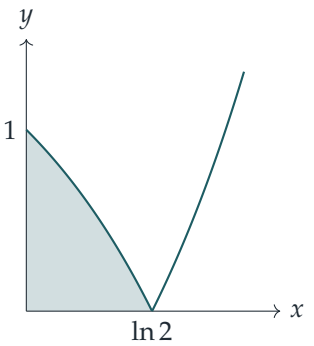
소문항 (ii)

? **생각해 보기** 두 절댓값 기호 중 실제로 역할을 하는 것은 어느 쪽일까?

양의 x축 위에서는 $x \geq 0$이므로 $e^x \geq 1$이고, 안쪽의 절댓값은 아무 영향이 없다. 즉 $|e^x - 1| = e^x - 1$이다. 따라서 곡선은

$$y = |e^x - 2| \qquad (x \geq 0).$$

이다. 이는 $0 \leq x \leq \ln 2$에서 $2 - e^x$와 같아서 $x = 0$일 때의 $y = 1$에서 $x = \ln 2$일 때의 $y = 0$까지 감소하고, $x \geq \ln 2$에서는 $e^x - 2$와 같아서 한없이 증가한다.



따라서 곡선은 $x = \ln 2$에서만 x축과 만나고, 양의 x축, y축, 곡선으로 둘러싸인 영역은 $0 \leq x \leq \ln 2$ 위의 색칠한 영역 하나뿐이다($\ln 2$를 넘어서면 곡선이 위로 올라가 버려 닫힌

영역이 생기지 않는다). 그 넓이는

$$\int_0^{\ln 2} (2 - \mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x = \Big[2x - \mathrm{e}^x\Big]_0^{\ln 2} = (2\ln 2 - 2) - (0 - 1)$$
$$= 2\ln 2 - 1 = \ln 4 - 1,$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

검산

이분법(bisection)으로 $\alpha \approx 2.4433$을 얻고, 이를 (i)의 공식에 넣으면 약 0.61343이 된다. $[\pi/2, \pi]$에서 $|x\sin x - \pi/2|$에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 직접 적용해도 소수점 아래 14자리까지 같은 값이 나온다. $(0, \pi)$에서 격자 탐색을 하면 $x\sin x - \pi/2$의 부호가 바뀌는 곳이 정확히 두 군데, 1.5708과 2.4433 근처에서 발견된다. (ii)에서는 $\ln 4 - 1 \approx 0.38629$이고, 이 역시 수치적분 결과와 일치한다. (i)의 부호에 대한 간단한 확인으로, 답은 양수여야 하며 실제로 양수이다.

흔한 실수

- α에서 나누지 않고 $[\pi/2, \pi]$ 전체에서 $x\sin x - \pi/2$를 그대로 적분하는 것. 이렇게 하면 절댓값의 적분이 아니라 부호 있는 넓이(signed area)(여기서는 음수)를 얻는다.
- 직선이 cosec 곡선의 최소점을 지나서 그림이 접하는 것(tangency)처럼 보일 수 있기 때문에 $x = \pi/2$에서의 근을 놓치는 것. 실제로는 접하지 않는다. 그 점에서 곡선의 기울기(gradient)는 0이고 직선의 기울기는 $2/\pi$이므로 두 그래프는 교차한다.
- (ii)에서 두 절댓값 기호를 모두 남겨 두고 너무 많은 경우로 나누는 것. $x \geq 0$을 이용하여 $\mathrm{e}^x - 1$의 부호부터 정하자.

STEP 너머

근 α는 닫힌 형태(closed form)로 나타낼 수 없지만, 그래도 적분을 α로 정확히 계산할 수 있었다. 이는 해석학에서 흔한 상황으로, 어떤 양이 공식이 아니라 방정식에 의해 결정되는 경우이다. 순볼록함수가 직선과 많아야 두 번 만난다는 사실은 볼록성이 주는 여러 깔끔한 결과 중 하나이며, 볼록성은 옌센 부등식(Jensen's inequality)과 최적화(optimisation)의 많은 부분의 바탕이 되기도 한다. Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)는 연속성, 중간값 정리(intermediate value theorem), 볼록함수를 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP I 2006, 문제 8

순수수학 • 3차원 벡터

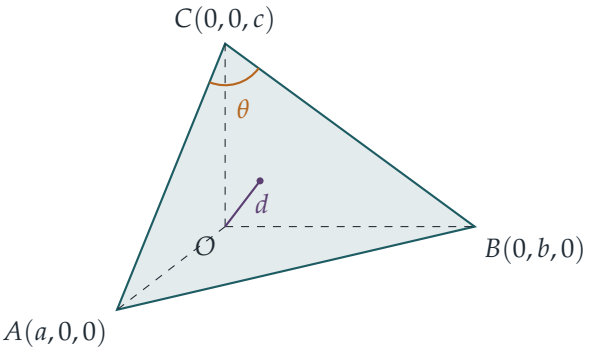
STEP I 2006, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/06-s1-q8

핵심 아이디어

사면체(tetrahedron) $OABC$는 꼭짓점 O에서 서로 수직인 세 모서리를 가지므로, OAB를 밑면(base)으로 잡으면 부피(volume)를 쉽게 구할 수 있다. 같은 입체를 ABC를 밑면으로 하여 볼 수도 있는데, 이때의 높이가 바로 우리가 구하려는 거리 d이다. 따라서 ABC의 넓이만 알면, 부피를 두 가지 방법으로 계산하여 d에 관한 방정식을 얻을 수 있다. 그 넓이는 C에서의 각으로부터 구하며, 이 각은 스칼라곱(scalar product)으로 얻는다.



풀이

소문항 (i)

평면 $z = 0$ 위에 있는 삼각형 OAB를 밑면으로 잡는다. OA와 OB는 각각 x축과 y축 위에 있으므로 각 AOB는 직각이고, 따라서

$$\text{넓이} OAB = \tfrac{1}{2}ab.$$

높이는 C에서 평면 $z=0$까지의 거리이며, OC가 z축 위에 있어 그 평면에 수직이므로 높이는 c이다. 그러므로

$$V = \tfrac{1}{3} \times \tfrac{1}{2}ab \times c = \frac{abc}{6}.$$

소문항 (ii)

각 ACB는 벡터(vector) $\overrightarrow{CA}$와 $\overrightarrow{CB}$가 이루는 각이다.

$$\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -c \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ -c \end{pmatrix}.$$

두 벡터의 스칼라곱은 $0+0+c^2 = c^2$이고, 길이는 각각 $\sqrt{a^2+c^2}$, $\sqrt{b^2+c^2}$이다. 따라서

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}|\,|\overrightarrow{CB}|} = \frac{c^2}{\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

넓이를 구하려면 $\sin\theta$가 필요하다. $0<\theta<\pi$이므로 $\sin\theta>0$이고, 따라서

$$\begin{aligned}\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} &= \sqrt{\frac{(a^2+c^2)(b^2+c^2)-c^4}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}} \\ &= \frac{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}},\end{aligned}$$

이다. $(a^2+c^2)(b^2+c^2)$를 전개하면 c^4 항이 소거되기 때문이다.

? **생각해 보기** 지금 가진 정보에 맞는 삼각형 넓이 공식은 무엇인가?

두 변 CA, CB와 그 사잇각 θ를 알고 있으므로 $\frac{1}{2}\,CA\cdot CB\sin\theta$를 쓴다. 번거로운 제곱근이 소거된다.

$$\text{넓이}ABC = \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}\cdot\frac{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}.$$

반갑게도 답은 a, b, c에 대하여 대칭인데, 이는 당연한 일이다. 삼각형 ABC 자체는 어느 꼭짓점을 C라고 불렀는지와 무관하기 때문이다.

거리 d

이제 같은 사면체에서 ABC를 밑면으로 본다. 이때 높이는 마주 보는 꼭짓점 O에서 ABC를 포함하는 평면까지의 수직 거리, 곧 d이다. 부피는 어느 면을 밑면으로 잡든 같으므로, 소문항 (i)과 소문항 (ii)로부터

$$\frac{abc}{6} = \tfrac{1}{3}\times\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\times d, \qquad \text{따라서} \qquad d = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}.$$

양변을 제곱하고 역수를 취하면 (모든 값이 양수이다)

$$\frac{1}{d^2} = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^2b^2c^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2},$$

이다. 여기서 분자의 각 항을 $a^2b^2c^2$으로 나누었다. 이것이 구하려던 결과이다.

검산

- $a = b = c = 1$로 잡자. 그러면 ABC는 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인 정삼각형(equilateral triangle)이고, 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $\frac{1}{2}\sqrt{3}$과 일치한다. 평면은 $x + y + z = 1$이고 O에서의 거리는 $1/\sqrt{3}$이며, 실제로 $1/d^2 = 3$이다.
- $a = 1, b = c = 2$일 때 공식으로 구하면 부피는 $\frac{2}{3}$, 넓이는 $\sqrt{6} \approx 2.449$, $d = 2/\sqrt{6} \approx 0.8165$이므로 $1/d^2 = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$이다.
- 무작위로 고른 10 000개의 (a, b, c)에 대하여 수치적으로 계산해 보면, 부피(스칼라 삼중곱(scalar triple product)으로 계산), 넓이(벡터곱(cross product)으로 계산), d(수선의 발(foot of the perpendicular)을 직접 구하여 계산)가 모두 10^{-12} 이내의 오차로 공식과 일치하였다.

흔한 실수

- $\overrightarrow{AC}$와 $\overrightarrow{CB}$를 함께 쓰는 실수: 방향을 섞으면 스칼라곱의 부호가 바뀌어 θ의 보각(supplement)을 얻게 된다.
- 밑면이 ABC일 때의 높이가 어느 한 모서리의 길이가 아니라 O에서 그 평면에 내린 수선의 길이라는 점을 잊는 실수.

STEP 너머

A, B, C를 지나는 평면은 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$이고 법선(normal) 벡터는 $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c})$이므로, 점과 평면 사이의 거리 공식을 쓰면 d를 한 줄로 구할 수 있다. 넓이에 관한 결과는 3차원 피타고라스(Pythagoras) 정리(드 구아의 정리(de Gua's theorem))이다. 즉 ABC의 넓이의 제곱은 O에 모인 세 직각삼각형 면의 넓이의 제곱의 합과 같은데, $\frac{1}{4}(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$이 바로 그 합이기 때문이다. 두 아이디어 모두 벡터곱과 행렬식(determinant)에서 나오며, 이는 대학 첫 선형대수학(linear algebra) 강의 초반에 배운다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)에서 이를 살펴보기 좋다.

풀이

STEP I 2006, 문제 9

역학 • 연결된 입자

> **STEP I 2006, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/06-s1-q9

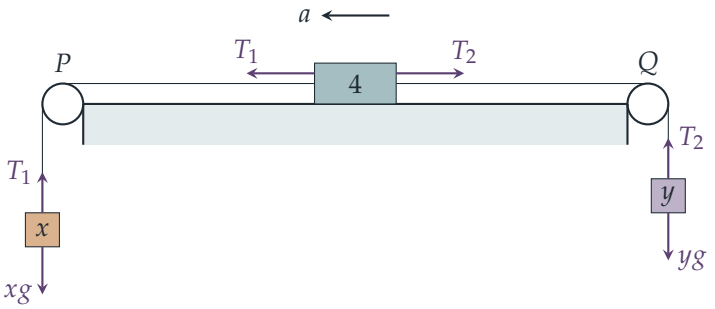
핵심 아이디어

운동은 두 단계로 나뉘며, 각 단계에서 가속도(acceleration)는 일정하다. 두 줄이 모두 연결되어 있는 동안에는 세 물체로 이루어진 계 전체가 하나처럼 움직이며, 두 매달린 물체의 무게 차이가 이 운동을 일으킨다. 줄이 끊어지고 나면 더 가벼운 입자만이 블록을 당기는데, 이제는 운동 방향과 반대로 당기므로 블록은 일정하게 감속한다. 줄이 끊어지는 순간의 속력이 두 단계를 잇는 고리이며, 구속 조건(constraint) $x + y = 6$을 이용하면 모든 것을 y로 나타낼 수 있다.

풀이

모형

블록과 두 매달린 물체를 질점(particle)으로, 줄을 가볍고 늘어나지 않는 것으로, 탁자와 도르래를 매끄러운 것으로 본다. $x > y$이므로 블록은 P 쪽으로 움직이고, 질량 x인 입자는 내려가며 질량 y인 입자는 올라간다. P와 Q에 걸친 줄의 장력(tension)을 각각 T_1, T_2라 하자.



1단계: 두 줄이 모두 연결된 경우

공통 가속도를 a_1이라 하자(블록은 P 쪽으로, 입자 x는 아래로, 입자 y는 위로). 각 물체에 뉴턴(Newton) 제2법칙(Newton's second law)을 적용하면

$$\begin{aligned} xg - T_1 &= xa_1, \\ T_1 - T_2 &= 4a_1, \\ T_2 - yg &= ya_1. \end{aligned}$$

이다. 세 식을 더하면 장력이 소거된다.

$$(x-y)g = (x+y+4)a_1 = 10a_1, \qquad \text{이므로} \qquad a_1 = \frac{(x-y)g}{10} = \frac{(6-2y)g}{10},$$

여기서 $x = 6 - y$를 이용했다. $y < x$이면 $y < 3$이므로 이 값은 양수이다.

정지 상태에서 등가속도로 출발하므로, 블록은 시간 t_1 동안 거리 d를 이동하여 속력 V에 도달하며

$$d = \tfrac{1}{2}a_1 t_1^2, \qquad V^2 = 2a_1 d.$$

이다. 따라서

$$t_1 = \sqrt{\frac{2d}{a_1}} = \sqrt{\frac{20d}{(6-2y)g}} = \sqrt{\frac{d}{5g}}\,\frac{10}{\sqrt{6-2y}}, \qquad V = \sqrt{\frac{(6-2y)gd}{5}}.$$

2단계: 줄이 끊어진 후

이제 $T_1 = 0$이다. 블록은 여전히 속력 V로 P 쪽으로 움직이고 있고, 질량 y인 입자도 여전히 속력 V로 올라가고 있다. 블록에는 Q에 걸친 줄만 작용하며, 이 줄은 블록을 Q 쪽으로 되당긴다. 감속도(deceleration)를 a_2라 하면

$$\begin{aligned} T_2 &= 4a_2 \quad \text{(블록)}, \\ yg - T_2 &= ya_2 \quad \text{(입자 } y\text{, 올라가면서 감속)}, \end{aligned}$$

이므로

$$a_2 = \frac{yg}{4+y}.$$

> **생각해 보기** 줄이 끊어진 뒤에도 Q에 걸친 줄이 팽팽하게 유지된다는 것을 어떻게 알 수 있을까?

만약 줄이 느슨해진다면 입자는 g로 감속하고 블록은 속력을 그대로 유지할 것이다. 줄이 팽팽하다고 하면 장력은 $T_2 = 4a_2 = 4yg/(4+y) > 0$이 되어 모순이 없고, 공통 감속도 a_2는 g보다 작다. 따라서 줄은 실제로 팽팽하게 유지되며, 블록과 입자는 멈출 때까지 함께 움직인다.

블록은 추가로 다음 시간이 지난 뒤 정지한다.

$$t_2 = \frac{V}{a_2} = \sqrt{\frac{(6-2y)gd}{5}} \cdot \frac{4+y}{yg}$$
$$= \sqrt{\frac{d}{5g}}\,\sqrt{6-2y}\left(1+\frac{4}{y}\right),$$

여기서 $\sqrt{(6-2y)gd/5}\,/\,g = \sqrt{d/(5g)}\sqrt{6-2y}$와 $(4+y)/y = 1+4/y$로 정리했다.

전체 시간

블록은 2단계가 끝날 때 처음으로 다시 정지하므로, 전체 시간은

$$t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{d}{5g}}\left[\frac{10}{\sqrt{6-2y}} + \left(1+\frac{4}{y}\right)\sqrt{6-2y}\right] = \sqrt{\frac{d}{5g}}\,\mathrm{f}(y),$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

f의 정상값

물리적으로 가능한 범위는 $0 < y < 3$이다. $u = 6-2y$로 놓으면 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}y = -2$이고

$$\mathrm{f}(y) = 10u^{-1/2} + \left(1+\frac{4}{y}\right)u^{1/2}.$$

이다. 두 번째 항에 곱의 미분법(product rule)을 적용하여 미분하면

$$\mathrm{f}'(y) = 10\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)u^{-3/2}(-2) - \frac{4}{y^2}u^{1/2} + \left(1+\frac{4}{y}\right)\tfrac{1}{2}u^{-1/2}(-2)$$
$$= \frac{10}{u^{3/2}} - \frac{4u^{1/2}}{y^2} - \frac{y+4}{y\,u^{1/2}}.$$

$0 < y < 3$에서 양수인 $y^2u^{3/2}$를 곱하면, 조건 $\mathrm{f}'(y) = 0$은

$$10y^2 - 4u^2 - (y^2+4y)u = 0.$$

이 된다. $u = 6-2y$를 대입하면

$$10y^2 - 4(36-24y+4y^2) - (6y^2 - 2y^3 + 24y - 8y^2) = 0$$
$$2y^3 - 4y^2 + 72y - 144 = 0$$
$$2(y-2)(y^2+36) = 0.$$

$y^2+36 > 0$이므로 유일한 해는

$$y = 2,$$

이며, 이 값은 $0 < y < 3$에 속한다(이때 $x = 4$이다).

$y \to 0^+$일 때와 $y \to 3^-$일 때 모두 $\mathrm{f}(y) \to \infty$이므로, 이 하나뿐인 정류점(stationary point)이 최솟값을 준다. $\mathrm{f}(2) = 10/\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$이므로, 정지할 때까지 걸리는 가장 짧은 시간은 $8\sqrt{2d/(5g)}$이다.

검산

- 임의의 $y \in (0,3)$와 d에 대하여 운동을 수치적으로 한 단계씩 계산(시간 간격 $2 \times 10^{-6}\,\mathrm{s}$)해 보면 $\sqrt{d/(5g)}\,\mathrm{f}(y)$와 유효숫자 다섯 자리까지 일치한다. 예를 들어 $g = 9.8$일 때 $y = 1.671, d = 0.581$이면 두 방법 모두 $1.27096\,\mathrm{s}$를 준다.
- f의 수치 도함수는 $(0,3)$에서 정확히 한 번, $y = 2$에서 부호가 바뀌며, $\mathrm{f}(2) = 11.3137\ldots = 8\sqrt{2}$이다.
- 극한의 경우도 타당하다. $y \to 3$이면 두 질량이 거의 균형을 이루어 $a_1 \to 0$이 되고 1단계가 끝없이 길어진다. $y \to 0$이면 줄이 끊어진 뒤 블록을 감속시키는 것이 없으므로 2단계가 끝없이 길어진다.

흔한 실수

- 2단계에서 질량을 $4 + x + y$로 쓰는 것: 줄이 끊어지고 나면 질량 x인 입자는 더 이상 계의 일부가 아니다.
- 줄이 끊어진 뒤에도 질량 y인 입자가 여전히 속력 V로 위쪽으로 움직이고 있다는 사실을 잊고, 2단계가 정지 상태에서 시작한다고 보는 것.
- $\sqrt{6-2y}$를 미분할 때 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}y = -2$를 빠뜨리는 것.

STEP 너머

운동을 속도의 연속성으로 이어지는 여러 단계로 나누는 것은 구간별로 정의된 동역학(piecewise-defined dynamics)의 기본 아이디어이며, 이는 충격력(impulsive force)이나 힘을 켜고 끄는 제어 문제(control problem)에서 다시 등장한다. 어떤 y를 택해야 시간이 최소가 되는지 묻는 것은 역학에서의 최적화(optimisation)를 처음 맛보는 것이며, 이는 변분법(calculus of variations)으로 발전한다(최속강하곡선(brachistochrone)이 고전적인 예이다). Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 연결된 물체와 구속력을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP I 2006, 문제 10

역학 • 포물체 운동

> **STEP I 2006, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/06-s1-q10

핵심 아이디어

궤적(trajectory)은 포물선이고 지붕은 직선이므로, "살짝 닿는다"는 것은 그 직선이 접선(tangent)이라는 뜻이다. 즉 한 식을 다른 식에 대입하면 중근(repeated root)을 갖는 x에 대한 이차방정식(quadratic)이 나온다. 부호 문제는 그 중근이 어디에 있는지를 따져 보면 해결된다. 마지막 부분에서는 두 입자가 P가 지붕에 닿는 지점에서만 만날 수 있으므로, Q는 정확히 P가 도착하는 순간에 그 지점에 도착해야 한다. 그 시각의 수평 위치를 비교하면 결과를 얻는다.

풀이

궤적

P를 공기 저항(air resistance) 없이 중력만 받으며 자유롭게 운동하는 입자(particle)로 모형화한다. 초기 속도의 수평 성분과 수직 성분은 모두 $V\cos 45^\circ = V/\sqrt{2}$이므로, 시각 t에서

$$x = \frac{Vt}{\sqrt{2}}, \qquad y = \frac{Vt}{\sqrt{2}} - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

$t = \sqrt{2}\,x/V$를 소거하면 $\frac{1}{2}gt^2 = gx^2/V^2$이므로, 궤적은 다음과 같다.

$$y = x - \frac{gx^2}{V^2}.$$

지붕에 닿기

P는 $x - gx^2/V^2 = x\tan\alpha + b$인 곳, 즉 다음을 만족하는 곳에서 지붕과 만난다.

$$\frac{g}{V^2}\,x^2 + (\tan\alpha - 1)\,x + b = 0. \qquad (*)$$

(가로지르는 것이 아니라) 닿는다는 것은 $(*)$가 중근을 갖는다는 뜻이므로, 판별식(discriminant)이 0이다.

$$(\tan\alpha - 1)^2 = \frac{4gb}{V^2} \quad\Longrightarrow\quad V(\tan\alpha - 1) = \pm 2\sqrt{bg}.$$

생각해 보기 두 부호 모두 판별식 조건을 만족한다. 무엇이 둘을 구별하는가?

$(*)$의 중근은

$$x_0 = -\frac{(\tan\alpha - 1)V^2}{2g} = \frac{(1 - \tan\alpha)V^2}{2g}.$$

입자는 x가 증가하는 방향으로 움직이므로($x = Vt/\sqrt{2}$이기 때문이다), $x_0 > 0$인 곳에서만 지붕에 닿을 수 있다. 따라서 $\tan\alpha - 1 < 0$이어야 하고, $V > 0$이므로 좌변 $V(\tan\alpha - 1)$은 음수이다. 그러므로

$$V(-1 + \tan\alpha) = -2\sqrt{bg},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. (양의 근을 택하면 접점이 $x_0 < 0$, 즉 포물선을 뒤쪽으로 연장한 부분에 있게 되는데, P는 그곳을 결코 지나지 않는다.) 기하학적으로 보면, 지붕은 처음 운동 방향보다 덜 가팔라야 한다. 즉 $\alpha < 45^\circ$이다. 그렇지 않으면 지붕은 직선 $y = x$보다 위에 있고, 포물선은 $x > 0$에서 그 직선보다 아래에 있다.

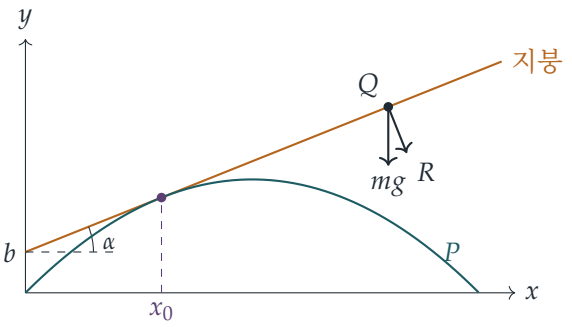
닿는 시각

$x = Vt/\sqrt{2}$이므로, 닿는 시각은

$$T = \frac{\sqrt{2}\,x_0}{V} = \frac{\sqrt{2}\,(1 - \tan\alpha)V}{2g} = \frac{V(1 - \tan\alpha)}{\sqrt{2}\,g}.$$

레일 위의 입자

Q를 직선 $y = x\tan\alpha + b$를 따라 놓인 매끄러운 레일(smooth rail) 위의 입자로 모형화한다. 이 입자는 $(0, b)$에서 레일을 따라 x가 증가하는 방향으로 발사된다(x가 항상 양수인 P에 도달하려면 반드시 그래야 한다). Q에 작용하는 힘은 무게 mg와, 레일에 수직인 레일의 수직항력(normal reaction) R이다. 그림은 이 힘들과 함께, $x = x_0$에서 지붕에 닿는 P의 경로를 보여 준다.



마찰이 없으므로, 레일을 따라 경사면 위쪽 방향으로 힘을 분해하면

$$m\ddot{s} = -mg\sin\alpha,$$

이다. 여기서 s는 $(0, b)$에서부터 레일을 따라 잰 Q의 거리이다. $t = 0$에서 $s = 0$이고 $\dot{s} = U$이므로

$$s = Ut - \tfrac{1}{2}gt^2\sin\alpha, \qquad x_Q = s\cos\alpha.$$

P는 접점을 제외하면 결코 지붕 위에 있지 않고, Q는 항상 지붕 위에 있으므로, 두 입자는 시각 T에 Q가 그 지점에 있을 때에만 닿을 수 있다. 이때 두 입자 모두 지붕 직선 위에 있으므로, 시각 T에서 두 입자의 x좌표가 같기만 하면 충분하다.

$$\left(UT - \tfrac{1}{2}gT^2\sin\alpha\right)\cos\alpha = \frac{VT}{\sqrt{2}}.$$

$T > 0$으로 나누고 $gT = V(1 - \tan\alpha)/\sqrt{2}$를 대입하면

$$U\cos\alpha = \frac{V}{\sqrt{2}} + \tfrac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha \cdot \frac{V(1-\tan\alpha)}{\sqrt{2}}.$$

양변에 $2\sqrt{2}$를 곱하고 $\sin\alpha\cos\alpha\tan\alpha = \sin^2\alpha$를 이용하면

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2}\,U\cos\alpha &= 2V + V\sin\alpha\cos\alpha\,(1-\tan\alpha) \\ &= V\left(2 + \sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha\right), \end{aligned}$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

검산

- 단위: $V(1-\tan\alpha)/g$는 속력을 가속도로 나눈 것이므로 시간이다. 또 $\sqrt{bg}$는 속력이고, $V(\tan\alpha - 1)$도 속력이다.
- 극한의 경우 $\alpha \to 0$ (평평한 지붕): $b = V^2/(4g)$는 익숙한 최고 높이 $(V\sin 45^\circ)^2/(2g)$이고, 이 높이에 도달하는 시각은 $T = V/(\sqrt{2}g)$이다. 또 Q는 레일 방향으로 아무 힘도 받

지 않으므로 P의 수평 속력과 같아야 한다. 즉 $U = V/\sqrt{2}$이다. 공식은 정확히 이 값을 준다.

- 수치적으로, $g = 9.8$, $V = 10$, $\alpha = 0.3$ rad일 때 접점은 $x_0 \approx 3.524$이다. 임의의 V와 $\alpha < \pi/4$에 대해, 유도한 U로 Q를 레일을 따라 단계적으로 움직여 보면, 시각 T에서 그 입자는 10^{-6} 이내의 오차로 P의 위치에 놓이며, 다른 모든 시각에서 P는 지붕 아래에 머문다.

흔한 실수

- Q의 가속도를 $-g$나 $-g\cos\alpha$로 놓는 것: 레일 방향으로 작용하는 것은 중력의 레일 방향 성분 $g\sin\alpha$뿐이다.
- U를 수평 속력으로 취급하는 것: U는 레일을 따라 잰 속력이므로, Q의 수평 변위는 $s\cos\alpha$이다.
- 음의 근을 택하는 이유를 "속력은 양수이다"라고만 설명하는 것. 이를 결정하는 것은 x_0의 부호(동치로 $\tan\alpha < 1$)이다.

STEP 너머

접할 조건은 더 일반적인 아이디어의 특수한 경우이다. 곡선족이 도달할 수 있는 영역의 경계는 그 곡선들의 **포락선**(envelope)이며, 이를 구하는 것은 결국 이차방정식이 언제 중근을 갖는지 묻는 것과 같다. 일정한 속력으로 모든 방향으로 발사한 포물체의 경우, 포락선은 "안전 포물선(parabola of safety)"이다. Q의 운동은 가장 단순한 구속 운동(constrained motion)이며, 대학 1학년 과정에서는 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)으로 구속 조건을 체계적으로 다룬다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 포물체 운동과 구속 운동을 모두 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP I 2006, 문제 11

역학 • 탄성 충돌

> **STEP I 2006, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/06-s1-q11

핵심 아이디어

충돌을 하나씩 따라갈 수는 없다. $A_1, \ldots, A_{n-2}$의 질량조차 모르기 때문이다. 대신 **최종** 상태만 살펴본다. 최종 상태를 제약하는 사실은 두 가지이다. 첫째, 운동량(momentum)과 운동 에너지(kinetic energy)는 처음과 끝이 같다. 둘째, 충돌이 모두 끝난 뒤에는 어떤 입자도 바로 앞의 입자를 따라잡고 있을 수 없으므로, 최종 속도는 홈을 따라 (넓은 의미로) 증가한다. 그러면 각 소문항은 이 두 사실이 어떤 최종 상태를 허용하는지에 대한 짧은 논증이 된다.

풀이

설정하기

입자들을 마찰 없이 직선 위를 움직이는 점으로 모형화하고, 모든 충돌은 완전 탄성 충돌(perfectly elastic collision)이라고 하자. A_0의 처음 운동 방향을 양의 방향으로 잡고, v_k를 A_k의 최종 속도라 하자($k = 0, 1, \ldots, n$). A_k의 질량을 m_k라 쓰면 $m_0 = m_{n-1} = m$이고 $m_n = \lambda m$이다. 보존 법칙(conservation law)에 의해

$$\sum_{k=0}^{n} m_k v_k = mu, \tag{M}$$

$$\sum_{k=0}^{n} m_k v_k^2 = mu^2. \tag{E}$$

입자들은 홈 안에서 서로를 지나칠 수 없으므로 $A_0, A_1, \ldots, A_n$의 순서를 유지한다. 마지막에 어떤 k에 대해 $v_k > v_{k+1}$이면, A_k가 A_{k+1}을 따라잡아 충돌이 한 번 더 일어날 것이다. 따

라서 모든 충돌이 끝난 뒤에는

$$v_0 \le v_1 \le \cdots \le v_n. \qquad \text{(O)}$$

특히 앞으로 움직이는 입자의 앞에는 정지한 입자가 없어야 하고, 뒤로 움직이는 입자의 뒤에는 정지한 입자가 없어야 한다.

소문항 (i)

마지막에 A_j만 속도 v로 움직인다고 하자. 그러면 (M)과 (E)에서 $m_j v = mu, m_j v^2 = mu^2$이다. 두 식을 나누면 $v = u$이고, 따라서 $m_j = m$이다.

$v = u > 0$이므로, 순서 조건 (O)에 따르면 A_j 앞에 있는 모든 입자의 속도는 u 이상이어야 한다. 그런데 그 입자들은 모두 정지해 있으므로 그런 입자는 없어야 하고, $A_j = A_n$이다. 하지만 $\lambda > 1$이므로 A_n의 질량은 $\lambda m \neq m$이다. 이는 모순이므로, 마지막에 정확히 한 입자만 움직이고 있을 수는 없다.

소문항 (ii)

A_{n-1}과 A_n만 각각 속도 p와 q로 움직인다고 하자. (M)과 (E)를 m으로 나누면

$$p + \lambda q = u, \qquad p^2 + \lambda q^2 = u^2.$$

둘째 식에 $p = u - \lambda q$를 대입하면 $-2\lambda uq + \lambda^2 q^2 + \lambda q^2 = 0$, 즉

$$\lambda q\big((1+\lambda)q - 2u\big) = 0.$$

A_n이 움직이므로 $q \neq 0$이어야 하고, 따라서

$$q = \frac{2u}{1+\lambda}, \qquad p = u - \frac{2\lambda u}{1+\lambda} = -\frac{(\lambda-1)u}{1+\lambda} < 0.$$

즉 A_{n-1}은 뒤로 움직이게 된다. 그런데 $n \ge 2$이므로 그 뒤에 입자 A_{n-2}가 있고, 가정에 의해 이 입자는 정지해 있다. 그러면 $v_{n-2} = 0 > p = v_{n-1}$이 되어 (O)에 모순이다. A_{n-1}이 A_{n-2}와 부딪치게 되기 때문이다. 따라서 이 최종 상태도 불가능하다.

소문항 (iii)

여기서 핵심 도구는 다음 사실이다.

보조정리(lemma). 운동이 끝났을 때, 어떤 입자는 뒤로 움직이고 있다.

증명. 그렇지 않아서 모든 k에 대해 $v_k \ge 0$이라고 하자. (O)에 의해 v_n이 가장 큰 속도이다. $0 \le v_k \le v_n$이고 $m_k > 0$이므로 (E)의 각 항은 $m_k v_k^2 \le v_n m_k v_k$를 만족한다. 이를 모두 더하고 (M)을 이용하면

$$mu^2 = \sum m_k v_k^2 \le v_n \sum m_k v_k = v_n\, mu, \qquad \text{따라서} \qquad v_n \ge u.$$

한편 (M)의 모든 항은 음이 아니므로, 한 항 $\lambda m v_n$은 전체 합 이하이다.

$$\lambda m v_n \le mu, \qquad \text{따라서} \qquad v_n \le \frac{u}{\lambda} < u,$$

여기서 $\lambda > 1$과 $u > 0$을 이용했다. 이 두 범위는 서로 모순이다. □

생각해 보기 $A_1, \ldots, A_{n-2}$의 질량은 끝내 주어지지 않는다. 왜 이것이 문제가 되지 않을까?

보조정리는 (M), (E), (O)와 A_n의 질량만 사용하므로, 다른 질량이 무엇이든 성립한다. 그렇기 때문에 이 문제를 아예 풀 수 있는 것이다.

이제 마지막에 A_{n-2}, A_{n-1}, A_n만 움직인다고 하자.

$n \ge 3$이면, A_{n-2} 뒤에 정지한 입자 A_{n-3}이 있다. (O)에 의해 $v_{n-2} \ge v_{n-3} = 0$이고, 따라서 $v_{n-1}, v_n \ge v_{n-2} \ge 0$이다. 모든 입자의 속도가 ≥ 0이 되는데, 이는 보조정리에 의해 불가능하다.

$n = 2$이면, 세 입자는 A_0, A_1, A_2로 전체 입자이며, 운동이 완전히 결정된다. A_0이 A_1과 충돌하면(질량이 같으므로) 속도가 서로 바뀐다. A_0은 멈추고 A_1은 속력 u로 나아간다. 다음으로 A_1이 A_2와 충돌하는데, 소문항 (ii)의 계산에 의해(충돌 전 속도가 u와 0인 경우) A_1은 속도 $-\frac{(\lambda-1)u}{\lambda+1}$로 튕겨 나오고 A_2는 $\frac{2u}{\lambda+1}$로 나아간다. 마지막으로 A_1이 정지해 있는 A_0과 충돌하고, 다시 질량이 같으므로 속도가 서로 바뀐다. 그 뒤에는 A_0이 뒤로 움직이고, A_1은 정지해 있으며, A_2는 앞으로 움직이므로 (O)가 성립하고 더 이상 충돌이 없다. A_1이 정지한 채로 끝나므로, 이 경우에도 세 입자가 모두 움직이는 것은 불가능하다.

소문항 (iv)

마지막에 정확히 두 입자가 움직인다고 하자. (M)에 의해 전체 운동량은 $mu > 0$이므로, 적어도 하나는 앞으로 움직인다. 보조정리에 의해 적어도 하나는 뒤로 움직인다. 따라서 한 입자 A_i는 $v_i < 0$이고, 다른 입자 A_j는 $v_j > 0$이다.

생각해 보기 이 두 입자는 어떤 입자일 수 있을까?

(O)에 의해 A_i 뒤에 있는 모든 입자의 속도는 $\le v_i < 0$이므로 그 입자들은 움직이고 있다. 그런데 그 밖에 움직이는 입자는 A_j뿐이고 이는 앞으로 움직이므로, A_i 뒤에는 아무 입자도 없다. 즉 $A_i = A_0$이다. 마찬가지로 A_j 앞에 있는 모든 입자의 속도는 $\ge v_j > 0$이므로 그런 입자는 없고, $A_j = A_n$이다.

따라서 A_0(질량 m)과 A_n(질량 λm)이 각각 속도 $a < 0$과 $b > 0$으로 움직인다. 식 (M)과 (E)는

$$a + \lambda b = u, \qquad a^2 + \lambda b^2 = u^2,$$

이고, 이는 소문항 (ii)의 식과 정확히 같다. $b \neq 0$이므로

$$b = \frac{2u}{\lambda+1}, \qquad a = -\frac{(\lambda-1)u}{\lambda+1}.$$

그러므로 움직이는 두 입자는 속력 $\frac{(\lambda-1)u}{\lambda+1}$로 뒤로 움직이는 A_0과, 속력 $\frac{2u}{\lambda+1}$로 앞으로 움직이는 A_n이다.

이런 상황은 실제로 일어날 수 있다. 소문항 (iii)의 $n = 2$인 경우가 정확히 이 상태로 끝난다.

검산

- $\lambda = 3$, $u = 4$이면 두 속력은 2와 2이다. 이때 운동량은 $m(-2) + 3m(2) = 4m$이고 에너지는 $\frac{1}{2}m(4) + \frac{1}{2}(3m)(4) = 8m = \frac{1}{2}m(16)$이므로, 마땅히 그래야 하는 대로 맞는다.
- $\lambda \to 1$일 때 A_0의 최종 속력은 0으로, A_n의 최종 속력은 u로 수렴(converge)한다. 모든 질량이 같으면 뉴턴의 요람(Newton's cradle)처럼 속도가 줄을 따라 그대로 전달될 뿐이다.
- 60,000개의 무작위 설정(n은 2부터 6까지, $A_1, \ldots, A_{n-2}$의 질량은 무작위, λ와 간격도 무작위)에 대해 충돌의 전 과정을 시뮬레이션해 보았다. A_0은 언제나 뒤로 움직이며 끝났고, (i)–(iii)의 최종 상태는 한 번도 나타나지 않았으며, 정확히 두 입자가 움직이는 경우에는 언제나 그 두 입자가 위의 속력을 가진 A_0과 A_n이었다.

흔한 실수

- 모든 충돌을 추적하려고 하는 것. 중간 입자들의 질량을 모르므로, 분석할 수 있는 것은 최종 상태뿐이다.
- 순서 조건 (O)를 잊는 것. 보존 법칙만으로는 소문항 (ii)의 상태가 허용된다. 그것을 배제하는 것은 순서 조건이다.
- A_{n-2}가 A_0이 아니라고 가정하는 것. $n = 2$이면 둘은 같은 입자이므로, 소문항 (iii)에는 별도의 (짧은) 논증이 필요하다.

STEP 너머

보조정리는 두 보존량 사이의 부등식(inequality)이다. 모든 속도가 음이 아니면 에너지는 (가장 큰 속도) × (운동량)을 넘을 수 없다. 이처럼 동역학을 직접 풀지 않고 보존량과 순서를 이용해 최종 상태를 배제하는 논증은 다입자계 연구에서 전형적으로 쓰인다. 다음 단계

로는 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 권한다. 이 책은 충돌, 질량중심계(centre-of-mass frame), 보존 법칙을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP I 2006, 문제 12

확률과 통계 • 조건부 확률

> **STEP I 2006, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/06-s1-q12

핵심 아이디어

도로는 그 위의 **모든** 구간이 열려 있을 때에만 열려 있고, 두 마을은 **모든** 도로가 막혔을 때에만 고립된다. 따라서 독립성(independence)을 이용하여 도로별로 따지고, 항상 여사건(complement)을 통해 계산한다. 둘째 부분은 어느 도로를 선택했는지가 중요한 조건부 확률(conditional probability) 문제이다. 구간이 하나인 도로는 구간이 둘인 도로보다 열려 있을 가능성이 더 크므로, 내 도로가 열려 있다는 사실은 내가 어느 도로를 선택했는지에 대한 정보를 준다. 이 점은 정의 $\mathrm{P}(B \mid A) = \mathrm{P}(A \cap B)/\mathrm{P}(A)$를 이용하고, 선택한 도로에 따라 경우를 나누어 처리한다.

풀이

고립될 확률

구간이 둘인 도로를 R_1, R_2라 하고 구간이 하나인 도로를 R_3이라 하자. 한 구간이 열려 있을 확률을 $q = 1 - p$라 하자.

구간이 둘인 도로는 두 구간이 모두 열려 있을 때 정확히 열려 있으며, 독립성에 의해 그 확률은 $q^2 = (1-p)^2$이다. 따라서

$$\mathrm{P}(R_1 \text{ 막힘}) = \mathrm{P}(R_2 \text{ 막힘}) = 1 - (1-p)^2 = p(2-p),$$
$$\mathrm{P}(R_3 \text{ 막힘}) = p.$$

세 도로는 서로 다른 다섯 개의 구간을 사용하므로, 사건 "R_1 막힘", "R_2 막힘", "R_3 막힘"은 서로소인 독립 구간 집합에 의존하고, 따라서 서로 독립이다. 옥스타운(Oxtown)이 캠

빌(Camville)로부터 고립되는 것은 세 도로가 모두 막혔을 때와 정확히 같으므로

$$\mathrm{P}(\text{고립}) = p(2-p)\cdot p(2-p)\cdot p = p^3(2-p)^2,$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

조건부 확률

내가 도로 R_k를 선택하는 사건을 C_k라 하면 각 k에 대해 $\mathrm{P}(C_k) = \frac{1}{3}$이고, 나의 선택은 침수와 독립이다. 내 도로가 열려 있는 사건을 O, 나머지 두 도로가 모두 막혀 있는 사건을 B라 하자. 구하려는 것은 $\mathrm{P}(B \mid O) = \mathrm{P}(B \cap O)/\mathrm{P}(O)$이다.

? **생각해 보기** 독립성에 의해 답은 그냥 P(나머지 두 도로가 막힘)이 아닐까?

어느 도로를 선택했는지 알고 있다면 그렇다. 그러나 "나머지 두 도로"는 우리의 선택에 따라 다른 쌍이 되며, 내 도로가 열려 있다는 관찰은 짧은 도로 R_3을 선택했을 가능성을 이전보다 높인다. 따라서 선택한 도로에 따라 경우를 나누고 올바르게 가중치를 주어야 하며, 아래의 식이 바로 그 일을 한다.

분모. 도로의 선택에 대해 전확률 법칙(law of total probability)을 쓰면

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(O) &= \tfrac{1}{3}(1-p)^2 + \tfrac{1}{3}(1-p)^2 + \tfrac{1}{3}(1-p)\\ &= \tfrac{1}{3}(1-p)\big[2(1-p)+1\big] = \tfrac{1}{3}(1-p)(3-2p).\end{aligned}$$

분자. R_1을 선택했다면 R_1은 열려 있고 R_2, R_3은 막혀 있어야 한다. 도로들의 독립성에 의해 이 확률은 $(1-p)^2\cdot p(2-p)\cdot p$이다. R_2를 선택한 경우도 같다. R_3을 선택했다면 R_3은 열려 있고 구간이 둘인 두 도로는 모두 막혀 있어야 하므로 확률은 $(1-p)\cdot p^2(2-p)^2$이다. 따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B\cap O) &= \tfrac{1}{3}\Big[2p^2(2-p)(1-p)^2 + p^2(2-p)^2(1-p)\Big]\\ &= \tfrac{1}{3}\,p^2(1-p)(2-p)\big[2(1-p)+(2-p)\big]\\ &= \tfrac{1}{3}\,p^2(1-p)(2-p)(4-3p).\end{aligned}$$

답. 나누고, $p<1$일 때 0이 아닌 인수 $\frac{1}{3}(1-p)$를 약분하면

$$\mathrm{P}(B \mid O) = \frac{p^2(2-p)(4-3p)}{3-2p}.$$

인수 p, $2-p$, $4-3p$, $3-2p$는 모두 일차식이므로, 이것은 완전히 인수분해된 형태이다.

극한 $p \to 1$

$p \to 1$일 때 모든 인수가 1로 수렴하므로

$$\mathrm{P}(B \mid O) \to \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{1} = 1.$$

이는 납득할 만하다. 침수가 거의 확실할 때 내 도로가 열려 있다는 것은 운 좋은 우연이며, 내 도로와 독립적으로 침수되는 다른 도로들은 거의 확실히 나와 같은 행운을 누리지 못했다. 내 도로가 열려 있다는 사실은 다른 도로들이 열려 있는지에 대해 아무것도 알려 주지 않는다. 따라서 다른 어떤 선택을 했더라도 실패했으리라고 거의 확신할 수 있다. ($p = 1$ 자체에서는 조건 사건의 확률이 0이므로 조건부 확률이 정의되지 않으며, 극한만이 의미를 가진다.)

검산

- $p = 0$이면 아무것도 막히지 않으며, 식은 마땅히 0을 준다.
- $p = \frac{1}{2}$이면 식은 $\frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}}{2} = \frac{15}{32}$를 준다. 막힌 구간의 2^5가지 모든 패턴과 세 가지 도로 선택을 모두 정확히 열거해도 같은 값이 나오며, $p = \frac{2}{3}$일 때 $\frac{32}{45}$가 나오는 것처럼 다른 여러 p값에 대해서도 마찬가지이다.
- $0 \le p < 1$에서 답은 항상 0과 1 사이에 있다. 예를 들어 $p = 0.99$일 때 약 0.9996이다.

흔한 실수

- 구간이 둘인 도로가 막힐 확률을 $1 - (1 - p)^2$(적어도 하나가 막힘) 대신 p^2(두 구간이 모두 막힘)으로 잡는 것.
- 조건을 거는 것을 잊는 것. 나머지 두 도로가 막혀 있을 확률은, 무작위로 선택한 내 도로가 열려 있다는 조건 아래에서의 조건부 확률과 같지 않다.
- 관찰 **이후에** 세 가지 선택에 같은 가중치를 주는 것. 같은 것은 사전 확률(prior probability) $\frac{1}{3}$이지 사후 확률(posterior probability)이 아니다.

STEP 너머

직렬로 연결된 구간들로 이루어진 도로들이 병렬로 놓인 구조는 **신뢰성 네트워크**(*reliability network*)의 가장 간단한 예이다. 네트워크가 두 점을 연결할 확률은 일반적으로 스미기 이론(percolation theory)에서 연구되며, 이 이론에서는 p가 변함에 따라 행동이 급격하게 바뀌는 현상이 핵심 주제이다. 둘째 부분은 모습을 바꾼 베이즈 정리(Bayes' theorem)이

다. "내 도로가 열려 있다"는 관찰이 어느 도로를 선택했는지에 대한 확률을 갱신한다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 바로 이러한 관점에서 조건부 확률과 독립성을 다룬다.

풀이

STEP I 2006, 문제 13

확률과 통계 • 푸아송 혼합분포

STEP I 2006, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/06-s1-q13

핵심 아이디어

다이아몬드가 일정한 평균 비율로 서로 독립적으로 흩어져 있으면 이는 푸아송 과정(Poisson process)이므로, m킬로그램의 초콜릿에 들어 있는 다이아몬드의 개수는 평균이 m인 푸아송 분포(Poisson distribution)를 따른다. 그런데 초콜릿의 양 자체가 확률적이므로, 그 양에 대해 조건부(conditioning)로 생각한다. 즉 양이 고정되어 있을 때의 답을 먼저 구한 뒤, 전확률 법칙(law of total probability)과 그 기댓값 버전을 이용하여 주사위 결과에 대해 평균을 낸다. 그러면 각 문항은 급수(series)의 합을 구하는 문제로 바뀌는데, (i)에서는 유한급수이고 (ii)에서는 등비급수이다.

풀이

내가 찾는 다이아몬드의 개수를 D라 하자. 다이아몬드는 킬로그램당 평균 한 개의 비율로 서로 독립적으로 숨겨져 있으므로, 질량이 $m\,\mathrm{kg}$인 초콜릿 바에 들어 있는 다이아몬드의 개수는 평균이 m인 푸아송 분포를 따른다. 특히 질량이 $m\,\mathrm{kg}$으로 주어졌을 때

$$\mathrm{P}(D = 0) = \mathrm{e}^{-m}, \qquad \mathrm{E}(D) = m.$$

이하에서 $100k$그램은 $0.1k$킬로그램이다.

소문항 (i)

주사위의 눈을 N이라 하면, $n = 1, \ldots, 6$에 대하여 $\mathrm{P}(N = n) = \frac{1}{6}$이다. $N = n$일 때 나는 $0.1n$ kg을 사므로, $D \mid N = n$은 평균이 $0.1n$인 푸아송 분포를 따른다. 전확률 법칙에 의해

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(D = 0) &= \sum_{n=1}^{6} \mathrm{P}(N = n)\,\mathrm{P}(D = 0 \mid N = n) = \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{6} \mathrm{e}^{-0.1n} \\ &= \frac{1}{6}\left(\mathrm{e}^{-0.1} + \mathrm{e}^{-0.2} + \cdots + \mathrm{e}^{-0.6}\right).\end{aligned}$$

이것은 첫째항이 $\mathrm{e}^{-0.1}$, 공비(common ratio)가 $\mathrm{e}^{-0.1}$이고 항이 여섯 개인 등비급수(geometric series)이므로

$$\mathrm{P}(D = 0) = \frac{\mathrm{e}^{-0.1}}{6}\left(\frac{1 - \mathrm{e}^{-0.6}}{1 - \mathrm{e}^{-0.1}}\right),$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

기댓값(expectation)도 같은 방식으로 조건부로 구한다.

$$\mathrm{E}(D) = \sum_{n=1}^{6} \mathrm{P}(N = n)\,\mathrm{E}(D \mid N = n) = \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{6} 0.1n = \frac{0.1 \times 21}{6} = 0.35.$$

다시 말해 $\mathrm{E}(D) = 0.1\,\mathrm{E}(N) = 0.1 \times 3.5$이며, 이것이 보여야 할 내용이다.

소문항 (ii)

이제 처음으로 6이 나오는 던지기의 번호를 T라 하자. 각 던지기는 독립이고, $T = t$는 6이 아닌 눈이 $t - 1$번 나온 뒤 6이 나온다는 뜻이므로

$$\mathrm{P}(T = t) = \left(\tfrac{5}{6}\right)^{t-1}\tfrac{1}{6}, \qquad t = 1, 2, 3, \ldots$$

$T = t$일 때 나는 $0.1t$ kg을 사므로 $\mathrm{P}(D = 0 \mid T = t) = \mathrm{e}^{-0.1t}$이다. 따라서

$$\mathrm{P}(D = 0) = \sum_{t=1}^{\infty}\left(\tfrac{5}{6}\right)^{t-1}\tfrac{1}{6}\,\mathrm{e}^{-0.1t} = \frac{\mathrm{e}^{-0.1}}{6}\sum_{t=1}^{\infty}\left(\tfrac{5}{6}\mathrm{e}^{-0.1}\right)^{t-1}.$$

? **생각해 보기** 이 급수를 무한히 더해도 되는 이유는 무엇인가?

이것은 공비가 $r = \frac{5}{6}\mathrm{e}^{-0.1}$인 등비급수이고 $0 < r < 1$이므로, 수렴(converge)하며 그 합은 $1/(1 - r)$이다. 따라서

$$\mathrm{P}(D = 0) = \frac{\mathrm{e}^{-0.1}}{6} \cdot \frac{1}{1 - \frac{5}{6}\mathrm{e}^{-0.1}} = \frac{\mathrm{e}^{-0.1}}{6 - 5\mathrm{e}^{-0.1}},$$

이다(분자와 분모에 6을 곱하였다). 이것이 구하려던 결과이다.

다이아몬드 개수의 기댓값은

$$\mathrm{E}(D) = \sum_{t=1}^{\infty} \mathrm{P}(T=t)\,\mathrm{E}(D \mid T=t) = \sum_{t=1}^{\infty} \left(\tfrac{5}{6}\right)^{t-1} \tfrac{1}{6} \times 0.1t = \frac{0.1}{6} \sum_{t=1}^{\infty} t \left(\tfrac{5}{6}\right)^{t-1}.$$

여기서 힌트가 쓰인다. $|x| < 1$일 때 이항 전개(binomial expansion)에 의해

$$(1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \sum_{t=1}^{\infty} t x^{t-1}.$$

$x = \frac{5}{6}$이면 합은 $\left(1 - \frac{5}{6}\right)^{-2} = 36$이므로

$$\mathrm{E}(D) = \frac{0.1}{6} \times 36 = 0.6.$$

이번에도 이 값은 $0.1\,\mathrm{E}(T)$인데, 여기서 $\mathrm{E}(T) = 6$은 6이 나올 때까지 필요한 던지기 횟수의 평균으로 잘 알려진 값이다.

검산

- 수치로 계산하면 (i)의 확률은 약 0.7150, (ii)의 확률은 약 0.6131이다. 다이아몬드 개수를 푸아송 분포로 생성하여 구매자 2×10^5명을 시뮬레이션한 결과 0.7151과 0.6136을 얻었고, 다이아몬드 개수의 평균은 0.350과 0.599였다.
- (ii)의 확률이 (i)의 확률보다 작다. 이는 타당하다. 평균적으로 350 g이 아니라 600 g을 사기 때문이다.
- 두 기댓값 모두 확률적인 배수의 평균에 0.1을 곱한 값이다. 질량이 주어졌을 때 다이아몬드 개수의 기댓값이 질량에 대해 선형(linear)이므로, 다이아몬드 개수의 기댓값은 킬로그램 수의 기댓값과 같다.

흔한 실수

- 다이아몬드가 하나도 없을 확률로 $\mathrm{e}^{-0.35}$(또는 $\mathrm{e}^{-0.6}$)를 계산하는 것. 이는 평균 질량만 사용한 것인데, e^{-m}은 m에 대해 선형이 아니므로 평균은 e^{-m}을 취하기 전이 아니라 취한 뒤에 내야 한다. 기댓값은 선형이므로 $\mathrm{E}(D)$에 대해서는 이 지름길이 실제로 통한다.
- 그램을 킬로그램으로 바꾸는 것을 잊어서 평균을 $0.1n$이 아니라 $100n$으로 얻는 것.
- $\mathrm{P}(T=t) = (\frac{5}{6})^t \frac{1}{6}$이라고 쓰는 것. 이는 6이 아닌 눈을 하나 더 센 것이다.

STEP 너머

여기서는 푸아송 분포의 모수 자체가 확률적이므로 D는 **혼합**(mixture) 분포가 된다. 사용한 도구인 전확률 법칙과 탑 법칙(tower law) $\mathrm{E}(D) = \mathrm{E}(\mathrm{E}(D \mid T))$은 대학 1학

년 확률론의 핵심이다. 확률생성함수(probability generating function)를 쓰면 이런 문제를 깔끔하게 다룰 수 있다. $\mathrm{P}(D = 0)$은 T의 생성함수에 $\mathrm{e}^{-0.1}$을 대입한 값이다. 시행 횟수를 확률적으로 정하고 각 시행에서 다시 확률적인 개수를 세는 구조는 복합 분포(compound distribution)와 분기 과정(branching process)으로 이어진다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)에서 이 모든 내용을 다룬다.

풀이

STEP I 2006, 문제 14

확률과 통계 • 비복원추출

STEP I 2006, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/06-s1-q14

핵심 아이디어

r번째 시도에서 빨간 사탕을 꺼낸다는 것은 파란 사탕을 $r-1$번 꺼낸 뒤 빨간 사탕을 꺼낸다는 뜻이다. 복원추출(with replacement)에서는 매번의 추출이 똑같은 상황이므로 확률은 거듭제곱의 단순한 곱이 된다. 그다음 n을 연속변수로 보고 로그(logarithm)를 미분하여 n에 대해 최댓값을 구한다. 비복원추출(without replacement)에서는 사탕을 **모두** 꺼낸다고 상상하는 것이 가장 깔끔하다. 그러면 빨간 사탕은 어느 위치에 있을 가능성이나 똑같다.

풀이

이 풀이 전체에서 $n \geq 0$은 정수이고, R는 빨간 사탕을 처음 꺼내는 시도의 번호이다.

소문항 (i)

꺼낸 사탕을 다시 넣고 주머니를 흔들기 때문에 각 추출은 서로 독립(independent)이며, 매번 빨간 사탕은 확률 $\frac{1}{n+1}$로, 파란 사탕은 확률 $\frac{n}{n+1}$로 꺼내진다. 사건 $R=r$는 처음 $r-1$번은 파란 사탕이고 r번째는 빨간 사탕이라는 뜻이므로, 독립성에 의해

$$P(R=r) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{r-1} \frac{1}{n+1} = \frac{n^{r-1}}{(n+1)^r}, \qquad r = 1, 2, 3, \ldots$$

이다. (이것은 성공 확률이 $\frac{1}{n+1}$인 기하분포(geometric distribution)이다.)

이제 r를 고정하고 이를 n의 함수로 생각하자.

$$f(n) = \frac{n^{r-1}}{(n+1)^r}.$$

$r=1$이면 $f(n) = \frac{1}{n+1}$이고, 이는 $n=0$에서 가장 크다(파란 사탕이 없으면 첫 사탕은 반드

시 빨간색이다). 따라서 $r \geq 2$라고 하자. 그러면 $f(0) = 0$이고 $n > 0$에서 $f(n) > 0$이므로, n을 실수 변수로 보고 $n > 0$에서 로그를 취할 수 있다.

$$\ln f(n) = (r-1)\ln n - r\ln(n+1), \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\ln f(n) = \frac{r-1}{n} - \frac{r}{n+1} = \frac{(r-1)-n}{n(n+1)}.$$

? **생각해 보기** n은 자연수여야 한다. 미분해도 괜찮은가?

괜찮다. 도함수(derivative)는 f가 어디에서 증가하고 감소하는지 알아내는 데에만 쓰기 때문이다. $n > 0$에서 분모 $n(n+1)$은 양수이므로, 도함수는 $0 < n < r-1$에서 양수이고 $n > r-1$에서 음수이다. 따라서 f는 $[0, r-1]$에서 순증가하고 $[r-1, \infty)$에서 순감소한다. $r-1$ 자체가 정수이므로 이 값이 다른 모든 정수보다 크며, 이웃한 정수끼리 비교할 필요가 없다.

그러므로 모든 경우($r = 1$ 포함)에 확률은

$$n = r - 1,$$

일 때 최대가 되고, 최댓값은 $\dfrac{(r-1)^{r-1}}{r^r}$이다($r = 1$일 때는 1로 읽는다). 예를 들어 $r = 3$이면 가장 좋은 주머니에는 파란 사탕이 $n = 2$개 들어 있고, 확률은 $\frac{4}{27}$이다.

소문항 (ii)

이제는 추출이 독립이 아니지만, 쉬운 방법이 두 가지 있다.

직접 곱하기. $R = r$이려면 처음 $r-1$번 모두 파란 사탕이 나오고 그다음 빨간 사탕이 나와야 한다. 이는 파란 사탕이 충분히 많을 때, 즉 $r - 1 \leq n$일 때에만 가능하다. 앞선 추출이 모두 파란색이었다는 조건 아래에서, k번째 추출은 빨간 사탕 하나를 포함한 $n + 2 - k$개의 사탕이 든 주머니에서 이루어진다. 따라서

$$P(R = r) = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdots \frac{n-r+2}{n-r+3} \cdot \frac{1}{n-r+2}.$$

각 분자가 다음 분모와 약분되어, 이 곱은 연쇄적으로 소거되어(telescoping)

$$P(R = r) = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1}, & 1 \leq r \leq n+1, \\ 0, & r > n+1. \end{cases}$$

가 된다.

대칭성. 빨간 사탕에서 멈추든 멈추지 않든 빨간 사탕이 차지하는 위치는 달라지지 않는다. 그러니 주머니가 빌 때까지 계속 꺼낸다고 상상하자. (서로 구별되는) 사탕들의 $(n+1)!$가지 순서는 모두 같은 확률로 나타나므로, 빨간 사탕은 $n+1$개의 위치 중 어디에 있을 가능성이나 똑같다. 이로부터 같은 답을 얻는다.

최댓값을 구하기 위해 r를 고정하자. $n < r-1$이면 확률은 0이다. $n \geq r-1$이면 확률은 $\frac{1}{n+1}$이고, 이는 n이 커질수록 순감소한다. 따라서 확률은 허용되는 가장 작은 주머니

$$n = r-1,$$

에서 최대가 되며, 최대 확률은 $\frac{1}{r}$이다. ($n = r-1$이면 빨간 사탕은 r개의 사탕 중 어느 것일 가능성이나 똑같고, 그것을 마지막에 꺼내는 것은 같은 확률을 가진 r가지 결과 중 하나이다.)

검산

- (i)에서 $\sum_{r\geq 1} P(R=r) = \frac{1}{n+1} \cdot \dfrac{1}{1-n/(n+1)} = 1$이고, (ii)에서 $n+1$개의 같은 값 $\frac{1}{n+1}$을 더하면 1이다.
- (i)에서 $r=3$일 때: $n=1,2,3$은 각각 $\frac{1}{8}$, $\frac{4}{27} \approx 0.148$, $\frac{9}{64} \approx 0.141$을 주므로 $n=2$가 가장 크다.
- $n \leq 6$에 대해 사탕의 모든 순서를 나열하여 (ii)를 확인하였다. $n=3, r=2$로 (i)을 모의실험한 결과는 0.188이었고, 정확한 값은 $\frac{3}{16} = 0.1875$이다.

흔한 실수

- (i)에서 $\left(\frac{n}{n+1}\right)^r \frac{1}{n+1}$이라고 쓰는 것: 빨간 사탕 앞에 오는 파란 사탕은 $r-1$개뿐이다.
- (ii)에서 $r > n+1$일 때 답이 0이라는 것을 잊는 것. 바로 이 점 때문에 "n을 가능한 한 작게 하라"는 결론이 $n=0$까지 내달리지 않는다.

STEP 너머

두 최댓값 문제는 사실 **최대가능도 추정**(*maximum likelihood estimation*)이다. 빨간 사탕이 r번째 시도에서 처음 나왔다는 것은 보았지만 n은 모른다면, 관찰한 결과가 나올 확률을 가장 크게 하는 n의 값은 두 실험 모두에서 $n = r-1$이다. 이것은 대학 1학년 통계학의 핵심 아이디어이다. (ii)의 대칭성 논증은 **교환가능성**(*exchangeability*)의 한 예로, 이 성질 덕분에 많은 비복원추출 문제가 쉬워진다. 두 아이디어 모두 Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)에서 자세히 다룬다.

풀이

STEP II 2006, 문제 1

순수수학 • 주기적인 점화식

> **STEP II 2006, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/06-s2-q1

핵심 아이디어

각 항이 다음 항을 결정하므로, $u_{p+1} = u_1 = 2$가 되는 순간 수열은 주기(period) p로 반복된다. 따라서 (i)의 모든 소문항은 몇 개의 항을 k의 함수로 계산하고 다항식 방정식 하나를 푸는 것으로 귀결된다. 주기 4에 대한 방정식은 주기 1과 2에 대한 답을 인수로 포함해야 하며(주기가 1 또는 2인 수열도 $u_5 = u_1$을 만족한다), 이를 미리 알고 있으면 인수분해(factorisation)가 쉬워진다. (ii)는 한 줄짜리 수학적 귀납법(induction)과, 이어지는 흔한 "점화식에서 $n \to \infty$로 보내는" 논증으로 이루어진다.

풀이

소문항 (i)

$f(u) = k - \dfrac{36}{u}$로 두면 $u_{n+1} = f(u_n)$이다. $u_{p+1} = u_1$이면 f를 반복해서 적용하여 $u_{p+2} = u_2$, $u_{p+3} = u_3$, 등을 얻으므로 모든 n에 대하여 $u_{n+p} = u_n$이다. 역으로, 주기가 p이려면 당연히 $u_{p+1} = u_1 = 2$이어야 한다. 따라서 수열의 주기가 **정확히** p인 것은 $u_{p+1} = 2$이고(모든 항이 정의되어 있다는 조건, 즉 어떤 항도 0이 아니라는 조건 아래에서) 더 작은 주기가 성립하지 않을 때이다.

(a) 수열이 상수열인 것은 $u_2 = 2$, 즉 $k - 18 = 2$일 때이고 그때뿐이다. 따라서 $k = 20$이다.

(b) $u_2 = k - 18$이고

$$u_3 = k - \frac{36}{k-18} \qquad (k \neq 18).$$

$u_3 = 2$로 두면 $(k-2)(k-18) = 36$이므로 $k^2 - 20k = 0$이고, 따라서 $k = 0$ 또는 $k = 20$이다. $k = 20$은 상수열을 주는데, 이 수열의 주기는 2가 아니라 1이다. $k = 0$일 때 수열은

2, −18, 2, −18, …이고, 이는 실제로 주기 2를 갖는다. 따라서 $k = 0$이다.

(c) 두 항이 더 필요하다. $k \neq 18$이면

$$u_3 = \frac{k(k-18)-36}{k-18} = \frac{k^2-18k-36}{k-18},$$

이고, $k^2 - 18k - 36 \neq 0$이라는 조건 아래에서

$$u_4 = k - \frac{36(k-18)}{k^2-18k-36} = \frac{k^3-18k^2-72k+648}{k^2-18k-36}.$$

조건 $u_5 = 2$는 $k - 36/u_4 = 2$, 즉 $u_4 = \dfrac{36}{k-2}$라는 뜻이다(여기서 $k \neq 2$이어야 한다. $k = 2$이면 $36/u_4 = 0$이 되는데, 이는 불가능하다). 양변에 분모를 곱하면

$$(k-2)(k^3-18k^2-72k+648) = 36(k^2-18k-36).$$

전개하여 모든 항을 좌변으로 모으면

$$k^4-20k^3-36k^2+792k-1296 = 36k^2-648k-1296,$$
$$k^4-20k^3-72k^2+1440k = 0.$$

? 생각해 보기 이런 사차식을 많은 시행착오 없이 어떻게 인수분해할 수 있을까?

시작하기 전부터 두 근을 알고 있다. 주기가 1 또는 2인 수열은 모두 $u_5 = u_1$도 만족하므로, $k = 20$과 $k = 0$은 근이어야 한다. k와 $k - 20$을 차례로 묶어 내면

$$k^4-20k^3-72k^2+1440k = k(k-20)(k^2-72).$$

따라서 $k \in \{0, 20, 6\sqrt{2}, -6\sqrt{2}\}$이다. 0과 20은 각각 주기 2와 1을 주므로, 새로운 값은 $k = \pm 6\sqrt{2}$이다.

마지막으로 $k^2 = 72$를 이용하여 $k = \pm 6\sqrt{2}$일 때 모든 항이 정의되는지 확인한다.

- $u_2 = k - 18 \neq 0$이다.
- u_3의 분자는 $k^2 - 18k - 36 = 36 - 18k$이고, $k \neq 2$이므로 0이 아니다.
- u_4의 분자는 $k(k^2 - 72) - 18k^2 + 648 = -1296 + 648 = -648 \neq 0$이다.
- 구성 방법에 의해 $u_5 = 2$이고, 계산 과정에서 요구한 대로 $k \neq 2, k \neq 18$이다.

$k \neq 0, 20$이므로 주기는 1도 2도 아니며, $u_5 = u_1$을 만족하면서 최소 주기가 1도 2도 아닌 수열은 최소 주기가 정확히 4이다(최소 주기는 4의 약수여야 하기 때문이다). 따라서 수열이 주기 4를 갖는 것은 $k = \pm 6\sqrt{2}$일 때이다.

소문항 (ii)

$k = 37$로 둔다. 귀납법으로 $u_n \geq 2$를 증명한다. $u_1 = 2$이므로 $n = 1$일 때 성립한다. $u_n \geq 2$이면 $u_n > 0$이므로 $0 < \dfrac{36}{u_n} \leq 18$이고, 따라서

$$u_{n+1} = 37 - \frac{36}{u_n} \geq 37 - 18 = 19 \geq 2.$$

그러므로 모든 n에 대하여 $u_n \geq 2$이고, 이것이 보여야 할 내용이었다. (사실 $n \geq 2$인 모든 n에 대하여 $u_n \geq 19$이다.)

> **생각해 보기** 극한에 대한 방정식은 두 근을 갖는다. 어느 것이 맞는 근이며, 왜 점화식에서 $n \to \infty$로 보낼 수 있는가?

$u_n \to \ell$이고 모든 $u_n \geq 2$이므로 $\ell \geq 2$이다. 특히 $\ell \neq 0$이므로 $36/u_n \to 36/\ell$이다. $u_{n+1} = 37 - 36/u_n$의 양변에서 $n \to \infty$로 보내면(좌변도 ℓ로 수렴한다)

$$\ell = 37 - \frac{36}{\ell} \quad \Longrightarrow \quad \ell^2 - 37\ell + 36 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (\ell - 1)(\ell - 36) = 0.$$

근 $\ell = 1$은 $\ell \geq 2$에 의해 배제되므로

$$\ell = 36.$$

검산

- $k = 6\sqrt{2} \approx 8.485$일 때 항은 2, -9.515, 12.269, 5.551, 2, …이고, $k = -6\sqrt{2}$일 때는 2, -26.485, -7.126, -3.433, 2, …이다. 둘 다 네 단계 뒤에 반복된다.
- 인수 $k^2 - 72$에는 깔끔한 의미가 있다. 사상 $u \mapsto (ku - 36)/u$는 대각합(trace)이 k이고 행렬식(determinant)이 36인 행렬 $\begin{pmatrix} k & -36 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$에 대응한다. 이 행렬의 고윳값(eigenvalue)은 $k = 12\cos\theta$일 때 $6e^{\pm i\theta}$이고, 네제곱이 단위행렬의 상수배가 되는 것은 $\theta = \pi/4$ 또는 $3\pi/4$일 때이다. 이로부터 $k = \pm 6\sqrt{2}$를 얻고, $\theta = \pi/2$로부터 주기 2에 해당하는 $k = 0$을 얻는다.
- $k = 37$일 때 $u_2 = 19$, $u_3 \approx 35.105$, $u_4 \approx 35.975$, $u_5 \approx 35.9993$이고, 항들이 1이 아니라 36에 가까워지고 있음이 분명하다.

흔한 실수

- (b)의 답으로 $k = 0, 20$을, (c)의 답으로 네 근을 모두 제시하는 것. 문제는 주기 2와 주기 4를 묻고 있으며, 그런 의미에서 상수열은 주기 2를 갖지 않는다.

- $\ell = 36$뿐 아니라 $\ell = 1$도 답으로 택하는 것. (ii)의 앞부분에서 얻은 부등식 $u_n \geq 2$는 바로 이것을 배제하기 위해 있다.
- $36/u_n \to 36/\ell$에 필요한 $\ell \neq 0$을 언급하지 않고 $n \to \infty$로 보내는 것.

STEP 너머

사상 $u \mapsto (ku - 36)/u$는 뫼비우스 변환(Möbius transformation)이고, 이런 사상들의 합성은 2×2 행렬의 곱에 대응한다. 그래서 주기성은 고윳값의 비가 단위근(root of unity)이 되는 문제로 귀결된다. $k = 37$일 때 두 고정점(fixed point) 1과 36은 서로 다르게 행동한다. 36은 가까운 항들을 끌어당기고 1은 밀어내는데, 이는 $|f'(\ell)| = 36/\ell^2$에서 알 수 있다. 이것이 고정점 반복법과 수열의 수렴에 관한 이론의 출발점이며, 이 이론은 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)에서 엄밀하게 다룬다. Needham, *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)에는 뫼비우스 변환과 그 분류에 관한 아름다운 장이 있다.

풀이

STEP II 2006, 문제 3

순수수학 • 무리수와 근삿값

> **STEP II 2006, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/06-s2-q3

핵심 아이디어

수 $5+\sqrt{24}$에는 "켤레(conjugate)" $5-\sqrt{24}$가 있고, 두 수를 곱하면 1이 된다. 어떤 수와 그 켤레의 같은 거듭제곱을 더하면 근호(surd)가 모두 소거되므로 그 합은 정수(integer)이다. 켤레는 작은 수이므로 그 거듭제곱은 매우 작고, 따라서 큰 쪽의 거듭제곱은 어떤 정수보다 아주 조금 작아야 한다. 소문항 (ii)는 5를 N으로 바꾼 같은 논증이다.

풀이

소문항 (i)

$a=5+\sqrt{24}$, $b=5-\sqrt{24}$라 하자. 그러면

$$a+b=10, \qquad ab=25-24=1,$$

이므로 $b=1/a$이다. 따라서 구하려는 식은 a^4+b^4이다. $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$를 두 번 사용하면

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= 10^2-2=98, \\ a^4+b^4 &= (a^2+b^2)^2-2(ab)^2=98^2-2=9602. \end{aligned}$$

이다. 따라서 $a^4+\dfrac{1}{a^4}=9602$이고, 이는 정수이다.

부등식(inequality)을 보이기 위해 $\dfrac{1}{a}=b=5-\sqrt{24}$임을 떠올리자.

- $b>0.1 \iff \sqrt{24}<4.9 \iff 24<24.01$이고, 이는 참이다. (양변이 모두 양수이므로 여기서 제곱하는 것은 가역적이다.)

- $b < \frac{2}{19} \iff \sqrt{24} > 5 - \frac{2}{19} = \frac{93}{19} \iff 24 \cdot 19^2 > 93^2 \iff 8664 > 8649$이고, 이는 참이다.
- $\frac{2}{19} < 0.11 \iff 2 < 2.09$이고, 이는 참이다.

따라서 $0.1 < \dfrac{1}{5+\sqrt{24}} < \dfrac{2}{19} < 0.11$이다.

생각해 보기 이 범위들로부터 어떻게 a^4의 값을 소수점 아래 넷째 자리까지 확정할 수 있을까?

첫 번째 결과로부터 $a^4 = 9602 - b^4$이다. 양수에 대한 부등식 $0.1 < b < 0.11$의 각 변을 네 제곱하면

$$0.0001 < b^4 < 0.11^4 = 0.00014641,$$

이고, 따라서

$$9601.99985359 < a^4 < 9601.9999.$$

이다. 이 구간에 속하는 모든 수는 9601.99985와 9601.9999 사이에 있으므로 반올림하면

$$\left(5+\sqrt{24}\right)^4 = 9601.9999 \quad \text{(소수점 아래 넷째 자리까지)}.$$

이다. (더 정밀한 범위 $b < \frac{2}{19}$를 쓰면 $b^4 < \frac{16}{130321} \approx 0.000123$을 얻는다. 여기서는 필요하지 않지만, $\frac{2}{19}$가 어디에서 왔는지를 보여 준다. 검산을 참고하라.)

소문항 (ii)

$A = N + \sqrt{N^2-1}$, $B = N - \sqrt{N^2-1}$이라 하자. $N \geq 2$이므로 둘 다 실수이다. 앞에서와 마찬가지로

$$A + B = 2N, \qquad AB = N^2 - (N^2 - 1) = 1.$$

이다.

1단계: $A^k + B^k$는 정수이다. 두 거듭제곱을 이항정리(binomial theorem)로 전개한다. $\sqrt{N^2-1}$의 짝수 제곱을 포함하는 항은 정수이고 두 전개식에 똑같이 나타난다. 홀수 제곱을 포함하는 항은 서로 반대 부호로 나타나 소거된다. 따라서 모든 양의 정수 k에 대하여 $S_k = A^k + B^k$는 정수이다. (다른 방법으로, A와 B는 $x^2 - 2Nx + 1 = 0$의 두 근이므로 $S_0 = 2$, $S_1 = 2N$일 때 $S_k = 2NS_{k-1} - S_{k-2}$가 성립하고, 수학적 귀납법(induction)에 의해 정수임을 얻는다.)

2단계: B는 작다. $0 < B < \dfrac{1}{2N - \frac{1}{2}}$임을 보이자. $B = 1/A$이고 $A > 0$이므로 이는

$$A > 2N - \tfrac{1}{2} \iff \sqrt{N^2-1} > N - \tfrac{1}{2}.$$

와 동치이다. ($N \geq 2$이므로) 양변이 모두 양수이므로 제곱할 수 있다.

$$N^2 - 1 > N^2 - N + \tfrac{1}{4} \iff N > \tfrac{5}{4},$$

$N \geq 2$이므로 이는 성립한다. 따라서 $0 < B < \left(2N - \frac{1}{2}\right)^{-1}$이고, (모든 값이 양수이므로) k제곱하면

$$0 < B^k < \left(2N - \tfrac{1}{2}\right)^{-k}.$$

이다.

3단계: **결론**. $A^k = S_k - B^k$이므로 A^k는 정수 S_k로부터 정확히 B^k만큼 떨어져 있다. A^k에 가장 가까운 정수는 S_k보다 멀지 않다. (실제로 $B^k < \frac{1}{2}$이므로 그 정수는 S_k이다.) 따라서

$$\left|A^k - (\text{가장 가까운 정수})\right| \leq B^k < \left(2N - \tfrac{1}{2}\right)^{-k},$$

이고, 이것이 증명하려던 결과이다.

검산

- 수치로 계산하면 $(5 + \sqrt{24})^4 \approx 9601.999896$이고, 이는 앞에서 구한 구간 안에 있으며 반올림하면 9601.9999이다.
- $N = 5$일 때 소문항 (ii)는 $(2N - \frac{1}{2})^{-1} = \frac{1}{9.5} = \frac{2}{19}$를 준다. 이는 소문항 (i)의 범위와 정확히 같다. 즉 소문항 (i)는 사실 $N = 5, k = 4$인 경우이다.
- $N = 2, k = 1$일 때: $2 + \sqrt{3} \approx 3.732$는 4로부터 약 0.268만큼 떨어져 있고 $(3.5)^{-1} \approx 0.286$이므로 범위가 성립한다. 컴퓨터로 N은 1000까지, k는 24까지 확인하였다.

흔한 실수

- 양변이 양수임을 밝히지 않고 $\sqrt{N^2 - 1} > N - \frac{1}{2}$를 제곱하는 것.
- $a^4 \approx 9602.0000$이라고 쓰는 것: 이 값은 9602보다 0.0001에서 0.00015 사이만큼 **작으며**, 이 차이는 소수점 아래 넷째 자리를 바꾸기에 충분하다.
- $N = 1$인 경우가 이유가 있어서 제외되었음을 잊는 것: 이때는 $B = 1$이 되어 논증이 무너진다.

STEP 너머

$5 + \sqrt{24}$와 같은 수는 환(ring) $\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$의 단원(unit)이다. 즉 같은 꼴의 역원 $5 - \sqrt{24}$를 가지며, 그 거듭제곱들은 펠 방정식(Pell equation) $x^2 - 24y^2 = 1$의 모든 해를 준다. 이러한

단원의 거듭제곱은 점점 더 정수에 가까워지며, 이것은 거듭제곱이 이와 같이 정수에 가까워지는 성질을 갖는 피조 수(Pisot number) 이론으로 가는 한 가지 길이다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 펠 방정식과 연분수(continued fraction)를 아름답게 다룬다.

풀이

STEP II 2006, 문제 4

순수수학 • 치환적분

> **STEP II 2006, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/06-s2-q4

핵심 아이디어

치환(substitution) $x = \pi - t$를 하면 $\sin x$는 그대로이지만 인수 x는 $\pi - t$로 바뀐다. 따라서 적분이 우변에 다시 나타나고, 방정식을 풀듯이 그 적분을 구할 수 있다. 이렇게 하면 다루기 까다로운 인수 x가 완전히 사라진다. 그 뒤로는 문제에 나오는 모든 적분이 $\sin x$의 함수에 $\sin x$(또는 $\cos x$)를 곱한 꼴이 되므로, $u = \cos x$ 또는 $u = \sin x$로 치환하면 마무리된다. 진짜 핵심은 소문항 (ii)와 (iii)을 항등식(identity)이 적용되는 꼴로 바꾸는 방법을 알아차리는 데 있다.

풀이

항등식

$I = \int_0^{\pi} x\, f(\sin x)\, \mathrm{d}x$라 하자. $x = \pi - t$로 놓으면 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$이고, $x = 0$일 때 $t = \pi$, $x = \pi$일 때 $t = 0$이다. $\sin(\pi - t) = \sin t$이므로

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi}^{0} (\pi - t)\, f(\sin t)\, (-\mathrm{d}t) = \int_0^{\pi} (\pi - t)\, f(\sin t)\, \mathrm{d}t \\ &= \pi \int_0^{\pi} f(\sin t)\, \mathrm{d}t - \int_0^{\pi} t\, f(\sin t)\, \mathrm{d}t = \pi \int_0^{\pi} f(\sin x)\, \mathrm{d}x - I \end{aligned}$$

이다. 적분변수의 이름은 상관없기 때문이다. 따라서 $2I = \pi \int_0^{\pi} f(\sin x)\, \mathrm{d}x$이고, 이것이 구하려던 결과이다.

$$\int_0^{\pi} x\, f(\sin x)\, \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\pi \int_0^{\pi} f(\sin x)\, \mathrm{d}x.$$

소문항 (i)

여기서는 $f(\sin x) = \dfrac{\sin x}{3+\sin^2 x}$이므로, 항등식에 의해

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\pi J, \qquad J = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

이다. $3+\sin^2 x = 4-\cos^2 x$로 쓰고 $u = \cos x$, $\mathrm{d}u = -\sin x\,\mathrm{d}x$로 치환하면 u는 1에서 -1까지 움직이므로

$$J = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}u}{4-u^2}.$$

이다. 부분분수(partial fractions)로 분해하면 $\dfrac{1}{4-u^2} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2-u} + \dfrac{1}{2+u}\right)$이므로

$$J = \frac{1}{4}\left[\ln\frac{2+u}{2-u}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4}\left(\ln 3 - \ln\tfrac{1}{3}\right) = \tfrac{1}{2}\ln 3.$$

이다. ($[-1,1]$에서 $2\pm u$는 모두 양수이므로 절댓값 기호는 필요 없다.) 따라서

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\ln 3.$$

이다.

소문항 (ii)

> **생각해 보기** 항등식은 $[0,\pi]$에서만 성립한다. $[\pi,2\pi]$는 어떻게 다룰까?

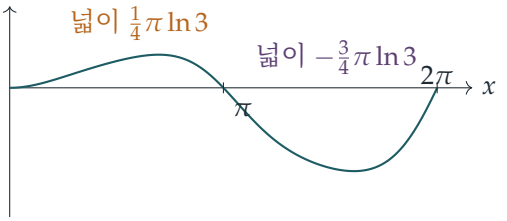
적분 구간을 π에서 나누고, 두 번째 부분은 $x = \pi + t$로 놓아 $[0,\pi]$로 옮긴다. 그러면 $\sin x = -\sin t$이고 $\sin^2 x = \sin^2 t$이므로

$$\begin{aligned}\int_{\pi}^{2\pi} \frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x &= -\int_0^{\pi} \frac{(\pi+t)\sin t}{3+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = -\pi J - \int_0^{\pi} \frac{t\sin t}{3+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t \\ &= -\tfrac{1}{2}\pi\ln 3 - \tfrac{1}{4}\pi\ln 3 = -\tfrac{3}{4}\pi\ln 3,\end{aligned}$$

이다. 여기서 $J = \frac{1}{2}\ln 3$과 소문항 (i)의 결과를 썼다. 소문항 (i)에서 구한 $[0,\pi]$에서의 적분을 더하면

$$\int_0^{2\pi} \frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\ln 3 - \frac{3\pi}{4}\ln 3 = -\frac{\pi}{2}\ln 3.$$

이다. 아래 그림을 보면 답이 음수인 이유를 알 수 있다. 피적분함수(integrand)는 두 절반에서 모양이 같지만, $[\pi,2\pi]$에서는 더 큰 x 값이 곱해진다.



소문항 (iii)

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$이고 $[0,\pi]$에서 $\sin x \geq 0$이므로

$$|\sin 2x| = 2\sin x\,|\cos x| = 2\sin x\sqrt{1-\sin^2 x},$$

이고, 이것은 $\sin x$만의 함수이다.

> **생각해 보기** 여기서 $\cos x$가 아니라 $|\cos x|$가 나타나는 것이 왜 중요할까?

$[0,\pi]$에서 $\cos x$는 $\sin x$의 함수가 아니다. $\sin(\pi - x) = \sin x$인 반면 $\cos(\pi - x) = -\cos x$이기 때문이다. 하지만 $|\cos x| = \sqrt{1-\sin^2 x}$는 $\sin x$의 함수이므로, 절댓값(modulus) 덕분에 바로 항등식을 쓸 수 있다.

$$\int_0^\pi \frac{x|\sin 2x|}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\pi\int_0^\pi \frac{|\sin 2x|}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

새 피적분함수는 $x \mapsto \pi - x$로 바꾸어도 변하지 않으므로, $[0,\pi]$에서의 적분은 $[0,\frac{1}{2}\pi]$에서의 적분의 두 배이다. 이 구간에서는 $\cos x \geq 0$이므로 절댓값을 없앨 수 있다.

$$\int_0^\pi \frac{|\sin 2x|}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2} \frac{2\sin x\cos x}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = 2\Big[\ln(3+\sin^2 x)\Big]_0^{\pi/2} = 2\ln\tfrac{4}{3},$$

분자가 분모의 도함수이기 때문이다. 따라서

$$\int_0^\pi \frac{x|\sin 2x|}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\pi\cdot 2\ln\tfrac{4}{3} = \pi\ln\frac{4}{3}.$$

이다.

검산

- 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 (i)은 0.86285, (ii)는 −1.72570, (iii)은 0.90378이 나오며, 각각 $\frac{1}{4}\pi\ln 3$, $-\frac{1}{2}\pi\ln 3$, $\pi\ln\frac{4}{3}$과 일치한다.
- (ii)의 답은 정확히 (i)의 답의 −2배이다. π에서 구간을 나누어 보면 그 이유가 설명된다. 두 절반은 각각 $\frac{1}{4}\pi\ln 3$과 $-\frac{3}{4}\pi\ln 3$이다.
- 항등식을 빠르게 확인해 보자. $f \equiv 1$이면 양변이 모두 $\frac{1}{2}\pi^2$이다.

흔한 실수

- $[0,2\pi]$에서 비슷한 "항등식"을 쓰는 것. 그러면 $\pi\int_0^{2\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x = 0$이 나온다. 증명에는 $\sin(2\pi - t) = \sin t$가 필요한데, 이것은 거짓이다.
- (iii)에서 $[0,\pi]$ 전체에 걸쳐 $|\sin 2x| = 2\sin x\cos x$로 쓰는 것. 그러면 안쪽 적분이 0이 된다.

STEP 너머

적분이 다시 나타나게 하여 그 적분을 구하는 기법과 $x \mapsto \pi - x$ 같은 대칭성을 이용하는 방법은 해석학(analysis)에서, 그리고 초등함수로 된 원시함수(antiderivative)가 없는 정적분(definite integral)을 계산할 때 쓰는 표준적인 도구이다. 이러한 방법은 푸리에 급수(Fourier series)로 이어지는데, 여기서는 한 주기에 걸친 x와 삼각함수의 곱의 적분이 기본 대상이다. 이런 방식의 논증을 더 알고 싶다면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*를, 적분의 엄밀한 이론은 Abbott, *Understanding Analysis*를 보라.

풀이

STEP II 2006, 문제 5

순수수학 • 바닥 함수와 넓이

> **STEP II 2006, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/06-s2-q5

핵심 아이디어

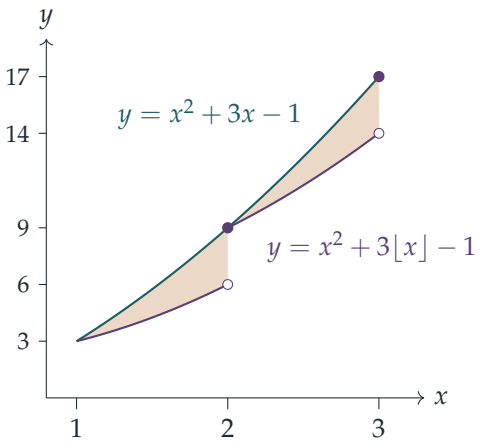
연속한 두 정수 사이, 즉 $k \le x < k+1$에서 바닥 함수(floor function)는 상수이고 그 값은 k이다. 따라서 이러한 각 단위 구간 위에서 들쭉날쭉한 곡선은 평범하고 매끄러운 곡선이 되며, 넓이는 단위 구간마다 하나씩 있는 띠들의 합으로 나뉜다. $[k, k+1]$ 위의 띠의 넓이를 k의 함수로 구한 다음, $k = 1, 2, \ldots, n-1$에 대한 띠들을 모두 더한다.

풀이

이 풀이 전체에서 $f(x) = x^2 + 3x - 1$이라 하자. $1 \le x \le 3$에서 이 함수는 $f(1) = 3$에서 $f(2) = 9$를 거쳐 $f(3) = 17$까지 증가하며, $x \ge 1$인 모든 x에서 $f'(x) = 2x + 3 > 0$이므로 증가함수(increasing function)이다.

소문항 (i)

두 번째 곡선은 $y = x^2 + 3\lfloor x \rfloor - 1$이다. $[1, 2)$에서는 $\lfloor x \rfloor = 1$이므로 $y = x^2 + 2$이고, 3에서 6을 향해 증가한다. $[2, 3)$에서는 $\lfloor x \rfloor = 2$이므로 $y = x^2 + 5$이고, 9에서 14를 향해 증가한다. 그리고 $x = 3$에서 그 값은 17이다. 각 조각은 포물선(parabola) $y = f(x)$를 아래로 평행이동한 것이며, 두 곡선은 모든 정수에서 만난다.



두 곡선 사이의 수직 간격은

$$(x^2 + 3x - 1) - (x^2 + 3\lfloor x \rfloor - 1) = 3(x - \lfloor x \rfloor) \geq 0,$$

이므로 첫 번째 곡선은 결코 두 번째 곡선보다 아래에 있지 않다. k가 정수일 때 구간 $[k, k+1]$에서 간격은 한 점 $x = k+1$을 제외하면 $3(x-k)$이고, 이 한 점은 적분(integral)에 영향을 주지 않는다. 따라서 $[k, k+1]$ 위의 띠의 넓이는

$$\int_k^{k+1} 3(x-k)\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{3}{2}(x-k)^2\right]_k^{k+1} = \tfrac{3}{2},$$

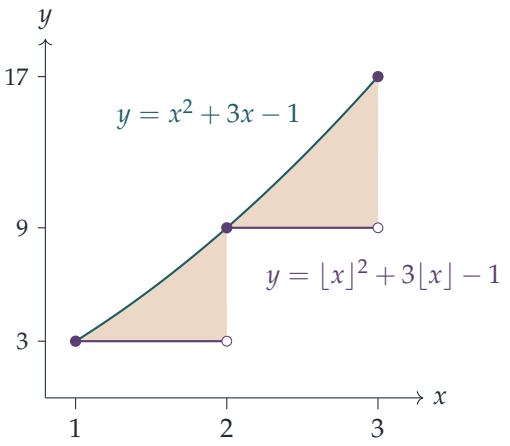
로, 모든 k에 대해 같다. 구간 $1 \leq x \leq n$은 $n-1$개의 단위 구간 $[1,2], [2,3], \ldots, [n-1, n]$으로 이루어지므로, 두 곡선 사이의 넓이는

$$\tfrac{3}{2}(n-1).$$

이다.

소문항 (ii)

이번에는 두 번째 곡선이 $y = f(\lfloor x \rfloor)$로, 계단 함수(step function)이다. $[1,2)$에서 $y = f(1) = 3$, $[2,3)$에서 $y = f(2) = 9$이고, $x = 3$에서 $y = f(3) = 17$이다. 각 계단은 정수에서 포물선 위의 점에서 시작하여 오른쪽으로 수평하게 뻗는다.



? 생각해 보기 어느 곡선이 위에 있으며, 계속 위에 있는가?

$x \geq 1$에서 f는 증가하고 $\lfloor x \rfloor \leq x$이므로, $1 \leq x \leq n$ 전체에서 $f(\lfloor x \rfloor) \leq f(x)$이다. 따라서 포물선이 항상 위에 있고, 넓이는 단순히 $f(x) - f(\lfloor x \rfloor)$의 적분이며 부호가 바뀌는 것을 걱정할 필요가 없다.

$k \geq 1$이 정수일 때 $[k, k+1]$에서 계단의 높이는 $f(k)$이다(여기서도 한 점 $x = k+1$은 무시한다). $0 \leq t \leq 1$로 두고 $x = k + t$를 대입하면

$$\begin{aligned} f(k+t) - f(k) &= (k+t)^2 + 3(k+t) - 1 - (k^2 + 3k - 1) \\ &= 2kt + t^2 + 3t, \end{aligned}$$

이므로 $[k, k+1]$ 위의 띠의 넓이는

$$\int_0^1 (2kt + t^2 + 3t)\,\mathrm{d}t = k + \tfrac{1}{3} + \tfrac{3}{2} = k + \tfrac{11}{6}.$$

이다. 소문항 (i)과 달리 이번에는 포물선이 점점 가팔라지므로 띠의 넓이가 k와 함께 커진다. $k = 1, 2, \ldots, n-1$에 대한 띠들을 더하고 $\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{2}n(n-1)$을 이용하면

$$\begin{aligned} \text{넓이} &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(k + \tfrac{11}{6}\right) = \tfrac{1}{2}n(n-1) + \tfrac{11}{6}(n-1) \\ &= \tfrac{1}{6}(n-1)(3n+11), \end{aligned}$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

검산

▶ $n = 1$이면 영역이 전혀 없고, 두 답 모두 0이 된다.

- $n = 2$이면 소문항 (ii)의 답은 $\frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 17 = \frac{17}{6}$이다. 직접 계산하면 $\int_1^2 (x^2 + 3x - 4)\,\mathrm{d}x = \frac{7}{3} + \frac{9}{2} - 4 = \frac{17}{6}$이다.
- $n = 2, \ldots, 7$에 대해 간격을 중점 규칙(midpoint rule)으로 수치 적분한 결과는 소수점 아래 넷째 자리까지 $\frac{3}{2}(n-1)$ 및 $\frac{1}{6}(n-1)(3n+11)$과 일치했다. 예를 들어 $n = 4$이면 소문항 (ii)에서 11.5가 나온다.

흔한 실수

- 띠를 $n-1$개가 아니라 n개로 세는 실수. 구간 $[1, n]$에는 단위 구간이 $n-1$개뿐이다.
- 소문항 (ii)에서 k 대신 $\int_0^1 2kt\,\mathrm{d}t = 2k$로 계산하는 실수.
- 먼저 정수에서 구간을 나누지 않고, 구간 전체에서 $\lfloor x \rfloor$를 x인 것처럼 적분하는(또는 아예 무시하는) 실수.

STEP 너머

소문항 (ii)는 곡선 아래의 넓이를 그 아래에 놓인 직사각형 "계단"의 넓이와 비교하는데, 이것은 정확히 계단 폭이 1인 리만(Riemann) 하합(lower Riemann sum)이다. 대학의 첫 해석학(analysis) 강의에서 적분은 계단이 좁아짐에 따라 이러한 하합과 상합(upper sum)을 맞붙여 조여 가는 방식으로 **정의**되며, $\lfloor x \rfloor$처럼 불연속 점프가 있는 함수도 그 점프들이 고립된 점이므로 여전히 적분 가능(integrable)하다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 리만 적분을 매우 읽기 쉽게 설명한다.

풀이

STEP II 2006, 문제 7

순수수학 • 타원의 접선

> **STEP II 2006, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/06-s2-q7

핵심 아이디어

접선(tangent)은 "x^2을 xx_0으로, y^2을 yy_0으로 바꾸는" 공식을 쓰면 가장 빨리 구할 수 있고, 음함수 미분(implicit differentiation)으로 구해도 된다. 작도 부분은 Q의 좌표와 PQ의 방정식을 구한 다음, 일반적인 점에서의 접선과 비교하면 된다. $\tan(\alpha/2) = k$라는 표현은 강력한 힌트이다. 이는 $\cot\alpha$와 $\operatorname{cosec}\alpha$를 $t = \tan(\alpha/2)$로 나타내라는 뜻이다.

풀이

접선

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$을 x에 대하여 음함수 미분하면

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0, \qquad \text{따라서} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{b^2x}{a^2y}.$$

$\sin\alpha \neq 0$일 때(그렇지 않으면 접선이 수직선이 되어 주어진 방정식이 의미가 없다) 점 $(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$에서의 기울기(gradient)는

$$-\frac{b^2a\cos\alpha}{a^2b\sin\alpha} = -\frac{b\cot\alpha}{a}.$$

따라서 접선은

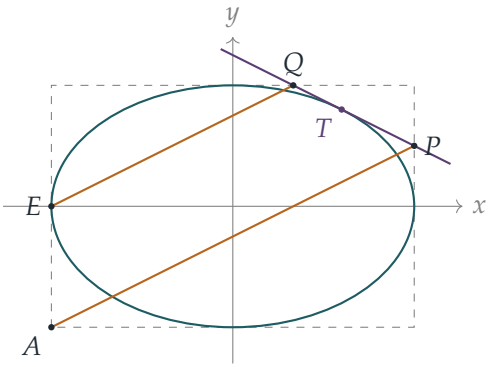
$$y - b\sin\alpha = -\frac{b\cot\alpha}{a}(x - a\cos\alpha)$$

$$\implies \quad y = -\frac{b\cot\alpha}{a}x + b\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} + b\sin\alpha = -\frac{b\cot\alpha}{a}x + \frac{b(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}{\sin\alpha},$$

즉 $y = -\dfrac{b\cot\alpha}{a}x + b\operatorname{cosec}\alpha$이고, 이것이 구하려던 식이다.

작도

다음은 $a = 3, b = 2, k = \frac{1}{2}$일 때의 그림이다. 타원(ellipse)은 꼭짓점이 $(\pm a, \pm b)$인 직사각형 안에 들어 있다. A는 왼쪽 아래 꼭짓점, E는 왼쪽 변의 중점이고, P는 오른쪽 변 위에, Q는 위쪽 변 위에 있다.



직선 AP는 $(-a, -b)$와 (a, kb)를 잇므로 기울기는

$$\frac{kb-(-b)}{a-(-a)} = \frac{(1+k)b}{2a}.$$

$E(-a, 0)$을 지나고 이에 평행한 직선은 $y = \dfrac{(1+k)b}{2a}(x+a)$이다. $y = b$를 대입하면 $x + a = \dfrac{2a}{1+k}$이므로

$$Q = \left(\frac{a(1-k)}{1+k},\ b\right).$$

이제 PQ의 기울기는

$$\frac{b-kb}{\dfrac{a(1-k)}{1+k} - a} = \frac{b(1-k)}{\dfrac{-2ak}{1+k}} = -\frac{b(1-k^2)}{2ak},$$

이고, $k \neq 0$이므로 문제없다. 점 $P(a, kb)$를 이용하면 직선 PQ는

$$y = kb - \frac{b(1-k^2)}{2ak}(x-a) = -\frac{b(1-k^2)}{2ak}\,x + \frac{2k^2b + b(1-k^2)}{2k},$$

따라서

$$PQ: \qquad y = -\frac{b}{a}\cdot\frac{1-k^2}{2k}\,x + b\cdot\frac{1+k^2}{2k}.$$

생각해 보기 이것이 타원 위 어떤 점에서의 접선임을 어떻게 알아볼 수 있을까?

위에서 구한 $(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$에서의 접선과 비교하자. $\cot\alpha = \dfrac{1-k^2}{2k}$이고 $\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1+k^2}{2k}$인 α가 필요하다. 이는 바로 t-공식이다. $t = \tan(\alpha/2)$라 하면

$$\tan\alpha = \frac{2t}{1-t^2}, \qquad \sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \text{따라서} \qquad \cot\alpha = \frac{1-t^2}{2t}, \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1+t^2}{2t}.$$

$0 < k < 1$이므로 $\alpha = 2\arctan k$로 잡을 수 있고, 이 값은 $(0, \frac{\pi}{2})$에 속하므로 $\sin\alpha \neq 0$이며 $\tan(\alpha/2) = k$이다. $t = k$로 두면 두 식이 PQ의 기울기와 절편(intercept)에 모두 일치한다. 따라서 PQ는 직선 $y = -\frac{b\cot\alpha}{a}x + b\operatorname{cosec}\alpha$이고, 이는 $\tan(\alpha/2) = k$인 점 $(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$에서 타원에 그은 접선이다. 이것이 보여야 할 내용이었다.

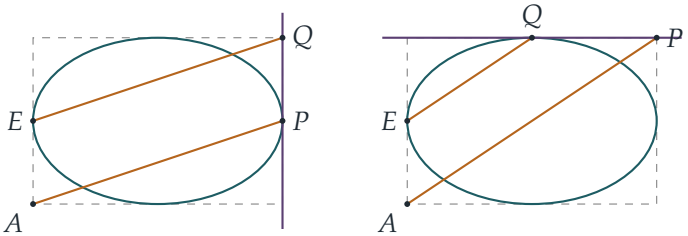
좌표로 나타내면 접점은 $T = \left(\dfrac{a(1-k^2)}{1+k^2}, \dfrac{2kb}{1+k^2}\right)$이다.

$k = 0$과 $k = 1$인 경우

위의 계산에서는 k로 나누었고, 접선 공식에는 $\sin\alpha \neq 0$이 필요하므로, 이 경우에는 작도를 직접 다시 해 본다.

$k = 0$. 이때 $P = (a, 0)$이고 AP의 기울기는 $\frac{b}{2a}$이다. E를 지나고 이에 평행한 직선은 $y = \frac{b}{2a}(x + a)$이고, 이 직선은 $y = b$와 $x = a$에서 만나므로 $Q = (a, b)$이다. 그러면 PQ는 수직선 $x = a$이다. 이것은 $\alpha = 0$인 점 $(a, 0)$에서 타원에 그은 접선이고, $\tan(0/2) = 0 = k$이다. 따라서 접선을 $y = mx + c$ 꼴로 쓸 수는 없지만 결과는 **여전히** 성립한다.

$k = 1$. 이때 $P = (a, b)$이고 AP는 직사각형의 대각선으로, 기울기는 $\frac{b}{a}$이다. E를 지나고 이에 평행한 직선은 $y = \frac{b}{a}(x + a)$이고, 이 직선은 $y = b$와 $x = 0$에서 만나므로 $Q = (0, b)$이다. 그러면 PQ는 수평선 $y = b$이고, 이는 타원의 맨 위 점 $(0, b)$에서의 접선이다. 이 점은 $\alpha = \frac{\pi}{2}$인 점이고 $\tan(\pi/4) = 1 = k$이다. 따라서 이 경우에도 결과가 성립한다(공식도 통한다. $\cot\frac{\pi}{2} = 0$이고 $\operatorname{cosec}\frac{\pi}{2} = 1$이므로 $y = b$가 된다).



검산

- $a = 3, b = 2, k = \frac{1}{2}$로 잡자. 그러면 $Q = (1, 2)$이고 PQ는 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$이다. 또 $\tan\alpha = \frac{4}{3}$이므로 $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$이고 $T = (\frac{9}{5}, \frac{8}{5})$이다. 이 점은 PQ 위에 있고$(-\frac{9}{10} + \frac{5}{2} = \frac{8}{5})$, 그 점에서의 기울기는 $-\frac{b^2x}{a^2y} = -\frac{4 \cdot 9/5}{9 \cdot 8/5} = -\frac{1}{2}$이다.
- PQ를 타원의 방정식에 대입하면 중근(repeated root)을 갖는 이차방정식이 나와야 한다. 이것과 Q, PQ에 대한 공식을 무작위로 고른 a, b, k 천 개에 대하여 수치적으로 확인하였다.
- $k \to 0^+$일 때 $T \to (a, 0)$이고, $k \to 1^-$일 때 $T \to (0, b)$이다. 이는 두 끝 경우와 일치한다.

흔한 실수

- PQ의 기울기에서 부호를 틀리는 것. 분모 $\frac{a(1-k)}{1+k} - a$는 음수이다.
- $\operatorname{cosec} 0$이 정의되지 않으므로 $k = 0$에서 결과가 성립하지 않는다고 말하는 것. 공식은 무너지지만 기하학적 사실은 그대로이다. PQ는 여전히 $\alpha = 0$에서의 접선이다.

STEP 너머

치환 $t = \tan(\alpha/2)$는 타원의 유리 매개화(rational parametrisation) $(a\frac{1-t^2}{1+t^2}, b\frac{2t}{1+t^2})$이다. 이는 삼각함수의 적분을 유리함수의 적분으로 바꾸고, 모든 피타고라스 세 쌍(Pythagorean triples)을 찾아내는 것과 같은 아이디어이다. 모든 이차곡선(conic)은 이처럼 유리 매개화할 수 있으며, 여기서처럼 평행선과 교점만으로 이루어지는 작도는 사영기하학(projective geometry)의 주제이다. 이것이 정수론(number theory)과 어떻게 연결되는지 처음 살펴보고 싶다면 Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)을 읽어 보자.

풀이

STEP II 2006, 문제 8

순수수학 • 직선의 벡터 기하

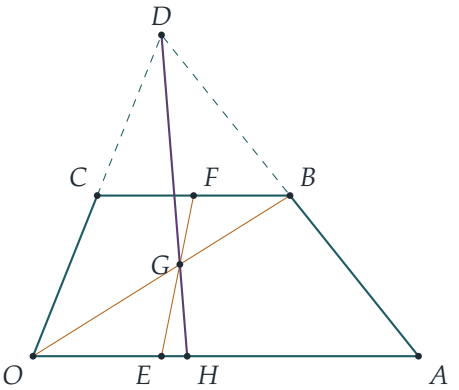
STEP II 2006, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/06-s2-q8

핵심 아이디어

이 문제에 나오는 모든 점은 두 직선의 교점으로 정의되므로, 문제 전체가 하나의 정해진 절차로 풀린다. 각 직선을 첫 번째 소문항에서 구한 꼴로 나타내고, 두 식을 같다고 놓은 다음, $\mathbf{a}$와 $\mathbf{c}$의 계수를 비교(comparing coefficients)한다. 이렇게 비교해도 되는 까닭은 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{c}$가 평행(parallel)하지 않아서, 어떤 벡터(vector)를 $p\mathbf{a} + q\mathbf{c}$ 꼴로 나타내는 방법이 오직 한 가지뿐이기 때문이다.



풀이

직선의 방정식

위치벡터(position vector)가 $\mathbf{x}$와 $\mathbf{y}$인 두 점을 지나는 직선은 $\mathbf{x}$를 지나고 방향이 $\mathbf{y}-\mathbf{x}$이므로, 이 직선 위의 점은

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} + \alpha(\mathbf{y}-\mathbf{x}) = (1-\alpha)\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y},$$

이고, 여기서 α는 모든 실수를 움직인다. $\alpha = 0$이면 $\mathbf{x}$, $\alpha = 1$이면 $\mathbf{y}$가 되고, 두 계수의 합은 항상 1임에 주목하자. 이것이 구하는 꼴이다.

이 풀이 전체에서 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{c}$는 평행하지 않다(평행하다면 O, A, C가 한 직선 위(collinear)에 있게 되어 사다리꼴(trapezium)이 만들어지지 않는다). 따라서 $p\mathbf{a} + q\mathbf{c} = p'\mathbf{a} + q'\mathbf{c}$이면 $p = p'$이고 $q = q'$이다.

소문항 (i)

CB가 OA에 평행하므로 벡터 $\overrightarrow{CB}$는 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$의 스칼라배(scalar multiple)이다. 이를 $\lambda\mathbf{a}$라 하자. 그러면

$$\mathbf{b} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} = \mathbf{c} + \lambda\mathbf{a}.$$

$OABC$를 차례로 돌면 $\overrightarrow{CB}$는 $\overrightarrow{OA}$와 같은 방향을 향하므로 $\lambda > 0$이고, $CB < OA$이므로 $\lambda < 1$이다. 따라서 $0 < \lambda < 1$이며, 특히 $\lambda \neq 1$인데, 이 사실은 뒤에서 필요하다.

소문항 (ii)

E와 F. 이 두 점은 비율에서 곧바로 얻는다.

$$\mathbf{e} = \tfrac{1}{3}\mathbf{a}, \qquad \mathbf{f} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{c}+\mathbf{b}) = \tfrac{1}{2}\lambda\mathbf{a} + \mathbf{c}.$$

D. 직선 OC 위의 점은 $\mu\mathbf{c}$이다. 직선 AB 위의 점은

$$(1-\beta)\mathbf{a} + \beta(\lambda\mathbf{a} + \mathbf{c}) = (1 - \beta + \beta\lambda)\mathbf{a} + \beta\mathbf{c}.$$

D에서 이 둘이 일치한다. 계수를 비교하면 $\beta = \mu$이고 $1 - \beta(1-\lambda) = 0$이므로 $\beta = \dfrac{1}{1-\lambda}$이다($\lambda \neq 1$이므로 문제없다). 따라서

$$\mathbf{d} = \frac{1}{1-\lambda}\,\mathbf{c}.$$

$\frac{1}{1-\lambda} > 1$이므로, D는 당연히 그래야 하듯 OC를 C 너머로 연장한 직선 위에 있다.

G. OB 위의 점은 $t(\lambda\mathbf{a} + \mathbf{c})$이다. EF 위의 점은

$$(1-s)\tfrac{1}{3}\mathbf{a} + s\left(\tfrac{1}{2}\lambda\mathbf{a} + \mathbf{c}\right) = \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3}s + \tfrac{1}{2}\lambda s\right)\mathbf{a} + s\mathbf{c}.$$

$\mathbf{c}$의 계수를 비교하면 $s = t$이고, 이어서 $\mathbf{a}$의 계수를 비교하면

$$\lambda t = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3}t + \tfrac{1}{2}\lambda t \quad\Longrightarrow\quad t\left(\frac{3\lambda+2}{6}\right) = \frac{1}{3} \quad\Longrightarrow\quad t = \frac{2}{3\lambda+2}.$$

따라서

$$\mathbf{g} = \frac{2}{3\lambda+2}(\lambda\mathbf{a}+\mathbf{c}).$$

H. 직선 DG 위의 점은

$$(1-k)\mathbf{d}+k\mathbf{g} = \frac{2k\lambda}{3\lambda+2}\mathbf{a} + \Big(\frac{1-k}{1-\lambda}+\frac{2k}{3\lambda+2}\Big)\mathbf{c}.$$

? **생각해 보기** 이 직선 위의 점 가운데 OA 위에 있는 점은 어떻게 골라낼까?

직선 OA 위의 점은 $\mathbf{a}$만의 배수이므로 $\mathbf{c}$의 계수가 사라져야 한다. 양변에 $(1-\lambda)(3\lambda+2)$를 곱하면

$$\begin{aligned}(1-k)(3\lambda+2)+2k(1-\lambda) &= 0\\ (3\lambda+2)-k\big(3\lambda+2-2+2\lambda\big) &= 0\\ k &= \frac{3\lambda+2}{5\lambda}.\end{aligned}$$

그러면 $\mathbf{a}$의 계수는

$$\frac{2\lambda}{3\lambda+2}\cdot\frac{3\lambda+2}{5\lambda} = \frac{2}{5}, \qquad \text{따라서} \qquad \mathbf{h} = \tfrac{2}{5}\,\mathbf{a}.$$

답을 모으면 다음과 같다.

$$\mathbf{d} = \frac{\mathbf{c}}{1-\lambda}, \quad \mathbf{e} = \tfrac{1}{3}\mathbf{a}, \quad \mathbf{f} = \tfrac{1}{2}\lambda\mathbf{a}+\mathbf{c}, \quad \mathbf{g} = \frac{2(\lambda\mathbf{a}+\mathbf{c})}{3\lambda+2}, \quad \mathbf{h} = \tfrac{2}{5}\mathbf{a}.$$

$OH = \frac{2}{5}OA$이고 $HA = \frac{3}{5}OA$이므로

$$OH : HA = 2:3,$$

이며, 이는 사다리꼴의 모양과 상관없이 성립한다.

검산

- $\mathbf{a} = (6,0)$, $\mathbf{c} = (1,2.5)$, $\lambda = \frac{1}{2}$로 잡자(그림의 경우). 공식에 따르면 $D = (2,5)$, $G \approx (2.286, 1.429)$, $H = (2.4,0)$이다. D에서 G까지의 기울기는 $-3.571/0.286 = -12.5$이고, D에서 H까지의 기울기 $-5/0.4$도 같은 값이다. 따라서 D, G, H는 실제로 한 직선 위에 있다.
- H에 대한 답은 λ, $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$에 의존하지 않는다. 컴퓨터로 무작위 사다리꼴 2000개에 대해 전체 작도를 정확한 유리수 산술(rational arithmetic)로 반복해 보았더니 매번 $OH : HA = 2:3$이 나왔다.
- $\lambda \to 1$이면 변 OC와 AB가 평행해지고, 당연히 그래야 하듯 $\mathbf{d} = \mathbf{c}/(1-\lambda)$는 무한히 멀어진다.

흔한 실수

- 서로 다른 두 직선에 같은 매개변수(parameter) 문자를 쓰는 것. 두 식을 같다고 놓기 전에 각 직선마다 따로 매개변수를 두어야 한다.
- 계수를 비교하면서 왜 그래도 되는지 밝히지 않는 것. 계수 비교가 성립하는 것은 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{c}$가 평행하지 않기 때문이다.
- $\mathbf{b} = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{c}$라고 쓰는 것. $\mathbf{a}$에 평행한 것은 $\overrightarrow{AB}$가 아니라 $\overrightarrow{CB}$이다.

STEP 너머

답 2 : 3이 사다리꼴의 모양에 의존하지 않는 까닭은, 모든 단계에서 직선, 교점, 직선 위의 비율만을 사용하는데 아핀 변환(affine map, 선형 변환(linear map) 다음에 평행이동(translation)을 한 것)은 이것들을 모두 보존하기 때문이다. 따라서 사다리꼴을 다루기 편한 사다리꼴, 예를 들어 $OABC$에서 C가 O의 바로 위에 있는 사다리꼴로 옮긴 다음 거기서 계산해도 된다. 이것이 **아핀 기하학**(*affine geometry*)의 아이디어이며, 계수 꼴 $(1-\alpha)\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$는 무게중심 좌표(barycentric coordinates)의 출발점이다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 선형 변환과 좌표를 다루고, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에는 이런 유형의 벡터 기하 문제가 더 실려 있다.

풀이

STEP II 2006, 문제 9

역학 • 마찰과 넘어짐

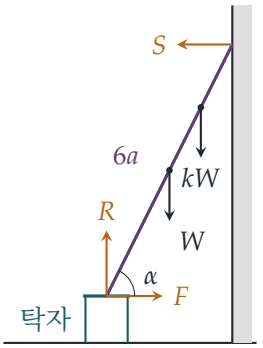
> **STEP II 2006, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/06-s2-q9

핵심 아이디어

사다리와 탁자를 사다리 아래 끝의 접촉으로 연결된 두 개의 별개의 물체로 다룬다. 사다리만 살펴보면 그 아래 끝에서의 수직항력(normal reaction)과 마찰력(friction)을 알 수 있고, 이 힘들은 페인트공이 얼마나 높이 올라가 있는지에 따라 달라진다. 그다음 뉴턴(Newton)의 제3법칙에 의해 크기는 같고 방향이 반대인 힘이 탁자에 작용한다. 탁자에 대해서는 두 문턱값을 비교한다. 하나는 탁자를 미끄러지게 하는 미는 힘이고, 다른 하나는 먼 쪽 다리에 대한 모멘트(moment)가 탁자 위에 실린 무게의 모멘트를 넘어서게 하는 미는 힘이다.

풀이

사다리는 균일한 막대, 페인트공은 질점, 벽은 매끄러운 면, 탁자는 윗면이 높이 a에 있는 강체로 모형화한다(탁자 윗면의 두께는 무시한다). $\alpha = \arctan 2$로 두면 $\tan\alpha = 2$, $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$이다. 페인트공이 사다리를 따라 아래 끝에서 거리 x인 곳에 서 있다고 하자. 여기서 $0 \le x \le 6a$이다.



소문항 (i)

사다리에 작용하는 힘은 다음과 같다. 사다리의 중점에 작용하는 무게 W, 페인트공의 무게 kW, 매끄러운 벽이 주는 수평 방향의 수직항력 S, 그리고 아래 끝에서 위쪽으로 작용하는 수직항력 R과 벽 쪽으로 작용하는 마찰력 F이다. (마찰력은 S와 평형을 이룰 수 있는 유일한 수평 방향의 힘이므로 반드시 벽 쪽을 향해야 한다.)

연직 방향과 수평 방향으로 힘을 분해하면

$$R = (k+1)W, \qquad F = S.$$

사다리의 아래 끝에 대한 모멘트를 생각하자. 사다리의 위 끝은 아래 끝보다 $6a\sin\alpha$만큼 높고, 두 무게는 각각 수평 거리 $3a\cos\alpha$와 $x\cos\alpha$인 곳에 작용하므로

$$S \cdot 6a\sin\alpha = W \cdot 3a\cos\alpha + kW \cdot x\cos\alpha.$$

양변을 $6a\sin\alpha$로 나누고 $\cot\alpha = \frac{1}{2}$를 이용하면

$$F = S = \frac{W}{12}\left(3 + \frac{kx}{a}\right).$$

이 값은 x에 대해 증가하므로, 페인트공이 맨 꼭대기 $x = 6a$에 있을 때 가장 큰 마찰력이 필요하다.

$$F_{\max} = \frac{(3+6k)W}{12} = \frac{(2k+1)W}{4}.$$

얻을 수 있는 최대 마찰력은

$$\tfrac{1}{2}R = \frac{(k+1)W}{2} = \frac{(2k+2)W}{4}.$$

$2k+1 < 2k+2$이므로 페인트공의 모든 위치와 모든 k에 대해 $F \le F_{\max} < \frac{1}{2}R$이다. 따라서 탁자가 고정되어 있으면 페인트공이 아무리 높이 서 있어도 사다리는 결코 미끄러지지 않는다. 이것이 보이려던 것이다.

소문항 (ii)

이제 $k = 9$이므로 $R = 10W$이고

$$F = \frac{W}{4}\left(1 + \frac{3x}{a}\right),$$

이 값은 $x = 0$일 때의 $\frac{1}{4}W$에서 $x = 6a$일 때의 $\frac{19}{4}W$까지 증가한다. 소문항 (i)의 결과가 여전히 성립하므로 사다리는 탁자 윗면 위에서 미끄러지지 않는다.

뉴턴의 제3법칙에 의해 사다리는 탁자 윗면의 중심을 아래쪽으로 크기 $R = 10W$인 힘으로 누르고, 벽에서 **멀어지는** 방향으로 수평한 힘 F로 민다. 탁자에는 그 중심에 자신의 무게 $2W$도 작용하며, 지면은 탁자의 다리에 수직항력과 마찰력을 작용한다.

> **생각해 보기** 탁자 윗면의 중심을 수평으로 미는 힘이 어떻게 탁자를 기울어지게 할 수 있을까?

미는 힘 F는 높이 a에서 작용하므로, 벽에서 먼 쪽 두 다리의 아래 끝에 대해 모멘트를 가진다. 탁자가 기울어진다면 그 두 다리의 발끝을 잇는 직선을 축으로 회전한다. 다리는 한 변의 길이가 $\frac{1}{2}a$인 정사각형의 꼭짓점에 있으므로, 이 직선은 탁자의 중심에서 수평 거리 $\frac{1}{4}a$만큼 떨어져 있다.

기울어짐. 먼 쪽 다리의 발끝을 잇는 직선에 대해, 먼 쪽 다리에 작용하는 지면의 힘은 모멘트를 가지지 않으며, 어느 다리에 작용하는 지면의 마찰력도 (지면 높이에서 작용하므로) 모멘트를 가지지 않는다. 중심에 아래쪽으로 작용하는 힘 $10W + 2W = 12W$는 복원 모멘트 $12W \cdot \frac{1}{4}a = 3Wa$를 가진다. 미는 힘 F는 탁자를 넘어뜨리려는 모멘트 Fa를 가진다. 이 직선에 대한 모멘트를 생각하면, 벽에 가까운 쪽 두 다리에 작용하는 수직항력의 합 N_1은 다음을 만족한다.

$$N_1 \cdot \tfrac{1}{2}a = 3Wa - Fa,$$

따라서 $N_1 \geq 0$일 필요충분조건은 $F \leq 3W$이다. 탁자가 막 기울어지려는 순간은 $N_1 = 0$일 때, 즉

$$\frac{W}{4}\left(1 + \frac{3x}{a}\right) = 3W \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{11a}{3}.$$

미끄러짐. 탁자에 대해 연직 방향으로 힘을 분해하면 지면이 주는 수직항력의 합은 $12W$이므로, 얻을 수 있는 최대 마찰력의 합은 $\frac{1}{3} \cdot 12W = 4W$이다. 수평 방향으로 분해하면 필요한 마찰력은 F이다. 따라서 탁자가 막 미끄러지려는 순간은

$$\frac{W}{4}\left(1 + \frac{3x}{a}\right) = 4W \quad \Longleftrightarrow \quad x = 5a.$$

두 값 모두 사다리의 길이 $6a$ 안에 있고, 페인트공이 올라감에 따라 F는 꾸준히 증가한다. F는 $4W$에 이르기 전에(이는 $x = 5a$일 때) 먼저 $3W$에 이른다(이는 $x = \frac{11}{3}a$일 때). 따라서 **탁자가 먼저 기울어진다**. 이 일은 페인트공이 사다리를 따라 $\frac{11}{3}a$만큼 올라갔을 때, 즉 탁자

윗면에서 높이 $\frac{11}{3}a\sin\alpha = \frac{22a}{3\sqrt{5}} \approx 3.28a$인 곳에 있을 때 일어난다. 그 순간 지면에서 필요한 마찰력은 $3W$에 불과하여 얻을 수 있는 $4W$보다 작으므로, 탁자는 아직 미끄러지지 않았다.

검산

- 사다리 위에 페인트공이 없을 때($x = 0$) $F = \frac{1}{4}W$이고, 가까운 쪽 다리는 $N_1 = \frac{11}{2}W$를, 먼 쪽 다리는 $\frac{13}{2}W$를 받친다. 미는 힘이 벽에서 멀어지는 방향이므로, 예상대로 먼 쪽 다리가 조금 더 많은 힘을 받는다.
- 컴퓨터로 여러 k와 x 값에 대해 힘을 계산해 보았다. (i)에서 필요한 마찰력과 얻을 수 있는 마찰력의 비의 최댓값은 1보다 약간 작다(꼭대기에서 $\frac{2k+1}{2k+2}$이다). (ii)에서는 가까운 쪽 다리의 수직항력이 $x \approx 3.667a$에서 0이 되고, 지면의 마찰력이 $x = 5a$에서 한계에 이른다.

흔한 실수

- 기울어지는 축을 중심에서 거리 $\frac{1}{2}a$인 탁자의 가장자리로 잡는 실수: 탁자 윗면의 한 변의 길이가 $\frac{1}{2}a$이므로 폭의 절반은 $\frac{1}{4}a$이다.
- 탁자를 미는 힘이 지면 높이가 아니라 다리의 위 끝인 높이 a에서 작용한다는 것을 잊는 실수. 미는 힘이 탁자를 넘어뜨리려는 모멘트를 갖는 것은 바로 이 높이 때문이다.
- 지면이 탁자에 주는 수직항력을 구할 때 사다리와 페인트공의 $10W$를 빠뜨리는 실수. 탁자 자신의 무게 $2W$만으로는 부족하다.

STEP 너머

이 문제는 강체계가 서로 경쟁하는 여러 방식, 즉 미끄러짐이나 넘어짐으로 평형을 잃는 상황을 다룬다. 방법은 각각의 문턱값을 구하고 하중이 어느 쪽에 먼저 도달하는지 보는 것이다. 공학자들은 같은 아이디어를 옹벽, 크레인, 쌓아 올린 짐에 적용하며, 정역학(statics) 강의에서는 이것이 가상일의 원리(principle of virtual work)로 이어진다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 강체의 평형과 마찰을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP II 2006, 문제 10

역학 • 충돌과 반발계수

> **STEP II 2006, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/06-s2-q10

핵심 아이디어

각 충돌은 두 방정식으로 푸는 문제이다. 하나는 직선 방향의 운동량 보존(conservation of momentum)이고, 다른 하나는 뉴턴(Newton)의 반발 법칙(law of restitution), 즉 분리 속력(speed of separation)이 접근 속력(speed of approach)의 e배라는 법칙이다. 먼저 A–B 충돌을 풀고, 그 결과로 얻은 B의 새 속도를 B–C 충돌에 넣는다. A는 B의 뒤에 있으므로, B가 C와 충돌한 뒤 앞쪽 방향으로 A가 B보다 더 빠르게 움직이게 되는 경우에만 정확히 A–B의 두 번째 충돌이 일어난다. 그러면 (ii)는 등속도로 움직이는 물체들의 추격 문제(pursuit problem)가 된다.

풀이

A, B, C를 매끄러운(smooth) 면 위의 한 직선을 따라 움직이는 입자(particle)로 모형화한다. 따라서 충돌하는 동안을 제외하면 수평 방향의 힘은 작용하지 않는다. A를 쏘아 보낸 방향을 양의 방향으로 잡는다. 아래의 모든 속도는 부호를 가진 값이다.

소문항 (i)

A와 B의 충돌. 충돌 직후 A와 B의 속도를 각각 v_A, v_B라 하자. 운동량 보존과 반발 법칙($e = \frac{1}{2}$)에서

$$mv_A + km\,v_B = mu, \qquad v_B - v_A = \tfrac{1}{2}u.$$

를 얻는다. $v_A = v_B - \frac{1}{2}u$를 첫 번째 식에 대입하면 $(1+k)v_B = \frac{3}{2}u$이므로

$$v_B = \frac{3u}{2(1+k)}, \qquad v_A = v_B - \frac{u}{2} = \frac{(2-k)\,u}{2(1+k)}.$$

이다. $v_B > 0$이므로 B는 실제로 C를 향해 나아가고, $v_A < v_B$이므로 B가 C에 닿기 전에 A가 B를 따라잡을 수는 없다.

B와 C의 충돌. 충돌 직후 B와 C의 속도를 각각 w_B, w_C라 하자. $e = \frac{1}{4}$이므로

$$km\,w_B + 3m\,w_C = km\,v_B, \qquad w_C - w_B = \tfrac{1}{4}v_B.$$

이다. $w_C = w_B + \frac{1}{4}v_B$를 대입하면 $(k+3)w_B = \left(k - \frac{3}{4}\right)v_B$이므로

$$w_B = \frac{(4k-3)\,v_B}{4(k+3)} = \frac{3(4k-3)\,u}{8(1+k)(k+3)}.$$

이다. 또한 $w_C > w_B$이므로 B와 C는 멀어지며 다시는 만나지 않는다. 이 충돌 이후에는 A와 B가 (만약 만난다면) 만날 때까지 둘에게 아무것도 작용하지 않는다.

? **생각해 보기** A와 B가 다시 충돌할 조건은 정확히 무엇인가?

B가 C와 충돌한 뒤에는 A와 B 모두 등속도로 움직이고, A는 B의 뒤쪽(즉 B의 음의 방향 쪽)에 있다. 둘 사이의 간격은 $v_A > w_B$일 때 정확히 줄어들며, 이때 간격은 유한한 시간 안에 0이 된다. $v_A \le w_B$이면 간격은 결코 줄어들지 않는다. 이 부등식 하나가 모든 부호의 경우를 포함한다. 예를 들어 A가 뒤로 움직이더라도 B가 그보다 더 빠르게 뒤로 움직이면 B가 여전히 A를 따라잡는데, 이 경우도 $v_A > w_B$이다.

따라서 필요한 조건은

$$\frac{(2-k)u}{2(1+k)} > \frac{3(4k-3)u}{8(1+k)(k+3)}.$$

이다. $k > 0$이므로 양수인 $8(1+k)(k+3)/u$를 곱하면 다음과 동치인 부등식을 얻는다.

$$\begin{aligned} 4(2-k)(k+3) &> 3(4k-3) \\ 24 - 4k - 4k^2 &> 12k - 9 \\ 4k^2 + 16k - 33 &< 0 \\ (2k-3)(2k+11) &< 0. \end{aligned}$$

$2k + 11 > 0$이므로 이 부등식은 $2k - 3 < 0$일 때, 그리고 그때에만 성립한다. k는 질량비(mass ratio)이므로 $k > 0$이다. 따라서 A와 B가 두 번째로 충돌하는 것은 정확히 다음 경우이다.

$$0 < k < \tfrac{3}{2}.$$

$k = \frac{3}{2}$이면 $v_A = w_B = \frac{u}{10}$이다. 이때 두 입자는 같은 속력으로 나란히 나아갈 뿐 실제로 다시 만나지는 않으므로, 끝점은 제외된다.

소문항 (ii)

$k = 1$이면 위의 공식에서

$$v_A = \frac{u}{4}, \qquad v_B = \frac{3u}{4}, \qquad w_B = \frac{3u}{64}, \qquad w_C = \frac{15u}{64}.$$

를 얻는다. A와 B가 처음 충돌한 지점(즉 B의 처음 위치)을 원점으로 잡고, 그 충돌 순간부터 시간 t를 잰다.

B–C 충돌까지. B는 C까지의 거리 d를 속력 $\frac{3}{4}u$로 이동하므로, 걸리는 시간은

$$t_1 = \frac{d}{3u/4} = \frac{4d}{3u}.$$

이다. 이 시간 동안 A는 $\frac{u}{4} \cdot \frac{4d}{3u} = \frac{d}{3}$만큼 이동한다. 따라서 A는 $\frac{d}{3}$에, B는 d에 있고, 간격은 $\frac{2d}{3}$이다.

추격. 이제 A는 $\frac{u}{4} = \frac{16u}{64}$로, B는 $\frac{3u}{64}$로 움직이므로 A는 상대 속력 $\frac{13u}{64}$로 간격을 좁힌다. 여기에 걸리는 시간은

$$t_2 = \frac{2d/3}{13u/64} = \frac{128d}{39u}.$$

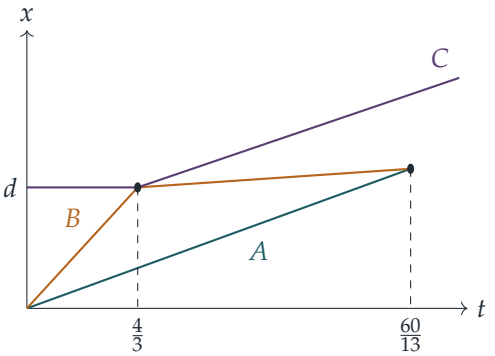
이다.

합계. 두 번의 A–B 충돌 사이의 시간은

$$t_1 + t_2 = \frac{4d}{3u} + \frac{128d}{39u} = \frac{52d + 128d}{39u} = \frac{180d}{39u} = \frac{60d}{13u},$$

이고, 이는 요구한 결과와 같다.

아래의 거리-시간 그래프(distance–time graph)는 $u = d = 1$일 때의 운동을 나타낸다. A와 B의 직선은 $t = \frac{60}{13}$에서 다시 만난다.



검산

- 운동량: $k = 1$일 때 첫 번째 충돌 후 $m \cdot \frac{u}{4} + m \cdot \frac{3u}{4} = mu$이고, 두 번째 충돌 후 $m \cdot \frac{3u}{64} + 3m \cdot \frac{15u}{64} = \frac{48}{64}mu = m \cdot \frac{3u}{4}$이다. 둘 다 맞아떨어진다.
- 경계 $k = \frac{3}{2}$: v_A와 w_B가 모두 $\frac{u}{10}$로 나오므로 임계값이 확인된다.
- 타당성 점검: k가 크면 A는 뒤로 튕겨 나가고($v_A < 0$) B는 앞으로 계속 나아가므로, 두 번째 충돌이 없는 것이 분명하다. 이는 구한 범위와 일치한다.

- 무작위로 고른 유리수 k 10^5개에 대해 $v_A > w_B$가 정확히 $k < \frac{3}{2}$일 때 성립함을 수치적으로 확인했고, $u = d = 1$로 시간 간격을 나누어 진행한 시뮬레이션에서 두 번째 충돌이 $t \approx 4.6154$에서 일어나 $\frac{60}{13} \approx 4.6154$와 일치했다.

흔한 실수

- 반발 법칙에 부호 있는 속도 대신 속력을 쓰는 것. 부호 있는 속도를 쓰면 분리 속력은 "앞의 속도 빼기 뒤의 속도"이고, v_A의 부호는 저절로 처리된다.
- 조건의 일부로 $v_A > 0$을 요구하는 것. 원리적으로 A는 뒤로 움직이면서도 B에게 따라잡힐 수 있다($w_B < v_A$인 경우). 올바른 조건은 $v_A > w_B$ 하나뿐이다.
- (ii)에서 추격 시간을 B의 속도가 바뀌는 순간이 아니라 첫 번째 충돌부터 재어서, A가 이미 이동해 둔 $\frac{d}{3}$만큼의 앞선 거리를 놓치는 것.

STEP 너머

운동량 보존과 반발 법칙을 함께 쓰면 모든 충돌은 충돌 전 속도를 충돌 후 속도로 보내는 선형사상(linear map)이 된다. 그러면 뉴턴의 요람(Newton's cradle)이나 두 블록과 벽 사이의 충돌 횟수를 세는 유명한 문제처럼 충돌이 연쇄적으로 일어나는 경우를 이 사상들의 합성(composition)으로 연구할 수 있다. 대학 1학년 역학에서는 이것이 질량중심 좌표계(centre-of-mass frame)로 이어지는데, 이 좌표계에서 반발 법칙은 상대 속도를 단순히 일정한 배율로 줄이는 것이 된다. 나아가 2차원과 3차원에서의 충돌로 이어진다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 충돌과 질량중심 좌표계를 명료하게 다룬다.

풀이

STEP II 2006, 문제 14

확률과 통계 • 연속확률변수

> **STEP II 2006, 14번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/06-s2-q14

핵심 아이디어

이 문제 전체는 하나의 역도함수(antiderivative)에 달려 있다. 분모 $x\ln x$는 $\ln x$에 x를 곱한 것이고, $1/x$는 $\ln x$의 도함수(derivative)이므로, 피적분함수(integrand)는 $g(x) = \ln x$에 대하여 $g'(x)/g(x)$ 꼴이다. 따라서

$$\int \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x = \ln|\ln x| + C.$$

그 다음부터 각 소문항은 "전체 확률은 1이다"를 적용하고, 부호와 함께 밀도함수(density)가 실제로 0이 아닌 구간이 어디인지를 꼼꼼히 따지는 문제가 된다.

풀이

그래프 그리기

$x > 0, x \neq 1$에 대하여 $y = \dfrac{1}{x\ln x}$라 하자.

부호. $x > 0$이므로 y의 부호는 $\ln x$의 부호와 같다. 즉 $0 < x < 1$에서 $y < 0$이고 $x > 1$에서 $y > 0$이다. 곡선은 좌표축과 만나지 않는다.

양 끝에서의 행동.

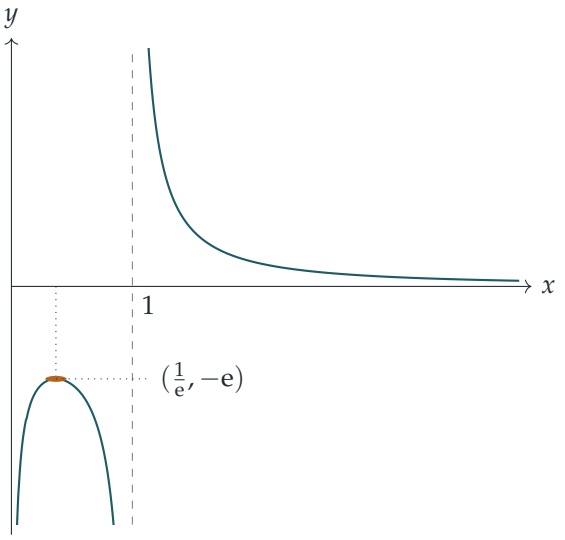
- $x \to 0^+$일 때: 문제에서 $x\ln x \to 0$임이 주어져 있고, 이 근처에서 $x\ln x < 0$이므로 $y \to -\infty$이다.
- $x \to 1$일 때: $x\ln x \to 0$이며, 왼쪽에서는 음수, 오른쪽에서는 양수이므로 $x \to 1^-$일 때 $y \to -\infty, x \to 1^+$일 때 $y \to +\infty$이다. 직선 $x = 1$은 수직 점근선(vertical asymptote)이다.

▶ $x \to \infty$일 때: $x \ln x \to \infty$이므로 $y \to 0^+$이고, x축이 점근선이다.

극점. 몫의 미분법(quotient rule)(또는 연쇄법칙(chain rule))에 의해

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\ln x + 1}{(x \ln x)^2},$$

이고, 이 값은 $\ln x = -1$, 즉 $x = 1/\mathrm{e}$일 때에만 0이며, 이때 $y = \dfrac{1}{(1/\mathrm{e})(-1)} = -\mathrm{e}$이다. $0 < x < 1/\mathrm{e}$에서는 $\ln x + 1 < 0$이므로 y는 증가하고, $x > 1/\mathrm{e}$ $(x \neq 1)$에서는 감소한다. 따라서 $(1/\mathrm{e}, -\mathrm{e})$는 왼쪽 가지의 극대점(local maximum)이고, 오른쪽 가지는 $+\infty$에서 0까지 꾸준히 감소한다.



소문항 (i)

여기서 $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}$이고, 둘 다 $x \ln x < 0$인 구간 $(0, 1)$에 속한다. 위의 역도함수를 이용하면

$$\begin{aligned}\int_{1/4}^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x} &= \Big[\ln|\ln x|\Big]_{1/4}^{1/2} = \ln|\ln \tfrac{1}{2}| - \ln|\ln \tfrac{1}{4}| \\ &= \ln(\ln 2) - \ln(2 \ln 2) = -\ln 2.\end{aligned}$$

전체 확률은 1이어야 하므로 $\lambda \cdot (-\ln 2) = 1$이고, 따라서

$$\lambda = -\frac{1}{\ln 2}.$$

음의 부호는 바로 우리에게 필요한 것이다. $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$에서 $x \ln x < 0$이므로, 그 구간에서 f가 음이 아니려면 λ가 음수여야 한다.

소문항 (ii)

$\lambda = 1$이면 밀도함수가 음이 아니어야 하므로 구간 $[a, b]$는 $x \ln x > 0$인 곳에 놓여야 하는데, $b > a > 1$이므로 실제로 그렇다. 그러면 $\ln a, \ln b > 0$이고

$$1 = \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x} = \ln(\ln b) - \ln(\ln a) = \ln \frac{\ln b}{\ln a}.$$

따라서 $\dfrac{\ln b}{\ln a} = \mathrm{e}$, 즉 $\ln b = \mathrm{e} \ln a = \ln\left(a^{\mathrm{e}}\right)$이고, ln은 일대일(one-to-one)이므로 요구한 대로 $b = a^{\mathrm{e}}$이다.

소문항 (iii)

$a = \mathrm{e}$이면 소문항 (ii)에 의해 $b = \mathrm{e}^{\mathrm{e}}$이다. $1 < \frac{3}{2} < 2 < \mathrm{e}$이므로 구간 $[\mathrm{e}^{3/2}, \mathrm{e}^2]$ 전체가 $[a, b] = [\mathrm{e}, \mathrm{e}^{\mathrm{e}}]$ 안에 들어 있고, 따라서

$$\mathrm{P}(\mathrm{e}^{3/2} \le X \le \mathrm{e}^2) = \Big[\ln(\ln x)\Big]_{\mathrm{e}^{3/2}}^{\mathrm{e}^2} = \ln 2 - \ln \tfrac{3}{2} = \ln \tfrac{4}{3}.$$

이 값을 분수로 나타내기 위해 매클로린 급수(Maclaurin series) $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots$에 $t = \frac{1}{3}$을 대입하고 네 항까지 취하면

$$\ln \tfrac{4}{3} \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{18} + \frac{1}{81} - \frac{1}{324} = \frac{108 - 18 + 4 - 1}{324} = \frac{93}{324} = \frac{31}{108}.$$

> ? **생각해 보기** 네 항에서 멈추는 것이 적절하다는 것을 어떻게 알 수 있을까?

이 급수는 항의 크기가 감소하는 교대급수(alternating series)이므로, 네 항까지 취했을 때의 오차는 다섯째 항 $\frac{1}{5 \cdot 3^5} = \frac{1}{1215} < 0.001$보다 작다. 따라서 요구한 대로 $\mathrm{P} = \ln \frac{4}{3} \approx \frac{31}{108}$이다.

소문항 (iv)

이제 $a = \mathrm{e}^{1/2}$이므로 소문항 (ii)에 의해

$$b = a^{\mathrm{e}} = \mathrm{e}^{\mathrm{e}/2}.$$

> ? **생각해 보기** 적분하기 전에, 밀도함수가 실제로 0이 아닌 곳은 어디인가?

$\mathrm{e} < 3$이므로 $\mathrm{e}/2 < \frac{3}{2}$이고, 따라서 $b = \mathrm{e}^{\mathrm{e}/2} < \mathrm{e}^{3/2}$이다. 구간 $[\mathrm{e}^{3/2}, \mathrm{e}^2]$는 완전히 b의 오른쪽에 있고, 그곳에서 $\mathrm{f}(x) = 0$이다. 따라서

$$\mathrm{P}(\mathrm{e}^{3/2} \le X \le \mathrm{e}^2) = 0.$$

($1/(x \ln x)$를 무작정 $\mathrm{e}^{3/2}$부터 e^2까지 적분하면 다시 $\ln \frac{4}{3}$이 나오는데, 이는 틀린 답이다.)

검산

- 수치적으로 $e^{-1} \approx 0.368$이고, $(0,1)$에서 y를 훑어보면 그 점에서 최댓값 $\approx -2.718 = -e$를 얻는다.
- 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 $\int_{1/4}^{1/2} \frac{dx}{x \ln x} \approx -0.6931 = -\ln 2$이므로 $\lambda \approx -1.4427$이다.
- 여러 $a > 1$ 값(예를 들어 $a = 2, a = 7.3$)에 대하여 $\int_a^{a^e} \frac{dx}{x \ln x}$를 계산하면 1.0000이 나온다.
- $\ln \frac{4}{3} \approx 0.28768$이고 $\frac{31}{108} \approx 0.28704$이므로, 두 값은 0.0007 이내에서 일치한다.
- (iv)에서 $b = e^{e/2} \approx 3.89$인 반면 $e^{3/2} \approx 4.48$이다.

흔한 실수

- $\ln x < 0$인 소문항 (i)에서 $\ln(\ln x)$라고 쓰는 것: 역도함수에는 절댓값이 필요하므로 $\ln|\ln x|$이다.
- $\lambda = \frac{1}{\ln 2}$라고 답하는 것: 양수 λ는 "밀도함수"를 음수로 만든다.
- 소문항 (iv)에서 $[e^{3/2}, e^2]$가 받침(support) $[a, b]$ 안에 있는지 확인하지 않고 그 구간에서 적분하는 것.

STEP 너머

치환 $u = \ln x$를 하면 이 밀도함수는 $[\ln a, \ln b]$에서의 $1/u$가 되고, 조건 $b = a^e$는 단지 $\int_{\ln a}^{\ln b} \frac{du}{u} = 1$일 뿐이다. 이처럼 확률변수(random variable)를 변환하는 것(여기서는 $U = \ln X$)은 대학 1학년 확률론의 핵심 도구로, 확률변수의 함수의 밀도함수를 연쇄법칙으로부터 구한다. 같은 함수 $1/(x \ln x)$는 해석학에서도 유명하다. $\sum 1/(n \ln n)$은 항이 0으로 수렴하는데도, 이 적분과의 비교에 의해 발산(diverge)한다. 확률변수의 변환에 대해서는 Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)을 참고하라.

풀이

STEP III 2006, 문제 1

순수수학 • 곡선 그리기

STEP III 2006, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/06-s3-q1

핵심 아이디어

먼저 나눗셈을 한다. 곡선을 직선과 작은 보정항의 합으로 쓰면 비스듬한 점근선(oblique asymptote)을 얻을 수 있고, 곡선이 점근선의 어느 쪽에 놓이는지 알 수 있으며, 도함수(derivative)도 쉽게 구할 수 있다. 도함수는 모든 곳에서 2보다 크다는 것이 밝혀지는데, 이 한 가지 사실이 근의 개수를 세는 문항들에서 대부분의 일을 해 준다. 각 방정식은 "곡선 = 간단한 무언가"의 꼴로 정리되고, 우리는 기울기를 비교한다.

풀이

곡선

$2x^3 - 10x = 2x(x^2 - 4) - 2x$이므로

$$y = \frac{2x(x^2-5)}{x^2-4} = 2x - \frac{2x}{x^2-4}.$$

여기서 곧바로 읽어 낼 수 있는 특징들이 있다.

- y는 **기함수**(*odd function*)이므로, 곡선은 원점에 대하여 2차 회전대칭을 가진다.
- 곡선은 $x = 0$과 $x = \pm\sqrt{5}$에서 x축과 만난다.
- **점근선.** 분모는 $x = \pm 2$에서 0이 되고(이때 분자는 $\pm 4 \cdot (-1) \cdot 2 \neq 0$이다), 따라서 $x = 2$와 $x = -2$는 수직점근선(vertical asymptote)이다. $|x| \to \infty$일 때 보정항 $2x/(x^2-4) \to 0$이므로, $y = 2x$는 비스듬한 점근선이다.
- **점근선의 어느 쪽인가.** $y - 2x = -2x/(x^2-4)$이다. $x > 2$이면 이 값은 음수이고(곡선은 $y = 2x$의 바로 아래에 있다), $x < -2$이면 양수이다(바로 위에 있다). $0 < x < 2$이면

양수이고, $-2 < x < 0$이면 음수이다.

- $x = \pm 2$ **근처에서의 거동.** $x \to 2^+$일 때 $-2x/(x^2-4) \to -\infty$이고, $x \to 2^-$일 때는 $+\infty$로 간다. 기함수라는 성질에 의해 $x \to -2^-$일 때 $y \to +\infty$이고, $x \to -2^+$일 때 $y \to -\infty$이다.

나눗셈한 꼴을 미분하면

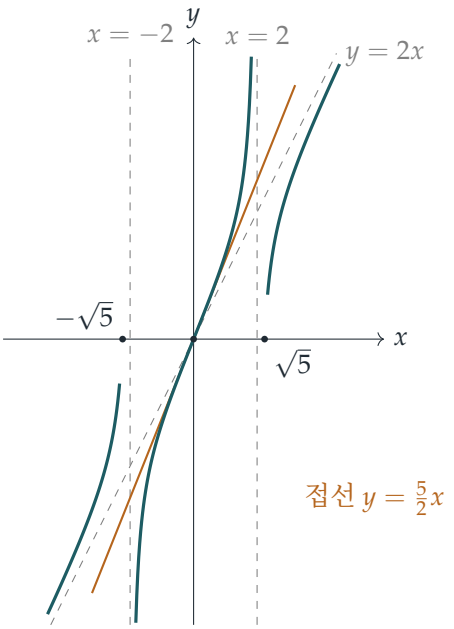
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2 - \frac{2(x^2-4) - 2x \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = 2 + \frac{2(x^2+4)}{(x^2-4)^2}.$$

따라서 $x \neq \pm 2$인 모든 x에 대하여 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x > 2$이다. 즉 정류점(stationary point)은 없으며, 세 구간 $x < -2$, $-2 < x < 2$, $x > 2$ 각각에서 곡선은 순증가하여 $-\infty$에서 $+\infty$까지 올라간다.

원점에서의 접선. $x = 0$에서 기울기는 $2 + 8/16 = \frac{5}{2}$이므로 접선은 $y = \frac{5}{2}x$이다. 한 번 더 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{4x(x^2+12)}{(x^2-4)^3},$$

이고, 이는 $x = 0$에서만 0이 되며 그곳에서 부호가 바뀐다. 즉 원점은 변곡점(point of inflection)이다. $0 < x < 2$에서는 이계도함수가 양수이므로(분자와 분모가 모두 음수) 가운데 가지는 그 구간에서 아래로 볼록(convex)하여 접선 $y = \frac{5}{2}x$의 **위쪽**에 놓인다. $-2 < x < 0$에서는 위로 볼록(concave)하여 접선의 아래쪽에 놓인다.



요약. 점근선은 $x = 2$, $x = -2$, $y = 2x$이고, 원점에서의 접선은 $y = \frac{5}{2}x$이다.

아래의 각 소문항에서 $x = \pm 2$는 결코 근이 아니다(그곳에서 좌변은 0이 아니지만 우변은 0이다). 따라서 $x^2 - 4$로 나누어, 곡선과 다른 그래프의 교점 개수를 세면 된다.

소문항 (i)

$\frac{3}{2}(x^2 - 4)$로 나누면 방정식은

$$\frac{2x(x^2 - 5)}{x^2 - 4} = \tfrac{2}{3}(x + 3),$$

이 되므로, 곡선과 기울기가 $\frac{2}{3}$인 직선 $y = \frac{2}{3}x + 2$의 교점을 구하면 된다.

? **생각해 보기** 기울기가 2보다 작은 직선은 왜 각 가지와 정확히 한 번씩 만나는가?

$h(x)$를 곡선의 y값에서 직선의 y값을 뺀 것이라 하자. 각 가지에서 $h'(x) > 2 - \frac{2}{3} > 0$이므로 h는 순증가하고, 영점은 많아야 하나이다. 수직점근선 쪽 끝에서는 y와 마찬가지로 $h \to \pm\infty$이다(직선은 유한한 값에 머문다). 바깥쪽 끝에서는 $h \approx 2x - \frac{2}{3}x = \frac{4}{3}x$이고, 이는 $x \to -\infty$일 때 $-\infty$로, $x \to +\infty$일 때 $+\infty$로 간다. 따라서 세 가지 각각에서 h는 $-\infty$에서 $+\infty$까지 움직이며, 중간값 정리(intermediate value theorem)에 의해 정확히 한 번 0이 된다.

그러므로 방정식 (i)은 **세 개**의 실근을 가진다. (실제로 이 방정식은 삼차방정식 $2x^3 - 3x^2 - 11x + 12 = 0$이며, $x = 1$이 근 중 하나이다.)

소문항 (ii)

$2(x^2 - 4)$로 나누면, 원점에서의 접선을 1만큼 아래로 옮긴 직선 $y = \frac{5}{2}x - 1$과의 교점을 구해야 한다. 이번에는 기울기가 2보다 크므로 (i)의 논증을 더 이상 쓸 수 없고, 가지별로 살펴본다.

- $x > 2$: 곡선은 $y = 2x$의 아래에 있고, 직선은 $\frac{5}{2}x - 1 - 2x = \frac{1}{2}x - 1 > 0$을 만족하므로 $y = 2x$의 위에 있다. 교점은 없다.
- $x < -2$: 곡선은 $y = 2x$의 위에 있고, 직선은 $\frac{1}{2}x - 1 < 0$이므로 그 아래에 있다. 교점은 없다.
- $0 \le x < 2$: 곡선은 (볼록성에 의해) 접선 $y = \frac{5}{2}x$ 위에 있거나 그보다 위에 있고, 접선은 직선보다 위에 있다. 교점은 없다.
- $-2 < x < 0$: $x \to -2^+$일 때 곡선은 $-\infty$로 가고 직선은 -6으로 간다. $x = 0$에서 곡선의 값은 0으로 직선의 값 -1보다 위에 있다. 따라서 적어도 한 번은 만난다. 이 구간에서 $y'' < 0$이므로 y'은 $(-2, 0)$에서 감소하고, 따라서 $y' > y'(0) = \frac{5}{2}$이다. 그러므로 "곡선빼기 직선"은 순증가하고, 교점은 유일하다.

그러므로 방정식 (ii)는 -2와 0 사이에 놓인 **한 개**의 실근을 정확히 가진다. (삼차방정식으로 쓰면 $x^3 - 2x^2 + 8 = 0$이며, 극값 8과 $\frac{184}{27}$가 모두 양수이므로 $x \approx -1.51$ 근처에 실근이 하나뿐임이 확인된다.)

소문항 (iii)

$(x^2-4)^2$으로 나누면

$$\left(\frac{2x(x^2-5)}{x^2-4}\right)^2 = x^2 + 1,$$

이 므 로, 곡 선 과 직 각 쌍 곡 선(rectangular hyperbola) $y^2 - x^2 = 1$의 교 점, 즉 $y = \sqrt{x^2+1}$(위쪽 가지) 또는 $y = -\sqrt{x^2+1}$(아래쪽 가지)과의 교점을 구해야 한다.

> **?** **생각해 보기** 대칭성을 이용해 일을 반으로 줄일 수 있을까?

그렇다. 사상 $(x, y) \mapsto (-x, -y)$는 곡선을 자기 자신으로 보내고(곡선은 기함수의 그래프이다), 쌍곡선의 두 가지를 서로 맞바꾼다. 따라서 아래쪽 가지와의 교점은 위쪽 가지와의 교점과 일대일로 대응하며, 위쪽 가지와의 교점만 세면 된다.

$u(x) = \sqrt{x^2+1}$이라 하자. 그러면 $|u'(x)| = |x|/\sqrt{x^2+1} < 1$이므로, 곡선의 각 가지에서 차 $y - u$의 도함수는 $2 - 1 = 1 > 0$보다 크고, 각 가지는 많아야 하나의 교점을 준다. 이제 양 끝을 확인한다.

- $-2 < x < 2$: $y - u$는 $-\infty$에서 $+\infty$까지 움직인다. 근이 하나이다.
- $x > 2$: $x \to 2^+$일 때 $y - u \to -\infty$이고, $x \to \infty$일 때 $y - u \approx 2x - x \to +\infty$이다. 근이 하나이다.
- $x < -2$: $x \to -\infty$일 때 $y - u \approx 2x - |x| = 3x \to -\infty$이고, $x \to -2^-$일 때 $y - u \to +\infty$이다. 근이 하나이다.

따라서 곡선은 위쪽 가지와 세 번 만나고, 대칭성에 의해 아래쪽 가지와도 세 번 만난다. 두 가지는 공통점이 없으므로($u \geq 1$), 이 여섯 점의 x좌표는 서로 다른 여섯 개이며, 방정식 (iii)은 **여섯 개**의 실근을 가진다. 이 방정식은 6차 다항방정식(구체적으로 $3x^6 - 33x^4 + 92x^2 - 16 = 0$)이므로, 그 근은 모두 실근이다.

검산

- $x = 0$ 근처에서 $y \approx 2x(-5)/(-4) = \frac{5}{2}x$이며, 접선과 일치한다.
- $x = 1000$에서 $y - 2x \approx -0.002$로, 예측대로 작은 음수이다.
- 원 래 방 정 식 에 대 해 부 호 변 화 를 이 용 한 수 치 탐 색 을 하 면 (i)에 서 는 근

$x \approx -2.212,\ 1,\ 2.713$을, (ii)에서는 $x \approx -1.510$ 하나만을, (iii)에서는 $x \approx \pm 0.431,\ \pm 2.155,\ \pm 2.484$를 얻는다.

흔한 실수

- $x^2 - 4$로 나누기 전에 $x = \pm 2$가 근이 아님을 확인하는 것을 잊는다.
- (iii)에서 $y = \sqrt{x^2 + 1}$과의 교점만 세고 음의 제곱근을 빠뜨린다.
- (ii)에서 (i)처럼 "가파른 직선이니 가지마다 근이 하나"라고 가정한다. 기울기가 2보다 크면 바깥쪽 가지들에 대해서는 별도의 논증이 필요하다.

STEP 너머

여기서의 근 세기는 중간값 정리와 단조성(monotonicity)을 결합한 것이다. 즉 $-\infty$에서 $+\infty$까지 가는 연속인 순증가함수는 정확히 하나의 영점을 가진다. 대학 1학년 해석학(analysis) 강의에서는 이 두 사실을 실수의 완비성(completeness)으로부터 엄밀하게 증명하며, 같은 논리가 "홀수 차수의 실계수 다항식은 실근을 가진다"와 같은 결과의 바탕이 된다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 이 내용을 아름답게 전개한다.

풀이

STEP III 2006, 문제 2

순수수학 • 대칭성을 이용한 정적분

STEP III 2006, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/06-s3-q2

핵심 아이디어

구간 $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$는 대칭(symmetric)이므로 θ를 $-\theta$로 바꾸면 I에 대한 또 하나의 식을 얻는다. 두 식을 더하면 분모에 있는 성가신 $\sin\theta$가 사라진다. 모든 것을 $\tan\theta$로 나타내고 나면 적분 I와 J의 분모가 같아지고, 둘을 잘 골라 결합하면 피적분함수(integrand)가 정확히 1이 된다. 풀이 내내 $\cos 2\alpha$의 부호에 주의하자. 마지막 소문항에서 달라지는 것이 바로 이것이다.

풀이

$s = \sin 2\alpha$, $c = \cos 2\alpha$로 놓으면 $s^2 + c^2 = 1$이다. 여기서 다루는 α의 두 범위($\alpha \neq \frac{1}{4}\pi$) 모두에서 $0 < s < 1$이므로 $1 \mp s\sin\theta \geq 1 - s > 0$이다. 따라서 I의 피적분함수는 구간 전체에서 연속(continuous)이다.

소문항 (i)

$\theta = -\phi$로 치환(substitution)하면 $\mathrm{d}\theta = -\mathrm{d}\phi$이고 적분 구간의 위끝과 아래끝이 서로 바뀐다. $\cos^2(-\phi) = \cos^2\phi$이고 $\sin(-\phi) = -\sin\phi$이므로

$$I = \int_{\frac{1}{2}\pi}^{-\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2\phi}{1 + \sin\phi\, s}\,(-\mathrm{d}\phi) = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2\phi}{1 + s\sin\phi}\,\mathrm{d}\phi,$$

이고, 이것이 (ϕ를 다시 θ로 쓰면) 첫 번째 결과이다.

I에 대한 두 식을 더하면

$$2I = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2\theta \left(\frac{1}{1 - s\sin\theta} + \frac{1}{1 + s\sin\theta}\right)\mathrm{d}\theta = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{2\cos^2\theta}{1 - s^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

이제 분자와 분모를 $\cos^2\theta$(구간 내부에서 0이 아니다)로 나누면

$$\frac{2\cos^2\theta}{1-s^2\sin^2\theta} = \frac{2}{\sec^2\theta - s^2\tan^2\theta} = \frac{2}{1+\tan^2\theta\,(1-s^2)} = \frac{2}{1+c^2\tan^2\theta},$$

이다. 여기서 $\sec^2\theta = 1+\tan^2\theta$와 $1-\sin^2 2\alpha = \cos^2 2\alpha$를 이용하였다. 따라서

$$2I = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{2}{1+\tan^2\theta\cos^2 2\alpha}\,\mathrm{d}\theta,$$

이고, 이것이 구하려던 식이다. ($\theta = \pm\frac{1}{2}\pi$에서 이 피적분함수는 0으로 수렴하므로 양 끝에서 문제가 생기지 않는다.)

소문항 (ii)

분자의 $\sec^2\theta$를 보면 $t = \tan\theta$, $\mathrm{d}t = \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$로 치환하고 싶어진다. θ가 $-\frac{1}{2}\pi$부터 $\frac{1}{2}\pi$까지 움직일 때 t는 실수 전체를 움직인다.

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+c^2t^2}.$$

$0 < \alpha < \frac{1}{4}\pi$이므로 $0 < 2\alpha < \frac{1}{2}\pi$이고, 따라서 $c > 0$이다. $u = ct$로 놓으면

$$J = \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{1}{c}\Big[\arctan u\Big]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{c} = \pi\sec 2\alpha.$$

소문항 (iii)

소문항 (i)에 의해 $I = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+c^2\tan^2\theta}$이고, 이는 J와 분모가 같다. 그러므로

$$s^2I + c^2J = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{s^2+c^2\sec^2\theta}{1+c^2\tan^2\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

? 생각해 보기 왜 하필 이 결합이 더 쉬워야 할까?

분자를 살펴보자. $s^2 + c^2\sec^2\theta = s^2 + c^2 + c^2\tan^2\theta = 1 + c^2\tan^2\theta$이다. 이는 분모와 정확히 같으므로 피적분함수는 1이고

$$s^2I + c^2J = \pi.$$

소문항 (ii)의 $J = \pi/c$를 이용하면

$$s^2I = \pi - \pi c = \pi(1-c) \quad\Longrightarrow\quad I = \frac{\pi(1-c)}{1-c^2} = \frac{\pi}{1+c},$$

이다. 여기서 $s^2 = 1-c^2 = (1-c)(1+c)$를 이용하였고, ($c < 1$이므로) $1-c \neq 0$으로 약분하였다. 마지막으로 $1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$이므로

$$I = \frac{\pi}{2\cos^2\alpha} = \tfrac{1}{2}\pi\sec^2\alpha. \qquad \checkmark$$

소문항 (iv)

이번에는 $\frac{1}{4}\pi < \alpha < \frac{1}{2}\pi$이므로 $\frac{1}{2}\pi < 2\alpha < \pi$이다. 여전히 $0 < s < 1$이지만 이제 $c < 0$이다. 소문항 (i)은 $s^2 + c^2 = 1$만을 사용했으므로 그대로 성립하고, 소문항 (iii)의 항등식 $s^2 I + c^2 J = \pi$도 마찬가지이다. 달라지는 것은 소문항 (ii) 하나뿐이다.

> ? **생각해 보기** 소문항 (ii)는 정확히 어디에서 $\alpha < \frac{1}{4}\pi$를 사용했는가?

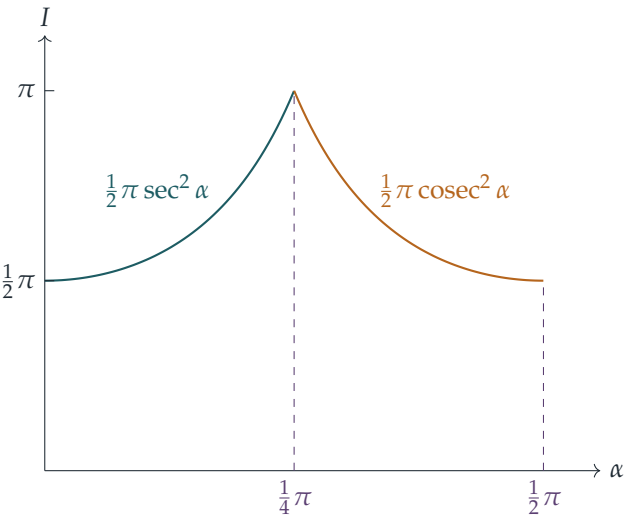
치환 $u = ct$에서이다. $c < 0$이면 u의 적분 구간이 $+\infty$부터 $-\infty$까지가 되고, 이를 다시 바꾸면 음의 부호가 붙는다. 즉 $J = \pi/|c| = -\pi/c$이다. (당연히 그래야 한다. J는 양수인 함수의 적분이므로 음수 $\pi \sec 2\alpha$와 같을 수 없다.) 그러면

$$s^2 I = \pi - c^2\Big(-\frac{\pi}{c}\Big) = \pi(1+c) \quad \Longrightarrow \quad I = \frac{\pi(1+c)}{(1-c)(1+c)} = \frac{\pi}{1-c},$$

이고, 여기서 ($c > -1$이므로) $1 + c \neq 0$으로 약분하였다. $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$이므로

$$I = \frac{\pi}{2\sin^2\alpha} = \tfrac{1}{2}\pi \operatorname{cosec}^2\alpha \qquad \big(\tfrac{1}{4}\pi < \alpha < \tfrac{1}{2}\pi\big).$$

빠르게 확인하는 방법이 있다. I는 $\sin 2\alpha$를 통해서만 α에 의존하고, $\sin 2(\frac{1}{2}\pi - \alpha) = \sin 2\alpha$이다. 따라서 $I(\alpha) = I(\frac{1}{2}\pi - \alpha) = \frac{1}{2}\pi \sec^2(\frac{1}{2}\pi - \alpha) = \frac{1}{2}\pi \operatorname{cosec}^2\alpha$이다. I의 그래프는 $\alpha = \frac{1}{4}\pi$에 대하여 대칭이고, 이 점에서 두 공식은 모두 π를 준다.



검산

- $\alpha = \frac{1}{4}\pi (c = 0)$에서 소문항 (i)의 2I 꼴의 피적분함수는 2이므로 $I = \pi$이고, 이는 두 공식과 모두 일치한다.

- $\alpha \to 0$일 때 $I \to \int \cos^2\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\pi$이고, 이는 $\frac{1}{2}\pi \sec^2 0$과 일치한다.
- 원래 적분에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하여 수치적으로 계산하면, $\alpha = 0.5$일 때 $I \approx 2.039595$로 $\frac{1}{2}\pi \sec^2 0.5$와 같고, $\alpha = 1.1$일 때 $I \approx 1.977709 = \frac{1}{2}\pi \operatorname{cosec}^2 1.1$이다. 시험해 본 모든 경우에서 $s^2 I + c^2 J$의 값은 3.141593이었다.

흔한 실수

- 소문항 (iv)에서도 $J = \pi \sec 2\alpha$로 쓰는 것. 그 범위에서 이 값은 음수인데, 양수인 함수의 적분이 음수일 수는 없다.
- 치환 $t = \tan\theta$가 유한 구간을 실수 전체로 바꾸어 적분 구간이 $\pm\infty$가 된다는 사실을 잊는 것.

STEP 너머

소문항 (i)의 기법, 즉 $f(\theta)$와 $f(-\theta)$의 평균을 취하는 것은 함수를 우함수(even function) 부분과 기함수(odd function) 부분으로 나누는 일의 출발점이다. 대칭인 구간에서 적분하면 우함수 부분만 남는다. $\sin\theta$와 $\cos\theta$의 유리함수를 한 주기 전체에 걸쳐 적분하는 것은 복소해석학(complex analysis) 첫 강의에서 다루는 복소 경로 적분(contour integration), 즉 유수 정리(residue theorem)의 고전적인 응용이며, 그곳에서는 이와 같은 결과가 몇 줄 만에 나온다. Needham, *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)를 참고하라.

풀이

STEP III 2006, 문제 3

순수수학 • 멱급수의 계수

STEP III 2006, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/06-s3-q3

핵심 아이디어

$\tan x$를 거듭 미분할 필요는 전혀 없다. 삼각함수 항등식(trigonometric identity) 하나하나가 이 함수들 가운데 두 개를 연결하므로, 그 항등식은 곧 계수들 사이의 관계로 바뀐다. x^n의 계수를 비교(comparing coefficients)하고 나면 세 급수 모두가 하나의 수열 b_n으로 결정된다. 그러면 피타고라스 항등식(Pythagorean identity) $\cot^2 x + 1 = \operatorname{cosec}^2 x$로부터 b_n이 만족해야 하는 방정식들을 얻고, 이를 하나씩 차례로 풀 수 있다.

풀이

소문항 (i)

0 근방에서 어떤 함수로 수렴하는 멱급수(power series)는 그 함수의 매클로린 급수(Maclaurin series)이므로 $a_n = \tan^{(n)}(0)/n!$이다. 그런데 tan는 기함수(odd function)이다: $\tan(-x) = -\tan x$. 기함수를 미분하면 우함수(even function)가 되고, 우함수를 미분하면 기함수가 된다. 따라서 tan의 짝수 차 도함수는 모두 기함수이고, 기함수는 0에서 값이 영이다. 그러므로 짝수 n에 대해 $\tan^{(n)}(0) = 0$이고, 따라서 짝수 n에 대해 $a_n = 0$이다. 다시 말해, 이 급수에는 x의 홀수 거듭제곱만 나타난다. 같은 논증을 역시 기함수인 $\cot x - \frac{1}{x} = \sum b_n x^n$에도 적용할 수 있으므로 짝수 n에 대해 $b_n = 0$이다. 이 사실은 아래의 관계식으로부터도 얻게 된다.

항등식을 보이기 위해 모두 $\sin x \cos x$를 분모로 하여 통분한다:

$$\cot x - \tan x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{\cos 2x}{\frac{1}{2}\sin 2x} = 2\cot 2x.$$

이제 $0 < x < \frac{1}{4}\pi$로 잡자. 그러면 $2x$도 $(0, \frac{1}{2}\pi)$에 속하므로, x 대신 $2x$를 넣은 $\cot 2x$의 급수

를 쓸 수 있다:

$$2\cot 2x = 2\left(\frac{1}{2x} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n 2^n x^n\right) = \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} b_n x^n.$$

항등식의 좌변은 다음과 같다.

$$\cot x - \tan x = \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} (b_n - a_n) x^n.$$

$\frac{1}{x}$ 항은 소거된다. 남는 것은 $(0, \frac{1}{4}\pi)$의 모든 x에 대해 서로 같은 두 멱급수이다.

? 생각해 보기 왜 두 무한급수의 계수를 비교해도 되는가?

두 멱급수가 어떤 구간 전체에서 같은 합을 가지면 그 계수들은 일치한다. 둘을 빼 보자. 그 차는 구간 전체에서 영인 멱급수이다. 그러면 그 구간에서 모든 도함수가 영이고, $x \to 0^+$로 보내면 모든 계수가 영임을 알 수 있다. 따라서

$$b_n - a_n = 2^{n+1} b_n, \qquad \text{즉,} \qquad a_n = (1 - 2^{n+1})\, b_n,$$

가 되어 요구된 결과가 성립한다. $1 - 2^{n+1} \neq 0$이므로 $b_n = a_n/(1 - 2^{n+1})$이고, 따라서 $a_n = 0$일 때, 즉 n이 짝수일 때마다 $b_n = 0$이다.

소문항 (ii)

같은 방법으로

$$\cot x + \tan x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2x} = 2\operatorname{cosec} 2x.$$

$0 < x < \frac{1}{4}\pi$에 대해, x 대신 $2x$를 넣은 cosec의 급수로부터 다음을 얻는다.

$$2\operatorname{cosec} 2x = \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} c_n x^n, \qquad \cot x + \tan x = \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} (b_n + a_n) x^n.$$

계수를 비교하면 $b_n + a_n = 2^{n+1} c_n$이다. 소문항 (i)에서 얻은 $a_n = (1 - 2^{n+1}) b_n$을 대입하면

$$2^{n+1} c_n = (2 - 2^{n+1})\, b_n \quad \Longrightarrow \quad c_n = \frac{2 - 2^{n+1}}{2^{n+1}}\, b_n = (2^{-n} - 1)\, b_n,$$

이 되며, 이것이 요구된 결과이다. 특히 짝수 n에 대해 $c_n = 0$이기도 하다.

소문항 (iii)

$\cot x$와 $\operatorname{cosec} x$의 급수에 x를 곱하면

$$1 + x\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = x\cot x, \qquad 1 + x\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = x\operatorname{cosec} x.$$

따라서 주어진 등식은 $x^2\cot^2 x + x^2 = x^2\operatorname{cosec}^2 x$라는 뜻이다. 이는 $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$을 $\sin^2 x$로 나누어 얻는 항등식 $\cot^2 x + 1 = \operatorname{cosec}^2 x$에 x^2을 곱한 것이다. 이로써 증명이 끝난다.

이제 전개하자. 첨자가 짝수인 b_n과 c_n은 영이므로

$$x\cot x = 1 + b_1x^2 + b_3x^4 + \cdots, \qquad x\operatorname{cosec} x = 1 + c_1x^2 + c_3x^4 + \cdots,$$

이고, 등식은 다음과 같이 된다.

$$\left(1 + b_1x^2 + b_3x^4 + \cdots\right)^2 + x^2 = \left(1 + c_1x^2 + c_3x^4 + \cdots\right)^2.$$

제곱하면

$$1 + (2b_1 + 1)x^2 + (2b_3 + b_1^2)x^4 + \cdots = 1 + 2c_1x^2 + (2c_3 + c_1^2)x^4 + \cdots.$$

소문항 (ii)로부터 $c_1 = (\frac{1}{2} - 1)b_1 = -\frac{1}{2}b_1$이고 $c_3 = (\frac{1}{8} - 1)b_3 = -\frac{7}{8}b_3$이다.

x^2의 계수:

$$2b_1 + 1 = 2c_1 = -b_1 \quad\Longrightarrow\quad b_1 = -\tfrac{1}{3}.$$

그러면 소문항 (i)에서 $a_1 = (1 - 2^2)b_1 = (-3)(-\frac{1}{3}) = 1$을 얻으며, 이는 요구된 값이다.

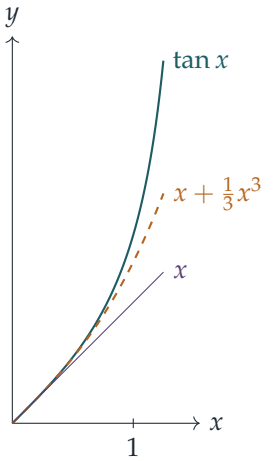
x^4의 계수: $b_1 = -\frac{1}{3}$, $c_1 = \frac{1}{6}$을 대입하면

$$2b_3 + \tfrac{1}{9} = -\tfrac{7}{4}b_3 + \tfrac{1}{36} \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{15}{4}\,b_3 = -\tfrac{3}{36} = -\tfrac{1}{12} \quad\Longrightarrow\quad b_3 = -\tfrac{1}{45}.$$

따라서

$$a_3 = (1 - 2^4)\,b_3 = (-15)\left(-\tfrac{1}{45}\right) = \tfrac{1}{3}.$$

그러므로 $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$이다.



검산

- $x = 0.3$일 때 $\tan 0.3 \approx 0.309336$이고 $0.3 + \frac{1}{3}(0.3)^3 = 0.309$이다. 차이는 약 3×10^{-4}로, 다음 항 $\frac{2}{15}x^5$의 크기와 같다.
- $b_1 = -\frac{1}{3}$이라는 값은 익숙한 근사 $\cot x \approx \frac{1}{x} - \frac{x}{3}$과 일치한다. 또 $c_1 = \frac{1}{6}$은 $\operatorname{cosec} x \approx \frac{1}{x} + \frac{x}{6}$과 일치하는데, 이는 $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$으로부터 얻을 수 있다.
- sin과 cos의 급수를 나누어, 48 이하의 모든 n에 대해 세 관계식을 (유리수 연산으로) 정확히 확인하였다. 또한 $(0, 1)$의 임의의 점들에서 부분합(partial sum)이 tan, cot, cosec의 값과 일치함도 확인하였다.

흔한 실수

- $\frac{1}{x}$ 항을 잊은 채 계수를 비교하는 것. 이 항들은 소거되지만, 그것은 오직 $2\cot 2x$와 $2\operatorname{cosec} 2x$에 있는 인수 2 덕분이다.
- 소문항 (iii)에서 제곱을 전개할 때 $b_0 = b_2 = 0$임을 잊는 것. b_0을 남겨 두면 x의 홀수 거듭제곱이 쓸데없이 생기고, 그 계수들이 영임을 따로 보여야 한다.
- $c_3 = -\frac{7}{8}b_3$에서 부호나 2의 거듭제곱을 틀리는 것. $2^{-3} - 1 = -\frac{7}{8}$임에 유의하라.

STEP 너머

이 방법을 더 높은 차수까지 밀고 나가면 계수들이 베르누이 수(Bernoulli numbers) B_{2k}임이 드러난다: $x\cot x = \sum_k (-1)^k 2^{2k} B_{2k}\, x^{2k}/(2k)!$. 그러면 소문항 (i)의 인수 $1 - 2^{n+1}$로부터 $\tan x$의 계수에 대한 일반 공식을 얻는다. $\tan x$의 급수는 왜 $|x| = \frac{1}{2}\pi$에서 수렴하지 않게 되는가? 복소해석학(complex analysis)이 이에 답한다: 멱급수는 함수가 발산하는 가장 가까운 점까지 수렴하며, tan의 경우 그 점은 $\pm\frac{1}{2}\pi$에 있는 극(pole)이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이를 아름답게 설명하고, Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)는 멱급수의 항별 비교를 엄밀하게 다룬다.

풀이

STEP III 2006, 문제 4

순수수학 • 함수방정식

STEP III 2006, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/06-s3-q4

핵심 아이디어

첫 번째 항등식(identity)은 코시(Cauchy)의 함수방정식(functional equation)이다. $y = x$를 대입하면 x에서의 f 값과 $2x$에서의 값 사이의 관계식을 얻고, 이 관계식을 n번 미분(differentiation)한 뒤 $x = 0$을 대입하면 매클로린 계수(Maclaurin coefficient)가 거의 모두 사라진다. 이후의 각 문항은 모두 같은 방정식이 모양만 바꾼 것이다. 변수 변환(change of variable)(로그, 지수, 탄젠트)을 하면 새로운 항등식이 다시 $(*)$로 바뀌므로, 이미 얻은 답을 그대로 쓸 수 있다.

풀이

기본 방정식

$(*)$에 $y = x$를 대입하면 $\mathrm{f}(x) + \mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(2x)$, 즉

$$2\mathrm{f}(x) \equiv \mathrm{f}(2x).$$

이것은 x에 대한 항등식이므로 양변을 미분할 수 있다. 연쇄 법칙(chain rule)에 의해 $\mathrm{f}(2x)$를 한 번 미분할 때마다 인수 2가 하나씩 나오므로, n번 미분하면

$$2\mathrm{f}^{(n)}(x) \equiv 2^n \mathrm{f}^{(n)}(2x).$$

$x = 0$을 대입하면 $(2 - 2^n)\,\mathrm{f}^{(n)}(0) = 0$이다. $n = 2$일 때 이 식은 $-2\mathrm{f}''(0) = 0$이 되므로, 요구된 대로 $\mathrm{f}''(0) = 0$이다.

같은 논증이 $n \neq 1$인 모든 경우에 성립한다. 인수 $2 - 2^n$은 $n = 1$일 때만 0이 되므로

$$\mathrm{f}(0) = 0 \quad \text{이고} \quad \mathrm{f}^{(n)}(0) = 0 \ \text{모든} n \geq 2.$$

($n = 0$인 경우는 단순히 $2\mathrm{f}(0) = \mathrm{f}(0)$이다.) 따라서 매클로린 급수(Maclaurin series)에서 일차항만 남는다.

$$\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(0) + \mathrm{f}'(0)\,x + \tfrac{1}{2!}\mathrm{f}''(0)\,x^2 + \cdots = kx, \qquad k = \mathrm{f}'(0).$$

역으로 $kx + ky = k(x+y)$이므로 이러한 함수는 모두 조건을 만족한다. $(*)$의 가장 일반적인 해는 $\mathrm{f}(x) = kx$이고, 여기서 k는 임의의 상수이다.

소문항 (i)

로그를 취하려면 $\mathrm{g} > 0$이어야 하므로, 먼저 부호를 처리한다. $x = y = \frac{1}{2}s$를 대입하면 $\mathrm{g}(s) = \left(\mathrm{g}(\frac{1}{2}s)\right)^2 \geq 0$이다. 어떤 a에 대해 $\mathrm{g}(a) = 0$이면, 모든 x에 대해

$$\mathrm{g}(x) = \mathrm{g}(a)\,\mathrm{g}(x-a) = 0,$$

이므로 $\mathrm{g} \equiv 0$이고, 이 함수는 실제로 항등식을 만족한다. 그렇지 않으면 모든 x에 대해 $\mathrm{g}(x) > 0$이고, $\mathrm{G} = \ln \mathrm{g}$가 모든 곳에서 정의된다. $\mathrm{g}(x)\mathrm{g}(y) = \mathrm{g}(x+y)$의 양변에 로그를 취하면

$$\mathrm{G}(x) + \mathrm{G}(y) = \mathrm{G}(x+y),$$

이고, 이것은 정확히 $(*)$이다. 따라서 $\mathrm{G}(x) = kx$이고,

$$\mathrm{g}(x) = \mathrm{e}^{kx}$$

이다. 여기서 k는 상수이며, $\mathrm{e}^{kx}\mathrm{e}^{ky} = \mathrm{e}^{k(x+y)}$이므로 이 함수가 조건을 만족함은 분명하다. 자명한 해 $\mathrm{g} \equiv 0$을 제외하면 이것이 해의 전부이다.

소문항 (ii)

모든 양수 x는 정확히 하나의 실수 u, 즉 $u = \ln x$에 대해 e^u로 나타난다. 따라서 $x = \mathrm{e}^u$, $y = \mathrm{e}^v$로 쓸 수 있고, 이때 u와 v는 **모든** 실수 범위를 움직인다. 그러면 $xy = \mathrm{e}^{u+v}$이고, 항등식은 모든 실수 u, v에 대해

$$\mathrm{H}(u) + \mathrm{H}(v) = \mathrm{h}(\mathrm{e}^u) + \mathrm{h}(\mathrm{e}^v) = \mathrm{h}(\mathrm{e}^{u+v}) = \mathrm{H}(u+v)$$

가 된다. 이것은 다시 $(*)$이므로 $\mathrm{H}(u) = ku$이다. $u = \ln x$이므로

$$\mathrm{h}(x) = k \ln x \qquad (x > 0),$$

이고, $\ln x + \ln y = \ln(xy)$이므로 이 함수는 조건을 만족한다.

소문항 (iii)

식 $\dfrac{x+y}{1-xy}$는 탄젠트 덧셈정리(tangent addition formula)가 모양을 바꾼 것이다. $u, v \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$에 대해 $x = \tan u$, $y = \tan v$로 놓으면 $u = \arctan x$, $v = \arctan y$이다. 그러면

$$z = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v} = \tan(u+v).$$

$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$에서 $\mathrm{T}(u) = \mathrm{t}(\tan u)$로 정의한다. $u+v$도 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$에 속할 때마다 항등식은

$$\mathrm{T}(u) + \mathrm{T}(v) = \mathrm{t}(x) + \mathrm{t}(y) = \mathrm{t}\big(\tan(u+v)\big) = \mathrm{T}(u+v).$$

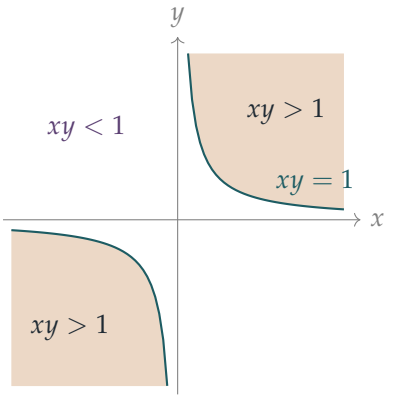
를 뜻한다.

생각해 보기 $(*)$에 대한 논증은 **모든** x와 y에 대해 성립하는 항등식을 이용했다. $u, v, u+v$가 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$에 속할 때만 항등식을 알고 있어도 이 논증이 여전히 통할까?

그렇다. 매클로린 논증은 0 근처만 본다. $|u| < \frac{\pi}{4}$이면 $v = u$를 대입할 수 있고(이때 $|2u| < \frac{\pi}{2}$), 그러면 0 근처에서 $2\mathrm{T}(u) = \mathrm{T}(2u)$를 얻는다. $u = 0$에서 n번 미분하면 앞에서와 똑같이 $(2 - 2^n)\mathrm{T}^{(n)}(0) = 0$이므로 $\mathrm{T}(u) = ku$이다. $u = \arctan x$이므로

$$\mathrm{t}(x) = k \arctan x.$$

이것이 실제로 어떤 x와 y에 대해 성립할까? $xy < 1$이면 $u+v \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$이다. u와 v의 부호가 다르면 이는 저절로 성립한다. 둘 다 양수이면 $\tan u \tan v < 1$은 $\tan v < \cot u = \tan(\frac{\pi}{2} - u)$를 뜻하므로 $u + v < \frac{\pi}{2}$이고, 둘 다 음수인 경우는 대칭성에 의해 마찬가지이다. 따라서 $\arctan x + \arctan y = \arctan z$이고, 항등식이 성립한다. 그러나 $xy > 1$이면 $u+v$는 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 밖에 있고, 이때 $\arctan z = u + v \mp \pi$이다. 예를 들어 $x = y = 2$이면 $z = -\frac{4}{3}$이고, $2\arctan 2 - \arctan(-\frac{4}{3}) = \pi$이다.



따라서 $\mathrm{t}(x) = k \arctan x$는 $xy < 1$인 모든 쌍, 즉 그림에서 원점을 포함하는 영역에서 항등식을 만족한다. 이것이 문제가 의도한 답이다. 색칠된 영역 $xy > 1$에서는 양변이 $\pm k\pi$만큼 차이 난다. $xy \neq 1$인 말 그대로 모든 쌍에 대해 항등식이 성립하기를 요구한다면 $k = 0$만 남고, 유일한 해는 $\mathrm{t} \equiv 0$이다.

검산

- 소문항 (iii)에서 항등식을 y에 대해 미분한 뒤 $y = 0$을 대입한다. $\partial z/\partial y = (1 + x^2)/(1 - xy)^2$이고 이는 $y = 0$에서 $1 + x^2$이므로 $\mathrm{t}'(0) = \mathrm{t}'(x)(1 + x^2)$를 얻는다. 따라서 $\mathrm{t}'(x) = k/(1 + x^2)$이고, $\mathrm{t}(0) = 0$과 함께 적분하면 $k \arctan x$가 된다. 같은 방법을 $(*)$에 쓰면 곧바로 $\mathrm{f}'(x) = \mathrm{f}'(0)$을 얻는다.
- 네 가지 답을 각각 10^4개의 무작위 쌍에 대해 수치적으로 확인하였다. 소문항 (iii)에서 $k \arctan x$는 $xy < 1$인 약 5×10^4개의 무작위 쌍 모두에서 항등식을 만족했고, $xy > 1$인 모든 쌍에서는 크기가 정확히 $k\pi$만큼 어긋났다.

흔한 실수

- 상수항을 잊는 것: $\mathrm{f}(0) = 0$은 $n = 0$인 경우에서 나오므로 답은 $kx + c$가 아니라 kx이다.
- $\mathrm{g} > 0$인지 확인하지 않고 $\ln \mathrm{g}$를 취하는 것. 영함수는 소문항 (i)의 엄연한 해이다.
- $\arctan x + \arctan y = \arctan \dfrac{x + y}{1 - xy}$가 항상 성립한다고 가정하는 것. 이 식은 $xy < 1$일 때만 성립한다.

STEP 너머

매클로린 급수를 가정하지 않아도 코시 방정식 $(*)$는 훨씬 적은 조건만으로 풀린다. f가 단지 연속(continuous)이기만 하면(또는 어떤 구간에서 유계(bounded)이기만 해도), 유리수(rational number) q에 대한 $\mathrm{f}(q) = q\,\mathrm{f}(1)$에서 출발하여 여전히 $\mathrm{f}(x) = kx$를 이끌어낼 수 있다. 하지만 선택 공리(axiom of choice)를 쓰면 선형이 아닌 기이한 해를 만들 수 있는데, 그 그래프는 평면에서 조밀(dense)하다. 소문항 (i)은 또한 지수함수가 덧셈에서 곱셈으로 가는 본질적으로 유일한 연속 준동형사상(homomorphism)임을 보여 주며, 이 생각은 군론(group theory) 전반에 걸쳐 다시 등장한다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 이런 종류의 연속성과 조밀성 논증이 꼼꼼하게 전개되는 것을 보기에 좋은 책이다.

풀이

STEP III 2006, 문제 5

순수수학 • 복소수와 기하

STEP III 2006, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/06-s3-q5

핵심 아이디어

삼각형이 정삼각형(equilateral triangle)일 필요충분조건은 한 꼭짓점에서 보았을 때 한 변이 다른 변을 60°만큼 돌린 것이라는 점이다. 복소수(complex numbers)에서 이 회전은 $e^{\pm i\pi/3}$을 곱하는 것이고, 이 두 수는 정확히 $t^2 - t + 1 = 0$의 근(roots)이다. 원점을 한 꼭짓점으로 옮기면 대칭식이 바로 그 이차식(quadratic)이 된다. 그다음 삼차방정식(cubic) 부분은 근과 계수의 관계(Vieta's formulae)로 해결되고, 마지막 부분은 $z \mapsto pw + q$가 그림을 회전하고, 확대·축소하고, 평행이동할 뿐이라는 관찰로 해결된다.

풀이

정삼각형 조건

꼭짓점 α에서 나가는 두 변을 $u = \beta - \alpha$, $v = \gamma - \alpha$라 하자. 세 점이 서로 다르므로 $u \neq 0$, $v \neq 0$, $u \neq v$이다. 먼저 우변을 전개해 보면 알 수 있듯이

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma - \gamma\alpha - \alpha\beta = \tfrac{1}{2}\left[(\alpha-\beta)^2 + (\beta-\gamma)^2 + (\gamma-\alpha)^2\right],$$

이다. 이제 $\alpha - \beta = -u$, $\gamma - \alpha = v$, $\beta - \gamma = u - v$이므로 대괄호 안은 $u^2 + (u-v)^2 + v^2 = 2(u^2 - uv + v^2)$이다. 따라서

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma - \gamma\alpha - \alpha\beta = u^2 - uv + v^2 = u^2\left(t^2 - t + 1\right), \qquad t = \frac{v}{u}.$$

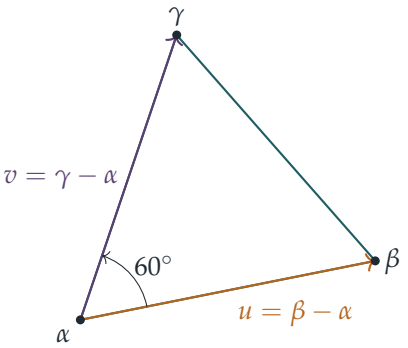
$u \neq 0$이므로 이 식이 0이 될 필요충분조건은 $t^2 - t + 1 = 0$, 즉

$$t = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = e^{\pm i\pi/3}.$$

이다.

생각해 보기 $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\pi/3}$이 왜 정확히 삼각형이 정삼각형이라는 뜻이 되는가?

v/u의 절댓값(modulus)은 $|\gamma-\alpha|/|\beta-\alpha|$이고, 편각(argument)은 α에서 변 $\alpha\beta$로부터 변 $\alpha\gamma$까지 잰 각이다. 따라서 $v/u=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\pi/3}$은 α에서 나가는 두 변의 길이가 같고 그 사이의 각이 $60°$라는 뜻이다. 이러한 이등변삼각형(isosceles triangle)의 두 밑각은 $\frac{1}{2}(180°-60°)=60°$이므로 정삼각형이다. 역으로 삼각형이 정삼각형이면 $|v|=|u|$이고 α에서의 각은 $60°$이며, 방향(orientation)에 따라 한쪽 또는 다른 쪽으로 돌아가므로 $v/u=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$ 또는 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}$이다.



따라서 서로 다른 세 점이 (어느 순서로든) 정삼각형을 이룰 필요충분조건은 이 식이 0인 것이며, 이것이 보이려던 것이다.

삼차방정식

$(*)$의 근을 α,β,γ라 하자. 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha+\beta+\gamma=-a$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b$이다. 따라서

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma-\gamma\alpha-\alpha\beta&=(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\\&=a^2-3b.\end{aligned}$$

첫 번째 결과에 의해 (서로 다른) 근들이 정삼각형을 이룰 필요충분조건은 $a^2-3b=0$, 즉 $a^2=3b$이다.

한 가지 주의할 점이 있다. 첫 번째 결과는 세 점이 서로 다를 것을 요구한다. 두 근이 같다면, 예를 들어 $\alpha=\beta$이면 식은 $(\gamma-\alpha)^2$이 되므로, 세 근이 모두 같을 때에만 0이 된다. 따라서 중복된 근이 있으면서 $a^2=3b$인 경우는 삼중근(triple root)일 때뿐이며, 이때 $z^3+az^2+bz+c=(z+\frac{a}{3})^3$, 즉 $c=a^3/27$도 성립한다. 한 점으로 이루어진 이 퇴화된 "삼각형"을 제외하면 $a^2=3b$가 정확히 구하는 조건이다.

변환

$(*)$에 $z = pw + q$를 대입하고 $p^3 \neq 0$으로 나누면

$$w^3 + \frac{3q+a}{p}\,w^2 + \frac{3q^2+2aq+b}{p^2}\,w + \frac{q^3+aq^2+bq+c}{p^3} = 0.$$

이다. 따라서

$$A = \frac{3q+a}{p}, \qquad B = \frac{3q^2+2aq+b}{p^2},$$

이고, 그러므로

$$A^2 - 3B = \frac{(9q^2+6aq+a^2) - (9q^2+6aq+3b)}{p^2} = \frac{a^2-3b}{p^2}.$$

이다. $(*)$의 근들이 정삼각형을 이루면 근들은 서로 다르고 $a^2 = 3b$이므로 $A^2 = 3B$이다. $(**)$의 근은 $(*)$의 근 z에 대하여 $w = (z-q)/p$이다. $p \neq 0$이므로 이 사상은 일대일(one-to-one)이고, 따라서 이 근들도 서로 다르다. 앞의 결과에 의해 $(**)$의 근들은 정삼각형을 이룬다.

기하적으로 보면 이것은 놀라운 일이 아니다. $w = (z-q)/p$는 $-q$만큼 평행이동하고, $-\arg p$만큼 회전하고, $1/|p|$배로 확대·축소하는 변환이며, 이 가운데 어느 것도 정삼각형을 망가뜨리지 않는다. 첫 번째 부분의 언어로 말하면 각 변이 p로 나누어지므로 비 v/u는 변하지 않는다.

검산

- 1의 세제곱근 $1, \omega, \omega^2$은 정삼각형을 이루고 $z^3 - 1 = 0$의 근이며, 이때 $a = b = 0$이므로 $a^2 = 3b$가 성립한다.
- $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$일 때 식은 $1 + \gamma^2 - \gamma$이고, $\gamma = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$이 $t^2 - t + 1$의 근이므로 이 값은 0이다.
- 무작위로 뽑은 1000개의 세 수에 대한 수치 검산으로, 그 수들을 근으로 하는 삼차방정식에 대해 $\sum \alpha^2 - \sum \alpha\beta = a^2 - 3b$임을 확인하였다. 같은 검산으로 $A^2 - 3B = (a^2-3b)/p^2$임과, 무작위 p와 q에 대해 정삼각형을 이루는 근들이 여전히 정삼각형을 이룸을 확인하였다.

흔한 실수

- 한쪽 방향만 확인하는 것: $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$과 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}$이 모두 나타나며, "필요충분조건"을 보이려면 둘 다 필요하다.

- u^2으로 나눌 수 있는 근거가 $u \neq 0$(서로 다른 점)이라는 것을 잊는 것.
- 대입 과정에서 B를 잘못 구하는 것: w의 계수는 세제곱에서 나온 $3q^2$, 제곱에서 나온 $2aq$, 그리고 b를 모은 것을 p^2으로 나눈 것이다.

STEP 너머

사상 $z \mapsto pz + q$는 평면의 닮음변환(direct similarities) 가운데 방향을 보존하는 것들이다. 비 $(\gamma - \alpha)/(\beta - \alpha)$나 $a^2 - 3b$가 0이라는 사실처럼 이 변환으로 변하지 않는 양을 **불변량**(*invariants*)이라 하며, 이는 기하학과 대수학의 핵심 개념이다. $f(z) = z^3 + az^2 + bz + c$라 할 때, 식 $a^2 - 3b$는 (상수배를 제외하면) f'의 판별식(discriminant)이다. 이는 마든의 정리(Marden's theorem)라는 아름다운 사실과 연결된다. f'의 근은 f의 근들이 이루는 삼각형의 각 변에 그 중점에서 접하는 타원(ellipse)의 초점(foci)이라는 것이다. 정삼각형의 경우 그 타원은 원이 되고, 두 초점은 합쳐져 f'의 중근(double root)이 된다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 바로 이러한 정신으로 복소 기하학을 전개한다.

풀이

STEP III 2006, 문제 6

순수수학 • 극곡선과 반사

STEP III 2006, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/06-s3-q6

핵심 아이디어

기울기 공식은 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$에 연쇄법칙(chain rule)을 적용한 것에 지나지 않는다. 거울 문제에서는 극(pole)을 O에 두고 시초선(initial line)을 L 방향으로 잡는다. 그러면 점 P에서 반사된 광선은 반지름을 따라 곧장 되돌아가므로, 그 방향은 θ만으로 정해진다. 반사의 법칙(law of reflection)에 따르면 법선(normal)은 두 광선이 이루는 각을 이등분하므로, 법선(따라서 접선(tangent)도)이 θ로 결정된다. 이렇게 하면 기하 문제가 $r(\theta)$에 대한 변수분리형 미분방정식(separable differential equation)으로 바뀐다.

풀이

극좌표(polar coordinates)에서의 기울기

$r = r(\theta)$로 주어진 곡선의 직교좌표는 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$이고, 여기서 r는 θ의 함수이다. 곱의 미분법(product rule)으로 θ에 대해 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\cos\theta - r\sin\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta + r\cos\theta.$$

연쇄법칙에 의해 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta \neq 0$인 곳에서는

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta + r\cos\theta}{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\cos\theta - r\sin\theta} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\tan\theta + r}{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} - r\tan\theta},$$

이고, 마지막 등식은 분자와 분모를 $\cos\theta$로 나눈 것이다($\cos\theta \neq 0$일 때 가능하다). 이것이 구하는 기울기이다.

나누기 전의 형태도 기억해 둘 만하다. 벡터

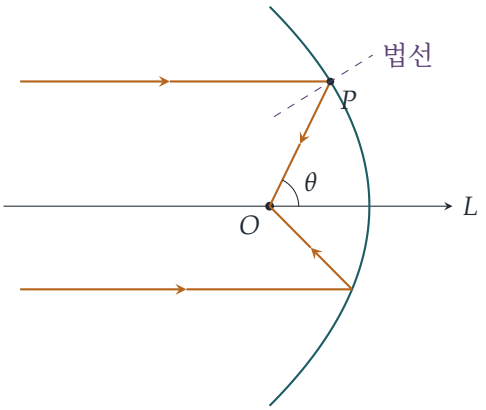
$$\mathbf{t} = \left(\tfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\cos\theta - r\sin\theta,\ \tfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta + r\cos\theta\right)$$

는 $\tan\theta$나 기울기가 정의되지 않는 점까지 포함하여, 곡선의 모든 점에서 접선 방향을 가리킨다.

거울

L을 포함하는 임의의 평면 Π를 잡고, 거울과 Π가 만나는 점을 P라 하자. P에서의 입사 광선은 L에 평행하므로 Π 위에 있다. 반사 광선은 L 위의 점 O를 지나므로 역시 Π 위에 있다. 또한 반사의 법칙에 따르면 P에서의 법선은 두 광선이 이루는 평면 위에 있으므로, 법선은 Π 위에 있고, P에서 교선의 접선은 Π 안에서 법선에 수직인 직선이다. 따라서 모든 일이 평면 Π 안에서 일어나므로 2차원에서 생각하면 된다.

Π에서 극을 O로, 시초선을 L 방향으로 하는 극좌표를 쓰되, 입사광이 $\theta = 0$ 방향(그림에서 왼쪽에서 오른쪽)으로 진행하도록 방향을 잡는다. P를 (r,θ), $-\pi < \theta < \pi$라 하자. ($\theta = \pi$인 점은 L 위에서 O의 뒤쪽에 있으며, 그곳의 광선은 거울 없이도 O를 곧장 지난다.)



법선의 방향. P에서 광선을 따라 P로부터 멀어지는 두 단위벡터를 잡는다.

$\mathbf{a} = (-1,\ 0)$ (입사 광선을 따라 거슬러 가는 방향), $\mathbf{b} = (-\cos\theta,\ -\sin\theta)$ (O를 향하는 방향).

법선은 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$와 같은 각을 이루므로 두 벡터가 이루는 각의 이등분선(bisector) 위에 있고, 이는 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$의 방향이다(두 단위벡터가 만드는 마름모(rhombus)의 대각선은 두 벡터 사이의 각을 이등분한다). 이제

$$\mathbf{a}+\mathbf{b} = -(1+\cos\theta,\ \sin\theta) = -2\cos\tfrac{\theta}{2}\left(\cos\tfrac{\theta}{2},\ \sin\tfrac{\theta}{2}\right),$$

이고, 여기서 $1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$와 $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$를 이용하였다. $-\pi < \theta < \pi$이므로 $\cos\frac{\theta}{2} > 0$이고, 따라서 이 벡터는 영벡터가 아니며 P에서의 법선은

$$\mathbf{n} = \left(\cos\tfrac{\theta}{2},\ \sin\tfrac{\theta}{2}\right):$$

방향이다. 즉 법선은 L과 각 $\frac{\theta}{2}$를 이룬다.

생각해 보기 기울기 공식을 접선의 기울기와 같다고 놓으면 되지 않을까?

그렇게 할 수도 있다. 접선은 $\mathbf{n}$에 수직이므로 그 기울기는 $-\cot\frac{\theta}{2}$이고, 이를 극좌표 공식과 같다고 놓고 분모를 없애면 아래와 같은 방정식이 나온다. 하지만 이 방법은 $\tan\theta$, $\cot\frac{\theta}{2}$와 공식의 분모로 나누는 과정을 거치므로 $\theta = 0$과 $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$에서 성립하지 않는다. 접선벡터 $\mathbf{t}$를 쓰면 이런 문제를 모두 피할 수 있다.

미분방정식. 접선은 법선에 수직이므로 $\mathbf{t}\cdot\mathbf{n} = 0$이다.

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\left(\cos\theta\cos\tfrac{\theta}{2} + \sin\theta\sin\tfrac{\theta}{2}\right) + r\left(\cos\theta\sin\tfrac{\theta}{2} - \sin\theta\cos\tfrac{\theta}{2}\right) = 0.$$

삼각함수의 덧셈정리(compound-angle formulae)에 의해 괄호 안은 각각 $\cos\left(\theta - \frac{\theta}{2}\right) = \cos\frac{\theta}{2}$와 $\sin\left(\frac{\theta}{2} - \theta\right) = -\sin\frac{\theta}{2}$이다. 따라서

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\cos\tfrac{\theta}{2} = r\sin\tfrac{\theta}{2}, \qquad \text{즉,} \qquad \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \tan\tfrac{\theta}{2},$$

이고, 이는 $r\cos\frac{\theta}{2}$로 나눈 것인데, $P \neq O$이고 $-\pi < \theta < \pi$이므로 이 값은 양수이다.

방정식 풀기. 이 방정식은 변수분리형이다. θ에 대해 적분하고, $\int\tan\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = -2\ln\cos\frac{\theta}{2}$임($\cos\frac{\theta}{2} > 0$이므로 성립)에 주의하면

$$\ln r = -2\ln\cos\tfrac{\theta}{2} + C \quad\Longrightarrow\quad r\cos^2\tfrac{\theta}{2} = k,$$

이다. 여기서 $k = \mathrm{e}^C > 0$는 곡선 위에서 일정한 상수이다(곡선은 구간 $-\pi < \theta < \pi$에서 $r = r(\theta)$로 주어지는 연결된 한 조각이다). $2\cos^2\frac{\theta}{2} = 1 + \cos\theta$를 쓰면

$$r(1 + \cos\theta) = 2k.$$

직교좌표로 바꾸기. $x = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$를 대입하면 $\sqrt{x^2+y^2} = 2k - x$가 된다. $2k - x = r \geq 0$이므로 양변이 모두 음이 아니고, 양변을 제곱하면

$$x^2 + y^2 = 4k^2 - 4kx + x^2 \qquad\Longrightarrow\qquad y^2 = 4k(k - x).$$

이것은 축이 L이고 꼭짓점(vertex)이 $(k, 0)$, 초점(focus)이 원점 O이며, 들어오는 빛 쪽을 향해 열린 포물선(parabola)이다. Π는 L을 포함하는 임의의 평면이었으므로, 거울은 그러한 모든 평면과 포물선에서 만난다. 이로써 증명이 끝난다. ■

검산

- 거꾸로 확인해 보자. $y^2 = 4k(k-x)$ 위에서 법선은 $(4k, 2y)$ 방향이고, 방향 $(1,0)$을 이 법선에 대해 반사하면 O를 지나는 광선이 된다. $k = 1.3$으로 놓고 무작위로 고른 10^4개의 점에서 이를 수치적으로 확인하였고, $r = 2k/(1+\cos\theta)$가 $r'/r = \tan\frac{\theta}{2}$를 만족함도 유한차분(finite differences)으로 확인하였다.
- 무작위 곡선 $r(\theta)$에 대해 기울기 공식은 유한차분으로 구한 기울기와 약 10^{-8} 정도까지 일치하였다.
- $\theta = 0$에서 법선은 L 위에 있고 접선은 L에 수직이다. 이 점이 꼭짓점 $(k,0)$이며, L을 따라 들어온 광선은 여기서 반사되어 O를 지나 곧장 되돌아간다.

흔한 실수

- 법선으로 외각 이등분선(external bisector) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$를 쓰는 것. 이 방향은 두 광선과 같은 각이 아니라 서로 보각(supplementary angles)을 이루며, $r'/r = -\cot\frac{\theta}{2}$로 이어진다. 그 해 $r(1-\cos\theta) = 2k$는 반대쪽을 향한 포물선으로, 반대 방향에서 들어오는 빛을 모은다.
- 문제가 왜 2차원 문제가 되는지 설명하지 않는 것. 법선이 L과 P를 포함하는 평면 위에 있어야 하며, 그렇지 않으면 교선이 우리가 사용한 접선을 가진다고 할 수 없다.
- 양변이 음이 아님을 언급하지 않고 $\sqrt{x^2+y^2} = 2k - x$를 제곱하는 것.

STEP 너머

이 거울은 회전포물면(paraboloid of revolution)이며, 여기서 증명한 성질은 초점–준선(focus–directrix) 성질이 모습을 바꾼 것이다. $r(1+\cos\theta) = 2k$는 O까지의 거리가 직선 $x = 2k$까지의 거리와 같다는 뜻이다. 위성 안테나, 자동차 전조등, 반사 망원경이 회전포물면 모양인 까닭이 여기에 있다. 더 일반적으로, 원뿔곡선(conics)은 모두 $r(1+e\cos\theta) = \ell$이라는 극방정식으로 나타낼 수 있으며, 이는 뉴턴(Newton)이 행성 궤도를 풀 때 나오는 바로 그 식이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이 식을 역제곱 법칙(inverse-square law)으로부터 유도한다.

풀이

STEP III 2006, 문제 7

순수수학 • 일계 미분방정식

STEP III 2006, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/06-s3-q7

핵심 아이디어

두 미분방정식(differential equation)은 모두 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$에 대한 이차식(quadratic)이다. 처음부터 미분방정식으로 공략하기보다는 각 이차식을 도함수(derivative)에 대해 풀어서, 방정식을 두 개의 평범한 1계(first-order) 방정식으로 나눈다. 쌍곡선함수 항등식(hyperbolic identities)을 쓰면 근이 간단한 꼴로 정리되고, $x = 0$에서의 조건을 보면 어느 근을 따라가야 하는지 알 수 있다.

풀이

소문항 (i)

근의 공식(quadratic formula)에 의해

$$u = -\sinh x \pm \sqrt{\sinh^2 x + 1} = -\sinh x \pm \cosh x,$$

이다. $\sinh^2 x + 1 = \cosh^2 x$이고 $\cosh x > 0$이기 때문이다. $\cosh x + \sinh x = \mathrm{e}^x$와 $\cosh x - \sinh x = \mathrm{e}^{-x}$를 이용하면 두 근(root)은

$$u = \mathrm{e}^{-x} \qquad \text{또는} \qquad u = -\mathrm{e}^x.$$

이다.

주어진 미분방정식은 이 이차식에서 $u = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$로 둔 것이므로, 모든 x에서

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-x} \qquad \text{또는} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\mathrm{e}^x.$$

이어야 한다. 첫째 근은 항상 양수이고 둘째 근은 항상 음수이므로 두 근은 결코 일치하지 않는다. 따라서 도함수가 연속인 해는 한 근에서 다른 근으로 건너뛸 수 없고, $x = 0$에서의

조건 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x > 0$에 의해 구간 전체에서 첫째 근이 선택된다. 적분하면 $y = -\mathrm{e}^{-x} + c$이고, $x = 0$에서 $y = 0$이므로 $c = 1$이다:

$$y = 1 - \mathrm{e}^{-x}.$$

소문항 (ii)

$p = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$라 하자. $\sinh y = 0$, 즉 $y = 0$이면 방정식은 $2p = 0$이 된다. $y \equiv 0$이 해가 되는 것은 이 때문이며, 이것이 바로 문제에서 제외하라고 한 해이다. $y \neq 0$인 곳에서는 근의 공식에 의해

$$p = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \sinh^2 y}}{\sinh y} = \frac{-1 \pm \cosh y}{\sinh y}.$$

이다. 반각 공식(half-angle forms) $\cosh y - 1 = 2\sinh^2 \frac{y}{2}$, $\cosh y + 1 = 2\cosh^2 \frac{y}{2}$, $\sinh y = 2\sinh \frac{y}{2} \cosh \frac{y}{2}$를 쓰면 두 근은

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tanh \frac{y}{2} \qquad \text{또는} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\coth \frac{y}{2}.$$

이다. 두 근의 곱은 -1인 반면, 두 근이 같다면 그 곱은 $\tanh^2 \frac{y}{2} \geq 0$이어야 하므로 두 근은 결코 일치하지 않는다.

> **생각해 보기** 두 방정식 가운데 어느 것이 원점을 지나면서 항등적으로 0이 아닌 해를 줄 수 있을까?

첫째 방정식 $y' = \tanh \frac{y}{2}$는 해 $y \equiv 0$을 가진다. 우변이 y에 대한 매끄러운 함수이므로, $(0,0)$을 지나는 해는 이것뿐이다. 즉 이것은 다시 자명한 해(trivial solution)이다. 둘째 방정식은 $y = 0$에서 특이하여 $|\mathrm{d}y/\mathrm{d}x| \to \infty$이므로, 그 해곡선은 수직 접선(vertical tangent)을 가지며 $y = 0$과 만날 수 있다. 우리가 원하는 것은 바로 이 해이다. 변수분리(separation of variables)를 하면

$$\int \tanh \frac{y}{2}\, \mathrm{d}y = -\int \mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad 2\ln\cosh \frac{y}{2} = -x + C.$$

이다. $x = 0$에서 $y = 0$을 대입하면 $C = 0$이므로 $\cosh^2 \frac{y}{2} = \mathrm{e}^{-x}$이다. $\cosh y = 2\cosh^2 \frac{y}{2} - 1$이므로

$$\cosh y = 2\mathrm{e}^{-x} - 1.$$

이다. 이를 직접 확인할 수 있다. 미분하면 $\sinh y\, y' = -2\mathrm{e}^{-x} = -(\cosh y + 1)$이고, 이는 정확히 $y' = -\coth \frac{y}{2}$이다. 이 계산은 y의 부호에 관계없이 성립하므로, 위쪽 절반과 아래쪽 절반을 포함한 곡선 전체가 해이다. $\cosh y \geq 1$이므로 곡선은 $x \leq 0$에서만 존재한다. 곡선은 x축에 대하여 대칭이다. 원점 근처에서는 $1 + \frac{1}{2}y^2 \approx 1 - 2x$이므로, 곡선은 그곳에서 포물선(parabola) $y^2 = -4x$처럼 보인다.

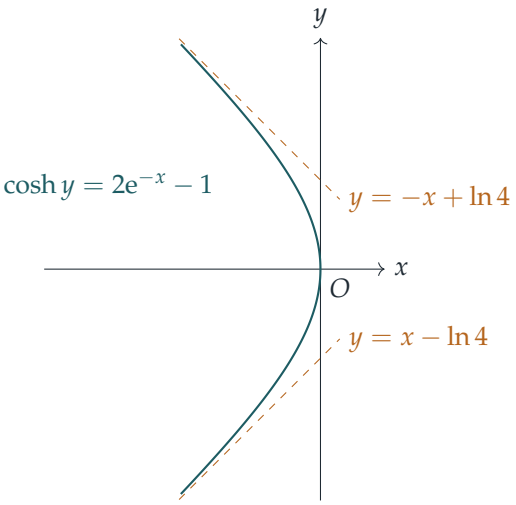
점근선. $x \to -\infty$일 때 $\cosh y \to \infty$이므로 $|y| \to \infty$이다. $w = 2\mathrm{e}^{-x} - 1$이라 하자. 그러면

$$|y| = \operatorname{arcosh} w = \ln\bigl(w + \sqrt{w^2 - 1}\bigr),$$

이므로

$$|y| - (-x + \ln 4) = \ln \frac{w + \sqrt{w^2 - 1}}{4\mathrm{e}^{-x}} = \ln\Bigl(\frac{w}{4\mathrm{e}^{-x}}\Bigl(1 + \sqrt{1 - w^{-2}}\Bigr)\Bigr).$$

이다. $x \to -\infty$일 때 $w/(4\mathrm{e}^{-x}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{x} \to \frac{1}{2}$이고 $1 + \sqrt{1 - w^{-2}} \to 2$이므로, 로그 안의 값은 1로 수렴하고 그 차는 0으로 수렴한다. 따라서 곡선의 위쪽 절반은 $y = -x + \ln 4$에 가까워지고, 대칭성에 의해 아래쪽 절반은 $y = -(-x + \ln 4)$에 가까워진다. 그러므로 점근선(asymptote)은 문제에서 요구한 대로 $y = \pm(-x + \ln 4)$이다. ($x \to 0^{-}$일 때 곡선은 유계이므로, 점근선은 이 둘뿐이다.)



검산

- (i)에서 $y = 1 - \mathrm{e}^{-x}$이면 $y' = \mathrm{e}^{-x}$이고, $\mathrm{e}^{-2x} + 2\mathrm{e}^{-x}\sinh x - 1 = \mathrm{e}^{-2x} + (1 - \mathrm{e}^{-2x}) - 1 = 0$이다.
- (ii)에서 $y' = -\coth\frac{y}{2}$를 원점 근처에서부터 $x = -6$까지 수치적으로 계산하면 $y \approx 7.38505$를 얻으며, 이는 $\operatorname{arcosh}(2\mathrm{e}^{6} - 1)$과 일치한다. $x = -10$에서 곡선과 $-x + \ln 4$ 사이의 차이는 약 2×10^{-5}이다.

흔한 실수

- (i)에서 근 $-\sinh x - \cosh x = -\mathrm{e}^{x}$를 택하는 것: 이 근은 $x = 0$에서 도함수가 음수이다.
- (ii)에서 $y = 0$에서 "잘 행동한다"는 이유로 $y' = \tanh \frac{y}{2}$를 고르는 것. 이 방정식은 원점을 지나는 해로 $y \equiv 0$만을 준다.
- $y < 0$인 곡선의 아래쪽 절반을 잇는 것. 이 부분은 두 번째 점근선을 얻는 데 필요하다.

STEP 너머

이 문제의 방정식들처럼 y'에 대해 선형이 아닌 방정식을 **1계 음함수**(*first-order implicit*) 방정식이라 한다. 이를 y'에 대해 풀면 여러 갈래(branch)로 나뉜다. 소문항 (ii)는 해의 유일성(uniqueness)이 깨질 수 있다는 것도 보여 준다. $y = 0$에서 우변 $-\coth \frac{y}{2}$는 립시츠(Lipschitz) 조건을 만족하지 않으며, 그 때문에 자명하지 않은 해가 $y \equiv 0$과 같은 점에서 출발할 수 있다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 존재성과 유일성 정리(existence and uniqueness theorems)와 그 정리들이 적용되는 조건을 다룬다.

풀이

STEP III 2006, 문제 8

순수수학 • 공리적 미분

STEP III 2006, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/06-s3-q8

핵심 아이디어

네 가지 규칙은 우리가 매일 쓰는 미분(differentiation)의 성질 그 자체이다. 곧 선형성(linearity)과 곱의 법칙(product rule), 그리고 x를 "미분하면" 1이 된다는 사실 하나이다. 모든 다항식(polynomial)은 수 1과 문자 x로부터 곱하기와 더하기를 거듭하여 만들어진다. 따라서 $\triangle$이 1과 x에 어떻게 작용하는지 알면, 나머지 모든 곳에서는 규칙들이 $\triangle$에 아무런 자유도 남기지 않는다. $x \cdot x^n$에 곱의 법칙을 적용하면 거듭제곱에 대한 귀납법(induction)이 나오고, 그다음은 선형성이 마무리한다.

풀이

이 풀이 전체에서 "규칙 (i)"부터 "규칙 (iv)"까지는 주어진 순서대로 네 가지 정의 규칙을 가리킨다.

상수

먼저 상수 다항식 1을 생각한다. $1 = 1 \cdot 1$이므로, $f(x) = g(x) = 1$로 두고 규칙 (iv)를 적용하면

$$\triangle 1 = \triangle(1 \cdot 1) = 1 \cdot \triangle 1 + 1 \cdot \triangle 1 = 2\triangle 1.$$

양변에서 $\triangle 1$을 빼면 $\triangle 1 = 0$(영다항식)을 얻는다.

생각해 보기 그냥 "도함수처럼 상수에 $\triangle$을 취하면 영이다"라고 말하면 안 되는 이유는 무엇일까?

우리는 아직 $\triangle$이 도함수(derivative)라는 사실을 모르기 때문이다. 그것이 바로 마지막 부

분에서 증명하라고 요구하는 내용이다. 우리가 쓸 수 있는 것은 네 가지 규칙뿐이며, 그중 어느 것도 상수를 직접 언급하지 않는다. 요령은 1이 자기 자신의 제곱이라는 점이다. 그래서 곱의 법칙에 의해 $\triangle 1$은 자기 자신의 두 배와 같아질 수밖에 없다.

이제 $f(x) = \lambda$를 임의의 상수라 하자. 그러면 $\lambda = \lambda \cdot 1$이므로 규칙 (iii)에 의해

$$\triangle\lambda = \triangle(\lambda \cdot 1) = \lambda \triangle 1 = \lambda \cdot 0 = 0.$$

따라서 차수(degree)가 영인 모든 다항식에 대하여 $\triangle f(x) = 0$이며, 이것이 보이려던 것이다.

제곱과 세제곱

$x^2 = x \cdot x$로 쓰고 규칙 (iv)와 규칙 (i)을 차례로 적용하면

$$\triangle x^2 = x \triangle x + x \triangle x = x \cdot 1 + x \cdot 1 = 2x.$$

$x^3 = x \cdot x^2$로 쓰고 규칙 (iv)를 적용한 다음, 방금 얻은 결과와 규칙 (i)을 쓰면

$$\triangle x^3 = x \triangle x^2 + x^2 \triangle x = x \cdot 2x + x^2 \cdot 1 = 3x^2.$$

일반적인 다항식

1단계: x의 거듭제곱. 다음을 귀납법으로 증명한다.

$$\triangle x^n = n\, x^{n-1} \qquad \text{모든 정수} n \geq 1.$$

$n = 1$일 때 이 식은 $\triangle x = 1$이고, 이는 규칙 (i)이다. 어떤 $n = k \geq 1$에 대하여 성립한다고 가정하자. $x^{k+1} = x \cdot x^k$이므로 규칙 (iv)에 의해

$$\begin{aligned} \triangle x^{k+1} &= x \triangle x^k + x^k \triangle x \\ &= x \cdot k\, x^{k-1} + x^k \cdot 1 \\ &= (k+1)\, x^k, \end{aligned}$$

이다. 여기서 둘째 줄에서는 귀납 가정(induction hypothesis)과 규칙 (i)을 썼다. 따라서 결과는 $n = k+1$일 때도 성립하고, 귀납법에 의해 모든 $n \geq 1$에 대하여 성립한다. $n = 0$일 때는 $x^0 = 1$이고 앞에서 $\triangle 1 = 0$임을 보였으므로, 이는 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}1 = 0$과 일치한다. 따라서 모든 $n \geq 0$에 대하여

$$\triangle x^n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, x^n.$$

2단계: 여러 항의 합. 규칙 (ii)는 두 다항식에 대해 진술되어 있지만, 임의의 유한 개로 확장된다. $\triangle(f_1 + \cdots + f_m) = \triangle f_1 + \cdots + \triangle f_m$이라 하면, 두 다항식 $f_1 + \cdots + f_m$과 f_{m+1}에 규칙 (ii)를 적용하여

$$\triangle(f_1 + \cdots + f_{m+1}) = \triangle(f_1 + \cdots + f_m) + \triangle f_{m+1} = \triangle f_1 + \cdots + \triangle f_{m+1},$$

을 얻는다. 따라서 m에 대한 귀납법에 의해 항의 개수가 몇 개이든 성립한다.

3단계: 종합하기. 임의의 다항식은 상수 a_k를 써서 $h(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$로 쓸 수 있다. 그러면

$$\begin{aligned}
\triangle h(x) &= \sum_{k=0}^{n} \triangle\left(a_k x^k\right) && \text{2단계에서 확장한 규칙 (ii)에 의해} \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k \triangle x^k && \text{규칙 (iii)에 의해} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\, a_k\, x^{k-1} && \text{1단계에 의해 } (k=0\text{인 항은 } 0) \\
&= \frac{\mathrm{d}h(x)}{\mathrm{d}x},
\end{aligned}$$

이며, 마지막 줄은 다항식의 통상적인 도함수이다. 이는 모든 다항식 $h(x)$에 대하여 성립하므로 $\triangle h(x) \equiv \dfrac{\mathrm{d}h(x)}{\mathrm{d}x}$이고, 이것이 보이려던 것이다.

검산

보통의 미분이 네 가지 규칙을 모두 만족한다는 사실은 안심이 된다. 즉 규칙들이 서로 모순되지 않으며, $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$는 실제로 문제에서 묘사한 종류의 연산이다. 곱의 법칙을 공식과 비교하여 확인할 수도 있다. $f = x^2$, $g = x^3$에 대하여 규칙 (iv)는 $x^2 \cdot 3x^2 + x^3 \cdot 2x = 5x^4$을 주는데, 이는 $\triangle x^5$이다. 컴퓨터에서 오직 규칙들만으로(1단계부터 3단계까지처럼) $\triangle$을 구현하고, 차수가 9 이하인 무작위 다항식 2000개에 대하여 도함수와 정확히 비교해 보았다. 예를 들어 $\triangle\left(\frac{1}{2}x^4 - 3x + 7\right) = 2x^3 - 3$이며, 이는 수치적인 차분몫(difference quotient)과도 일치한다.

흔한 실수

- "도함수이니까"라는 이유로 $\triangle(\text{상수}) = 0$이라고 단정하는 것. 이는 최종 답을 미리 가정하는 것이며, 규칙들로부터 유도해야 한다.
- 긴 합에 아무 설명 없이 규칙 (ii)를 쓰는 것. 이 규칙은 두 다항식에 대해 진술되어 있으므로, 더 많은 항에 쓰려면 귀납법에 관한 한 문장이 필요하다.
- 어느 곳에서 어느 규칙을 썼는지 밝히지 않는 것. 문제에서 이를 명시적으로 요구한다.

STEP 너머

선형성과 곱의 법칙을 만족하는 연산을 **도분**(derivation)이라 한다. 여기서의 논증은 다항식 위의 도분이 x에서의 값만으로 완전히 결정된다는 것을 보여 준다. 만약 어떤 다항식 p에

대하여 $\triangle x = p(x)$라면, 같은 증명으로 $\triangle h = p(x)\,h'(x)$를 얻는다. 극한을 전혀 쓰지 않고 미분을 대수적으로 정의할 수 있다는 생각은 추상대수학(abstract algebra)과 미분기하학(differential geometry)에서 핵심적이다. 미분기하학에서 벡터장(vector field)은 정확히 함수 위의 도분이다. 다항식환(polynomial ring)을 대수적으로 다루는 내용을 처음 접하기에는 Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)가 좋은 책이다.

풀이

STEP III 2006, 문제 9

역학 • 에너지 보존

STEP III 2006, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

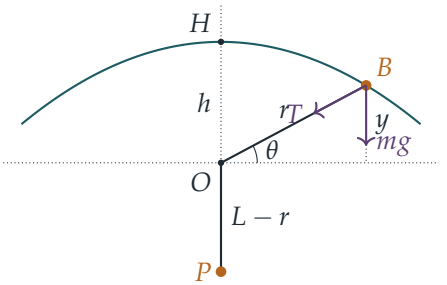
step.maths.org/questions/06-s3-q9

핵심 아이디어

실의 길이가 일정하므로, 구슬이 O에서 멀어진 거리만큼 입자 P는 똑같이 올라간다. 이 사실이 두 퍼텐셜 에너지(potential energy)를 하나로 묶어 준다. 즉 전체 퍼텐셜 에너지는 $y + r$에만 의존한다. "모든 위치에서 평형(equilibrium)"이라는 말은 퍼텐셜 에너지가 특별히 선호하는 위치가 없다는 뜻이므로, 퍼텐셜 에너지는 철사를 따라 일정해야 한다. 일단 일정하다는 것을 알면 에너지 보존(energy conservation)에 의해 전체 운동 에너지(kinetic energy)는 결코 변하지 않으며, 나머지는 구슬의 속력을 극좌표(polar coordinates)로 쓰는 일뿐이다.

풀이

모형. P와 B는 질량이 m인 입자이다. 실은 가볍고 늘어나지 않으며, 고리와 철사는 매끄럽다. 따라서 실의 장력(tension)이 하는 알짜 일은 없고, 철사의 수직항력(normal reaction)도 일을 하지 않는다. O를 원점으로 잡고, x는 수평 방향, y는 연직 위 방향으로 잡으며, 실의 길이를 L이라 하자.



철사의 모양

O에서 B까지의 실의 길이가 r이므로 길이 OP는 $L-r$이고, P는 O보다 $L-r$만큼 아래에 있다. O를 지나는 수평면을 퍼텐셜 에너지의 기준(0)으로 잡으면, 전체 퍼텐셜 에너지는

$$U = mgy - mg(L-r) = mg(y+r) - mgL.$$

이다. 이 계의 자유도(degree of freedom)는 하나(철사 위에서 구슬의 위치)이고, 평형 위치는 철사를 따라 본 U의 정류점(stationary point)이다. 모든 위치가 평형이라면 철사 위 모든 곳에서 $\mathrm{d}U/\mathrm{d}s = 0$이므로($s$는 호의 길이(arc length)이다) U는 철사를 따라 일정하다. 따라서 $y+r$는 일정하다.

H에서 구슬은 O의 바로 위 높이 h에 있으므로 그곳에서 $y = h$, $r = h$이고, 그 상수는 $2h$이다. 그러므로 철사는

$$y + r = 2h,$$

이며, 이것이 보이려던 것이다. (직교좌표로 쓰면 $x^2 + y^2 = (2h-y)^2$에서 $y = h - x^2/(4h)$를 얻는다. 이는 그림에서처럼 초점(focus)이 O인 포물선(parabola)이다. 평형을 직접 확인할 수도 있다. P가 평형 상태이므로 장력은 mg이고, BO 방향의 mg와 아래 방향의 mg의 합력은 두 방향 사이의 각을 이등분한다. 포물선의 반사 성질(reflection property)에 의해, 이것은 정확히 그 점에서 포물선의 법선 방향이다.)

θ의 변화율

철사 위에서 $y = 2h - r$이므로

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{2h}{r} - 1.$$

이다. 시간에 대해 미분하면

$$\cos\theta\,\dot{\theta} = -\frac{2h\dot{r}}{r^2}.$$

이다. $\theta = \arcsin(y/r)$는 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$에 속하므로 $\cos\theta \geq 0$이고, 따라서

$$\cos\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{2h-r}{r}\right)^2} = \frac{\sqrt{r^2 - (2h-r)^2}}{r} = \frac{\sqrt{4rh - 4h^2}}{r} = \frac{2\sqrt{rh-h^2}}{r}.$$

이다. 구슬이 H를 떠난 뒤에는 $r > h$이다($r = 2h - y$이고 H가 아닌 곳에서는 $y < h$이기 때문이다). 그러므로 $\cos\theta \neq 0$이어서 나눌 수 있다.

$$\dot{\theta} = -\frac{2h\dot{r}}{r^2} \cdot \frac{r}{2\sqrt{rh-h^2}} = -\frac{h\dot{r}}{r\sqrt{rh-h^2}},$$

이것이 구하려던 결과이다.

P의 속력

생각해 보기 전체 운동 에너지가 왜 $\frac{1}{2}mV^2$로 계속 유지되어야 하는가?

계에 일을 하는 힘은 중력과 (내부의) 실의 장력뿐이다. 장력이 하는 알짜 일은 없다. 실은 늘어나지 않고 고리는 매끄러우므로, 장력이 B에 하는 일과 P에 하는 일이 서로 상쇄된다. 철사는 매끄러우므로 그 반작용도 일을 하지 않는다. 따라서 운동 에너지와 퍼텐셜 에너지의 합은 보존된다. 그런데 방금 이 철사를 따라 퍼텐셜 에너지 U가 일정하다는 것을 보였으므로, 운동 에너지도 일정하다.

처음에 구슬은 H에 있고, 그곳에서 r는 최솟값 h를 가진다(그곳에서 y가 가장 크기 때문이다). 그러므로 처음에 $\dot{r} = 0$이고, 속력이 $|\dot{r}|$인 P는 정지 상태에서 출발한다. 따라서 처음 운동 에너지는 $\frac{1}{2}mV^2$이다.

O에 대한 극좌표에서 구슬의 속력의 제곱은 $\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$이다. $\dot{\theta}$에 대한 결과를 이용하면

$$r^2\dot{\theta}^2 = \frac{h^2\dot{r}^2}{rh - h^2} = \frac{h\dot{r}^2}{r-h}, \qquad \text{이므로} \qquad v_B^2 = \dot{r}^2\left(1 + \frac{h}{r-h}\right) = \frac{r\dot{r}^2}{r-h}.$$

이다. 운동 에너지 보존에서 $\frac{1}{2}m$을 약분하면

$$\frac{r\dot{r}^2}{r-h} + \dot{r}^2 = V^2 \quad \Longrightarrow \quad \dot{r}^2\,\frac{2r-h}{r-h} = V^2.$$

을 얻는다. $r > h$이므로 $r-h$와 $2r-h$는 모두 양수이고, P의 속력은

$$|\dot{r}| = V\left(\frac{r-h}{2r-h}\right)^{\frac{1}{2}},$$

이며, 이것이 보이려던 것이다.

검산

- H에서 $r = h$이고 공식은 0을 준다. 이는 옳다. 처음에 P가 정지해 있기 때문이다.
- $r \to \infty$이면 P의 속력은 $V/\sqrt{2}$로 수렴(converge)한다. 멀리 나가면 구슬은 거의 지름 방향으로 움직이므로, B와 P의 속력이 거의 같아지고 운동 에너지를 똑같이 나누어 가진다.
- 수치적으로, $h = 1$, $V = 2$로 두고 $y = 1 - \frac{1}{4}x^2$를 따라 구슬의 운동 방정식을 (RK4로) 단계별로 풀어, $\dot{\theta}$와 $\dot{r}$의 유한 차분 값을 공식과 비교하였다. $r \approx 4.043$에서 P의 속력은 1.31064였고, 이는 $2\sqrt{3.043/7.087}$와 유효숫자 여섯 자리까지 일치한다.

흔한 실수

- P의 퍼텐셜 에너지를 $+mg(L-r)$로 잡는 것. P는 O보다 아래에 있으므로 그 높이는 $-(L-r)$이다.
- P도 움직인다는 것을 잊고 $\frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}mV^2$로 쓰는 것.
- $\cos\theta$로 나누면서, 그 값이 H에서만 0이 된다는 점을 짚지 않는 것.

STEP 너머

계가 모든 곳에서 "중립" 평형을 이루는 곡선을 찾는 일은, 평형이 퍼텐셜 에너지의 정류점이라는 원리의 작은 예이다. 이 원리는 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)으로 이어지는데, 거기서는 실이나 철사 같은 구속 조건(constraints)을 좋은 좌표를 골라 처음부터 반영한다. 여기서는 하나의 좌표 r로 충분하며, 에너지 보존이 제1적분(first integral)이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 관점에서 에너지 방법과 극좌표를 다룬다.

풀이

STEP III 2006, 문제 10

역학 • 각운동량 보존

> **STEP III 2006, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/06-s3-q10

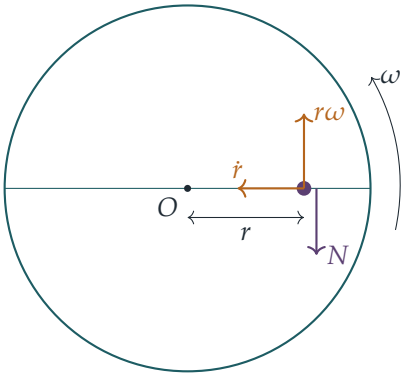
핵심 아이디어

원판과 입자로 이루어진 계에는 축을 중심으로 계를 돌리는 외부 작용이 전혀 없고, 매끄러운 홈은 알짜 일을 하지 않으므로 두 가지 보존 법칙(conservation law)이 성립한다. 바로 축에 대한 각운동량(angular momentum)과 운동에너지(kinetic energy)의 보존이다. 이 두 법칙으로 ω와 $\dot{r}$를 r만의 함수로 나타낼 수 있으며, V, Ω, a, k를 잇는 낯선 조건은 에너지 식이 간단하게 정리되도록 하기 위해 주어진 것이다. $\dot{r}$를 $\dot{\theta} = \omega$로 나누면 시간이 소거되고, 경로에 대한 변수분리형(separable) 방정식이 남는다.

풀이

모형

입자를 질량 m인 질점(point mass)으로, 홈을 매끄러운 것으로 다룬다. 따라서 입자에 작용하는 수평 방향의 힘은 홈에 수직인 항력(reaction) N뿐이다. 원판은 고정된 연직축을 중심으로 자유롭게 회전하므로, 베어링은 그 축에 대해 토크(torque)를 작용하지 않는다. 중력과 연직 방향의 항력은 연직 방향이므로 아무 역할도 하지 않는다. 원판이 회전한 각을 θ라 하면 $\omega = \dot{\theta}$이고, 입자와 축 사이의 거리를 r라 하자. 입자는 홈 안에 머물러 있으므로, 입자의 속도는 홈 방향의 성분 $\dot{r}$와 홈에 수직인 성분 $r\omega$를 갖는다.



각속도

항력 N은 입자에, $-N$은 같은 점에서 원판에 작용하므로, 축에 대한 두 힘의 모멘트는 서로 상쇄된다. 축에 대한 외부 토크가 없으므로 축에 대한 전체 각운동량은 일정하다. 원판의 각운동량은 $mk^2\omega$이고, 입자의 각운동량은 $mr \cdot r\omega = mr^2\omega$이다(속도의 가로 방향 성분만이 모멘트를 가진다). $t = 0$일 때 전체 각운동량은 $m(k^2 + a^2)\Omega$이므로

$$(k^2 + r^2)\,\omega = (k^2 + a^2)\,\Omega, \qquad \text{즉,} \qquad \omega = \frac{\Omega(k^2 + a^2)}{k^2 + r^2},$$

이고, 이것이 첫 번째 결과이다.

지름 방향 속력

> **생각해 보기** 입자가 움직이는 동안 홈은 입자를 옆으로 민다. 그런데 왜 에너지가 보존되는가?

항력 N은 홈에 수직이다. 입자와, 원판에서 입자와 맞닿은 점은 홈에 수직인 속도 성분이 $r\omega$로 같다. 둘의 속도는 홈 방향의 미끄러짐 속도 $\dot{r}$만큼만 다르며, 이 속도는 N에 수직이다. 따라서 N이 입자에 하는 일은 $-N$이 원판에 하는 일과 정확히 상쇄된다. 축의 베어링은 일을 하지 않으므로 전체 운동에너지는 일정하다.

공통인수 $\frac{1}{2}m$을 약분하면, 에너지 보존에 의해

$$k^2\omega^2 + \dot{r}^2 + r^2\omega^2 = k^2\Omega^2 + V^2 + a^2\Omega^2.$$

이제 우변에 주어진 조건 $V^2 = \Omega^2 a^2(k^2 + a^2)/k^2$을 대입하면

$$(k^2 + a^2)\Omega^2 + \frac{\Omega^2 a^2(k^2 + a^2)}{k^2} = \frac{\Omega^2(k^2 + a^2)(k^2 + a^2)}{k^2} = \frac{\Omega^2(k^2 + a^2)^2}{k^2}.$$

좌변에서는 첫 번째 결과에 의해 $(k^2+r^2)\omega^2 = \Omega^2(k^2+a^2)^2/(k^2+r^2)$이다. 따라서

$$\begin{aligned}\dot{r}^2 &= \Omega^2(k^2+a^2)^2\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k^2+r^2}\right)\\ &= \frac{\Omega^2 r^2(k^2+a^2)^2}{k^2(k^2+r^2)},\end{aligned}$$

이 되어 요구한 결과를 얻는다.

경로의 방정식

입자가 축을 향해 움직이는 동안 $\dot{r}<0$이므로, 음의 제곱근을 택하면

$$\dot{r} = -\frac{\Omega r(k^2+a^2)}{k\sqrt{k^2+r^2}}.$$

$\omega = \dot{\theta} > 0$이므로 연쇄법칙(chain rule) $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \dot{r}\Big/\dot{\theta} = \dot{r}/\omega$를 쓸 수 있다.

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{\Omega r(k^2+a^2)}{k\sqrt{k^2+r^2}}\cdot\frac{k^2+r^2}{\Omega(k^2+a^2)} = -\frac{r\sqrt{k^2+r^2}}{k},$$

따라서 $k\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -r(k^2+r^2)^{1/2}$이 되어 요구한 결과를 얻는다.

r 구하기

$u = k/r$로 놓으면 $u>0$이다. 그러면

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{k}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{k}{r^2}\cdot\frac{r\sqrt{k^2+r^2}}{k} = \sqrt{\frac{k^2}{r^2}+1} = \sqrt{1+u^2}.$$

이 식은 변수분리가 된다.

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}} = \int\mathrm{d}\theta \quad\Longrightarrow\quad \operatorname{arsinh}u = \theta+\alpha$$

여기서 α는 상수이다. 따라서 $k/r = \sinh(\theta+\alpha)$, 즉

$$r\sinh(\theta+\alpha) = k.$$

$t=0$일 때 $\theta=0$이고 $r=a$이므로 $\sinh\alpha = k/a$가 되어 요구한 결과를 얻는다.

입자는 결코 축에 도달하지 않는다

생각해 보기 $r = k/\sinh(\theta+\alpha)$는 결코 0이 되지 않는다. 그런데 θ가 유한한 시간 안에 무한대가 될 수는 없을까?

그럴 수 없다. $r^2 \geq 0$이므로 첫 번째 결과에 의해 $\omega \leq \Omega(k^2+a^2)/k^2$이고, 따라서 모든 유한한 시각 t에서 $\theta \leq \Omega(k^2+a^2)t/k^2$는 유한하다. 그러므로 모든 시각에서 $r = k/\sinh(\theta+\alpha) > 0$이다.

공식들이 계속 유효한지, 즉 입자가 계속 축을 향해 움직이는지도 확인해야 한다. $\dot{r}^2$에 대한 공식에 의해 $\dot{r}$는 $r = 0$일 때만 0이 될 수 있다. 따라서 $r > 0$인 동안 $\dot{r}$는 처음의 음의 부호를 유지하고, 위의 논증은 모든 $t > 0$에 대해 성립한다. 입자는 나선을 그리며 축에 점점 더 가까워지고, $r \to 0$은 $\theta \to \infty$일 때만 일어나므로 입자는 결코 축에 도달하지 않는다.

검산

- $r = a$일 때 $\dot{r}^2$에 대한 공식은 $\Omega^2 a^2(k^2+a^2)/k^2 = V^2$을 주며, 이는 초기 조건과 일치한다.
- $k = a = \Omega = 1$(따라서 $V = \sqrt{2}$)로 두고 운동 방정식 $\ddot{r} = r\omega^2$와 $(k^2+r^2)\omega =$ 상수를 수치적으로 적분하였다. 원판이 $\theta \approx 4.4170$만큼 회전했을 때 입자는 $r = 0.01$에 도달했으며, 이는 $\operatorname{arsinh} 100 - \operatorname{arsinh} 1 \approx 5.2983 - 0.8814 = 4.4169$와 일치한다. 계산하는 동안 에너지, $\dot{r}^2$, $r\sinh(\theta+\alpha) = k$ 모두 약 10^{-11}의 오차 범위 안에서 유지되었다.

흔한 실수

- 입자 자신의 각운동량 $mr^2\omega$나 가로 방향 운동에너지 $\frac{1}{2}mr^2\omega^2$를 빠뜨리는 것.
- $\dot{r}$에 대해 양의 제곱근을 택하여 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$의 부호를 잘못 구하는 것.
- θ가 유한한 시각에서 유한하게 유지된다는 점을 언급하지 않고 $r \neq 0$만으로 "결코 축에 도달하지 않는다"고 결론 내리는 것.

STEP 너머

입자는 지름 방향의 힘을 전혀 받지 않지만, 원판의 회전 좌표계(rotating frame)에서는 바깥쪽으로 밀려나는 것처럼 보인다. 이것이 $\ddot{r} = r\omega^2$의 원심력(centrifugal) 항이며, 옆으로 작용하는 항력 N은 코리올리 힘(Coriolis force)과 균형을 이룬다. 대학 역학에서는 이런 문제를 라그랑주 방법(Lagrangian methods)으로 다룬다. 각 θ가 에너지에 나타나지 않으므로, 그 켤레 운동량(conjugate momentum), 여기서는 각운동량이 자동으로 보존된다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 회전 좌표계와 각운동량을 적절한 수준에서 다룬다.

풀이

STEP III 2006, 문제 11

역학 • 연결된 계에서의 충돌

STEP III 2006, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/06-s3-q11

핵심 아이디어

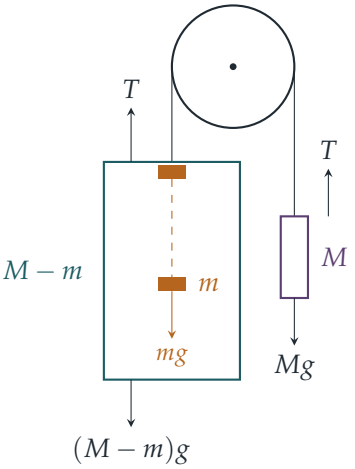
타일이 떨어져 나가는 순간 승강기(lift)는 균형추(counterweight)보다 가벼워지므로, 타일이 떨어지는 동안 승강기는 올라가기 시작한다. 따라서 타일은 **승강기에 대한 상대적인** 높이 h를 지나야 한다. 충돌할 때 승강기와 균형추는 질량 $2M - m$인 하나의 물체처럼 움직이며 바닥을 통해 타일과 연결되어 있다. 줄의 충격량(impulse)에 대해 주어진 조건이 바로 이 물체와 타일에 대해 운동량(momentum) 형태의 보존 법칙을 쓸 수 있게 해 준다. 이 "운동량"은 충돌 직전에 0이 되고, 그 덕분에 에너지 계산이 매우 깔끔해진다.

풀이

승강기, 균형추, 타일을 (연직 운동에 대한) 입자로, 줄은 가볍고 늘어나지 않는(inextensible) 것으로, 도르래(pulley)는 매끄러운 것으로 모형화한다. 타일이 떨어지기 전에는 계가 정지해 있으므로, 타일을 **포함한** 승강기가 균형추와 평형을 이룬다. 즉 승강기의 질량은 타일을 포함하면 M이고, 타일이 없으면 $M - m$이다.

낙하

승강기와 타일에 대해서는 위쪽을 양의 방향으로 잡는다. 줄이 늘어나지 않으므로 승강기가 속력 u, 가속도 a로 올라갈 때 균형추는 같은 속력과 가속도로 내려간다. 장력(tension)을 T라 하자.



승강기(위쪽)와 균형추(아래쪽)에 뉴턴(Newton)의 제2법칙을 적용하면

$$(M-m)a = T-(M-m)g, \qquad Ma = Mg - T.$$

두 식을 더하면 $(2M-m)a = mg$이므로

$$a = \frac{mg}{2M-m}.$$

타일은 아래쪽으로 가속도 g인 자유낙하(free fall)를 한다(안내 레일은 매끄럽고 다른 어떤 것도 타일에 닿지 않는다). 따라서 승강기에 대한 타일의 상대 가속도는 아래쪽으로

$$g + a = g + \frac{mg}{2M-m} = \frac{2Mg}{2M-m},$$

이고, 승강기에 대해 정지한 상태에서 출발한다. 시간 t가 지난 뒤 $\frac{1}{2}(g+a)t^2 = h$일 때 바닥에 닿으므로

$$t^2 = \frac{(2M-m)h}{Mg}.$$

그 순간 타일의 속력은

$$v = gt = \sqrt{g^2 \cdot \frac{(2M-m)h}{Mg}} = \sqrt{\frac{(2M-m)gh}{M}},$$

이며, 이것이 보이려던 결과이다. 이때 승강기(와 균형추)의 속력은

$$U = at = \frac{m}{2M-m}\,gt = \frac{mv}{2M-m}.$$

이 시간 동안 승강기는 $\frac{1}{2}at^2 = \frac{mh}{2M} < h$만큼 올라가므로, 도르래까지의 거리에 대한 조건에 의해 승강기가 그보다 먼저 도르래에 닿지 않음이 보장된다.

충돌

바닥이 타일에 주는 충격량을 J(위쪽)라 하고, 줄의 장력에 의한 충격량을 I라 하자. 주어진 조건에 의해 I는 승강기와 균형추에 같은 크기로 작용한다(각각에 위쪽으로 작용한다). 순간적인 충돌 동안 중력은 충격량을 주지 않는다. 충돌 직후 타일의 속도를 w(위쪽), 승강기의 속도를 U'(위쪽)라 하면, 균형추의 아래쪽 속도도 U'이다. 그러면

$$\begin{aligned} \text{타일:} \quad & m\big(w-(-v)\big) = J, \\ \text{승강기:} \quad & (M-m)(U'-U) = I-J, \\ \text{균형추 (아래쪽):} \quad & M(U'-U) = -I. \end{aligned}$$

세 식을 모두 더하면 J와 I가 소거된다.

$$mw + (2M-m)U' = -mv + (2M-m)U.$$

> **생각해 보기** "아래쪽"을 양의 방향으로 쓴 균형추의 식을 나머지 식들과 더해도 되는 이유는 무엇인가?

줄 때문에 "균형추가 아래로"와 "승강기가 위로"는 같은 좌표이다. 우리가 보인 것은 조합 $mw + (2M-m)U'$(타일의 위쪽 운동량에 줄을 따라 잰 승강기와 균형추의 운동량을 더한 것)이 충돌에 의해 변하지 않는다는 사실이다. 바로 여기서 충격량이 같다는 조건이 쓰인다. 이 조건이 없으면 I가 소거되지 않는다.

이제 핵심 관찰이다. $U = \dfrac{mv}{2M-m}$이므로 우변은 $-mv + mv = 0$이다. 따라서

$$mw + (2M-m)U' = 0 = -mv + (2M-m)U.$$

바닥에서의 뉴턴의 실험 법칙(Newton's experimental law)에 따르면 멀어지는 속력은 다가오는 속력의 e배이다.

$$w - U' = e\big(U-(-v)\big) = e(U+v).$$

충돌 전과 후의 속도가 모두 같은 "영운동량" 방정식을 만족하므로, 두 쌍 (w, U')와 $(-v, U)$는 각각 $(2M-m,\ -m)$의 상수배이다. 그러면 반발 방정식이 그 배수를 결정한다. 즉 $w = ev$이고 $U' = -eU$이다. (확인: $mev - (2M-m)eU = e(mv - mv) = 0$이고 $w - U' = e(v+U)$이다.)

에너지 손실

충돌 직전의 운동에너지(kinetic energy)는

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}(2M-m)U^2 = \tfrac{1}{2}mv^2\left(1 + \frac{m}{2M-m}\right) = \frac{Mmv^2}{2M-m} = mgh,$$

이다. 여기서 $U = \frac{mv}{2M-m}$을, 이어서 $v^2 = \frac{(2M-m)gh}{M}$을 이용하였다. 충돌 직후에는 모든 속도에 $\pm e$가 곱해졌으므로 운동에너지는 $e^2\,mgh$이다. 충돌은 순간적이므로 그동안 위치에너지(potential energy)는 변하지 않고, 계의 에너지 손실은

$$mgh - e^2 mgh = mgh(1-e^2),$$

이며, 이것이 보이려던 결과이다.

덧붙임

답은 M에 전혀 의존하지 않는다. 이것은 타일이 **고정된** 승강기 안에서 높이 h만큼 떨어져 반발계수(coefficient of restitution) e로 튀어 오를 때의 손실과 정확히 같다. 이는 이치에 맞는다. 충돌 직전 계의 운동에너지는 mgh인데, 이는 방출된 위치에너지와 같다(타일과 승강기가 간격 h를 좁히고, 승강기가 올라간 만큼 균형추가 정확히 내려가 상쇄된다). 또 줄을 따른 "운동량"이 0이므로, 이 충돌은 영운동량 좌표계(zero-momentum frame)에서 본 충돌처럼 행동하며, 그런 좌표계에서는 항상 운동에너지의 $1-e^2$ 비율만큼이 손실된다. 특히 $e=0$이면 운동에너지가 모두 손실되어 계 전체가 정지하고, $e=1$이면 아무것도 손실되지 않는다.

검산

- $M=5, m=2, h=3, g=10, e=\frac{1}{3}$으로 잡자. 그러면 $v^2=48$, $U^2=3$이므로 충돌 전 운동에너지는 $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 48 + \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 3 = 60 = mgh$이고, 손실은 $60\cdot\frac{8}{9} = \frac{160}{3}$이다.
- M, m, h, e를 무작위로 200가지 골라 운동을 수치적으로 단계별 계산하면(타일은 자유낙하, 승강기는 $\frac{mg}{2M-m}$로 위쪽 가속), 충돌 속력 v, 승강기 속력 U, 손실 $mgh(1-e^2)$가 그대로 재현된다.
- $m \to 0$이면 승강기는 거의 움직이지 않고 $v \to \sqrt{2gh}$, 즉 자유낙하 속력이 되며, 마땅히 그래야 한다.
- 장력에 의한 충격량 $I = M(U-U') = M(1+e)U$는 양수이므로 충돌하는 동안 줄은 팽팽하게 유지된다.

흔한 실수

- 타일이 떨어진 뒤에도 승강기의 질량을 M으로 놓는 것. 그러면 아무것도 가속되지 않아 타일의 속력이 $\sqrt{2gh}$가 되어 버린다.
- 바닥이 타일을 향해 올라온다는 사실을 잊어, 타일이 지면에 대해 h보다 적게 떨어진다는 점을 놓치는 것.

- 줄을 통해 승강기와 연결된 균형추를 잊고, 타일과 승강기만으로 운동량 보존을 적용하는 것.

STEP 너머

충돌에서 보존되는 양은 보통의 운동량이 아니라, 줄의 위치를 나타내는 단 하나의 좌표에 켤레인 운동량이다. 이것은 일반화 좌표(generalised coordinates)와 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)의 첫 맛보기이다. 전체 운동량이 0인 충돌에서 운동에너지의 정확히 $1 - e^2$ 비율이 손실된다는 사실은 충돌 이론 전반을 관통하는 질량중심 좌표계(centre-of-mass frame)의 아이디어이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 질량중심 좌표계에서의 운동량과 연결된 물체들의 계를 모두 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP III 2006, 문제 12

확률과 통계 • 정규근사와 기댓값

> **STEP III 2006, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/06-s3-q12

핵심 아이디어

추가 버스의 가치는 평균적으로 벌어들이는 금액만큼일 뿐이므로, 회사가 고려할 만한 면허 수수료는 연간 추가 이익의 **기댓값**(expectation)을 넘지 않는다. 기존 버스들만으로 충분히 감당되는 날에는 추가 버스가 아무것도 벌지 못하고, 또 좌석 32개보다 많은 승객을 태울 수도 없다. 따라서 "잘린(clipped)" 확률변수의 기댓값을 구해야 한다. 수치는 정규근사(normal approximation)를 했을 때 기존 수용 인원과 새 수용 인원이 분포에서 아주 깔끔한 점에 오도록 정해져 있다.

풀이

모형 세우기

관광객이 한 번 도착할 때, 1024명의 관광객 중 버스 정류장으로 안내되는 사람의 수를 X라 하자. 각 관광객은 확률 $\frac{1}{2}$로 그곳에 가며, 관광객들은 서로 독립(independent)적으로 안내된다고 가정한다. 그러면

$$X \sim \mathrm{B}\left(1024, \tfrac{1}{2}\right), \qquad \mathrm{E}(X) = 512, \qquad \mathrm{Var}(X) = 1024 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = 256.$$

n이 크고 $p = \frac{1}{2}$이므로 정규근사 $X \approx \mathrm{N}(512, 16^2)$를 사용하고, $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$로 두어 $X = 512 + 16Z$로 쓴다. 문제의 지시대로 연속성 수정(continuity correction)은 하지 않는다.

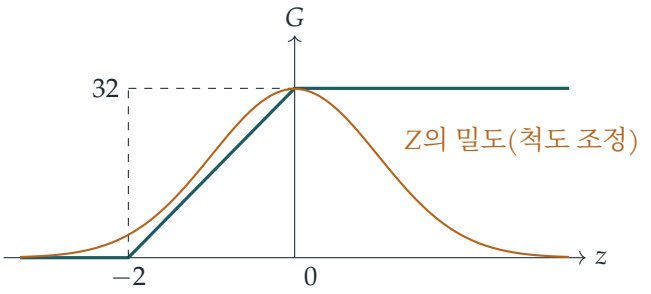
버스 15대는 $15 \times 32 = 480$명의 승객을 태우므로, 한 번 도착할 때의 현재 이익은 $£\min(X, 480)$이다. 16번째 버스가 있으면 수용 인원은 512이고 이익은 $£\min(X, 512)$이다.

따라서 한 번 도착할 때의 추가 이익은

$$G = \min(X,512) - \min(X,480) = \begin{cases} 0, & X \le 480, \\ X-480, & 480 \le X \le 512, \\ 32, & X \ge 512. \end{cases}$$

Z로 나타내면 두 꺾이는 점은 $X = 480 \iff Z = -2$와 $X = 512 \iff Z = 0$이고, 가운데 구간에서는 $X - 480 = 32 + 16Z$이다. 그러므로

$$G = \begin{cases} 0, & Z \le -2, \\ 32 + 16Z, & -2 \le Z \le 0, \\ 32, & Z \ge 0. \end{cases}$$



추가 이익의 기댓값

$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}z^2}$를 표준정규분포의 확률밀도함수(probability density function)라 하자. 기댓값을 세 구간으로 나누면

$$\mathrm{E}(G) = 32\,\mathrm{P}(Z \ge 0) + \int_{-2}^{0} (32 + 16z)\,\phi(z)\,\mathrm{d}z.$$

첫째 항은 $32 \times \frac{1}{2} = 16$이다. 적분에서 상수 부분은

$$32\int_{-2}^{0} \phi(z)\,\mathrm{d}z = 32\big(\Phi(0) - \Phi(-2)\big) = 32\big(\tfrac{1}{2} - (1 - \Phi(2))\big) = 32\Phi(2) - 16,$$

이 되는데, 여기서 대칭성 $\Phi(-2) = 1 - \Phi(2)$를 사용하였다.

? **생각해 보기** 표 없이 $z\,\phi(z)$를 어떻게 적분할까?

밀도함수를 미분하면 $\phi'(z) = -z\,\phi(z)$이다. 따라서 $z\,\phi(z)$는 정확한 원시함수(antiderivative) $-\phi(z)$를 가지며,

$$16\int_{-2}^{0} z\,\phi(z)\,\mathrm{d}z = 16\big[-\phi(z)\big]_{-2}^{0} = -16\big(\phi(0) - \phi(2)\big) = -\frac{16}{\sqrt{2\pi}}\big(1 - \mathrm{e}^{-2}\big).$$

(구간 전체에서 $z < 0$이므로, 이 값이 음수인 것은 당연하다.)

세 부분을 더하면 16들이 상쇄된다.

$$\mathrm{E}(G) = 16 + \big(32\Phi(2) - 16\big) - \frac{16}{\sqrt{2\pi}}\big(1 - \mathrm{e}^{-2}\big) = 32\Phi(2) - \frac{16}{\sqrt{2\pi}}\big(1 - \mathrm{e}^{-2}\big).$$

면허 수수료

1년에 50번 도착하므로, 기댓값의 선형성(linearity of expectation)에 의해 16번째 버스로 얻는 연간 추가 이익의 기댓값은

$$50\,\mathrm{E}(G) = 1600\,\Phi(2) - \frac{800}{\sqrt{2\pi}}\big(1 - \mathrm{e}^{-2}\big) \text{ 파운드.}$$

이보다 큰 면허 수수료를 내면 회사는 평균적으로 손해를 보고, 이보다 작은 수수료라면 기대 이익이 남는다. 따라서 이 값이 (정규근사 때문에 근사적으로) 고려할 만한 가장 큰 연간 수수료이며, 이것이 요구된 결과이다. 수치로는 약 £1288이다.

검산

- 범위 확인: 추가 버스는 한 번 운행할 때 0에서 32 사이를 벌므로, 연간 금액은 0과 1600 사이에 있어야 한다. 우리가 구한 값 $1600 \times 0.97725 - 319.15 \times 0.86466 \approx 1287.6$은 이 범위에 있다.
- 정확한 계산: 정확한 $\mathrm{B}(1024, \frac{1}{2})$ 확률로 $\min(k, 512) - \min(k, 480)$을 합하고 50을 곱하면 1287.69가 되어, 정규근사 값 1287.64와 6펜스 이내로 일치한다.

흔한 실수

- 새 버스가 필요할 때마다 항상 가득 찬다고 여겨 추가 이익을 $32\,\mathrm{P}(X > 480)$로 잡는 것. 버스 승객이 480명에서 512명 사이인 날에는 새 버스가 일부만 찬다.
- $\int_{-2}^{0} z\phi(z)\,\mathrm{d}z$에서의 부호 실수: 피적분함수가 음수이므로 답도 음수여야 한다.

STEP 너머

$\mathrm{E}\big(\min(X, c)\big)$라는 양은 재고가 c인 신문 판매상의 기대 판매량이며, c를 고르는 "신문팔이 문제(newsvendor problem)"는 경영과학(operations research)의 고전적인 문제이다. 같은 형태의 잘린 수익 $\min(\max(X - a, 0), b - a)$는 금융수학에서 "콜 스프레드(call spread)"라 불린다. $\phi'(z) = -z\phi(z)$라는 기법은 절단 정규분포의 적률(truncated normal moments) 이론의 출발점이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론

입문)은 이항분포의 정규근사와 확률변수의 함수의 기댓값을 다룬다.

풀이

STEP III 2006, 문제 13

확률과 통계 • 기하학적 확률

STEP III 2006, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/06-s3-q13

핵심 아이디어

둘레(perimeter)는 성격이 매우 다른 두 조각, 곧 길이가 π인 호(arc)와 길이가 2인 지름(diameter)으로 이루어져 있으므로, 각 점이 어느 조각 위에 놓이는지를 조건으로 삼는다. 세 경우 각각에서 삼각형의 넓이는 꼭짓점 C를 중심에 둔 $\frac{1}{2}ab\sin C$라는 간단한 공식으로 주어지고, 조건부 기댓값(conditional expectation)은 짧은 적분으로 구해진다. 그런 다음 전체 기댓값의 법칙(law of total expectation)으로 조각들을 다시 합친다.

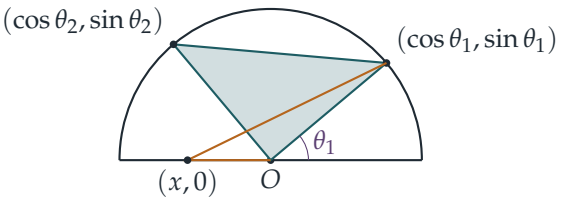
풀이

설정

지름의 중심 O를 원점에 두고, 지름은 x축을 따라 $(-1,0)$에서 $(1,0)$까지, 호는 위쪽 반평면에 놓는다. "둘레 위에서 무작위로"라는 말은 전체 길이가 $\pi+2$인 경계 전체를 따라 길이에 대해 균등하게 분포한다(uniformly distributed)는 뜻이다. 따라서 각 점은 독립적으로(independently)

- 확률 $\dfrac{\pi}{\pi+2}$로 호 위에 놓이며, 이때 점은 θ가 $[0,\pi]$에서 균등분포를 따르는 $(\cos\theta,\sin\theta)$이다.
- 확률 $\dfrac{2}{\pi+2}$로 지름 위에 놓이며, 이때 점은 x가 $[-1,1]$에서 균등분포를 따르는 $(x,0)$이다.

(단위원에서 호의 길이는 각과 같으므로, 호 위에서 길이에 대해 균등한 것은 각에 대해 균등한 것과 같다.)



두 점 가운데 지름 위에 놓인 점의 개수를 D라 하자. 그러면 $D = 2, 1, 0$일 확률은 각각

$$\frac{4}{(\pi+2)^2}, \qquad \frac{2\cdot 2\pi}{(\pi+2)^2} = \frac{4\pi}{(\pi+2)^2}, \qquad \frac{\pi^2}{(\pi+2)^2},$$

이다. 여기서 두 점의 독립성을 이용했다(가운데 경우의 인수 2는 어느 점이 지름 위에 있는지를 센 것이다). 모든 경우에 삼각형은 O를 꼭짓점으로 가지므로, 그 넓이는 $\frac{1}{2}|OP|\,|OQ|\sin\angle POQ$이다.

두 점이 모두 지름 위에 있는 경우

세 꼭짓점이 모두 한 직선 위에 있으므로 삼각형은 퇴화(degenerate)하고 $A = 0$이다. 따라서 $\mathrm{E}(A \mid D = 2) = 0$이다.

한 점은 호 위에, 한 점은 지름 위에 있는 경우

두 점을 $P = (\cos\theta, \sin\theta)$와 $R = (x, 0)$이라 하자. 그러면 $|OP| = 1$, $|OR| = |x|$이고, 밑변 OR는 지름 위에 놓이며 P는 그 위로 높이 $\sin\theta \geq 0$인 곳에 있으므로

$$A = \tfrac{1}{2}\,|x|\sin\theta.$$

이다. x와 θ는 독립이므로

$$\mathrm{E}(A \mid D = 1) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{E}|x|\,\mathrm{E}(\sin\theta) = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}|x|\,\mathrm{d}x\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\frac{2}{\pi} = \frac{1}{2\pi}.$$

두 점이 모두 호 위에 있는 경우

이제 $P = (\cos\theta_1, \sin\theta_1)$, $Q = (\cos\theta_2, \sin\theta_2)$이고, θ_1, θ_2는 서로 독립이며 $[0, \pi]$에서 균등분포를 따른다. 두 반지름의 길이는 모두 1이고 각 POQ는 $|\theta_1 - \theta_2|$이므로

$$A = \tfrac{1}{2}\,|\sin(\theta_1 - \theta_2)|.$$

이다.

생각해 보기 $\mathrm{E}|\sin(\theta_1 - \theta_2)|$를 구하려면 $\theta_1 - \theta_2$의 분포가 필요할까?

그렇지 않다. 먼저 θ_2를 조건으로 삼는다. θ_2를 고정하면, θ_1이 $[0,\pi]$ 위를 움직일 때 각 $\theta_1-\theta_2$는 길이가 π인 구간 위를 움직인다. 함수 $|\sin u|$는 주기(period)가 π이므로, 길이가 π인 어떤 구간 위에서 적분하더라도 $[0,\pi]$ 위에서 적분한 값과 같다.

$$\int_0^{\pi} |\sin(\theta_1-\theta_2)|\,\mathrm{d}\theta_1 = \int_0^{\pi} \sin u\,\mathrm{d}u = 2.$$

따라서 θ_2가 무엇이든 $\mathrm{E}\big(|\sin(\theta_1-\theta_2)| \;\big|\; \theta_2\big) = 2/\pi$이고, 그러므로

$$\mathrm{E}(A \mid D=0) = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{2}{\pi} = \frac{1}{\pi}.$$

이다.

종합하기

전체 기댓값의 법칙에 의해

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(A) &= \frac{4}{(\pi+2)^2}\cdot 0 + \frac{4\pi}{(\pi+2)^2}\cdot\frac{1}{2\pi} + \frac{\pi^2}{(\pi+2)^2}\cdot\frac{1}{\pi}\\ &= \frac{2+\pi}{(\pi+2)^2} = \frac{1}{2+\pi},\end{aligned}$$

이고, 이는 요구한 대로 $(2+\pi)^{-1}$이다.

검산

- 세 경우의 확률의 합 $\dfrac{4+4\pi+\pi^2}{(\pi+2)^2}$는 1이다.
- 각 조건부 기댓값은 그 경우에 가능한 최대 넓이 이하이다. $\frac{1}{\pi}\approx 0.318 \le \frac{1}{2}$(두 반지름이 직각을 이룰 때)이고 $\frac{1}{2\pi}\approx 0.159 \le \frac{1}{2}$이다.
- 점의 쌍 10^6개로 몬테카를로 시뮬레이션(Monte Carlo simulation)을 하면 $\mathrm{E}(A)\approx 0.1943$을 얻으며, 이는 $1/(2+\pi)\approx 0.1945$와 잘 맞는다. 수치적분(quadrature)으로도 조건부 값 $1/\pi$와 $1/(2\pi)$를 확인했다.

흔한 실수

- 각 점이 호 또는 지름 위에 놓일 확률을 각각 $\frac{1}{2}$로 잡는 것. "둘레 위에서 무작위로"는 각 조각에 그 길이만큼의 가중치를 준다.
- $\mathrm{P}(D=1)$에서 인수 2를 빠뜨리는 것. 두 점 중 어느 것이든 지름 위의 점이 될 수 있다.
- 절댓값 없이 $A=\frac{1}{2}\sin(\theta_1-\theta_2)$로 쓰는 것. 그러면 대칭성 때문에 기댓값이 0이 된다.

STEP 너머

이 문제는 **기하학적 확률**(geometric probability)의 작은 한 조각이며, 그 고전적인 예로는 뷔퐁의 바늘(Buffon's needle)과 베르트랑의 역설(Bertrand's paradox)이 있다. 베르트랑의 역설은 "무작위로"라는 말을 왜 분명하게 정해야 하는지를 보여 주는데, 이는 바로 우리가 둘레를 따른 길이를 측도로 택해서 한 일이다. 여기서 핵심 역할을 한 도구, 곧 분할(partition)을 조건으로 삼아 평균을 내는 것(전체 기댓값의 법칙)은 대학 1학년 확률론의 중심 내용이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)이 이를 잘 다룬다.

풀이

STEP III 2006, 문제 14

확률과 통계 • 공분산과 독립

> **STEP III 2006, 14번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/06-s3-q14

핵심 아이디어

이 문제는 모두 두 가지 사실로 풀린다. 기댓값(expectation)은 선형(linear)이고, 독립(independent)인 확률변수에 대해서는 곱의 기댓값이 기댓값의 곱과 같다는 것이다. 분산(variance)은 $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(Y^2) - [\mathrm{E}(Y)]^2$에서 얻으므로, 결국 기댓값만 구하면 된다. 두 확률변수가 독립이 아님을 보이려면 독립성에서 따라 나오는 결과 하나가 성립하지 않음을 찾으면 충분하며, 가장 확인하기 쉬운 것은 $\mathrm{E}(UV) = \mathrm{E}(U)\,\mathrm{E}(V)$이다.

풀이

두 가지 사실

임의의 확률변수(random variable)와 상수 a, b에 대하여

$$\mathrm{E}(aX_1 + bX_2) = a\,\mathrm{E}(X_1) + b\,\mathrm{E}(X_2),$$

이고, X_1과 X_2가 독립이면

$$\mathrm{E}(X_1X_2) = \mathrm{E}(X_1)\,\mathrm{E}(X_2).$$

이다. 두 번째 사실은 확률변수의 함수에도 적용된다. X_1, X_2가 독립이면 X_1^2과 X_2, X_1과 X_2^2, 그리고 X_1^2과 X_2^2도 각각 독립이다. 또한 $\mathrm{E}(X_i^2) = \sigma_i^2 + \mu_i^2$을 사용할 것인데, 이것은 $\mathrm{Var}(X_i) = \mathrm{E}(X_i^2) - \mu_i^2$을 정리한 것에 지나지 않는다.

둘레와 넓이

둘레(perimeter)는 $P = 2X_1 + 2X_2$이고 넓이(area)는 $A = X_1X_2$이다. 선형성과 독립성에 의하여

$$\mathrm{E}(P) = 2(\mu_1 + \mu_2), \qquad \mathrm{E}(A) = \mu_1\mu_2.$$

이다. P의 분산은 $\mathrm{E}(P^2)$에서 출발하여 구한다.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(P^2) &= 4\,\mathrm{E}(X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2)\\ &= 4\big(\sigma_1^2 + \mu_1^2 + 2\mu_1\mu_2 + \sigma_2^2 + \mu_2^2\big)\\ &= 4(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + 4(\mu_1 + \mu_2)^2,\end{aligned}$$

여기서 선형성과 $\mathrm{E}(X_1X_2) = \mu_1\mu_2$를 사용하였다. $[\mathrm{E}(P)]^2 = 4(\mu_1 + \mu_2)^2$을 빼면

$$\mathrm{Var}(P) = 4(\sigma_1^2 + \sigma_2^2), \qquad \text{따라서} P\text{의 표준편차는} 2\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$

이다. 즉 P의 표준편차(standard deviation)가 구해진다. A의 경우, X_1^2과 X_2^2이 독립이므로

$$\mathrm{E}(A^2) = \mathrm{E}(X_1^2)\,\mathrm{E}(X_2^2) = (\sigma_1^2 + \mu_1^2)(\sigma_2^2 + \mu_2^2),$$

이고, 여기서 $\mu_1^2\mu_2^2$을 빼면

$$\mathrm{Var}(A) = \sigma_1^2\sigma_2^2 + \mu_1^2\sigma_2^2 + \mu_2^2\sigma_1^2,$$

이 남는다. 따라서 A의 표준편차는

$$\sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2 + \mu_1^2\sigma_2^2 + \mu_2^2\sigma_1^2}.$$

이다.

P와 A는 독립이 아니다

P와 A가 독립이라면 $\mathrm{E}(PA) = \mathrm{E}(P)\,\mathrm{E}(A)$가 성립해야 한다. 그런데 $PA = 2X_1^2X_2 + 2X_1X_2^2$이므로, 선형성과 X_1, X_2의 독립성에 의하여

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(PA) &= 2(\sigma_1^2 + \mu_1^2)\mu_2 + 2\mu_1(\sigma_2^2 + \mu_2^2)\\ &= 2(\mu_1 + \mu_2)\mu_1\mu_2 + 2(\mu_2\sigma_1^2 + \mu_1\sigma_2^2)\\ &= \mathrm{E}(P)\,\mathrm{E}(A) + 2(\mu_2\sigma_1^2 + \mu_1\sigma_2^2).\end{aligned}$$

이다. 가로와 세로의 길이는 양수이므로 $\mu_1, \mu_2 > 0$이고, $\sigma_1, \sigma_2 \neq 0$이므로 추가된 항 $2(\mu_2\sigma_1^2 + \mu_1\sigma_2^2)$은 순양수이다. 따라서 $\mathrm{E}(PA) \neq \mathrm{E}(P)\,\mathrm{E}(A)$이고, P와 A는 독립이 아니다.

확률변수 $Z = P - \alpha A$

이번에도 Z와 A가 독립이라면 $\mathrm{E}(ZA) = \mathrm{E}(Z)\,\mathrm{E}(A)$가 성립해야 한다. 선형성에 의하여

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(ZA) - \mathrm{E}(Z)\,\mathrm{E}(A) &= \big[\mathrm{E}(PA) - \mathrm{E}(P)\,\mathrm{E}(A)\big] - \alpha\big[\mathrm{E}(A^2) - [\mathrm{E}(A)]^2\big] \\ &= 2(\mu_2\sigma_1^2 + \mu_1\sigma_2^2) - \alpha\big(\mu_1^2\sigma_2^2 + \mu_2^2\sigma_1^2 + \sigma_1^2\sigma_2^2\big),\end{aligned}$$

이며, 여기서 앞의 두 결과를 사용하였다. α에 곱해진 괄호는 $\mathrm{Var}(A)$이고, 이는 양수이다($\sigma_1^2\sigma_2^2 > 0$을 포함하므로). 따라서 이 식은 정확히 하나의 α 값에서만 0이 된다.

$$\alpha_0 = \frac{2(\mu_1\sigma_2^2 + \mu_2\sigma_1^2)}{\mu_1^2\sigma_2^2 + \mu_2^2\sigma_1^2 + \sigma_1^2\sigma_2^2}.$$

$\alpha \neq \alpha_0$이면 $\mathrm{E}(ZA) \neq \mathrm{E}(Z)\,\mathrm{E}(A)$이므로, 요구한 대로 Z와 A는 독립이 아니다.

? 생각해 보기 $\alpha = \alpha_0$이면 Z와 A가 독립인가?

아니다. 공분산(covariance)이 0인 것은 독립성의 결과일 뿐, 독립성을 보장하지는 않는다. $\alpha = \alpha_0$에서는 우리의 판정법이 아무 정보도 주지 않으므로 다른 논증이 필요하다. 마지막 부분에서는 하나의 구체적인 경우에 그때에도 독립성이 성립하지 않음을 보인다.

마지막 부분

여기서는 $\mu_1 = \mu_2 = 2$이고 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1$이므로

$$\alpha_0 = \frac{2(2+2)}{4+4+1} = \frac{8}{9}.$$

이다. 앞 부분에 의하여 $\alpha \neq \frac{8}{9}$인 모든 α에 대해 Z와 A는 독립이 아니다. 모든 α를 한꺼번에 다루는 논증을 위해, 일어날 가능성이 같은 네 가지 결과를 나열해 보자.

(X_1, X_2)	A	P	$Z = P - \alpha A$
$(1,1)$	1	4	$4 - \alpha$
$(1,3)$, $(3,1)$	3	8	$8 - 3\alpha$
$(3,3)$	9	12	$12 - 9\alpha$

핵심 관찰은 P, 따라서 Z가 A에 의해 완전히 결정된다는 것이다. $z = 4 - \alpha$라 하자. $A = 1$임을 알면 $Z = z$일 수밖에 없으므로

$$\mathrm{P}(Z = z,\ A = 1) = \mathrm{P}(A = 1) = \tfrac{1}{4}.$$

이다. 독립이라면 이 값이 $\mathrm{P}(Z = z)\,\mathrm{P}(A = 1)$과 같아야 하고, 즉 $\mathrm{P}(Z = z) = 1$이어야 하므로, Z는 모든 결과에서 $4 - \alpha$라는 값을 가져야 한다. 그러려면 $8 - 3\alpha = 4 - \alpha$에서 $\alpha = 2$이

어야 하고, 동시에 $12 - 9\alpha = 4 - \alpha$에서 $\alpha = 1$이어야 한다. 이 둘은 동시에 성립할 수 없으므로 $\mathrm{P}(Z = z) < 1$이고, 독립성은 성립하지 않는다.

따라서 어떤 α 값에 대해서도 Z와 A는 독립이 아니다. 예를 들어 $\alpha = \frac{8}{9}$일 때 Z의 값은 $\frac{28}{9}$, $\frac{16}{3}$, 4이고, $\mathrm{P}(Z = \frac{28}{9}, A = 1) = \frac{1}{4}$인 반면 $\mathrm{P}(Z = \frac{28}{9})\,\mathrm{P}(A = 1) = \frac{1}{16}$이다.

검산

- 변동이 없으면($\sigma_1 = \sigma_2 = 0$) 두 표준편차가 모두 0이 되며, 이는 당연한 결과이다.
- 마지막 부분에서 공식에 의하면 $\mathrm{Var}(A) = 1 + 4 + 4 = 9$이다. 직접 계산하면 A는 1, 3, 9의 값을 각각 확률 $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$로 가지므로 $\mathrm{E}(A) = 4$, $\mathrm{E}(A^2) = 25$이고 분산은 9이다.
- 일반적인 평균, 분산, 공분산 공식을 무작위로 만든 200개의 이산 분포에 대해 분수를 사용하여 정확하게 확인하였다. 또한 α_0에서 $\mathrm{E}(ZA) = \mathrm{E}(Z)\mathrm{E}(A)$가 성립함, 마지막 부분에서 $\alpha_0 = \frac{8}{9}$임, 그리고 그 경우 $\alpha = \frac{8}{9}$와 다른 500개의 α 값에 대해 Z와 A가 독립이 아님을 확인하였다.

흔한 실수

- $\mathrm{E}(X_1^2) = \mu_1^2$이라고 쓰는 것. 분산 항 σ_1^2이 바로 $\mathrm{Var}(A)$와 공분산을 0이 아니게 만드는 요소이다.
- $\alpha = \alpha_0$일 때 Z와 A가 독립이라고 결론 내리는 것. 공분산이 0이라고 해서 독립인 것은 아니다.
- $\mu_2\sigma_1^2 + \mu_1\sigma_2^2 \neq 0$인 이유를 밝히지 않는 것. 항들이 상쇄될 가능성을 배제하는 것은 길이가 양수라는 사실이다.

STEP 너머

$\mathrm{E}(UV) - \mathrm{E}(U)\mathrm{E}(V)$라는 양이 공분산이며, 특별한 값 α_0은 $\mathrm{Cov}(P, A)/\mathrm{Var}(A)$, 즉 A에 대한 P의 최소제곱 회귀(least-squares regression) 직선의 기울기이다. $\alpha = \alpha_0$으로 택하면 잔차(residual) Z는 A와 무상관(uncorrelated)이 되지만, A와 독립이 되지는 않는다. 결합정규분포(jointly normal)를 따르는 확률변수에서는 두 개념이 일치하며, 이것이 정규분포가 그토록 편리한 이유 중 하나이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 공분산, 상관(correlation), 독립성을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP

STEP은 대부분의 학생이 학창 시절에 치르는 수학 시험 가운데 가장 어려운 시험이다. 또한 가장 훌륭한 시험 가운데 하나이기도 하다. 문제는 짧고 낯설며 깊이가 있고, 그중 가장 뛰어난 문제들은 대학 수학의 작은 조각이 모습을 감추고 있는 것이다.

이 책은 1987년 첫 시험에 앞서 나온 예시 시험지(specimen papers)부터 2025년 시험지까지 가운데 가장 흥미로운 STEP 문제들을 골라, 각 문제를 하나의 문으로 삼는다. 모든 문제는 뛰어난 학생이 풀어 가면서 던질 법한 질문들과 함께 꼼꼼하게 풀이하고, 그런 다음 책은 그 문을 지나 한 걸음 더 나아간다. 그 아이디어가 어디에서 왔는지, 대학에서는 무엇으로 발전하는지, 그리고 다음에는 무엇을 읽으면 좋은지를 살펴본다.

이 책은 STEP을 준비하면서 기출 문제 연습 이상의 것을 원하는 재능 있는 예비 수학자를 위해 쓰였다. 수학과 학부생처럼 생각하기 시작하고, 앞으로 무엇이 자신을 기다리고 있는지 알아보고 싶은 학생들을 위한 책이다.

- 순수 수학(pure mathematics), 역학(mechanics), 확률(probability)과 통계(statistics)를 아우르는 13개의 장
- 이 36개의 STEP 기출 문제와 각 문제의 안내식 풀이
- 모든 문제 뒤에 숨은 대학 수학
- 답이 실린 후속 연습 문제와 더 읽을거리

2006년 풀이. 책 전체와 모든 장,
모든 풀이를 다음 주소에서 무료로 읽고, 내려받고, 공유할 수 있다.

beyondstep.keithmcnulty.org

본문은 퍼블릭 도메인(CC0 1.0)으로 공개한다. STEP 문제 © Cambridge University Press & Assessment.

