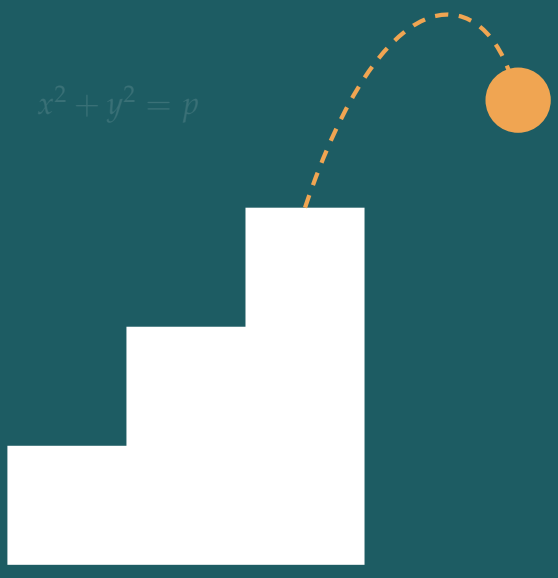
STEP 대비 · 대학 수학

Beyond STEP

STEP I, II 및 III

2005년 풀이



KEITH McNULTY

Beyond STEP

STEP 기출문제로 여는
대학 수학의 세계

STEP I, II 및 III

2005년 풀이

Keith McNulty

Beyond STEP: STEP 기출문제로 여는 대학 수학의 세계

2005년 풀이

2005년 STEP 문제지(STEP I, II 및 III)의 42개 문제 전체에 대한 풀이. 견본 문제지 이후 모든 STEP 문제의 풀이와 *Beyond STEP* 책 전체, 그리고 각 장을 `beyondstep.keithmcnulty.org`에서 무료로 읽고 내려받을 수 있다.

풀이를 읽기 전에 먼저 문제를 제대로 풀어 보자. 모든 답은 수치적으로 검증하였지만, 풀이가 이렇게 많으면 실수가 어느 정도 있을 수밖에 없다. 무언가 잘못된 것처럼 보이면 자신의 풀이를 믿고 꼼꼼히 확인해 보자.

영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.

2026년 11월 온라인 초판 발행.

이 PDF에서 지은이가 직접 만든 모든 것, 곧 본문, 풀이, 그림, 연습문제와 해답은 크리에이티브 커먼즈 CC0 1.0 Universal 라이선스에 따라 퍼블릭 도메인(public domain)으로 공개한다. 누구든 허락을 구하지 않고 어떤 목적으로든 복사하고, 고쳐 쓰고, 공유할 수 있다. 자세한 내용은 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`을 보라.

여기에서 다루는 STEP 문제의 저작권은 Cambridge University Press & Assessment에 있다. 문제는 이 책에 싣지 않았으며, 각 문제마다 공식 출처인 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스나 OCR의 기출 시험지로 가는 링크를 달았다.

오류 제보는 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty에 이슈로 남겨 주기 바란다.

차례

STEP I

Q1 자릿수의 합 세기 순수수학 3

Q2 포물선의 접선과 법선 순수수학 6

Q3 유리방정식 순수수학 10

Q4 배각 공식 순수수학 13

Q5 거듭제곱의 적분 순수수학 17

Q6 아폴로니오스의 원 순수수학 21

Q7 망원곱 순수수학 25

Q8 일계 미분방정식 순수수학 28

Q9 강체의 평형 역학 32

Q10 충돌과 반발계수 역학 35

Q11 벡터 운동학 역학 39

Q12 벤 다이어그램과 범위 확률과 통계 44

Q13 대칭 분포 확률과 통계 48

Q14 혼합형 확률변수 확률과 통계 52

STEP II

Q1 다항식과 정류점 순수수학 56

Q2 오일러 피 함수 순수수학 60

Q3 부분적분 순수수학 64

Q4 역탄젠트 항등식 순수수학 68

Q5 내접원과 외접원 순수수학 72

Q6 이항급수의 합 순수수학 76

Q7 벡터와 원운동 순수수학 80

Q8 변수분리형 미분방정식 순수수학 84

Q9 경사면에서의 마찰 역학 89
Q10 충돌하는 포물체 역학 93
Q11 경사면 위의 마찰 역학 96
Q12 베이즈 정리 확률과 통계 100
Q13 푸아송 분포와 이항분포 확률과 통계 104
Q14 혼합분포 확률과 통계 107

STEP III

Q1 삼각방정식과 그래프 순수수학 111
Q2 변수분리형 미분방정식 순수수학 116
Q3 이차식의 합성 순수수학 120
Q4 비선형 점화식 순수수학 124
Q5 포물선의 공통접선 순수수학 128
Q6 삼차방정식 풀기 순수수학 132
Q7 치환적분 순수수학 136
Q8 복소수와 원 순수수학 140
Q9 충돌과 반발계수 역학 144
Q10 고무줄과 마찰 역학 148
Q11 강체의 평형 역학 152
Q12 불편추정량의 결합 확률과 통계 157
Q13 기하분포 확률과 통계 161
Q14 연속확률변수 확률과 통계 165

풀이

STEP I 2005, 문제 1

순수수학 • 자릿수의 합 세기

> **STEP I 2005, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/05-s1-q1

핵심 아이디어

다섯 자리 수의 자릿수의 합(digit sum)이 가질 수 있는 가장 큰 값은 $9 \times 5 = 45$이고, 두 목표 합은 모두 이 값에 가깝다. 따라서 각 자릿수 자체를 세는 대신, 각 자릿수가 9에 얼마나 **모자라는지**를 센다. 이 부족분(shortfall)은 작은 음이 아닌 정수(non-negative integer)이고 그 합은 작은 고정된 값이므로, 경우를 나열하거나 "별과 막대(stars and bars)" 기법을 쓰면 쉽게 셀 수 있다.

풀이

수를 $d_1d_2d_3d_4d_5$로 쓰자. 여기서 $d_1 \in \{1,\dots,9\}$이고(맨 앞자리는 영이 될 수 없다) $d_2,\dots,d_5 \in \{0,\dots,9\}$이다. 이제

$$e_i = 9 - d_i \qquad (i = 1,\dots,5),$$

를 i번째 자릿수의 **부족분**이라 하자. 각 e_i는 $0 \le e_i \le 9$인 정수이고 ($d_1 \ge 1$이므로 $e_1 \le 8$이다),

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 = 45 - (e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5).$$

이다. 서로 다른 수는 서로 다른 목록 $(e_1,\dots,e_5)$를 주고 그 역도 성립하므로, 자릿수의 합이 S인 수를 세는 것은 합이 $45 - S$인 부족분의 순서 있는 목록(ordered list)을 세는 것과 같다.

소문항 (i)

자릿수의 합이 43이라는 것은 부족분의 합이 $45 - 43 = 2$라는 뜻이다. 2를 음이 아닌 부분들로 나누는 방법은 두 가지뿐이다.

- **한 자릿수의 부족분이 2이고 나머지는 0인 경우.** 한 자릿수는 7이고 나머지 네 자릿수는 9이다. 7은 5개의 자리 중 어느 곳에나 올 수 있으므로 5개의 수가 있다(79999, 97999, ..., 99997).
- **두 자릿수의 부족분이 각각 1이고 나머지는 0인 경우.** 두 자릿수는 8이고 나머지 세 자릿수는 9이다. 5개의 자리 중 8이 들어갈 2개의 자리를 고르면 되므로 $\binom{5}{2} = 10$개의 수가 있다(88999, 89899, ..., 99988).

모든 자릿수가 7 이상이므로 맨 앞자리는 절대 0이 아니고, 따라서 이 수들은 모두 실제로 다섯 자리 수이다. 두 경우는 겹치지 않으며 모든 가능성을 포함하므로,

$$5 + 10 = 15$$

개의 다섯 자리 수가 자릿수의 합 43을 가진다. 이로써 증명이 끝난다.

소문항 (ii)

이번에는 부족분의 합이 $45 - 39 = 6$이어야 한다. $6 \leq 8$이므로 어떤 부족분도 한계를 넘을 수 없다. $e_1 \leq 6 \leq 8$이므로 $d_1 \geq 3$이고, $e_i \leq 6 \leq 9$이므로 나머지 자릿수도 3과 9 사이에 있다. 따라서 다음 방정식의 순서 있는 해의 개수만 구하면 된다.

$$e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 = 6, \qquad e_i \geq 0\text{인 정수.}$$

? **생각해 보기** 이 해들을 모두 나열하지 않고 어떻게 셀 수 있을까?

6개의 별을 한 줄로 놓고 4개의 막대로 5개의 묶음으로 나눈다고 생각하자.

$$\star\star\,|\,|\,\star\,|\,\star\star\star\,| \quad \text{는 다음을 나타낸다:} \quad (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5) = (2, 0, 1, 3, 0).$$

6개의 별과 4개의 막대를 배열하는 각 방법은 정확히 하나의 해를 주고, 각 해는 정확히 하나의 배열에서 나온다. 배열은 10개의 자리 중 막대가 놓일 4개의 자리를 고르면 정해지므로, 해의 개수는

$$\binom{10}{4} = 210.$$

이다. 따라서 자릿수의 합이 39인 다섯 자리 수는 **210**개이다.

소문항 (i)처럼 경우를 나누어 세고 싶다면, 6을 다섯 개 이하의 양의 부분으로 나누는 방법을 나열하고 각각의 배열 수를 세면 된다.

부족분	개수	부족분	개수
6	5	$3,2,1$	$5\cdot 4\cdot 3 = 60$
$5,1$	$5\cdot 4 = 20$	$3,1,1,1$	$5\cdot 4 = 20$
$4,2$	$5\cdot 4 = 20$	$2,2,2$	$\binom{5}{2} = 10$
$4,1,1$	$5\cdot \binom{4}{2} = 30$	$2,2,1,1$	$\binom{5}{2}\binom{3}{2} = 30$
$3,3$	$\binom{5}{2} = 10$	$2,1,1,1,1$	5

합계는 $5+20+20+30+10+60+20+10+30+5 = 210$으로, 별과 막대로 구한 값과 일치한다. ($6$의 분할(partition) $1,1,1,1,1,1$은 여섯 자릿수가 필요하므로 나타나지 않는다.)

검산

- 별과 막대로 소문항 (i)의 결과도 다시 얻을 수 있다. 부족분의 합이 2이면 $\binom{6}{4} = 15$이다.
- 극단적인 경우도 맞는다. 부족분의 합이 0이면 $\binom{4}{4} = 1$개의 수(99999)가 있고, 부족분의 합이 1이면 $\binom{5}{4} = 5$개가 있다.
- 컴퓨터로 $90\,000$개의 다섯 자리 수를 모두 조사하면 자릿수의 합이 43인 수는 정확히 15개, 39인 수는 정확히 210개이며, 경우별 개수도 위의 표와 같다.

흔한 실수

- $\{8,8,9,9,9\}$를 수 하나로, 또는 5개로 세는 것. 자릿수의 순서가 중요하며, 배열은 $\binom{5}{2} = 10$가지이다.
- 맨 앞자리를 확인하지 않는 것. 여기서는 모든 자릿수가 3 이상이므로 맨 앞자리가 0이 될 수 없다. 그러나 자릿수의 합이 더 작으면(예를 들어 20) 별과 막대는 너무 많이 세게 되므로, $d_1 = 0$인 경우나 9보다 큰 자릿수가 있는 경우를 빼야 한다.

STEP 너머

n을 k개의 음이 아닌 정수의 순서 있는 합으로 나타내는 방법의 수는 $\binom{n+k-1}{k-1}$이고, 이는 $(1+x+x^2+\cdots)^k$에서 x^n의 계수이다. 각 자릿수를 9 이하로 제한하면 이 식은 $(1+x+\cdots+x^9)^k$로 바뀌고, 이 상한은 포함배제의 원리(inclusion–exclusion principle)로 처리한다. 이러한 생성함수(generating function) 방법은 대학 1학년 조합론(combinatorics)의 기본이다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*와 Davenport의 *The Higher Arithmetic*은 자릿수 문제와 세기 문제를 계속 탐구하기에 좋은 책이다.

풀이

STEP I 2005, 문제 2

순수수학 • 포물선의 접선과 법선

> **STEP I 2005, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/05-s1-q2

핵심 아이디어

포물선 $y^2 = 4x$를 $(t^2, 2t)$로 매개화(parametrise)하면 모든 접선(tangent)과 법선(normal)이 x와 y에 대한 짧은 일차방정식이 된다. 따라서 교점을 구하는 일은 연립일차방정식 두 개를 푸는 것에 지나지 않는다. 초점(focus)인 $(1, 0)$이 PQ 위에 있다는 조건은 p와 q 사이의 깔끔한 관계식 하나로 바뀐다. 바로 그 관계식이 P와 Q에서의 접선을 수직이 되게 한다. 이것만 얻으면 직사각형은 거의 저절로 그려진다.

풀이

접선과 점 R

점 $(t^2, 2t)$에서 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2t$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2$이므로, 그 점에서 C의 기울기(gradient)는 $\dfrac{2}{2t} = \dfrac{1}{t}$이다($t \neq 0$이므로 문제없다). 따라서 P에서의 접선은

$$y - 2p = \frac{1}{p}\,(x - p^2) \quad \Longleftrightarrow \quad py = x + p^2,$$

이고, 마찬가지로 Q에서의 접선은 $qy = x + q^2$이다. 두 식을 빼면

$$(p - q)\,y = p^2 - q^2 = (p - q)(p + q),$$

이고, $p \neq q$이므로 $p - q$로 나누어 $y = p + q$를 얻는다. 그러면 $x = py - p^2 = p(p + q) - p^2 = pq$이다. 따라서

$$R = (pq,\ p + q),$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

법선과 점 S

$(t^2, 2t)$에서의 법선은 접선에 수직이므로 기울기가 $-t$이다. P에서의 법선은

$$y - 2p = -p\,(x - p^2) \quad \Longleftrightarrow \quad px + y = 2p + p^3,$$

이고, Q에서의 법선은 $qx + y = 2q + q^3$이다. 두 식을 빼면

$$(p - q)\,x = 2(p - q) + (p^3 - q^3) = (p - q)\big(2 + p^2 + pq + q^2\big),$$

이므로, 다시 $p - q \neq 0$으로 나누면

$$x = p^2 + pq + q^2 + 2, \qquad y = 2p + p^3 - px = -p^2q - pq^2 = -pq\,(p + q).$$

이 식들은 임의의 p와 q에 대해 성립한다. 이제 추가 조건을 사용한다.

$(1,0)$이 PQ 위에 있다는 조건 사용하기

현(chord) PQ의 기울기는

$$\frac{2p - 2q}{p^2 - q^2} = \frac{2}{p + q}$$

이므로($p + q \neq 0$일 때), 그 방정식은 $y - 2p = \dfrac{2}{p + q}(x - p^2)$이고, 정리하면

$$(p + q)\,y = 2x + 2pq.$$

가 된다. 이 꼴은 $p + q = 0$인 경우도 포함하는데, 이때는 P와 Q를 지나는 수직선 $x = -pq = p^2$이 된다. $(x, y) = (1, 0)$을 대입하면 $0 = 2 + 2pq$이므로

$$pq = -1.$$

이다. 이를 S의 좌표에 대입하면

$$S = \big(p^2 + q^2 + 2 + pq,\ -pq(p + q)\big) = \big(p^2 + q^2 + 1,\ p + q\big),$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. 또한 이제 $R = (-1,\ p + q)$이고, 이 점은 준선(directrix)인 직선 $x = -1$ 위에 있다는 점에도 주목하자.

$PSQR$은 직사각형이다

> ? **생각해 보기** 주어진 네 점이 직사각형을 이룬다는 것을 증명하는 가장 깔끔한 방법은 무엇일까?

좋은 방법은 다음과 같다: 먼저 평행사변형(parallelogram)임을 보이고(대각선이 서로를 이등분한다), 그다음 한 각이 직각임을 보인다.

평행사변형. $PSQR$에서 대각선은 PQ와 SR이다. $pq = -1$을 사용하면

$$R + S = \left(pq + p^2 + q^2 + 1,\ 2(p+q)\right) = \left(p^2 + q^2,\ 2p + 2q\right) = P + Q,$$

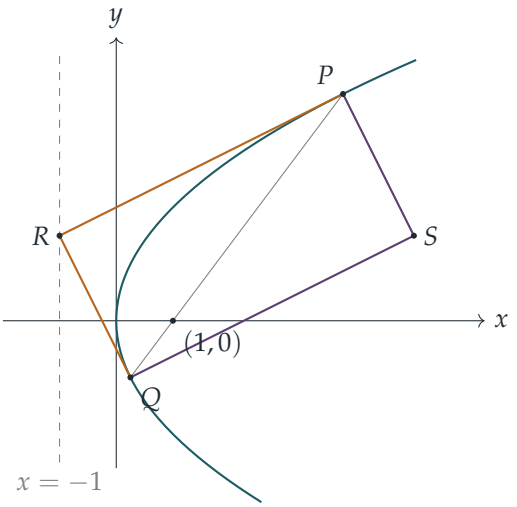
이므로 RS의 중점은 PQ의 중점과 같다. 대각선이 서로를 이등분하므로 $PSQR$은 평행사변형이다. 이것은 퇴화된(degenerate) 것이 아닌 진짜 평행사변형이다: R은 두 접선 위에 모두 있고, 포물선 위의 서로 다른 두 점에서의 접선은 한 번만 만나며 어느 쪽도 다른 접점을 지나지 않으므로, P, R, Q는 한 직선 위에 있지 않다.

직각. 변 RP와 RQ는 각각 P와 Q에서의 접선 위에 놓여 있고, 기울기는 $\frac{1}{p}$와 $\frac{1}{q}$이다. 두 기울기의 곱은

$$\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{q} = \frac{1}{pq} = -1,$$

이므로 두 접선은 수직이고 각 PRQ는 직각이다.

한 각이 직각인 평행사변형은 직사각형이므로 $PSQR$은 직사각형이다. (같은 말이지만: 각 법선은 자기 접선에 수직이므로 P와 Q에서의 각은 직각이고, R에서의 각도 직각이므로 네 번째 각 역시 직각이어야 한다.)



그림은 $p = 2, q = -\frac{1}{2}$인 경우로, 접선은 호박색, 법선은 자주색, 초점현(focal chord) PQ는 회색으로 나타냈다.

검산

$p = 2, q = -\frac{1}{2}$로 두면 $pq = -1$이다. 그러면 $P = (4,4)$, $Q = (\frac{1}{4}, -1)$이고, 이 두 점을 지나는 직선 $y - 4 = \frac{4}{3}(x-4)$는 실제로 $(1,0)$을 지난다. 공식에서 $R = (-1, \frac{3}{2})$, $S = (\frac{21}{4}, \frac{3}{2})$를 얻는다. 직접 확인해 보면 $\overrightarrow{RP} = (5, \frac{5}{2})$와 $\overrightarrow{QS} = (5, \frac{5}{2})$는 같고, $\overrightarrow{RQ} = (\frac{5}{4}, -\frac{5}{2})$와 $\overrightarrow{RP}$의

내적(dot product)은 $\frac{25}{4} - \frac{25}{4} = 0$이다. 따라서 $PSQR$은 실제로 직사각형이다. 또한 약 2000가지의 무작위 p와 q에 대해 정확한 분수 계산으로 모든 좌표 공식을 확인했다.

흔한 실수

- 왜 허용되는지 밝히지 않고 $p - q$로 나누는 것. 문제에서 $p \neq q$를 준 것은 바로 그렇게 나눌 수 있게 하기 위해서이다.
- 한 꼭짓점에서 이웃한 두 변이 수직임만 보이는 것. 이것만으로는 직사각형이 되지 않는다: 평행사변형임과 한 각이 직각임을 함께 보이거나, 세 꼭짓점에서 직각임을 보여야 한다.
- S에서 $pq = -1$을 사용하는 것을 잊는 것. 일반적인 법선의 교점은 $\left(p^2 + pq + q^2 + 2,\ -pq(p+q)\right)$이고, 초점현일 때에만 주어진 꼴로 간단해진다.

STEP 너머

초점을 지나는 현을 **초점현**이라 하며, 이 문제는 초점현에 관한 두 가지 고전적인 사실을 증명한다: 양 끝에서의 접선은 서로 수직이고, 준선 위에서 만난다. 두 사실 모두 원뿔곡선(conic)에 대한 극과 극선(poles and polars) 이론의 특수한 경우이며, 이 이론에서 준선은 초점의 극선이다. 사영기하학(projective geometry)을 쓰면 이런 결과는 거의 자동으로 따라 나온다. 이런 관점에서 원뿔곡선의 매개변수 방법을 탐구하기에 좋은 책은 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*이다.

풀이

STEP I 2005, 문제 3

순수수학 • 유리방정식

STEP I 2005, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/05-s1-q3

핵심 아이디어

각 방정식의 양변에 $(x-a)(x-b)$를 곱하여 다항방정식(polynomial equation)으로 바꾼 다음, 그 실근의 개수를 센다. 주의할 점은 분모를 없애는 과정에서 원래 방정식에서는 허용되지 않는 "해" $x=a$ 또는 $x=b$가 원리적으로 추가될 수 있다는 것이다. 따라서 이런 일이 절대 일어나지 않음을 확인해야 한다. 소문항 (ii)에서 이차방정식이 중근(repeated root)을 가질 필요충분조건은 판별식(discriminant)이 0인 것이며, 이로부터 조건을 얻는다.

풀이

소문항 (i)

$x \neq a, b$일 때 양변에 $(x-a)(x-b)$를 곱할 수 있고, 주어진 방정식은 다음과 동치이다.

$$\begin{aligned} x(x-b)+x(x-a) &= (x-a)(x-b) \\ 2x^2-(a+b)x &= x^2-(a+b)x+ab \\ x^2 &= ab. \end{aligned}$$

a와 b의 부호가 같으므로 $ab>0$이고, 따라서 이 방정식은 서로 다른 두 실근 $x=\sqrt{ab}$와 $x=-\sqrt{ab}$를 가진다.

이 근들이 허용되는 값인지 여전히 확인해야 한다. 만약 $x=a$가 근이라면 $a^2=ab$이고, $a\neq 0$이므로 $a=b$가 되어 모순이다. 같은 방법으로 $x=b$도 근이 아니다. 따라서 두 근 모두 진짜 해이며, 방정식은 정확히 서로 다른 두 실수해 $x=\pm\sqrt{ab}$를 가진다.

소문항 (ii)

이번에도 $x \neq a, b$일 때 양변에 $(x-a)(x-b)$를 곱하면

$$2x^2 - (a+b)x = (1+c)\big(x^2 - (a+b)x + ab\big),$$

이고, 이를 정리하면

$$q(x) \equiv (1-c)x^2 + c(a+b)x - (1+c)ab = 0.$$

이다. $c \neq 1$이므로 최고차항의 계수가 0이 아니고, 따라서 이것은 실제로 이차방정식이다.

생각해 보기 q의 근 중 하나가 a 또는 b여서 버려야 하는 경우가 생길 수 있을까?

대입해서 확인해 보자.

$$\begin{aligned} q(a) &= (1-c)a^2 + c(a+b)a - (1+c)ab = a^2 - ab = a(a-b), \\ q(b) &= b^2 - ab = b(b-a) \end{aligned}$$

(c가 포함된 항들은 소거된다.) a, b는 0이 아니고 서로 다르므로 두 값 모두 0이 아니다. 따라서 a와 b는 결코 q의 근이 아니다. 즉 q의 모든 실근은 원래 방정식의 해이고, 그 역도 성립한다.

q의 판별식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Delta &= c^2(a+b)^2 + 4(1-c)(1+c)ab \\ &= c^2\big[(a+b)^2 - 4ab\big] + 4ab \\ &= c^2(a-b)^2 + 4ab. \end{aligned}$$

$c^2 = -\dfrac{4ab}{(a-b)^2}$이면 ($a \neq b$이므로 $(a-b)^2$으로 나눌 수 있다) $\Delta = 0$이다. 이때 이차방정식은 정확히 하나의 (중복된) 실근

$$x = -\frac{c(a+b)}{2(1-c)},$$

를 가지며, 위의 확인에 의해 이 근은 a도 b도 아니다. 따라서 요구한 대로 방정식은 정확히 하나의 실수해를 가진다. (사실 역도 성립한다. $\Delta > 0$이면 해가 두 개이고 $\Delta < 0$이면 해가 없으므로, 이 조건은 필요조건이기도 하다.)

조건 다시 쓰기. 통분하면

$$1 - \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 = \frac{(a-b)^2 - (a+b)^2}{(a-b)^2} = \frac{-4ab}{(a-b)^2},$$

이므로, 요구한 대로 조건은 $c^2 = 1 - \left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)^2$이다.

$0 < c^2 \leq 1$ **이끌어 내기.** 제곱 $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2$은 음이 아니므로, 두 번째 형태로부터 $c^2 \leq 1$이다. 첫 번째 형태는 $c^2 = -4ab/(a-b)^2$이다. $ab \neq 0$이므로 이 값은 0이 아니고, 실수 c에 대하여 $c^2 \geq 0$이므로 $c^2 > 0$이다. (이로부터 $ab < 0$, 즉 a와 b의 부호가 서로 반대라는 것도 알 수 있으며, 이는 소문항 (i)과 잘 들어맞는다.) 따라서 이 조건은 $0 < c^2 \leq 1$일 때에만 성립할 수 있다.

상한값은 실제로 달성된다. $c^2 = 1$인 것은 정확히 $a + b = 0$일 때이고, 이때 ($c \neq 1$이므로) $c = -1$이다.

검산

- $a = 4, b = -1$이라 하자. 그러면 $c^2 = 16/25$이고, $c = \frac{4}{5}$로 택한다. 중근은 $x = -\frac{4}{5} \cdot 3/(2 \cdot \frac{1}{5}) = -6$이며, 실제로 $\frac{-6}{-10} + \frac{-6}{-5} = 0.6 + 1.2 = 1.8 = 1 + c$이다.
- 극단적인 경우인 $a = 1, b = -1, c = -1$에서는 $\frac{x}{x-1} + \frac{x}{x+1} = 0$, 즉 $2x^2 = 0$이 되어 해는 $x = 0$ 하나뿐이다.
- 소문항 (i)에서 $a = 1, b = 4$이면 $x = \pm 2$이고, $\frac{2}{1} + \frac{2}{-2} = 1$, $\frac{-2}{-3} + \frac{-2}{-6} = 1$이다.

흔한 실수

- 분모를 없앤 뒤 근이 a나 b가 아님을 확인하는 것을 잊는 실수. 이 문제에서는 결과적으로 문제가 없지만, 그 사실을 보여야 한다.
- c^2이 포함된 항들을 묶지 않고 판별식을 전개하는 실수. $(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2$으로 쓰는 것이 조건을 깔끔하게 이끌어 내는 열쇠이다.
- $c^2 > 0$ 대신 $c^2 \geq 0$이라고 주장하는 실수. 등호가 없는 부등식은 $ab \neq 0$에서 나온다.

STEP 너머

좌변은 유리함수(rational function)이고, "그 그래프가 수평선 $y = 1 + c$와 몇 번 만나는가?"는 그 함수의 치역(range)에 관한 질문이다. 여기서 찾은 조건은 그 함수의 극값(turning-point value), 즉 수평선이 그래프에 딱 접하는 높이를 골라낸다. 다항식이 언제 중근을 가지는지 묻다 보면 판별식에, 더 일반적으로는 대학 1학년 대수학에 등장하는 종결식(resultant)에 이르게 된다. 이런 유형의 문제를 더 보려면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제집)를 참고하라.

풀이

STEP I 2005, 문제 4

순수수학 • 배각 공식

> **STEP I 2005, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/05-s1-q4

핵심 아이디어

두 소문항 모두 배각(multiple angle)에 관한 문제이다. (i)에서 실제로 결정해야 할 것은 $\sin\theta$의 부호뿐이며, 이는 주어진 범위로 정해진다. 그다음부터는 2배각 공식과 3배각 공식이 일을 해 준다. (ii)에서는 $\tan 3\theta$를 $\tan(2\theta+\theta)$로 만들어 내고, 그러면 "이를 이용하여(hence)" 부분은 $t=\tan\theta$에 대한 삼차방정식(cubic)이 된다. STEP 문제에 나오는 삼차식은 거의 언제나 눈으로 찾을 수 있는 근을 가지며, θ의 범위가 어느 근을 남길지 알려 준다.

풀이

소문항 (i)

$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$이므로

$$\sin^2\theta = 1-\tfrac{9}{25} = \tfrac{16}{25}, \qquad \text{따라서} \qquad \sin\theta = \pm\tfrac{4}{5}.$$

$\frac{3\pi}{2}\le\theta\le 2\pi$이면 θ는 제4사분면에 있고, 여기서 $\sin\theta\le 0$이다. 따라서 $\sin\theta=-\frac{4}{5}$이고,

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\left(-\tfrac{4}{5}\right)\left(\tfrac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

$\cos 3\theta$를 구하려면 3배각 공식이 필요하다. $c=\cos\theta$, $s=\sin\theta$라 하면

$$\begin{aligned}\cos 3\theta = \cos(2\theta+\theta) &= \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta \\ &= (2c^2-1)c - 2s^2c \\ &= (2c^2-1)c - 2(1-c^2)c \\ &= 4c^3-3c.\end{aligned}$$

$c = \frac{3}{5}$을 대입하면

$$\cos 3\theta = 4 \cdot \frac{27}{125} - \frac{9}{5} = \frac{108 - 225}{125} = -\frac{117}{125}.$$

(여기서는 $\sin\theta$의 부호가 중요하지 않다. $\cos 3\theta$는 $\cos\theta$에만 의존하기 때문이다.)

소문항 (ii)

항등식. $t = \tan\theta$라 하자. 2배각 공식에 의해 $\tan 2\theta = \dfrac{2t}{1-t^2}$이고, 덧셈정리(addition formula)에 의해

$$\tan 3\theta = \tan(2\theta + \theta) = \frac{\tan 2\theta + \tan\theta}{1 - \tan 2\theta \tan\theta} = \frac{\dfrac{2t}{1-t^2} + t}{1 - \dfrac{2t^2}{1-t^2}}.$$

분자와 분모에 $1 - t^2$을 곱하면

$$\tan 3\theta = \frac{2t + t(1-t^2)}{(1-t^2) - 2t^2} = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2},$$

이 되어 항등식을 얻는다. 이 유도 과정에는 $\tan 2\theta$가 존재해야 하므로 $t^2 \neq 1$이어야 한다. $t = \pm 1$일 때는 직접 확인할 수 있다. 예를 들어 $\theta = \frac{\pi}{4}$이면 우변은 $\frac{3-1}{1-3} = -1 = \tan\frac{3\pi}{4}$이고, $t = -1$인 경우는 부호만 바뀐 같은 계산이다.

$\tan 3\theta = \frac{11}{2}$ 풀기. 항등식에 의해

$$\frac{3t - t^3}{1 - 3t^2} = \frac{11}{2} \quad \Longrightarrow \quad 6t - 2t^3 = 11 - 33t^2 \quad \Longrightarrow \quad 2t^3 - 33t^2 - 6t + 11 = 0.$$

여기서 분모를 없애도 괜찮은 이유는 $1 - 3t^2 \neq 0$이기 때문이다. 만약 이것이 0이라면 $\tan 3\theta$는 $\frac{11}{2}$이 아니라 정의되지 않을 것이다.

> **생각해 보기** $2t^3 - 33t^2 - 6t + 11$의 근을 어떻게 찾을까?

기약분수로 나타낸 유리근 p/q는 p가 11의 약수이고 q가 2의 약수여야 하므로, $\pm 1, \pm 11, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{11}{2}$만 시도해 보면 된다. $t = \frac{1}{2}$을 대입하면

$$2 \cdot \tfrac{1}{8} - 33 \cdot \tfrac{1}{4} - 3 + 11 = \tfrac{1}{4} - \tfrac{33}{4} + 8 = 0.$$

따라서 $2t - 1$은 인수이고, 계수를 비교하면

$$2t^3 - 33t^2 - 6t + 11 = (2t - 1)(t^2 - 16t - 11).$$

이차식의 근은 $t = 8 \pm \sqrt{64 + 11} = 8 \pm 5\sqrt{3}$이다. 따라서 세 후보는

$$t = \tfrac{1}{2}, \qquad t = 8 + 5\sqrt{3} \approx 16.66, \qquad t = 8 - 5\sqrt{3} \approx -0.66.$$

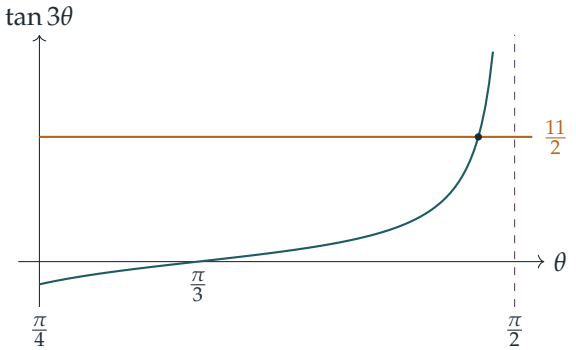
이들은 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$에 있는 각 가운데 그 세 배의 탄젠트가 $\frac{11}{2}$인 세 각에 대응한다.

이제 범위를 이용하자. tan는 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$에서 증가하고 $\tan\frac{\pi}{4} = 1$이므로 $t \geq 1$이어야 한다($\theta = \frac{\pi}{2}$ 자체는 제외되는데, 그곳에서 $\tan\theta$가 정의되지 않기 때문이다). 조건을 만족하는 후보는 하나뿐이다.

$$\tan\theta = 8 + 5\sqrt{3}.$$

나머지 두 값도 삼차방정식의 진짜 근이지만 범위 밖의 각에 해당한다. $\frac{1}{2} < 1$이고 $8 - 5\sqrt{3} < 0$이기 때문이다.

그래프를 보면 해가 정확히 하나임을 확인할 수 있다. θ가 $\frac{\pi}{4}$에서 $\frac{\pi}{2}$까지 움직일 때 3θ는 $\frac{3\pi}{4}$에서 $\frac{3\pi}{2}$까지 움직이고, 이 구간에서 $\tan 3\theta$는 -1에서 $+\infty$까지 연속적으로 증가하므로 $\frac{11}{2}$을 정확히 한 번 지난다.



검산

- (i)에서 $\theta = 2\pi - \arccos\frac{3}{5} \approx 5.3559$이고, 계산기로 구하면 $\sin 2\theta = -0.96$, $\cos 3\theta = -0.936 = -\frac{117}{125}$이다.
- (ii)에서 $\theta = \arctan(8 + 5\sqrt{3}) \approx 1.5108$이며, 이는 $\frac{\pi}{4} \approx 0.785$와 $\frac{\pi}{2} \approx 1.571$ 사이에 있고, $\tan 3\theta \approx 5.5000$이다.
- 항등식의 간단한 확인: $\theta = \frac{\pi}{12}$에서 $t = 2 - \sqrt{3}$이고, 우변을 정리하면 $1 = \tan\frac{\pi}{4}$가 된다.

흔한 실수

- (i)에서 $\sin\theta = +\frac{4}{5}$로 잡는 것. 그러면 $\sin 2\theta$의 부호가 틀리게 된다.
- (ii)에서 눈으로 찾은 근이라는 이유로 $t = \frac{1}{2}$에서 멈추는 것. 이것은 삼차방정식의 근이지만 $\arctan\frac{1}{2} < \frac{\pi}{4}$이다.

STEP 너머

삼차방정식이 세 근을 가진 것은 $\tan 3\theta = \frac{11}{2}$이 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$에서 $\frac{\pi}{3}$ 간격으로 떨어진 세 개의 해 θ를 갖기 때문이다. 같은 원리가 거꾸로 작동하는 것이 삼차방정식의 고전적인 삼각함수 풀이법이며, 더 일반적으로 드무아브르(de Moivre)의 정리는 $\tan n\theta$를 $\tan\theta$에 대한 다항식들의 비로 나타내 주는데, 그 근들은 같은 간격으로 놓인 각들의 탄젠트 값이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 배각 공식이 왜 $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n$에서 그토록 자연스럽게 나오는지 보여 준다.

풀이

STEP I 2005, 문제 5

순수수학 • 거듭제곱의 적분

> **STEP I 2005, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/05-s1-q5

핵심 아이디어

$x+1$의 거듭제곱은 연쇄법칙의 역(reverse chain rule)으로 적분하여 $\int (x+1)^n \,\mathrm{d}x = \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1}$을 얻는다. 단, 예외가 하나 있다. $n=-1$일 때는 답이 로그(logarithm)가 된다. 따라서 이 문제의 모든 경우 나누기는 "지수가 언제 -1이 되는가?"라는 물음에서 나온다. (ii)에서는 $x=(x+1)-1$로 써서 여분의 인수 x를 없애는데, 그러면 단순한 거듭제곱 두 개가 남으므로 m의 예외값도 두 개가 된다.

풀이

소문항 (i)

$k \neq 0$이면 지수 $k-1$은 -1이 아니므로

$$\int_0^1 (x+1)^{k-1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(x+1)^k}{k}\right]_0^1 = \frac{2^k-1}{k}.$$

$k=0$이면 피적분함수(integrand)는 $\frac{1}{x+1}$이고, $[0,1]$에서 $x+1>0$이므로

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \Big[\ln(x+1)\Big]_0^1 = \ln 2.$$

> ? **생각해 보기** $k \neq 0$일 때의 답이 왜 $k=0$일 때의 답과 관련이 있어야 하는가?

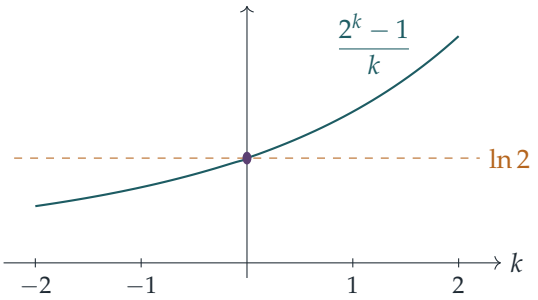
k가 0에서 조금 벗어나도 피적분함수는 거의 변하지 않기 때문이다. $0 \leq x \leq 1$에 대하여

$$\left|(x+1)^{k-1} - (x+1)^{-1}\right| = \frac{\left|(x+1)^k - 1\right|}{x+1} \leq \left|2^k - 1\right|,$$

이다. $1 \le x+1 \le 2$이므로 $(x+1)^k$은 1과 2^k 사이에 있기 때문이다. 길이가 1인 구간에서 적분하면 두 적분의 차는 많아야 $|2^k - 1|$이고, 이 값은 $k \to 0$일 때 0으로 수렴한다. 따라서 $k \approx 0$ (그리고 $k \neq 0$)일 때

$$\frac{2^k - 1}{k} = \int_0^1 (x+1)^{k-1}\,\mathrm{d}x \approx \int_0^1 (x+1)^{-1}\,\mathrm{d}x = \ln 2,$$

이므로 원하는 결과를 얻는다. 다시 말해, $k \neq 0$에 대한 공식은 $k = 0$에서 "구멍"이 나 있고, $k = 0$일 때의 적분이 그 구멍을 정확히 메운다.



소문항 (ii)

$x = (x+1) - 1$로 쓰면

$$x(x+1)^m = (x+1)^{m+1} - (x+1)^m.$$

각 항은 $x+1$의 거듭제곱이고, 이를 적분하면 지수가 -1일 때에만 로그가 나온다. 이는 $m+1 = -1$ 또는 $m = -1$일 때 일어나므로, 경우는 $m = -1$, $m = -2$, 그리고 나머지 모든 경우로 나뉜다.

일반적인 경우, $m \neq -1, -2$.

$$\int_0^1 x(x+1)^m\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(x+1)^{m+2}}{m+2} - \frac{(x+1)^{m+1}}{m+1}\right]_0^1 = \frac{2^{m+2}-1}{m+2} - \frac{2^{m+1}-1}{m+1}.$$

통분하면 분자는

$$(m+1)\left(2^{m+2}-1\right) - (m+2)\left(2^{m+1}-1\right) = 2^{m+1}\left(2(m+1) - (m+2)\right) + 1 = m\,2^{m+1} + 1,$$

이므로

$$\int_0^1 x(x+1)^m\,\mathrm{d}x = \frac{m\,2^{m+1}+1}{(m+1)(m+2)}, \qquad m \neq -1, -2.$$

$m = -1$인 경우.

$$\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \Big[x - \ln(x+1)\Big]_0^1 = 1 - \ln 2.$$

$m = -2$인 경우.

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right) \mathrm{d}x = \left[\ln(x+1) + \frac{1}{x+1}\right]_0^1 = \ln 2 + \tfrac{1}{2} - 1 = \ln 2 - \tfrac{1}{2}.$$

? **생각해 보기** 일반 공식은 $m = -1$과 $m = -2$에서 $0/0$이 된다. 이것은 모순인가?

아니다. 이것은 다시 소문항 (i)의 상황이다. $m = -1$에서 분자는 $-1 \cdot 2^0 + 1 = 0$이고, $m = -2$에서 분자는 $-2 \cdot 2^{-1} + 1 = 0$이다. 따라서 그 점에서 공식은 틀린 것이 아니라 정의되지 않을 뿐이며, 소문항 (i)에서처럼 그 극한(limit)값이 바로 특수한 경우의 답($1 - \ln 2 \approx 0.307$과 $\ln 2 - \frac{1}{2} \approx 0.193$)이 된다.

검산

- $m = 0$: $\int_0^1 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$이고, 공식은 $\frac{0+1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$를 준다. $m = 1$일 때: $\int_0^1 (x^2 + x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$이고, 공식은 $\frac{4+1}{6}$을 준다.
- 수치적으로 $k = 10^{-4}$이면 $\frac{2^k - 1}{k} \approx 0.693171$이고, 이는 $\ln 2 \approx 0.693147$과 비교된다.
- 여러 k, m 값($m = -1, -2$ 포함)에 대하여 모든 적분에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면 10^{-9} 이내로 공식과 일치한다. 일반 공식에 $m = -1 \pm 10^{-5}$를 대입하면 $0.30685\ldots$가 나와 $1 - \ln 2$와 일치한다.

흔한 실수

- $k = 0$일 때 $\frac{(x+1)^0}{0}$이라고 쓰거나, (ii)에서 m의 예외값이 하나가 아니라 **두** 개임을 놓치는 것.
- (ii)에서 부분적분(integration by parts)을 하면서 $m = -1$일 때 이것이 성립하지 않는다는 것을 알아채지 못한 채 $m + 1$로 나누는 것.
- $m = -2$인 경우에 $\int (x+1)^{-2}\,\mathrm{d}x = -(x+1)^{-1}$의 부호를 틀리는 것.

STEP 너머

(i)의 결론은 $\lim_{k\to 0} \frac{2^k - 1}{k} = \ln 2$라는 것이며, 이는 $k = 0$에서 2^k의 도함수(derivative) 값이다. 여기서 쓰인 일반적인 사실은 피적분함수들이 **균등**수렴(uniform convergence)하면 그 적분들도 수렴한다는 것이다. 이는 대학 1학년 해석학(analysis)의 핵심 정리이며, 균등성이 없으면 성립하지 않는다. 같은 아이디어로 $n \to -1$일 때 $\int x^n \,\mathrm{d}x$가 왜 $\ln x$가 "되는

지"도 설명할 수 있다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해)는 균등수렴과 적분을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP I 2005, 문제 6

순수수학 • 아폴로니오스의 원

> **STEP I 2005, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/05-s1-q6

핵심 아이디어

$AP = 2BP$와 같은 조건에는 제곱근이 들어 있으므로, 먼저 양변을 제곱한다. 거리의 제곱은 다항식이고, $x^2 + y^2$ 항이 양변에서 같은 계수로 나타나기 때문에 자취가 원이 된다. 소문항 (ii)에서는 x축 위의 일반적인 두 점에 대해 같은 과정을 거친다. 그러면 $x^2 + y^2 + px + q = 0$ 꼴의 두 방정식은 p와 q가 각각 같을 때, 그리고 그때에만 같은 원을 나타낸다. 계수를 비교(comparing coefficients)하면 k^2에 대한 두 식을 얻고, k를 소거하면 두 결과를 모두 얻는다.

풀이

소문항 (i)

두 길이는 모두 음이 아니므로 $AP = 2BP$는 $AP^2 = 4BP^2$와 동치이다.

$$(x-5)^2 + (y-16)^2 = 4\left[(x+4)^2 + (y-4)^2\right].$$

전개하면

$$x^2 - 10x + y^2 - 32y + 281 = 4x^2 + 32x + 4y^2 - 32y + 128.$$

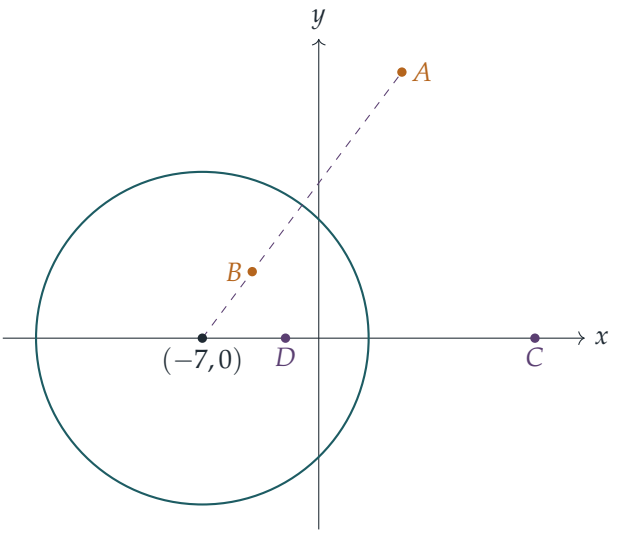
y항은 소거되고, 모든 항을 우변으로 모으면

$$3x^2 + 42x + 3y^2 - 153 = 0, \qquad \text{즉,} \qquad x^2 + 14x + y^2 - 51 = 0.$$

완전제곱식을 만들면(completing the square) $x^2 + 14x = (x+7)^2 - 49$이므로

$$(x+7)^2 + y^2 = 100,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. 자취(locus)는 중심이 $(-7, 0)$이고 반지름이 10인 원이다.



(점 $C = (13, 0)$과 $D = (-2, 0)$은 소문항 (ii)에 해당하는 가능한 한 쌍이며, 이때 $k = 2$이다. A, B와 중심 역시 한 직선 위에 있음(collinear)에 주목하라.)

소문항 (ii)

앞에서와 마찬가지로 $QC = kQD$는 $QC^2 = k^2QD^2$와 동치이다. $Q = (x, y)$라 하면

$$(x-a)^2 + y^2 = k^2\left[(x-b)^2 + y^2\right].$$

항을 우변으로 모으면

$$(k^2-1)(x^2+y^2) - 2(k^2b-a)x + (k^2b^2-a^2) = 0.$$

$k > 1$이므로 $k^2 - 1 \neq 0$이고, 따라서 이것으로 나눌 수 있다.

$$x^2 + y^2 - \frac{2(k^2b-a)}{k^2-1}\,x + \frac{k^2b^2-a^2}{k^2-1} = 0.$$

? 생각해 보기 왜 $x^2 + 14x + y^2 - 51 = 0$과 계수를 비교해도 되는가?

방정식 $x^2 + y^2 + px + q = 0$은 $(x + \frac{1}{2}p)^2 + y^2 = \frac{1}{4}p^2 - q$로 다시 쓸 수 있다. 이것이 중심이 $(-7, 0)$이고 반지름이 10인 원이라면, 중심에서 $p = 14$가 정해지고 반지름에서 $\frac{1}{4}p^2 - q = 100$이 정해지므로 $q = -51$이다. 원의 중심과 반지름은 각각 하나뿐이므로 두 방정식의 p와 q는 각각 같아야 한다.

x의 계수를 비교하면

$$\frac{k^2b-a}{k^2-1} = -7 \implies k^2b - a = -7k^2 + 7 \implies k^2(b+7) = a + 7.$$

상수항을 비교하면

$$\frac{k^2b^2-a^2}{k^2-1}=-51 \implies k^2b^2-a^2=-51k^2+51 \implies k^2(b^2+51)=a^2+51.$$

이제 $b^2+51>0$이고, $b+7\neq 0$이다. 만약 $b=-7$이면 첫 번째 식에서 $a=-7=b$가 되는데, 이는 조건에서 배제된 경우이다. 따라서 두 값으로 나누어 k^2에 대한 두 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{a+7}{b+7}=k^2=\frac{a^2+51}{b^2+51},$$

이것이 첫 번째 결과이다.

두 번째 결과를 위해 양변에 분모를 곱하면

$$(a+7)(b^2+51)=(b+7)(a^2+51).$$

전개하면 상수 357이 양변에서 소거되고 다음이 남는다.

$$ab^2+51a+7b^2=a^2b+51b+7a^2.$$

각 묶음에 $a-b$가 나타나도록 항을 묶으면

$$\begin{aligned}0&=(a^2b-ab^2)-51(a-b)+7(a^2-b^2)\\&=(a-b)\big[ab-51+7(a+b)\big].\end{aligned}$$

$a\neq b$이므로 $a-b$로 나눌 수 있고, 따라서

$$ab+7a+7b=51, \quad \text{따라서} \quad ab+7a+7b+49=100, \quad \text{즉,} \quad (a+7)(b+7)=100,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

검산

- $b=-2$를 대입해 보자. 그러면 $b+7=5$이므로 $a+7=20$, $a=13$이고, $k^2=20/5=4$이다. 점 $(3,0)$은 원 위에 있으며 $QC=10=2\times 5=2\,QD$이다. 점 $(-17,0)$도 원 위에 있으며 $QC=30=2\times 15$이다.
- 소문항 (i)에서 점 $(3,0)$에 대해 $AP=\sqrt{4+256}=\sqrt{260}$이고 $BP=\sqrt{49+16}=\sqrt{65}$이며, 실제로 $\sqrt{260}=2\sqrt{65}$이다.
- 또한 $(a+7)(b+7)=100$을 만족하는 여러 쌍에 대해 원 위의 임의의 점들이 $QC=kQD$를 만족함을, 그리고 첫 번째 결과를 만족하는 $a\neq b$인 모든 쌍이 두 번째 결과도 만족함을 수치적으로 확인하였다.

흔한 실수

- $k^2 - 1$로 나누기 전에 계수를 비교하는 것. 두 방정식은 전체에 곱해진 상수배만큼의 차이를 제외하고 일치하기만 하면 된다.
- $b + 7$이 0이 아닌지 확인하지 않고 나누는 것.
- 인수 $a - b$를 빠뜨리는 것. 이 인수가 바로 문제에서 배제한 자명한 해 $a = b$에 해당한다.

STEP 너머

두 고정점으로부터의 거리의 비가 일정한 값 $k \neq 1$인 점들의 자취를 **아폴로니오스의 원**(*circle of Apollonius*)이라 한다. 아폴로니오스(Apollonius)의 이름을 딴 것이다. 결과 $(a+7)(b+7) = 100$은, 원의 중심을 M, 반지름을 r이라 할 때 C와 D가 중심에 대해 같은 쪽에 있고 $MC \cdot MD = r^2$임을 말해 준다. 즉 C와 D는 이 원에 대한 **반전점**(*inverse points*)이다. (A와 B도 마찬가지이다. $MA = 20$, $MB = 5$.) 원에 대한 반전(inversion)은 기하학에서, 그리고 복소해석학(complex analysis)에서 강력한 도구이며, 복소해석학에서는 사상 $z \mapsto 1/\bar{z}$에 해당한다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)에 이에 대한 아름다운 설명이 있다.

풀이

STEP I 2005, 문제 7

순수수학 • 망원곱

> **STEP I 2005, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/05-s1-q7

핵심 아이디어

세 곱은 모두 **연쇄 소거**(*telescoping*)된다. 각 인수를 비 $g(r+1)/g(r)$ 또는 그러한 비들의 곱으로 나타내면 거의 모든 것이 약분되고 처음 값과 마지막 값만 남는다. 소문항 (i)과 (ii)는 이 원리를 보여 주는 준비 운동이다. 소문항 (iii)에서 해야 할 일은 삼각함수 인수가 사실은 그러한 비라는 것을 알아차리는 것이다. 공통분모(common denominator) $\sin\frac{(2r-1)\pi}{n}$로 통분하면 분자가 합각(compound angle)의 사인이 된다.

풀이

소문항 (i)

곱을 풀어 쓰면

$$\prod_{r=1}^{n}\frac{r+1}{r}=\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n+1}{n}.$$

각 분자가 다음 인수의 분모와 약분되므로 마지막 분자와 첫 분모만 남는다.

$$\prod_{r=1}^{n}\frac{r+1}{r}=\frac{n+1}{1}=n+1.$$

소문항 (ii)

분자를 $r^2-1=(r-1)(r+1)$로 인수분해하고 각 인수를 둘로 나눈다.

$$\frac{r^2-1}{r^2}=\frac{r-1}{r}\times\frac{r+1}{r}.$$

곱들의 곱은 인수들의 곱이므로 두 묶음을 따로 다룰 수 있다(여기서 $n \geq 2$이다).

$$\prod_{r=2}^{n} \frac{r-1}{r} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n},$$
$$\prod_{r=2}^{n} \frac{r+1}{r} = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2}.$$

두 곱 모두 소문항 (i)과 똑같이 연쇄 소거된다. 둘을 곱하면

$$\prod_{r=2}^{n} \frac{r^2-1}{r^2} = \frac{1}{n} \times \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}.$$

소문항 (iii)

$\alpha = \dfrac{2\pi}{n}$, $\beta_r = \dfrac{(2r-1)\pi}{n}$이라 하면 r번째 인수는 $\cos\alpha + \sin\alpha \cot\beta_r$이다.

생각해 보기 $\cos\alpha + \sin\alpha \cot\beta$가 어떻게 비슷한 두 대상의 비가 될 수 있을까?

$\cot\beta = \cos\beta / \sin\beta$로 쓰고 통분한다. 그러면 분자는 합각의 전개식이 된다.

$$\cos\alpha + \sin\alpha \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{\sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}.$$

이를 위해서는 $\sin\beta_r \neq 0$이어야 하며, 바로 여기에서 n이 짝수라는 조건을 사용한다. $\sin\beta_r = 0$이 되는 것은 $(2r-1)/n$이 정수일 때뿐이다. 그런데 $2r-1$은 홀수이고 n은 짝수이므로, 홀수는 n의 배수가 될 수 없다. 따라서 모든 인수가 정의되며, 아래의 모든 분모는 0이 아니다.

이제 $\alpha + \beta_r = \dfrac{2\pi + (2r-1)\pi}{n} = \dfrac{(2r+1)\pi}{n} = \beta_{r+1}$이므로

$$\cos\alpha + \sin\alpha \cot\beta_r = \frac{\sin\beta_{r+1}}{\sin\beta_r}.$$

이것은 $g(r) = \sin\beta_r$인 소문항 (i)과 정확히 같은 꼴이다. 곱은 연쇄 소거된다.

$$\prod_{r=1}^{n} \frac{\sin\beta_{r+1}}{\sin\beta_r} = \frac{\sin\beta_2}{\sin\beta_1} \times \frac{\sin\beta_3}{\sin\beta_2} \times \cdots \times \frac{\sin\beta_{n+1}}{\sin\beta_n}$$
$$= \frac{\sin\beta_{n+1}}{\sin\beta_1} = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{n}\right)}{\sin\frac{\pi}{n}} = \frac{\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{n}\right)}{\sin\frac{\pi}{n}}.$$

sin의 주기는 2π이므로 분자와 분모가 같고, 따라서

$$\prod_{r=1}^{n} \left(\cos\tfrac{2\pi}{n} + \sin\tfrac{2\pi}{n} \cot\tfrac{(2r-1)\pi}{n}\right) = 1.$$

검산

- $n = 3$일 때 소문항 (i): $2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 4 = n + 1$.
- $n = 2$일 때 소문항 (ii): 인수는 $\frac{3}{4}$ 하나뿐이고 $\frac{n+1}{2n} = \frac{3}{4}$이다. $n \to \infty$일 때 곱은 $\frac{1}{2}$로 수렴하며, 이는 잘 알려진 무한곱(infinite product)이다.
- $n = 4$일 때 소문항 (iii): $\cos\frac{\pi}{2} = 0$이고 $\sin\frac{\pi}{2} = 1$이므로 인수는 $\cot\frac{\pi}{4}$, $\cot\frac{3\pi}{4}$, $\cot\frac{5\pi}{4}$, $\cot\frac{7\pi}{4}$, 즉 $1, -1, 1, -1$이고 곱은 1이다. 또한 60 이하의 모든 짝수 n에 대하여 곱이 (10^{-8} 이내의 오차로) 1임을 수치적으로 확인하였다.
- n이 홀수이면 $r = \frac{n+1}{2}$인 인수에 정의되지 않는 $\cot\pi$가 들어간다. 이것이 조건이 필요한 이유이다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)에서 $r = 1$부터 약분을 시작하는 것: 아래끝이 2이므로 첫 인수는 $\frac{1}{2}$과 $\frac{3}{2}$이다.
- 소문항 (iii)에서 $\sin\frac{(2n+1)\pi}{n} / \sin\frac{\pi}{n}$에서 멈추고 주기성(periodicity)을 이용해 1로 간단히 하지 않는 것.
- "n은 짝수"라는 조건이 어디에 쓰이는지 설명하지 않는 것. 이 조건이 바로 모든 코탄젠트와 모든 분모가 잘 정의되도록 해 준다.

STEP 너머

연쇄 소거되는 곱은 부분분수(partial fractions)를 이용할 때 만나는 연쇄 소거되는 합의 곱셈판이다. 로그를 취하면 하나가 다른 하나로 바뀐다. 소문항 (ii)는 무한곱 $\prod_{r\geq 2}(1 - 1/r^2) = \frac{1}{2}$의 유한 버전이다. 이와 같은 무한곱, 그리고 오일러(Euler)의 곱

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{r\geq 1}\left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right),$$

은 대학 첫 해석학(analysis) 강좌에서 제대로 다루며, 거기서 곱의 수렴(convergence)은 로그들의 합의 수렴을 통해 정의된다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 앞으로 필요할 수렴 개념을 쌓기에 좋은 책이다.

풀이

STEP I 2005, 문제 8

순수수학 • 일계 미분방정식

> **STEP I 2005, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/05-s1-q8

핵심 아이디어

첫 부분의 항등식(identity)은 $2xy\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = ky^2 + (\text{오직}x\text{에 대한 식})$ 꼴의 방정식을 알아보는 처방이다. 방정식이 일단 이 꼴이 되면, 치환(substitution) $y^2 = x^k f(x)$에 의해 y^2항이 소거되고 $f'(x)$가 x의 함수와 같다는 식만 남으므로, 이를 그냥 적분하면 된다. 해야 할 일은 k를 고르는 것과, (ii)에서 좌변이 $2xy\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$가 되도록 양변을 나누는 것뿐이다.

풀이

항등식

$y^2 = x^k f(x)$의 양변을 x에 대하여 음함수 미분(implicit differentiation)하고, 우변에는 곱의 미분법(product rule)을 쓴다.

$$2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = kx^{k-1}f(x) + x^k\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}.$$

양변에 x를 곱하면

$$2xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = k\,x^k f(x) + x^{k+1}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = ky^2 + x^{k+1}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x},$$

이다. $x^k f(x) = y^2$이기 때문이다. 이것이 구하는 결과이다.

소문항 (i)

$k = 1$로 두어 $y^2 = xf(x)$라 쓰면, 항등식은 $2xy\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 + x^2 f'(x)$가 된다. 주어진 방정식과 비교하면 y^2항이 일치하므로, 방정식은 다음이 성립할 때 정확히 성립한다.

$$x^2 f'(x) = x^2 - 1, \qquad \text{즉,} \qquad f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \quad (x \neq 0).$$

적분하면 $f(x) = x + \dfrac{1}{x} + c$이므로

$$y^2 = xf(x) = x^2 + cx + 1.$$

$x = 1$일 때 $y = 2$라는 조건에서 $4 = 1 + c + 1$이므로 $c = 2$이고

$$y^2 = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2.$$

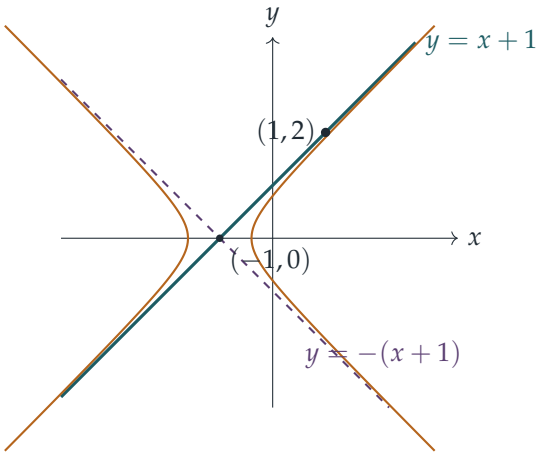
따라서 $y = x + 1$ 또는 $y = -(x+1)$이다. 이 중 $(1,2)$를 지나는 것은 $y = x + 1$뿐이므로 해는

$$y = x + 1.$$

이다. (다시 대입해 보면 $2x(x+1) \cdot 1 = 2x^2 + 2x$이고 $(x+1)^2 + x^2 - 1 = 2x^2 + 2x$이므로, 나눗셈을 했던 $x = 0$을 포함한 모든 x에서 방정식을 만족한다.)

생각해 보기 답이 그저 $y = x + 1$일 때, "기하학적으로 설명하라"는 무엇을 요구하는 것일까?

해곡선은 직선이다. 즉 $(-1,0)$과 $(0,1)$을 지나는 기울기(gradient) 1인 직선으로, x축과 45°의 각을 이룬다. 이것이 왜 조금 놀라운지 말해 둘 가치가 있다. 일반해(general solution) $y^2 - x^2 - cx = 1$은 이차곡선(conic)의 족이다. 완전제곱식을 만들면(completing the square) $y^2 - (x + \frac{c}{2})^2 = 1 - \frac{c^2}{4}$가 되는데, 이는 중심이 $(-\frac{c}{2}, 0)$이고 점근선(asymptote)이 $y = \pm(x + \frac{c}{2})$인 직각쌍곡선(rectangular hyperbola)이다. 초기 조건(initial condition)은 $c = 2$를 골라내는데, 이는 우변이 0이 되어 쌍곡선이 자기 자신의 점근선 쌍 $y = \pm(x+1)$로 퇴화(degenerate)하는 경우이다. 우리가 구한 해는 그 쌍 중 한 갈래인 $y = x + 1$이다.



실선이 해이고, 점선은 $y^2 = (x+1)^2$의 나머지 절반이다. 호박색 곡선은 족 중 퇴화하지 않은 곡선의 모양을 대략 그린 것으로, 이와 같은 두 직선을 점근선으로 하여 다가가는 직각쌍곡선이다.

소문항 (ii)

항등식을 쓰려면 좌변에 $2xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$가 있어야 하므로, 방정식을 x로 나눈다($\ln x$항 때문에 $x>0$이어야 하므로 이렇게 해도 안전하다).

$$2xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y^2 + \frac{2\ln x}{x}.$$

y^2의 계수가 -1이므로 $k=-1$, 즉 $y^2 = f(x)/x$로 둔다. 그러면 $x^{k+1} = x^0 = 1$이고 항등식은 $2xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y^2 + f'(x)$가 된다. 비교하면

$$f'(x) = \frac{2\ln x}{x}.$$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x)^2 = \frac{2\ln x}{x}$이므로 $f(x) = (\ln x)^2 + c$를 얻고, 따라서

$$y^2 = \frac{(\ln x)^2 + c}{x}.$$

$x=1$에서 $y=1$이므로 $1 = (0+c)/1$, 즉 $c=1$이다. $x=1$에서 $y=1>0$이고 y는 결코 0이 되지 않으므로(분자 $1+(\ln x)^2$는 1 이상이다) 양의 제곱근을 택하면, 해는

$$y = \sqrt{\frac{1+(\ln x)^2}{x}}, \qquad x>0.$$

이다.

검산

- (i)에서 직선 $y=x+1$은 위에서처럼 방정식에 직접 대입하여 확인할 수 있다. 방정식을 $(1,2)$에서부터 수치적으로 적분하면(룽게-쿠타(Runge–Kutta) 방법) $x=2$에서 $y=3.000$, $x=5$에서 $y=6.000$을 얻는다.
- (ii)에서 $y^2 = (1+(\ln x)^2)/x$로부터 $y(3)\approx 0.8577$, $y(0.2)\approx 4.2369$를 얻는다. 미분방정식을 $(1,1)$에서부터 수치적으로 적분한 결과와 소수점 아래 여러 자리까지 일치한다.
- 항등식 자체: $k=0$을 넣어 보면 $2xy\,y' = xf'$로 줄어드는데, 이는 그저 $(y^2)' = f'$에 x를 곱한 것이다.

흔한 실수

- (ii)에서 습관적으로 $k=1$을 쓰는 것. x로 나눈 뒤의 y^2항의 부호가 $k=-1$을 결정한다.
- (ii)에서 x로 나누는 것을 잊고, $2x^2y\,y'$를 항등식에 맞추려 하는 것.
- (i)의 답을 $(1,2)$를 지나는 갈래를 고르지 않은 채 $y^2=(x+1)^2$로 남겨 두는 것.

STEP 너머

여기서의 치환은 표준적인 기법을 변형한 것이다. $u = y^2$로 쓰면 $2xy\,y' = ky^2 + g(x)$는 **선형**(*linear*) 방정식 $xu' - ku = g(x)$가 되고, x^{-k}가 그 적분인자(integrating factor)이다. 거듭제곱 치환을 하면 선형이 되는 방정식을 베르누이 방정식(Bernoulli equations)이라 하며, 대학 상미분방정식(ODE) 강의에서 가장 먼저 만나는 비선형 방정식 가운데 하나이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)은 이를 적분인자 및 완전미분방정식(exact equations)과 함께 다룬다.

풀이

STEP I 2005, 문제 9

역학 • 강체의 평형

STEP I 2005, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/05-s1-q9

핵심 아이디어

모든 것은 단 하나의 미지수, 즉 균일하지 않은 막대의 무게중심(centre of mass) G가 어디에 있는지에 달려 있다. 처음 두 설정은 각각 T를 그 위치로 나타내 주므로, 두 식을 같게 놓으면 G와 T가 함께 결정된다. 그다음 기울어진 설정은 전형적인 강체(rigid body) 문제이다. 미지의 접촉력들이 작용하는 점에 대해 모멘트(moment)를 잡은 뒤, 힘을 분해(resolve)한다.

풀이

막대는 강체이고 전체 무게 W가 무게중심 G에 작용하며, 줄은 가볍고 늘어나지 않는다고 모형화한다. $AG = x$라 하면 $GB = 3l - x$이다.

G 구하기와 $5T = 2W$ 보이기

양 끝에 줄을 매단 경우. B에 대한 모멘트를 잡으면 B에서의 미지의 장력(tension)이 사라진다.

$$T \cdot 3l = W(3l - x).$$

A에서 거리 l인 곳에 받침점, B에 줄이 있는 경우. 받침점(pivot)을 P라 하면 $PB = 2l$이다. P에 대한 모멘트를 잡으면 미지의 받침점 반력이 사라진다. B의 줄이 막대를 떠받치려면 G는 P에 대해 B 쪽에 있어야 하므로 $PG = x - l$이고

$$T \cdot 2l = W(x - l).$$

T를 소거하면(첫째 식에 2를, 둘째 식에 3을 곱해 비교한다)

$$2W(3l - x) = 3W(x - l) \quad \Longrightarrow \quad 9l = 5x \quad \Longrightarrow \quad x = \tfrac{9}{5}l.$$

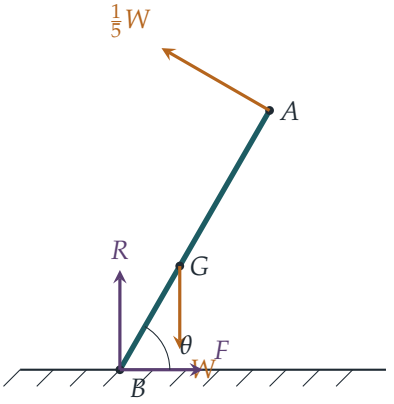
그러면 둘째 식에서 $2lT = W \cdot \frac{4}{5}l$이므로 $T = \frac{2}{5}W$, 즉

$$5T = 2W,$$

이고, 이것이 보이려던 것이다. $x = \frac{9}{5}l > l$이므로 G가 받침점 너머에 있다는 가정과도 맞는다. 따라서 G는 B에서 거리 $GB = 3l - \frac{9}{5}l = \frac{6}{5}l$인 곳에 있다.

바닥에 놓인 막대

이제 B는 거친 바닥 위에 있고, 막대는 수평과 각 θ를 이루며, A의 줄은 막대에 수직이고 장력은 $\frac{1}{2}T = \frac{1}{5}W$이다. B에는 위쪽으로 수직항력(normal reaction) R와 바닥을 따라 마찰력(friction) F가 작용한다.



B에 대한 모멘트. 이렇게 하면 R와 F가 사라진다. 줄의 힘은 B에서 거리 $3l$인 곳에서 막대에 수직으로 작용하므로 그 모멘트는 $\frac{1}{5}W \cdot 3l$이다. 무게는 막대를 따라 거리 $\frac{6}{5}l$인 곳에서 연직으로 작용하므로 B로부터의 수직 거리는 $\frac{6}{5}l\cos\theta$이다. 따라서

$$\tfrac{1}{5}W \cdot 3l = W \cdot \tfrac{6}{5}l\cos\theta \quad \Longrightarrow \quad \cos\theta = \tfrac{1}{2},$$

이므로 $\theta = 60°$(즉 $\frac{\pi}{3}$)이다.

? **생각해 보기** 줄의 장력의 성분들은 어느 방향을 향하는가?

막대는 수평과 각 θ를 이루고 줄은 막대와 직각을 이루므로, 줄은 **연직선**과 각 θ를 이룬다. 따라서 장력 $\frac{1}{5}W$의 연직 성분은 $\frac{1}{5}W\cos\theta$(위쪽)이고, 수평 성분은 $\frac{1}{5}W\sin\theta$로 A가 있는 쪽에서 멀어지며 B 너머를 향한다. 마찰력은 이 수평 방향의 당김과 평형을 이루어야 하므로, 그림과 같이 B에서 A가 있는 쪽을 향해 작용한다.

연직 방향으로 분해하면:

$$R + \tfrac{1}{5}W\cos 60° = W \quad \Longrightarrow \quad R = W - \tfrac{1}{10}W = \tfrac{9}{10}W.$$

수평 방향으로 분해하면:

$$F = \tfrac{1}{5}W\sin 60^\circ = \tfrac{\sqrt{3}}{10}W.$$

막대가 미끄러지지 않을 조건은 $F \le \mu R$, 즉

$$\mu \ge \frac{F}{R} = \frac{\sqrt{3}/10}{9/10} = \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

이다. 따라서 미끄러짐을 막는 가장 작은 마찰계수(coefficient of friction)는 $\mu = \dfrac{\sqrt{3}}{9} = \dfrac{1}{3\sqrt{3}} \approx 0.192$이다(등호일 때 막대는 한계 평형(limiting equilibrium) 상태에 있다).

검산

- $x = \tfrac{9}{5}l$일 때 두 줄 설정에서는 $T = W \cdot \tfrac{6}{3} = \tfrac{2}{5}W$, 받침점 설정에서는 $T = W \cdot \tfrac{4}{2} = \tfrac{2}{5}W$를 얻는다. 당연히 그래야 하듯이 둘이 같다.
- 기울어진 위치에서 A에 대한 모멘트도 잡아 보면($W = l = 1$, $\theta = 60^\circ$, $R = 0.9$, $F \approx 0.1732$로 두고) 역시 합 모멘트가 영이 되므로, R와 F를 함께 검산할 수 있다.
- 수치로는 $\mu_{\min} = \sqrt{3}/9 \approx 0.19245$이며, 컴퓨터로 힘 벡터를 구성하고 세 평형 방정식을 모두 확인하여 이를 검증하였다.

흔한 실수

- 무게의 모멘트 팔 길이로 $\tfrac{6}{5}l\sin\theta$를 쓰는 실수. B에서 무게의 작용선까지의 수평 거리는 $\tfrac{6}{5}l\cos\theta$이다.
- 수직인 줄에 연직 성분이 있다는 것을 잊고 $R = W$로 두는 실수. 그러면 $\mu = \sqrt{3}/10$이 되어 값이 너무 작다.
- 막대가 균일하다고 가정하여 G를 중점에 두는 실수. 첫 부분의 핵심이 바로 G의 위치를 찾는 것이다.

STEP 너머

평형 상태의 측정으로부터 무게중심을 찾는 것은 강력한 아이디어의 정역학적 형태이다. 즉 한 점에 대한 힘 계의 모멘트는 하나의 합력을 제외하면 그 계를 결정한다. 대학에서는 이것이 강체 정역학, 나아가 동역학의 연구로 이어지며, 그곳에서 무게중심과 관성 모멘트(moment of inertia)는 물체의 운동을 지배하는 두 가지 양이 된다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 토크(torque)와 강체를 다루며, 이런 유형의 더 어려운 문제들을 풍부하게 담고 있다.

풀이

STEP I 2005, 문제 10

역학 • 충돌과 반발계수

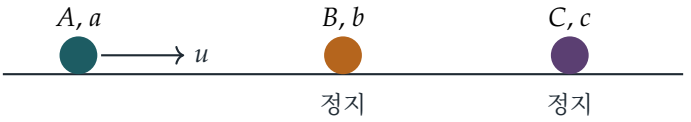
> **STEP I 2005, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/05-s1-q10

핵심 아이디어

각 충돌(collision)은 매끄러운(smooth) 두 입자 사이의 직접 충돌(direct impact)이므로, 방정식 두 개를 얻는다. 하나는 직선 방향의 운동량 보존(conservation of momentum)이고, 다른 하나는 뉴턴(Newton)의 실험 법칙(Newton's experimental law), 즉 (분리 속력(separation speed) $=e\times$ 접근 속력(approach speed))이다. 일반적인 두 입자에 대해 이 방정식들을 한 번 풀어 두면, 그 공식을 두 번째 충돌에도 다시 쓸 수 있다. 특수한 경우들에서 진짜 문제는 두 번의 충돌로 이야기가 끝나는지 여부이다. 최종 속도를 구해야 하므로, 어떤 입자도 앞의 입자를 따라잡지 않는다는 것을 확인해야 한다.

풀이

A, B, C를 매끄러운 면 위의 한 직선을 따라 움직이는 입자로 모형화한다. 따라서 수평 방향의 외력은 작용하지 않고, 각 충돌에서 직선 방향의 운동량이 보존된다. u의 방향을 양의 방향으로 잡는다. B와 충돌한 뒤 A의 속도를 p, C와 충돌한 뒤 B의 속도를 q라 하자.



첫 번째 충돌: v 구하기

충돌 전에 A의 속도는 u이고 B는 정지해 있다. 충돌 후 두 입자의 속도는 각각 p와 v이다. 운동량 보존과 뉴턴의 법칙으로부터

$$au = ap + bv, \qquad v - p = eu.$$

$p = v - eu$를 첫 번째 식에 대입하면 $au = av - aeu + bv$이므로

$$v = \frac{a(1+e)u}{a+b}, \qquad p = v - eu = \frac{(a-eb)u}{a+b}.$$

$v > 0$이므로 B는 실제로 C를 향해 움직인다.

두 번째 충돌: w 구하기

이것은 B(질량 b, 속력 v)가 C(질량 c, 정지)에 부딪히는 똑같은 상황이다. 따라서 위의 공식에서 $a \to b, b \to c, u \to v$로 바꾸어 다시 쓸 수 있다.

$$w = \frac{b(1+e)v}{b+c}, \qquad q = \frac{(b-ec)v}{b+c}.$$

v를 대입하면

$$w = \frac{b(1+e)}{b+c} \cdot \frac{a(1+e)u}{a+b} = \frac{abu(1+e)^2}{(a+b)(b+c)},$$

이므로 요구된 결과를 얻는다.

이 두 번의 충돌 뒤 속도는 p, q, w이다. 충돌이 더 일어나는 것은 $p > q$(A가 B를 따라잡음)이거나 $q > w$(B가 C를 따라잡음)인 경우뿐이다. 뉴턴의 법칙에 의해 $q - w = -ev < 0$이므로 두 번째 경우는 결코 일어나지 않는다. 따라서 p와 q만 비교하면 된다.

> **생각해 보기** 왜 두 번의 충돌에서 그냥 멈추고 p, q, w를 답으로 제시하면 안 되는가?

문제가 **최종** 속도를 묻기 때문이다. 충돌 후에도 A가 B보다 빠르게 움직이고 있다면 A는 B에 다시 부딪히고, 모든 것이 달라진다. 따라서 각 경우에 $p \le q$임을 확인해야 한다.

소문항 (i)

여기서는 $a = eb$이고 $b = ec$이다($e > 0$). 그러면 $a - eb = 0$이고 $b - ec = 0$이므로

$$p = 0, \qquad q = 0.$$

w에 대해서는 $a + b = b(1+e)$와 $b + c = b + b/e = b(1+e)/e$를 이용한다.

$$w = \frac{eb \cdot b\,u(1+e)^2}{b(1+e) \cdot b(1+e)/e} = e^2 u.$$

A와 B는 모두 정지해 있고 C는 멀어지므로 더 이상의 충돌은 없다. 최종 속도는

$$A:\ 0, \qquad B:\ 0, \qquad C:\ e^2 u.$$

각 충돌은 운동량 전부를 다음 입자에 넘겨준다. 뒤쪽에 더 가벼운 입자들이 있는 뉴턴의 요람(Newton's cradle)과 같다.

소문항 (ii)

이제 $b = ea$이고 $c = eb = e^2a$이다. 그러면 $1 - e^2 = (1-e)(1+e)$를 이용하여

$$v = \frac{a(1+e)u}{a(1+e)} = u, \qquad p = \frac{(a - e^2a)u}{a(1+e)} = (1-e)u,$$

를 얻는다. 두 번째 충돌에서 질량 b, c의 비는 a, b의 비와 같고 B는 속력 u로 도달하므로, 이 충돌은 첫 번째 충돌의 정확한 복제이다.

$$w = u, \qquad q = (1-e)u.$$

(직접 계산하면 $w = \dfrac{a \cdot ea \cdot u(1+e)^2}{a(1+e) \cdot ea(1+e)} = u$이다.)

이제 $p = q$이므로 A는 결코 B를 따라잡지 않는다. 또 $e > 0$이면 $q = (1-e)u < u = w$이므로 B는 결코 C를 따라잡지 않는다. 최종 속도는

$$A: \ (1-e)u, \qquad B: \ (1-e)u, \qquad C: \ u,$$

이고, 모두 A의 원래 운동 방향이다.

검산

- (ii)의 운동량: $a(1-e)u + ea(1-e)u + e^2a\,u = au$. (i)에서는 $c \cdot e^2u = e^2c\,u = au$.
- (ii)에서 $e = 1$(완전 탄성(perfectly elastic))이면, A와 B는 정지하고 C는 u로 움직여 나간다. 운동 에너지(kinetic energy)가 보존된다. $\frac{1}{2}au^2 = \frac{1}{2}cu^2$이려면 $c = a$이어야 하고, 이는 정확히 $e = 1$일 때의 $c = e^2a$이다.
- 수치 예: $e = \frac{1}{2}$, 질량 $1, 2, 4$, $u = 1$(소문항 (i))이면 최종 속도는 $0, 0, \frac{1}{4}$이다. 질량 $4, 2, 1$(소문항 (ii))이면 $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$이다. 수천 개의 무작위 질량과 e 값에 대해, 추가 충돌까지 모두 시뮬레이션하며 정확한 산술로 이 결과들과 v, w의 일반 공식을 확인하였다.

흔한 실수

- 뉴턴의 법칙을 쓸 때 속도의 순서를 거꾸로 쓰는 것. 올바른 식은 충돌 후의 (앞 입자의 속력 − 뒤 입자의 속력) $= e \times$ 충돌 전의 (뒤 − 앞)이다.
- A가 B를 다시 따라잡는지 확인하지 않고 두 번의 충돌 뒤의 속도를 답으로 제시하는 것.

STEP 너머

연쇄 충돌은 운동량과 에너지가 물질 속을 어떻게 전달되는지를 보여 주는 가장 단순한 모형이며, 소문항 (i)의 질량비는 운동량 **전부**가 마지막 입자에 모이도록 선택된 것이다. 질

량을 반대 순서로, 즉 무거운 것을 뒤에, 가벼운 것을 앞에 두고 e를 1에 가깝게 하면 마지막 입자가 첫 입자보다 빠르게 움직인다. 큰 공 위에 작은 공을 올려놓고 함께 떨어뜨리면 작은 공이 하늘 높이 튀어 오르는 장난감의 원리가 바로 이것이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 질량 중심 좌표계(centre-of-mass frame)를 이용해 충돌을 다루는데, 이렇게 하면 v와 w 같은 공식이 거의 자명해진다.

풀이

STEP I 2005, 문제 11

역학 • 벡터 운동학

> **STEP I 2005, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/05-s1-q11

핵심 아이디어

이 문제는 처음부터 끝까지 두 벡터(vector) $\mathbf{r}$와 $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$가 서로 어떤 위치 관계에 있는지를 다룬다. 수직(perpendicular)이라는 것은 스칼라곱(scalar product) $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}$가 0이라는 뜻이고, 평행(parallel)이라는 것은 "외적" 형태의 조합 $xv_y - yv_x$가 0이라는 뜻이다. $\sin 2t = 2\sin t \cos t$와 $\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$로 고쳐 쓰면 두 식 모두 깔끔하게 정리된다. 거리를 구하고 곡선의 개형을 그릴 때에는 모든 것을 $\cos t$로 나타내거나 아예 t를 소거하는 것이 유리하다.

풀이

$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$로 쓰면

$$x = \sin 2t = 2\sin t \cos t, \qquad y = 2\cos t, \qquad 0 \le t < 2\pi.$$

이다. 미분하면 속도(velocity)는

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = (2\cos 2t)\,\mathbf{i} - (2\sin t)\,\mathbf{j}.$$

이다.

소문항 (i)

입자가 원점(origin)에 있는 것은 $x = 0$이고 $y = 0$일 때이다. 조건 $y = 0$은 $\cos t = 0$을 뜻하므로, 주어진 범위에서 $t = \frac{\pi}{2}$ 또는 $t = \frac{3\pi}{2}$이다. 이 두 시각에서는 $x = 2\sin t \cos t = 0$이 저절로 성립한다. 따라서 입자는 정확히 두 시각 $t = \frac{\pi}{2}$와 $t = \frac{3\pi}{2}$에만 원점에 있고 다른 시각에는 원점에 있지 않으며, 이것이 보여야 할 내용이었다.

소문항 (ii)

속도가 변위(displacement)에 수직인 것은 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}=0$일 때이다(이때 "수직"이 의미를 가지려면 두 벡터가 모두 영벡터가 아니어야 한다). 이제

$$\begin{aligned}\mathbf{r}\cdot\mathbf{v} &= 2\sin 2t\cos 2t - 4\sin t\cos t\\ &= 2\sin 2t\cos 2t - 2\sin 2t\\ &= 2\sin 2t\,(\cos 2t-1)\\ &= -4\sin 2t\,\sin^2 t,\end{aligned}$$

이고, 여기서 $\cos 2t - 1 = -2\sin^2 t$를 이용하였다. 이 값은 $\sin 2t = 0$ 또는 $\sin t = 0$일 때, 즉

$$t = 0,\ \tfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \tfrac{3\pi}{2}.$$

에서 O이 된다.

> **?** **생각해 보기** $t=\frac{\pi}{2}$와 $t=\frac{3\pi}{2}$가 정말 이 목록에 들어가야 할까?

그렇지 않다. 소문항 (i)에 따르면 이 시각에 $\mathbf{r}=\mathbf{0}$인데, 영벡터(zero vector)는 방향이 없으므로 의미 있는 뜻에서 어떤 벡터와도 수직일 수 없다. 스칼라곱이 O이 되는 것은 자명한 이유 때문일 뿐이다. $t=0$에서는 $\mathbf{r}=2\mathbf{j}$, $\mathbf{v}=2\mathbf{i}$이고, $t=\pi$에서는 $\mathbf{r}=-2\mathbf{j}$, $\mathbf{v}=2\mathbf{i}$이다. 이들은 진정으로 수직인, 영벡터가 아닌 벡터들이다. 따라서 속도가 변위에 수직인 시각은

$$t=0 \quad \text{그리고} \quad t=\pi.$$

이다.

소문항 (iii)

먼저 $\mathbf{v}$는 결코 영벡터가 아니다. $\mathbf{v}=\mathbf{0}$이 되려면 $\sin t=0$이어야 하는데, 그러면 $\cos 2t = 1-2\sin^2 t = 1 \neq 0$이기 때문이다.

영벡터가 아닌 두 벡터 (x,y)와 (v_x,v_y)가 평행할 필요충분조건은 $xv_y - yv_x = 0$이다. 여기서

$$\begin{aligned}xv_y - yv_x &= \sin 2t\,(-2\sin t) - 2\cos t\,(2\cos 2t)\\ &= -4\sin^2 t\cos t - 4\cos t\,(1-2\sin^2 t)\\ &= -4\cos t\,(1-\sin^2 t)\\ &= -4\cos^3 t.\end{aligned}$$

이다. 이 값은 $\cos t=0$일 때에만 O이 되는데, 소문항 (i)에 의해 이는 입자가 원점에 있을 때에만 일어난다. 따라서 입자가 원점에 있지 않을 때에는 언제나 $\cos t\neq 0$이므로 이 조합은 O이 아니고, 속도는 변위와 평행하지 않다. 이로써 증명이 끝난다.

소문항 (iv)

$c = \cos^2 t$로 놓으면 $0 \le c \le 1$이다. 그러면

$$|\mathbf{r}|^2 = \sin^2 2t + 4\cos^2 t = 4\sin^2 t \cos^2 t + 4\cos^2 t = 4c(1-c) + 4c = 4c(2-c).$$

이다. 이차식 $4c(2-c)$는 꼭짓점(vertex)이 $c = 1$에 있고 $[0,1]$에서 증가하므로, 이 구간에서의 최댓값은 $c = 1$일 때이며 $|\mathbf{r}|^2 = 4$이다. 따라서 원점으로부터의 최대 거리는

$$|\mathbf{r}|_{\max} = 2,$$

이고, 이는 $\cos^2 t = 1$일 때, 즉 $t = 0$과 $t = \pi$에서 점 $(0, \pm 2)$에서 얻어진다. 이 시각들이 소문항 (ii)에서 구한 시각과 정확히 일치한다는 것은 안심이 되는 결과이다. 거리가 최대인 곳에서는 속도의 지름 방향 성분(radial component)이 0이 되어야 하기 때문이다.

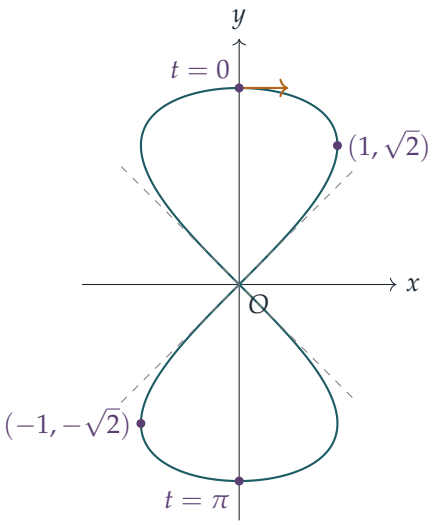
개형을 그리기 위해 t를 소거하자. $x = y\sin t$이고 $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t = 1 - \frac{1}{4}y^2$이므로

$$x^2 = y^2\left(1 - \frac{y^2}{4}\right), \qquad \text{즉,} \qquad 4x^2 = y^2(4 - y^2).$$

이다. 개형에 나타내야 할 특징은 다음과 같다.

- 곡선은 두 축에 대하여 모두 대칭이고, $-2 \le y \le 2$이다.
- $|x| = |\sin 2t| \le 1$이고, $y = \pm\sqrt{2}$일 때 $|x| = 1$이다.
- 원점 근처에서 $4x^2 \approx 4y^2$이므로, 곡선은 원점에서 직선 $y = \pm x$를 따라 스스로 교차한다. 이는 $t = \frac{\pi}{2}$에서의 속도 $-2\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$와 $t = \frac{3\pi}{2}$에서의 속도 $-2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$와 일치한다.
- 소문항 (ii)에서 보였듯이 $(0, \pm 2)$에서 경로는 수평이다.

t를 따라가 보면, 입자는 $(0,2)$에서 $+\mathbf{i}$ 방향으로 출발하여 위쪽 고리의 오른쪽을 따라 원점까지 내려오고, 아래쪽 고리를 (왼쪽부터) 돌아 다시 원점으로 온 뒤, 마지막으로 위쪽 고리의 왼쪽을 따라 올라간다. 이 경로는 8자 모양(figure of eight)이다.



검산

- $t = \frac{\pi}{4}$일 때: $\mathbf{r} = \mathbf{i} + \sqrt{2}\,\mathbf{j}$이고, 이는 $4x^2 = 4 = y^2(4 - y^2) = 2 \cdot 2$를 만족하며, $|\mathbf{r}| = \sqrt{3} < 2$로 $4c(2 - c) = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = 3$과 일치한다.
- $[0, 2\pi)$에서 t를 촘촘하게 표본 추출하면 최대 거리는 2.000이고, 거리가 거의 0이 되는 것은 $t \approx 1.57$과 4.71에서뿐이며, 무작위로 고른 시각에서 항등식 $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = -4 \sin 2t \sin^2 t$와 $xv_y - yv_x = -4 \cos^3 t$가 성립함을 확인할 수 있다. 최소 속력은 약 1.32이므로 $\mathbf{v}$는 결코 영벡터가 아니다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)에서 $t = \frac{\pi}{2}$와 $\frac{3\pi}{2}$를 답에 포함하는 것: 이 시각에 스칼라곱이 0이 되는 것은 단지 $\mathbf{r} = \mathbf{0}$이기 때문이다.
- 소문항 (iii)에서 $\mathbf{v}$가 결코 영벡터가 아님을 확인하지 않는 것: 속도가 영벡터라면 모든 벡터와 "평행"하게 된다.
- 두 고리를 좌우로 나란히 그리는 것: y의 범위는 $[-2, 2]$이지만 x의 범위는 $[-1, 1]$뿐이므로, 8자는 원점의 위아래에 고리가 있는 세로 모양이다.

STEP 너머

양 $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\mathbf{r}|^2$과 $xv_y - yv_x$는 각각 운동의 지름 방향 부분과 (단위 질량당) 원점에 대한 각운동량(angular momentum)이다. 극좌표(polar coordinates)로 나타내면 후자는 $r^2\dot{\theta}$이다. 소문항 (iii)은 각운동량이 원점에서만 0이 된다는 것을 말해 주므로, 입자는 결코 O를 향해 곧장 다가가거나 곧장 멀어지는 방향으로 움직이지 않는다. 이 곡선 자체는 제로노의 렘니스케이트(lemniscate of Gerono)로, 여러 고전적인 8자 곡선 가운데 하나이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 바로 이러한 관점에서 극좌표와 각운동량을 전개한다.

풀이

STEP I 2005, 문제 12

확률과 통계 • 벤 다이어그램과 범위

STEP I 2005, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/05-s1-q12

핵심 아이디어

"어떤 값의 범위가 모순 없이 가능한가?"라는 꼴의 문제는, 각 영역의 값은 모르지만 모두 음이 아니어야(*non-negative*) 하는 벤 다이어그램(Venn diagram)에 관한 문제이다. 모든 영역을 되도록 적은 수의 자유 미지수로 나타낸다. 그러면 "이 영역 ≥ 0"이라는 각 조건이 하나의 경계가 되고, 이 경계들을 모두 모으면 범위가 나온다. 소문항 (ii)에서는 세 개의 단일 확률을 더할 때 각 마법사가 몇 번씩 세어지는지를 따지는 세기 논법(counting argument)으로, 개별 영역을 구하지 않고도 "정확히 두 개"의 확률을 얻는다.

풀이

소문항 (i)

호빗이 파이프 담배를 피우는 사건을 S, 모자를 쓰는 사건을 H라 하자. $t = \mathrm{P}(S \cap H)$로 놓는다. 벤 다이어그램의 네 영역은 다음과 같다.

$$\mathrm{P}(S \cap H) = t, \qquad \mathrm{P}(S \cap H') = 0.7 - t,$$
$$\mathrm{P}(S' \cap H) = 0.4 - t, \qquad \mathrm{P}(S' \cap H') = 1 - (0.7 + 0.4 - t) = t - 0.1.$$

네 값이 모두 음이 아니게 하는 t를 고르면 실제로 성립하는 확률분포(probability distribution)가 되고, 역도 성립한다. 실제로 제약이 되는 조건은 $t \geq 0.1$(마지막 영역에서)과 $t \leq 0.4$(세 번째 영역에서)이며, 나머지 조건은 이로부터 따라 나온다. 따라서 $0.1 \leq t \leq 0.4$이고, $p = 0.7 - t$이므로

$$0.3 \leq p \leq 0.6.$$

양 끝값은 모두 실제로 나온다. $p = 0.6$은 파이프를 피우는 호빗 중 모자를 쓰는 호빗이 가능한 한 적을 때(모든 호빗이 두 가지 중 적어도 하나를 할 때)이고, $p = 0.3$은 모자를 쓰는 호빗이 모두 파이프를 피울 때이다.

소문항 (ii): 정확히 두 개

마법사가 모자, 망토, 반지를 착용하는 사건을 각각 H, C, R라 하자. 마법사가 세 물건 중 정확히 한 개, 정확히 두 개를 착용할 확률을 각각 a, b라 하자. 정확히 하나도 착용하지 않을 확률은 0.05, 정확히 세 개를 착용할 확률은 0.1이므로

$$0.05 + a + b + 0.1 = 1 \quad \Longrightarrow \quad a + b = 0.85.$$

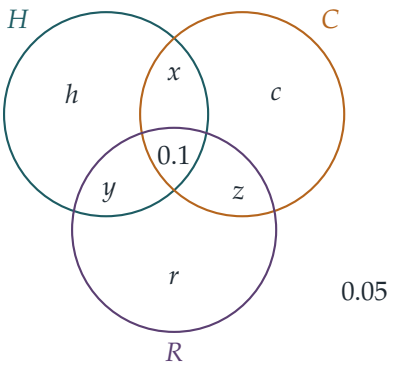
이제 주어진 세 확률을 더하면 $\mathrm{P}(H) + \mathrm{P}(C) + \mathrm{P}(R) = 0.7 + 0.8 + 0.4 = 1.9$이다. 이 합에서 정확히 k개의 물건을 착용한 마법사는 k번 세어지므로

$$a + 2b + 3(0.1) = 1.9 \quad \Longrightarrow \quad a + 2b = 1.6.$$

두 식을 빼면 $b = 0.75$(그리고 $a = 0.1$)이다. 마법사가 물건 중 정확히 두 개를 착용할 확률은 $\frac{3}{4}$이다.

소문항 (ii): q의 범위

그림과 같이 안쪽의 일곱 영역에 이름을 붙인다. 정확히 한 개인 영역은 h, c, r, 정확히 두 개인 영역은 x, y, z이고, 가운데는 0.1, 바깥은 0.05이다.



H, C, R의 전체 확률과 지금까지 구한 소문항 (ii)의 결과로부터

$$h + x + y = 0.6, \qquad c + x + z = 0.7,$$
$$r + y + z = 0.3, \qquad x + y + z = 0.75.$$

마지막 식을 이용해 앞의 세 식에서 각각 두 미지수를 소거하면

$$h = z - 0.15, \qquad c = y - 0.05, \qquad r = x - 0.45.$$

(검산하면 $h+c+r = 0.75-0.65 = 0.1 = a$이다.) 따라서 전체 분포는 $x+y+z = 0.75$를 만족하는 x, y, z로 결정되며, 여섯 영역이 모두 음이 아닐 때, 그리고 그때에만 실제로 성립하는 분포가 된다.

$$x \geq 0.45, \qquad y \geq 0.05, \qquad z \geq 0.15.$$

? 생각해 보기 x는 얼마나 커질 수 있을까?

$x = 0.75 - y - z$이고 $y+z \geq 0.05+0.15 = 0.2$이므로 $x \leq 0.55$이며, 등호는 $y = 0.05$, $z = 0.15$일 때 성립한다. 가장 작은 값 $x = 0.45$는 예를 들어 $y = 0.1, z = 0.2$일 때 나온다. y와 z를 연속적으로 움직일 수 있으므로 그 사이의 모든 값도 나온다. 따라서

$$0.45 \leq x \leq 0.55.$$

끝으로, 망토를 착용한 상태에서 모자는 쓰고 반지는 끼지 않은 경우가 정확히 영역 x이므로

$$q = \mathrm{P}(H \cap R' \mid C) = \frac{\mathrm{P}(H \cap C \cap R')}{\mathrm{P}(C)} = \frac{x}{0.8}, \qquad \text{이므로} \qquad \frac{9}{16} \leq q \leq \frac{11}{16}.$$

검산

- 극단인 $x = 0.55, y = 0.05, z = 0.15$에서는 $h = 0, c = 0, r = 0.1$이다. 여덟 영역의 합은 1이고, 요구한 대로 $\mathrm{P}(H) = 0.7$, $\mathrm{P}(C) = 0.8$, $\mathrm{P}(R) = 0.4$가 된다.
- 주어진 자료와 모순되지 않는 여덟 영역의 값 배정을 0.01 간격으로 모두 열거해 보았다. 모든 경우에 $x+y+z = 0.75$이고, q는 0.5625부터 0.6875까지 변한다. 마찬가지로 (i)에서 p는 0.3부터 0.6까지 변한다.

흔한 실수

- (i)에서 "둘 다 아님" 영역을 잊어서 $t \geq 0.1$ 대신 하한 $t \geq 0$을 얻고, 그 결과 잘못된 상한 $p \leq 0.7$을 얻는 실수.
- (ii)에서 $\mathrm{P}(C) = 0.8$ 대신 1로 나누는 실수. "망토를 착용했을 때"라는 조건(condition)이 분모를 바꾼다.
- H, C, R를 독립(independent)으로 취급하는 실수. 문제 어디에도 독립이라는 말은 없으며, 실제로 $\mathrm{P}(H \cap C \cap R) = 0.1 \neq 0.7 \times 0.8 \times 0.4$이다.

STEP 너머

선형 방정식과 음이 아닐 조건 아래에서, 미지의 확률들에 대해 선형인 양의 범위를 구하는 것은 작은 **선형 계획법**(*linear programme*) 문제이다. 극값은 언제나 실행 가능 영역(feasible

region)의 꼭짓점에서 나타나며, 그래서 우리의 극값도 영역을 o으로 놓는 데서 나왔다. 같은 아이디어로 소문항 (i)에서 쓴 프레셰 부등식(Fréchet bounds) $\max(0, \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - 1) \leq \mathrm{P}(A \cap B) \leq \min(\mathrm{P}(A), \mathrm{P}(B))$을 얻는다. 포함-배제 원리(inclusion–exclusion)와 조건부 확률(conditional probability)에 대해 더 알고 싶다면 Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)를 읽어 보라.

풀이

STEP I 2005, 문제 13

확률과 통계 • 대칭 분포

STEP I 2005, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/05-s1-q13

핵심 아이디어

분포(distribution)의 모양에 대해서는 두 개의 누적확률(cumulative probability)과 대칭성(symmetry) 외에는 아무것도 주어지지 않으므로, 모든 것을 이것들만으로 구성해야 한다. μ에 대한 대칭성으로부터 두 가지 사실을 덤으로 얻는다. 확률의 절반은 μ의 양쪽에 각각 놓이고, $\mu - k\sigma$ 아래의 꼬리(tail)는 $\mu + k\sigma$ 위의 꼬리와 같다. 소문항 (ii)의 요령은 언급된 모든 부피(495, 500, 505 ml)가 두 종류의 우유 중 어느 한쪽에 대하여 μ, $\mu \pm \frac{1}{2}\sigma$ 또는 $\mu + \sigma$에 놓인다는 것을 알아차리는 것이다.

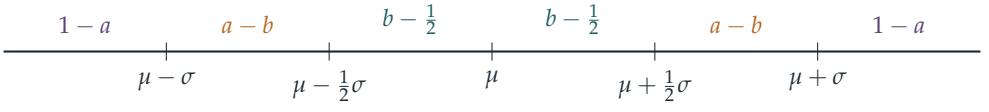
풀이

X는 부피를 모형화하므로 줄곧 연속(continuous) 확률변수로 다룬다. 따라서 한 값의 확률은 0이고, $<$로 쓰든 $\leq$로 쓰든 상관없다.

μ에 대한 대칭성으로부터 $\mathrm{P}(X \leq \mu) = \frac{1}{2}$이고, 임의의 k에 대하여 $\mathrm{P}(X \leq \mu - k\sigma) = \mathrm{P}(X \geq \mu + k\sigma)$이다. 특히

$$\mathrm{P}\left(X \leq \mu - \tfrac{1}{2}\sigma\right) = 1 - b, \qquad \mathrm{P}\left(X \leq \mu - \sigma\right) = 1 - a.$$

μ로부터 σ 단위로 잰 각 구간 띠의 확률을 적어 두면 도움이 된다.



예를 들어 $\mathrm{P}(\mu < X \leq \mu + \frac{1}{2}\sigma) = b - \frac{1}{2}$이고 $\mathrm{P}(\mu + \frac{1}{2}\sigma < X \leq \mu + \sigma) = a - b$이다. 왼쪽 띠들은 대칭성으로부터 얻어진다.

소문항 (i)

누적확률을 빼면

$$\mathrm{P}\left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma \le X \le \mu + \sigma\right) = \mathrm{P}(X \le \mu + \sigma) - \mathrm{P}\left(X < \mu - \tfrac{1}{2}\sigma\right) = a - (1-b) = a + b - 1.$$

조건부확률(conditional probability)의 경우, 분자의 사건은 $\{\mu - \frac{1}{2}\sigma \le X \le \mu + \frac{1}{2}\sigma\}$이고 그 확률은 $b - (1-b) = 2b - 1$이며, 한편 $\mathrm{P}(X \ge \mu - \frac{1}{2}\sigma) = 1 - (1-b) = b$이다. 따라서

$$\mathrm{P}\left(X \le \mu + \tfrac{1}{2}\sigma \mid X \ge \mu - \tfrac{1}{2}\sigma\right) = \frac{2b-1}{b}.$$

소문항 (ii)(a)

우유 팩이 탈지유(skimmed milk)인 사건을 S, 전지유(full-fat milk)인 사건을 F라 하면 $\mathrm{P}(S) = 0.6$이고 $\mathrm{P}(F) = 0.4$이다. 부피(ml)를 V라 하자.

> **생각해 보기** 각 우유 종류에 대하여 500 ml와 505 ml는 σ 단위로 어디에 놓이는가?

탈지유($\mu = 500, \sigma = 10$)에서 500은 μ이고 505는 $\mu + \frac{1}{2}\sigma$이다. 전지유($\mu = 495, \sigma = 10$)에서 500은 $\mu + \frac{1}{2}\sigma$이고 505는 $\mu + \sigma$이다. 띠에서 읽어 내면

$$\mathrm{P}(V < 505 \mid S) = b, \qquad \mathrm{P}(500 < V < 505 \mid S) = b - \tfrac{1}{2},$$
$$\mathrm{P}(V < 505 \mid F) = a, \qquad \mathrm{P}(500 < V < 505 \mid F) = a - b.$$

전확률 법칙(law of total probability)에 의하여

$$\mathrm{P}(V < 505) = 0.6b + 0.4a,$$
$$\mathrm{P}(500 < V < 505) = 0.6\left(b - \tfrac{1}{2}\right) + 0.4(a-b) = 0.4a + 0.2b - 0.3.$$

사건 "500 ml보다 많고 505 ml보다 적다"가 바로 우리가 원하는 교집합이므로

$$\mathrm{P}(V > 500 \mid V < 505) = \frac{0.4a + 0.2b - 0.3}{0.4a + 0.6b} = \frac{4a + 2b - 3}{4a + 6b}.$$

소문항 (ii)(b)

무작위로 고른 우유 팩의 개수가 매우 많으면, 관측된 비율은 해당 확률의 추정값이 된다. 첫 번째 정보는 $\mathrm{P}(V \le 505) = 0.7$이라는 것이고, 이는 소문항 (a)의 계산에 의하여

$$0.6b + 0.4a = 0.7, \quad \text{즉} \quad 4a + 6b = 7. \tag{1}$$

생각해 보기 각 우유 종류에 대하여 $\mathrm{P}(V \geq 495)$는 얼마인가?

탈지유에서 495는 $\mu - \frac{1}{2}\sigma$이므로 $\mathrm{P}(V \geq 495 \mid S) = b$이다(이는 소문항 (i)의 분모였다). 전지유에서 495는 μ이므로 대칭성에 의하여 $\mathrm{P}(V \geq 495 \mid F) = \frac{1}{2}$이다. 베이즈 정리(Bayes' theorem)에 의하여

$$\mathrm{P}(F \mid V \geq 495) = \frac{0.4 \times \frac{1}{2}}{0.6b + 0.4 \times \frac{1}{2}} = \frac{0.2}{0.6b + 0.2}.$$

이것을 $\frac{1}{3}$과 같게 놓으면 $0.6b + 0.2 = 0.6$이므로 $b = \frac{2}{3}$이다. 그러면 (1)에서 $4a = 7 - 4 = 3$이므로

$$a \approx \tfrac{3}{4}, \qquad b \approx \tfrac{2}{3}.$$

관측된 비율은 참된 확률의 근삿값일 뿐이므로, 이 값들은 추정값에 불과하다.

검산

- 추정값이 타당하다. $\mu < \mu + \frac{1}{2}\sigma < \mu + \sigma$이므로 반드시 $\frac{1}{2} < b < a < 1$이어야 하는데, 실제로 그렇다.
- 다시 대입하면 $0.6 \cdot \frac{2}{3} + 0.4 \cdot \frac{3}{4} = 0.4 + 0.3 = 0.7$이고, $0.2/(0.4 + 0.2) = \frac{1}{3}$이다.
- 정규분포(Normal distribution)에서는 $a \approx 0.841$, $b \approx 0.691$이고, 이 값들로 소문항 (i)을 계산하면 0.533과 0.553을 얻는다. (정규분포가 아닌) 라플라스 분포(Laplace distribution)를 10^5개 이상의 표본으로 시뮬레이션한 결과는 소문항 (i)과 (ii)(a)의 모든 공식과 일치했다. 예를 들어 (ii)(a)에서는 공식의 값 0.2515에 대하여 0.2518을 얻었다.

흔한 실수

- $1 - b$ 대신 $\mathrm{P}(X \leq \mu - \frac{1}{2}\sigma) = b$라고 쓰는 것. 대칭성이 뒤집는 것은 누적확률이 아니라 꼬리이다.
- 두 우유 종류의 평균(mean)이 서로 다르다는 것을 잊는 것. 그래서 같은 부피(예를 들어 500 ml)라도 각 종류마다 평균으로부터 떨어진 표준편차(standard deviation)의 개수가 다르다.
- 두 종류 모두에 $\mathrm{P}(V \geq 495) = b$를 쓰는 것. 전지유에서 495 ml는 평균이다.

STEP 너머

이 문제의 요점은 분포를 전혀 모르더라도 대칭성과 전확률 법칙만으로 꽤 멀리 갈 수 있다는 것이다. 여기서 두 모집단을 섞은 것은 간단한 **혼합 모형**(*mixture model*)이며, 소문항 (ii)(b)는 데이터로부터 그 모수(parameter)를 추정하는 일의 초보적인 형태이다. 이와 관련된 분포에 의존하지 않는 결과로 체비쇼프 부등식(Chebyshev's inequality)이 있는데, 이는 분산(variance)만을 사용하여 $\mathrm{P}(|X-\mu| \geq k\sigma)$의 상계를 준다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문), 또는 Grimmett과 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률: 입문)을 참고하라.

풀이

STEP I 2005, 문제 14

확률과 통계 • 혼합형 확률변수

STEP I 2005, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/05-s1-q14

핵심 아이디어

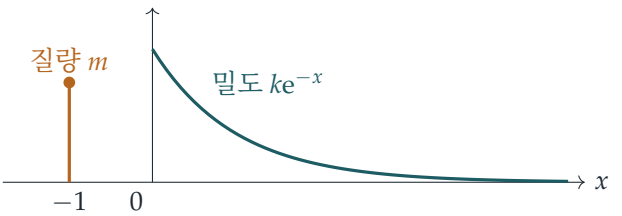
X는 **혼합** 확률변수(mixed random variable)이다. 즉, 한 점 -1에 확률이 덩어리로 몰려 있고, 이와 함께 $[0,\infty)$ 위에 연속적으로 퍼져 있는 부분이 있다. 이런 확률변수를 다루려면 모든 계산을 두 부분으로 나누면 된다. $X=-1$에서 오는 이산 항에, $[0,\infty)$ 위의 확률밀도함수에 대한 적분을 더하는 것이다. 연속 부분이 단지 상수배된 지수분포(exponential distribution)라는 사실을 알아차리면, 대부분의 적분은 이미 알고 있는 것들이다.

풀이

주어진 누적확률을 미분하면, X의 연속 부분의 확률밀도함수(density)는

$$f(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}k(1-\mathrm{e}^{-x})=k\mathrm{e}^{-x},\qquad x\geq 0.$$

이다. 따라서 X는 다음과 같은 모양이다. -1에 점질량(point mass) m이 있고, $[0,\infty)$ 위에 곡선 $k\mathrm{e}^{-x}$가 있다.



소문항 (i)

전체 확률은 1이다. $x \to \infty$로 보내면 $\mathrm{P}(X \geq 0) = k(1-0) = k$이므로

$$m + k = 1, \qquad \text{즉,} \qquad k = 1 - m.$$

이다. ($m \geq 0$은 확률이고 $m < \frac{1}{2}$이므로 $k > \frac{1}{2} > 0$이다. 따라서 밀도는 실제로 양수이다.)

소문항 (ii)

두 부분으로 나누면

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= (-1)\cdot m + \int_0^\infty x\,(1-m)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= -m + (1-m)\cdot 1 = 1 - 2m,\end{aligned}$$

이다. 여기서 $\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$을 이용하였다(부분적분(integration by parts)을 하거나, 모수가 1인 지수분포의 평균임을 알아보면 된다). 이것이 구하려던 결과이다.

소문항 (iii)

분산(*variance*). 같은 방법으로, $\int_0^\infty x^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 2$(부분적분을 두 번 한다)를 이용하면

$$\mathrm{E}(X^2) = (-1)^2\cdot m + (1-m)\cdot 2 = 2 - m.$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}(X^2) - \big(\mathrm{E}(X)\big)^2 = 2 - m - (1-2m)^2 \\ &= 1 + 3m - 4m^2 = (1-m)(1+4m).\end{aligned}$$

생각해 보기 중앙값이 -1일 수 있을까? 아니면 -1과 0 사이 어딘가에 있을 수 있을까?

중앙값(*median*). 그럴 수 없다. X는 $(-1, 0)$의 값을 결코 갖지 않으며, $\mathrm{P}(X \leq -1) = m < \frac{1}{2}$이므로 점질량만으로는 확률의 절반에 이르지 못한다. 바로 이 부분에서 조건 $m < \frac{1}{2}$가 쓰인다. 따라서 중앙값 M은 $M \geq 0$이고 $\mathrm{P}(X \leq M) = \frac{1}{2}$를 만족한다.

$$\begin{aligned}m + (1-m)(1-\mathrm{e}^{-M}) &= \tfrac{1}{2} \\ 1 - (1-m)\mathrm{e}^{-M} &= \tfrac{1}{2} \\ \mathrm{e}^{-M} &= \frac{1}{2(1-m)}.\end{aligned}$$

그러므로

$$M = \ln\big(2(1-m)\big) = \ln(2-2m).$$

이다. 앞뒤가 맞는지 확인해 보면, $0 \le m < \frac{1}{2}$에서 $1 < 2 - 2m \le 2$이므로 $M > 0$이고, 마땅히 그래야 한다. 분포가 $[0, \infty)$에서 연속이므로 이 M은 $\mathrm{P}(X \ge M) = \frac{1}{2}$도 만족하고, 따라서 중앙값은 하나로 정해진다.

소문항 (iv)

$X = -1$일 때 $|X|^{1/2} = 1$이고, $X \ge 0$일 때 $|X|^{1/2} = \sqrt{X}$이다. 따라서

$$\mathrm{E}\left(|X|^{1/2}\right) = 1 \cdot m + (1 - m) \int_0^\infty \sqrt{x}\, \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x.$$

이다.

> **?** **생각해 보기** $\int_0^\infty \sqrt{x}\, \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x$를 어떻게 주어진 적분으로 바꿀 수 있을까?

주어진 적분에는 e^{-y^2}이 있으므로 $x = y^2$ $(y \ge 0)$으로 치환하는 것이 자연스럽다. 그러면 $\sqrt{x} = y$, $\mathrm{d}x = 2y\, \mathrm{d}y$이고, 적분 구간의 끝 0과 ∞는 그대로이다.

$$\int_0^\infty \sqrt{x}\, \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x = \int_0^\infty y\, \mathrm{e}^{-y^2}\, 2y\, \mathrm{d}y = 2 \int_0^\infty y^2 \mathrm{e}^{-y^2}\, \mathrm{d}y = 2 \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{\pi} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

따라서

$$\mathrm{E}\left(|X|^{1/2}\right) = m + \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,(1 - m).$$

이다.

검산

- $m = 0$이면 X는 정확히 모수가 1인 지수분포를 따른다. 위의 공식들은 평균 1, 분산 1, 중앙값 $\ln 2$, $\mathrm{E}(\sqrt{X}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \Gamma(\frac{3}{2})$를 주며, 모두 잘 알려진 값이다.
- $m \to \frac{1}{2}$이면 중앙값은 $\ln 1 = 0$으로 수렴하는데, 이는 이치에 맞다. 확률의 절반이 -1에 있으므로 중앙값은 연속 부분의 맨 아래 끝까지 미끄러져 내려간다.
- $m = 0.3$으로 두고 4×10^5개의 표본으로 모의실험(simulation)을 한 결과, 평균 0.402(공식 0.4), 분산 1.551(공식 1.54), 중앙값 0.336(공식 $\ln 1.4 \approx 0.336$), $\mathrm{E}(|X|^{1/2}) \approx 0.922$(공식 0.920)를 얻었다.

흔한 실수

- $\mathrm{E}(X^2)$나 $\mathrm{E}(|X|^{1/2})$에서 점질량을 빠뜨리는 것. $(-1)^2 = |-1|^{1/2} = 1$이므로 점질량은 $-m$이 아니라 $+m$만큼 기여한다.

- 중앙값을 구할 때 $(1-m)(1-\mathrm{e}^{-M}) = \frac{1}{2}$를 푸는 것. 이렇게 하면 -1에 이미 쌓여 있는 확률 m을 무시하게 된다.
- 치환할 때 $\mathrm{d}x$를 $2y\,\mathrm{d}y$로 바꾸지 않는 것. 그러면 $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ 대신 $\frac{1}{4}\sqrt{\pi}$가 나온다.

STEP 너머

점질량과 밀도가 섞인 분포는 실제로 흔하다(예를 들어 보험 청구액은 어떤 확률로 0이고, 그렇지 않으면 연속적인 값을 갖는다). 대학에서는 기댓값을 분포함수(distribution function)에 대한 적분 $\mathrm{E}(g(X)) = \int g(x)\,\mathrm{d}F(x)$로 써서 이런 분포를 한꺼번에 다루는데, 이 방법은 이산, 연속, 혼합인 경우를 모두 아우른다. 소문항 (iv)의 적분은 감마함수(Gamma function)의 값 $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$이다. 다음 단계로는 Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)이 좋다.

풀이

STEP II 2005, 문제 1

순수수학 • 다항식과 정류점

STEP II 2005, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/05-s2-q1

핵심 아이디어

$P(x)\mathrm{e}^{-x^2}$ 꼴의 함수를 곱의 미분법(product rule)으로 미분하면 $\big(P'(x) - 2xP(x)\big)\mathrm{e}^{-x^2}$을 얻는다. 그런데 e^{-x^2}은 결코 0이 되지 않으므로, 정류점(stationary point)은 정확히 다항식(polynomial) $P'(x) - 2xP(x)$의 실근(real root)이다. 따라서 두 번째 부분은 거꾸로 푸는 문제가 된다. 먼저 $P' - 2xP$가 어떤 다항식이 되기를 원하는지 정한 다음, 계수비교(comparing coefficients)를 통해 거슬러 올라가 P를 구한다.

풀이

첫 번째 부분

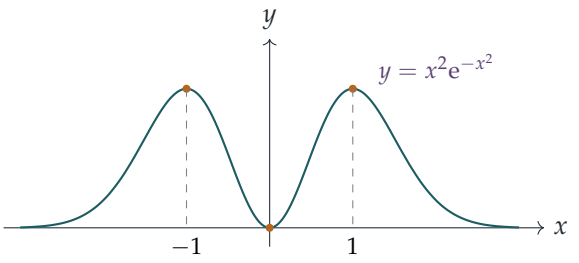
곱의 미분법에 의해

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2\mathrm{e}^{-x^2}\right) = 2x\,\mathrm{e}^{-x^2} + x^2\cdot(-2x)\,\mathrm{e}^{-x^2} = 2x\big(1-x^2\big)\mathrm{e}^{-x^2}.$$

모든 x에 대하여 $\mathrm{e}^{-x^2} > 0$이므로, 이 값은 $x(1-x^2) = 0$일 때, 즉

$$x = 0, \qquad x = 1, \qquad x = -1.$$

에서 정확히 0이 된다.



그래프는 원점에서 극소(minimum)이고, $x = \pm 1$에서 높이 e^{-1}의 극대(maximum)를 가진다.

두 번째 부분

임의의 다항식 P에 대하여

$$\frac{d}{dx}\left(P(x)e^{-x^2}\right) = \left(P'(x) - 2xP(x)\right)e^{-x^2},$$

이므로, 이번에도 $e^{-x^2} > 0$이기 때문에 도함수(derivative)는 정확히 $P'(x) - 2xP(x) = 0$인 곳에서 0이 된다. 첫 번째 부분도 이 틀에 들어맞는다. $P(x) = x^2$일 때 $P' - 2xP = -2x(x^2 - 1)$이었다. 따라서 다음을 목표로 한다.

$$P'(x) - 2xP(x) = -2x\left(x^2 - a^2\right)\left(x^2 - b^2\right), \qquad (*)$$

이 식의 실근은 $0, \pm a, \pm b$뿐이다. a와 b는 서로 다른 양수이므로 이들은 **서로 다른** 다섯 개의 값이다.

> **생각해 보기** P의 차수(degree)는 얼마여야 하며, 왜 짝수 차수의 항만 포함해야 할까?

P의 차수가 n이고 최고차항의 계수(leading coefficient)가 c이면, P'의 차수는 $n-1$이므로 $P' - 2xP$는 차수가 $n+1$이고 최고차항의 계수가 $-2c$이다. $(*)$의 우변은 차수가 5이고 최고차항의 계수가 -2이므로, $n = 4$, $c = 1$이어야 한다. 또한 우변은 기함수(odd function)이다. P가 우함수(even function)이면 P'과 $2xP$는 모두 기함수이므로, 다음과 같이 놓아 보는 것이 자연스럽다.

$$P(x) = x^4 + \beta x^2 + \gamma.$$

그러면 $P'(x) = 4x^3 + 2\beta x$이고

$$\begin{aligned} P'(x) - 2xP(x) &= 4x^3 + 2\beta x - 2x^5 - 2\beta x^3 - 2\gamma x \\ &= -2x^5 + (4 - 2\beta)x^3 + (2\beta - 2\gamma)x, \end{aligned}$$

한편 $(*)$의 우변을 전개하면

$$-2x^5 + 2\left(a^2 + b^2\right)x^3 - 2a^2b^2x.$$

이다. x^3과 x의 계수를 비교하면

$$\begin{aligned} 4-2\beta &= 2\left(a^2+b^2\right) && \Longrightarrow && \beta = 2-a^2-b^2, \\ 2\beta-2\gamma &= -2a^2b^2 && \Longrightarrow && \gamma = \beta + a^2b^2 = a^2b^2 - a^2 - b^2 + 2. \end{aligned}$$

따라서 조건을 만족하는 다항식의 한 예는 다음과 같다.

$$\boxed{P(x) = x^4 + \left(2-a^2-b^2\right)x^2 + a^2b^2 - a^2 - b^2 + 2.}$$

이렇게 고르면 $(*)$가 항등식으로 성립하므로

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P(x)\mathrm{e}^{-x^2}\right) = -2x\left(x^2-a^2\right)\left(x^2-b^2\right)\mathrm{e}^{-x^2},$$

이고, 이 값은 $x=0$, $x=\pm a$, $x=\pm b$에서 0이 되며, $\mathrm{e}^{-x^2}\neq 0$이므로 그 밖의 x 값에서는 0이 되지 않는다. P에 0이 아닌 상수를 곱한 것도 똑같이 조건을 만족한다.

검산

- $a=1, b=2$로 놓으면 $P(x) = x^4 - 3x^2 + 1$이고, $P' - 2xP = 4x^3 - 6x - 2x^5 + 6x^3 - 2x = -2x^5 + 10x^3 - 8x = -2x(x^2-1)(x^2-4)$이므로 요구한 대로이다.
- 수치적으로, $a=0.7$, $b=1.9$일 때 $P(x)\mathrm{e}^{-x^2}$의 도함수는 $[-5,5]$에서 $x=0, \pm 0.7, \pm 1.9$ 근처에서만 부호가 바뀐다. 또한 무작위로 고른 수천 개의 (a,b,x)에서 공식이 맞음을 확인하였다.
- 직관적으로 $b\to 0$으로 보내면 $P \to x^4 + (2-a^2)x^2 + 2 - a^2$이고, 도함수는 $-2x^3(x^2-a^2)\mathrm{e}^{-x^2}$이 되어, 0과 $\pm b$에 있던 근들이 하나로 합쳐진다.

흔한 실수

- 연쇄법칙(chain rule)에서 나오는 인수를 빠뜨리는 것: e^{-x^2}의 도함수는 e^{-x^2}이 아니라 $-2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$이다.
- 근이 다섯 개이니 P의 차수를 5로 짐작하는 것: $P\mathrm{e}^{-x^2}$을 미분하면 차수가 하나 올라가므로 P의 차수는 4이다.
- 다른 정류점이 없는 이유를 밝히지 않는 것: 이를 위해서는 $\mathrm{e}^{-x^2}\neq 0$이라는 사실과 5차식이 이 근들만 가진다는 사실이 필요하다.

STEP 너머

사상 $P \mapsto P' - 2xP$는 다항식 위의 선형 연산자(linear operator)이고, $(*)$를 푸는 것은 적분인자(integrating factor) e^{-x^2}을 이용해 1계 선형 미분방정식(first-order linear differential equation)을 푸는 것과 같다. H가 다항식일 때 $H(x)\mathrm{e}^{-x^2}$ 꼴의 함수들은 에르미트(Hermite) 다항식으로 이어지며, 이 다항식은 확률론(정규분포)과 양자 조화 진동자(quantum harmonic oscillator)에 등장한다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에서 적분인자와 에르미트 방정식을 다룬다.

풀이

STEP II 2005, 문제 2

순수수학 • 오일러 피 함수

> **STEP II 2005, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/05-s2-q2

핵심 아이디어

모든 것은 N을 소인수분해(prime factorisation)한 꼴로 쓰는 데서 나온다. 각 인수 $\left(1-\frac{1}{p}\right)=\frac{p-1}{p}$는 분모에 p를 가지고 있고, N에는 이를 약분할 p가 적어도 하나는 반드시 들어 있다. $\mathrm{f}(N)$을 소수의 거듭제곱들에 대한 곱으로 쓰고 나면, $\mathrm{f}(m)\mathrm{f}(n)$과 $\mathrm{f}(mn)$이 언제 같은지 정확히 알 수 있다. 그것은 m과 n이 공통인 소인수를 가지는지에 달려 있다.

풀이

소문항 (i)

(a) $12=2^2\cdot 3$을 나누는 소수(prime)는 2와 3이므로

$$\mathrm{f}(12)=12\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)=12\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=4.$$

$180=2^2\cdot 3^2\cdot 5$를 나누는 소수는 2, 3, 5이므로

$$\mathrm{f}(180)=180\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=48.$$

(b) $N=1$이면 소인수가 없으므로 곱은 빈 곱이 되고, $\mathrm{f}(1)=1$이다. $N\geq 2$이면

$$N=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k},$$

으로 쓰자. 여기서 p_i는 N을 나누는 서로 다른 소수들이고, 모든 $a_i\geq 1$이다. 그러면

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(N)&=p_1^{a_1}\cdots p_k^{a_k}\cdot\frac{p_1-1}{p_1}\cdots\frac{p_k-1}{p_k}\\&=p_1^{a_1-1}(p_1-1)\,p_2^{a_2-1}(p_2-1)\cdots p_k^{a_k-1}(p_k-1).\end{aligned}$$

각 $a_i \geq 1$이므로 모든 지수 $a_i - 1$은 음이 아닌 정수이고, 따라서 각 인수 $p_i^{a_i-1}(p_i - 1)$은 양의 정수이다. 그러므로 모든 N에 대하여 $\mathrm{f}(N)$은 정수이다. 이 문제의 나머지 부분에서는 다음 공식

$$\mathrm{f}(N) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{a_i-1}(p_i - 1), \qquad (*)$$

을 사용한다.

소문항 (ii)

(a) 이 명제는 거짓이다. $m = n = 2$로 잡자. 그러면 $\mathrm{f}(2) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$이므로 $\mathrm{f}(2)\mathrm{f}(2) = 1$이지만, $\mathrm{f}(4) = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$이다.

문제는 인수 $\left(1 - \frac{1}{2}\right)$가 좌변에는 두 번 나타나지만 우변에는 한 번만 나타난다는 점이다. 2는 4의 소인수로서 한 번만 세어지기 때문이다.

(b) 이 명제는 참이다. p와 q가 서로 다른 소수이면 $\mathrm{f}(p) = p\left(1 - \frac{1}{p}\right) = p - 1$이고, 마찬가지로 $\mathrm{f}(q) = q - 1$이다. pq를 나누는 소수는 정확히 p와 q이고 이 둘은 서로 다르므로

$$\mathrm{f}(pq) = pq\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right) = (p-1)(q-1) = \mathrm{f}(p)\mathrm{f}(q).$$

(c) 주장은 $\mathrm{f}(p)\mathrm{f}(q) = \mathrm{f}(pq)$가 p와 q가 서로 다른 소수일 **때에만** 성립할 수 있다는 것, 즉 이 등식이 성립하면 p와 q는 반드시 서로 다른 소수라는 것이다. 이 명제는 거짓이다. $p = 3$, $q = 4$로 잡자. 등식이 의미를 가지기 위해 둘 다 소수일 필요는 없다. 그러면 소문항 (i)(a)에 의해

$$\mathrm{f}(3)\mathrm{f}(4) = 2 \cdot 2 = 4 = \mathrm{f}(12),$$

이지만 4는 소수가 아니다. (더 간단한 예는 $p = 1$이다. 모든 q에 대하여 $\mathrm{f}(1)\mathrm{f}(q) = \mathrm{f}(q)$이기 때문이다.)

> **생각해 보기** 소수라는 성질이 아니라면, 이 등식을 실제로 성립하게 만드는 것은 무엇일까?

중요한 것은 p와 q가 공통인 소인수를 갖지 않는다는 것이다. $\gcd(m, n) = 1$이면 m에 들어 있는 소수의 거듭제곱과 n에 들어 있는 소수의 거듭제곱이 서로 다르므로, mn의 소인수분해는 두 소인수분해를 나란히 놓은 것일 뿐이고, $(*)$에 의해 $\mathrm{f}(mn) = \mathrm{f}(m)\mathrm{f}(n)$이다. 어떤 소수 r이 둘을 모두 나누면 인수 $\left(1 - \frac{1}{r}\right)$가 $\mathrm{f}(m)\mathrm{f}(n)$에는 두 번, $\mathrm{f}(mn)$에는 한 번 나타나므로 $\mathrm{f}(m)\mathrm{f}(n) < \mathrm{f}(mn)$이다. 따라서 등식은 정확히 $\gcd(m, n) = 1$일 때 성립하며, 3, 4는 소수의 쌍이 아닌 서로소(coprime)인 쌍의 한 예일 뿐이다.

한편 소문항 (ii) 전체에서 p와 q가 소수를 나타낸다고 읽는다면, (c)는 $p = q$인 경우가 가능한지만을 묻는 것이 되고, 그런 경우는 불가능하다. $\mathrm{f}(p)^2 = (p-1)^2$이고

$f(p^2) = p(p-1)$인데, $p - 1 \neq p$이므로 이 둘은 결코 같지 않다. 이렇게 읽으면 (c)는 참이다. 그러나 위의 반례(counterexample)와 함께 일반적으로 읽는 쪽이 더 자연스럽다.

소문항 (iii)

$(*)$에 의해 소수의 거듭제곱에 대하여

$$f(p^m) = p^{m-1}(p-1).$$

이다. $14641 = 121^2 = 11^4$이므로 목표값을 소인수분해하면 $146410 = 10 \times 14641 = 2 \cdot 5 \cdot 11^4$이다. 이것은 이미 $p = 11$일 때 $p^{m-1}(p-1)$의 꼴이다. $11^4 \cdot 10 = 11^4(11-1)$이므로 $m - 1 = 4$이다. 따라서

$$p = 11, \quad m = 5: \qquad f(11^5) = 11^4 \cdot 10 = 146410.$$

사실 이것이 유일한 답이다. $m \geq 2$이면 p는 146410을 나누므로 $p \in \{2, 5, 11\}$이다. $p = 2$로 잡으면 $2^{m-1} = 146410$이 되어야 하는데, 146410은 홀수인 소인수를 가지므로 불가능하다. $p = 5$로 잡으면 $4 \cdot 5^{m-1} = 146410$이 되어야 하는데, 146410은 4로 나누어떨어지지 않으므로 불가능하다. 남은 것은 $p = 11$이고, 이때 $m = 5$이다. $m = 1$이면 $p = 146411$이 소수여야 하지만, $146411 = 41 \times 3571$이다.

검산

- 이 함수는 오일러(Euler)의 피 함수(Euler's totient function)이다. 즉 $f(N)$은 $\{1, \ldots, N\}$에 속하는 정수 중 N과 서로소인 것의 개수를 센다. 예를 들어 $N = 12$일 때 그러한 수는 $1, 5, 7, 11$의 네 개이다. 컴퓨터로 $N < 2000$인 모든 N에 대하여 곱 공식이 이 개수와 일치하고 정수임을 확인하였다.
- 문제에 주어진 예시는 $f(80) = 80 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = 32 = 2^3(2-1) \cdot 5^0(5-1)$이며, 이는 $(*)$와 일치한다.
- 컴퓨터로 $m, n \leq 400$인 무작위 쌍 20 000개를 검사한 결과, $f(m)f(n) = f(mn)$은 정확히 $\gcd(m, n) = 1$일 때 성립하였다. $p \leq 146411$인 모든 소수를 탐색한 결과, (iii)의 해는 $(p, m) = (11, 5)$뿐이었다.

흔한 실수

- 곱에 같은 소수를 두 번 이상 넣는 것. $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$의 경우 인수는 다섯 개가 아니라 세 개이다.
- "일 때에만(only if)"을 "이면(if)"으로 다루는 것. (b)는 "이면" 방향이고 (c)는 그 역(converse)으로, 서로 다른 명제이다.

▶ (iii)에서 $14641 = 11^4$임을 놓치는 것. $11^2 = 121$이고 $121^2 = 14641$임을 알아차리거나, 파스칼(Pascal)의 삼각형의 행 $1, 4, 6, 4, 1$을 알아보면 빨리 찾을 수 있다.

STEP 너머

이 함수는 오일러의 피 함수 φ이며, 소문항 (ii)의 사실들은 이 함수가 **곱셈적**(*multiplicative*)이라는 것, 즉 일반적으로는 아니지만 $\gcd(m, n) = 1$일 때마다 $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$임을 말해 준다. 이 함수는 n과 서로소인 a에 대하여 $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$이라는 오일러 정리(Euler's theorem)에 등장하는데, 이 정리는 페르마(Fermat)의 소정리(Fermat's little theorem)를 일반화한 것이며 RSA 암호의 바탕이 된다. 군론(group theory)에서 $\varphi(n)$은 법 n에 대한 단위군(group of units)의 위수(order)이다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 이 모든 내용을 아름답게 전개한다.

풀이

STEP II 2005, 문제 3

순수수학 • 부분적분

STEP II 2005, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/05-s2-q3

핵심 아이디어

먼저 미분(differentiate)한다. $\sin x - x\cos x$의 도함수(derivative)는 부호가 한눈에 보이는 간단한 식으로 정리되고, 이것 하나로 그래프의 개형과 y의 범위를 한꺼번에 얻는다. 두 적분은 평범한 부분적분(integration by parts)으로 계산하며, 제곱항은 배각 공식(double-angle formula)을 쓰면 수월하다. 마지막 부등식은 두 적분을 비교하여 얻는다. 0과 1 사이의 수는 자기 자신의 제곱보다 작지 않다.

풀이

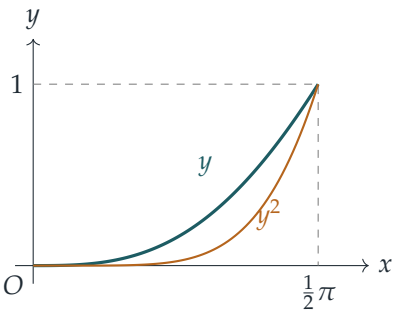
개형과 범위

곱의 미분법(product rule)으로 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cos x - (\cos x - x\sin x) = x\sin x.$$

$0 < x \leq \frac{1}{2}\pi$에서 x와 $\sin x$가 모두 양수이므로 y는 $[0, \frac{1}{2}\pi]$에서 순증가(strictly increasing)한다. 따라서 최솟값은 $y(0) = 0 - 0 = 0$이고 최댓값은 $y(\frac{1}{2}\pi) = 1 - \frac{1}{2}\pi \cdot 0 = 1$이다. 그러므로 $0 \leq y \leq 1$이고, 실제로 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$에서는 $0 < y < 1$이다.

모양을 보면, $(0, \frac{1}{2}\pi]$에서 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \sin x + x\cos x > 0$이므로 곡선은 구간 전체에서 아래로 볼록하다. 원점에서 기울기는 0이다. 매클로린 급수(Maclaurin series)를 이용하면 $y = \left(x - \frac{1}{6}x^3\right) - x\left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) + \cdots = \frac{1}{3}x^3 + \cdots$이므로, 곡선은 삼차함수처럼 원점에서 매우 평평하게 출발한다. $x = \frac{1}{2}\pi$에서 기울기는 $\frac{1}{2}\pi$이다.



마지막 부분의 열쇠가 되므로 호박색 곡선 y^2도 함께 나타내었다.

소문항 (i)

$\int_0^{\pi/2} x\cos x\,\mathrm{d}x$가 필요하다. $u = x$, $\mathrm{d}v = \cos x\,\mathrm{d}x$로 두고 부분적분하면

$$\int_0^{\pi/2} x\cos x\,\mathrm{d}x = \Big[x\sin x\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\pi - 1.$$

$\int_0^{\pi/2} \sin x\,\mathrm{d}x = 1$이므로

$$\int_0^{\pi/2} y\,\mathrm{d}x = 1 - \left(\tfrac{1}{2}\pi - 1\right) = 2 - \frac{\pi}{2},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

소문항 (ii)

전개하면

$$y^2 = \sin^2 x - 2x\sin x\cos x + x^2\cos^2 x = \sin^2 x - x\sin 2x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x^2\cos 2x,$$

이다. 여기서 $2\sin x\cos x = \sin 2x$와 $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$를 이용하였다. 네 항을 차례로 계산한다.

먼저 $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$이고 $\sin 2x$는 양 끝에서 모두 0이 되므로

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \Big[\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\sin 2x\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

다음으로 $u = x$, $\mathrm{d}v = \sin 2x\,\mathrm{d}x$로 두고 부분적분하며 $\cos\pi = -1$을 이용하면

$$\int_0^{\pi/2} x\sin 2x\,\mathrm{d}x = \Big[-\tfrac{1}{2}x\cos 2x\Big]_0^{\pi/2} + \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} + 0 = \frac{\pi}{4}.$$

세 번째로 $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\pi\right)^3 = \frac{\pi^3}{48}$이다.

마지막으로 $u = x^2$, $\mathrm{d}v = \cos 2x\,\mathrm{d}x$로 두고 부분적분한다. 경계항 $\left[\frac{1}{2}x^2 \sin 2x\right]_0^{\pi/2}$는 0이고, 남는 적분은 방금 구한 것이다.

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \cos 2x\,\mathrm{d}x = 0 - \int_0^{\pi/2} x \sin 2x\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{4},$$

따라서 마지막 항의 기여는 $\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{1}{8}\pi$이다.

네 항을 더하면

$$\int_0^{\pi/2} y^2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{8},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

결론 이끌어내기

? **생각해 보기** 두 적분에서 어떻게 π에 관한 부등식이 나올 수 있을까?

피적분함수를 비교한다. $0 \le y \le 1$이므로 구간 전체에서 $y - y^2 = y(1-y) \ge 0$이다. 더 나아가 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$에서 $0 < y < 1$임을 보였으므로 그 구간에서 $y(1-y) > 0$이다. 음이 아니고 어떤 열린구간에서 양수인 연속함수(continuous function)의 적분은 양수이다. 그러므로

$$\int_0^{\pi/2} y^2\,\mathrm{d}x < \int_0^{\pi/2} y\,\mathrm{d}x, \qquad \text{즉,} \qquad \frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{8} < 2 - \frac{\pi}{2}.$$

양변에 48을 곱하면(양수이므로 부등호의 방향은 그대로이다)

$$\pi^3 - 6\pi < 96 - 24\pi, \qquad \text{따라서} \qquad \pi^3 + 18\pi < 96.$$

이것이 구하려던 결과이다.

검산

- 수치로 계산하면 $2 - \frac{1}{2}\pi \approx 0.4292$, $\frac{1}{48}\pi^3 - \frac{1}{8}\pi \approx 0.2533$이다. 원래의 피적분함수에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용해도 소수점 아래 열두 자리까지 같은 값이 나온다. $0 \le y \le 1$이므로 당연히 두 값 모두 0과 $\frac{1}{2}\pi \approx 1.571$ 사이에 있다.
- y 아래에 놓인 y^2의 그림에서 짐작할 수 있듯이, 두 번째 적분이 첫 번째 적분보다 작다.
- $\pi \approx 3.1416$으로 두면 $\pi^3 + 18\pi \approx 31.006 + 56.549 = 87.55$로, 96보다 넉넉히 작다.

흔한 실수

- $\int x \sin 2x\,\mathrm{d}x$에서 경계항의 부호를 틀리는 경우. $x = \frac{1}{2}\pi$에서 $\cos 2x = \cos \pi = -1$이므로 $-\frac{1}{2}x \cos 2x$는 $+\frac{1}{4}\pi$이다.

- 마지막 단계에서 $\leq$만 주장하는 경우. 등호 없는 부등식을 얻으려면 ≥ 0만으로는 부족하고, 어딘가에서 $y(1-y) > 0$임을 보여야 한다.
- $y \leq 1$인 이유를 밝히지 않는 경우. y가 증가한다는 사실 없이 $y(\frac{1}{2}\pi) = 1$만 아는 것으로는 충분하지 않다.

STEP 너머

마지막 단계는 큰 아이디어의 작은 예이다. 함수 사이의 부등식을 적분하면 수 사이의 부등식이 되고, 함수를 잘 고르면 π와 같은 상수를 가둘 수 있다. 같은 전략으로 $\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x > 0$에서 $\frac{22}{7} > \pi$를 이끌어내는 유명한 증명이 나오며, 더 본격적으로는 π가 무리수(irrational)라는 Niven의 증명도 나온다. 대학의 첫 해석학(analysis) 강의에서는 음이 아니고 어딘가에서 양수인 연속함수의 적분이 양수라는 사실을 엄밀하게 증명하게 된다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 이 증명이 제대로 이루어지는 모습을 친절하게 보여 주는 책이다.

풀이

STEP II 2005, 문제 4

순수수학 • 역탄젠트 항등식

STEP II 2005, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/05-s2-q4

핵심 아이디어

역탄젠트(inverse tangent)의 합은 양변에 탄젠트를 취한 뒤 $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$를 이용하여 다룬다. 조건 $bc = a^2 + 1$은 바로 분모가 분자와 맞아떨어지게 인수분해(factorise)되도록 해 주는 조건이다. 그다음부터 이 문제는 구조에 관한 문제이다. 첫 번째 결과는 하나의 역탄젠트를 두 개로 쪼개는 규칙이고, 네 항짜리 항등식은 이 규칙을 두 번, 즉 트리(tree)의 각 층에서 한 번씩 적용한 것이다. 수치 부분에서는 거꾸로 거슬러 올라가서 어떤 쪼개기가 네 수를 만들어 냈는지 찾는다.

풀이

첫 번째 항등식

$A = \arctan\frac{1}{a+b}$, $B = \arctan\frac{1}{a+c}$라 하자. $a, b, c > 0$이므로 $\frac{1}{a+b}$와 $\frac{1}{a+c}$는 모두 양수이고, 따라서 $A, B \in (0, \frac{\pi}{2})$이며 $A + B \in (0, \pi)$이다. $bc = a^2 + 1$을 이용하면

$$\begin{aligned}(a+b)(a+c) - 1 &= a^2 + ab + ac + bc - 1 \\ &= 2a^2 + ab + ac = a(2a + b + c).\end{aligned}$$

따라서 덧셈정리(addition formula)에 의하여

$$\begin{aligned}\tan(A+B) &= \frac{\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{a+c}}{1 - \dfrac{1}{(a+b)(a+c)}} = \frac{(a+c)+(a+b)}{(a+b)(a+c)-1} \\ &= \frac{2a+b+c}{a(2a+b+c)} = \frac{1}{a},\end{aligned}$$

이다. 여기서 $2a+b+c>0$이므로 약분할 수 있다.

생각해 보기 $\tan(A+B)=\frac{1}{a}$이면 정말로 $A+B=\arctan\frac{1}{a}$인가?

저절로 그렇게 되지는 않는다. tan는 주기(period)가 π이므로, $A+B$가 arctan의 치역(range)인 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$에 속해야 한다. 우리는 $A+B\in(0,\pi)$임을 알고 있다. 또한 $(a+b)(a+c)-1=a(2a+b+c)>0$이므로 $\tan A\tan B<1$이고, 덧셈정리의 분모는 양수이다. 분자도 양수이므로 $\tan(A+B)>0$이고, 이로써 $A+B\in[\frac{\pi}{2},\pi)$인 경우는 배제된다. (실제로 $\tan(A+B)$는 $\frac{\pi}{2}$에서 정의되지 않고 $(\frac{\pi}{2},\pi)$에서는 음수이다.) 따라서 $A+B\in(0,\frac{\pi}{2})$이고, $\arctan\frac{1}{a}$는 이 구간에서 탄젠트 값이 $\frac{1}{a}$인 유일한 각이므로

$$\arctan\frac{1}{a+b}+\arctan\frac{1}{a+c}=\arctan\frac{1}{a}.\qquad\blacksquare$$

네 항짜리 항등식

첫 번째 항등식을 세 번 적용한다. 매번 관련된 세 수는 모두 양수이다.

- $a=p+q, b=s, c=t$로 두면 조건은 $st=(p+q)^2+1$이고 이는 주어진 것이므로
$$\arctan\frac{1}{p+q+s}+\arctan\frac{1}{p+q+t}=\arctan\frac{1}{p+q}.$$
- $a=p+r, b=u, c=v$로 두면 조건 $uv=(p+r)^2+1$이 주어져 있으므로
$$\arctan\frac{1}{p+r+u}+\arctan\frac{1}{p+r+v}=\arctan\frac{1}{p+r}.$$
- $a=p, b=q, c=r$로 두면 조건 $qr=p^2+1$이 주어져 있으므로
$$\arctan\frac{1}{p+q}+\arctan\frac{1}{p+r}=\arctan\frac{1}{p}.$$

처음 두 줄을 더하고 세 번째 줄을 이용하면 네 역탄젠트의 합은 $\arctan\frac{1}{p}$이다. 이것이 보이려던 것이다. $\blacksquare$

수치 항등식

$p=7$이어야 하므로 $qr=50$이다. q와 r를 추측하기보다는 네 수에서 거꾸로 거슬러 올라가자. 13과 21이 첫 번째 항등식을 한 번 적용할 때의 쌍 $a+b$, $a+c$라면 $b=13-a$, $c=21-a$이고, $bc=a^2+1$로부터

$$(13-a)(21-a)=a^2+1\iff 273-34a=1\iff a=8.$$

마찬가지로 82와 187이 한 쌍이라면

$$(82-a)(187-a)=a^2+1\iff 15334-269a=1\iff a=57.$$

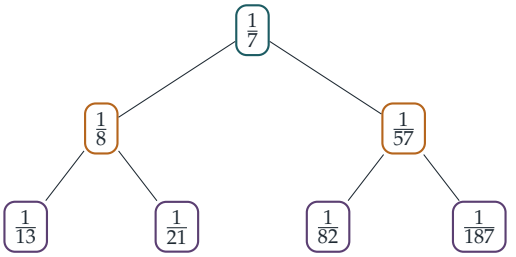
따라서 $p+q=8$, $p+r=57$, 즉 $q=1$, $r=50$으로 시도해 보자. 그러면 $s=13-8=5$, $t=21-8=13$, $u=82-57=25$, $v=187-57=130$이다. 일곱 수는 모두 양수이고, 세 조건이 모두 성립한다.

$$qr=50=7^2+1, \qquad st=65=8^2+1, \qquad uv=3250=57^2+1.$$

이 값들에 대하여 $p+q+s=13$, $p+q+t=21$, $p+r+u=82$, $p+r+v=187$이므로 네 항짜리 항등식에 의하여

$$\arctan\frac{1}{13}+\arctan\frac{1}{21}+\arctan\frac{1}{82}+\arctan\frac{1}{187}=\arctan\frac{1}{7}. \qquad \blacksquare$$

아래 트리는 $\arctan\frac{1}{7}$이 어떻게 쪼개지는지 보여 준다.



각 노드의 역탄젠트는 자식 노드들의 역탄젠트의 합이다: $1\cdot 50=7^2+1$, $5\cdot 13=8^2+1$, $25\cdot 130=57^2+1$.

검산

- 수치적으로, 마지막 항등식의 양변은 모두 0.1418970546…이다.
- 분수로 정확히 계산하면, $\frac{1}{13}$, $\frac{1}{21}$에 대한 $\tan(A+B)$는 $\frac{34}{272}=\frac{1}{8}$이고, $\frac{1}{82}$, $\frac{1}{187}$에 대해서는 $\frac{269}{15333}=\frac{1}{57}$이며, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{57}$에 대해서는 $\frac{65}{455}=\frac{1}{7}$이다.
- 첫 번째 항등식의 특수한 경우: $a=1$, $b=1$, $c=2$로 두면 유명한 등식 $\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$를 얻는다.

흔한 실수

- $A+B$가 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$에 속하는지 확인하지 않고 $\tan(A+B)=\frac{1}{a}$로부터 $A+B=\arctan\frac{1}{a}$라고 결론 내리는 것.
- 50, 65, 3250의 인수분해를 무작정 뒤지는 것. 쌍 13, 21에서 거꾸로 거슬러 올라가면 한 줄 만에 $a=8$을 찾을 수 있다.

STEP 너머

이와 같은 항등식은 $\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$와 같은 마친(Machin)형 공식의 바탕이 된다. 이런 공식은 수 세기 동안 손으로 π를 계산하는 데 쓰였는데, x가 작을 때 $\arctan x$의 급수(series)가 빠르게 수렴하기 때문이다. 이를 가장 깔끔하게 이해하는 방법은 복소수(complex numbers)를 통하는 것이다. $\arctan\frac{1}{n}$은 $n + \mathrm{i}$의 편각(argument)이므로, 역탄젠트를 더하는 것은 가우스 정수(Gaussian integers)를 곱하는 것에 대응하고, 조건 $bc = a^2 + 1$은 사실 $a^2 + 1 = (a + \mathrm{i})(a - \mathrm{i})$라는 인수분해가 모습을 바꾼 것이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 곱셈에 대한 이러한 기하학적 관점을 전개하며, Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 두 제곱수의 합을 다룬다.

풀이

STEP II 2005, 문제 5

순수수학 • 내접원과 외접원

STEP II 2005, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/05-s2-q5

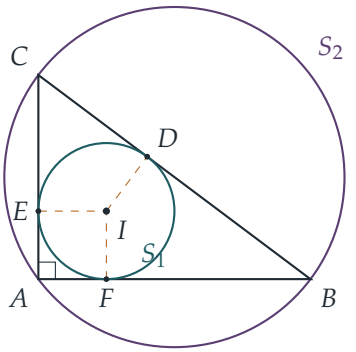
핵심 아이디어

원 밖의 한 점에서 원에 그은 두 접선의 길이는 같다. 이 사실을 각 꼭짓점에 적용하면 삼각형의 각 변이 두 개의 접선 길이로 나뉘고, 직각인 꼭짓점에서는 두 접선 길이가 정확히 r이 된다. 이로부터 r에 대한 공식이 거의 곧바로 나온다. 넓이의 비에 대해서는, 직각이므로 빗변이 S_2의 지름이 되고, 피타고라스(Pythagoras) 정리를 쓰면 모든 것을 $b+c$와 a만으로 나타낼 수 있다. 이것이 q가 등장하는 이유이다.

풀이

내접원의 반지름

S_1의 중심을 I라 하고, S_1이 BC, CA, AB에 접하는 점을 각각 D, E, F라 하자.



반지름은 접선과 수직으로 만나므로 $IE \perp AC$이고 $IF \perp AB$이다. 여기에 A에서의 직각을

함께 생각하면 $AEIF$는 이웃한 두 변이 $IE = IF = r$인 직사각형이므로 정사각형이고,

$$AE = AF = r.$$

원 밖의 한 점에서 그은 두 접선의 길이는 같으므로 $BF = BD$이고 $CE = CD$이다. 따라서

$$c = AF + FB = r + BD, \qquad b = AE + EC = r + CD, \qquad a = BD + DC.$$

앞의 두 식을 더하고 세 번째 식을 빼면

$$b + c - a = 2r + BD + CD - (BD + DC) = 2r,$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

넓이의 비

$\angle BAC = 90°$이므로, 반원에 대한 원주각 정리(의 역)에 의해 BC는 외접원(circumcircle) S_2의 지름이다. 따라서 S_2의 반지름은 $\frac{1}{2}a$이고 넓이는 $\frac{1}{4}\pi a^2$이다.

S_1과 삼각형 사이의 영역은 삼각형에서 S_1의 원판을 제거한 것이므로, 그 넓이는 $\frac{1}{2}bc - \pi r^2$이다. 따라서

$$R = \frac{\frac{1}{2}bc - \pi r^2}{\frac{1}{4}\pi a^2}, \qquad \text{이므로} \qquad \pi R = \frac{2bc - 4\pi r^2}{a^2} = \frac{2bc}{a^2} - \pi\,\frac{(b + c - a)^2}{a^2},$$

이다. 여기서 $2r = b + c - a$를 이용하였다.

생각해 보기 $2bc/a^2$를 q만 포함하는 식으로 어떻게 바꿀 수 있을까?

피타고라스 정리에 의해 $b^2 + c^2 = a^2$이므로 $2bc = (b + c)^2 - (b^2 + c^2) = (b + c)^2 - a^2$이다. 양변을 a^2으로 나누면

$$\frac{2bc}{a^2} = q^2 - 1, \qquad \frac{(b + c - a)^2}{a^2} = \left(\frac{b + c}{a} - 1\right)^2 = (q - 1)^2.$$

따라서

$$\begin{aligned} \pi R &= q^2 - 1 - \pi(q^2 - 2q + 1) \\ &= -(\pi - 1)q^2 + 2\pi q - (\pi + 1), \end{aligned}$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

R의 상계

우변은 최고차항의 계수가 음수 $-(\pi-1)$인 q에 대한 이차식이므로 완전제곱식(completing the square)으로 고친다.

$$\begin{aligned}\pi R &= -(\pi-1)\left(q^2 - \frac{2\pi}{\pi-1}\,q\right) - (\pi+1)\\ &= -(\pi-1)\left(q - \frac{\pi}{\pi-1}\right)^2 + \frac{\pi^2}{\pi-1} - (\pi+1)\\ &= -(\pi-1)\left(q - \frac{\pi}{\pi-1}\right)^2 + \frac{\pi^2-(\pi^2-1)}{\pi-1}\\ &= \frac{1}{\pi-1} - (\pi-1)\left(q - \frac{\pi}{\pi-1}\right)^2.\end{aligned}$$

$\pi-1>0$이므로 제곱항은 빼지는 항이 되고, 따라서 모든 실수 q에 대하여 $\pi R \le \dfrac{1}{\pi-1}$이다. 양변을 $\pi>0$으로 나누면

$$R \le \frac{1}{\pi(\pi-1)}.$$

이것이 이끌어 내라고 한 결과이다.

이 상계가 실제로는 도달되지 않는다는 점에 주목할 만하다. 등호가 성립하려면 $q = \pi/(\pi-1) \approx 1.467$이어야 하지만, 직각삼각형에서는 $(b+c)^2 = a^2 + 2bc \le a^2 + (b^2+c^2) = 2a^2$이므로(산술-기하 평균 부등식(AM–GM)에 의해 $2bc \le b^2+c^2$) $q \le \sqrt{2} \approx 1.414$이다. 가능한 가장 큰 R는 직각이등변삼각형, 즉 $q=\sqrt{2}$일 때 나오며, 이때 $R = (2\sqrt{2}\,\pi - 3\pi + 1)/\pi \approx 0.1467$로 상계 $1/(\pi(\pi-1)) \approx 0.1486$보다 약간 작다.

검산

3–4–5 삼각형($b=4$, $c=3$, $a=5$)에 대해 공식은 $r=1$을 주는데, 실제로 넓이 6을 반둘레 6으로 나누면 1이 되어 잘 알려진 공식 $r = \text{넓이}/s$와 일치한다. 그러면 $R = (6-\pi)/(\frac{25}{4}\pi) \approx 0.14558$이고, 이차식에 $q=1.4$를 대입해도 같은 값이 나온다. 직각삼각형 10^5개를 무작위로 시험해 본 결과 πR에 대한 항등식이 매번 성립하였고, 0.14674보다 큰 R는 하나도 없어서 상계 0.14863과 부합하였다.

흔한 실수

- S_2의 반지름이 a가 아니라 $\frac{1}{2}a$임을 잊는 것: 빗변은 **지름**이다.
- $b^2+c^2=a^2$을 이용해 $2bc = (b+c)^2 - a^2$으로 쓰지 않고 $2bc/a^2$을 직접 전개하려 하는 것.
- $q = \pi/(\pi-1)$이 실제로 가능한 값인지 확인하지 않고 상계에 도달한다고 주장하는 것.

실제로는 도달하지 않는다. 다만 문제는 부등식만을 요구한다.

STEP 너머

일반적인 삼각형의 내접원(incircle)과 외접원은 두 중심 사이의 거리 d에 대한 오일러(Euler)의 공식 $d^2 = R_2(R_2 - 2r)$로 서로 연결되어 있다. 여기서 R_2는 외접원의 반지름이다. 이 공식으로부터 $R_2 \geq 2r$이 나오며, 등호는 정삼각형일 때만 성립한다. 이와 같은 결과, 그리고 도형들의 모임에서 어떤 비를 최적화한다는 발상은 기하 부등식(geometric inequalities) 연구로 이어진다. 콕서터(Coxeter)와 Greitzer의 *Geometry Revisited*(기하학 다시 보기)는 다음 단계로 삼기에 훌륭한 책이며, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(무료, CC BY)에는 STEP 형식의 연습 문제가 더 있다.

풀이

STEP II 2005, 문제 6

순수수학 • 이항급수의 합

> **STEP II 2005, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/05-s2-q6

핵심 아이디어

여기 나오는 합은 모두 멱급수(power series)에 특정한 x 값을 대입한 것이므로, 각 합이 어떤 함수에서 나왔는지 알아보는 것이 관건이다. 소문항 (i)에서는 n과 n^2을 1, $n+1$, $(n+1)(n+2)$의 결합으로 다시 쓰는 것이 요령인데, 이들은 바로 앞에서 적어 둔 계수(coefficient)들이다. 소문항 (ii)에서는 $(1-x)^{-1/2}$의 계수와 $(1-x)^{-3/2}$의 계수 사이의 관계를 알아차리면 같은 아이디어가 그대로 통한다.

풀이

소문항 (i)

음의 정수 지수에 대한 이항정리(binomial theorem)에 의해 ($|x|<1$에서 성립), $n \geq 0$에 대하여 x^n의 계수는 다음과 같다.

$$(1-x)^{-1}: \quad 1, \qquad (1-x)^{-2}: \quad n+1, \qquad (1-x)^{-3}: \quad \tfrac{1}{2}(n+1)(n+2).$$

예를 들어 $(1-x)^{-3}$의 계수는 $\dfrac{(-3)(-4)\cdots(-3-n+1)}{n!}(-1)^n = \dfrac{3\cdot 4\cdots(n+2)}{n!} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$이다.

첫 번째 합. $n=(n+1)-1$이므로 $|x|<1$에 대하여

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x}.$$

(우변의 두 급수가 모두 수렴(converge)하므로 합을 이렇게 나누어도 된다.) $n=0$인 항은

0이므로 $x = \frac{1}{2}$을 대입하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,2^{-n} = 4 - 2 = 2.$$

두 번째 합. n^2을 $(n+1)(n+2)$, $n+1$, 1의 결합으로 나타내고자 한다. $(n+1)(n+2) = n^2 + 3n + 2$이므로

$$n^2 = (n+1)(n+2) - 3(n+1) + 1.$$

따라서 $|x| < 1$에 대하여

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = \frac{2}{(1-x)^3} - \frac{3}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x},$$

이다. 여기서 인수 2가 나타나는 것은 $(1-x)^{-3}$의 계수가 $(n+1)(n+2)$의 **절반**이기 때문이다. 이번에도 $n = 0$인 항은 사라지고, $x = \frac{1}{2}$에서

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\,2^{-n} = 2 \cdot 8 - 3 \cdot 4 + 2 = 6.$$

소문항 (ii)

지수가 $-\frac{1}{2}$인 이항정리에 의해 $(1-x)^{-1/2}$에서 x^n의 계수는

$$\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{2n-1}{2})}{n!}(-1)^n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n\,n!}.$$

? **생각해 보기** 홀수들의 곱을 어떻게 계승으로 바꿀 수 있을까?

빠진 짝수들을 채워 넣는다. $(2n)! = \big(1 \cdot 3 \cdots (2n-1)\big)\big(2 \cdot 4 \cdots 2n\big)$이고 $2 \cdot 4 \cdots 2n = 2^n n!$이다. 그러므로 $1 \cdot 3 \cdots (2n-1) = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$이고, 계수는

$$a_n = \frac{(2n)!}{2^n n! \cdot 2^n n!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}\,\frac{1}{2^{2n}}.$$

이 식은 $n = 0$일 때도 성립하므로(빈 곱, $a_0 = 1$), $|x| < 1$에 대하여

$$(1-x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}\,\frac{x^n}{2^{2n}},$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다.

첫 번째 합. 구하는 합은 $x = \frac{1}{3}$에서의 $\sum a_n x^n$이고, 이 값은 전개가 성립하는 구간 안에 있다. 따라서 그 값은

$$\left(1 - \tfrac{1}{3}\right)^{-1/2} = \sqrt{\tfrac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

두 번째 합. 이제 $\sum n a_n x^n$이 필요하다. 소문항 (i)과 같은 방식으로, na_n을 이미 알고 있는 급수와 연결해 보자. 위와 똑같이 하면 $(1-x)^{-3/2}$에서 x^m의 계수는

$$b_m = \frac{3 \cdot 5 \cdots (2m+1)}{2^m\, m!} = (2m+1)\, a_m.$$

a_n의 공식으로부터 이웃한 계수의 비는 $a_n / a_{n-1} = \dfrac{(2n)(2n-1)}{n^2 \cdot 4} = \dfrac{2n-1}{2n}$이므로, $n \geq 1$에 대하여

$$n\, a_n = \tfrac{1}{2}(2n-1)\, a_{n-1} = \tfrac{1}{2}\, b_{n-1}.$$

따라서 $|x| < 1$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n = \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} x^{n-1} = \frac{x}{2}(1-x)^{-3/2}.$$

(같은 결과를 얻는 다른 방법으로, $(1-x)^{-1/2}$의 급수를 항별 미분(differentiate term by term)한 뒤 x를 곱해도 된다. 수렴 구간(interval of convergence) 안에서는 항별 미분이 허용된다.) $x = \frac{1}{3}$에서:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,(2n)!}{(n!)^2\, 2^{2n}\, 3^n} = \frac{1}{6}\left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{8}.$$

검산

- $\sum n 2^{-n}$의 처음 몇 항은 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \cdots$이며, 네 항까지 더하면 벌써 1.625이고 조금씩 2에 다가간다. $\sum n^2 2^{-n}$의 200항까지의 부분합(partial sum)은 소수점 아래 여러 자리까지 6과 일치한다.
- 수치로 보면 $\sqrt{6}/2 \approx 1.224745$이고 $\sqrt{6}/8 \approx 0.306186$이다. 소문항 (ii)의 두 급수의 부분합은 두 값과 소수점 아래 12자리까지 일치한다.
- 일반항을 간단히 확인해 보자. $n = 1$이면 $a_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$인데, 이는 익숙한 전개 $(1-x)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \cdots$의 계수이다.

흔한 실수

- $(1-x)^{-3}$의 계수에서 $\frac{1}{2}$을 빠뜨리는 실수. 이렇게 하면 $\sum n^2 2^{-n}$의 값으로 $8 - 12 + 2 = -2$가 나오는데, 양수 항들의 합으로는 불가능한 값이다.
- $(1-x)^{-2}$의 급수를 계수 $n+1$이 아니라 n으로 시작하는 실수. 이 급수는 $1 + 2x + 3x^2 + \cdots$이다.
- 마지막 합에서 인수 x를 하나 잃어버리는 실수. $\sum n a_n x^{n-1}$은 도함수이지만, 구하는 합은 $\sum n a_n x^n$이다.

STEP 너머

여기서 사용한 조작(급수를 여러 조각으로 나누기, 항별 미분하기)이 정당한 것은 멱급수가 수렴 반지름(radius of convergence) 안에서 절대수렴(absolutely convergent)하고, 그 안에서 항별 미분이 가능하기 때문이다. 이를 엄밀하게 증명하는 것은 해석학(analysis) 첫 강좌의 표준적인 내용이다. 계수 $\binom{2n}{n}/4^n$은 확률에서도 등장하는데, 단순 무작위 행보(simple random walk)가 $2n$걸음 후에 출발점으로 돌아와 있을 확률이 바로 이것이다. 해석학에 관해서는 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 참고하라.

풀이

STEP II 2005, 문제 7

순수수학 • 벡터와 원운동

STEP II 2005, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/05-s2-q7

핵심 아이디어

각 위치벡터(position vector)는 cos(각) $\mathbf{a}$ + sin(각) $\mathbf{b}$ 꼴이며, $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$가 서로 수직(perpendicular)이고 길이가 같으면 이 벡터는 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$가 이루는 평면 위에서 원을 그린다. $|OP|$와 $|OQ|$가 일정하다는 것을 알고 나면 각 POQ는 스칼라곱(scalar product)에서 곧바로 얻어지고, 곱을 합으로 바꾸는 공식(product-to-sum formulae)을 쓰면 하나의 코사인으로 깔끔하게 정리된다. 그러면 마지막 소문항은 두 주기(period) 전체에 걸친 코사인 하나에 대한 부등식(inequality)이 된다.

풀이

소문항 (i)

P와 Q의 위치벡터를 각각 $\mathbf{p}$와 $\mathbf{q}$라 하자.

P에 대하여 $\mathbf{p} = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}$이므로 $|\mathbf{p}| = 1$이고 $\mathbf{p}$는 xy-평면 위에 있다. 따라서 P는 평면 $z = 0$ 위에서 중심이 O이고 반지름이 1인 원을 따라, 위에서(양의 z축 쪽에서) 내려다볼 때 시계 반대 방향으로, 일정한 각속력(angular speed) 1로(따라서 속력 1로) 움직인다. P는 $(1, 0, 0)$에서 출발하며, t가 0에서 2π까지 변하는 동안 정확히 한 바퀴를 돈다.

Q에 대해서는 $s = t + \frac{1}{4}\pi$로 놓고

$$\mathbf{a} = \tfrac{3}{2}\mathbf{i} + \tfrac{3\sqrt{3}}{2}\mathbf{k}, \qquad \mathbf{b} = 3\mathbf{j}, \qquad \text{이라 하면} \qquad \mathbf{q} = \cos s\,\mathbf{a} + \sin s\,\mathbf{b}.$$

이제 $|\mathbf{a}|^2 = \frac{9}{4} + \frac{27}{4} = 9$, $|\mathbf{b}|^2 = 9$이고 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$이다. 따라서

$$|\mathbf{q}|^2 = 9\cos^2 s + 9\sin^2 s + 2\cos s \sin s\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = 9,$$

이고, $\mathbf{q}$는 항상 O를 지나고 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{j}$로 생성되는 평면 위에 있다. 이 평면은 y축과 방향

$\mathbf{i} + \sqrt{3}\,\mathbf{k}$를 포함하므로 그 방정식은 $z = \sqrt{3}\,x$이다. 이 평면의 법선(normal) $-\sqrt{3}\,\mathbf{i} + \mathbf{k}$는 $\mathbf{k}$와 각 $\arccos\frac{1}{2} = \frac{1}{3}\pi$를 이룬다.

따라서 Q는 평면 $z = \sqrt{3}\,x$ 위에서 중심이 O이고 반지름이 3인 원을 따라 움직인다. 이 평면은 y축을 포함하며 P가 그리는 원의 평면과 60° 기울어져 있다. Q 역시 각속력이 1(속력 3)이고, $\mathbf{a}$의 방향에서 $\mathbf{j}$ 쪽으로 회전하며 한 바퀴를 돈다. 그리고 그 위상(phase)은 항상 P보다 $\frac{1}{4}\pi$만큼 앞선다. 즉 $t = 0$일 때 Q는 $\mathbf{a}$로부터 각 $\frac{1}{4}\pi$인 위치, 곧 $\frac{3}{2\sqrt{2}}(1,\,2,\,\sqrt{3})$에 있다.

소문항 (ii)

$|\mathbf{p}| = 1$이고 $|\mathbf{q}| = 3$이므로

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}}{3} = \frac{\frac{3}{2}\cos t\cos s + 3\sin t\sin s}{3} = \tfrac{1}{2}\cos t\cos s + \sin t\sin s,$$

이다. 여기서 $s = t + \frac{1}{4}\pi$이다. $t + s = 2t + \frac{1}{4}\pi$, $s - t = \frac{1}{4}\pi$로 곱을 합으로 바꾸는 공식을 쓰면

$$\cos t\cos s = \tfrac{1}{2}\big[\cos(2t + \tfrac{1}{4}\pi) + \cos\tfrac{1}{4}\pi\big],$$
$$\sin t\sin s = \tfrac{1}{2}\big[\cos\tfrac{1}{4}\pi - \cos(2t + \tfrac{1}{4}\pi)\big].$$

$C = \cos(2t + \frac{1}{4}\pi)$로 놓고 $\cos\frac{1}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2}$를 이용하면

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \tfrac{1}{4}\big(C + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\big) + \tfrac{1}{2}\big(\tfrac{\sqrt{2}}{2} - C\big)\\ &= \tfrac{\sqrt{2}}{8} + \tfrac{\sqrt{2}}{4} - \tfrac{1}{4}C = \tfrac{3\sqrt{2}}{8} - \tfrac{1}{4}\cos(2t + \tfrac{1}{4}\pi),\end{aligned}$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

소문항 (iii)

> **생각해 보기** $\theta \geq \frac{1}{4}\pi$를 $\cos\theta$에 대한 조건으로 어떻게 바꿀 수 있을까?

코사인은 $[0, \pi]$에서 순감소(strictly decreasing)하고, θ와 $\frac{1}{4}\pi$는 모두 이 구간에 속하므로

$$\theta \geq \tfrac{1}{4}\pi \iff \cos\theta \leq \cos\tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{\sqrt{2}}{2} = \tfrac{4\sqrt{2}}{8}.$$

소문항 (ii)에 의해 이는

$$\tfrac{3\sqrt{2}}{8} - \tfrac{1}{4}\cos(2t + \tfrac{1}{4}\pi) \leq \tfrac{4\sqrt{2}}{8} \iff \cos(2t + \tfrac{1}{4}\pi) \geq -\tfrac{\sqrt{2}}{2}.$$

와 같다. $u = 2t + \frac{1}{4}\pi$라 하자. t가 $[0, 2\pi]$를 움직이면 u는 길이가 4π인 구간 $[\frac{1}{4}\pi, \frac{17}{4}\pi]$를 움직인다. 이는 정확히 $\cos u$의 두 주기이다. 한 주기 안에서 $\cos u < -\frac{\sqrt{2}}{2}$가 되는 곳은 정확

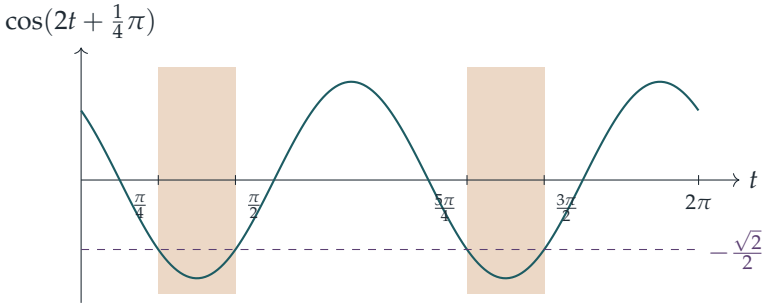
히 길이가 $\frac{1}{2}\pi$인 열린구간(2π를 법으로 하여 $\frac{3}{4}\pi$와 $\frac{5}{4}\pi$ 사이)이다. 여기서 조건을 만족하지 않는 값은

$$u \in (\tfrac{3}{4}\pi, \tfrac{5}{4}\pi) \cup (\tfrac{11}{4}\pi, \tfrac{13}{4}\pi) \iff t \in (\tfrac{1}{4}\pi, \tfrac{1}{2}\pi) \cup (\tfrac{5}{4}\pi, \tfrac{3}{2}\pi),$$

이고, 각 구간의 길이는 t로 따져 $\frac{1}{4}\pi$이다. 따라서 $\theta < \frac{1}{4}\pi$인 시간은 모두 합하여 $\frac{1}{2}\pi$이고, $\theta \geq \frac{1}{4}\pi$인 전체 시간은

$$2\pi - \tfrac{1}{2}\pi = \tfrac{3}{2}\pi,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.



음영으로 칠한 띠는 곡선이 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 아래로 내려가는 곳, 즉 $\theta < \frac{1}{4}\pi$인 곳이다.

검산

- $t = 0$일 때: $\mathbf{p} = \mathbf{i}$이고 $\mathbf{q} = \frac{3}{2\sqrt{2}}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \sqrt{3}\,\mathbf{k})$이므로 직접 계산하면 $\cos\theta = \frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{2}}{4}$이다. 공식으로는 $\frac{3\sqrt{2}}{8} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$이다. 두 값이 일치한다.
- $\cos\theta$는 $\frac{3\sqrt{2}}{8} - \frac{1}{4} \approx 0.280$과 $\frac{3\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{4} \approx 0.780$ 사이에 있으므로 θ는 결코 0이 되지 않는다. 이는 이치에 맞다. $\mathbf{p}$와 $\mathbf{q}$가 평행할 수 있는 곳은 두 평면이 만나는 y축 위뿐인데, P가 그 축 위에 있는 것은 $t = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$일 때이고 Q가 그 축 위에 있는 것은 $t = \frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi$일 때이기 때문이다.
- $[0, 2\pi]$에서 t를 이백만 개의 점으로 표본 추출하여 벡터로부터 θ를 직접 계산하면, $\theta \geq \frac{1}{4}\pi$인 전체 시간은 4.712389로 나오며 이는 $\frac{3}{2}\pi \approx 4.712389$와 일치한다.

흔한 실수

- $|\mathbf{p}||\mathbf{q}| = 3$으로 나누는 것을 잊거나, $\mathbf{i}$와 $\mathbf{j}$의 계수가 다르다는 이유로 $|\mathbf{q}|$가 변한다고 생각하는 것.
- 부등호 방향을 뒤집는 것: 코사인은 $[0, \pi]$에서 감소하므로 $\theta \geq \frac{1}{4}\pi$는 $\cos\theta \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$를 뜻한다.

- $\cos(2t + \frac{1}{4}\pi)$의 한 주기만 세는 것: $2t$ 때문에 t가 한 바퀴 도는 동안 이 함수는 두 바퀴를 돈다.

STEP 너머

원점을 중심으로 하는 원은 모두 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$이고 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$인 $\cos s\,\mathbf{a} + \sin s\,\mathbf{b}$ 꼴로 쓸 수 있다. 이 조건들을 없애면 타원(ellipse)을 얻으며, 일반적으로는 선형사상(linear map)에 의한 단위원(unit circle)의 상을 얻는다. 곡선을 이런 방식으로 이해하고, 움직이는 벡터 사이의 각을 스칼라곱으로 재는 것은 대학 1학년에서 만나는 선형대수(linear algebra)와 벡터 미적분(vector calculus)의 출발점이다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수 입문)는 이러한 아이디어를 명료하게 전개한다.

풀이

STEP II 2005, 문제 8

순수수학 • 변수분리형 미분방정식

STEP II 2005, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/05-s2-q8

핵심 아이디어

이 방정식은 변수분리형(separable)이다. y에 대한 의존성은 모두 하나의 인수 y^2에 담겨 있으므로, 이것으로 나누면 $\frac{1}{y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$를 얻는데, 이는 $-1/y$의 도함수(derivative)이다. x에 대한 적분은 치환(substitution) $u = 1 + x^2$로 풀린다. 홀수 거듭제곱 x^3이 u에 필요한 $x\,\mathrm{d}x$를 제공하기 때문이다. 두 번째 곡선에서는 우변이 y^2가 아니라 z^3이라는 점에 주목한다. 이때 살펴볼 양은 $1/z^2$이며, 이것은 $1/y$와 정확히 같은 방정식을 만족함을 알게 된다.

풀이

y 구하기

C 위에서 $y(0) = 1 > 0$이고, 방정식의 우변은 $x \geq 0$에서 결코 음이 아니므로 y는 감소하지 않는다. 따라서 어디서나 $y \geq 1$이고, y^2으로 나눌 수 있다.

$$\frac{1}{y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x^3}{(1+x^2)^{5/2}} \quad \Longrightarrow \quad -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{x^3}{(1+x^2)^{5/2}}.$$

적분을 위해 $u = 1 + x^2$로 놓으면 $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$이고 $x^3\,\mathrm{d}x = x^2 \cdot x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(u-1)\,\mathrm{d}u$이다.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{(1+x^2)^{5/2}}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \left(u^{-3/2} - u^{-5/2}\right)\mathrm{d}u = -u^{-1/2} + \tfrac{1}{3}u^{-3/2} + \text{상수} \\ &= -\frac{3u-1}{3u^{3/2}} + \text{상수} = -\frac{2+3x^2}{3(1+x^2)^{3/2}} + \text{상수}.\end{aligned}$$

그러므로 어떤 상수 k에 대하여

$$\frac{1}{y} = \frac{2+3x^2}{3(1+x^2)^{3/2}} + k$$

이다. $x=0$에서 이 식은 $1=\frac{2}{3}+k$가 되므로 $k=\frac{1}{3}$이고, 이것이 구하는 결과이다.

$$\frac{1}{y}=\frac{2+3x^2}{3(1+x^2)^{3/2}}+\frac{1}{3}.$$

큰 x

지배적인 거듭제곱, 즉 분자에서 $3x^2$을, $(1+x^2)^{3/2}$에서 x^3을 묶어 낸다.

$$\frac{2+3x^2}{3(1+x^2)^{3/2}}=\frac{3x^2\left(1+\frac{2}{3x^2}\right)}{3x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{3/2}}=\frac{1}{x}\left(1+\frac{2}{3x^2}\right)\left(1-\frac{3}{2x^2}+\cdots\right)=\frac{1}{x}+O\left(\frac{1}{x^3}\right),$$

여기서 이항전개(binomial expansion)를 사용했는데, 큰 x에 대해 $1/x^2<1$이므로 이는 타당하다. 따라서

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{3}+\frac{1}{x}+O\left(\frac{1}{x^3}\right)=\frac{1}{3}\left(1+\frac{3}{x}+O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right),$$

이고, $(1+t)^{-1}=1-t+O(t^2)$를 이용해 역수를 취하면

$$y=3\left(1-\frac{3}{x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\approx 3-\frac{9}{x},$$

이므로 요구한 결과를 얻는다.

? **생각해 보기** 왜 $\frac{2}{3x^2}$과 $-\frac{3}{2x^2}$ 항은 버려도 되지만 $\frac{1}{x}$는 버리면 안 되는가?

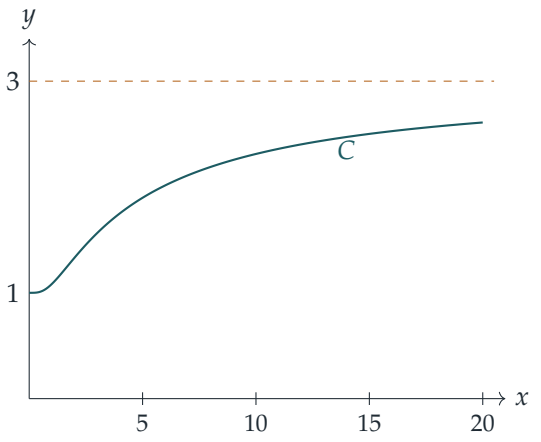
목표인 $3-\frac{9}{x}$는 $\frac{1}{x}$ 차수까지 정확하다. $1/y$에서 보정 항들은 $\frac{1}{x}$보다 인수 $\frac{1}{x^2}$만큼 더 작으므로, y에는 $\frac{1}{x^2}$ 차수 이상에서만 영향을 준다. $-\frac{9}{x}$를 만들어 내는 것은 바로 $\frac{1}{x}$ 항 자체이다.

C의 개형

이제 곡선의 특징을 정리한다.

- $y(0)=1$이고, $x=0$에서 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=0$이다. 원점 근처에서 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x\approx x^3$이므로 $y\approx 1+\frac{1}{4}x^4$이다. 즉 곡선은 매우 평평하게 출발한다.
- $x>0$에서 기울기는 양수이므로 y는 증가한다.
- $1/y$의 첫째 항은 양수이므로 $1/y>\frac{1}{3}$이고, 따라서 모든 x에 대해 $1\le y<3$이다. 곡선은 결코 발산하지 않는다.
- $x\to\infty$일 때, $y\to 3$이며 아래쪽에서 $3-\frac{9}{x}$처럼 다가간다. 이 접근은 느리다. $y(10)\approx 2.31$이다.

곡선은 아래로 볼록(concave up)하게 출발한 뒤 $y=3$을 향해 평평해지므로, 변곡점(point of inflection)을 가져야 한다.



z에 대한 곡선

$z \neq 0$인 곳에서는 z^3으로 나눌 수 있다. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(z^{-2}) = -2z^{-3}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$이므로

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{z^2}\right) = -\frac{2}{z^3}\cdot\frac{x^3z^3}{2(1+x^2)^{5/2}} = -\frac{x^3}{(1+x^2)^{5/2}},$$

이고, 이것은 $1/y$가 만족하는 방정식과 정확히 같다. 두 곡선 모두에서 $x = 0$일 때 $1/z^2 = 1$로, $1/y$와 같은 값이다. 따라서

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{y}, \qquad \text{즉} \qquad z^2 = y.$$

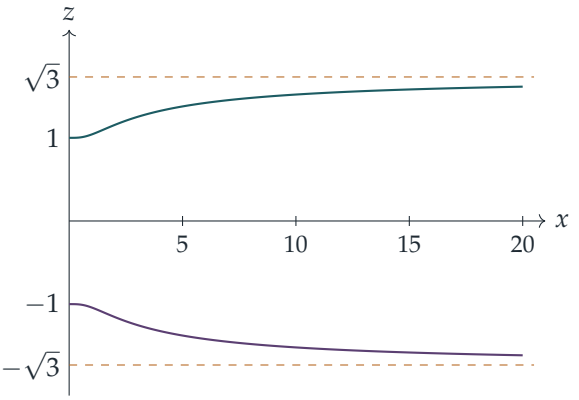
이로써 z가 결코 0에 이르지 않음도 확인되며, 나눗셈이 정당화된다. $z \neq 0$인 동안 $z^2 = y \geq 1$이므로 z는 0에 가까워질 수 없다. 그러므로 연속성(continuity)에 의해 z는 처음의 부호를 유지하며, 두 곡선은

$$z = \sqrt{y} \quad (z(0) = 1), \qquad z = -\sqrt{y} \quad (z(0) = -1).$$

이다. 위쪽 곡선은 1에서 $\sqrt{3}$을 향해 올라가며, 역시 평평하게 출발한다 (이번에는 $z \approx 1 + \frac{1}{8}x^4$). 큰 x에 대해서는

$$z = \sqrt{3}\left(1 - \frac{3}{x} + \cdots\right)^{1/2} \approx \sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2x}.$$

아래쪽 곡선은 이를 x축에 대해 대칭이동한 것으로, -1에서 점근선(asymptote) $z = -\sqrt{3}$을 향해 내려간다.



생각해 보기 $z(0) = -1$인 곡선은 왜 다른 곡선을 평행이동하거나 다르게 변환한 것에 불과하지 않은가?

이 방정식은 z에 대해 홀함수(odd) 꼴이다. z를 $-z$로 바꾸면 양변이 모두 -1배가 된다. 따라서 $z(x)$가 해이면 $-z(x)$도 해이고, -1에서 출발하는 해는 $+1$에서 출발하는 해를 대칭이동한 것이다. 이는 $z = \pm\sqrt{y}$와 일치한다.

검산

- 답을 미분해 본다. $1/y = u^{-1/2} - \frac{1}{3}u^{-3/2} + \frac{1}{3}$에서 $\mathrm{d}(1/y)/\mathrm{d}x = 2x\left(-\frac{1}{2}u^{-3/2} + \frac{1}{2}u^{-5/2}\right) = -x^3u^{-5/2}$을 얻으며, 이는 필요한 결과이다.
- 원래 방정식을 수치적으로(룽게–쿠타(Runge–Kutta) 방법) 풀면 $y(1) = 1.08391$, $y(5) = 1.89777$을 얻으며, 공식과 유효숫자(significant figures) 10자리 이상까지 일치한다. z에 대한 방정식을 수치적으로 풀면 $z(5) = \pm 1.37759 = \pm\sqrt{y(5)}$를 얻는다.
- $x = 100$에서 공식은 $y = 2.9126$을 주고, $3 - \frac{9}{x} = 2.91$이다. 차이는 약 $27/x^2$로, $O(1/x^2)$ 오차와 부합한다.

흔한 실수

- 음의 부호를 빠뜨리는 것: $\int y^{-2}\,\mathrm{d}y = -y^{-1}$.
- $3 - \frac{9}{x}$가 3에 "가까워 보인다"는 이유로 $y \to 3$이 빠르게 일어난다고 결론짓는 것. $x = 10$에서 곡선은 아직 약 2.3에 불과하다.
- 두 곡선 모두에 대해 $z = \sqrt{y}$라고 쓰거나, z가 부호를 바꿀 수 없는 이유를 설명하지 않는 것.

STEP 너머

두 방정식은 모두 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = f(x)\,y^n$ 꼴로, **베르누이 방정식**(Bernoulli equation)의 특수한 경우이다. 베르누이 방정식은 치환 $w = y^{1-n}$에 의해 항상 선형 방정식(linear equation)으로 바뀐다. 우리가 사용한 것이 바로 이 치환이다. $w = 1/y$와 $w = 1/z^2$. "같은 방정식, 같은 초깃값이면 같은 함수"라는 단계는 1계(first-order) 방정식에 대한 존재성과 유일성 정리(existence and uniqueness theorem, 피카르–린델뢰프(Picard–Lindelöf) 정리)의 한 예이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)가 두 가지를 모두 다룬다.

풀이

STEP II 2005, 문제 9

역학 • 경사면에서의 마찰

> **STEP II 2005, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/05-s2-q9

핵심 아이디어

두 입자(particle)를 따로 다룬다. A에는 가해지는 힘이 없으므로, 그 식이 줄이 제공해야 할 장력(tension)을 결정한다. 선택의 자유는 모두 B에 작용하는 P의 **방향**에 있다. P를 기울이면 B에 작용하는 수직항력(normal reaction)이 바뀌고, 따라서 B에 작용하는 마찰력(friction)도 바뀐다. P를 경사면에서 벗어나게 기울이면 경사면 방향 성분의 일부를 잃지만 마찰력이 달라지며, 최적의 기울기는 이 두 효과가 균형을 이루는 곳이다. 결국 최대화해야 할 식 $a\cos\theta + b\sin\theta$ 꼴이 나온다.

풀이

A와 B를 입자로, 줄은 가볍고 늘어나지 않으며(light and inextensible) ℓ을 따라 놓여 있는 것으로 모형화한다. P는 ℓ을 포함하는 연직 평면 안에서 작용한다고 하자. 경사면을 가로지르는 P의 성분은 아무 도움이 되지 않는다. 다음에 주목하자.

$$\sin 30^\circ = \tfrac{1}{2}, \qquad \cos 30^\circ = \tfrac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \tan 30^\circ = \tfrac{1}{\sqrt{3}} = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}.$$

따라서 $\mu_B = \tan 30^\circ$이다. 즉, 혼자 있다면 B는 정확히 미끄러지기 직전 상태에 있다. 또한 $\mu_A = \tfrac{1}{2}\tan 30^\circ$이므로, 혼자 있다면 A는 미끄러진다.

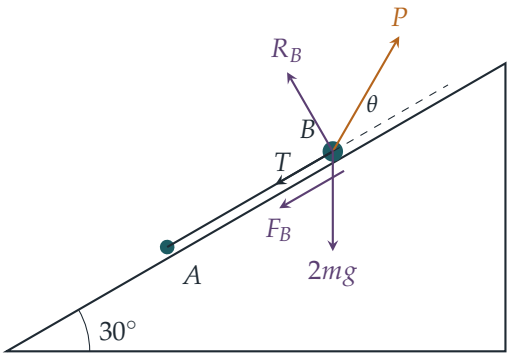
입자 A. 면에 수직인 방향으로 성분을 분해(resolving)하면 $R_A = mg\cos 30^\circ = \tfrac{\sqrt{3}}{2}mg$이므로, A에 작용하는 마찰력의 최댓값은 다음과 같다.

$$\mu_A R_A = \tfrac{\sqrt{3}}{6} \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2} mg = \tfrac{1}{4}mg.$$

경사면 아래 방향의 무게 성분은 $mg\sin 30^\circ = \tfrac{1}{2}mg$이다.

입자 B. P가 ℓ의 위쪽 방향과 이루는 각을 θ라 하고, 면에서 멀어지는 쪽으로 잰다. (θ가 음

수이면 P가 면 쪽으로 민다는 뜻이다.) 장력을 T라 하자.



그림에는 (i)에서처럼 경사면 아래 방향으로 작용하는 마찰력 F_B를 나타냈다. 면에 수직인 방향으로는

$$R_B + P\sin\theta = 2mg\cos 30^\circ \quad\Longrightarrow\quad R_B = \sqrt{3}\,mg - P\sin\theta.$$

따라서 B에서 낼 수 있는 마찰력의 최댓값은

$$\mu_B R_B = \tfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\,mg - P\sin\theta\right) = mg - \tfrac{1}{\sqrt{3}}P\sin\theta.$$

경사면 아래 방향의 B의 무게 성분은 $2mg\sin 30^\circ = mg$이다.

소문항 (i)

입자들이 ℓ을 따라 위로 움직이려면, 각 입자에 작용하는 마찰력은 경사면 아래 방향이다. P가 최소일 때 두 입자 모두 움직이기 직전이므로, 두 입자 모두에서 마찰력은 최대 정지마찰력(limiting friction)이다.

A가 위로 움직이려면, 줄이 무게 성분과 마찰력을 이겨야 한다.

$$T = \tfrac{1}{2}mg + \tfrac{1}{4}mg = \tfrac{3}{4}mg.$$

B에 대해서는 경사면 방향으로, P의 성분이 T, 무게 성분, 최대 정지마찰력을 이겨야 한다.

$$P\cos\theta = \tfrac{3}{4}mg + mg + \left(mg - \tfrac{1}{\sqrt{3}}P\sin\theta\right),$$

$$P\left(\cos\theta + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta\right) = \tfrac{11}{4}mg.$$

생각해 보기 P를 경사면에서 멀어지는 쪽으로 기울이면 경사면 방향의 P 성분이 줄어드는데, 왜 도움이 될까?

B를 살짝 들어 올리면 R_B가 줄고, 따라서 P가 이겨야 할 마찰력도 줄어든다. 작은 기울기 θ에 대해 $\cos\theta$는 $1-\frac{1}{2}\theta^2$ 정도로만 줄어드는 반면 $\sin\theta$는 θ 정도로 커진다. 그래서 처음에는 마찰력 감소로 얻는 이득이 더 크다. 최적의 각을 찾기 위해 다음과 같이 쓴다.

$$\cos\theta+\tfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta=\tfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\tfrac{1}{2}\sin\theta\right)=\tfrac{2}{\sqrt{3}}\cos(\theta-30^\circ).$$

이 값은 최대 $\frac{2}{\sqrt{3}}$이고, 등호는 정확히 $\theta=30^\circ$일 때 성립한다. P에 이 인수를 곱한 값이 $\frac{11}{4}mg$와 같아야 하므로, 인수가 최대일 때 P가 최소이다.

$$P_{\min}=\tfrac{11}{4}mg\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2}=\tfrac{11}{8}\sqrt{3}\,mg,$$

이로써 요구된 결과를 얻는다. B가 면 위에 머무르는지 확인해야 한다.

$$R_B=\sqrt{3}\,mg-\tfrac{11}{8}\sqrt{3}\,mg\cdot\tfrac{1}{2}=\tfrac{5}{16}\sqrt{3}\,mg>0.$$

따라서 P는 ℓ을 지나는 연직 평면 안에서, 면에서 멀어지는 쪽으로 ℓ과 30°를 이루며 작용한다. 즉, 경사면 위쪽으로 당기며 **수평선 위로** 60°의 방향으로 작용한다. (경사면과 이루는 최적의 각이 $\arctan\mu_B$, 즉 B의 마찰각(angle of friction)임에 주목하자.)

소문항 (ii)

이제 P는 계가 아래로 미끄러지는 것만 막으면 되므로, 각 입자에 작용하는 마찰력은 경사면 위쪽 방향이다. P가 없으면 A는 혼자 정지해 있을 수 없는데, 무게 성분 $\frac{1}{2}mg$가 마찰력의 최댓값 $\frac{1}{4}mg$보다 크기 때문이다. 따라서 줄이 A를 붙잡아 주어야 한다.

$$T\geq\tfrac{1}{2}mg-\tfrac{1}{4}mg=\tfrac{1}{4}mg.$$

특히 줄은 팽팽해야 한다. B가 아래로 미끄러지지 않으려면, 경사면 위쪽 방향의 힘들이 T와 무게 성분을 감당할 수 있어야 한다.

$$P\cos\theta+\left(mg-\tfrac{1}{\sqrt{3}}P\sin\theta\right)\geq T+mg.$$

좌변은 T에 의존하지 않으므로, 가장 작은 P는 가장 작은 장력 $T=\frac{1}{4}mg$일 때 얻어진다. 그러면

$$P\left(\cos\theta-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta\right)\geq\tfrac{1}{4}mg.$$

이제 $\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{3}}\cos(\theta+30^\circ)\leq\frac{2}{\sqrt{3}}$이고, 등호는 $\theta=-30^\circ$일 때 성립한다. 이번에는 최적의 방향이 B를 면 **쪽으로** 밀어서 R_B를 늘리고, 따라서 B를 붙잡는 데 도움이 되는 마찰력을 늘린다. 그러므로 최소 크기는

$$P_{\min}=\tfrac{1}{4}mg\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2}=\tfrac{1}{8}\sqrt{3}\,mg.$$

이 힘은 ℓ의 위쪽 방향에서 아래로 30° 기운 방향으로 작용한다. ℓ이 30°로 올라가므로 그 방향은 수평이다. 즉, B를 경사면 쪽으로 수평하게 미는 힘이다. 이 값에서 A와 B는 모두 한계 평형(limiting equilibrium) 상태에 있으며, $T=\frac{1}{4}mg$이다.

검산

- $m = g = 1$로 두고 수치적으로 확인했다. 연직 평면 안에서 P의 모든 방향을 훑으며, 각 방향마다 이분법(bisection)으로 가장 작은 P를 구했다. (i)에서 최솟값은 경사면과 30.0°를 이룰 때의 $2.3816 \approx \frac{11}{8}\sqrt{3}$이다. (ii)에서는 −30.0°, 즉 수평 방향일 때의 $0.2165 \approx \frac{1}{8}\sqrt{3}$이다. 또한 (ii)의 최솟값에서 완전한 평형이 존재함도 확인했다.
- P가 경사면 방향일 때($\theta = 0$) (i)의 전체 힘 계산: $P = \frac{1}{2}mg + \frac{1}{4}mg + mg + mg = \frac{11}{4}mg \approx 2.75mg$가 필요하다. 이는 예상대로 $2.38mg$보다 크다.
- P가 경사면 방향일 때 (ii)에서 계에 필요한 힘은 $\frac{3}{2}mg - \frac{1}{4}mg - mg = \frac{1}{4}mg$이다. 수평으로 미는 힘은 $\frac{\sqrt{3}}{8}mg \approx 0.217mg$로 이보다 낫다.

흔한 실수

- P가 경사면 방향으로 작용한다고 가정하는 것. 문제는 가장 작은 **크기**를 묻고 있으므로, 방향은 자유롭게 고를 수 있다.
- $P\sin\theta$가 R_B를 바꾸고, 따라서 B에 작용하는 최대 정지마찰력도 바꾼다는 사실을 잊는 것.
- (ii)에서 (i)의 마찰력 방향을 그대로 쓰는 것. 아래로 미끄러질 위험이 있을 때 마찰력은 경사면 위쪽으로 작용한다.

STEP 너머

두 소문항은 같은 원리에 기대고 있다. 마찰력에 맞서는 가장 효율적인 힘은 운동 방향의 직선과 마찰각 $\lambda = \arctan\mu$를 이룬다. (i)에서는 면에서 멀어지는 쪽으로, (ii)에서는 면 쪽으로 기울어진다. 이는 수직항력과 최대 정지마찰력이 합쳐져 법선과 각 λ를 이루는 하나의 "전체 반력"(total reaction)이 되기 때문이다. 이 전체 반력의 관점에서 생각하면 많은 마찰 문제가 힘의 삼각형(triangle of forces)에 관한 기하 문제로 바뀐다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 대학 1학년 수준에서 마찰과 구속 운동을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP II 2005, 문제 10

역학 • 충돌하는 포물체

> **STEP II 2005, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/05-s2-q10

핵심 아이디어

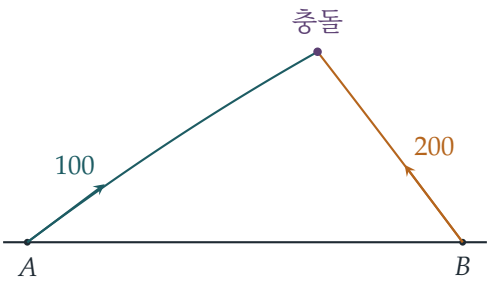
두 미사일은 모두 포물체(projectile)이므로 각 미사일이 임의의 시각에 어디에 있는지 식으로 쓸 수 있다. 충돌한다는 것은 두 위치가 **같은** 순간에 일치한다는 뜻이며, 이로부터 충돌 시각과 T라는 두 미지수에 대한 두 방정식(수평 방향과 연직 방향)을 얻는다. 수평 방향의 방정식은 일차식이므로 이를 이용해 충돌 시각을 소거할 수 있고, 그러면 연직 방향의 방정식은 T에 대한 이차방정식(quadratic)이 된다. 그다음에는 어느 근이 물리적으로 타당한지 판단해야 한다.

풀이

식 세우기

두 미사일을 공기 저항(air resistance) 없이 중력만 받으며 자유롭게 움직이는 입자로 모형화한다. A를 원점으로, AB 방향을 x축으로(따라서 B는 $x = 180$에 있다), 연직 위쪽을 y축으로 잡는다. 시간 t는 첫 번째 미사일을 발사한 순간부터 초 단위로 잰다.

첫 번째 미사일의 경우 $\sin\alpha = \frac{3}{5}$에서 $\cos\alpha = \frac{4}{5}$이므로 초기 속도의 성분은 $100 \cdot \frac{4}{5} = 80$과 $100 \cdot \frac{3}{5} = 60$이다. 두 번째 미사일의 경우 $\sin\beta = \frac{4}{5}$에서 $\cos\beta = \frac{3}{5}$이다. 이 미사일은 A 쪽으로 날아가므로 성분은 $-200 \cdot \frac{3}{5} = -120$과 $200 \cdot \frac{4}{5} = 160$이다.



$s = t - T$를 두 번째 미사일을 발사한 뒤 흐른 시간이라 하자. 그러면 두 미사일이 모두 날고 있는 동안

$$\begin{aligned} &\text{첫 번째 미사일:} \quad x = 80t, && y = 60t - 5t^2, \\ &\text{두 번째 미사일:} \quad x = 180 - 120s, && y = 160s - 5s^2. \end{aligned}$$

충돌

충돌하는 순간 x좌표가 일치하므로

$$80t = 180 - 120(t - T) \quad \Longrightarrow \quad 200t = 180 + 120T \quad \Longrightarrow \quad t = 0.9 + 0.6T,$$

이고, 따라서 $s = t - T = 0.9 - 0.4T$이다.

y좌표도 일치한다. 즉 $60t - 5t^2 = 160s - 5s^2$이므로

$$60t - 160s = 5(t^2 - s^2) = 5(t - s)(t + s) = 5T(t + s),$$

이다. 여기서 $t - s = T$를 이용하였다. t와 s에 대한 식을 대입하면

$$\begin{aligned} 60t - 160s &= 60(0.9 + 0.6T) - 160(0.9 - 0.4T) = 100T - 90, \\ 5T(t + s) &= 5T(1.8 + 0.2T) = 9T + T^2. \end{aligned}$$

이 둘을 같다고 놓으면

$$T^2 - 91T + 90 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (T - 1)(T - 90) = 0,$$

이므로 $T = 1$ 또는 $T = 90$이다.

생각해 보기 두 근 모두 방정식을 만족한다. 왜 $T = 90$은 답이 될 수 없을까?

$T = 90$이면 $s = 0.9 - 36 = -35.1$이 되는데, 이는 "충돌"이 두 번째 미사일을 발사하기 35.1초 전에 일어난다는 뜻이다. (게다가 그 위치는 지면보다 한참 아래이다. 방정식은 실제 비행 구간을 넘어 연장된 포물선을 나타내기 때문이다.) 따라서 이 근은 물리적으로 의미가

없다. 어차피 첫 번째 미사일은 $2 \cdot 60/10 = 12$초 동안만 공중에 있으므로 그보다 훨씬 전에 땅에 떨어졌을 것이다.

$T = 1$이면 $t = 1.5$, $s = 0.5 > 0$이므로 두 미사일이 모두 날고 있다. 높이는 $60(1.5) - 5(1.5)^2 = 78.75$와 $160(0.5) - 5(0.5)^2 = 78.75$로 둘 다 양수이고, 두 미사일 모두 $x = 120$에 있다. 따라서

$$T = 1 \text{ 초}.$$

검산

$T = 1$을 다시 대입하면 $t = 1.5\,\mathrm{s}$에서 두 미사일은 모두 $(120, 78.75)$ 미터 위치에 있으며, 이는 정확한 분수 계산으로 확인하였다. 발사 간격을 $1\,\mathrm{s}$로 두고 두 운동을 수치적으로 한 단계씩 계산해 보면, 두 미사일 사이의 거리가 $t = 1.5\,\mathrm{s}$에서 사실상 0으로 줄어든다. 타당성 점검으로, 충돌 위치 $x = 120$은 A와 B 사이에 있고, 그 지점에서 첫 번째 미사일의 연직 속도는 $60 - 15 = 45\,\mathrm{m\,s^{-1}}$이므로 첫 번째 미사일은 아직 올라가는 중이다.

흔한 실수

- 두 미사일에 같은 시간 변수를 쓰는 것. 두 번째 미사일이 날아간 시간은 t가 아니라 $t - T$이다.
- 두 번째 미사일이 x축의 음의 방향으로 움직인다는 것을 잊는 것.
- $t - T > 0$인지 확인하지 않고 $T = 90$을 답으로 남겨 두는 것.

STEP 너머

이 문제를 더 깔끔하게 보는 방법이 있다. 두 미사일의 가속도는 똑같이 g이므로, 둘 다 날고 있는 동안 **상대** 속도(relative velocity)는 일정하고, 각 미사일에서 보면 상대 미사일은 직선으로 움직인다. 충돌은 정확히 그 상대 속도가 시각 T에 두 미사일을 잇는 직선 방향을 향할 때 일어나며, 이것을 식으로 쓰면 같은 이차방정식을 얻는다. 이처럼 자유 낙하 좌표계(freely falling frame)로 바꾸어 보는 것은 아인슈타인(Einstein)의 등가 원리(equivalence principle)로 나아가는 첫걸음이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 상대 운동과 비관성 좌표계(non-inertial frame)를 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP II 2005, 문제 11

역학 • 경사면 위의 마찰

STEP II 2005, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

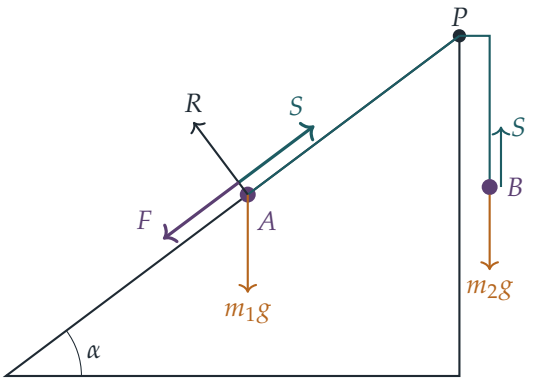
step.maths.org/questions/05-s2-q11

핵심 아이디어

$\tan\alpha = \frac{3}{4}$이므로 3–4–5 삼각형이 만들어지고, 따라서 $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$이다. 그러면 A에 작용하는 모든 힘이 $m_1 g$의 깔끔한 배수가 된다. 이제 A의 운동은 가속도가 일정한 세 단계로 나뉜다. 줄에 끌려 올라가는 단계, 줄 없이 미끄러져 올라가는 단계, 그리고 다시 미끄러져 내려오는 단계이다. 마지막 두 단계 사이에서 마찰력의 방향이 바뀌는데, 바로 여기에 이 문제의 미묘한 점이 숨어 있다.

풀이

A와 B를 입자(particle)로, 줄을 가볍고 늘어나지 않는(inextensible) 것으로, 도르래(pulley)를 매끄러운 것으로 모형화한다. 그러면 장력(tension) S는 양쪽에서 같다. $\alpha = \arctan\frac{3}{4}$라 하면 $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$이다.



줄이 팽팽할 때의 가속도

경사면에 수직인 방향으로는 A의 가속도가 없으므로

$R = m_1 g\cos\alpha = \frac{4}{5}m_1 g,$ 이고 최대 정지마찰력(limiting friction)은 $\mu R = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}m_1 g = \frac{2}{5}m_1 g.$

먼저 계가 실제로 움직이는지 확인한다. B가 내려간다면 A는 경사면을 따라 올라가게 되고, 이를 방해하는 힘은 무게의 경사면 방향 성분 $\frac{3}{5}m_1 g$와 크기가 최대 $\frac{2}{5}m_1 g$인 마찰력(friction)이다. 합하면 최대 $m_1 g$이다. 반대 방향으로 끄는 힘은 B의 무게 $m_2 g$이고 $m_2 > m_1$이므로, 마찰력은 계를 붙잡아 둘 수 없다. 따라서 B는 내려가고 A는 경사면을 따라 올라가며, A에 작용하는 마찰력은 최대 정지마찰력에 도달한 상태로 경사면 아래쪽을 향한다.

공통의 가속도(acceleration)를 a라 하자. A(경사면 위쪽 방향)와 B(아래쪽 방향)에 뉴턴의 제2법칙(Newton's second law)을 적용하면

$$\begin{aligned} m_1 a &= S - \tfrac{3}{5}m_1 g - \tfrac{2}{5}m_1 g = S - m_1 g, \\ m_2 a &= m_2 g - S. \end{aligned}$$

두 식을 더하면 $(m_1 + m_2)a = (m_2 - m_1)g$이므로

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\, g,$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. 앞으로는 $a = kg$로 쓰는 것이 편리하다. 여기서 $k = \dfrac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}$이고 $0 < k < 1$이다.

최고 높이에 도달하는 시각

시각 T에 A는 속력 $u = aT = kgT$로 경사면을 따라 올라가고 있으며, 그때까지 $\frac{1}{2}kgT^2$만큼 이동했다.

줄이 끊어지면 S는 사라진다. A는 여전히 경사면을 따라 올라가고 있으므로 마찰력은 여전히 경사면 아래쪽으로 작용하고, 경사면 아래쪽 방향의 힘의 합은 $\frac{3}{5}m_1 g + \frac{2}{5}m_1 g = m_1 g$이다. 따라서 A는 정확히 g의 크기로 감속(decelerate)하며, 추가로

$$\frac{u}{g} = kT.$$

의 시간이 지난 뒤 멈춘다. 그러므로 A는 놓은 지

$$T + kT = (1 + k)T = \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\, T$$

후에 최고 높이에 도달한다. (A는 도르래에 결코 닿지 않는다고 주어졌으므로, 이 단계가 중간에 끊기지 않는다.) 이 단계 동안 A는 $\dfrac{u^2}{2g} = \frac{1}{2}k^2 gT^2$만큼 더 이동하므로, 놓은 지점에서

부터 경사면을 따라 올라간 총거리는

$$d = \tfrac{1}{2}kgT^2 + \tfrac{1}{2}k^2gT^2 = \tfrac{1}{2}k(1+k)gT^2.$$

? 생각해 보기 A가 멈춘 뒤에 그 자리에 머무르는가?

마찰력이 A를 붙잡아 둘 수 있을 때에만 머무른다. 무게의 경사면 아래쪽 방향 성분은 $\frac{3}{5}m_1g$인 반면, 마찰력은 최대 $\frac{2}{5}m_1g$까지만 낼 수 있다. 같은 말로, $\tan\alpha = \frac{3}{4} > \frac{1}{2} = \mu$이다. 따라서 A는 다시 미끄러져 내려오고, 이제 마찰력은 경사면 **위쪽**으로 작용한다. 경사면 아래쪽 방향의 알짜힘은 $\frac{3}{5}m_1g - \frac{2}{5}m_1g = \frac{1}{5}m_1g$이므로, A는 경사면을 따라 $\frac{1}{5}g$의 가속도로 내려온다. 이는 올라갈 때의 감속보다 훨씬 완만하다.

질량의 비

최고점에서 정지 상태로 출발한 A가 거리 d를 미끄러져 놓은 지점까지 돌아오는 데 걸리는 시간을 t_d라 하면

$$\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{5}g\,t_d^2 = d = \tfrac{1}{2}k(1+k)gT^2, \qquad \text{따라서} \qquad t_d^2 = 5k(1+k)T^2.$$

t_d가 최고 높이에 도달하는 시각 $(1+k)T$와 같다고 주어졌다. 양변을 제곱하면 이는

$$(1+k)^2T^2 = 5k(1+k)T^2.$$

을 뜻한다. 양수인 $(1+k)T^2$로 나누면 $1+k = 5k$이므로 $k = \frac{1}{4}$이다. T가 약분되었다는 점에 주목하자. 이 때문에 줄이 언제 끊어지든 등식이 성립하며, k가 유일하게 결정된다. 그러면

$$\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} = \frac{1}{4} \iff 4m_2 - 4m_1 = m_2 + m_1 \iff 3m_2 = 5m_1,$$

이므로

$$m_1 : m_2 = 3 : 5.$$

검산

- 극한의 경우(limiting cases): $m_2 \to m_1$이면 $k \to 0$이고 최고 높이에 도달하는 시각은 T에 가까워진다(잃을 속력이 거의 없다). $m_2 \gg m_1$이면 $k \to 1$이고 A는 끌려간 시간만큼 더 관성으로 올라간다. 속력 gT에 도달한 뒤 g로 감속하므로 예상대로이다.
- $m_1 = 3$, $m_2 = 5$, $T = 1\,\mathrm{s}$이면 $k = \frac{1}{4}$이다. 최고 높이는 1.25 s에 도달하고, $d = \frac{5}{32}g$이며, 내려오는 데 $\sqrt{2d/(g/5)} = \sqrt{25/16} = 1.25\,\mathrm{s}$가 걸린다. 세 단계 전체를 단계별로 수치 시뮬레이션해 보았더니, 여러 T 값에 대해 두 시간 모두 1.250 s로 나왔다.

흔한 실수

- A가 다시 미끄러져 내려오기 시작할 때 마찰력의 방향이 바뀐다는 것을 잊고, 내려오는 가속도로 $\frac{1}{5}g$ 대신 g(또는 $\frac{3}{5}g$)를 쓰는 실수.
- 내려오는 거리를 놓은 지점이 아니라 줄이 끊어진 지점부터만 재는 실수.
- A가 실제로 다시 미끄러져 내려오는지 확인하지 않는 실수. 이를 위해서는 $\tan\alpha > \mu$이어야 한다.

STEP 너머

마찰력은 운동 상태에 따라 달라지는 힘의 대표적인 예이다. 속도에 따라 방향이 바뀌고, 물체가 정지해 있는 동안에는 크기에 상한이 있다. 이 때문에 운동은 구간별로 나뉘며 각 단계마다 운동 방정식이 달라진다. 같은 아이디어가 삐걱거리는 경첩이나 지진 단층 같은 스틱-슬립(stick–slip) 현상을 지배한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 대학 1학년 물리학이 요구하는 엄밀함으로 마찰력과 구속된 운동을 다룬다.

풀이

STEP II 2005, 문제 12

확률과 통계 • 베이즈 정리

STEP II 2005, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/05-s2-q12

핵심 아이디어

이 문제는 공정한 동전을 사전확률(prior)로 하는 베이즈 정리(Bayes' theorem)이다. 동전이 공정하므로, 답변이 주어졌을 때 앞면일 확률이 $\frac{1}{2}$이 되는 것은 동전이 앞면이든 뒷면이든 그 답변이 나올 가능성이 **똑같을** 때이고, 오직 그때뿐이다. 따라서 각 소문항에서는 두 가능도(likelihood) $\mathrm{P}(\text{답변} \mid H)$와 $\mathrm{P}(\text{답변} \mid T)$를 비교하기만 하면 되고, 이것을 구할 때는 쌍둥이 중 누가 접속해 있는지에 대해 조건부(conditioning)로 계산한다.

풀이

동전이 앞면, 뒷면이 나오는 사건을 각각 H, T라 하면 $\mathrm{P}(H) = \mathrm{P}(T) = \frac{1}{2}$이다. 안나(Anna)가 접속해 있는 사건을 A, 벨라(Bella)가 접속해 있는 사건을 B라 하고, $\mathrm{P}(A) = p$, $\mathrm{P}(B) = q = 1 - p$라 하자. 누가 접속해 있는지는 동전과 아무 관계가 없으므로 A와 B는 H와 독립(independent)이다. 소문항 (ii)와 (iii)에서는 동전을 한 번만 던지고, 두 이메일 모두 같은 쌍둥이, 즉 우리가 이메일을 쓸 때 접속해 있는 쪽이 답한다고 본다. (다른 해석에 대해서는 끝의 참고를 보라.)

$t = ap + bq$라 두자. 이것은 답변 하나가 참일 전체 확률이다.

임의의 답변 기록 E에 대해, $\mathrm{P}(H) = \mathrm{P}(T)$와 베이즈 정리로부터

$$\mathrm{P}(H \mid E) = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{P}(E \mid H)}{\frac{1}{2}\mathrm{P}(E \mid H) + \frac{1}{2}\mathrm{P}(E \mid T)} = \frac{\mathrm{P}(E \mid H)}{\mathrm{P}(E \mid H) + \mathrm{P}(E \mid T)}.$$

이다. 이 값이 $\frac{1}{2}$일 필요충분조건은 $\mathrm{P}(E \mid H) = \mathrm{P}(E \mid T)$이다. 이 관찰 하나가 거의 모든 일을 해 준다.

소문항 (i)

답변이 "예"인 사건을 Y라 하자. 동전이 앞면이면 "예"는 참이다. 누가 접속해 있는지에 대해 조건부로 계산하면

$$\mathrm{P}(Y \mid H) = pa + qb = t.$$

동전이 뒷면이면 "예"는 거짓이므로

$$\mathrm{P}(Y \mid T) = p(1-a) + q(1-b) = (p+q) - (ap+bq) = 1 - t.$$

따라서

$$\mathrm{P}(H \mid Y) = \frac{t}{t + (1-t)} = t = ap + bq.$$

그러므로 $\mathrm{P}(H \mid Y) = \frac{1}{2}$일 필요충분조건은 $ap + bq = \frac{1}{2}$, 즉 $2(ap+bq) = 1$이며, 이것이 보이고자 한 것이다.

소문항 (ii)

"예" 다음에 "아니오"가 나오는 사건을 E라 하자. 안나가 접속해 있다고 하자. 안나의 두 답변은 서로 독립이고, 동전이 어느 쪽이 나왔든 둘 중 정확히 하나만 참이다.

$$\mathrm{P}(E \mid H \cap A) = a(1-a) \qquad \text{(참인 "예", 그다음 거짓)},$$
$$\mathrm{P}(E \mid T \cap A) = (1-a)a \qquad \text{(거짓, 그다음 참인 "아니오")}.$$

이 둘은 같다. 마찬가지로 $\mathrm{P}(E \mid H \cap B) = b(1-b) = \mathrm{P}(E \mid T \cap B)$이다. 그러므로

$$\mathrm{P}(E \mid H) = pa(1-a) + qb(1-b) = \mathrm{P}(E \mid T),$$

이고, 앞의 관찰에 의해 p, a, b의 값에 관계없이 $\mathrm{P}(H \mid E) = \frac{1}{2}$이다.

> ? **생각해 보기** 여기서는 왜 아무 조건 없이도 정확히 $\frac{1}{2}$이 나올까?

서로 모순되는 답변은 동전이 무엇이 나왔든 쌍둥이가 한 번은 참을 말하고 한 번은 거짓을 말했다는 뜻이다. 이 조합은 앞면일 때와 뒷면일 때 가능성이 똑같으므로 동전에 대한 정보를 전혀 담고 있지 않고, 결국 사전확률 $\frac{1}{2}$만 남는다.

소문항 (iii)

이제 "예" 다음에 "예"가 나오는 사건을 E라 하자. 앞면이면 두 답변 모두 참이고, 뒷면이면 둘 다 거짓이다. 누가 접속해 있는지에 대해 조건부로 계산하면

$$\mathrm{P}(E \mid H) = pa^2 + qb^2,$$
$$\mathrm{P}(E \mid T) = p(1-a)^2 + q(1-b)^2.$$

두 식을 빼고 $(1-a)^2 = 1 - 2a + a^2$을 이용하면

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(E \mid H) - \mathrm{P}(E \mid T) &= p\left(a^2 - (1-a)^2\right) + q\left(b^2 - (1-b)^2\right) \\ &= p(2a-1) + q(2b-1) \\ &= 2(ap+bq) - (p+q) \\ &= 2(ap+bq) - 1. \end{aligned}$$

따라서 $2(ap+bq) = 1$이면 두 가능도가 같고 $\mathrm{P}(H \mid E) = \frac{1}{2}$이며, 이것이 보이고자 한 것이다.

(사실 이 계산은 더 많은 것을 보여 준다. 두 가능도의 차가 정확히 $2(ap+bq) - 1$이므로, $\mathrm{P}(H \mid E) = \frac{1}{2}$은 $2(ap+bq) = 1$일 **때, 그리고 그때에만** 성립하며, 이는 소문항 (i)과 같은 조건이다.)

참고: 다른 해석

만약 이메일마다 그때 접속해 있는 쌍둥이가 독립적으로 새로 정해진다고 보면, 각 답변은 독립적으로 확률 t로 참이다. 이 경우 (ii)에서는 $\mathrm{P}(E \mid H) = t(1-t) = \mathrm{P}(E \mid T)$이고, (iii)에서는 $\mathrm{P}(E \mid H) = t^2$, $\mathrm{P}(E \mid T) = (1-t)^2$이며, 이 둘은 $t = \frac{1}{2}$일 때 같다. 결론은 같다.

검산

- 두 쌍둥이가 항상 참을 말한다면($a = b = 1$) $t = 1 \neq \frac{1}{2}$이고, (i)에서 "예"라는 답은 앞면을 확실하게 만든다: $\mathrm{P}(H \mid Y) = t = 1$. 이때 (ii)와 같은 모순된 답변은 불가능한데, 이는 $a(1-a) = b(1-b) = 0$과 일치한다.
- $p = 0.3$, $a = 0.8$, $b = \frac{0.5-0.24}{0.7} \approx 0.371$(따라서 $2(ap+bq) = 1$)로 두고 같은 쌍둥이 모형에서 2×10^5회 시뮬레이션(simulation)한 결과 $\mathrm{P}(H \mid \text{예}, \text{예}) \approx 0.496$을 얻었다. 무작위로 고른 수천 개의 (p, a, b)에 대해 분수로 정확히 열거(enumeration)한 결과, 두 해석 모두에서 세 결과가 모두 확인되었다.
- $p = \frac{1}{2}$, $a = b = 0.9$이면 조건이 성립하지 않고, 두 번의 "예"는 $\mathrm{P}(H \mid E) = \frac{81}{82}$을 주어 $\frac{1}{2}$과 거리가 멀다. 따라서 (iii)의 조건은 정말로 중요하다.

흔한 실수

- 근거 없이 $\mathrm{P}(Y \mid T) = 1 - \mathrm{P}(Y \mid H)$라고 쓰는 것. 여기서는 우연히 참이지만, 그것은 뒷면일 때의 "예"가 거짓이기 때문일 뿐이다. 그 이유를 밝혀야 한다.
- (iii)에서 같은 쌍둥이가 두 답변을 모두 한다고 가정하면서, 동시에 두 답변을 각각 확률

t로 참인 독립적인 답변으로 취급하는 것. 쌍둥이가 주어지면 두 답변은 독립이지만, 조건 없이는 독립이 아니다. 둘 다 누가 접속해 있는지에 의존하기 때문이다.

STEP 너머

여기서의 원리는 단 하나, 사후 오즈(posterior odds)는 사전 오즈에 가능도비(likelihood ratio)를 곱한 것과 같다는 것이다. 두 가설 아래에서 가능성이 똑같은 증거는 아무것도 알려 주지 않는다. 같은 쌍둥이 모형은 간단한 **혼합**(mixture) 모형이다. 답변들은 숨은 변수(누가 접속해 있는지)가 주어지면 독립이지만 전체적으로는 종속이며, 이는 은닉 변수(hidden variable) 모형과 베이즈 모형의 핵심에 있는 아이디어이다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)는 바로 이러한 관점에서 조건부 확률과 베이즈 규칙을 훌륭하게 다룬다.

풀이

STEP II 2005, 문제 13

확률과 통계 • 푸아송 분포와 이항분포

STEP II 2005, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/05-s2-q13

핵심 아이디어

표본으로 뽑은 각 쪽은 오류가 두 개 미만이거나 그렇지 않거나 둘 중 하나이고, 각 쪽은 서로 독립(independent)적으로 행동하므로 Y는 n번의 독립시행에서 성공한 횟수를 센다. 즉 Y는 이항분포(binomial distribution)를 따른다. 그 이후의 모든 내용은 λ가 작을 때 어떤 일이 일어나는지에 관한 것이며, 이를 위한 도구는 $\mathrm{e}^{-\lambda}$(또는 $\ln(1+\lambda)$)의 매클로린 급수(Maclaurin series)이다. 이때 상쇄되지 않는 첫 번째 항만 남긴다.

풀이

Y의 분포

특정한 한 쪽에 있는 오류의 개수를 X라 하면 $X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$이다. $X \leq 1$인 쪽을 **양호**하다고 하자. 그러면

$$\mathrm{P}(\text{양호}) = \mathrm{P}(X=0) + \mathrm{P}(X=1) = \mathrm{e}^{-\lambda} + \lambda\mathrm{e}^{-\lambda} = (1+\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda} = p.$$

표본은 서로 다른 n개의 쪽으로 이루어진다. 서로 다른 쪽의 오류 개수는 독립이고 모두 같은 분포 $\mathrm{Po}(\lambda)$를 따르므로, 어떤 n개의 쪽을 고르든 사건 "j번째 쪽이 양호하다"들은 서로 독립이고 각각의 확률은 p이다. (조건 $n \ll N$은 표본을 뽑을 쪽이 충분히 많다는 것을 보장해 줄 뿐이다. 독립성은 모형에서 나오는 것이므로 이 조건이 필요하지는 않다.)

따라서 Y는 성공 확률이 p인 n번의 독립시행에서 성공한 횟수이다. 양호한 쪽 k개와 불량한 쪽 $n-k$개로 이루어진 특정한 조합의 확률은 $p^k q^{n-k}$이고, 어느 k개의 쪽이 양호한지 고르는 방법은 $\binom{n}{k}$가지이므로

$$\mathrm{P}(Y=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n,$$

이다. 여기서 $p = (1+\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda}$, $q = 1-p$이며, 이것이 보이려던 것이다. 즉 $Y \sim \mathrm{B}(n, p)$이다.

소문항 (i)

$\mathrm{e}^{-\lambda} = 1 - \lambda + \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{6}\lambda^3 + \cdots$로 전개하고 $1+\lambda$를 곱하면

$$\begin{aligned} p = (1+\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda} &= \left(1 - \lambda + \tfrac{1}{2}\lambda^2 - \tfrac{1}{6}\lambda^3 + \cdots\right) + \left(\lambda - \lambda^2 + \tfrac{1}{2}\lambda^3 - \cdots\right) \\ &= 1 - \tfrac{1}{2}\lambda^2 + \tfrac{1}{3}\lambda^3 - \cdots. \end{aligned}$$

λ의 일차항이 상쇄되므로, λ가 작을 때

$$q = 1 - p = \tfrac{1}{2}\lambda^2 - \tfrac{1}{3}\lambda^3 + \cdots \approx \tfrac{1}{2}\lambda^2$$

이다. 무시한 항들은 $\frac{1}{2}\lambda^2$보다 λ 정도의 비율만큼 작기 때문이다.

> **생각해 보기** $\mathrm{e}^{-\lambda}$의 첫 항만 보면 그럴 것 같은데, 왜 $q \approx \lambda$가 아닐까?

$\mathrm{e}^{-\lambda}$에서 나온 $-\lambda$가 $1+\lambda$를 곱해서 생긴 $+\lambda$와 정확히 상쇄되기 때문이다. 한 쪽이 불량하려면 오류가 적어도 두 개 있어야 하고, $\mathrm{P}(X \geq 2) \approx \mathrm{P}(X = 2) = \frac{1}{2}\lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda} \approx \frac{1}{2}\lambda^2$이다. 이는 (i)을 독립적으로 확인해 주는 좋은 근거이다.

소문항 (ii)

$\mathrm{P}(Y = n) = p^n$이고, $p^n \geq 1 - \lambda$를 만족하는 가장 큰 n을 구해야 한다. ($0 < \lambda < 1$일 때) 양변이 모두 양수이고 ln은 증가함수이므로, 이는

$$n \ln p \geq \ln(1-\lambda).$$

와 동치이다. 이제 $\ln p = \ln(1+\lambda) - \lambda = \left(\lambda - \frac{1}{2}\lambda^2 + \cdots\right) - \lambda \approx -\frac{1}{2}\lambda^2$이고 $\ln(1-\lambda) \approx -\lambda$이다. $\ln p < 0$이므로 이것으로 나누면 부등호의 방향이 바뀐다.

$$n \leq \frac{\ln(1-\lambda)}{\ln p} \approx \frac{-\lambda}{-\frac{1}{2}\lambda^2} = \frac{2}{\lambda}.$$

따라서 그러한 가장 큰 n은 근사적으로 $2/\lambda$이다.

(i)을 이용해도 같은 결과를 얻는다. $p^n = (1-q)^n \approx 1 - nq \approx 1 - \frac{1}{2}n\lambda^2$이고, $1 - \frac{1}{2}n\lambda^2 \geq 1 - \lambda$는 정확히 $n \leq 2/\lambda$일 때 성립한다. $(1-q)^n \approx 1 - nq$라는 단계는 nq가 작아야 하는데, 여기서 $nq \approx \frac{2}{\lambda} \cdot \frac{1}{2}\lambda^2 = \lambda$로 작으므로 이 근사는 자기모순 없이 일관된다.

소문항 (iii)

$Y > 1$이면 $Y > 0$이므로

$$\mathrm{P}(Y > 1 \mid Y > 0) = \frac{\mathrm{P}(Y > 1)}{\mathrm{P}(Y > 0)} = \frac{\mathrm{P}(Y > 0) - \mathrm{P}(Y = 1)}{\mathrm{P}(Y > 0)} = 1 - \frac{npq^{n-1}}{1 - q^n}.$$

(여기서 $n \geq 2$라는 조건이 중요하다. 이 조건 덕분에 $Y > 1$이 일어날 수 있는 사건이 되고, 거듭제곱 q^{n-1}이 적어도 q의 거듭제곱이 된다.) 이제 n을 고정하고 λ가 작다고 하자. 그러면 $q \approx \frac{1}{2}\lambda^2$이 작으므로 $p \approx 1$이고 $1 - q^n \approx 1$이어서

$$\mathrm{P}(Y > 1 \mid Y > 0) \approx 1 - nq^{n-1} \approx 1 - n\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)^{n-1},$$

을 얻는다. 마지막 단계에서 (i)을 이용하였다. 이것이 구하려던 결과이다.

검산

- $\lambda = 0.8$인 푸아송 분포(Poisson distribution)를 따르는 $n = 5$개의 쪽으로 이루어진 표본을 200,000번 시뮬레이션한 결과, $Y = 0, \ldots, 5$의 상대도수가 $\mathrm{B}(5, p)$와 0.002 이내로 일치하였다.
- $\lambda = 0.01$일 때 $q = 4.967 \times 10^{-5}$이고, $\frac{1}{2}\lambda^2 = 5 \times 10^{-5}$이다.
- $\lambda = 0.01$일 때 $p^n \geq 0.99$를 만족하는 가장 큰 n의 정확한 값은 202이고, $2/\lambda = 200$이다. (각 급수에서 항을 하나씩 더 남기면 $2/\lambda + \frac{7}{3}$을 얻으므로, $2/\lambda$가 커지는 동안 오차는 유계로 남는다.)
- $\lambda = 0.01$, $n = 3$일 때 정확한 값은 $1 - \mathrm{P}(Y > 1 \mid Y > 0) = 7.40 \times 10^{-9}$이고, $3(\lambda^2/2)^2 = 7.5 \times 10^{-9}$이다.

흔한 실수

- "오류가 두 개 미만"을 $X = 0$만으로, 또는 $X \leq 2$로 받아들이는 것.
- $(1 + \lambda)\mathrm{e}^{-\lambda}$의 전개를 일차항에서 멈추고 $q \approx 0$이라고 결론짓는 것. 살아남는 첫 번째 항은 이차항이다.
- (ii)에서 $\ln p < 0$으로 나눌 때 부등호의 방향을 바꾸는 것을 잊는 것.

STEP 너머

소문항 (ii)는 점근 해석(asymptotic analysis)의 한 예이다. 조건은 곱 $n\lambda^2$에 의해 좌우되므로 n의 자연스러운 척도는 $1/\lambda$이고, p^n 같은 양은 $\mathrm{e}^{-n\lambda^2/2}$처럼 행동한다. 이항분포의 푸아송 근사와 확률론의 여러 "드문 사건" 극한도 같은 논리에 바탕을 두고 있다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 이러한 극한 정리들을 꼼꼼하게 전개한다.

풀이

STEP II 2005, 문제 14

확률과 통계 • 혼합분포

> **STEP II 2005, 14번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/05-s2-q14

핵심 아이디어

이 밀도함수(density)는 우리가 이미 잘 아는 두 밀도함수, 즉 표준정규분포(standard normal)와 $[0, \lambda]$ 위의 균등분포(uniform)를 가중 혼합(mixture)한 것이다. 따라서 f의 모든 적분은 정규 부분과 균등 부분으로 나뉘며, 각 부분은 잘 알려진 사실들(전체 확률 1, 평균, $\mathrm{E}(X^2)$)로부터 어려운 적분 없이 바로 읽어 낼 수 있다. 그러면 분산(variance)은 $\mathrm{E}(X^2) - \mu^2$로부터 얻는다.

풀이

상수 k, 평균, 분산

ϕ와 g는 모두 확률밀도함수(probability density function)이므로, 각각을 실수 전체에서 적분하면 1이다. 따라서

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = k\,[1 + \lambda \cdot 1] \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{1}{1+\lambda}.$$

평균(mean)을 구할 때는 두 성분의 평균을 이용한다. 표준정규분포의 평균은 0이고, $[0, \lambda]$ 위의 균등밀도함수 g의 평균은 $\frac{1}{2}\lambda$이다. 따라서

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = k\left[\int x\phi(x)\,\mathrm{d}x + \lambda \int x g(x)\,\mathrm{d}x\right] = \frac{1}{1+\lambda}\left[0 + \lambda \cdot \frac{\lambda}{2}\right] = \frac{\lambda^2}{2(1+\lambda)}.$$

같은 방법으로, 표준정규분포에서는 $\int x^2\phi(x)\,\mathrm{d}x = 1$이고(평균이 0이므로 이 값은 분산과 같다), 또

$$\int x^2 g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{\lambda^2}{3}.$$

따라서

$$\mathrm{E}(X^2) = \frac{1}{1+\lambda}\left[1 + \lambda \cdot \frac{\lambda^2}{3}\right] = \frac{3+\lambda^3}{3(1+\lambda)}.$$

? **생각해 보기** $\mathrm{E}(X^2)$는 이렇게 나눌 수 있는데, 분산은 왜 그럴 수 없을까?

기댓값(expectation)은 적분이고 적분은 선형이므로, $\mathrm{E}(X^2)$는 f가 성분 밀도함수들의 가중 결합인 것과 똑같은 방식으로 성분들의 이차 적률(second moment)의 가중 결합이 된다. 분산은 선형이 아니므로(μ^2가 들어 있다), 이차 적률을 먼저 결합한 다음에야 μ^2를 빼야 한다. 그렇게 하면

$$\begin{aligned}\sigma^2 = \mathrm{E}(X^2) - \mu^2 &= \frac{3+\lambda^3}{3(1+\lambda)} - \frac{\lambda^4}{4(1+\lambda)^2} \\ &= \frac{4(3+\lambda^3)(1+\lambda) - 3\lambda^4}{12(1+\lambda)^2} \\ &= \frac{12 + 12\lambda + 4\lambda^3 + 4\lambda^4 - 3\lambda^4}{12(1+\lambda)^2} = \frac{\lambda^4 + 4\lambda^3 + 12\lambda + 12}{12(1+\lambda)^2},\end{aligned}$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

$\lambda = 2$인 경우

이제 $k = \frac{1}{3}$이고 $[0,2]$에서 $\lambda g(x) = 1$이므로

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}\phi(x) & x < 0 \text{ 또는} x > 2, \\ \frac{1}{3}\big(\phi(x) + 1\big) & 0 \le x \le 2. \end{cases}$$

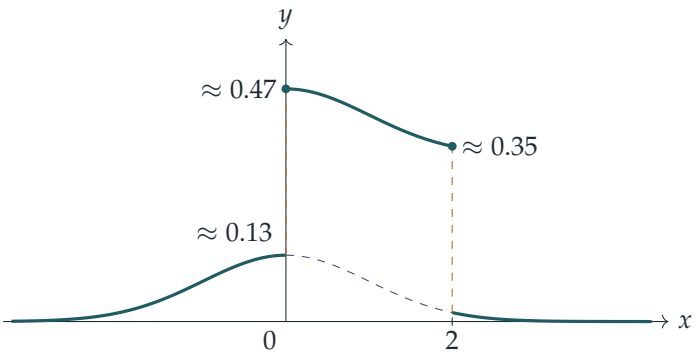
또한

$$\mu = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \qquad \sigma^2 = \frac{16+32+24+12}{12 \cdot 9} = \frac{84}{108} = \frac{7}{9}, \qquad \sigma = \frac{\sqrt{7}}{3}.$$

소문항 (i)

이 곡선은 표준정규분포의 종 모양 곡선을 3분의 1 높이로 줄인 다음, 구간 $[0,2]$에서 $\frac{1}{3}$만큼 들어 올린 것이다. 따라서 $x = 0$에서는 위로 뛰어오르고 $x = 2$에서는 아래로 뚝 떨어지며, 각 도약의 높이는 $\frac{1}{3}$이다. $\phi(0) = 1/\sqrt{2\pi} \approx 0.399$와 $\phi(2) \approx 0.054$를 이용하면 다음과 같다.

- 0의 바로 왼쪽에서 $f \approx 0.133$이고, 0의 바로 오른쪽에서 $f \approx 0.466$(최댓값)이다.
- 2의 바로 왼쪽에서 $f \approx 0.351$이고, 2의 바로 오른쪽에서 $f \approx 0.018$이다.
- $[0,2]$에서 곡선은 정규분포 곡선의 모양을 따라 감소한다.
- $x \to \pm\infty$일 때 $f \to 0$이고, 모든 곳에서 $f > 0$이다.



$[0,2]$ 위의 자주색 점선 곡선은 비교를 위해 그린 $\frac{1}{3}\phi(x)$이고, 실선 곡선은 $y = f(x)$이다. (세로 축척은 늘려서 그렸다.)

소문항 (ii)

$F(x) = \mathrm{P}(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$라 하자. $\frac{1}{3}\phi$를 적분하면 $\frac{1}{3}\Phi$가 되고, $[0,2]$에서 추가된 $\frac{1}{3}$은 $[0,2]$ 가운데 x보다 왼쪽에 있는 부분의 길이에 $\frac{1}{3}$을 곱한 만큼 기여한다. 따라서

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}\Phi(x) & x < 0, \\ \frac{1}{3}\big(\Phi(x) + x\big) & 0 \le x \le 2, \\ \frac{1}{3}\big(\Phi(x) + 2\big) & x > 2. \end{cases}$$

각 조각은 $x = 0$과 $x = 2$에서 값이 일치하는데, 당연히 그래야 한다(점 질량(point mass)이 없으면 누적분포함수(CDF)는 연속이다). 또 $x \to \infty$일 때 $F(x) \to \frac{1}{3}(1+2) = 1$이다.

소문항 (iii)

여기서 $\mu + 2\sigma = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{7} \approx 2.43$이고 이는 2보다 크므로, 그 점에서는 F의 마지막 식을 사용한다. X는 연속확률변수이므로

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(0 < X < \mu + 2\sigma) &= F\big(\tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{3}\sqrt{7}\big) - F(0) \\ &= \tfrac{1}{3}\big(\Phi(\tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{3}\sqrt{7}) + 2\big) - \tfrac{1}{3}\Phi(0) \\ &= \tfrac{1}{3}\big(0.9921 + 2 - 0.5\big) = \frac{2.4921}{3} = 0.8307. \end{aligned}$$

검산

- $\lambda \to 0$이면 균등 부분이 사라진다. 이때 공식은 $\mu \to 0$과 $\sigma^2 \to \frac{12}{12} = 1$을 주는데, 당연히 그래야 하듯 이는 표준정규분포의 값이다.

- $\lambda = 2$일 때 전체 분산의 법칙(law of total variance, 아래 참조)을 이용하면 다른 방법으로 같은 답을 얻는다. 두 성분의 가중치는 $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$, 분산은 $1, \frac{1}{3}$, 평균은 $0, 1$이다. 분산들의 평균은 $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$, 평균들의 분산은 $\frac{2}{3} - \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$이고, 그 합은 $\frac{7}{9}$이다.
- $\lambda = 0.5, 1, 2, 3.7$에 대해 f를 수치적분(중점 공식, 0과 λ에서 구간을 나눔)한 결과, 전체 확률 1, 평균, 분산 공식이 10^{-6}보다 작은 오차로 재현되었다. $\lambda = 2$일 때는 $\mu = 0.6667$과 $\sigma^2 = 0.7778$을 얻었다.
- $\Phi(2.4305)$를 직접 계산하면 문제에 주어진 0.9921이 아니라 0.99246이 되고, 확률도 0.8307이 아니라 0.8308이 된다. 이 작은 차이는 문제에 주어진 값에서 비롯된 것이며, 우리는 그 주어진 값을 사용해야 한다.

흔한 실수

- 인수 $k = \frac{1}{3}$을 빠뜨려서 전체 확률이 3이 되는 것.
- 분산을 $k[1 + \lambda \cdot \frac{\lambda^2}{12}]$로, 즉 성분들의 분산을 결합하여 계산하는 것. 혼합분포의 분산은 선형으로 결합되지 않는다. 선형으로 결합되는 것은 이차 적률이다.
- f를 연속인 곡선으로 그리는 것. 실제로는 $x = 0$과 $x = \lambda$에서 값이 뛴다.

STEP 너머

가중치 $w_i \geq 0$의 합이 1일 때, $\sum_i w_i f_i(x)$ 꼴의 밀도함수를 **혼합분포**(mixture distribution)라 한다. 이는 확률 w_i로 성분 i를 고른 다음 f_i에서 표본을 뽑는 분포이다. 여기서 가중치는 $\frac{1}{1+\lambda}$와 $\frac{\lambda}{1+\lambda}$이다. 혼합분포의 분산은 모습만 바꾼 전체 분산의 법칙으로, 성분 분산들의 평균에 성분 평균들의 분산을 더한 것이다. 혼합분포는 통계학과 기계학습(machine learning)에서 군집화(clustering) 방법의 기초가 된다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)는 조건부 기댓값(conditional expectation)과 전체 분산의 법칙을 명료하게 다룬다.

풀이

STEP III 2005, 문제 1

순수수학 • 삼각방정식과 그래프

STEP III 2005, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/05-s3-q1

핵심 아이디어

sin(어떤 것) = cos(다른 어떤 것) 꼴의 방정식은 $\cos B = \sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right)$를 이용하면 언제나 두 인수(*argument*)에 대한 명제로 바꿀 수 있다. 이를 $\sin(\sin x) = \cos(\cos x)$에 적용하면 $\sin x \mp \cos x$가 $\frac{\pi}{2}$의 홀수 배와 같아야 한다는 결론이 나오는데, $|\sin x \pm \cos x|$에 대한 상계(bound)를 보면 이 값은 그 크기에 도달하기에는 너무 작다. 그래프의 개형은 안쪽 인수가 짧은 구간에서만 움직일 때 바깥쪽 함수가 그 인수에 어떤 일을 하는지 생각하면 자연스럽게 따라 나온다.

풀이

방정식 $\sin A = \cos B$

$\cos B = \sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right)$이므로, $C = \frac{\pi}{2} - B$로 두고 $\sin A = \sin C$의 일반해(general solution)를 구하면 된다. 사인함수는 한 주기(period) 2π 안에서 $[-1, 1]$의 각 값을 C와 $\pi - C$에서 정확히 두 번 취하므로(값이 ± 1일 때는 두 점이 일치한다)

$$\sin A = \sin C \iff A = C + 2k\pi \text{ 또는 } A = \pi - C + 2k\pi \quad \text{어떤 정수} k.$$

이다. 여기에 $C = \frac{\pi}{2} - B$를 대입하면

$$A = \tfrac{\pi}{2} - B + 2k\pi = (4k+1)\tfrac{\pi}{2} - B,$$
$$\text{또는} \quad A = \pi - \tfrac{\pi}{2} + B + 2k\pi = (4k+1)\tfrac{\pi}{2} + B.$$

따라서 $\sin A = \cos B$일 필요충분조건은 어떤 정수 n에 대하여 $A = (4n+1)\frac{\pi}{2} \pm B$인 것이다. 위의 각 단계가 모두 "필요충분조건"이므로 양방향이 모두 보장된다. ("충분조건" 방향을 직접 확인하면, 주기 2π를 이용하여 $\sin\left((4n+1)\frac{\pi}{2} \pm B\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm B\right) = \cos B$이다.)

상계와 방정식 $\sin(\sin x) = \cos(\cos x)$

삼각함수의 덧셈정리(compound angle formula)를 이용하면

$$\sin x \pm \cos x = \sqrt{2}\left(\sin x \cos\tfrac{\pi}{4} \pm \cos x \sin\tfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(x \pm \tfrac{\pi}{4}\right),$$

이고, 모든 θ에 대하여 $|\sin\theta| \le 1$이므로 모든 x에 대하여 $|\sin x \pm \cos x| \le \sqrt{2}$를 얻는다. 이것이 증명하려던 것이다.

이제 어떤 x에 대하여 $\sin(\sin x) = \cos(\cos x)$라고 가정하자. 첫 번째 결과에서 $A = \sin x$, $B = \cos x$로 두면, 어떤 정수 n이 존재하여

$$\sin x = (4n+1)\tfrac{\pi}{2} \pm \cos x, \qquad \text{즉,} \qquad \sin x \mp \cos x = (4n+1)\tfrac{\pi}{2}.$$

? **생각해 보기** 우변은 왜 작아질 수 없을까?

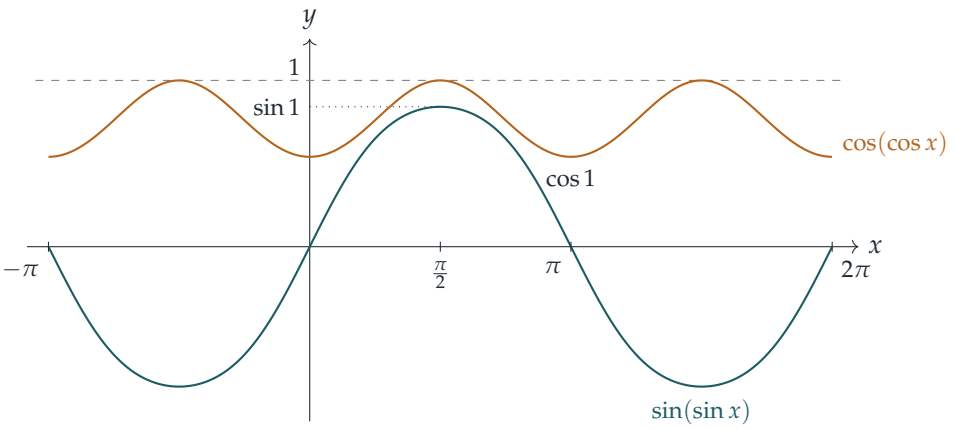
$4n+1$은 홀수이므로 결코 0이 아니다. 따라서 $|4n+1| \ge 1$이고, 우변의 절댓값(modulus)은 적어도 $\frac{\pi}{2} \approx 1.571$이다. 반면 좌변의 절댓값은 많아야 $\sqrt{2} \approx 1.414$이다. $\sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$이므로(양변을 제곱하면 $\pi^2 > 9 > 8$이므로 $2 < \frac{\pi^2}{4}$이다) 이는 불가능하다. 그러므로 $\sin(\sin x) = \cos(\cos x)$는 해를 갖지 않는다.

$y = \sin(\sin x)$와 $y = \cos(\cos x)$의 그래프 그리기

$y = \sin(\sin x)$. 안쪽 함수 $\sin x$는 $[-1, 1]$ 위를 움직이고, 이 구간에서 sin은 증가한다($[-1,1] \subset [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$이므로). 따라서 $\sin(\sin x)$는 $\sin x$가 증가하고 감소할 때 정확히 같이 증가하고 감소한다. 즉 주기가 2π이고, 홀함수(odd function)이며, $x = n\pi$에서 0이 되고, $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$에서 최댓값 $\sin 1 \approx 0.841$을, $x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$에서 최솟값 $-\sin 1$을 갖는다. 기울기(gradient) $\cos x \cos(\sin x)$는 원점에서 1이다. 그래프는 사인 곡선을 약간 납작하게 누른 모양이다.

$y = \cos(\cos x)$. $\cos(-u) = \cos u$이고 $\cos(x+\pi) = -\cos x$이므로 $\cos(\cos(x+\pi)) = \cos(\cos x)$이다. 즉 그래프는 주기가 π이고 짝함수(even function)이다. $[-1, 1]$에서 $\cos u$는 $u = 0$일 때 가장 크고($= 1$), $u = \pm 1$일 때 가장 작다($= \cos 1 \approx 0.540$). 따라서 $\cos(\cos x)$는 $\cos x = 0$인 곳, 즉 $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$에서 최댓값 1을 갖고, $\cos x = \pm 1$인 곳, 즉 $x = n\pi$에서 최솟값 $\cos 1$을 갖는다. 그래프는 언제나 0.54와 1 사이에 있다.

앞 문항에 의해 두 곡선은 결코 만나지 않으며, $\cos(\cos 0) = \cos 1 > 0 = \sin(\sin 0)$이므로 연속성(continuity)에 의해 코사인 쪽 곡선이 모든 곳에서 사인 쪽 곡선보다 엄격히 위에 있다. 두 곡선이 가장 가까워지는 곳(간격이 약 0.107)은 $x \approx 0.88$ 근처로, 여기서 $\sin(\sin x)$는 거의 꼭대기에 다다랐고 $\cos(\cos x)$는 아직 올라가는 중이다.



$y = \sin(2\sin x)$의 그래프 그리기

이 함수도 주기가 2π인 홀함수이고 $x = n\pi$에서 영점을 가지므로, $0 \le x \le \pi$에서의 모양만 이해하면 충분하다. 이 구간에서 그래프는 $x = \frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이다($\sin(\pi - x) = \sin x$이므로).

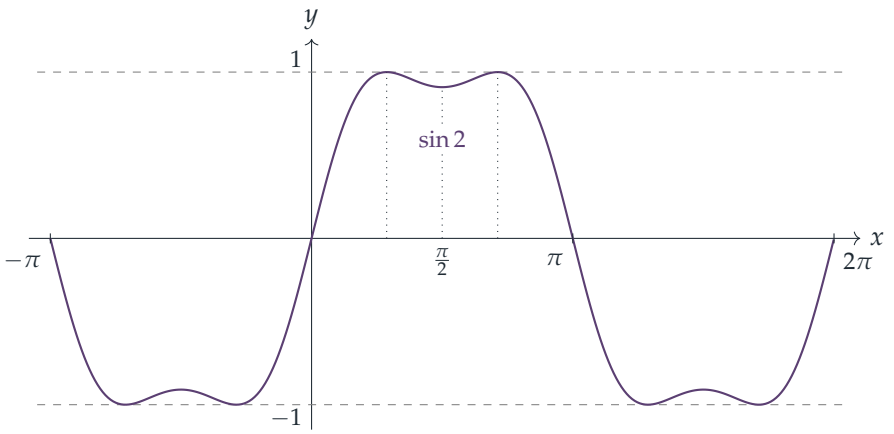
이번에 달라지는 점은 이 구간에서 안쪽 인수 $u = 2\sin x$가 $[0, 2]$ 위를 움직이는데, $2 > \frac{\pi}{2}$라는 것이다. 따라서 x가 0에서 $\frac{\pi}{2}$까지 증가할 때

- $\sin x$가 $\frac{\pi}{4}$까지 올라가는 동안, 즉 $x = \arcsin\frac{\pi}{4} \approx 0.903$까지 u는 0에서 $\frac{\pi}{2}$까지 올라간다. 그동안 $y = \sin u$는 0에서 최댓값 1까지 증가한다.
- u는 계속해서 $\frac{\pi}{2}$에서 2까지 가는데, 여기서는 $\sin u$가 감소하므로 y는 $x = \frac{\pi}{2}$에서 $\sin 2 \approx 0.909$까지 다시 내려간다.

대칭성에 의해 y는 $x = \pi - \arcsin\frac{\pi}{4} \approx 2.238$에서 다시 1까지 올라갔다가 $x = \pi$에서 0으로 내려간다. 도함수(derivative)로 확인해 보면

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2\cos x \cos(2\sin x),$$

이고, 이 값은 정확히 $\cos x = 0$일 때($\frac{\pi}{2}$에서의 극소(local minimum)) 또는 $2\sin x = \pm\frac{\pi}{2}$일 때(최댓값 1) 0이 된다. 원점에서의 기울기는 2이다. $[\pi, 2\pi]$에서는 그림이 뒤집힌다. 최솟값 -1이 두 번 나타나고, 그 사이 $x = \frac{3\pi}{2}$에서 극댓값 $-\sin 2$를 갖는다. 사인 곡선의 봉우리 하나하나가 얕게 패인 낙타 등 모양이 된 것이다.



검산

- $B = 0.3$, $n = 1$로 두자. $A = \frac{5\pi}{2} - 0.3$이면 $\sin A = \cos 0.3 \approx 0.9553$으로, 기대한 대로이다.
- 한 주기에 걸쳐 촘촘한 격자점에서 $\cos(\cos x) - \sin(\sin x)$를 계산하면 최솟값이 약 0.107($x \approx 0.878$ 근처)이고 결코 0이 되지 않는다. 이로써 두 곡선이 만나지 않음을 확인할 수 있다.
- $\sin(2\sin x)$에 대하여 $[0, \pi]$를 수치적으로 조사하면 정확히 세 개의 극점(turning point)이 나온다. $x \approx 0.903$과 2.238에서의 최댓값 1, 그리고 $\frac{\pi}{2}$에서의 극솟값 $\sin 2 \approx 0.909$이다.

흔한 실수

- $A = \frac{\pi}{2} - B + 2n\pi$만 쓰고, $\sin(\pi - C) = \sin C$에서 나오는 두 번째 해의 족 $A = \frac{\pi}{2} + B + 2n\pi$를 빠뜨리는 것.
- $n = 0$도 허용된다는 사실을 잊고 $|4n + 1| \geq 5$만 확인하는 것. 결정적인 비교 대상은 $\frac{\pi}{2}$ 자체이다.
- $\sin(2\sin x)$를 높이가 1인 평범한 사인 곡선으로 그리는 것. $2 > \frac{\pi}{2}$이므로 안쪽 인수가 사인의 꼭대기를 지나쳐 버리고, 이 때문에 $x = \frac{\pi}{2}$에서 움푹 팬 부분이 생긴다.

STEP 너머

여기서 그린 그래프는 모두 합성(composition)에 관한 것이다. $f(g(x))$의 모양은 g의 치역(range)이 f의 그래프 중 어느 부분을 덮는지에 따라 정해진다. 이 생각을 반복하면($\sin(\sin(\sin x))$ 등) 고정점(fixed point)과 반복 사상(iterated map)의 동역학으로 이어지는데, 여기서는 $f(f(\cdots f(x)))$가 언제 한 값으로 안정되는지를 묻는다. 양변이 가질 수 있는 값의 범위를 비교하는 부등식 논증은 해석학 전반에서 쓰이는 기법의 간단한 예이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 이런 논증이 어떻게 엄밀해지는지 살펴보기에 좋은 책이다.

풀이

STEP III 2005, 문제 2

순수수학 • 변수분리형 미분방정식

STEP III 2005, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/05-s3-q2

핵심 아이디어

이 미분방정식(differential equation)은 변수분리형(separable)이며, 적분하면 로그가 나오고 이를 합치면 주어진 꼴이 된다. 거리에 관한 문제에서는 거리 자체 대신 거리의 **제곱** $D = x^2 + y^2$을 최소화하면 제곱근을 다루지 않아도 된다. 곡선 위에서 y^2은 x의 명시적인 함수이므로 D는 x만의 함수가 되고, 그 도함수는 깔끔하게 인수분해된다. 어떤 정류점(stationary point)이 나타나는지는 c와 a^2의 대소 관계에 따라 달라진다.

풀이

일반해

($y \neq 0$일 때) 변수를 분리하면

$$\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = -\int \frac{x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \ln|y| = -\tfrac{1}{2}\ln(x^2+a^2) + k,$$

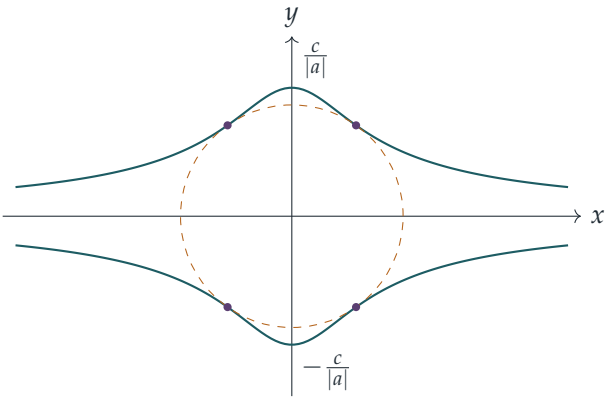
이고, 여기서 k는 상수이다. $a \neq 0$이므로 모든 x에 대하여 $x^2 + a^2 > 0$이고, 따라서 우변의 로그는 어디서나 정의된다. 양변에 2를 곱하고 지수를 취하면

$$y^2 = \frac{\mathrm{e}^{2k}}{x^2+a^2}, \qquad \text{따라서} \qquad y^2(x^2+a^2) = c^2,$$

이고, 여기서 $c^2 = \mathrm{e}^{2k}$이다. y로 나눌 때 잃어버린 해 $y = 0$은 $c = 0$인 경우이므로, c는 실제로 임의의 상수이다. 명시적으로 쓰면 일반해(general solution)는 $y = c/\sqrt{x^2+a^2}$이고, c의 부호는 양이든 음이든 상관없다. 곡선의 방정식에는 c^2만 나타나므로 이제부터는 $c > 0$으로 둔다.

곡선 그리기

곡선 $y^2(x^2+a^2)=c^2$은 두 갈래 $y=\pm c/\sqrt{x^2+a^2}$으로 이루어진다. 이 곡선은 두 축에 대하여 모두 대칭이고(x^2과 y^2만 나타나므로), x축과는 결코 만나지 않는다. 위쪽 갈래에서 y는 x^2+a^2이 가장 작을 때 가장 크므로, $x=0$에서 최댓값 $c/|a|$를 갖는다. $|x|\to\infty$일 때 $y\approx\pm c/|x|\to 0$이므로 x축이 점근선(asymptote)이다. 그림은 $a=1$, $c=2$인 경우를 소문항 (ii)에서 구할 원과 함께 나타낸 것이다.



x^2+y^2의 도함수

$D=x^2+y^2$이라 하자. 미분방정식을 쓰고 이어서 $y^2=c^2/(x^2+a^2)$을 대입하면

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}x}=2x+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x-\frac{2xy^2}{x^2+a^2}=2x\left(1-\frac{c^2}{(x^2+a^2)^2}\right).$$

이 식에는 y^2만 들어 있으므로 두 갈래 모두에서 성립한다. 곱의 미분법(product rule)으로 한 번 더 미분하고 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2+a^2)^{-2}=-4x(x^2+a^2)^{-3}$ 을 이용하면

$$\frac{\mathrm{d}^2D}{\mathrm{d}x^2}=2\left(1-\frac{c^2}{(x^2+a^2)^2}\right)+2x\cdot\frac{4c^2x}{(x^2+a^2)^3}=2\left(1-\frac{c^2}{(x^2+a^2)^2}\right)+\frac{8c^2x^2}{(x^2+a^2)^3},$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다.

D의 정류점은 $x=0$ 또는 $(x^2+a^2)^2=c^2$인 곳이다. $x^2+a^2>0$이고 $c>0$이므로 두 번째 조건은 $x^2+a^2=c$, 즉 $x^2=c-a^2$을 뜻한다.

소문항 (i)

$0<c<a^2$이라 하자. 모든 x에 대하여 $x^2+a^2\geq a^2>c$이므로 $(x^2+a^2)^2>c^2$이고, $\mathrm{d}D/\mathrm{d}x$의 괄호 안은 항상 양수이다. 따라서 $\mathrm{d}D/\mathrm{d}x$는 x와 부호가 같다. 즉 D는 $x<0$에서 감소하고 $x>0$에서 증가한다. 그러므로 D는 $x=0$에서, 그리고 오직 그곳에서만 **전역** 최솟

값(global minimum)을 갖는다. (이와 맞게, 그 점에서 이계도함수는 $2(1-c^2/a^4) > 0$이다.)

$x = 0$에서 $y^2 = c^2/a^2$이므로 가장 가까운 점은

$$\left(0,\ \pm\frac{c}{a}\right),$$

이고, 원점으로부터의 거리는 $c/|a|$이다. 이것이 요구된 결과이다.

소문항 (ii)

이제 $c > a^2$이라 하자. 정류점은 $x = 0$과 $x = \pm\sqrt{c-a^2}$의 세 개이다.

> **?** **생각해 보기** $x = 0$은 여전히 가장 가까운 점일까?

그렇지 않다. $x = 0$에서 이계도함수는 $2(1-c^2/a^4)$인데, $c > a^2 > 0$에서 $c^2 > a^4$이므로 이 값은 음수이다. 따라서 이제 $x = 0$은 D의 극댓값(local maximum)을 주는 점, 즉 **극대점**이다. $x^2 = c - a^2$에서는 $x^2 + a^2 = c$이므로 괄호 안이 0이 되고

$$\frac{\mathrm{d}^2 D}{\mathrm{d}x^2} = \frac{8c^2(c-a^2)}{c^3} = \frac{8(c-a^2)}{c} > 0,$$

이므로 극솟값(local minimum)을 갖는다. 이것이 전역 최솟값임을 보이려면 $\mathrm{d}D/\mathrm{d}x$의 부호를 살펴보면 된다. $x > 0$일 때 괄호 안은 $x^2 < c - a^2$이면 음수이고 $x^2 > c - a^2$이면 양수이므로, $x \geq 0$에서 함수 D는 $x = \sqrt{c-a^2}$까지 감소하고 그 뒤로 증가한다. 따라서 $x \geq 0$에서 D는 $x = \sqrt{c-a^2}$일 때 가장 작고, 대칭성에 의해 $x \leq 0$에서는 $x = -\sqrt{c-a^2}$일 때 가장 작다.

이 점들에서 $y^2 = c^2/(x^2+a^2) = c^2/c = c$이다. 그러므로 곡선 위에서 원점에 가장 가까운 점은 다음 네 점

$$\left(\pm\sqrt{c-a^2},\ \pm\sqrt{c}\right)$$

(부호의 네 가지 조합 모두)이고, 원점으로부터의 거리는 $\sqrt{2c-a^2}$이다.

교차 검증으로, $x = 0$에서 거리의 제곱은 c^2/a^2이고

$$\frac{c^2}{a^2} - (2c - a^2) = \frac{(c-a^2)^2}{a^2} > 0,$$

이므로 y축 위의 점들이 실제로 더 멀리 있다.

검산

- $y = c/\sqrt{x^2+a^2}$을 미분방정식에 다시 대입하면 성립한다: $y' = -cx(x^2+a^2)^{-3/2} = -xy/(x^2+a^2)$.

- $a = 1$, $c = 2$일 때 $x^2 + 4/(x^2+1)$을 일일이 계산해 보면 최솟값 $3 = 2c - a^2$을 $x = \pm 1 = \pm\sqrt{c-a^2}$에서 얻고, 이때 $y^2 = 2 = c$이다. 이것이 그림의 네 점이며, 이곳에서 반지름 $\sqrt{3}$인 점선 원이 곡선에 접한다.
- $c = a^2$에서는 두 답이 일치한다: $\sqrt{c-a^2} = 0$이고 $\sqrt{c} = c/|a| = |a|$이므로 네 점이 합쳐져 $(0, \pm|a|)$가 된다.

흔한 실수

- "$\mathrm{d}D/\mathrm{d}x = 0$이고 $\mathrm{d}^2D/\mathrm{d}x^2 > 0$"이라는 사실만으로 그 점이 거리가 **가장 짧은** 점이라고 결론짓는 것. 이것은 극소만 보장할 뿐이며, 전역적인 문제는 $\mathrm{d}D/\mathrm{d}x$의 부호로 판정해야 한다.
- 아래쪽 갈래를 잊어버려서 소문항 (ii)에서 네 점 대신 두 점만 답하는 것.
- $x^2 + a^2 = \pm c$라고 쓰는 것. $x^2 + a^2 > 0$이므로 음의 경우는 불가능하다.

STEP 너머

$y^2(x^2+a^2) = c^2$이라는 조건 아래에서 x^2+y^2을 최소화하는 것은 제약 최적화(constrained optimisation) 문제이다. 대학에서는 한 변수에 대해 풀지 않고도 이런 문제를 다룰 수 있는 라그랑주(Lagrange) 승수(Lagrange multipliers)를 배우게 된다. 가장 가까운 점에서는 곡선의 법선(normal)이 반지름 방향을 향하며, 그래서 점선 원이 곡선에 접하는 것이다. c가 a^2을 지나면서 $x = 0$의 단 하나의 최솟값이 두 개로 갈라지는 현상은 **쇠스랑 분기**(pitchfork bifurcation)의 간단한 예이다. 변수분리형 방정식과 그 해곡선에 대해 더 알고 싶다면 Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)를 보라.

풀이

STEP III 2005, 문제 3

순수수학 • 이차식의 합성

STEP III 2005, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/05-s3-q3

핵심 아이디어

최고차항의 계수가 1인 이차식(monic quadratic) 두 개를 합성(composition)하면 최고차항의 계수가 1인 사차식(quartic)이 되는데, 그 계수들은 서로 묶여 있다. 네 개의 매개변수 p, q, r, s가 네 개의 계수 a, b, c, d를 만들어 내야 하지만, p와 s는 그중 두 계수에서 언제나 $2s + p$라는 조합으로만 나타나므로 하나의 관계식이 반드시 성립해야 한다. 두 번째 형태도 사실은 같은 것이 모습만 바꾼 것이다. **바깥쪽** 이차식을 완전제곱식으로 고치면(completing the square) $\mathrm{f}(\mathrm{g}(x))$는 (제곱식) $-$ (상수)의 꼴이 된다. 바로 이 꼴 덕분에 마지막 사차방정식을 근의 공식(quadratic formula)만으로 풀 수 있다.

풀이

이차식의 합성

f에서 x 자리에 $\mathrm{g}(x)$를 대입하면

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(\mathrm{g}(x)) &= (x^2 + rx + s)^2 + p(x^2 + rx + s) + q \\ &= x^4 + 2rx^3 + (r^2 + 2s + p)x^2 + r(2s + p)x + (s^2 + ps + q).\end{aligned}$$

따라서 모든 x에 대하여 $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = \mathrm{f}(\mathrm{g}(x))$일 필요충분조건은 다음과 같다.

$$a = 2r, \qquad b = r^2 + (2s + p), \qquad c = r(2s + p), \qquad d = s^2 + ps + q.$$

필요성(necessity). 이러한 p, q, r, s가 존재하면 $r = \frac{1}{2}a$이고 $2s + p = b - r^2 = b - \frac{1}{4}a^2$이므로

$$c = \tfrac{1}{2}a\left(b - \tfrac{1}{4}a^2\right), \qquad \text{즉} \qquad a^3 - 4ab + 8c = 0.$$

충분성(sufficiency). 역으로 $a^3 - 4ab + 8c = 0$이라 하자. $r = \frac{1}{2}a$로 두고, s는 아무 값으로 나(예를 들어 $s = 0$) 정한 다음 $p = b - \frac{1}{4}a^2 - 2s$, $q = d - s^2 - ps$로 놓는다. 그러면 첫째, 둘째, 넷째 등식은 만든 방법에 의해 성립하고, 셋째 등식은 $c = \frac{1}{2}a(b - \frac{1}{4}a^2)$가 되는데, 이것은 주어진 조건을 정리한 것이다. q는 상수항에만 나타나므로 d에는 아무 제약도 걸리지 않는다는 점에 주목하자.

따라서 구하는 필요충분조건(necessary and sufficient condition)은

$$\boxed{a^3 - 4ab + 8c = 0}$$

이다(d는 임의).

$(x^2 + vx + w)^2 - k$ 꼴

> **생각해 보기** $\mathrm{g}^2 + p\,\mathrm{g} + q$ 같은 합을 어떻게 하나의 제곱식에서 상수를 뺀 꼴로 다시 쓸 수 있을까?

$\mathrm{g}(x)$를 하나의 변수로 보고 g에 대하여 완전제곱식으로 고치면

$$\mathrm{f}(\mathrm{g}(x)) = \big(\mathrm{g}(x) + \tfrac{1}{2}p\big)^2 + q - \tfrac{1}{4}p^2 = \big(x^2 + rx + s + \tfrac{1}{2}p\big)^2 - \big(\tfrac{1}{4}p^2 - q\big).$$

이제 양방향을 모두 증명할 수 있다.

조건이 성립하면, 첫 번째 부분에 의해 사차식이 $\mathrm{f}(\mathrm{g}(x))$와 같아지도록 하는 p, q, r, s가 존재하고, 위의 식은 그 사차식이

$$v = r, \qquad w = s + \tfrac{1}{2}p, \qquad k = \tfrac{1}{4}p^2 - q.$$

인 $(x^2 + vx + w)^2 - k$와 같음을 보여 준다.

역으로, $(x^2 + vx + w)^2 - k$는 그 자체로 $\mathrm{g}(x) = x^2 + vx + w$, $\mathrm{f}(x) = x^2 - k$인 $\mathrm{f}(\mathrm{g}(x))$이다(즉 $p = 0, q = -k, r = v, s = w$). 첫 번째 부분의 필요성 논증에 의해 조건 $a^3 - 4ab + 8c = 0$이 성립해야 한다.

이로써 "필요충분조건"의 증명이 끝난다. 실제로 쓰려면 값을 명시적으로 구해 두는 것이 좋다. 전개하면

$$(x^2 + vx + w)^2 - k = x^4 + 2vx^3 + (v^2 + 2w)x^2 + 2vw\,x + (w^2 - k),$$

이므로

$$v = \tfrac{1}{2}a, \qquad w = \tfrac{1}{2}\big(b - \tfrac{1}{4}a^2\big) = \tfrac{1}{8}(4b - a^2), \qquad k = w^2 - d,$$

이어야 하고, 이때 x의 계수는 $2vw = \frac{1}{2}a(b - \frac{1}{4}a^2)$이며, 이것은 조건이 성립할 때 정확히 c와 같다.

사차방정식 풀기

여기서 $a = -4$, $b = 10$, $c = -12$, $d = 4$이고

$$a^3 - 4ab + 8c = -64 + 160 - 96 = 0,$$

이므로 이 방법을 적용할 수 있다. 공식에 의해

$$v = -2, \qquad w = \tfrac{1}{8}(40 - 16) = 3, \qquad k = 3^2 - 4 = 5,$$

이고, 실제로 $(x^2 - 2x + 3)^2 - 5 = x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 4$이다(확인을 위해 한 번 전개해 볼 만하다). 방정식은 다음과 같이 된다.

$$(x^2 - 2x + 3)^2 = 5 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 2x + 3 = \sqrt{5} \text{ 또는 } x^2 - 2x + 3 = -\sqrt{5}.$$

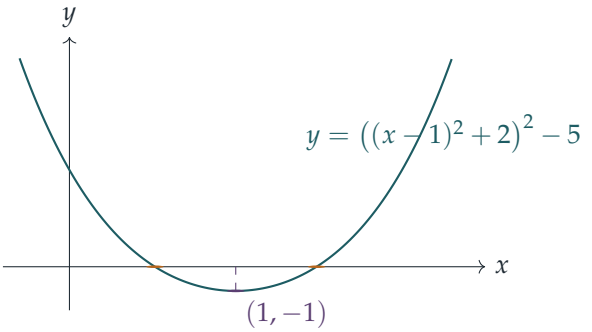
$x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 + 2$로 쓰면

- $(x - 1)^2 = \sqrt{5} - 2$. $\sqrt{5} > 2$이므로 우변은 양수이고, 두 실근(real roots) $x = 1 \pm \sqrt{\sqrt{5} - 2}$를 얻는다.
- $(x - 1)^2 = -2 - \sqrt{5} < 0$이므로, 켤레 복소수 근(complex pair) $x = 1 \pm \mathrm{i}\sqrt{2 + \sqrt{5}}$를 얻는다.

따라서 근은

$$\boxed{x = 1 \pm \sqrt{\sqrt{5} - 2}, \qquad x = 1 \pm \mathrm{i}\sqrt{2 + \sqrt{5}}}$$

이고, 이 가운데 첫 번째 쌍만 실수이다(문제가 실근을 구하라는 뜻이라면 이 두 개가 답이다).



그래프는 직선 $x = 1$에 대하여 대칭이고($(x - 1)^2$에만 의존하므로), $x = 1$에서 최솟값 $2^2 - 5 = -1$을 가지므로 축과 정확히 두 번 만난다.

검산

- 수치적으로 $1 \pm \sqrt{\sqrt{5}-2} \approx 1.4859, 0.5141$이다. 둘 중 어느 것을 $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 4$에 대입해도 10^{-14} 이내의 오차로 0이 되며, $1 \pm 2.0582\,\mathrm{i}$도 마찬가지이다.
- 근의 합: 네 근의 합은 $4 = -a$로, 당연히 그래야 한다.
- 직접 합성을 하나 만들어 시험해 보자. 예를 들어 $\mathrm{f}(x) = x^2 + x$, $\mathrm{g}(x) = x^2 + 2x$로 두면 $x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x$를 얻고, $a^3 - 4ab + 8c = 64 - 80 + 16 = 0$이다.

흔한 실수

- d에 대한 조건을 포함하는 것: 상수항은 언제나 q(또는 k)로 맞출 수 있으므로 d는 자유롭다.
- "필요충분조건"의 한 방향만 증명하는 것: $(x^2 + vx + w)^2 - k$가 그 자체로 $\mathrm{f}(\mathrm{g}(x))$ 꼴이라는 관찰만으로 역을 한 줄에 보일 수 있다.
- 실근을 구한 뒤 멈추고, 다른 인수에서 켤레 복소수 근이 나온다는 것을 알아차리지 못하는 것.

STEP 너머

조건 $a^3 - 4ab + 8c = 0$에는 깔끔한 의미가 있다. $x = y - \frac{1}{4}a$를 대입하면 삼차항이 사라지는데, 이 조건은 그렇게 얻은 **축약된**(depressed) 사차식에 y의 일차항이 없다는 것, 즉 그 식이 y^2에 대한 이차식이라는 것과 정확히 같다. 이것이 사차방정식에 대한 페라리(Ferrari)의 일반 해법의 출발점이며, 더 넓게는 다항식이 언제 합성으로 분해되는가 하는 문제의 출발점으로, 갈루아 이론(Galois theory)으로 이어진다. 어떤 다항방정식이 거듭제곱근(radicals)으로 풀리는지 그 배후의 대수학을 살펴보려면 Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)가 좋은 출발점이다.

풀이

STEP III 2005, 문제 4

순수수학 • 비선형 점화식

STEP III 2005, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/05-s3-q4

핵심 아이디어

이 점화식(recurrence)은 선형(linear)이 아니지만, 실제로는 연속한 항들의 비(*ratio*)에 관한 식이다. $u_{n+1} = \rho\, u_n$이라고 쓰면, 점화식은 다음 비가 $k - \rho$라는 것을 말해 준다. 따라서 비는 합이 k인 두 값 사이를 번갈아 오가며, 나머지는 모두 이 사실에서 나온다. 그러면 세 가지 특수한 경우는 이 두 비에 대한 조건이 된다.

풀이

수학적 귀납법(induction)

$r = \frac{b}{a}$라 하자. 점화식을 u_{n+1}로 나누면 (0이 아닐 때)

$$\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = k - \frac{u_{n+1}}{u_n},$$

을 얻으므로, 연속한 항들의 각 비는 k에서 바로 앞의 비를 뺀 값이다. 첫 번째 비는 $u_2/u_1 = r$이므로, 그다음 비는

$$c = k - \frac{b}{a} = \frac{ka - b}{a}.$$

가 되어야 한다. $b \neq ka$이므로 $c \neq 0$임에 주의하자. 또한 $b \neq 0$이므로 $r \neq 0$이다. 이 두 사실이 함께 모든 항이 0이 아니도록 보장하므로, 0으로 나누는 일은 결코 생기지 않는다.

$P(n)$을 $u_{2n-1} \neq 0$이고 $u_{2n} = r\, u_{2n-1}$이라는 명제라 하자. $u_1 = a \neq 0$이고 $u_2 = b = ra$이므로 $P(1)$은 성립한다.

어떤 $n \geq 1$에 대하여 $P(n)$이 성립한다고 가정하자. 그러면 $u_{2n} = ru_{2n-1} \neq 0$이고, 점화식

에 의해

$$u_{2n+1} = \frac{u_{2n}}{u_{2n-1}}\left(ku_{2n-1} - u_{2n}\right) = r\,(k-r)\,u_{2n-1} = (k-r)\,u_{2n} = c\,u_{2n},$$

이며, 이것이 요구된 두 번째 관계식이다. 따라서 $u_{2n+1} \neq 0$이고,

$$u_{2n+2} = \frac{u_{2n+1}}{u_{2n}}\left(ku_{2n} - u_{2n+1}\right) = c\,(k-c)\,u_{2n} = (k-c)\,u_{2n+1} = r\,u_{2n+1},$$

이다. 여기서 $k - c = r$임을 썼다. 이것이 곧 $P(n+1)$이다. 수학적 귀납법에 의해 모든 $n \geq 1$에 대하여

$$u_{2n} = \frac{b}{a}\,u_{2n-1}, \qquad u_{2n+1} = c\,u_{2n}, \qquad c = k - \frac{b}{a}.$$

이다.

생각해 보기 왜 귀납법의 명제에 "$u_{2n-1} \neq 0$"을 넣었을까?

점화식은 u_n으로 나누므로, 어떤 항도 0이 아니어야만 수열이 의미를 가진다. 0이 아니라는 성질을 귀납법 과정 내내 함께 끌고 가면, 공식을 증명하는 동시에 각 항이 정의된다는 것도 증명된다. 두 조건 $b \neq 0$과 $b \neq ka$가 모두 쓰이는 곳이 바로 여기이다.

닫힌 형태(closed form)

두 단계를 나아가면 c를 곱한 다음 $\frac{b}{a}$를 곱하게 되므로 $u_{2n+1} = \frac{bc}{a}\,u_{2n-1}$이다. 홀수 번째 항들은 첫째항이 a이고 공비(common ratio)가 $\frac{bc}{a}$인 등비수열(geometric progression)을 이루며, 각 짝수 번째 항은 바로 앞의 홀수 번째 항의 $\frac{b}{a}$배이다.

$$u_{2n-1} = a\left(\frac{bc}{a}\right)^{n-1} = \frac{b^{n-1}c^{n-1}}{a^{n-2}}, \qquad u_{2n} = b\left(\frac{bc}{a}\right)^{n-1} = \frac{b^n c^{n-1}}{a^{n-1}}.$$

소문항 (i)

연속한 항들의 비는 $\frac{b}{a}, c, \frac{b}{a}, c, \ldots$로 번갈아 나타나므로, 수열이 등비수열일 필요충분조건은 $c = \frac{b}{a}$, 즉 $k - \frac{b}{a} = \frac{b}{a}$이다.

$$ka = 2b.$$

이때 공비는 $\frac{b}{a}$이다. $b \neq 0$일 때 $ka = 2b \neq b$이므로, 이는 $b \neq ka$와 모순되지 않는다.

소문항 (ii)

닫힌 형태로부터 모든 n에 대하여 $u_{n+2} = \frac{bc}{a}\,u_n$이다. 따라서 모든 n에 대하여 $u_{n+2} = u_n$일 필요충분조건은 $\frac{bc}{a} = 1$, 즉 $b(ka - b) = a^2$이다.

$$kab = a^2 + b^2.$$

이때 수열은 $a, b, a, b, \ldots$ 이다. 주기(period)가 정확히 2이기를 (상수수열이 아니기를) 원한다면 $a \neq b$도 필요하다. $a = b$이면 조건은 $k = 2$가 되고, 모든 항이 a와 같다.

소문항 (iii)

마찬가지로 $u_{n+4} = \left(\frac{bc}{a}\right)^2 u_n$이므로, 모든 n에 대하여 $u_{n+4} = u_n$일 필요충분조건은 $\left(\frac{bc}{a}\right)^2 = 1$, 즉 $\frac{bc}{a} = \pm 1$이다. 값 $+1$은 주기가 2 (또는 1)인 소문항 (ii)의 경우이다. 주기가 정확히 4이려면 $\frac{bc}{a} = -1$, 즉 $b(ka - b) = -a^2$이어야 한다.

$$kab = b^2 - a^2.$$

이때 수열은 a, b, $-a$, $-b$, a, b, $\ldots$ 이다. $a \neq 0$이므로 $-a \neq a$이고, 따라서 이 수열의 주기는 정말로 4이며 그보다 작지 않다.

(ii)와 (iii) 모두에서 조건 $b \neq ka$는 자동으로 성립한다. 어느 조건에든 $b = ka$를 대입하면 $a^2 = 0$이 되는데, 이는 불가능하기 때문이다.

검산

$a = 1, b = 2$로 시험해 보자. $k = 4$ (소문항 (i))이면 점화식은 $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ 을 준다. $k = \frac{5}{2}$ (소문항 (ii))이면 $1, 2, 1, 2, \ldots$ 을 준다. $k = \frac{3}{2}$ (소문항 (iii))이면 $1, 2, -1, -2, 1, 2, \ldots$ 을 준다. 또한 a, b, k를 무작위로 약 2000번 골라 정확한 유리수 연산으로 점화식을 계산해 보았다. 모든 경우가 닫힌 형태와 일치했으며, 수열은 위의 조건이 성립할 때에만 정확히 등비수열, 주기 2인 수열, 주기 4인 수열이 되었다.

흔한 실수

- 점화식이 u_n으로 나누는데도, 왜 어떤 항도 0이 되지 않는지 설명하는 것을 잊는다.
- (iii)의 답으로 $\frac{bc}{a} = \pm 1$을 제시한다. $+1$인 경우는 주기가 2이다.
- (ii)에서 $a = b, k = 2$이면 상수수열이 된다는 것을 알아차리지 못한다.

STEP 너머

치환 $\rho_n = u_{n+1}/u_n$은 이 비선형 점화식을 1계 사상(first-order map) $\rho \mapsto k - \rho$로 바꾼다. 이 사상은 대합(involution)이다. 즉 두 번 적용하면 처음 자리로 돌아오며, 이 때문에 비의 주기가 2가 된다. 변수를 바꾸어 비선형 점화식이나 미분방정식을 더 간단하게 만드는 것은 대학 1학년의 표준적인 기법이며, 사상의 주기 궤도(periodic orbit)에 대한 연구는 이산 동역학계(discrete dynamical systems)의 출발점이다. 이런 성격의 문제를 더 보고 싶다면

Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*를 참고하라.

풀이

STEP III 2005, 문제 5

순수수학 • 포물선의 공통접선

STEP III 2005, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/05-s3-q5

핵심 아이디어

접선(tangent)을 접점(point of contact)으로 구별하는 대신 기울기(gradient)로 구별한다. 포물선(parabola)은 각 기울기 m마다 접선을 정확히 하나 가지며, 첫 번째 부분에서 그 접선의 y절편(y-intercept)을 구한다. 두 포물선이 기울기 m인 접선을 공유하는 것은 두 절편이 같을 때이고, 또 그때뿐이다. 따라서 공통접선(common tangent)의 개수를 세는 문제는 하나의 방정식의 근(root) m의 개수를 세는 문제가 된다. 이 방정식은 $a_1 \neq a_2$이면 이차방정식(quadratic)이고, $a_1 = a_2$이면 일차방정식이다.

풀이

기울기가 m인 접선

$y = ax^2 + bx + c$의 기울기는 $2ax + b$이다. $a \neq 0$이므로 이 값이 m이 되는 점은 $x_0 = \dfrac{m-b}{2a}$ 하나뿐이고, 이때 $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$이다. 이 점에서의 접선은 $y - y_0 = m(x - x_0)$, 즉 $y - mx = y_0 - mx_0$이다. $m = 2ax_0 + b$를 이용하면

$$\begin{aligned} y_0 - mx_0 &= ax_0^2 + bx_0 + c - (2ax_0 + b)x_0 \\ &= c - ax_0^2 = c - a \cdot \frac{(m-b)^2}{4a^2} = c - \frac{(m-b)^2}{4a}, \end{aligned}$$

이므로 P에서의 접선은 요구한 대로 $y - mx = c - \dfrac{(m-b)^2}{4a}$이다.

공통접선이 존재할 조건

첫 번째 부분에 의해 각 곡선은 기울기가 m인 접선을 정확히 하나 가지며, 그것은 각각

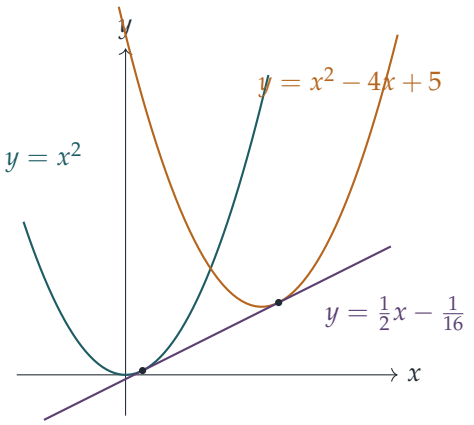
$$y = mx + k_1, \quad k_1 = c_1 - \frac{(m-b_1)^2}{4a_1}, \qquad \text{그리고} \qquad y = mx + k_2, \quad k_2 = c_2 - \frac{(m-b_2)^2}{4a_2}.$$

이다. 기울기가 같은 두 직선은 절편이 같을 때 정확히 일치하므로, 두 곡선이 기울기 m인 공통접선을 가질 필요충분조건은 $k_1 = k_2$이다. 양변에 $4a_1a_2 \neq 0$을 곱하면(이는 등식의 성립 여부를 바꾸지 않는다)

$$\begin{aligned} 4a_1a_2(k_2 - k_1) &= 4a_1a_2(c_2 - c_1) - a_1(m-b_2)^2 + a_2(m-b_1)^2 \\ &= (a_2 - a_1)m^2 + 2(a_1b_2 - a_2b_1)m + 4a_1a_2(c_2 - c_1) + a_2b_1^2 - a_1b_2^2. \end{aligned}$$

따라서 기울기 m인 공통접선이 존재할 필요충분조건은 이 식이 0이 되는 것이며, 이것이 요구한 조건이다. 이 조건의 좌변을 $Q(m)$이라 하자.

$Q(m) = 0$의 각 근 m은 정확히 하나의 공통접선을 주고, 서로 다른 근은 서로 다른 직선을 준다(기울기가 다르기 때문이다). 따라서 **공통접선의 개수는 $Q(m) = 0$의 서로 다른 실근의 개수와 같다.** 또한 어느 곡선도 수직인 접선을 갖지 않으므로 수직인 공통접선은 있을 수 없다는 점에도 주의한다.



$a_1 = a_2$이고 $b_1 \neq b_2$인 두 포물선은 공통접선을 정확히 하나 가진다. 여기서 그 기울기는 $\frac{1}{2}$이다.

$a_1 \neq a_2$인 경우

이때 Q는 m에 대한 진짜 이차식이므로, 서로 다른 실근을 정확히 하나 가질 필요충분조건은 판별식(discriminant)이 0인 것이다. 판별식은

$$\Delta = 4(a_1b_2 - a_2b_1)^2 - 4(a_2 - a_1)\left(4a_1a_2(c_2 - c_1) + a_2b_1^2 - a_1b_2^2\right).$$

이다. c가 없는 항들은 깔끔하게 정리된다.

$$\begin{aligned}&(a_1b_2 - a_2b_1)^2 - (a_2 - a_1)(a_2b_1^2 - a_1b_2^2)\\ &= \left(a_1^2b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_1^2\right) - \left(a_2^2b_1^2 - a_1a_2b_2^2 - a_1a_2b_1^2 + a_1^2b_2^2\right)\\ &= a_1a_2\left(b_1^2 - 2b_1b_2 + b_2^2\right) = a_1a_2(b_1 - b_2)^2.\end{aligned}$$

그러므로

$$\Delta = 4a_1a_2\Big[(b_1 - b_2)^2 - 4(a_1 - a_2)(c_1 - c_2)\Big],$$

이고, $a_1a_2 \neq 0$이므로 공통접선이 정확히 하나일 필요충분조건은

$$(b_1 - b_2)^2 = 4(a_1 - a_2)(c_1 - c_2). \qquad (*)$$

이다.

생각해 보기 두 곡선이 **접한다**는 것은 정확히 무슨 뜻이며, 이를 어떻게 방정식으로 바꿀 수 있을까?

두 곡선이 접한다는 것은 한 점에서 만나고 그 점에서 기울기가 같다는 것이다. 두 이차식의 차를

$$d(x) = (a_1 - a_2)x^2 + (b_1 - b_2)x + (c_1 - c_2),$$

라 하자. 두 곡선은 $d(x_0) = 0$일 때 x_0에서 만나고, $d'(x_0) = 0$일 때 그 점에서 기울기가 같다. 따라서 두 곡선이 접할 필요충분조건은 d가 $d'(x_0) = 0$을 만족하는 근 x_0, 즉 중근(repeated root)을 갖는 것이다. $a_1 \neq a_2$이므로 d는 이차식이고, 중근을 가질 필요충분조건은 판별식 $(b_1 - b_2)^2 - 4(a_1 - a_2)(c_1 - c_2)$가 0인 것이며, 이것이 바로 조건 $(*)$이다.

따라서 $a_1 \neq a_2$일 때, 두 곡선이 공통접선을 정확히 하나 가지는 것은 $(*)$가 성립하는 것과 동치이고, 이는 다시 두 곡선이 접하는 것과 동치이다. (이 경우 하나뿐인 공통접선은 당연히 접점에서의 접선이다.)

$a_1 = a_2$인 경우

공통의 값을 a라 하자. Q의 m^2항이 사라지고, $a \neq 0$으로 나누면 조건은

$$2(b_2 - b_1)m + 4a(c_2 - c_1) + (b_1 - b_2)(b_1 + b_2) = 0.$$

이 된다.

- $b_1 \neq b_2$이면 이 일차방정식은 근을 정확히 하나

$$m = \frac{b_1 + b_2}{2} - \frac{2a(c_2 - c_1)}{b_2 - b_1},$$

가지므로, 공통접선이 정확히 하나 존재한다.

- $b_1 = b_2$이면 조건은 $4a(c_2 - c_1) = 0$이 된다. $c_1 \neq c_2$이면 공통접선이 전혀 없다(한 곡선은 다른 곡선을 수직 방향으로 평행이동한 것이므로, 각 기울기의 접선들은 평행하고 서로 다르다). $c_1 = c_2$이면 두 곡선은 같은 곡선이고 모든 접선이 공통이므로 공통접선은 무수히 많다.

따라서 $a_1 = a_2$일 때, 두 곡선이 공통접선을 정확히 하나 가질 필요충분조건은 $b_1 \neq b_2$이다.

검산

$y = x^2$과 $y = -x^2 + 2x - \frac{1}{2}$의 차는 $2(x - \frac{1}{2})^2$이므로 두 곡선은 $x = \frac{1}{2}$에서 접한다. 이때 $Q(m) = -2m^2 + 4m - 2 = -2(m-1)^2$이고 하나뿐인 근 $m = 1$은 $x = \frac{1}{2}$에서 $y = x^2$의 기울기이다. 그림의 두 곡선 $y = x^2$과 $y = x^2 - 4x + 5$에 대해서는 공식에서 $m = -2 + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$를 얻고, 두 접선의 절편은 모두 $-\frac{1}{16}$이 된다. 또한 항등식 $Q(m) = 4a_1a_2(k_2 - k_1)$과 판별식의 정리 과정을 무작위로 뽑은 수천 개의 계수 조합에 대해 정확한 산술로 확인하였다.

흔한 실수

- $Q = 0$이 중근을 가지면 두 곡선이 접한다는 것을 "뜻한다"고 이유 없이 주장하는 것. 실제로는 **다른** 이차식 $d(x)$를 거쳐야 하며, 둘을 이어 주는 것은 판별식 항등식이다.
- $a_1 = a_2$인 경우에 $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$인 부분 경우(같은 곡선이므로 공통접선이 무수히 많음)를 빠뜨리거나, 답을 "$b_1 \neq b_2$ 또는 $c_1 \neq c_2$"라고 쓰는 것.

STEP 너머

곡선을 점들이 아니라 접선들의 모임으로 기술하는 것이 사영기하학(projective geometry)의 **쌍대성**(duality)이라는 아이디어이다. 원뿔곡선(conic)의 접선 $y = mx + k$들은 m과 k 사이의 고유한 이차 관계식을 만족하며, 일반적인 위치에 있는 두 원뿔곡선은 네 점에서 만나는 것과 마찬가지로 공통접선을 네 개 가진다. 축이 수직인 두 포물선의 경우에는 무한원직선(line at infinity)이 두 곡선 모두에 접하면서 네 개 중 두 개를 차지하므로, 보통의 공통접선은 많아야 두 개만 남는다. 이런 종류의 문제를 더 풀어 보고 싶다면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*를 참고하라.

풀이

STEP III 2005, 문제 6

순수수학 • 삼차방정식 풀기

STEP III 2005, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/05-s3-q6

핵심 아이디어

항등식 $4\cosh^3 y - 3\cosh y = \cosh 3y$는 x를 알맞은 상수배로 바꾸고 나면 "축약된" 삼차식(depressed cubic) $x^3 - 3bx$와 정확히 같은 꼴이다. 따라서 x^2항이 없는 삼차방정식은 삼배각 공식(triple-angle formula)에 맞춰 풀 수 있고, arcosh의 로그 표현을 이용하면 쌍곡선함수(hyperbolic function)로 얻은 답을 다시 세제곱근으로 바꿀 수 있다. 근 하나를 알고 나면 인수분해하여 나머지 두 근에 대한 이차방정식을 얻고, 1의 세제곱근(cube roots of unity)을 이용하면 이 두 근을 깔끔하게 정리할 수 있다.

풀이

쌍곡선함수로 나타낸 근

$x = 2a\cosh\frac{1}{3}T$로 놓자. 그러면

$$\begin{aligned} x^3 - 3a^2x &= 8a^3\cosh^3\tfrac{1}{3}T - 6a^3\cosh\tfrac{1}{3}T \\ &= 2a^3\left(4\cosh^3\tfrac{1}{3}T - 3\cosh\tfrac{1}{3}T\right) \\ &= 2a^3\cosh T, \end{aligned}$$

이다. 여기서 주어진 항등식에 $y = \frac{1}{3}T$를 대입하였다. 따라서 $2a\cosh\frac{1}{3}T$는 방정식을 만족하며, 이것이 증명하려던 것이다.

$x^3 - 3bx = 2c$의 근 하나

먼저 $c > 0$이라 하자. $b > 0$이므로 $a = \sqrt{b} > 0$으로 잡을 수 있고, 그러면 $3a^2 = 3b$이다. 이제 $2a^3 \cosh T = 2c$, 즉

$$\cosh T = \frac{c}{b^{3/2}}.$$

가 되기를 원한다. 이를 위해서는 $c/b^{3/2} \geq 1$이어야 하며, 바로 이 지점에서 조건이 쓰인다. $c > 0$일 때 $c^2 \geq b^3$이면 $c \geq b^{3/2}$이기 때문이다. 따라서

$$T = \operatorname{arcosh} \frac{c}{b^{3/2}} = \ln\left(\frac{c}{b^{3/2}} + \sqrt{\frac{c^2}{b^3} - 1}\right) = \ln \frac{c + \sqrt{c^2 - b^3}}{b^{3/2}}.$$

로 잡을 수 있다. 그러므로

$$e^{T/3} = \frac{(c + \sqrt{c^2 - b^3})^{1/3}}{b^{1/2}} = \frac{u}{\sqrt{b}}, \qquad e^{-T/3} = \frac{\sqrt{b}}{u},$$

이고, 앞 부분의 결과에 의해 근 하나는

$$2\sqrt{b} \cosh \tfrac{1}{3}T = \sqrt{b}\left(\frac{u}{\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{u}\right) = u + \frac{b}{u}.$$

이다.

> **생각해 보기** $c < 0$이면 어떻게 될까? 그때는 $c/b^{3/2} \leq -1$이 되어 cosh 값이 그렇게 되는 실수 T는 존재하지 않는다.

x를 $-x$로 바꾸자. 그러면 방정식은 $-c > 0$인 $x^3 - 3bx = -2c$가 되므로, 방금 다룬 경우에 의해 $u' = (-c + \sqrt{c^2 - b^3})^{1/3}$일 때 근 $u' + b/u'$을 가지며, $-(u' + b/u')$은 원래 방정식의 근이다. 이제

$$u^3 u'^3 = \left(\sqrt{c^2 - b^3} + c\right)\left(\sqrt{c^2 - b^3} - c\right) = (c^2 - b^3) - c^2 = -b^3,$$

이므로 실수 세제곱근을 취하면 $u' = -b/u$이고 $-(u' + b/u') = u + b/u$이다. 따라서 이 공식은 c의 부호와 관계없이 성립한다. ($b > 0$일 때 $\sqrt{c^2 - b^3} < |c|$이므로 두 경우 모두 $u \neq 0$임에 주의하자.)

나머지 두 근

$r = u + \frac{b}{u}$라 쓰자. r이 근이므로 $x - r$은 인수이고,

$$x^3 - 3bx - 2c = (x - r)(x^2 + rx + q) = x^3 + (q - r^2)x - rq$$

에서 계수를 비교하면 (x^2항은 저절로 소거된다) $q = r^2 - 3b$이어야 한다. 전개하면

$$q = u^2 + 2b + \frac{b^2}{u^2} - 3b = u^2 + \frac{b^2}{u^2} - b,$$

이므로 나머지 두 근은

$$x^2 + \left(u + \frac{b}{u}\right)x + u^2 + \frac{b^2}{u^2} - b = 0,$$

을 만족하며, 이것이 보이려던 것이다. (일관성 검사로, 상수항도 일치한다. $rq = u^3 + b^3/u^3$이고, 분모를 유리화하면 $b^3/u^3 = b^3/(c + \sqrt{c^2 - b^3}) = c - \sqrt{c^2 - b^3}$이므로 $rq = 2c$이다.)

이차방정식을 풀기 위해 $v = b/u$라 쓰면 $uv = b$이고 이차방정식은

$$x^2 + (u + v)x + (u^2 - uv + v^2) = 0.$$

이 된다. 이제 $\omega^3 = 1$이고 $1 + \omega + \omega^2 = 0$이다. $x_1 = \omega u + \omega^2 v$와 $x_2 = \omega^2 u + \omega v$를 시험해 보면

$$x_1 + x_2 = (\omega + \omega^2)(u + v) = -(u + v),$$
$$x_1 x_2 = \omega^3 u^2 + \omega^2 uv + \omega^4 uv + \omega^3 v^2 = u^2 + (\omega^2 + \omega)uv + v^2 = u^2 - uv + v^2.$$

이다. 이것들은 이차방정식의 두 근의 합과 곱이므로, 그 근은

$$x = \omega u + \omega^2 \frac{b}{u} \qquad \text{그리고} \qquad x = \omega^2 u + \omega \frac{b}{u}.$$

이다. $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$이고 $\omega^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$이므로, 이 근들은 $-\frac{1}{2}(u + \frac{b}{u}) \pm \frac{\sqrt{3}}{2}(u - \frac{b}{u})\mathrm{i}$로도 쓸 수 있다.

$x^3 - 6x = 6$ **풀기**

이것은 $b = 2$, $c = 3$인 $x^3 - 3bx = 2c$이고, $c^2 = 9 \geq 8 = b^3 > 0$이므로 위의 결과를 적용할 수 있다. 여기서

$$u = \left(3 + \sqrt{9 - 8}\right)^{1/3} = 4^{1/3} = 2^{2/3}, \qquad \frac{b}{u} = \frac{2}{2^{2/3}} = 2^{1/3}.$$

이다. 따라서 근은

$$x = 2^{2/3} + 2^{1/3}, \qquad x = -\tfrac{1}{2}(2^{2/3} + 2^{1/3}) \pm \tfrac{\sqrt{3}}{2}(2^{2/3} - 2^{1/3})\mathrm{i},$$

이며, 복소수 근의 쌍은 $\omega\, 2^{2/3} + \omega^2\, 2^{1/3}$과 그 켤레복소수이다.

검산

- 실 근 은 $2^{2/3} + 2^{1/3} \approx 2.847322$이 고, $2.847322^3 - 6(2.847322) \approx 23.083930 - 17.083932 \approx 6.0000$이다.
- (x^2항이 없으므로) 세 근의 합은 0이어야 한다: $(u + v) - (u + v) = 0$. 세 근의 곱은 6이어야 한다: $r(u^2 - uv + v^2) = u^3 + v^3 = 4 + 2 = 6$.

- $c^2 = b^3$이면 $u = \sqrt{b} = b/u$이고, 두 복소수 근은 모두 $-\sqrt{b}$가 되어 중근이 된다. 이는 $x^3 - 3bx - 2b^{3/2} = (x - 2\sqrt{b})(x + \sqrt{b})^2$으로 확인할 수 있다.

흔한 실수

- $\cosh T \geq 1$임을 잊는 것. 쌍곡선함수를 이용한 논법은 $c > 0$일 때에만 바로 적용되며, $c < 0$인 경우에는 $x \to -x$ 치환이 필요하다.
- 복소수 근을 $\omega u + \omega \frac{b}{u}$로 쓰는 것. 두 세제곱근의 곱은 계속 b와 같아야 하므로, ω의 거듭제곱끼리 곱하면 1이 되어야 한다.

STEP 너머

이것은 삼차방정식에 대한 카르다노(Cardano)의 공식이며, u^3이 어떤 이차방정식의 근일 때 $u + b/u$로 나타내는 이 꼴은 16세기에 이 공식이 처음 발견된 방식이기도 하다. $c^2 < b^3$이면 세 근이 모두 실수인데도 제곱근 안이 음수가 되며("환원 불능의 경우(irreducible case)"), 이때는 삼각함수 버전인 $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$가 그 역할을 대신한다. 일반적인 오차방정식에 대해서는 왜 이런 종류의 공식이 존재하지 않는지는 갈루아 이론(Galois theory)이 들려주는 이야기이다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)가 좋은 입문서이다.

풀이

STEP III 2005, 문제 7

순수수학 • 치환적분

STEP III 2005, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/05-s3-q7

핵심 아이디어

처음 결과가 말하는 것은, 피적분함수(integrand) 밖에 $\frac{1}{x}$이라는 인수가 따로 하나 있기만 하면 피적분함수 안에 숨어 있는 x^m을 하나의 새 변수 $u = x^m$으로 다룰 수 있다는 것이다. 따라서 각 적분마다 분모에서 x를 인수로 묶어 내고, 남은 거듭제곱 x^m과 함수 f가 무엇인지 읽어 낸 다음, 훨씬 쉬운 u에 대한 적분을 대신 계산하면 된다.

풀이

일반적인 결과

$\mathrm{F}'(u) = \dfrac{1}{u\,\mathrm{f}(u)}$라고 주어져 있다. 연쇄법칙(chain rule)으로 $\mathrm{F}(x^m)$을 미분하면($x > 0$이라 하자. 그래야 임의의 실수 m에 대해 x^m이 의미를 가진다)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{F}(x^m) = \mathrm{F}'(x^m)\cdot m x^{m-1} = \frac{m x^{m-1}}{x^m\,\mathrm{f}(x^m)} = \frac{m}{x\,\mathrm{f}(x^m)}.$$

따라서 $\mathrm{F}(x^m)$은 $\dfrac{m}{x\,\mathrm{f}(x^m)}$의 부정적분(antiderivative)이고, 이것이 바로 구하려던 결과이다.

$$\int \frac{m}{x\,\mathrm{f}(x^m)}\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(x^m) + c.$$

같은 말이지만, 이것은 치환 $u = x^m$, $\mathrm{d}u = m x^{m-1}\,\mathrm{d}x$를 거꾸로 읽은 것이다. 아래에서는 m으로 나누게 되므로 조건 $m \neq 0$이 중요하다.

실제로는 다음 꼴로 사용한다.

$$\int \frac{1}{x\,\mathrm{f}(x^m)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{m}\,\mathrm{F}(x^m) + c. \qquad (*)$$

소문항 (i)

x를 인수로 묶어 내면

$$\frac{1}{x^n - x} = \frac{1}{x\,(x^{n-1} - 1)}.$$

이것은 $m = n - 1$, $\mathrm{f}(u) = u - 1$인 $(*)$의 꼴이다. $n \neq 1$이어야 한다. $n = 1$이면 분모 $x^n - x$가 항상 0이 되어 구할 적분이 없다.

이제 $\dfrac{1}{u(u-1)}$의 부정적분 F가 필요하다. 부분분수(partial fractions)로 분해하면

$$\frac{1}{u(u-1)} = \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u}, \qquad \text{따라서} \qquad \mathrm{F}(u) = \ln|u-1| - \ln|u| = \ln\left|\frac{u-1}{u}\right|.$$

$(*)$에 $u = x^{n-1}$을 대입하면

$$\boxed{\int \frac{1}{x^n - x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n-1}\ln\left|\frac{x^{n-1}-1}{x^{n-1}}\right| + c, \qquad n \neq 1.}$$

절댓값 기호 덕분에 이 식은 피적분함수가 정의되는 어느 구간에서나 성립한다(예를 들어 $x > 1$뿐 아니라 $0 < x < 1$에서도 성립하고, n이 정수이면 $x < 0$에서도 성립한다).

소문항 (ii)

여기서는 제곱근 밖으로 x를 꺼낼 때 조금 조심해야 한다. 모든 n에 대해 x^n이 정의되고 $\sqrt{x^2} = x$가 되도록 $x > 0$에서 생각한다. 그러면

$$\sqrt{x^n + x^2} = \sqrt{x^2\,(x^{n-2} + 1)} = x\sqrt{1 + x^{n-2}},$$

이므로 피적분함수는

$$\frac{1}{x\sqrt{1 + x^{n-2}}},$$

이고, 이것은 $m = n - 2$, $\mathrm{f}(u) = \sqrt{1+u}$인 $(*)$의 꼴이다.

? 생각해 보기 $n = 2$이면 어떻게 되는가?

이때는 $m = 0$이므로 일반적인 결과를 적용할 수 없다. 하지만 이 적분은 직접 쉽게 계산된다. 피적분함수가 $\dfrac{1}{\sqrt{2x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\,x}$이므로

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln x + c \qquad (n = 2).$$

$n \neq 2$이면 $\mathrm{F}(u) = \displaystyle\int \frac{1}{u\sqrt{1+u}}\,\mathrm{d}u$가 필요하다. 여기서 $u = x^{n-2} > 0$이다. $t = \sqrt{1+u}$로 치환하면 $u = t^2 - 1$, $\mathrm{d}u = 2t\,\mathrm{d}t$이고 $t > 1$이다.

$$\int \frac{1}{u\sqrt{1+u}}\,\mathrm{d}u = \int \frac{2t}{(t^2-1)\,t}\,\mathrm{d}t = \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = \ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right),$$

$t > 1$이므로 절댓값은 필요 없다. 이 식은 깔끔하게 정리된다. 분자와 분모에 $t-1$을 곱하고 $t^2 - 1 = u$를 이용하면

$$\frac{t-1}{t+1} = \frac{(t-1)^2}{t^2-1} = \frac{\left(\sqrt{1+u}-1\right)^2}{u}, \qquad \text{따라서} \qquad \mathrm{F}(u) = 2\ln\left(\sqrt{1+u}-1\right) - \ln u.$$

이제 $m = n-2$로 두고 $(*)$에 $u = x^{n-2}$를 대입한다. 항 $-\ln u$는 $-(n-2)\ln x$가 되고, $m = n-2$로 나누면 $-\ln x$가 된다.

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{x^n + x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n-2}\ln\left(\sqrt{1+x^{n-2}}-1\right) - \ln x + c, \qquad n \neq 2,\ x > 0.}$$

같은 답을 $\dfrac{1}{n-2}\ln\left(\dfrac{\sqrt{1+x^{n-2}}-1}{\sqrt{1+x^{n-2}}+1}\right) + c$로 쓸 수도 있으며, 어느 꼴로 써도 좋다.

검산

- 답을 다시 미분해 본다. (i)에서 $n = 2$이면 공식은 $\ln|x-1| - \ln|x|$를 주고, 그 도함수는 $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2-x}$로 예상대로이다.
- (i)에서 $n = 3$이면 공식은 $\displaystyle\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^3-x} = \frac{1}{2}\ln\frac{32}{27} \approx 0.084950$을 주며, 이는 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 구한 값과 일치한다.
- (ii)에서 $n = 3$이면 공식은 $\displaystyle\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+x^2}} = \ln\frac{3+2\sqrt{2}}{3} \approx 0.664135$를 주며, 이 역시 수치적분 결과와 일치한다. 또한 음수와 정수가 아닌 값을 포함한 여러 n에 대해 두 공식을 모두 확인하였다.

흔한 실수

- 인수 $\frac{1}{m}$을 빠뜨리는 것. 일반적인 결과에는 분자에 m이 있지만 우리 피적분함수에는 없으므로 m으로 나누어야 한다.
- 아무 설명 없이 $\sqrt{x^2} = x$라고 쓰는 것. 이것은 $x \geq 0$일 때만 참이다. $x < 0$이면 $-x$이다(또는 $|x|$이다).
- $m = 0$이 되는 예외적인 값, 즉 (i)의 $n = 1$과 (ii)의 $n = 2$를 놓치는 것.

STEP 너머

처음 결과는 치환적분법(substitution rule)을 반대쪽에서 본 것이다. 치환은 연쇄법칙을 거꾸로 적용한 것일 뿐이며, 대학의 첫 해석학(analysis) 강의에서도 관련된 함수들에 대

한 조건을 신중하게 갖추어 바로 그렇게 증명한다. (ii)처럼 다항식의 제곱근이 들어 있는 적분은, 도대체 어떤 적분이 초등함수(elementary functions)로 계산될 수 있는가 하는 질문으로 이어진다. 예를 들어 $\int \mathrm{d}x/\sqrt{1+x^4}$는 초등함수로 계산할 수 없다. 미적분학의 기본정리(fundamental theorem of calculus)와 치환적분을 엄밀하게 다룬 책으로는 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 참고하라.

풀이

STEP III 2005, 문제 8

순수수학 • 복소수와 원

> **STEP III 2005, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/05-s3-q8

핵심 아이디어

아르강 평면(Argand diagram)의 모든 길이는 $|z|^2 = zz^*$를 이용해 대수식으로 바꿀 수 있다. 첫 번째 항등식을 얻고 나면 직각은 피타고라스(Pythagoras) 정리가 되고, 접선(tangent)은 접선과 반지름(radius) 사이의 직각이 된다. 따라서 "OA가 원에 접한다"는 조건은 하나의 방정식으로 바뀌고, 이 방정식이 반지름의 제곱을 $cc^* - aa^*$로 정해 준다. 그 다음에는 "P가 원 위에 있다"와 "P'이 원 위에 있다"가 모두 같은 방정식으로 귀결된다.

풀이

항등식과 직각

$|z|^2 = zz^*$이고 켤레(conjugation)는 뺄셈을 보존하므로

$$\begin{aligned} |a-c|^2 &= (a-c)(a-c)^* = (a-c)(a^*-c^*) \\ &= aa^* + cc^* - ac^* - ca^*, \end{aligned}$$

이 되어 요구된 식이 성립한다.

삼각형 OAC의 변의 길이는 $OA = |a|$, $OC = |c|$, $AC = |a-c|$이고, a, c가 0이 아니고 서로 다르므로 모두 0이 아니다. 피타고라스 정리와 그 역(converse)에 의해, A에서의 각이 직각일 필요충분조건(if and only if)은 $OC^2 = OA^2 + AC^2$, 즉

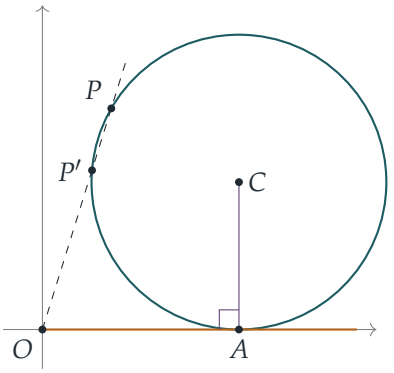
$$cc^* = aa^* + \left(aa^* + cc^* - ac^* - ca^*\right) \iff 2aa^* = ac^* + ca^*.$$

이다. 여기서 모든 단계는 거꾸로도 성립하므로 "필요충분조건"이 성립한다.

(피타고라스 정리의 역은 퇴화된 "삼각형"의 경우도 배제해 준다. O, A, C가 한 직선 위에

있다면 세 길이 중 하나가 나머지 둘의 합과 같아야 하는데, 세 길이가 모두 양수일 때 이는 $OC^2 = OA^2 + AC^2$와 동시에 일어날 수 없다.)

접하는 원



접선은 접점에서 반지름과 수직이다. 따라서 OA가 A에서 접한다는 것은 각 OAC가 직각이라는 뜻이고, 앞부분에 의해

$$2aa^* = ac^* + ca^*. \qquad (*)$$

이다. $(*)$를 이용하면 반지름 r은 $r^2 = |a-c|^2 = aa^* + cc^* - (ac^* + ca^*) = cc^* - aa^*$를 만족한다. (이것은 다시 피타고라스 정리 $r^2 = OC^2 - OA^2$일 뿐이다.)

$k = bb^* > 0, s = abc^* + a^*b^*c$라 두자. 그러면

$$|ab-c|^2 = (ab-c)(a^*b^* - c^*) = aa^*k - s + cc^*,$$
$$\left|\frac{a}{b^*} - c\right|^2 = \left(\frac{a}{b^*} - c\right)\left(\frac{a^*}{b} - c^*\right) = \frac{aa^*}{k} - \frac{ac^*}{b^*} - \frac{a^*c}{b} + cc^*.$$

이다. 두 번째 식에 $k = bb^*$를 곱하면

$$k\left|\frac{a}{b^*} - c\right|^2 = aa^* - s + k\,cc^*. \qquad (**)$$

를 얻는다.

P가 원 위에 있을 조건. $|ab-c|^2 = cc^* - aa^*$가 성립할 필요충분조건은

$$aa^*k - s + cc^* = cc^* - aa^* \iff aa^*(k+1) = s.$$

이다.

P'이 원 위에 있을 조건. $|a/b^* - c|^2 = cc^* - aa^*$가 성립할 필요충분조건은 ($k \neq 0$을 곱하고 $(**)$를 이용하면)

$$aa^* - s + k\,cc^* = k\,cc^* - k\,aa^* \iff aa^*(k+1) = s.$$

이다. 두 조건이 똑같으므로, P가 원 위에 있을 필요충분조건은 P'이 원 위에 있는 것이다.

역

이제 접한다는 가정을 버리자. 원의 중심이 C이고 원이 A를 지난다고 하면 $r^2 = |a-c|^2 = aa^* + cc^* - ac^* - ca^*$이다. 또 $k = bb^* \neq 1$일 때 ab와 a/b^*가 모두 이 원 위에 있다고 하자. 같은 전개식을 쓰면

$$aa^*k - s + cc^* = r^2,$$
$$aa^* - s + k\,cc^* = kr^2 \qquad ((**)\text{에서}).$$

이다. 첫 번째 식에서 두 번째 식을 빼면 s가 소거된다.

$$(k-1)\,aa^* - (k-1)\,cc^* = (1-k)\,r^2.$$

? 생각해 보기 문제에서 왜 굳이 $bb^* \neq 1$을 요구할까?

$bb^* = 1$이면 $b^* = 1/b$이므로 $a/b^* = ab$가 되어 두 점이 일치한다. 그러면 "두 점이 모두 원 위에 있다"는 것은 하나의 조건일 뿐이고, 이것만으로는 당연히 접한다는 결론이 나오지 않는다. 우리의 계산에서는 바로 $k-1 \neq 0$으로 나누는 단계가 이에 해당한다.

$$r^2 = cc^* - aa^*.$$

이것을 $r^2 = aa^* + cc^* - ac^* - ca^*$와 비교하면 $2aa^* = ac^* + ca^*$를 얻는다. 앞부분에 의해 각 OAC는 직각이다. 따라서 OA는 원 위의 점 A에서 반지름 CA와 수직이고, 이는 OA가 원의 접선이라는 뜻이다.

검산

- 이 결과 뒤에는 깔끔한 기하학적 이유가 있다. $\dfrac{a}{b^*} = \dfrac{ab}{bb^*}$이므로 점 P'은 P를 양의 실수 $1/|b|^2$배 한 것이다. 따라서 O, P, P'은 한 직선 위에 있고 $OP \cdot OP' = |a|^2 = OA^2$인데, 이것이 바로 접선–할선 정리(tangent–secant theorem)이다(그림 참고).
- 수치로 확인해 보자. $a = 2$, $c = 2 + 1.5\mathrm{i}$로 두고(따라서 $r^2 = 2.25 = |c|^2 - |a|^2$), 원 위의 점 $P = 0.701 + 2.25\mathrm{i}$를 잡는다. 그러면 $b = P/2$이고 $P' = a/b^* \approx 0.505 + 1.620\mathrm{i}$이며, $|P' - c|^2 \approx 2.250$이다.
- 컴퓨터로 임의의 a, b, c에 대해 항등식과 접하는 경우를 확인했다. 또 $|b| \neq 1$인 접하지 않는 임의의 원 1000개를 확인했는데, 모든 경우에 P가 원 위에 있으면 P'은 원 위에 있지 않았다.

흔한 실수

- $(a-c)^* = a^* - c^*$는 올바르게 써 놓고 $|a-c|^2$을 $(a-c)^2$으로 전개하는 실수. 절댓값(modulus)의 제곱에는 켤레가 필요하다.
- 역을 증명할 때 처음부터 접한다고(따라서 $r^2 = cc^* - aa^*$라고) 가정하는 실수. 그것이 바로 증명해야 할 내용이다. $r = |a-c|$에서만 출발해야 한다.
- $1 - bb^*$가 왜 0이 아닌지 말하지 않고 그것으로 나누는 실수.

STEP 너머

$|a|^2/(ab)^* = aa^*/(a^*b^*) = a/b^*$이므로 점 P'은 사상 $z \mapsto |a|^2/z^*$에 의한 P의 상이다. 이 사상은 원 $|z| = |a|$에 대한 **반전**(*inversion*)이다. 즉 각 점을 O에서 나가는 같은 반직선 위에서 거리가 $|a|^2/OP$인 점으로 보낸다. 이 문제는 반전의 원과 직교하는(orthogonal) 원이 자기 자신으로 옮겨진다는 것을 보여 준다. 반전과 반전이 생성하는 뫼비우스 변환(Möbius transformations)은 대학 1학년 복소해석(complex analysis)과 기하학의 핵심 주제이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석)에는 이 주제를 한 장에 걸쳐 다룬 아름다운 설명이 있다.

풀이

STEP III 2005, 문제 9

역학 • 충돌과 반발계수

STEP III 2005, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

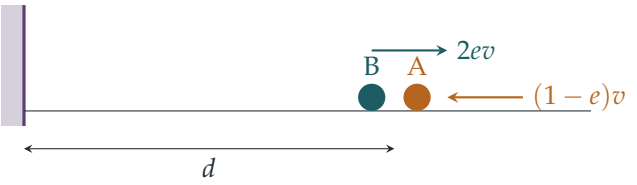
step.maths.org/questions/05-s3-q9

핵심 아이디어

질량이 이상해 보이지만, 첫 번째 충돌(collision)에서 아주 깔끔한 답이 나오도록 골라 둔 값이다. 두 번째 충돌까지 구했으면, 그 직전의 속도를 첫 번째 충돌 직전의 속도와 비교해 보자. 두 속도는 같은 꼴이고, 다만 각각 e가 곱해져 있을 뿐이다. 충돌 법칙은 속도에 대해 선형(linear)이므로, 그다음부터는 전체 과정이 더 작은 규모로 되풀이된다. 이것으로 이후의 모든 충돌이 한꺼번에 해결된다.

풀이

A와 B를 매끄러운 수평선 위의 입자(particle)로 모형화하고, 각 충돌마다 뉴턴(Newton)의 실험 법칙(experimental law)을 적용한다. **벽을 향하는** 방향을 양의 방향으로 잡고, 거리는 벽에서부터 잰다.



(그림은 첫 번째 충돌 직전의 순간을 나타내며, 두 입자를 약간 떨어뜨려 그렸다.)

첫 번째 충돌

충돌 후 A와 B의 (벽을 향하는) 속도(velocity)를 각각 v_A, v_B라 하자. 충돌 전 A의 속도는 $(1-e)v$이고 B의 속도는 $-2ev$이다.

운동량 보존(conservation of momentum)에 의해

$$\begin{aligned} 4em\,v_A + (1-e)^2 m\,v_B &= 4em(1-e)v - (1-e)^2 m\cdot 2ev \\ &= 2e(1-e)v\big[2-(1-e)\big]m = 2e(1-e)(1+e)v\,m. \end{aligned}$$

접근 속력(speed of approach)은 $(1-e)v + 2ev = (1+e)v$이므로, 뉴턴의 법칙에 의해

$$v_B - v_A = e(1+e)v.$$

$v_B = v_A + e(1+e)v$를 운동량 방정식에 대입하고 m으로 나누면

$$\big[4e + (1-e)^2\big]v_A = 2e(1-e)(1+e)v - (1-e)^2 e(1+e)v = e(1-e)(1+e)v\big[2-(1-e)\big].$$

$4e + (1-e)^2 = (1+e)^2$이므로 우변은 $e(1-e)(1+e)^2 v$이고, 따라서

$$v_A = e(1-e)v, \qquad v_B = e(1-e)v + e(1+e)v = 2ev.$$

둘 다 양수이다. 즉 충돌 후 **A는 속력 $e(1-e)v$로 벽을 향해 움직이고, B는 속력 $2ev$로 벽을 향해 움직인다**.

두 번째 충돌

B가 더 빠르므로 A보다 앞서 나가 시간 $t_1 = d/(2ev)$ 후에 벽에 도달한다. 그동안 A는 $e(1-e)v\cdot\frac{d}{2ev} = \frac{1}{2}(1-e)d$만큼 움직이므로, A는 벽으로부터 거리

$$d - \tfrac{1}{2}(1-e)d = \tfrac{1}{2}(1+e)d$$

인 곳에 있다. B는 속력 $e\cdot 2ev = 2e^2 v$로 튕겨 나와 이제 벽에서 멀어지는 방향으로 움직이고, A는 여전히 속력 $e(1-e)v$로 벽을 향해 움직인다. 두 입자는 서로 가까워지고 있으며, 가까워지는 속력은 $e(1-e)v + 2e^2 v = e(1+e)v > 0$이므로 반드시 다시 만난다(B가 둘 사이에 있으므로 A가 벽에 닿기 전에 만난다). 여기에 걸리는 시간은

$$t_2 = \frac{\frac{1}{2}(1+e)d}{e(1+e)v} = \frac{d}{2ev},$$

이고, 그동안 B는 벽에서부터 $2e^2 v\cdot\frac{d}{2ev} = ed$만큼 움직인다. 따라서 문제에서 요구한 대로 **두 번째 충돌은 벽으로부터 거리 de인 곳에서 일어난다**.

이후의 충돌

> **생각해 보기** 모든 계산을 다시 하지 않고, 충돌이 더 일어난다는 것을 어떻게 이끌어 낼 수 있을까?

두 번째 충돌 직전의 상태를 보자. A는 속력 $e(1-e)v$로 벽을 향해 움직이고, B는 속력 $2e^2v = 2e(ev)$로 벽에서 멀어진다. 이것은 처음 상태에서 v를 ev로, d를 de로 바꾼 것과 정확히 같다(질량과 e는 그대로이다). 위에서 한 모든 논의는 임의의 $v > 0, d > 0$에 대해 성립하므로, (v, d) 대신 (ev, de)를 넣어 같은 논증을 적용할 수 있다. 그러면 세 번째 충돌이 거리 $(de)e = de^2$인 곳에서 일어나고, 그 직전의 상태는 처음 상태에서 (e^2v, de^2)를 넣은 것이 된다. 수학적 귀납법(induction)에 의해 모든 n에 대해 $(n+1)$번째 충돌이 일어나므로, 충돌은 끝없이 계속된다.

n번째 충돌 직전의 상태는 처음 상태에서 v와 d를 각각 $e^{n-1}v$와 de^{n-1}로 바꾼 것이므로

$$n\text{번째 충돌은 벽으로부터 거리} de^{n-1}\text{인 곳에서 일어난다.}$$

두 번째 부분에서 한 충돌에서 다음 충돌까지 걸리는 시간은 $t_1 + t_2 = d/(ev)$이었다. n번째 충돌에서 시작하면 이 값은

$$\frac{de^{n-1}}{e \cdot e^{n-1}v} = \frac{d}{ev},$$

가 되어 n에 의존하지 않는다. 따라서 연속한 충돌 사이의 시간 간격은 모두 $d/(ev)$로 같다. 한 주기마다 거리와 속력이 모두 e배로 줄어들고, 이 두 효과가 시간에서는 서로 상쇄된다.

검산

- 첫 번째 충돌에서의 운동량: $e = \frac{1}{2}$, $m = v = 1$이면 질량은 2와 $\frac{1}{4}$이다. 충돌 전에는 $2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{3}{4}$이고, 충돌 후에는 $2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{3}{4}$이다. 상대 속력은 $\frac{3}{2}$에서 $\frac{3}{4}$로, e배가 된다.
- e, v, d, m을 무작위로 200가지 골라 각각 충돌 여덟 번씩 운동을 (분수로) 정확히 시뮬레이션했다. 모든 충돌이 de^{n-1}에서 일어났고 간격은 모두 $d/(ev)$였다. $e = \frac{1}{2}$, $v = d = 1$이면 충돌은 시각 $0, 2, 4, 6$에, 거리 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$에서 일어난다.

흔한 실수

- 부호를 혼동하는 것: B는 처음에 벽에서 **멀어지는** 방향으로 움직이므로, 우리의 규약에서 처음 속도는 음수이다.
- 벽과의 충돌에도 반발 계수 e가 적용된다는 것을 잊는 것: B는 $2ev$가 아니라 속력 $2e^2v$로 벽을 떠난다.
- 규모가 바뀌는 구조(scaling)를 알아차리지 못하고 두 번째 충돌을 무작정 다시 계산하는 것: 그렇게 해도 되지만 훨씬 길고, 규칙성을 놓치기 쉽다.

STEP 너머

여기서의 추론은 선형성과 **자기 유사성**(*self-similarity*)을 이용한다. 모든 속도에 같은 상수를 곱해도 충돌의 방정식은 변하지 않으므로, 규모만 다를 뿐 자기 자신을 재현하는 상태는 끝없이 되풀이된다. 무한히 많이 튀어 오르는 공의 분석, 그리고 더 일반적으로 차원 해석(dimensional analysis)의 바탕에도 같은 생각이 깔려 있다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 충돌과 운동량을 이런 식으로 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP III 2005, 문제 10

역학 • 고무줄과 마찰

STEP III 2005, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/05-s3-q10

핵심 아이디어

모든 것은 하나의 변수, 즉 두 중심 사이의 거리 d에 달려 있다. 밴드의 길이는 d로 정해지므로, 밴드의 장력(tension)과 저장된 에너지는 d의 간단한 함수이다. 여기서 출발하여 에너지(마찰(friction)이 한 일에 맞서는 탄성 에너지(elastic energy))를 보면 원판이 어디서 멈추는지 알 수 있고, 밴드가 당기는 힘을 한계 마찰력(limiting friction)과 비교하면 원판이 멈춘 채로 있는지 알 수 있다.

풀이

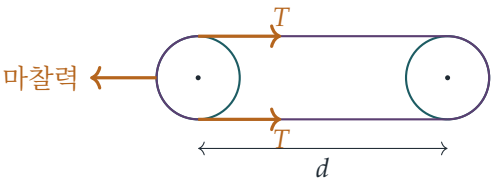
원판은 서로 같고, 밴드는 가볍고 탄성이 있으며 매끄럽게 접촉하고, 원판이 미끄러질 때마다 마찰력의 크기는 μmg라고 모형화한다. 대칭(symmetry)에 의해 두 원판은 항상 반대 방향으로 같은 거리만큼 움직이므로, 밴드의 직선 부분은 계속 평행을 유지한다.

d의 함수로 본 밴드. 두 중심이 거리 d만큼 떨어져 있을 때, 밴드는 각 원판을 반 바퀴씩 감고 길이가 d인 두 직선 부분을 따라 이어진다. 따라서 밴드의 길이는 $2\pi r + 2d$이고 늘어난 길이(extension)는 $x = 2d$이다. 탄성 계수(modulus) $\lambda = \frac{\pi mg}{12}$와 자연 길이(natural length) $2\pi r$에 대하여 훅의 법칙(Hooke's law)을 적용하면

$$T = \frac{\lambda x}{2\pi r} = \frac{\pi mg}{12} \cdot \frac{2d}{2\pi r} = \frac{mg\,d}{12r}, \qquad E = \frac{\lambda x^2}{2 \cdot 2\pi r} = \frac{mg\,d^2}{12r}.$$

접촉이 매끄러우므로 장력은 밴드 전체에서 같다. 각 원판은 두 직선 부분에 의해 당겨지는데, 두 부분 모두 중심선에 평행하고 다른 원판 쪽을 향한다. 따라서 각 원판을 당기는 합력(resultant)은

$$P = 2T = \frac{mg\,d}{6r}.$$



위에서 내려다본 이 그림은 왼쪽 원판이 다른 원판 쪽으로 미끄러지는 동안 그 원판에 작용하는 수평 방향의 힘을 나타낸다. 원판의 무게와 수직항력(normal reaction)은 수직 방향이며 서로 상쇄된다.

놓는 순간 $d = 6r$이므로 $E_0 = 3mgr$이고 $P = mg$이다. 접촉하는 순간 $d = 2r$이므로 $E = \frac{1}{3}mgr$이다.

원판이 가까워지는 동안의 에너지. 원판이 $d = 6r$에서 안쪽으로 움직이는 동안, 각 원판은 마찰력 μmg에 맞서 거리 $\frac{1}{2}(6r - d)$만큼 움직인다. 따라서 마찰력에 맞서 한 전체 일은 $\mu mg(6r - d)$이다. 그러므로 전체 운동 에너지(kinetic energy)는

$$\begin{aligned} K(d) &= 3mgr - \frac{mg\,d^2}{12r} - \mu mg(6r - d) \\ &= mg\,(6r - d)\left(\frac{6r + d}{12r} - \mu\right), \end{aligned}$$

이다. 여기서 $3r - \frac{d^2}{12r} = \frac{(6r-d)(6r+d)}{12r}$를 이용하였다.

소문항 (i)

출발. 놓는 순간 각 원판을 당기는 힘은 $P = mg$이고, 마찰력은 최대 μmg까지 작용할 수 있다. 따라서 원판은 정확히 $mg > \mu mg$일 때, 즉 $\mu < 1$일 때 미끄러지기 시작한다.

정지. $\mu < 1$이라 하자. $d < 6r$에서 $K(d)$는 $\frac{6r+d}{12r} = \mu$인 곳에서만 0이 되며, 그곳은

$$d^* = 12\mu r - 6r.$$

이다. d가 $6r$에서 감소할 때 두 번째 인수 $\frac{6r+d}{12r} - \mu$는 $1 - \mu > 0$에서 출발하여 감소하므로, d가 d^*에 이를 때까지 $K > 0$이다. 원판이 충돌하기 전에 멈추는 것은 접촉하기 전에 d^*에 도달할 때, 즉 $2r < d^* < 6r$일 때와 정확히 같다.

$$8r < 12\mu r < 12r \iff \frac{2}{3} < \mu < 1.$$

$\mu \le \frac{2}{3}$이면 $K(2r) \ge 0$이므로 원판이 먼저 서로 닿는다. ($\mu = \frac{2}{3}$일 때는 속력 0으로 막 닿으며 도착하는데, 이는 "충돌하기 전"이 아니다.)

생각해 보기 원판이 d^*에서 멈춘 뒤, 밴드가 원판을 다시 움직이게 할 수 있을까?

d^*에서 당기는 힘은 $P = \frac{mg\,d^*}{6r} = (2\mu - 1)mg$이다. $\mu < 1$이므로 이 값은 한계 마찰력 μmg보다 작다. 따라서 정지 마찰(static friction)이 원판을 붙잡아 원판은 정지한 채로 있다. 두 조건을 합하면, 원판이 미끄러지기 시작하되 충돌하기 전에 멈출 필요충분조건은 $\frac{2}{3} < \mu < 1$이다. ■

소문항 (ii)

원판이 적어도 한 번 충돌한다면, 원판은 가까워지는 공식이 여전히 성립하는 상태에서 안쪽으로 움직이며 처음으로 $d = 2r$에 도달해야 한다. 따라서 첫 충돌 직전의 전체 운동 에너지는

$$K(2r) = mg\,(4r)\left(\frac{8r}{12r} - \mu\right) = 4mgr\left(\tfrac{2}{3} - \mu\right) = \tfrac{4}{3}mgr(2 - 3\mu),$$

이며, 이것이 요구된 결과이다. (이 값은 정확히 $\mu < \frac{2}{3}$일 때 양수이며, 이는 소문항 (i)과 일치한다.)

소문항 (iii)

먼저 $\mu^2 < \frac{4}{9}$이면 $\mu < \frac{2}{3}$이므로, 소문항 (i)과 (ii)에 의해 원판은 실제로 충돌한다. 운동 에너지의 절반을 잃으므로, 원판은 $d = 2r$에서 전체 운동 에너지

$$K_1 = \tfrac{2}{3}mgr(2 - 3\mu).$$

를 가지고 튕겨 나온다. 이제 원판은 서로 멀어진다. 밴드와 마찰력이 모두 다른 원판 쪽으로 작용하므로 각 원판은 감속한다. 거리가 $2r$에서 d로 늘어나는 동안 탄성 에너지는 $\frac{mg(d^2-4r^2)}{12r}$만큼 증가하고 마찰력에 맞서 한 일은 $\mu mg(d - 2r)$이므로

$$K(d) = K_1 - \frac{mg(d^2 - 4r^2)}{12r} - \mu mg(d - 2r).$$

이다. 이 함수는 d에 대해 순감소하므로, 원판이 멈추는 거리 d_1에서 정확히 한 번 0이 된다. $d_1 = 2r + u$로 놓고 $\frac{12r}{mg}$를 곱하면

$$u^2 + 4r(1 + 3\mu)\,u - 8r^2(2 - 3\mu) = 0.$$

이다. 양의 근을 택하고 판별식(discriminant)을 $(1 + 3\mu)^2 + 2(2 - 3\mu) = 9\mu^2 + 5$로 정리하면

$$u = 2r\left(\sqrt{9\mu^2 + 5} - (1 + 3\mu)\right), \qquad d_1 = 2r\left(\sqrt{9\mu^2 + 5} - 3\mu\right).$$

를 얻는다. ($2r < d_1 \le 6r$임을 확인할 수 있으므로, 밴드는 팽팽하게 유지되고 밴드의 에너지 공식도 여전히 적용된다.)

? **생각해 보기** 원판은 d_1에서 순간적으로 정지한다. 원판이 그대로 머무를지는 무엇이 결정할까?

밴드가 당기는 힘이 한계 마찰력을 넘지 않으면 원판은 정지한 채로 있다.

$$\frac{mg\,d_1}{6r} \le \mu mg \iff \sqrt{9\mu^2+5}-3\mu \le 3\mu \iff 9\mu^2+5 \le 36\mu^2 \iff \mu^2 \ge \tfrac{5}{27},$$

여기서 양변이 모두 양수이므로 제곱해도 된다. 따라서 $\frac{5}{27} < \mu^2 < \frac{4}{9}$이면, 원판은 충돌하고 튕겨 나온 뒤 단조롭게 감속하여 d_1에서 멈추고, 그 후 정지 마찰에 의해 영원히 그곳에 붙잡혀 있다. 원판은 첫 충돌 후 정확히 한 번 멈춘다. ■

검산

- $\mu = \frac{2}{3}$에서 소문항 (i)의 정지 위치 $d^* = 12\mu r - 6r$와 소문항 (ii)의 운동 에너지는 모두 "속력 0으로 $d = 2r$에 도착"을 주므로, 두 소문항은 경계에서 일치한다.
- $\mu = 0.5$(소문항 (iii)의 범위 안)일 때: $K(2r) = \frac{2}{3}mgr$, $K_1 = \frac{1}{3}mgr$, $d_1 = 2r(\sqrt{7.25} - 1.5) \approx 2.385r$이다. 그곳에서 당기는 힘은 $\approx 0.397mg < 0.5mg$이므로 원판은 그대로 머문다. 운동을 단계별로 수치 시뮬레이션한 결과 이 모든 것이 재현되었고, 여러 $\mu \in (\frac{2}{3}, 1)$에 대해 정지 위치 $d^* = 12\mu r - 6r$도 재현되었다. $\mu^2 < \frac{5}{27}$(예를 들어 $\mu = 0.42$)일 때는 예측대로 원판이 멈춘 뒤 다시 움직였다.

흔한 실수

- 늘어난 길이를 $2d$가 아니라 d로 잡는 것: 두 직선 부분이 모두 늘어난다.
- 각 원판에 장력을 하나만 쓰는 것: 밴드는 각 원판을 두 가닥으로 당기므로 $2T$가 된다.
- 원판이 일단 멈춘 뒤 정지 상태를 유지하는지 확인하지 않는 것. "속력이 0"인 것과 "영원히 정지"하는 것은 서로 다른 조건이다.

STEP 너머

마찰 때문에 이 문제는 구간별 시스템(piecewise system)이 된다. 운동 방정식(equation of motion)은 속도의 부호가 바뀔 때마다 달라지고, 작용하는 힘이 마찰 임계값보다 작은 곳에서는 "달라붙은" 상태가 나타난다. 이런 시스템(고착–미끄럼 운동(stick–slip motion))은 대학 1학년 동역학에서 위상 평면(phase plane) 방법으로 연구한다. μ가 작으면 에너지 손실을 동반한 반복 충돌이 유한한 시간 안에 무한히 많은 튕김을 만들어 내는데, 이는 생각해 볼 만한 주제이다. 에너지 방법과 마찰에 대해 더 알고 싶다면 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 보라.

풀이

STEP III 2005, 문제 11

역학 • 강체의 평형

STEP III 2005, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/05-s3-q11

핵심 아이디어

축(spindle)과 막대들은 고정된 수평축을 중심으로 회전하는 하나의 강체(rigid body)를 이루므로, 각 하나 θ로 모든 것을 기술할 수 있고 에너지가 자연스러운 도구가 된다. 위치 에너지(potential energy)는 각이 $\frac{2}{3}\pi$씩 차이 나는 세 코사인의 합이다. 이들을 합치면 하나의 식 $A\cos\theta + B\sin\theta$가 되는데, 이는 사실상 하나의 코사인 파동이다. 일단 이 꼴로 쓰고 나면 평형(equilibrium) 위치, 그 안정성(stability), 그리고 꼭대기를 넘어가는 데 필요한 에너지를 모두 바로 읽어 낼 수 있다.

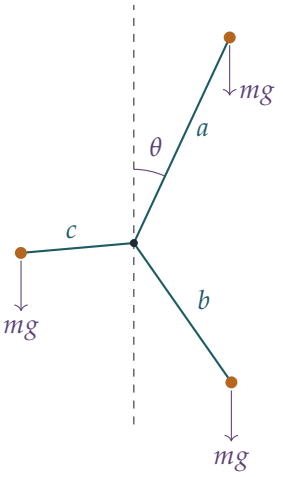
풀이

에너지

입자들을 가벼운 강체 막대 끝에 달린 점질량으로 모형화하고, 베어링은 매끄러워서 에너지 손실이 없다고 하자. 그림처럼 모든 각은 위쪽 연직 방향에서 시계 방향으로 잰다. 그러면 길이가 a, b, c인 막대는 위쪽 연직 방향과 각각 $\theta, \theta + \frac{2}{3}\pi, \theta + \frac{4}{3}\pi$의 각을 이루므로, 입자들은 축보다

$$a\cos\theta, \qquad b\cos\left(\theta + \tfrac{2}{3}\pi\right), \qquad c\cos\left(\theta + \tfrac{4}{3}\pi\right)$$

만큼 높은 곳에 있다.



$\cos\frac{2}{3}\pi = \cos\frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2}$, $\sin\frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{4}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$를 이용하면

$$\cos\left(\theta + \tfrac{2}{3}\pi\right) = -\tfrac{1}{2}\cos\theta - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta, \qquad \cos\left(\theta + \tfrac{4}{3}\pi\right) = -\tfrac{1}{2}\cos\theta + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta.$$

축을 위치 에너지의 기준점으로 잡으면

$$\begin{aligned} V &= mg\left[a\cos\theta + b\cos\left(\theta + \tfrac{2}{3}\pi\right) + c\cos\left(\theta + \tfrac{4}{3}\pi\right)\right] \\ &= mg\left[\tfrac{1}{2}(2a - b - c)\cos\theta - \tfrac{\sqrt{3}}{2}(b - c)\sin\theta\right]. \end{aligned}$$

각 입자는 각속도(angular velocity) $\dot{\theta}$로 축을 중심으로 원운동을 하므로, 속력은 $a\dot{\theta}$, $b\dot{\theta}$, $c\dot{\theta}$이다. 막대는 가벼우므로 전체 에너지는

$$E = \tfrac{1}{2}m\left(a^2 + b^2 + c^2\right)\dot{\theta}^2 + \tfrac{1}{2}mg\left[(2a - b - c)\cos\theta - \sqrt{3}\,(b - c)\sin\theta\right].$$

평형

계는 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}\theta = 0$인 곳에서 평형 상태에 있다. 즉

$$-\tfrac{1}{2}mg\left[(2a - b - c)\sin\theta + \sqrt{3}\,(b - c)\cos\theta\right] = 0.$$

$a > b$이고 $a > c$이므로 $2a - b - c > 0$이다. 따라서 평형 위치에서는 $\cos\theta \neq 0$이다. 만약 $\cos\theta = 0$이면 $\sin\theta = \pm 1$이고 괄호 안은 $\pm(2a - b - c) \neq 0$이 되기 때문이다. $\cos\theta$로 나누면

$$\tan\theta = -\frac{(b - c)\sqrt{3}}{2a - b - c},$$

이므로 요구된 결과를 얻는다. 이 논증은 거꾸로도 성립한다. 이 방정식을 만족하는 모든 θ는 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}\theta = 0$을 만족한다. 따라서 평형 위치는 정확히 이 방정식의 해들이다.

정확히 두 개의 평형 위치와 그 안정성

탄젠트 함수는 주기가 π이고, 정의되는 길이 π의 각 구간에서 모든 실숫값을 정확히 한 번씩 취한다. 따라서 이 방정식은 $0 \le \theta < 2\pi$에서 정확히 두 개의 해를 가지며, 두 해는 π만큼 차이 난다. 이것이 두 평형 위치이다.

안정성을 판단하기 위해 V를 하나의 코사인으로 나타내자.

$$A = \tfrac{1}{2}(2a - b - c), \qquad B = -\tfrac{\sqrt{3}}{2}(b - c),$$

로 두면 $V = mg(A\cos\theta + B\sin\theta)$이다. 그러면

$$\begin{aligned} 4(A^2 + B^2) &= (2a - b - c)^2 + 3(b - c)^2 \\ &= 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 - 4ab - 4bc - 4ca \\ &= 2\left[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\right] = 4R^2, \end{aligned}$$

이므로 $A^2 + B^2 = R^2$이고, 길이들이 서로 다르므로 $R > 0$이다. $\cos\alpha = A/R$, $\sin\alpha = B/R$인 α를 잡자. $A > 0$이고 $B < 0$이므로 $-\frac{1}{2}\pi < \alpha < 0$이다. 그러면

$$V = mgR\cos(\theta - \alpha).$$

두 평형 위치는 $V = mgR$이 최댓값인 $\theta = \alpha$와 $V = -mgR$이 최솟값인 $\theta = \alpha + \pi$이다.

? 생각해 보기 왜 V의 최소가 안정을 뜻하는가?

여기서 $V''(\theta) = -mgR\cos(\theta - \alpha)$이다. $\theta = \alpha + \pi$에서 이 값은 $mgR > 0$이므로, 조금만 변위가 생겨도 위치 에너지가 증가한다. 전체 에너지가 고정되어 있으므로 계는 멀리 벗어날 수 없고, 이 위치를 중심으로 진동한다. $\theta = \alpha$에서는 $V'' = -mgR < 0$이다. 조금만 변위가 생겨도 V가 감소하고 운동 에너지(kinetic energy)가 커져서 계는 멀어진다. 따라서 안정한 평형 위치는 $\theta = \alpha + \pi$, 즉 $\frac{1}{2}\pi < \theta < \pi$이고 $\cos\theta < 0$, $\sin\theta > 0$인 쪽이다. 이 위치에서 가장 긴 막대 a는 수평선 아래를 향하며, 아래쪽 연직 방향과 $|\alpha|$의 각을 이룬다. 다른 평형 위치, 즉 $-\frac{1}{2}\pi < \theta < 0$이고 막대 a가 수평선 위에 있는 위치는 불안정하다.

완전한 회전

베어링이 매끄럽고 중력은 보존력(conservative force)이므로 에너지가 보존된다. $I = m(a^2 + b^2 + c^2)$으로 두면

$$\tfrac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + mgR\cos(\theta - \alpha) = E.$$

완전한 회전을 하려면 계는 모든 각을 지나가야 하고, 특히 V가 최댓값 mgR을 갖는 $\theta = \alpha$를 지나가야 한다. 모든 곳에서 $\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \ge 0$이므로 이를 위해서는 $E \ge mgR$이어야 한다. 계가 $V = -mgR$인 안정한 위치 $\theta = \alpha + \pi$를 지날 때의 각속도를 ω라 하자. 그러면

$E = \frac{1}{2}I\omega^2 - mgR$이고, 조건은

$$\tfrac{1}{2}I\omega^2 - mgR \geq mgR \quad \Longleftrightarrow \quad \omega^2 \geq \frac{4mgR}{I} = \frac{4gR}{a^2+b^2+c^2}.$$

가 된다. 따라서 계는 적어도 $\sqrt{4gR/(a^2+b^2+c^2)}$의 각속도로 안정한 평형 위치를 지나야 하며, 이것이 요구된 결과이다.

(등호가 성립하는 경계의 경우, 계는 불안정한 평형 위치를 향해 점점 느리게 다가가며 무한한 시간이 지나야 그곳에 도달한다. 엄밀히 말하면 완전한 회전을 하려면 ω가 이 값보다 엄밀히 커야 한다. 문제는 필요조건으로서의 경계만을 묻고 있다.)

검산

- $a = b = c$이면 $R = 0$이고 $V \equiv 0$이다. 같은 세 질량은 어떤 위치에서든 균형을 이루고(질량 중심(centre of mass)이 축 위에 있다), 아무리 약하게 돌려도 한 바퀴를 돈다. 이는 경계값이 0으로 가는 것과 일치한다.
- $b = c$이면 탄젠트 조건은 $\tan\theta = 0$이 된다. 대칭성에 의해 긴 막대는 똑바로 위를 향하거나(불안정) 똑바로 아래를 향한다(안정).
- 임의의 길이에 대한 수치 계산으로 V의 꼴, 항등식 $A^2 + B^2 = R^2$, 그리고 평형 위치가 정확히 두 개이며 앞에서 말한 안정성을 가진다는 것을 확인할 수 있다. $a = 3, b = 2, c = 0.5, g = 9.81$일 때 임계 속력은 $2.5406\ \mathrm{rad\,s^{-1}}$이다. 운동 방정식을 수치적으로 따라가 보면, 이 값보다 2% 작으면 계가 되돌아오고 2% 크면 한 바퀴를 완전히 돈다.

흔한 실수

- 막대를 그림과 반대 방향으로 $\theta - \frac{2}{3}\pi$와 $\theta + \frac{2}{3}\pi$에 놓으면 $\sin\theta$ 항의 부호가 바뀌고, 그에 따라 탄젠트 조건의 부호도 바뀐다.
- $\cos\theta = 0$이 평형 위치가 될 수 없으므로 $\cos\theta$로 나누어도 잃는 것이 없다는 점을 언급하지 않고 "해가 두 개"라고 결론짓는 것.
- 운동 에너지를 $\frac{1}{2}m(a+b+c)^2\dot{\theta}^2$ 같은 식으로 쓰는 것. 각 입자는 저마다의 속력 $r\dot{\theta}$를 가지므로 관성 모멘트(moment of inertia)는 $m(a^2+b^2+c^2)$이다.

STEP 너머

이 계는 고정된 축을 중심으로 도는 강체, 즉 복합 진자(compound pendulum)이다. 그 에너지는 관성 모멘트와 질량 중심의 위치에만 의존하는데, 여기서 질량 중심은 축으로

부터 거리 $R/3$에 있다. $\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + V(\theta) = E$를 $(\theta, \dot{\theta})$ 위상 평면(phase plane) 위의 곡선으로 보고, 분리선(separatrix) 안쪽에서는 진동이, 바깥쪽에서는 회전이 일어난다고 보는 관점은 대학 1학년 역학의 핵심 아이디어이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이런 종류의 문제를 위한 강체의 회전과 에너지 방법을 다룬다.

풀이

STEP III 2005, 문제 12

확률과 통계 • 불편추정량의 결합

STEP III 2005, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/05-s3-q12

핵심 아이디어

모든 것은 독립(independent)인 확률변수(random variable)들의 선형결합(linear combination)에 관한 두 가지 사실에 기대고 있다. 기댓값(expectation)은 더해지고, 분산(variance)은 계수의 제곱을 곱하여 더해진다. 실제 랩 타임이 **어떤 값이든** 기댓값이 올바르게 나와야 한다는 조건은 계수 비교(matching coefficients)를 뜻하며, 이로써 각 조건이 상수들에 대한 방정식이 된다. 그러면 X는 경주 시간의 합리적인 추정값(estimate)이 되고, Y는 두 가지 계측 방법 사이의 불일치로부터 미지의 σ를 추정하는 수단이 된다.

풀이

실제 랩 타임을 $\mu_1, \ldots, \mu_4$라 하고, 실제 경주 시간을 $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4$라 하자. 다음과 같이 둔다.

$$S = T_1 + T_2 + T_3 + T_4.$$

그러면 $\mathrm{E}(S) = \mu_1 + \cdots + \mu_4 = \mu$이고, $T_1, \ldots, T_4$가 서로 독립이므로(계측자들이 서로 독립이므로) $\mathrm{Var}(S) = 4\sigma^2$이다. 또한 $\mathrm{E}(T) = \mu$, $\mathrm{Var}(T) = \sigma^2$이며, S는 나머지 네 계측자에만 의존하므로 T는 S와 독립이다.

X 구하기

$X = aT + bS$에 대하여

$$\mathrm{E}(X) = a\mu + b\mu = (a+b)\mu.$$

이 값은 실제 랩 타임이 무엇이든 μ와 같아야 하므로, 특히 어떤 $\mu \neq 0$에 대해서도 그러하다. 따라서

$$a + b = 1.$$

T와 S가 독립이므로

$$\mathrm{Var}(X) = a^2\,\mathrm{Var}(T) + b^2\,\mathrm{Var}(S) = \sigma^2\left(a^2 + 4b^2\right) = \sigma^2\left(a^2 + 4(1-a)^2\right).$$

이차식 $a^2 + 4(1-a)^2 = 5a^2 - 8a + 4$는 최고차항의 계수가 양수이므로, 도함수 $10a - 8$이 0이 되는 $a = \frac{4}{5}$에서 최솟값을 가진다. (완전제곱식(completing the square)으로 나타내면 $5a^2 - 8a + 4 = 5\left(a - \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{4}{5}$이다.) 따라서 $a = \frac{4}{5}$, $b = \frac{1}{5}$이고

$$X = \tfrac{4}{5}T + \tfrac{1}{5}(T_1 + T_2 + T_3 + T_4), \qquad \mathrm{Var}(X) = \tfrac{4}{5}\sigma^2.$$

이는 이치에 맞는다. T는 S보다 네 배 믿을 만하므로(분산이 $4\sigma^2$에 대해 σ^2), 네 배의 가중치를 받는다.

Y 구하기

$Y = cT + dS$에 대하여 $\mathrm{E}(Y^2) = \mathrm{Var}(Y) + \left(\mathrm{E}(Y)\right)^2$을 이용하면

$$\mathrm{E}(Y^2) = \sigma^2(c^2 + 4d^2) + (c+d)^2\mu^2.$$

생각해 보기 실제 랩 타임이 무엇이든 이 값이 어떻게 σ^2과 같을 수 있을까?

상수 c, d는 μ에 의존할 수 없지만, μ는 임의의 양수가 될 수 있다. 이 식은 $\sigma^2(c^2 + 4d^2)$에 μ^2의 상수배를 더한 것이므로, μ가 변해도 σ^2과 같게 유지되려면 μ^2의 계수가 0이 되어야 한다. 즉 $(c+d)^2 = 0$이므로 $d = -c$이다. 그러면 $\sigma^2(c^2 + 4c^2) = \sigma^2$, 곧 $c^2 = \frac{1}{5}$이어야 한다. $c = 1/\sqrt{5}$로 택하면

$$Y = \frac{T - (T_1 + T_2 + T_3 + T_4)}{\sqrt{5}}$$

이다(반대 부호를 택하면 $-Y$가 되는데, Y^2만 중요하므로 이것도 똑같이 성립한다). 따라서 Y는 두 계측값 사이의 불일치를 나타낸다. 그 기댓값은 0이고, 그 제곱은 σ^2의 불편(unbiased) 추정값이다.

주어진 경주의 경우

$T = 220$, $S = 220.5$이면

$$X = \tfrac{4}{5}(220) + \tfrac{1}{5}(220.5) = 176 + 44.1 = 220.1,$$
$$Y = \frac{220 - 220.5}{\sqrt{5}} = -\frac{0.5}{\sqrt{5}}, \qquad Y^2 = \frac{0.25}{5} = 0.05.$$

따라서 $\sigma^2 \approx 0.05$로 추정하며, 이로부터

$$\mathrm{Var}(X) = \tfrac{4}{5}\sigma^2 \approx \tfrac{4}{5}(0.05) = 0.04, \qquad \text{표준편차} X \approx 0.2 \text{ 초}.$$

그러므로 실제 경주 시간의 추정값은 220.1 ± 0.2초이다. 즉 표준편차(standard deviation) 하나만큼 양쪽으로 잡으면, 실제 시간은 대략 구간

$$[219.9,\ 220.3] \text{ 초}$$

안에 있다. 더 높은 신뢰도를 원한다면 표준편차 두 배만큼 양쪽으로 잡아 $[219.7,\ 220.5]$초를 얻을 수 있다. 오차가 정규분포(normal distribution)를 따른다면 이는 약 95% 구간이 된다. 다만 σ^2은 Y^2의 값 하나로부터 추정한 것이므로, 구간의 폭 자체도 대략적인 추정일 뿐임을 염두에 두어야 한다.

검산

- $a = \frac{4}{5}$일 때 $\mathrm{Var}(X) = \frac{4}{5}\sigma^2$은 $\mathrm{Var}(T) = \sigma^2$과 $\mathrm{Var}(S) = 4\sigma^2$보다 모두 작다. 서로 독립인 두 측정값을 결합하면 마땅히 이렇게 되어야 한다.
- $X = 220.1$은 두 측정값 사이에 있으며, 더 믿을 만한 쪽인 $T = 220$에 훨씬 가깝다.
- 200 000회의 경주($\sigma = 0.7$)로 시뮬레이션한 결과, X의 평균은 실제 시간과 0.001 이내로 차이가 났고, $\mathrm{Var}(X) \approx 0.393$으로 $\frac{4}{5}(0.49) = 0.392$와 비슷했으며, Y^2의 평균은 0.491로 $\sigma^2 = 0.49$와 비슷했다.

흔한 실수

- $\mathrm{Var}(S) = \sigma^2$ 또는 $16\sigma^2$으로 잡는 것. 이 값은 독립인 네 분산의 합인 $4\sigma^2$이다.
- $\mathrm{E}(Y^2)$에서 $(\mathrm{E}\,Y)^2$ 항을 빠뜨리는 것. 바로 이 항 때문에 $d = -c$가 된다.
- $\frac{4}{5}$을 곱하지 않고 $Y^2 = 0.05$를 그대로 X의 분산으로 쓰는 것.

STEP 너머

X는 두 추정값의 선형결합 가운데 분산이 최소인 불편 결합이다. 일반적인 규칙은 서로 독립인 각 추정값에 그 분산의 역수만큼 가중치를 주는 것이며, 이는 메타분석(meta-analysis)에서 쓰이는 역분산 가중(inverse-variance weighting)과 최소제곱법(least squares)에 관한 가우스(Gauss)–마르코프(Markov) 정리(Gauss–Markov theorem)의 바탕이 된다. Y^2은 σ^2의 불편 추정량(unbiased estimator)으로, 제수가 $n - 1$인 표본분산(sample variance)과 비슷하다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 합의 기댓값

과 분산을 꼼꼼하게 다루며, 추정량과 신뢰구간(confidence interval)은 대학의 첫 통계학 강의에서 본격적으로 다룬다.

풀이

STEP III 2005, 문제 13

확률과 통계 • 기하분포

> **STEP III 2005, 13번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/05-s3-q13

핵심 아이디어

$w+1$부터 n까지의 카드는 아무 역할도 하지 않는다. 돈을 주지도 않고 게임을 끝내지도 않는다. 따라서 (i)에서는 이 카드들을 그냥 무시하고 $0, 1, \ldots, w$가 나오는 뽑기만 지켜보면 된다. 그런 뽑기 하나하나는 동등하게 가능한 $w+1$개의 수 가운데 하나를 공정하게 고르는 것이고, 그러면 총상금은 기하 확률변수(geometric random variable)가 된다. 뽑기들이 더 이상 독립(independent)이 아닌 (ii)에서는 총상금을 돈을 주는 카드마다 하나씩 대응하는 지시변수(indicator)들의 합으로 쪼개고, 기댓값의 선형성(linearity of expectation)을 이용한다.

풀이

뽑은 카드가 $0, 1, \ldots, w$ 중 하나이면 그 뽑기를 **유효한** 뽑기, $w+1, \ldots, n$ 중 하나이면 **무관한** 뽑기라고 부르자.

소문항 (i)

두 사건의 확률이 같은 이유. 무관한 뽑기는 아무것도 바꾸지 않는다. 참가자는 아무것도 받지 않고 게임은 계속된다. 따라서 참가자의 총상금은 유효한 뽑기들의 순서에만 의존한다. 0이 아닌 유효한 뽑기마다 £1을 받고, 0이 나오는 첫 번째 유효한 뽑기에서 게임이 끝난다. 그러므로 참가자가 정확히 £3을 받는 것은 유효한 뽑기들 가운데 처음 세 번은 0이 아닌 수가 나오고 네 번째에 0이 나오는 경우와 정확히 일치한다. 두 사건은 같은 사건이므로 확률도 같다.

(각 뽑기는 서로 독립적으로 확률 $\frac{w+1}{n+1} > 0$로 유효하므로, 확률 1로 유효한 뽑기가 무한히 많이 일어나고, 특히 첫 번째, 두 번째, 세 번째, 네 번째 유효한 뽑기가 존재한다. 게임은 확

률 1로 끝난다.)

> **생각해 보기** 앞에서 무엇이 나왔든 관계없이, 각 유효한 뽑기에서 $0, 1, \ldots, w$ 중 어느 것이 나올 확률이 모두 같은 이유는 무엇인가?

매번 카드를 되돌려 놓으므로(복원 추출, replacement) 뽑기들은 서로 독립이고, 각각 $\{0, 1, \ldots, n\}$ 위의 균등분포(uniform distribution)를 따른다. 어떤 뽑기가 유효하다는 조건 아래에서 그 뽑기는 $\{0, 1, \ldots, w\}$ 위에서 균등하다. 이 $w+1$개의 결과는 처음부터 동등하게 가능했기 때문이다. 뽑기들이 독립이므로 연속된 유효한 뽑기들의 값도 서로 독립이다. 따라서 각 유효한 뽑기는 다른 뽑기와 독립적으로 확률 $\frac{1}{w+1}$로 0이고 확률 $\frac{w}{w+1}$로 0이 아니다.

그러므로

$$P(\text{상금이 정확히£3}) = \left(\frac{w}{w+1}\right)^3 \cdot \frac{1}{w+1} = \frac{w^3}{(w+1)^4},$$

이고, 이것이 보이려던 것이다.

일반적인 r. 3 대신 r을 넣고 똑같이 논증하면(처음 r번의 유효한 뽑기는 0이 아니고, $(r+1)$번째는 0)

$$P(\text{상금이 정확히£}r) = \frac{w^r}{(w+1)^{r+1}}, \qquad r = 0, 1, 2, \ldots$$

를 얻는다. $q = \frac{w}{w+1}$로 놓으면 이것은 $(1-q)q^r$, 즉 기하분포이다. 이 확률들의 합은 당연히 1이다.

총상금의 기댓값. 총상금(파운드 단위)을 X라 하자. $|q| < 1$일 때 $\sum_{r\geq 0} q^r = \frac{1}{1-q}$를 미분하고 q를 곱하면 $\sum_{r\geq 0} rq^r = \frac{q}{(1-q)^2}$를 얻는다. 따라서

$$E(X) = \sum_{r=0}^{\infty} r(1-q)q^r = (1-q) \cdot \frac{q}{(1-q)^2} = \frac{q}{1-q} = \frac{w/(w+1)}{1/(w+1)} = w.$$

총상금의 기댓값은 £w이다.

소문항 (ii)

이제 카드를 되돌려 놓지 않으므로, 이 게임은 카드 묶음을 섞어 균등하게 무작위인 순서로 만든 다음 0이 나올 때까지 카드를 한 장씩 뒤집는 것과 같다. 참가자는 이 순서에서 카드 0보다 앞에 오는 카드 $1, \ldots, w$ 각각에 대해 £1을 받는다(0보다 앞의 카드는 모두 뽑히고, 뒤의 카드는 하나도 뽑히지 않는다).

$k = 1, \ldots, w$에 대해 카드 k가 카드 0보다 앞에 오면 $I_k = 1$, 그렇지 않으면 $I_k = 0$이라 하자. 총상금은 $Y = I_1 + I_2 + \cdots + I_w$이다.

? 생각해 보기 I_k들은 독립이 아니다. 그것이 문제가 되는가?

그렇지 않다. 합의 기댓값은 종속 관계와 상관없이 기댓값들의 합이다. 따라서 $P(I_k = 1)$만 구하면 된다. 균등하게 무작위인 순서에서 카드 k와 0의 위치를 맞바꾸는 것은 k가 0보다 앞에 오는 순서들과 0이 k보다 앞에 오는 순서들 사이의 전단사(bijection)이므로, 두 경우는 동등하게 가능하고 $P(I_k = 1) = \frac{1}{2}$이다. 그러므로

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{w} E(I_k) = \sum_{k=1}^{w} \tfrac{1}{2} = \frac{w}{2},$$

이고, 이는 (i)의 기대 상금 w의 절반이므로 보이려던 것이 성립한다.

검산

- $w = n$(0이 아닌 모든 카드가 돈을 줌)이고 비복원일 때, 카드 0의 위치는 $1, \ldots, n+1$ 위에서 균등하므로 그 앞에 있는 카드 수의 평균은 $\frac{n}{2}$이며, $\frac{w}{2}$와 일치한다.
- 복원이고 $w = 1$일 때, 각 유효한 뽑기는 0과 1 사이의 공정한 동전 던지기이므로 $P(X = r) = 2^{-(r+1)}$이고 $E(X) = 1$이며, $w^r/(w+1)^{r+1}$ 및 $E(X) = w$와 일치한다.
- $n = 5$, $w = 2$로 2×10^5번의 게임을 시뮬레이션한 결과, $\frac{8}{81} \approx 0.0988$에 대해 $P(X = 3) \approx 0.0995$, 2에 대해 평균 상금 1.995를 얻었다. 작은 카드 묶음(예를 들어 $n = 5$, $w = 3$)에 대해 모든 순서를 정확히 열거하면 비복원일 때 평균은 $\frac{3}{2} = \frac{w}{2}$이다.

흔한 실수

- 한 번의 뽑기가 0일 확률로 $\frac{1}{n+1}$을 쓰는 것. 그것은 뽑기 한 번당 확률이지만, 그 사이에 무관한 뽑기가 몇 번이든 일어날 수 있다. 유효한 뽑기에 대해 조건부로 생각해야 깔끔한 $\frac{1}{w+1}$이 나온다.
- $r = 0$을 빠뜨리는 것. 첫 번째 유효한 뽑기가 0일 수 있으며, 그러면 아무것도 받지 못할 확률은 $\frac{1}{w+1}$이다.
- (ii)에서 상금의 분포 전체를 구하려 하는 것. 그럴 필요가 없다. 지시변수와 선형성이면 두 줄로 해결된다.

STEP 너머

무관한 뽑기를 무시하는 것은 **솎아내기**(thinning), 즉 흥미로운 일이 일어나는 시점에서만 과정을 살펴보는 방법의 한 예이다. 이 생각은 마르코프 연쇄(Markov chains)("도약 연

쇄(jump chain)”)와 푸아송 과정(Poisson processes)에서 다시 등장한다. 개수를 지시변수들의 합으로 쓰고, 지시변수들이 종속이더라도 기댓값의 선형성을 이용하는 것은 대학 1학년 확률론과 조합론에서 가장 유용한 기법 가운데 하나이다. 두 아이디어 모두 Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)와 Grimmett과 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률: 입문)에서 다루고 있다.

풀이

STEP III 2005, 문제 14

확률과 통계 • 연속확률변수

STEP III 2005, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/05-s3-q14

핵심 아이디어

이 문제의 모든 계산은 인용해도 좋다고 주어진 단 하나의 적분에 기대고 있으므로, 핵심은 각 적분에 어떤 m과 n이 필요한지 알아내는 것이다. 치환(substitution) $x = k^2/u$는 피적분함수(integrand)의 모양은 그대로 둔 채 구간 $[0,k]$와 $[k,\infty)$를 서로 맞바꾸며, 이 대칭성 덕분에 중앙값(median)이 곧바로 정해진다. 시간 $T = s/V$에 대해서도 같은 역수(reciprocal) 기법을 쓰면, T의 밀도함수(density)가 V와 정확히 같은 族이 아니라 같은 분포족(family of distributions)에 속하고 k만 s/k로 바뀐 꼴임을 알 수 있다. 그다음에는 V에 대한 결과로부터 중앙값과 평균을 바로 읽어 낼 수 있다.

풀이

상수 C

주어진 결과에서 $m = a, n = 2a$로 놓는다. a는 양의 정수이고 $2a \geq a$이므로 이렇게 놓을 수 있다. 그러면 $n + 2 = 2a + 2$, $n - m + 1 = a + 1$이므로

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{(x+k)^{2a+2}}\,\mathrm{d}x = \frac{a!\,a!}{(2a+1)!\,k^{a+1}}.$$

밀도함수를 그 범위 전체에서 적분하면 1이므로

$$1 = Ck^{a+1} \cdot \frac{a!\,a!}{(2a+1)!\,k^{a+1}} \qquad \Longrightarrow \qquad C = \frac{(2a+1)!}{a!\,a!},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

치환과 중앙값

좌변의 적분에서 $x = k^2/u$로 놓으면 $\mathrm{d}x = -\dfrac{k^2}{u^2}\,\mathrm{d}u$이다. x가 0에서 v까지 움직일 때 u는 ∞에서 k^2/v까지 내려간다. 또

$$x + k = \frac{k^2}{u} + k = \frac{k(u+k)}{u},$$

이므로

$$\frac{x^a}{(x+k)^{2a+2}} = \frac{k^{2a}/u^a}{k^{2a+2}(u+k)^{2a+2}/u^{2a+2}} = \frac{u^{a+2}}{k^2\,(u+k)^{2a+2}}.$$

여기에 $\mathrm{d}x$를 곱하면 k^2/u^2이 약분되고, 음의 부호는 적분 구간의 위끝과 아래끝을 뒤바꾼다.

$$\int_0^v \frac{x^a}{(x+k)^{2a+2}}\,\mathrm{d}x = \int_\infty^{k^2/v} \frac{u^a}{(u+k)^{2a+2}}\,(-\mathrm{d}u) = \int_{k^2/v}^\infty \frac{u^a}{(u+k)^{2a+2}}\,\mathrm{d}u,$$

이것이 구하려던 항등식이다.

생각해 보기 v를 어떤 값으로 잡으면 이 항등식이 중앙값에 대해 무언가를 말해 주는가?

$v = k$로 잡으면 $k^2/v = k$도 된다. 양변에 Ck^{a+1}을 곱하면 항등식은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(V < k) &= \int_0^k \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_k^\infty \mathrm{f}(u)\,\mathrm{d}u = \mathrm{P}(V > k).\end{aligned}$$

V는 연속(continuous)확률변수이므로 $\mathrm{P}(V = k) = 0$이고, 위의 두 확률의 합은 1이다. 따라서 각각은 $\frac{1}{2}$이고, V의 중앙값은 k이다.

V의 기댓값

$$\mathrm{E}(V) = Ck^{a+1}\int_0^\infty \frac{x^{a+1}}{(x+k)^{2a+2}}\,\mathrm{d}x.$$

이번에는 $m = a+1$, $n = 2a$로 놓는다. 이를 위해서는 $2a \geq a+1$이어야 하는데, $a \geq 1$이므로 성립한다. 그러면 $n - m + 1 = a$이고,

$$\mathrm{E}(V) = \frac{(2a+1)!}{a!\,a!}\,k^{a+1}\cdot\frac{(a+1)!\,(a-1)!}{(2a+1)!\,k^a} = k\cdot\frac{(a+1)!}{a!}\cdot\frac{(a-1)!}{a!} = \frac{(a+1)k}{a}.$$

T의 분포

속력은 양수이므로, $t > 0$일 때 양변에 $V/t > 0$을 곱해도 부등호의 방향이 바뀌지 않는다.

$$T < t \iff \frac{s}{V} < t \iff V > \frac{s}{t}.$$

따라서

$$\mathrm{P}(T<t)=\mathrm{P}\Big(V>\frac{s}{t}\Big)=\int_{s/t}^{\infty}\frac{Ck^{a+1}x^{a}}{(x+k)^{2a+2}}\,\mathrm{d}x, \qquad (*)$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

이제 $(*)$에서 $u=s/x$로 치환하면 $x=s/u$, $\mathrm{d}x=-\dfrac{s}{u^2}\,\mathrm{d}u$이다. x가 s/t에서 ∞까지 움직일 때 u는 t에서 0까지 내려간다. $x+k=(s+ku)/u$이므로

$$\mathrm{P}(T<t)=\int_0^t Ck^{a+1}\,\frac{s^a/u^a}{(s+ku)^{2a+2}/u^{2a+2}}\cdot\frac{s}{u^2}\,\mathrm{d}u=\int_0^t\frac{Ck^{a+1}s^{a+1}\,u^a}{(s+ku)^{2a+2}}\,\mathrm{d}u.$$

이 식은 모든 $t>0$에 대해 성립하고, $t\le 0$이면 $\mathrm{P}(T<t)=0$이다. 그러므로 t에 대해 미분하면 T의 밀도함수를 얻는다.

$$\mathrm{g}(t)=\frac{Ck^{a+1}s^{a+1}\,t^a}{(s+kt)^{2a+2}}\qquad(t>0).$$

이를 f와 비교하기 위해 분모에서 k^{2a+2}을 묶어 내고 $K=s/k$로 쓰면

$$\mathrm{g}(t)=\frac{C\,(s/k)^{a+1}\,t^a}{(t+s/k)^{2a+2}}=\frac{CK^{a+1}t^a}{(t+K)^{2a+2}}.$$

이것은 밀도함수 f에서 k를 $K=s/k$로 바꾼 것과 정확히 같다. 따라서 T는 V와 같은 분포족에 속한다.

중앙값과 평균

T는 모수가 $K=s/k$인 같은 꼴의 분포를 따르므로, 앞의 결과를 그대로 적용할 수 있다.

$$\text{중앙값}T=\frac{s}{k},\qquad \mathrm{E}(T)=\frac{(a+1)}{a}\cdot\frac{s}{k}.$$

그러므로 시간의 중앙값과 속력의 중앙값의 곱은

$$\frac{s}{k}\cdot k=s,$$

이고, 주장한 대로 이것은 거리와 같다. 시간의 기댓값과 속력의 기댓값의 곱은

$$\mathrm{E}(T)\,\mathrm{E}(V)=\frac{(a+1)s}{ak}\cdot\frac{(a+1)k}{a}=s\Big(1+\frac{1}{a}\Big)^2>s,$$

이다. a는 양의 정수이므로 $1+1/a>1$이기 때문이다. 이로써 문제의 풀이가 끝난다.

검산

- $a=1, k=1$이면 $C=3!/1=6$이고, $6x/(x+1)^4$을 $[0,\infty)$에서 수치적분(numerical integration)하면 1.000000이 나온다. $[0,1]$에서는 0.500000이 나와 중앙값이 맞음을 확인할 수 있다.

- $a = 2, k = 0.7$ 등 여러 쌍에 대해 수치적분을 하면 $\mathrm{E}(V) = 1.05000 = \frac{3}{2}(0.7)$이 나온다. $s = 3.2$로 두면 $\mathrm{E}(T)\mathrm{E}(V) = 7.20000 = 3.2 \times \frac{9}{4}$이 나온다.
- $a = 2, k = s = 1$로 두고 속력 2×10^5개를 모의실험(simulation)한 결과, 속력의 중앙값 $\times$ 시간의 중앙값 ≈ 1.000001이었지만 속력의 평균은 ≈ 1.504(이론값: 1.5)였다.
- 중앙값의 곱이 s와 같다는 사실은 공식 없이도 알 수 있다. $T = s/V$는 V에 대한 감소함수(decreasing function)이므로, T의 중앙값은 s를 V의 중앙값으로 나눈 값이다.

흔한 실수

- 주어진 적분을 인용할 때 $n \geq m$인지 확인하지 않는 것. $\mathrm{E}(V)$의 경우에는 $a \geq 1$이 필요한데, 바로 이 때문에 a가 양의 정수여야 한다. 더 높은 차수의 적률(moment)에서는 결국 공식이 성립하지 않게 되며, 실제로 $\mathrm{E}(V^{a+1})$은 무한대이다.
- T의 밀도함수를 구하려고 $(*)$를 미분할 때 인수 s/t^2(연쇄법칙(chain rule))을 빠뜨리는 것.
- $\mathrm{E}(s/V) = s/\mathrm{E}(V)$라고 가정하는 것. 마지막 소문항의 요점이 바로 이것이 거짓이라는 것이다.

STEP 너머

마지막 부등식은 옌센 부등식(Jensen's inequality)의 한 예이다. $v > 0$에서 $1/v$는 볼록(convex)하므로 $\mathrm{E}(1/V) \geq 1/\mathrm{E}(V)$이고, 등호는 V가 상수일 때만 성립한다. 반면 중앙값은 어떤 단조함수(monotonic function)를 거쳐도 그대로 옮겨 간다. 치환 $V/(V+k)$는 V를 $\frac{1}{2}$에 대해 대칭인 베타(Beta) 분포 $\mathrm{Beta}(a+1, a+1)$를 따르는 확률변수로 바꾸는데, 이것도 중앙값이 k인 이유를 보는 또 다른 방법이다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)는 옌센 부등식, 변수변환(change of variables), 베타 분포족을 매우 읽기 쉽게 다룬다.

Beyond STEP

STEP은 대부분의 학생이 학창 시절에 치르는 수학 시험 가운데 가장 어려운 시험이다. 또한 가장 훌륭한 시험 가운데 하나이기도 하다. 문제는 짧고 낯설며 깊이가 있고, 그중 가장 뛰어난 문제들은 대학 수학의 작은 조각이 모습을 감추고 있는 것이다.

이 책은 1987년 첫 시험에 앞서 나온 예시 시험지(specimen papers)부터 2025년 시험지까지 가운데 가장 흥미로운 STEP 문제들을 골라, 각 문제를 하나의 문으로 삼는다. 모든 문제는 뛰어난 학생이 풀어 가면서 던질 법한 질문들과 함께 꼼꼼하게 풀이하고, 그런 다음 책은 그 문을 지나 한 걸음 더 나아간다. 그 아이디어가 어디에서 왔는지, 대학에서는 무엇으로 발전하는지, 그리고 다음에는 무엇을 읽으면 좋은지를 살펴본다.

이 책은 STEP을 준비하면서 기출 문제 연습 이상의 것을 원하는 재능 있는 예비 수학자를 위해 쓰였다. 수학과 학부생처럼 생각하기 시작하고, 앞으로 무엇이 자신을 기다리고 있는지 알아보고 싶은 학생들을 위한 책이다.

- 순수수학(pure mathematics), 역학(mechanics), 확률(probability)과 통계(statistics)를 아우르는 13개의 장
- 이 36개의 STEP 기출 문제와 각 문제의 안내식 풀이
- 모든 문제 뒤에 숨은 대학 수학
- 답이 실린 후속 연습 문제와 더 읽을거리

2005년 풀이. 책 전체와 모든 장,
모든 풀이를 다음 주소에서 무료로 읽고, 내려받고, 공유할 수 있다.

beyondstep.keithmcnulty.org

본문은 퍼블릭 도메인(CC0 1.0)으로 공개한다. STEP 문제 © Cambridge University Press & Assessment.

