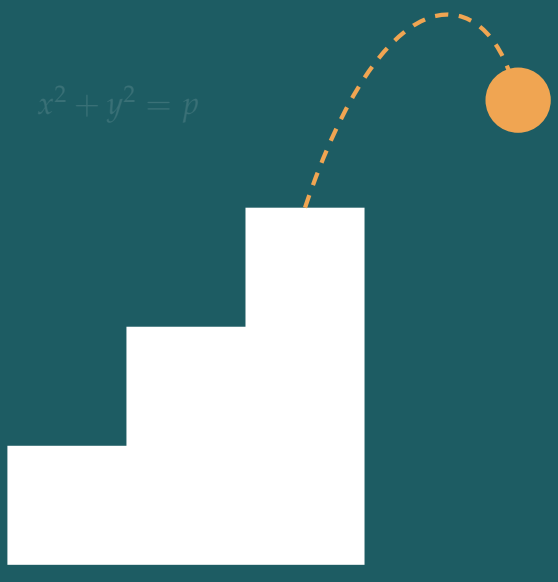
STEP 대비 · 대학 수학

Beyond STEP

STEP I, II 및 III

2004년 풀이



KEITH McNULTY

Beyond STEP

STEP 기출문제로 여는
대학 수학의 세계

STEP I, II 및 III

2004년 풀이

Keith McNulty

Beyond STEP: STEP 기출문제로 여는 대학 수학의 세계

2004년 풀이

2004년 STEP 문제지(STEP I, II 및 III)의 42개 문제 전체에 대한 풀이. 견본 문제지 이후 모든 STEP 문제의 풀이와 *Beyond STEP* 책 전체, 그리고 각 장을 `beyondstep.keithmcnulty.org`에서 무료로 읽고 내려받을 수 있다.

풀이를 읽기 전에 먼저 문제를 제대로 풀어 보자. 모든 답은 수치적으로 검증하였지만, 풀이가 이렇게 많으면 실수가 어느 정도 있을 수밖에 없다. 무언가 잘못된 것처럼 보이면 자신의 풀이를 믿고 꼼꼼히 확인해 보자.

영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.

2026년 11월 온라인 초판 발행.

이 PDF에서 지은이가 직접 만든 모든 것, 곧 본문, 풀이, 그림, 연습문제와 해답은 크리에이티브 커먼즈 CC0 1.0 Universal 라이선스에 따라 퍼블릭 도메인(public domain)으로 공개한다. 누구든 허락을 구하지 않고 어떤 목적으로든 복사하고, 고쳐 쓰고, 공유할 수 있다. 자세한 내용은 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`을 보라.

여기에서 다루는 STEP 문제의 저작권은 Cambridge University Press & Assessment에 있다. 문제는 이 책에 싣지 않았으며, 각 문제마다 공식 출처인 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스나 OCR의 기출 시험지로 가는 링크를 달았다.

오류 제보는 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty에 이슈로 남겨 주기 바란다.

차례

STEP I

Q1 무리수와 세제곱근 순수수학 . . . 3

Q2 바닥 함수의 적분 순수수학 . . . 6

Q3 이변수 다항식의 인수분해 순수수학 . . . 10

Q4 치환적분 순수수학 . . . 13

Q5 5를 법으로 하는 나머지 순수수학 . . . 17

Q6 삼각형의 벡터 기하 순수수학 . . . 21

Q7 생성함수 순수수학 . . . 25

Q8 단조수열과 수학적 귀납법 순수수학 . . . 28

Q9 포물체 운동 역학 . . . 32

Q10 등가속도 운동 역학 . . . 36

Q11 마찰과 경첩 사다리 역학 . . . 40

Q12 베이즈 정리 확률과 통계 . . . 44

Q13 균등분포 확률변수의 최댓값 확률과 통계 . . . 47

Q14 배열의 개수 세기 확률과 통계 . . . 51

STEP II

Q1 무리식이 있는 방정식 순수수학 . . . 54

Q2 이차부등식 순수수학 . . . 57

Q3 곡선 그리기 순수수학 . . . 61

Q4 기하에서의 최적화 순수수학 . . . 66

Q5 적분방정식 순수수학 . . . 70

Q6 벡터의 분해 순수수학 . . . 73

Q7 이분법 순수수학 . . . 76

Q8 미분방정식의 비교 순수수학 . . . 80

Q9 무게중심 역학 84
Q10 경사면 위의 마찰 역학 88
Q11 일률과 저항 역학 92
Q12 연속 분포 확률과 통계 96
Q13 최적 정지 확률과 통계 101
Q14 포함배제의 원리 확률과 통계 105

STEP III

Q1 쌍곡선 함수의 적분 순수수학 109
Q2 점근선과 곡선의 개형 순수수학 113
Q3 볼록성과 급수의 한계 순수수학 118
Q4 접하는 원과 급수 순수수학 122
Q5 삼각방정식 순수수학 126
Q6 점화식 순수수학 130
Q7 점화 공식 순수수학 134
Q8 미분방정식 순수수학 137
Q9 힘의 모멘트와 마찰 역학 141
Q10 탄성 끈과 단진동 역학 145
Q11 두 물체의 척력 역학 149
Q12 지시변수와 교란순열 확률과 통계 153
Q13 기하분포 확률과 통계 157
Q14 가설 검정의 오류 확률과 통계 160

풀이

STEP I 2004, 문제 1

순수수학 • 무리수와 세제곱근

> **STEP I 2004, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/04-s1-q1

핵심 아이디어

a, b가 정수일 때 $a+b\sqrt{n}$ 꼴의 수들은 작은 수 체계처럼 행동한다. 이런 수 두 개를 곱하면 같은 꼴의 수가 되고, 이런 두 수는 유리수 부분(rational part)끼리 같고 $\sqrt{n}$ 부분끼리 같을 때, 그리고 그때에만 서로 같다. 소문항 (i)은 이런 수를 세제곱하는 준비 운동이고, 소문항 (ii)는 부분끼리 비교하여 그 과정을 거꾸로 거슬러 올라간다. 소문항 (iii)은 x^3에 대한 이차방정식(quadratic equation)이며, 그 근(root)은 바로 (ii)에서 구한 세제곱들임이 밝혀진다.

풀이

소문항 (i)

이항정리(binomial theorem)에 의해, $(2\sqrt{5})^2 = 20$과 $(2\sqrt{5})^3 = 40\sqrt{5}$를 이용하면

$$\begin{aligned}\left(3+2\sqrt{5}\right)^3 &= 3^3 + 3\cdot 3^2\cdot 2\sqrt{5} + 3\cdot 3\cdot 20 + 40\sqrt{5}\\ &= 27 + 54\sqrt{5} + 180 + 40\sqrt{5}\\ &= 207 + 94\sqrt{5}.\end{aligned}$$

따라서 $a = 207$, $b = 94$이다.

소문항 (ii)

$\sqrt{5}$ 대신 $\sqrt{2}$를 넣어 같은 방식으로 전개하면, 임의의 c와 d에 대하여

$$\begin{aligned}\left(c - d\sqrt{2}\right)^3 &= c^3 - 3c^2d\sqrt{2} + 3c \cdot 2d^2 - 2d^3\sqrt{2} \\ &= \left(c^3 + 6cd^2\right) - \left(3c^2d + 2d^3\right)\sqrt{2}.\end{aligned}$$

실수 세제곱근(cube root)은 유일하므로, $(c - d\sqrt{2})^3 = 99 - 70\sqrt{2}$가 성립해야 한다.

? **생각해 보기** 왜 유리수 부분과 $\sqrt{2}$ 부분을 따로따로 비교해도 되는가?

p, q, r, s가 정수이고 $q \neq s$일 때 $p + q\sqrt{2} = r + s\sqrt{2}$라면, $\sqrt{2} = (p - r)/(s - q)$가 유리수가 되는데, 이는 사실이 아니다. 따라서 $q = s$이고, 그러면 $p = r$이다. 그러므로

$$c^3 + 6cd^2 = 99, \qquad 3c^2d + 2d^3 = 70.$$

이 성립해야 한다. c와 d는 양수이므로 첫 번째 식에서 $c^3 < 99$가 되어야 하고, 따라서 $c \leq 4$이다. $6cd^2 = 99 - c^3$에 각 값을 대입해 보면

- $c = 1$: $6d^2 = 98$, 정수해가 없다.
- $c = 2$: $12d^2 = 91$, 없다.
- $c = 3$: $18d^2 = 72$, 따라서 $d = 2$이다.
- $c = 4$: $24d^2 = 35$, 없다.

가능한 후보는 $c = 3, d = 2$뿐이며, 이는 두 번째 식도 만족한다: $3 \cdot 9 \cdot 2 + 2 \cdot 8 = 54 + 16 = 70$. 그러므로

$$\sqrt[3]{99 - 70\sqrt{2}} = 3 - 2\sqrt{2}, \qquad c = 3,\ d = 2.$$

이다. (부호를 점검해 보면, $2\sqrt{2} \approx 2.83 < 3$이므로 $3 - 2\sqrt{2}$는 양수이고, 이는 $99 - 70\sqrt{2} \approx 0.005$가 양수라는 사실과 맞아떨어진다.)

소문항 (iii)

$y = x^3$으로 놓자. 방정식은 $y^2 - 198y + 1 = 0$이 되므로, $9800 = 4900 \cdot 2$를 이용하면

$$y = \frac{198 \pm \sqrt{198^2 - 4}}{2} = 99 \pm \sqrt{99^2 - 1} = 99 \pm \sqrt{9800} = 99 \pm 70\sqrt{2},$$

이다. 두 값 모두 양의 실수이다.

소문항 (ii)에서 $99 - 70\sqrt{2} = (3 - 2\sqrt{2})^3$이다. 다른 근에 대해서는, 이차방정식의 두 근의 곱이 1임에 주목하면

$$99 + 70\sqrt{2} = \frac{1}{99 - 70\sqrt{2}} = \frac{1}{(3 - 2\sqrt{2})^3} = \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^3,$$

이다. 여기서 $(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2}) = 9-8 = 1$을 이용하였다. (마찬가지로, 소문항 (ii)의 전개식에서 d의 부호를 바꾸면 $(3+2\sqrt{2})^3 = 99+70\sqrt{2}$를 곧바로 얻는다.)

모든 실수는 실수 세제곱근을 정확히 하나 가지므로, y의 각 값은 실수 x를 정확히 하나씩 준다. 두 실수해는

$$x = 3-2\sqrt{2} \qquad \text{그리고} \qquad x = 3+2\sqrt{2}.$$

이다. 이 6차방정식(sextic equation)의 나머지 네 해는 복소수(complex number)이며, 각 y의 나머지 세제곱근들이다.

검산

- 수치로 계산하면 $(3+2\sqrt{5})^3 \approx 417.19$이고 $207+94\sqrt{5} \approx 417.19$이다.
- $3+2\sqrt{2} \approx 5.8284$이며, 이 값에서 $x^6 - 198x^3 + 1$은 반올림 오차 범위 안에서 영이 된다. $3-2\sqrt{2} \approx 0.1716$에서도 마찬가지이다.
- (iii)의 두 답을 곱하면 당연히 1이 된다. x가 근이면 $1/x$도 근인데, 방정식을 x^6으로 나누면 $1/x$에 대한 같은 방정식이 되기 때문이다.

흔한 실수

- 전개할 때 $(d\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}\,d^3$이지 $\sqrt{2}\,d^3$이 아니라는 것을 잊는다.
- 첫 번째 식에서 $c=3, d=2$를 찾고 나서 두 번째 식을 확인하지 않는다.
- (iii)에서 "해"를 여섯 개 제시한다. 각 양수의 세제곱근 중 실수인 것은 하나뿐이다.

STEP 너머

a, b가 정수인 수 $a+b\sqrt{2}$ 전체의 집합은 환(ring)이며 $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$로 나타낸다. $3+2\sqrt{2}$는 이 환의 **단원**(*unit*)이다. 즉 같은 환 안에 역원(inverse) $3-2\sqrt{2}$를 가진다. 이런 단원들은 펠 방정식(Pell's equation) $a^2 - 2b^2 = \pm 1$과 밀접하게 연결되어 있으며($99^2 - 2\cdot 70^2 = 1$임에 주목하라), $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$의 모든 단원은 $\pm(1+\sqrt{2})^n$ 꼴이다. 더 알아보려면 Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 정수론), 또는 Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)를 참고하라.

풀이

STEP I 2004, 문제 2

순수수학 • 바닥 함수의 적분

STEP I 2004, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/04-s1-q2

핵심 아이디어

함수 $[x]$는 각 구간 $r \leq x < r+1$에서 상수이므로, 이 함수로 만든 것은 모두 계단함수(step function)이다. 계단함수를 적분하는 것은 직사각형의 넓이를 더하는 것일 뿐이다. 즉 $[0, a]$를 정수 지점에서 나누면, 길이가 1인 각 조각에서 피적분함수(integrand)는 상수이다. a가 정수가 아닐 때 새로 생기는 것은 마지막의 폭이 더 좁은 직사각형 하나뿐이다.

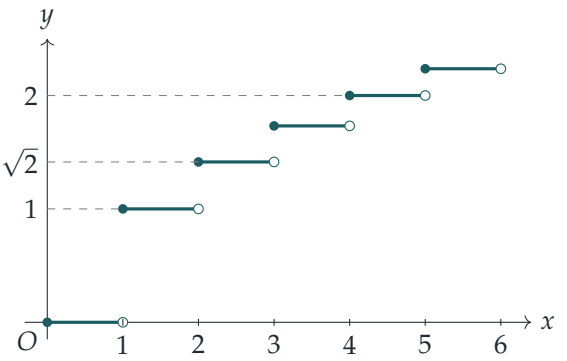
풀이

소문항 (i)

$x \geq 0$일 때 $r = [x]$라 하자. 그러면 r는 음이 아닌 정수이고 $r \leq x < r+1$이므로, 그 구간에서

$$y = \sqrt{[x]} = \sqrt{r}.$$

따라서 그래프는 계단 모양이다. $[0,1)$에서 $y = 0$, $[1,2)$에서 $y = 1$, $[2,3)$에서 $y = \sqrt{2}$이고, 이런 식으로 계속된다. $[x]$는 정확히 각 정수에서 위로 뛰어오르므로, 각 계단은 왼쪽 끝점은 포함하고(속이 찬 점) 오른쪽 끝점은 포함하지 않는다(속이 빈 점). $\sqrt{r+1} - \sqrt{r} = 1/(\sqrt{r+1} + \sqrt{r})$는 감소하므로 계단이 올라가는 높이는 점점 작아진다. $x < 0$이면 $[x] \leq -1$이므로 그곳에서 $\sqrt{[x]}$는 정의되지 않고, 그래프는 $x \geq 0$인 부분에만 있다.



이제 a를 양의 정수라 하자. 적분 구간을 정수 $1, 2, \ldots, a-1$에서 나누면

$$\int_0^a \sqrt{[x]}\,\mathrm{d}x = \sum_{r=0}^{a-1} \int_r^{r+1} \sqrt{[x]}\,\mathrm{d}x.$$

$r \le x < r+1$에서 피적분함수는 상수 $\sqrt{r}$와 같다. (한 점 $x = r+1$에서는 다른 값을 갖지만, 함수의 값을 한 점에서 바꾸어도 적분값은 변하지 않는다.) 따라서 각 조각은 폭이 1이고 높이가 $\sqrt{r}$인 직사각형의 넓이이다.

$$\int_r^{r+1} \sqrt{[x]}\,\mathrm{d}x = \sqrt{r}, \qquad \text{따라서} \qquad \int_0^a \sqrt{[x]}\,\mathrm{d}x = \sum_{r=0}^{a-1} \sqrt{r},$$

이므로 요구된 결과를 얻는다.

소문항 (ii)

$r \le x < r+1$에서 2^r와 같은 $2^{[x]}$에 대해서도 정확히 같은 논증이 성립한다. 양의 정수 a에 대하여

$$\int_0^a 2^{[x]}\,\mathrm{d}x = \sum_{r=0}^{a-1} \int_r^{r+1} 2^r\,\mathrm{d}x = \sum_{r=0}^{a-1} 2^r = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{a-1}.$$

이것은 첫째항이 1, 공비(common ratio)가 2이고 항이 a개인 등비급수(geometric series)이므로, 그 합은

$$\frac{2^a - 1}{2 - 1} = 2^a - 1,$$

이고, 이것이 요구된 결과이다.

소문항 (iii)

이제 $a > 0$가 정수가 아니라 하고 $n = [a]$로 두자. 그러면 n은 $n < a < n+1$이고 $n \ge 0$인 정수이다.

생각해 보기 적분이 길이 1인 온전한 직사각형들의 합이 아니게 되는 곳은 어디인가?

$x = n$까지는 모든 것이 소문항 (ii)와 같다. 남은 조각은 $n \le x \le a$로, 하나의 계단 안에 놓인 폭 $a - n$인 띠이며, 그곳에서 $[x] = n$이다. ($n = 0$이면 첫 번째 조각은 비어 있고 $2^0 - 1 = 0$을 기여하므로 같은 식이 성립한다.) 그러므로

$$\begin{aligned}\int_0^a 2^{[x]}\,\mathrm{d}x &= \int_0^n 2^{[x]}\,\mathrm{d}x + \int_n^a 2^n\,\mathrm{d}x \\ &= \left(2^n - 1\right) + (a-n)\,2^n \\ &= 2^{[a]}\left(1 + a - [a]\right) - 1.\end{aligned}$$

검산

- $0 < a < 1$이면 $[a] = 0$이고 식은 $1 \cdot (1 + a) - 1 = a$를 준다. $[0, a]$에서 피적분함수가 1이므로 옳다.
- a가 아래쪽에서 정수 m에 가까워지면 $[a] = m - 1$이고 식은 $2^{m-1} \cdot 2 - 1 = 2^m - 1$에 가까워지며, 이는 소문항 (ii)와 일치한다. 따라서 적분은 a의 연속(continuous)함수이다. 유계(bounded)인 함수의 적분은 위끝에 대하여 반드시 연속이어야 하므로 당연한 결과이다.
- 수치적으로, $a = 2.5$일 때 식은 $4 \times 1.5 - 1 = 5$를 주고, 중점법(midpoint rule)으로 적분을 계산해도 5.000이 나온다. 소문항 (i)에서 $a = 5$이면 양변 모두 $0 + 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + 2 \approx 6.1463$이다.

흔한 실수

- $r = 0$부터 $a - 1$까지가 아니라 $r = 1$부터 a까지 더하는 것. $[r, r+1)$에서 높이는 **왼쪽** 끝에서의 값인 $\sqrt{r}$이다.
- 소문항 (iii)에서 일부만 남은 띠를 잊거나, 그 폭을 $a - [a]$가 아니라 1로 잡는 것.
- 계단을 세로선으로 이어 그리거나, 양 끝을 모두 속이 찬 점으로 그리는 것. 바닥함수(floor function)는 정수에서 연속이 아니다.

STEP 너머

직사각형을 더하여 계단함수를 적분하는 것은 대학에서 리만 적분(Riemann integral)을 세우는 방식 그대로이다. 먼저 계단함수에 대해 적분을 정의한 다음, 일반적인 함수를 위

아래에서 계단함수로 조여 들어간다. 소문항 (i)은 또한 합과 적분을 비교하는 첫걸음이며, 이를 통해 $\sum_{r=1}^{n} \sqrt{r} \approx \frac{2}{3}n^{3/2}$ 같은 어림을 얻는다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 이런 방식으로 리만 적분을 전개한다.

풀이

STEP I 2004, 문제 3

순수수학 • 이변수 다항식의 인수분해

STEP I 2004, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/04-s1-q3

핵심 아이디어

두 변수의 다항식(polynomial)은 그중 한 변수에 대한 다항식으로, 즉 다른 변수가 포함된 계수를 갖는 다항식으로 볼 수 있다. x에 대한 다항식으로 보면 인수정리(factor theorem)도 그대로 성립하고, 다항식의 나눗셈(long division)도 그대로 할 수 있으며, x에 대한 이차식은 판별식(discriminant)이 완전제곱식(perfect square)일 때 여전히 인수분해(factorise)된다. 소문항 (ii)에서는 x에 대한 최고차항의 계수(leading coefficient) 자체가 y에 대한 일차식인데, 이는 인수 하나가 y만으로 이루어져 있음을 암시한다.

풀이

소문항 (i)

식 $(*)$를 x의 거듭제곱에 대하여 정리한다.

$$P(x) = x^3 + (2y-5)x^2 + (y^2 - 8y + 6)x + (6y - 3y^2).$$

$x = 3$을 대입하면

$$\begin{aligned} P(3) &= 27 + 9(2y-5) + 3(y^2 - 8y + 6) + 6y - 3y^2 \\ &= (27 - 45 + 18) + (18y - 24y + 6y) + (3y^2 - 3y^2) = 0 \end{aligned}$$

이 모든 y에 대하여 성립하므로, 인수정리에 의해 $x - 3$은 인수이다. 이로써 증명되었다.

나머지 인수를 구하기 위해 $P(x) = (x-3)(x^2 + px + q)$로 놓자. 여기서 p와 q는 y에 따라 달라질 수 있다. 우변을 전개하면 $x^3 + (p-3)x^2 + (q-3p)x - 3q$이고, 계수를 비

교(comparing coefficients)하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x^2: &\quad p-3=2y-5, && \text{따라서} p=2y-2,\\ x^0: &\quad -3q=6y-3y^2, && \text{따라서} q=y^2-2y, \end{aligned}$$

또한 x의 계수도 $q-3p=y^2-8y+6$으로 예상대로 맞아떨어진다. 따라서 이차 인수는

$$x^2+(2y-2)x+y^2-2y=(x^2+2xy+y^2)-2(x+y)=(x+y)(x+y-2).$$

생각해 보기 이 이차식이 인수분해된다는 것을 어떻게 알아챘을까?

$x^2+2xy+y^2$은 완전제곱식 $(x+y)^2$이고, 나머지 항 $-2x-2y$는 $x+y$의 배수이다. (이렇게 묶는 방법이 바로 떠오르지 않는다면, x에 대한 판별식이 $(2y-2)^2-4(y^2-2y)=4$로 완전제곱수이므로 근은 $x=-y+1\pm 1$, 즉 $x=-y$와 $x=2-y$이다.) 그러므로

$$(*)=(x-3)(x+y)(x+y-2),$$

이고, $a=1, b=0, c=1, d=-2$이다. (또는 두 인수의 순서를 바꾸어 $a=1, b=-2, c=1, d=0$이다.)

소문항 (ii)

주어진 식을 Q라 하고, 다시 x의 거듭제곱에 대하여 정리한다.

$$Q=(y+2)x^2+(12-4y-5y^2)x+(6y^3-y^2-21y+10).$$

x^2의 계수는 $y+2$이다. Q가 세 일차 인수의 곱이라면 x^2항은 그중 두 인수의 x 부분에서 나오므로, $y+2$가 식 전체를 나누는지 묻는 것이 자연스럽다. $y=-2$로 놓으면

$$12+8-20=0, \qquad -48-4+42+10=0,$$

이므로 나머지 두 계수는 모두 $y=-2$에서 0이 되고, (y에 대한) 인수정리에 의해 각각 $y+2$로 나누어떨어진다.

$$\begin{aligned} 12-4y-5y^2&=-(5y^2+4y-12)=-(y+2)(5y-6),\\ 6y^3-y^2-21y+10&=(y+2)(6y^2-13y+5). \end{aligned}$$

또한 $6y^2-13y+5=(2y-1)(3y-5)$이다. 따라서

$$Q=(y+2)\left[x^2-(5y-6)x+(2y-1)(3y-5)\right].$$

생각해 보기 대괄호 안의 식은 인수분해될까? 그리고 그것을 어떻게 알 수 있을까?

x에 대한 판별식은

$$\begin{aligned}(5y-6)^2-4(2y-1)(3y-5) &= 25y^2-60y+36-(24y^2-52y+20)\\ &= y^2-8y+16=(y-4)^2,\end{aligned}$$

으로 완전제곱식이므로 인수분해된다. 더 빠르게는 $(2y-1)+(3y-5)=5y-6$이므로, 곱이 $(2y-1)(3y-5)$이고 합이 $5y-6$인 두 수는 $2y-1$과 $3y-5$이며, 근은 $x=2y-1$과 $x=3y-5$이다. 그러므로

$$Q=(y+2)(x-2y+1)(x-3y+5).$$

검산

- 소문항 (i)에 $x=y=1$을 대입하면 $(*)$는 $1-5+2+1-8-3+6+6=0$이고, $(1-3)(2)(0)=0$이다. $x=2, y=1$이면 $(*)$는 $8-20+8+2-16-3+12+6=-3$이고, $(-1)(3)(1)=-3$이다.
- 소문항 (ii)에 $x=y=0$을 대입하면 $Q=10$이고 $(2)(1)(5)=10$이다. $x=1, y=1$이면 $Q=6-1-21+2+12-4+1-5+10=0$이고, 실제로 $x-2y+1=0$이다.
- 두 인수분해를 무작위로 고른 2000개의 점 (x,y)에서 정확한 유리수 연산으로 확인했으며, 모든 점에서 일치했다.

흔한 실수

- 식을 x에 대한 다항식으로 다루면서 "상수"항이 x가 없는 모든 항, 즉 소문항 (i)에서는 $6y-3y^2$이라는 사실을 잊는 것.
- 소문항 (ii)에서 k가 수인 근 $x=k$를 찾으려 하는 것. $x-k$ 꼴의 인수는 존재하지 않는다. 먼저 찾아야 할 것은 x가 들어 있지 않은 인수 $y+2$이다.
- $-(5y^2+4y-12)$를 $y+2$로 나눌 때 부호를 틀리는 것. 전개하여 확인하자.

STEP 너머

여러 변수의 다항식은 환(ring)을 이루며, $\mathbb{Z}[x,y]$는 $(\mathbb{Z}[y])[x]$, 즉 계수가 y에 대한 다항식인 x에 대한 다항식들로 볼 수 있다. 이것이 바로 우리가 한 일이며, 인수정리와 나눗셈이 여전히 성립하는 이유이다. 이러한 환에서는 인수분해가 유일하므로(유일 인수분해(unique factorisation), 가우스(Gauss)의 보조정리), 우리가 구한 인수분해는 순서와 부호를 제외하면 유일하다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)에서 이러한 개념을 전개한다.

풀이

STEP I 2004, 문제 4

순수수학 • 치환적분

> **STEP I 2004, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/04-s1-q4

핵심 아이디어

$\sqrt{x^2-1}$을 보면 언제나 항등식 $\sec^2 t - 1 = \tan^2 t$를 떠올린다. $x = \sec t$로 치환(substitution)하면 제곱근이 $\tan t$가 되고, $\mathrm{d}x = \sec t \tan t \, \mathrm{d}t$이므로 $\tan t$도 약분된다. 소문항 (ii)와 (iii)은 달라 보이지만, 근호 안에서 완전제곱식을 만들면(completing the square) 둘 다 $u = x + 2$에 대하여 $\sqrt{u^2 - a^2}$이라는 같은 꼴이 되고, 근호 밖의 인수 $x+2$는 바로 이 치환에 필요한 것이 된다.

풀이

도함수

$\sec t = (\cos t)^{-1}$로 쓰고 연쇄법칙(chain rule)을 이용하면

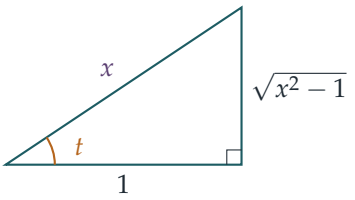
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sec t = -(\cos t)^{-2} \cdot (-\sin t) = \frac{\sin t}{\cos^2 t} = \sec t \tan t.$$

소문항 (i)

$x = \sec t$로 놓으면 $\mathrm{d}x = \sec t \tan t \, \mathrm{d}t$이다. $x = \sqrt{2}$일 때 $\cos t = 1/\sqrt{2}$이고 $t = \frac{\pi}{4}$이며, $x = 2$일 때 $\cos t = \frac{1}{2}$이고 $t = \frac{\pi}{3}$이다. $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$에 속하는 t에 대하여 $\tan t > 0$이므로

$$\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\sec^2 t - 1} = \sqrt{\tan^2 t} = \tan t$$

이다(절댓값 기호가 필요 없다). 아래 삼각형도 같은 사실을 보여 준다. 빗변이 x, 이웃변이 1이므로 대변은 $\sqrt{x^2-1}$이다.



적분은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sec t\tan t}{\sec^3 t\,\tan t}\,\mathrm{d}t = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos^2 t\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \tfrac{1}{2}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t = \left[\tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{4}\sin 2t\right]_{\pi/4}^{\pi/3} \\ &= \left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right) - \left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}-2}{8} + \frac{\pi}{24},\end{aligned}$$

여기서 $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1+\cos 2t)$, $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$을 이용하였다. 이것이 구하는 결과이다.

소문항 (ii)

? **생각해 보기** 소문항 (ii)에는 $\sqrt{x^2-1}$이 없다. 소문항 (i)이 어떻게 도움이 될까?

근호 안을 전개하고 완전제곱식을 만든다.

$$(x+1)(x+3) = x^2+4x+3 = (x+2)^2 - 1.$$

따라서 $u = x+2$로 놓으면($\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$) 적분은 다음과 같다.

$$\int \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\,\mathrm{d}u.$$

피적분함수(integrand)는 $u^2 > 1$일 때만 정의된다. 먼저 $u > 1$(즉 $x > -1$)인 경우를 생각하여, $0 < t < \frac{\pi}{2}$인 $u = \sec t$로 놓으면 $\tan t > 0$이고 $\sqrt{u^2-1} = \tan t$이다. 그러면

$$\int \frac{\sec t\tan t}{\sec t\,\tan t}\,\mathrm{d}t = \int 1\,\mathrm{d}t = t + C,$$

이고, $\sec t = u$이므로 $t = \operatorname{arcsec} u$(즉 $\arccos(1/u)$)이다. 따라서 $x > -1$일 때

$$\int \frac{1}{(x+2)\sqrt{(x+1)(x+3)}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arcsec}(x+2) + C.$$

빠짐없이 다루기 위해 덧붙이면, 피적분함수는 $u < -1$이 되는 $x < -3$에서도 정의된다. 이때 $v > 1$인 $u = -v$로 놓으면 피적분함수 $\dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\,\mathrm{d}u$는 $\dfrac{1}{(-v)\sqrt{v^2-1}}(-\mathrm{d}v) =$

$\dfrac{1}{v\sqrt{v^2-1}}\,\mathrm{d}v$가 되고, 이를 적분하면 $\operatorname{arcsec} v$가 된다. 두 경우 모두 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$\operatorname{arcsec}|x+2| + C = \arccos\frac{1}{|x+2|} + C,$$

단, 두 구간에서 상수는 서로 다를 수 있다.

소문항 (iii)

이번에도 완전제곱식을 만든다.

$$x^2 + 4x - 5 = (x+2)^2 - 9,$$

따라서 $u = x+2$로 놓으면 $\displaystyle\int \frac{1}{u\sqrt{u^2-9}}\,\mathrm{d}u$를 구해야 한다. 이번에 자연스러운 치환은 $u = 3\sec t$로, $u^2 - 9 = 9\tan^2 t$가 되도록 고른 것이다. $u > 3$(즉 $x > 1$)일 때 $0 < t < \frac{\pi}{2}$로 잡으면 $\sqrt{u^2-9} = 3\tan t$이고 $\mathrm{d}u = 3\sec t\tan t\,\mathrm{d}t$이다. 그러면

$$\int \frac{3\sec t\tan t}{3\sec t\cdot 3\tan t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{3}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{3} + C,$$

이고 $\sec t = u/3$이다. 따라서 $x > 1$일 때

$$\int \frac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+4x-5}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\operatorname{arcsec}\frac{x+2}{3} + C.$$

소문항 (ii)와 똑같이, $x < -5$인 경우($u < -3$)는 $u = -v$로 처리하며, 두 구간 모두 $\frac{1}{3}\operatorname{arcsec}\left(\frac{1}{3}|x+2|\right) + C$로 나타낼 수 있다.

검산

- 소문항 (i)의 적분에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면 0.0974060…이 나오며, 이는 $\frac{1}{8}(\sqrt{3}-2) + \frac{\pi}{24}$와 일치한다.
- 답을 미분해 본다. $u > 1$일 때 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\operatorname{arcsec} u = \dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}$이다($u = \sec t$로 놓고 처음에 구한 도함수를 이용한다). 예를 들어 소문항 (ii)의 피적분함수에 대한 $\int_0^3$의 값은 수치적으로 0.322241이고, $\operatorname{arcsec} 5 - \operatorname{arcsec} 2 = \arccos\frac{1}{5} - \frac{\pi}{3}$와 일치한다.
- 소문항 (iii)은 소문항 (ii)의 척도를 바꾼 것이어야 한다. $u = 3w$로 놓으면 $\int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2-9}} = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}w}{w\sqrt{w^2-1}}$이고, 이것이 인수 $\frac{1}{3}$이 나타나는 이유이다.

흔한 실수

- 소문항 (i)에서 적분 구간을 바꾸는 것을 잊거나, 위끝과 아래끝을 거꾸로 잡는 것. $\sec t = \sqrt{2}$이면 $t = \frac{\pi}{4}$이지 $\frac{\pi}{3}$이 아니다.

- 사용하는 범위에서 $\tan t$의 부호를 확인하지 않고 $\sqrt{\tan^2 t} = \tan t$로 쓰는 것.
- 소문항 (iii)에서 $u = 3\sec t$ 대신 $u = \sec t$로 치환하여, 간단히 할 항등식이 없는 $\sqrt{\sec^2 t - 9}$가 남는 것.

STEP 너머

역시컨트(inverse secant)는 한 함수족의 일원이다. 치환 $x = a\sin t$, $a\tan t$, $a\sec t$(또는 이들의 쌍곡함수 사촌인 $a\sinh t$, $a\cosh t$)는 각각 $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$을 다루기 쉽게 만들고, 완전제곱식을 만들면 어떤 $\sqrt{\text{이차식}}$이든 이 가운데 하나로 바꿀 수 있다. 부호에 대해, 그리고 원시함수(antiderivative)가 어느 구간에서 정의되는지에 대해 기울여야 하는 주의는 해석학(analysis) 강의에서 적분을 엄밀하게 다루는 방식을 처음 맛보는 것이다. Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)는 치환 정리를 제대로 다루며, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에는 이런 정신의 STEP 적분 문제가 더 실려 있다.

풀이

STEP I 2004, 문제 5

순수수학 • 5를 법으로 하는 나머지

> **STEP I 2004, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/04-s1-q5

핵심 아이디어

다섯 개의 등차수열(arithmetic progression)은 양의 정수를 5로 나눈 나머지(remainder)에 따라 분류한다. 각 부류의 일반항(general term)을 $5n-3$과 같은 꼴로 나타내면, 합과 제곱을 전개한 뒤 5를 인수로 묶어 내어 추적할 수 있다. 이렇게 하면 제곱수가 어느 부류에 들어갈 수 있는지 완전히 파악할 수 있고, 두 불가능성 증명이 모두 여기서 따라 나온다. 우변은 좌변이 결코 도달할 수 없는 부류에 속하기 때문이다.

풀이

일반항

각 수열의 공차(common difference)는 5이므로, $n=1,2,3,\ldots$에 대하여 제 n항은 다음과 같다.

$$A:\ 5n-4, \qquad B:\ 5n-3, \qquad C:\ 5n-2, \qquad D:\ 5n-1, \qquad E:\ 5n.$$

($n=1$을 대입하여 각각이 처음 나열된 항을 주는지 확인하라.) 따라서 양의 정수가 A, B, C, D, E에 속하는 것은 각각 5로 나눈 나머지가 1, 2, 3, 4, 0일 때와 정확히 같다.

B의 항과 C의 항의 합

$m, n \geq 1$에 대하여 B의 임의의 항 $5m-3$과 C의 임의의 항 $5n-2$를 잡자. 그러면

$$(5m-3)+(5n-2) = 5m+5n-5 = 5(m+n-1).$$

$m+n-1 \geq 1$은 양의 정수이므로, 이것은 E의 제 $(m+n-1)$항이다. 이로써 증명이 끝난다.

B와 C의 항의 제곱

B의 항 $5m-3$에 대하여

$$\begin{aligned}(5m-3)^2 &= 25m^2-30m+9\\ &= 5(5m^2-6m+2)-1.\end{aligned}$$

여기서 $k = 5m^2-6m+2$는 정수이고, 모든 $m \geq 1$에 대하여 $k = 5m^2-6m+2 = m(5m-6)+2 \geq 1$이다($m=1$일 때 그 값은 1이고, $m \geq 2$이면 m과 $5m-6$이 모두 양수이다). 따라서 $(5m-3)^2 = 5k-1$은 D의 제 k항이다. 즉 B의 항의 제곱은 모두 D에 속한다.

C에 대한 비슷한 명제는 다음과 같다. **C의 모든 항의 제곱도 D의 항이다.** 실제로 C의 항 $5m-2$에 대하여

$$\begin{aligned}(5m-2)^2 &= 25m^2-20m+4\\ &= 5(5m^2-4m+1)-1,\end{aligned}$$

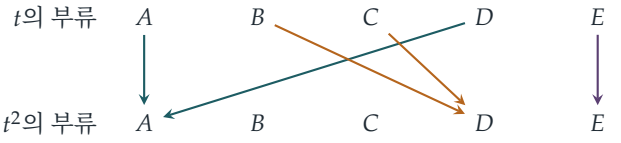
이고, $m \geq 1$이면 $k = 5m^2-4m+1 = m(5m-4)+1 \geq 2$이다. 따라서 $(5m-2)^2$은 D의 제 k항이다.

? 생각해 보기 A, D, E의 항의 제곱은 어디로 가는가?

소문항 (i)과 (ii)에 이것이 필요하므로, 나머지 세 부류도 같은 방법으로 계산해 둘 가치가 있다.

$$\begin{aligned}(5m-4)^2 &= 25m^2-40m+16 = 5(5m^2-8m+4)-4 && (A\text{에 속함}),\\ (5m-1)^2 &= 25m^2-10m+1 = 5(5m^2-2m+1)-4 && (A\text{에 속함}),\\ (5m)^2 &= 5(5m^2) && (E\text{에 속함}).\end{aligned}$$

$m \geq 1$이면 괄호 안의 값은 양의 정수이다(예를 들어 $5m^2-8m+4 = m(5m-8)+4 \geq 1$이고, $5m^2-2m+1 \geq 4$이다). 따라서 제곱하면 각 부류는 다음과 같이 옮겨진다.



특히 **어떤 완전제곱수**(*perfect square*)**도 B나 C에 속하지 않는다.** 모든 양의 제곱수는 A, D, E 중 하나에 속한다.

소문항 (i)

양의 정수 x와 y가 $x^2 + 5y = 243\,723$을 만족한다고 가정하자. $243\,723 = 5 \times 48\,744 + 3$이므로 우변은 C의 항 $5 \times 48\,745 - 2$이다. 그러면

$$x^2 = 243\,723 - 5y = 5(48\,745 - y) - 2.$$

이 값은 x^2이므로 양수이고, 따라서 $48\,745 - y$는 양의 정수이며 x^2은 C의 항이다. 그러나 앞에서 어떤 제곱수도 C에 속하지 않음을 보였다. 이 모순(contradiction)으로부터 그러한 양의 정수 x와 y는 존재하지 않는다.

소문항 (ii)

네제곱(fourth power)은 제곱수의 제곱이다. 제곱수 x^2은 A, D, E 중 하나에 속하고, A나 D의 항을 제곱하면 A의 항이 되며, E의 항을 제곱하면 E의 항이 된다. 따라서 임의의 양의 정수 x에 대하여

x^4는 다음에 속한다: A 또는E, 즉, x^4를 나눈 나머지는1 또는0이다. 이때 나누는 수는5.

y^4에 대해서도 마찬가지이므로, $2y^4$를 나눈 나머지는 2 또는 0이다. 이를 더하면, $x^4 + 2y^4$를 5로 나눈 나머지는 다음 중 하나의 나머지와 같다.

$$1 + 2 = 3, \qquad 1 + 0 = 1, \qquad 0 + 2 = 2, \qquad 0 + 0 = 0,$$

따라서 $x^4 + 2y^4$는 C, A, B, E 중 하나에 속하고, D에는 **결코** 속하지 않는다.

> ? **생각해 보기** 왜 나머지끼리 그냥 더해도 되는가?

$x^4 = 5a + r$이고 $2y^4 = 5b + s$이면 $x^4 + 2y^4 = 5(a + b) + (r + s)$이므로, 그 합은 $r + s$와 5의 배수만큼 차이 나고 $r + s$와 같은 부류에 속한다. 이것은 앞에서 $B + C$에 대해 했던 계산을 일반적인 꼴로 한 것과 정확히 같다.

이제 $26\,081\,974 = 5 \times 5\,216\,395 - 1$은 일의 자리 숫자가 4이므로 D의 항이다. 따라서 이 수는 어떤 양의 정수 x와 y에 대해서도 $x^4 + 2y^4$와 같을 수 없다. 이로써 증명이 끝난다.

검산

- 작은 경우: $2^2 = 4$, $7^2 = 49$, $12^2 = 144$는 모두 일의 자리 숫자가 4 또는 9이므로 D에 속한다. $3^2 = 9$, $8^2 = 64$, $13^2 = 169$도 마찬가지이다.
- 네제곱수: $1, 16, 81, 256, 625, 1296$은 모두 일의 자리 숫자가 1, 6, 5 중 하나이므로 A 또는 E에 속한다.

- 컴퓨터로 $x \leq \sqrt{243\,723} \approx 493.7$인 모든 경우를 탐색해 보면 $243\,723 - x^2$이 5의 양의 배수가 되는 x는 없고, $x^4 < 26\,081\,974$인(즉 $x \leq 71$인) 모든 x를 탐색해 보면 $2y^4 = 26\,081\,974 - x^4$을 만족하는 y는 없다.

흔한 실수

- E의 일반항을 $5n + 5$로, A의 일반항을 $5n + 1$로 쓰는 것은 괜찮지만, 그러면 n은 0부터 시작한다. 두 가지 규약을 섞어 쓰면 항이 하나씩 어긋난다.
- 소문항 (i)에서 $x^2 > 0$이므로 $48\,745 - y$가 **양의** 정수라는 사실을 쓰는 것을 잊는 경우. 이것이 없으면 수열에는 양의 정수만 들어 있으므로 x^2이 C의 항이라고 할 수 없다.
- 소문항 (ii)에서 x^4만 다루고, 인수 2 때문에 y^4의 나머지가 1에서 2로 바뀐다는 것을 잊는 경우.

STEP 너머

다섯 개의 등차수열은 5를 법(modulus)으로 하는 잉여류(residue class)이고, 이 문제 전체는 $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$에서의 산술이다. 거기서 제곱수는 $0, 1, 4$(**이차잉여**(*quadratic residues*))이고 네 제곱수는 $0, 1$인데, 이는 $5 \nmid a$일 때 $a^4 \equiv 1 \pmod 5$라는 페르마의 소정리(Fermat's little theorem)의 한 예이다. 디오판토스 방정식(Diophantine equation)을 잘 고른 수를 법으로 하여 줄여 보는 것은 해가 없음을 증명하는 첫 번째 도구이다. 대븐포트(Davenport)의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 합동식(congruences)과 이차잉여를 아름답게 전개한다.

풀이

STEP I 2004, 문제 6

순수수학 • 삼각형의 벡터 기하

> **STEP I 2004, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/04-s1-q6

핵심 아이디어

x좌표와 y좌표를 따로 다루지 말고 위치벡터(position vector)로 생각한다. 즉 $\mathbf{a} = (p_1, q_1)$, $\mathbf{b} = (p_2, q_2)$, $\mathbf{c} = (p_3, q_3)$로 쓰면 H의 위치벡터는 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$이다. 그러면 문제에 나오는 모든 직선을 벡터로 짧게 나타낼 수 있고, "직각으로 만난다"는 조건은 "내적(scalar product)이 0이다"가 된다. 이때 나타나는 내적은 제곱의 차(difference of two squares) $(\mathbf{c} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{b})$이며, 문제의 후반부는 이것이 전부이다.

풀이

A, B, C는 한 직선 위에 있지 않다(not collinear)고 가정하여, 이 세 점이 진짜 삼각형을 이룬다고 하자(그렇지 않으면 첫 부분의 직선들이 일치할 수 있어서 교점이 하나로 정해지지 않는다).

중선은 한 점에서 만난다

L, M, N을 각각 BC, CA, AB의 중점이라 하면, 그 위치벡터는 다음과 같다.

$$\mathbf{l} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}), \qquad \mathbf{m} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{c}), \qquad \mathbf{n} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}).$$

직선 AL 위의 일반적인 점은

$$\mathbf{a} + s(\mathbf{l} - \mathbf{a}) = (1 - s)\,\mathbf{a} + \tfrac{s}{2}\,\mathbf{b} + \tfrac{s}{2}\,\mathbf{c},$$

이고, 직선 BM 위의 일반적인 점은

$$\mathbf{b} + t(\mathbf{m} - \mathbf{b}) = \tfrac{t}{2}\,\mathbf{a} + (1 - t)\,\mathbf{b} + \tfrac{t}{2}\,\mathbf{c}.$$

이다. $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$의 계수가 각각 같으면 두 식은 같아진다. 즉 $1-s=\frac{t}{2}$, $\frac{s}{2}=1-t$, $\frac{s}{2}=\frac{t}{2}$이면 된다. 마지막 식에서 $s=t$이고, 이를 $1-s=\frac{s}{2}$에 넣으면 $s=t=\frac{2}{3}$을 얻는데, 이 값은 세 식을 모두 만족한다. 따라서 두 직선은 모두 위치벡터가

$$\mathbf{g}=\tfrac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}), \qquad \text{즉,} \qquad G=\left(\tfrac{p_1+p_2+p_3}{3},\ \tfrac{q_1+q_2+q_3}{3}\right).$$

인 점 G를 지난다.

> **생각해 보기** 계수 비교로 하나의 공통점을 찾았다. 그것이 바로 그 교점이라는 것은 어떻게 아는가?

서로 다른 두 직선은 많아야 한 점에서 만나므로, AL과 BM이 서로 다른 직선이라는 것만 보이면 된다. 만약 두 직선이 같다면 그 직선은 A, B, L을 포함하므로 직선 BL 전체, 즉 직선 BC를 포함한다. 그러면 A가 BC 위에 있게 되어 가정에 모순이다. 따라서 G는 유일한 교점이다.

세 번째 중선 CN에 대해서는 $u=\frac{2}{3}$일 때의 점 $\mathbf{c}+u(\mathbf{n}-\mathbf{c})$를 생각한다.

$$\mathbf{c}+\tfrac{2}{3}\left(\tfrac{1}{2}\mathbf{a}+\tfrac{1}{2}\mathbf{b}-\mathbf{c}\right)=\tfrac{1}{3}\mathbf{a}+\tfrac{1}{3}\mathbf{b}+\tfrac{1}{3}\mathbf{c}=\mathbf{g}.$$

따라서 G는 C와 AB의 중점을 잇는 직선 위에 있으며, 이것이 보이려던 것이다. (매번 나온 값 $\frac{2}{3}$은 무게중심(centroid) G가 각 중선(median) 위에서 꼭짓점으로부터 3분의 2 지점에 있음을 말해 준다.)

H에서의 수직 조건

점 H의 위치벡터는 $\mathbf{h}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$이므로

$$\overrightarrow{AH}=\mathbf{h}-\mathbf{a}=\mathbf{b}+\mathbf{c}, \qquad \overrightarrow{BC}=\mathbf{c}-\mathbf{b}.$$

이다. 직선 AH가 BC와 직각으로 만나면 이 두 방향벡터의 내적은 0이다.

$$0=(\mathbf{c}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{b})=\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}-\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}=(p_3^2+q_3^2)-(p_2^2+q_2^2),$$

여기서 교차항 $\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}$와 $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$는 내적의 교환법칙(commutative)에 의해 서로 소거된다. 따라서

$$p_2^2+q_2^2=p_3^2+q_3^2,$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. 말로 하면, B와 C는 원점 O로부터 같은 거리에 있다.

똑같은 방법으로 $\overrightarrow{BH}=\mathbf{a}+\mathbf{c}$이고 $\overrightarrow{AC}=\mathbf{c}-\mathbf{a}$이므로, BH가 AC와 직각으로 만나면 $(\mathbf{c}+\mathbf{a})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=0$이 되어

$$p_1^2+q_1^2=p_3^2+q_3^2.$$

을 얻는다.

세 번째 수선

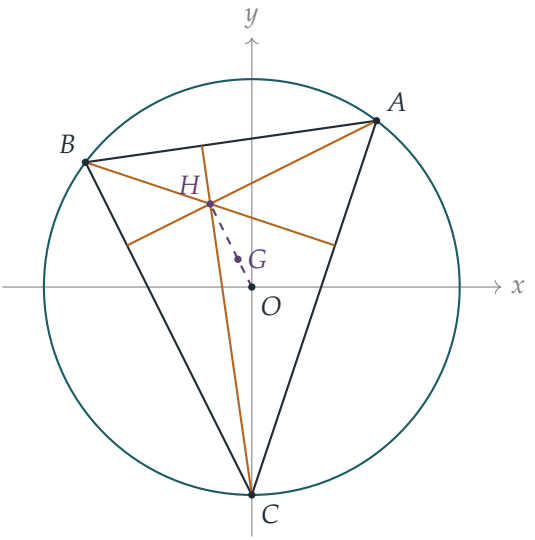
두 수직 조건이 모두 성립한다고 하자. 위의 두 결과를 합치면

$$p_1^2 + q_1^2 = p_3^2 + q_3^2 = p_2^2 + q_2^2, \qquad \text{따라서} \qquad \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}.$$

이다. 이제 $\overrightarrow{CH} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$이고 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$이므로

$$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB} = (\mathbf{b}+\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = 0.$$

이다. 따라서 CH는 AB에 수직이다(단, CH가 진짜 직선이 되도록 $H \neq C$이어야 한다. $H = C$이면 이 명제는 내용이 없다). 이로써 추론이 완성된다.



그림은 마지막 부분의 상황을 보여 준다. A, B, C는 원점 O를 중심으로 하는 원 위에 있고, 세 수선(altitude, 호박색)은 모두 H를 지나며, O, G, H는 $\mathbf{h} = 3\mathbf{g}$를 만족하면서 한 직선 위에 있다.

검산

- $A = (3,4)$, $B = (-4,3)$, $C = (0,-5)$로 잡으면, 세 점 모두 O로부터의 거리가 5이다. 이 때 $H = (-1,2)$이고 $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC} = (-4)(4) + (-2)(-8) = 0$이며, 나머지 두 내적도 0이다. 무게중심은 $G = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$으로 H의 3분의 1이다.
- 수치적으로, 꼭짓점이 정수인 무작위 삼각형 약 2000개에 대해 두 중선의 교점을 분수로 정확히 계산하면 항상 $\frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$였고 세 번째 중선 위에 있었다. 또한 O를 중심으로 하는 원에 내접하는 무작위 삼각형 1000개에 대해 H에 관한 세 내적이 모두 0이 되었다.

흔한 실수

- 두 중선이 G를 지난다는 것만 보이고, 두 중선이 같은 직선일 수 없는 이유를 말하지 않는 것. A, B, C가 한 직선 위에 있지 않다는 한 문장이면 해결된다.
- $\overrightarrow{OH} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$를 AH의 방향으로 쓰는 것. 방향은 $\mathbf{h} - \mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$이다.
- 이 결과가 모든 삼각형에서 성립한다고 생각하는 것. 가정에 의해 O는 A, B, C로부터 같은 거리에 있어야 한다. 원점이 일반적인 위치에 있으면 H는 수심(orthocentre)이 아니다.

STEP 너머

마지막 부분은 삼각형의 세 수선이 한 점에서 만난다(concurrent)는 것을 증명한다. 원점을 외심(circumcentre) O(꼭짓점들로부터 같은 거리에 있는 점)에 두면, 점 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$가 세 수선 위에 모두 놓인다. 또 $\mathbf{h} = 3\mathbf{g}$이므로 외심, 무게중심, 수심이 한 직선, 즉 **오일러 직선**(Euler line) 위에 있고 $OG : GH = 1 : 2$임도 증명된다. 좌표에 의존하지 않는 항등식이 일을 해 주는 이런 벡터식 기하는 대학 1학년 선형대수학(linear algebra)에서 기하를 다루는 방식이다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)가 이를 전개하며, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에는 STEP 유형의 연습 문제가 더 있다.

풀이

STEP I 2004, 문제 7

순수수학 • 생성함수

STEP I 2004, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/04-s1-q7

핵심 아이디어

선형 점화식(linear recurrence)과 멱급수(power series)는 같은 대상을 두 가지 방식으로 기술한 것이다. 급수에 $1 - 7x + 10x^2$를 곱하면 각 계수(coefficient) a_n이 a_{n-1}, a_{n-2}와 나란히 정렬되므로, 점화식에 의해 곱의 계수가 거의 모두 0이 된다. 남는 것은 다항식이므로 f는 유리함수(rational function)이다. 그다음 부분분수(partial fractions)와 등비급수(geometric series)를 이용하면 a_n을 바로 구할 수 있다. 소문항 (ii)도 주어진 값으로부터 p와 q를 구하고 나면 똑같은 방법으로 풀린다.

풀이

소문항 (i)

$|x| < \frac{1}{5}$이면 급수가 수렴(converge)하므로, x의 거듭제곱을 곱하고 급수끼리 항별로 더할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(x) &= a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n, \\ -7x\,\mathrm{f}(x) &= -7a_0 x - \sum_{n=2}^{\infty} 7a_{n-1} x^n, \\ 10x^2 \mathrm{f}(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} 10a_{n-2} x^n. \end{aligned}$$

(둘째 줄과 셋째 줄에서는 모든 합이 $n \geq 2$인 x^n에 대한 합이 되도록 첨자를 다시 붙였다.) 세 식을 더하면

$$\mathrm{f}(x) - 7x\,\mathrm{f}(x) + 10x^2 \mathrm{f}(x) = a_0 + (a_1 - 7a_0)x + \sum_{n=2}^{\infty} \left(a_n - 7a_{n-1} + 10a_{n-2}\right) x^n.$$

점화식에 의해 합 안의 괄호는 모두 o이고, $a_0 = 2$, $a_1 - 7a_0 = 7 - 14 = -7$이다. 따라서

$$(1 - 7x + 10x^2)\,\mathrm{f}(x) = 2 - 7x.$$

이제 $1 - 7x + 10x^2 = (1 - 2x)(1 - 5x)$이고, 이는 $|x| < \frac{1}{5}$에서 o이 아니므로 양변을 나눌 수 있다.

$$\mathrm{f}(x) = \frac{2 - 7x}{(1 - 2x)(1 - 5x)}.$$

분자는 두 인수의 합 $(1 - 5x) + (1 - 2x) = 2 - 7x$이므로

$$\mathrm{f}(x) = \frac{(1 - 5x) + (1 - 2x)}{(1 - 2x)(1 - 5x)} = \frac{1}{1 - 2x} + \frac{1}{1 - 5x},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

$|x| < \frac{1}{5}$이면 $|2x| < 1$이고 $|5x| < 1$이므로, 두 분수는 모두 수렴하는 등비급수의 합이다.

$$\mathrm{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (5x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(2^n + 5^n\right) x^n.$$

? **생각해 보기** 이제 왜 a_n을 바로 읽어 낼 수 있는가?

구간 $|x| < \frac{1}{5}$의 모든 x에서 값이 같은 두 멱급수를 얻었다. 멱급수는 0 근방에서의 값으로 결정된다. 계수를 $a_n = \mathrm{f}^{(n)}(0)/n!$로 되찾을 수 있기 때문이다. 따라서 계수가 일치해야 하고,

$$a_n = 2^n + 5^n \quad \text{모든} n \geq 0.$$

에 대하여 성립한다. (간단히 확인해 보면 $a_0 = 1 + 1 = 2$, $a_1 = 2 + 5 = 7$이다.)

소문항 (ii)

먼저 p와 q를 구해야 한다. 점화식에 $n = 2$와 $n = 3$을 대입하면

$$b_2 = pb_1 + qb_0 : \quad 40 = 10p + 5q, \quad \text{따라서} 2p + q = 8;$$
$$b_3 = pb_2 + qb_1 : \quad 100 = 40p + 10q, \quad \text{따라서} 4p + q = 10.$$

두 식을 빼면 $2p = 2$이므로 $p = 1$, $q = 6$이다. 점화식은 $b_n = b_{n-1} + 6b_{n-2}$이다.

소문항 (i)과 똑같이, $1 - x - 6x^2$를 곱하면 x^2 이후의 모든 계수가 사라진다.

$$(1 - x - 6x^2)\,\mathrm{g}(x) = b_0 + (b_1 - b_0)x = 5 + 5x.$$

$1 - x - 6x^2 = (1 - 3x)(1 + 2x)$이고 이는 $|x| < \frac{1}{3}$에서 o이 아니므로

$$\mathrm{g}(x) = \frac{5 + 5x}{(1 - 3x)(1 + 2x)} = \frac{A}{1 - 3x} + \frac{B}{1 + 2x},$$

이다. 여기서 $5+5x = A(1+2x)+B(1-3x)$이다. $x=\frac{1}{3}$을 대입하면 $\frac{20}{3}=\frac{5}{3}A$이므로 $A=4$이고, $x=-\frac{1}{2}$를 대입하면 $\frac{5}{2}=\frac{5}{2}B$이므로 $B=1$이다. 따라서

$$g(x)=\frac{4}{1-3x}+\frac{1}{1+2x}.$$

$|x|<\frac{1}{3}$이면 $|3x|<1$이고 $|2x|<1$이므로, 둘 다 등비급수로 전개하면

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(4\cdot 3^n+(-2)^n\right)x^n,$$

이고, 앞에서와 같이 계수를 비교하면

$$b_n=4\cdot 3^n+(-2)^n.$$

검산

이 공식은 주어진 값을 그대로 재현한다. $4+1=5$, $12-2=10$, $36+4=40$, $108-8=100$이다. 점화식으로 a_n과 b_n을 $n=39$까지 계산하면 2^n+5^n 및 $4\cdot 3^n+(-2)^n$과 정확히 일치한다. 수치적으로도, $x=0.1$에서 급수의 부분합은 f에 대해 3.25, g에 대해 6.547619…를 주며, 이는 $\frac{1}{0.8}+\frac{1}{0.5}=3.25$ 및 $\frac{4}{0.7}+\frac{1}{1.2}=\frac{275}{42}$와 일치한다.

흔한 실수

- 점화식이 $n=2$부터만 성립한다는 점을 잊는 것. 곱에서 x^0항과 x^1항은 따로 계산해야 하며, 이 항들이 분자가 된다.
- 소문항 (ii)에서 p와 q를 아직 모르는 채로 점화식을 쓰거나, 분자를 $b_0+(b_1-pb_0)x$가 아니라 b_0+b_1x로 쓰는 것.
- $1-x-6x^2$를 인수분해할 때 부호를 잘못 써서, 3^n과 $(-2)^n$ 대신 3^n과 2^n을 얻는 것.

STEP 너머

급수 f를 수열 (a_n)의 **생성함수**(*generating function*)라고 하며, 이 방법은 상수 계수를 갖는 모든 선형 점화식에 통한다. 분모는 언제나 점화식으로부터 만들어지고, 그 인수들이 "특성근(characteristic roots)"(여기서는 2와 5)을 준다. 생성함수는 조합론(combinatorics)과 확률론의 핵심 도구이며, 확률론에서는 확률생성함수(probability generating function)가 확률변수(random variable)의 합을 곱으로 바꾸어 준다. "같은 멱급수는 계수가 같다"는 단계는 해석학(analysis) 첫 강의에서 엄밀하게 정당화된다. 멱급수와 그 유일성에 대해서는 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 보라.

풀이

STEP I 2004, 문제 8

순수수학 • 단조수열과 수학적 귀납법

STEP I 2004, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/04-s1-q8

핵심 아이디어

수열이 증가(increasing)함을 보이려면 차 $t_{n+1} - t_n$을 t_n의 함수로 보면 된다. 두 소문항 모두에서 이 차는 인수분해되며, 그 인수는 정확히 점화식(recurrence)의 고정점(fixed point) 2와 3(즉 $t_{n+1} = t_n$이 되는 값)에 대응한다. 따라서 차의 부호는 t_n이 2와 3에 대하여 어디에 있는지에만 달려 있으므로, 실제로 해야 할 일은 모든 항이 올바른 영역에 머문다는 것을 보이는 귀납법(induction)이다.

풀이

소문항 (i)

임의의 n에 대하여

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n^2 + 6}{5} - x_n = \frac{x_n^2 - 5x_n + 6}{5} = \frac{(x_n - 2)(x_n - 3)}{5}.$$

$x_n > 3$이면 두 인수가 모두 양수이므로 $x_{n+1} - x_n > 0$, 즉 $x_{n+1} > x_n$이다.

이제 모든 항이 3보다 큼을 확인해야 하며, 이를 귀납법으로 보인다. 명제 $x_n > 3$은 가정에 의해 $n = 0$일 때 성립한다. $x_n > 3$이라고 하자. 위의 계산에 의해 $x_{n+1} > x_n > 3$이므로 $x_{n+1} > 3$도 성립한다. 따라서 모든 $n \geq 0$에 대하여 $x_n > 3$이고, 그러므로 모든 $n \geq 0$에 대하여 $x_{n+1} > x_n$이다. 즉 이 수열은 순증가(strictly increasing)한다.

? **생각해 보기** 왜 $x_1 > x_0$만 보이는 것으로는 충분하지 않을까?

부등식 $x_{n+1} > x_n$은 $x_n > 3$으로부터 유도되었으므로, 첫 단계뿐 아니라 모든 단계에서 그 조건이 필요하다. 여기서는 그 조건이 저절로 따라온다. 3보다 위에서 증가하는 한 단계는

3보다 위에 머문다. (정확히 $x_0 = 3$에서 시작하면 상수수열이 되므로, 등호가 없는 부등식이라는 점이 중요하다는 데 주의하자.)

소문항 (ii)

먼저 $2 < y_n < 3$이면 $y_n > 0$이므로 $y_{n+1} = 5 - 6/y_n$이 정의된다는 점에 주목하자. 이러한 y_n에 대하여

$$y_{n+1} - y_n = 5 - \frac{6}{y_n} - y_n = -\frac{y_n^2 - 5y_n + 6}{y_n} = \frac{(y_n - 2)(3 - y_n)}{y_n},$$

이고, 이 값은 $y_n - 2 > 0, 3 - y_n > 0, y_n > 0$이므로 양수이다. 따라서 $2 < y_n < 3$이기만 하면 $y_{n+1} > y_n$이다.

소문항 (i)에서처럼, 모든 항이 이 구간에 있음을 보여야 한다. 이번에는 이것이 자동으로 성립하지 않는데, 증가하는 수열이 3을 넘어설 수도 있기 때문이다. 그래서 3으로부터의 거리를 살펴본다.

$$3 - y_{n+1} = 3 - 5 + \frac{6}{y_n} = \frac{6 - 2y_n}{y_n} = \frac{2(3 - y_n)}{y_n}.$$

생각해 보기 수열이 결코 3을 뛰어넘지 않는다는 것을 어떻게 알 수 있을까?

위의 식은 $y_n > 0$일 때마다 $3 - y_{n+1}$이 $3 - y_n$과 같은 부호를 가진다는 것을 말해 준다. 따라서 3보다 작은 항 다음에는 항상 3보다 작은 항이 온다.

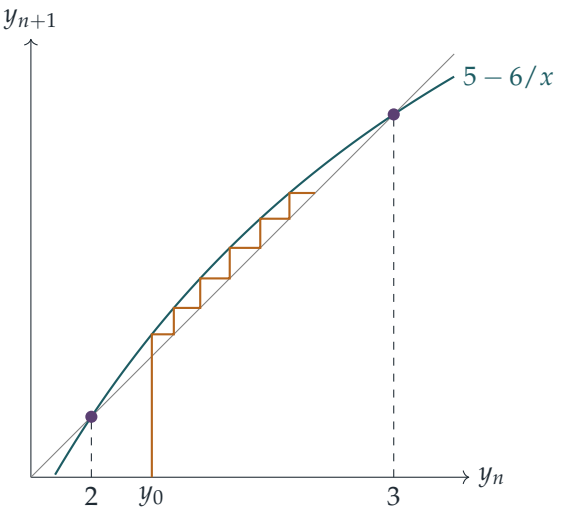
이제 귀납법이다. 주장: 모든 $n \geq 0$에 대하여 $2 < y_n < 3$이다. 이는 가정에 의해 $n = 0$일 때 성립한다. $2 < y_n < 3$이라고 하자. 그러면 다음이 성립한다.

- 차의 계산에 의해 $y_{n+1} > y_n > 2$이다.
- $3 - y_n > 0$이고 $y_n > 0$이므로 $3 - y_{n+1} = 2(3 - y_n)/y_n > 0$이고, 따라서 $y_{n+1} < 3$이다.

그러므로 $2 < y_{n+1} < 3$이고, 귀납법이 완성된다.

모든 n에 대하여 $2 < y_n < 3$이므로 차의 계산이 모든 단계에서 적용되고, 따라서 모든 $n \geq 0$에 대하여 $y_{n+1} > y_n$이다. 이 수열은 순증가하지만, 요구된 대로 모든 n에 대하여 $y_n < 3$이다.

거미줄 그림(cobweb diagram)을 보면 무슨 일이 일어나는지 알 수 있다. 곡선 $y = 5 - 6/x$는 $x = 2$와 $x = 3$에서 직선 $y = x$와 만나고, 그 사이에서는 직선보다 위에 있으며, 반복값(iterate)들은 3을 향해 올라가지만 그 값에 도달하지는 않는다.



검산

- 고정점에서 점화식은 상수수열을 준다. $(3^2+6)/5=3$이고 $5-6/3=3, 5-6/2=2$이며, 이는 인수 $(t-2)(t-3)$과 일치한다.
- $y_0=2.5$에서 시작하면 $y_1=2.6$, $y_2\approx 2.692$, $y_3\approx 2.771$로 증가하며 3보다 작다. 200단계 후에는 y_n과 3의 차이가 10^{-15} 이내이다. $x_0=3.1$에서 시작하면 $x_1=3.122$, $x_2\approx 3.149$로 증가한다.
- 컴퓨터로 수백 개의 무작위 초깃값에 대하여 정확한 분수 계산으로 두 귀납법을 검증하였고, 3보다 약간 작은 x_0에서는 $x_1<x_0$이 됨을 확인하였다. 따라서 조건 $x_0>3$이 필요하다.

흔한 실수

- $x_n>3$이라는 가정 아래 $x_{n+1}>x_n$을 보이고 거기서 멈추어, 모든 항이 3보다 크다는 것을 귀납법으로 증명하지 않는 것.
- 소문항 (ii)에서 $y_{n+1}<3$은 증명하지만, 귀납법을 이어 가려면 $y_{n+1}>2$도 필요하다는 것을 잊는 것(이는 $y_{n+1}>y_n$으로부터 따라 나온다).
- $y_n>0$임을 언급하지 않고 부등식의 양변에 y_n을 곱하는 것.

STEP 너머

소문항 (ii)의 수열은 유계(bounded)인 증가수열이며, 해석학의 **단조수렴정리**(monotone convergence theorem)에 따르면 이러한 수열은 반드시 수렴한다. 임의의 극한 L은 $L = 5 - 6/L$을 만족하므로 여기서는 $y_n \to 3$이다. 소문항 (i)에서는 수열이 한없이 증가하는데, 유한한 극한이 있다면 그것은 3보다 큰 고정점이어야 하지만 그런 고정점은 없기 때문이다. 반복값들이 고정점으로 끌려가는지 아니면 밀려나는지는 그 점에서 사상의 기울기에 달려 있으며, 이것이 이산 동역학계(discrete dynamical systems) 이론의 출발점이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 단조수렴을 자세히 다룬다.

풀이

STEP I 2004, 문제 9

역학 • 포물체 운동

STEP I 2004, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/04-s1-q9

핵심 아이디어

첫 부분은 "최고점에서 연직 방향 속도는 0이다"를 이용하는 표준적인 계산이다. 터널 문제에서는 속력 u가 주어지지 않지만, 그렇다고 마음대로 정할 수 있는 것도 아니다. θ를 정하고 나면 경로가 P를 지나야 한다는 조건이 u를 결정한다. 따라서 u를 소거하고, 최대 높이(greatest height)를 θ만의 함수로 (가장 좋게는 $t = \tan\theta$를 써서) 나타낸 다음, 그것이 언제 천장보다 낮게 유지되는지를 묻는다. 답은 t에 대한 이차부등식(quadratic inequality)으로 나온다.

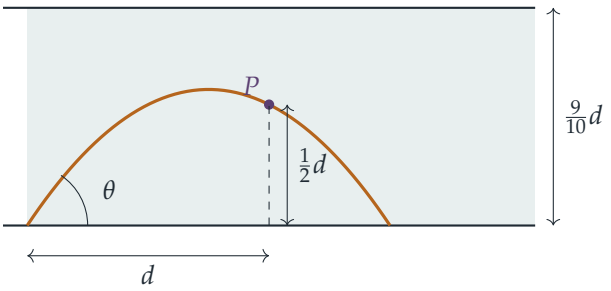
풀이

최대 높이

입자를 공기 저항(air resistance) 없이 중력만 받으며 자유롭게 움직이는 점으로 모형화한다. 발사 지점을 원점으로 하고, x축은 수평 방향, y축은 연직 위 방향으로 잡는다. 속도의 연직 성분은 $u\sin\theta$에서 시작하며 일정한 가속도 $-g$를 가진다. 최고점에서 연직 속도는 0이므로, 연직 방향에 대해 $v^2 = v_0^2 + 2as$를 적용하면

$$0 = u^2\sin^2\theta - 2gH, \qquad \text{따라서} \qquad H = \frac{u^2\sin^2\theta}{2g}.$$

터널



입자의 경로, 즉 궤적(trajectory)은 $x = uT\cos\theta$와 $y = uT\sin\theta - \frac{1}{2}gT^2$에서 시간 T를 소거하여 얻는다.

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\theta} = xt - \frac{gx^2(1+t^2)}{2u^2},$$

여기서 $t = \tan\theta$이고, $\sec^2\theta = 1 + t^2$을 이용했다.

P를 지날 조건. $x = d, y = \frac{1}{2}d$를 대입하고 d로 나누면

$$\frac{1}{2} = t - \frac{gd(1+t^2)}{2u^2}, \qquad \text{따라서} \qquad \frac{gd(1+t^2)}{2u^2} = t - \frac{1}{2}.$$

좌변은 양수이므로 $t > \frac{1}{2}$이어야 한다. (이는 자연스러운 결과이다. 입자는 처음에 θ 방향으로 출발하고 중력은 경로를 아래쪽으로 휘게 할 뿐이므로, 기울기가 $\frac{1}{2}$인 P로 향하는 직선보다 위쪽을 겨냥해야만 P에 도달할 수 있다.) 이러한 각각의 θ에 대해 가능한 속력은 정확히 하나이다.

$$u^2 = \frac{gd(1+t^2)}{2t-1}.$$

> **생각해 보기** 문제에서는 u의 값을 주지 않는다. 어떻게 조건이 θ만으로 주어질 수 있을까?

속력은 우리가 고를 수 있는 것이 아니기 때문이다. "P를 지난다"는 조건이 θ가 정해지는 순간 u를 고정한다. 따라서 최대 높이는 사실상 θ만의 함수이다.

천장에 닿지 않을 조건. H의 공식에 $\sin^2\theta = \dfrac{t^2}{1+t^2}$을 대입하면

$$H = \frac{u^2}{2g}\cdot\frac{t^2}{1+t^2} = \frac{d(1+t^2)}{2(2t-1)}\cdot\frac{t^2}{1+t^2} = \frac{dt^2}{2(2t-1)}.$$

입자가 천장에 닿지 않을 필요충분조건은 $H < \frac{9}{10}d$이다. $2t-1>0$이므로 부등식의 방향을 바꾸지 않고 양변에 $10(2t-1)/d$를 곱할 수 있다.

$$\begin{aligned}\frac{dt^2}{2(2t-1)} < \frac{9d}{10} &\iff 5t^2 < 9(2t-1)\\ &\iff 5t^2-18t+9<0\\ &\iff (5t-3)(t-3)<0\\ &\iff \tfrac{3}{5}<t<3.\end{aligned}$$

이 구간의 모든 t는 $t>\frac{1}{2}$를 만족하므로, 앞의 조건은 새로운 제약을 더하지 않는다. $t=\frac{3}{5}$ 또는 $t=3$이면 입자가 천장에 살짝 닿으므로 제외된다. 천장에 전혀 부딪히지 않으므로 입자는 다시 바닥으로 내려와 터널 안에 착지한다.

마지막으로 θ는 0과 $\frac{\pi}{2}$ 사이에 있고, 이 범위에서 tan는 증가하므로

$$\arctan\tfrac{3}{5}<\theta<\arctan 3,$$

가 되어 요구한 결과를 얻는다.

검산

- $t=3$일 때 $H=\dfrac{9d}{2\cdot 5}=\frac{9}{10}d$이고, $t=\frac{3}{5}$일 때 $H=\dfrac{(9/25)d}{2\cdot(1/5)}=\frac{9}{10}d$이다. 예상대로 두 끝점 모두 천장을 스친다.
- $t\to\frac{1}{2}^+$이면 필요한 속력은 $u\to\infty$이고 $H\to\infty$이다. 입자가 P로 가는 직선을 거의 그대로 따라 이동하므로 매우 빨라야 하고, 그 뒤에는 매우 높이 올라간다.
- 수치적으로 $d=3, g=9.8$로 두고 10^5개의 무작위 각도를 시험했다. 각 각도에 대해 u를 구하고 경로가 P를 지나는지 확인했으며, $H<\frac{9}{10}d$가 되는 것은 정확히 $0.5404<\theta<1.2490$일 때임을 확인했다(이는 라디안으로 나타낸 $\arctan 0.6$과 $\arctan 3$이다). 단계별 시뮬레이션으로도 $H=u^2\sin^2\theta/(2g)$임을 확인했다.

흔한 실수

- u를 별개의 미지수로 취급하다가 막히는 경우. 이 값은 P에서의 조건을 이용해 소거해야 한다.
- 부등식의 양변에 $2t-1$을 곱하기 전에 그 부호를 확인하는 것을 잊는 경우.
- P가 천장보다 아래에 있는지만 확인하는 경우. 경로의 최고점은 보통 P를 지난 뒤에 나타나므로, 중요한 것은 최대 높이이다.

STEP 너머

궤적을 $\tan\theta$로 나타내면 포물체 운동(projectile motion) 문제가 t에 대한 이차식 문제로 바뀐다. 같은 기법으로 주어진 속력을 갖는 모든 궤적의 "포락선"(envelope, 궤적들을 둘러싸는 경계 포물선)을 구할 수 있고, 목표물을 맞히는 두 가지 가능한 각도도 얻을 수 있다. 이처럼 일부 매개변수는 제약 조건에 의해 고정되고 나머지가 허용 영역을 이루는 문제는 최적화(optimisation)와 변분법(calculus of variations)으로 이어진다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이런 방식의 역학을 공부하기 위한 훌륭한 다음 단계이다.

풀이

STEP I 2004, 문제 10

역학 • 등가속도 운동

STEP I 2004, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

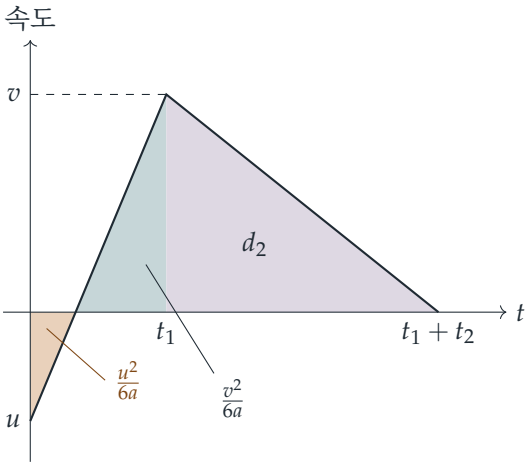
step.maths.org/questions/04-s1-q10

핵심 아이디어

이 문제의 모든 운동은 등가속도(constant acceleration) 운동이므로, $v^2 = u^2 + 2as$와 $v = u + at$만으로 모든 계산을 해낼 수 있다. 유일한 함정은 **거리**(distance)라는 낱말이다. $u < 0$이면 입자는 처음에 뒤로 움직이다가 멈추고, 그다음에야 앞으로 속력을 높인다. 따라서 거리 d_1은 하나의 변위(displacement)가 아니라 두 조각의 합이다. 속도-시간 그래프(velocity–time graph)를 그리면 이 점이 선명하게 드러난다. 거리는 그래프와 시간축 사이의 전체 넓이이며, 축 아래에 있는 넓이도 양수로 센다.

풀이

최종 속도 v의 방향을 양의 방향으로 잡는다. 첫 번째 단계에서 가속도는 $+3a$이고(속도를 u에서 $v > u$까지 올리므로), 두 번째 단계에서는 속도가 0이 될 때까지 가속도가 $-a$이다. 전 과정에서 $a > 0$이다.



그래프는 $u < 0$인 경우를 나타낸다. 축 아래의 작은 삼각형이 뒤로 움직인 구간이다.

두 번째 단계(두 경우 공통). 감속도(deceleration) a로 속력 v에서 정지할 때까지 입자는 방향을 바꾸지 않으므로

$$0 = v^2 - 2ad_2 \quad \Longrightarrow \quad d_2 = \frac{v^2}{2a}.$$

소문항 (i)

$u > 0$이면 속도는 u에서 v로 증가하며 계속 양수이므로, 거리는 변위와 같다.

$$v^2 = u^2 + 2(3a)d_1 \quad \Longrightarrow \quad d_1 = \frac{v^2 - u^2}{6a}.$$

따라서

$$3d_1 = \frac{v^2 - u^2}{2a} < \frac{v^2}{2a} = d_2,$$

이다. $u^2 > 0$이기 때문이다. 그러므로 요구한 대로 $3d_1 < d_2$이다.

소문항 (ii)

이제 $u < 0$이고, 첫 번째 단계는 둘로 나뉜다.

? **생각해 보기** 왜 $v^2 = u^2 + 6ad_1$을 다시 그대로 쓸 수 없을까?

그 공식이 주는 것은 **변위** $\frac{v^2-u^2}{6a}$이다. 그런데 입자는 먼저 뒤로 움직인다. 가속도 $3a$로 속력 $|u|$에서 정지할 때까지 느려지면서 $\frac{u^2}{6a}$만큼 이동한다($0 = u^2 - 2(3a)s$에서). 그다음 정지 상태에서 v까지 속력을 높이면서 $\frac{v^2}{6a}$만큼 이동한다. 거리는 이 둘의 합이다.

$$d_1 = \frac{u^2 + v^2}{6a}, \qquad \text{따라서} \qquad 3d_1 = \frac{u^2 + v^2}{2a}.$$

$d_2 = \frac{v^2}{2a}$, $2d_2 = \frac{2v^2}{2a}$와 비교하면 다음과 같다.

- $u \neq 0$이므로 $3d_1 - d_2 = \dfrac{u^2}{2a} > 0$이다.
- $v > |u|$이므로 $2d_2 - 3d_1 = \dfrac{v^2 - u^2}{2a} > 0$이다.

따라서 요구한 대로 $d_2 < 3d_1 < 2d_2$이다.

평균 속력

시간은 방향과 무관하다. 첫 번째 단계에서 속도는 비율 $3a$로 $v - u$만큼 변하고, 두 번째 단계에서는 비율 a로 v만큼 변하므로, u의 부호와 관계없이

$$t_1 = \frac{v-u}{3a}, \qquad t_2 = \frac{v}{a}, \qquad t_1 + t_2 = \frac{4v-u}{3a},$$

이다.

$u > 0$인 경우. 전체 거리는 $\frac{v^2-u^2}{6a} + \frac{3v^2}{6a} = \frac{4v^2-u^2}{6a}$이므로, 평균 속력(average speed)은

$$S_+ = \frac{4v^2-u^2}{6a} \cdot \frac{3a}{4v-u} = \frac{4v^2-u^2}{2(4v-u)}.$$

$u < 0$인 경우. $0 < w < v$인 w에 대하여 $u = -w$로 놓는다. 전체 거리는 $\frac{v^2+w^2}{6a} + \frac{3v^2}{6a} = \frac{4v^2+w^2}{6a}$이고 시간은 $\frac{4v+w}{3a}$이므로

$$S_- = \frac{4v^2+w^2}{2(4v+w)}.$$

두 값을 비교하기 위해 각각을 $\frac{1}{2}v$와 견주어 본다.

$$S_+ - \tfrac{1}{2}v = \frac{4v^2-u^2-v(4v-u)}{2(4v-u)} = \frac{u(v-u)}{2(4v-u)},$$
$$S_- - \tfrac{1}{2}v = \frac{4v^2+w^2-v(4v+w)}{2(4v+w)} = -\frac{w(v-w)}{2(4v+w)}.$$

첫 번째 경우에는 $0 < u < v$이므로 첫 번째 식의 분자와 분모가 모두 양수이고, 따라서 $S_+ > \frac{1}{2}v$이다. 두 번째 경우에는 $0 < w < v$이므로 두 번째 식은 음수이고, 따라서 $S_- < \frac{1}{2}v$이다. 그러므로

$$S_- < \tfrac{1}{2}v < S_+,$$

이고, 요구한 대로 $u > 0$일 때 평균 속력이 더 크다. 이 결과는 두 경우의 $|u|$ 값이 같을 때만이 아니라 어떤 값이든 성립한다는 점에 주목하자. 같은 v와 a에 대하여, $\frac{1}{2}v$는 $u > 0$인 모든 운동과 $u < 0$인 모든 운동을 갈라놓는다.

검산

- $v = 2, a = 1$로 놓는다. $u = 1$이면 $d_1 = \frac{1}{2}, d_2 = 2$이므로 $3d_1 = 1.5 < 2$이고, 시간은 $\frac{7}{3}$이어서 $S_+ = \frac{2.5}{7/3} \approx 1.071 > 1$이다. $u = -1$이면 $d_1 = \frac{5}{6}$이므로 $2 < 3d_1 = 2.5 < 4$이고, 시간은 3이어서 $S_- = \frac{17/6}{3} \approx 0.944 < 1$이다. 운동을 단계별로 수치 시뮬레이션해 보면 이 값들이 그대로 재현된다.
- 극한: $u \to 0$ 또는 $|u| \to v$일 때 두 평균 속력은 모두 $\frac{1}{2}v$로 수렴하는데, 이는 정지 상태에서 출발했다가 다시 멈추는 단순한 운동의 평균 속력이다. 허용된 범위의 끝에서는 부등식도 등식이 된다. 두 소문항 모두에서 $u \to 0$일 때 $3d_1 \to d_2$이고, 소문항 (ii)에서 $u \to -v$일 때 $3d_1 \to 2d_2$이다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)에서 $d_1 = \frac{v^2 - u^2}{6a}$을 쓰는 것. 이것은 변위이며, 이를 쓰면 다시 $3d_1 < d_2$가 나와서 보여야 할 결과와 모순된다.
- $u < 0$일 때 시간도 나누어 계산해야 한다고 생각하는 것. 그럴 필요가 없다. $v = u + 3at_1$은 방향이 바뀌는 점을 지나서도 그대로 성립한다.

STEP 너머

변위와 거리의 차이는 $\int v\,\mathrm{d}t$와 $\int |v|\,\mathrm{d}t$의 차이이다. 뒤의 것은 경로의 호의 길이(arc length)이며, 자동차의 주행 거리계가 재는 양이 바로 이것이다. 대학 역학에서는 호의 길이가 곡선 궤적을 기술하는 자연스러운 매개변수가 되며, 이로부터 가속도의 접선 성분과 법선 성분(tangential and normal components)이 나온다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이런 방식으로 운동학을 전개한다.

풀이

STEP I 2004, 문제 11

역학 • 마찰과 경첩 사다리

STEP I 2004, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/04-s1-q11

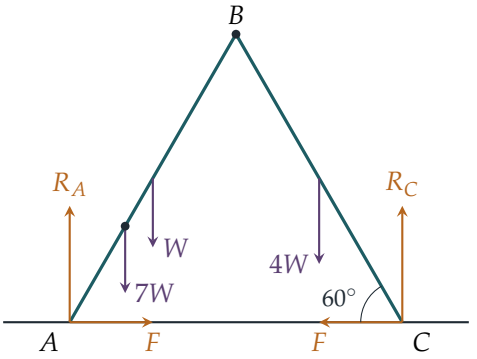
핵심 아이디어

어느 쪽도 미끄러지기 전에는 구조 전체가 평형(equilibrium) 상태이므로, 계 전체를 보고 두 수직항력(normal reaction)을 구하고 사다리 하나만 따로 보고 마찰력(friction)을 구할 수 있다(경첩에 대한 모멘트(moment)를 잡으면 알 수 없는 경첩의 힘이 사라진다). 수평 방향의 외력은 두 마찰력뿐이므로 두 마찰력의 크기는 같다. 수직항력이 **더 작은** 발 쪽이 더 큰 비율 F/R을 필요로 하고, 바로 그 발이 먼저 미끄러진다.

풀이

각 사다리를 길이 $2a$인 균일한 막대(uniform rod)로, B의 경첩을 매끄러운 것으로, 도장공을 질점(particle)으로 모형화한다. $AB = BC$이고 $\angle ABC = 60°$이므로 삼각형 ABC는 정삼각형이다. 즉 $AC = 2a$이고 각 사다리는 지면과 $60°$를 이룬다. 그러면 B는 각 발에서 수평 거리 a만큼 떨어져 있고, 지면에서 높이 $a\sqrt{3}$인 곳에 있다.

도장공이 AB를 3분의 1만큼 올라갔을 때, 도장공은 A에서 수평 거리 $\frac{1}{3}a$인 곳에 있다. AB의 중심은 A에서 $\frac{1}{2}a$, BC의 중심은 A에서 $\frac{3}{2}a$인 곳에 있다.



수직항력

A와 C에서의 수직항력을 각각 R_A, R_C라 하자. 계 전체에 대해 연직 방향으로 힘을 분해하면

$$R_A + R_C = W + 4W + 7W = 12W.$$

계 전체에 대해 A에 관한 모멘트를 잡으면(경첩의 힘은 내력이므로 나타나지 않는다)

$$R_C \cdot 2a = W \cdot \tfrac{1}{2}a + 7W \cdot \tfrac{1}{3}a + 4W \cdot \tfrac{3}{2}a = \tfrac{53}{6}Wa,$$

이므로

$$R_C = \tfrac{53}{12}W, \qquad R_A = 12W - \tfrac{53}{12}W = \tfrac{91}{12}W.$$

마찰력

두 발은 바깥쪽으로 벌어지려 하므로 각 발의 마찰력은 안쪽을 향한다. 계 전체에 대해 수평 방향으로 힘을 분해하면, 마찰력이 유일한 수평 외력이므로 두 마찰력의 크기는 같다. 이 크기를 F라 하자.

F를 구하려면 사다리 하나만 따로 보아야 한다. 도장공이 없는 BC를 택하고, 알 수 없는 경첩의 힘이 사라지도록 B에 관한 모멘트를 잡는다. B에 대해 수직항력 R_C의 팔 길이(lever arm)는 a, 무게 $4W$의 팔 길이는 $\frac{1}{2}a$, 마찰력 F(지면 높이에서 수평으로 작용)의 팔 길이는 $a\sqrt{3}$이다. 무게와 F는 BC를 한쪽 방향으로 돌리고 R_C는 반대 방향으로 돌리므로

$$R_C \cdot a = 4W \cdot \tfrac{1}{2}a + F \cdot a\sqrt{3} \quad \Longrightarrow \quad F = \frac{R_C - 2W}{\sqrt{3}} = \frac{29W}{12\sqrt{3}}.$$

검산으로, AB에 대해 B에 관한 같은 계산을 하면 $R_A \cdot a = W \cdot \frac{1}{2}a + 7W \cdot \frac{2}{3}a + Fa\sqrt{3}$이므로 $F\sqrt{3} = \frac{91}{12}W - \frac{31}{6}W = \frac{29}{12}W$가 되어 일치한다.

어느 사다리가 미끄러지는가?

생각해 보기 두 발의 마찰력이 같은데, 어느 쪽이 먼저 밀려나는지 어떻게 알 수 있을까?

한 발이 미끄러지기 직전인 것은 필요한 마찰력이 그 발에서의 수직항력의 μ배와 같아질 때이다. 두 발 모두 같은 F가 필요하므로, 수직항력이 더 작은 발이 더 큰 비율을 필요로 한다.

$$\frac{F}{R_A} = \frac{29}{91\sqrt{3}} \approx 0.184, \qquad \frac{F}{R_C} = \frac{29}{53\sqrt{3}} \approx 0.316.$$

따라서 C가 먼저 한계 마찰(limiting friction)에 이른다. 도장공은 AB 위에 있는데도, 미끄러지는 것은 **더 무거운 사다리** BC이다. 도장공의 무게는 A를 지면에 단단히 눌러 주는 반면, C는 하중을 훨씬 적게 받는다.

그보다 앞서 미끄러진 곳이 없었는지도 확인해야 한다. 도장공이 비율 t만큼 올라갔다면, 같은 계산으로 $R_C = (\frac{13}{4} + \frac{7}{2}t)W$이고 $F\sqrt{3} = R_C - 2W = (\frac{5}{4} + \frac{7}{2}t)W$이므로

$$\frac{F}{R_C} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\frac{5}{4} + \frac{7}{2}t}{\frac{13}{4} + \frac{7}{2}t} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{2}{\frac{13}{4} + \frac{7}{2}t}\right),$$

이고, 이 값은 t에 대해 증가한다. 마찬가지로 F/R_A도 t에 대해 증가한다(분자는 커지고 분모 $R_A = 12W - R_C$는 작아진다). 따라서 도장공이 올라갈수록 필요한 비율은 꾸준히 커지고, 처음 미끄러짐은 정확히 F/R_C가 μ에 이르는 $t = \frac{1}{3}$에서 일어난다. 그러므로

$$\mu = \frac{29}{53\sqrt{3}} = \frac{29\sqrt{3}}{159} \approx 0.316.$$

검산

- AB에 대해 B에 관한 모멘트를 잡아도 BC에 대해 B에 관한 모멘트를 잡은 것과 같은 F가 나오므로(위에서 보였다) 반력들은 서로 모순이 없다.
- 도장공이 전혀 없다면 BC가 더 무거우므로 R_C가 R_A보다 커야 한다. 실제로 이때 A에 관한 모멘트를 잡으면 $R_C = \frac{13}{4}W$, $R_A = \frac{7}{4}W$이고, 합은 $5W$이다.
- $t = \frac{11}{14}$일 때 $R_A = R_C$이다. 이 지점을 넘어서야만 AB가 미끄러지는 쪽이 되므로, $t = \frac{1}{3}$에서는 BC가 미끄러져야 한다.
- 수치적으로, 좌표로부터 모든 힘을 다시 계산하면(두 사다리 모두에 대해 B에 관한 모멘트도 확인하면) $\mu \approx 0.31591$을 얻는다.

흔한 실수

- 도장공이 올라선 사다리가 미끄러진다고 가정하는 것. 도장공의 무게는 A에서의 수직 항력을 키워 그 발을 더 안정되게 만든다.
- 사다리 하나에 대해 발에 관한 모멘트를 잡아, 알 수 없는 경첩의 힘을 끌어들이는 것. 사다리 하나에 대해 B에 관한 모멘트를 잡으면 이를 피할 수 있다.
- 경첩에 대한 마찰력의 팔 길이가 $a\sqrt{3}$(B의 높이)이라는 것을 잊는 것.

STEP 너머

이것이 관절로 이어진 구조물에 대한 정역학(statics)의 기본 전략이다. 먼저 구조 전체를 보고 외부 반력을 구한 다음, 관절에서 구조를 잘라 한 부재가 감당해야 하는 힘을 구한다. 어느 접촉이 먼저 무너지는가 하는 문제는 뼈대 구조(frame)의 해석과, 구속 조건에 맞는 작은 변위를 생각하여 평형을 구하는 가상일의 원리(principle of virtual work)로 이어진다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 강체 정역학과 마찰을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP I 2004, 문제 12

확률과 통계 • 베이즈 정리

STEP I 2004, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/04-s1-q12

핵심 아이디어

그룹 1에서 뽑은 표본은 칩이 그룹 1에 있다는 **조건 아래에서** 그 칩이 기계 A에서 나왔을 조건부 확률(conditional probability)을 근사적으로 알려 준다. 따라서 베이즈 정리(Bayes' theorem)를 이용해 이 조건부 확률을 λ, p, q로 나타내고, 이것을 관찰된 비율과 같다고 놓은 뒤 λ에 대해 푼다. 분류가 잘못되는 경우에 달라지는 것은 각 기계에서 나온 칩이 그룹 1에 들어갈 확률뿐이며, 방법은 똑같다.

풀이

공장의 생산품 중에서 칩 하나를 임의로 고른다. 그 칩이 기계 A에서 만들어졌다는 사건을 A라 하고(따라서 $\mathrm{P}(A) = \lambda$, $\mathrm{P}(A') = 1 - \lambda$이다), 칩이 완벽하다는 사건을 P, 칩이 그룹 1에 분류된다는 사건을 G라 하자. 문제에서 $\mathrm{P}(P \mid A) = p$, $\mathrm{P}(P \mid A') = q$라고 주어져 있다.

그룹 1에서 임의로 뽑은 칩은 생산품 전체에서 임의로 뽑은 칩을 G라는 조건 아래에서 본 것과 같다. 표본이 크므로 관찰된 비율 $\frac{2}{5}$는 $\mathrm{P}(A \mid G)$의 좋은 추정값이며, λ의 추정값은 $\mathrm{P}(A \mid G)$를 정확히 $\frac{2}{5}$로 만드는 값이다.

완벽한 분류

이 경우 G는 P와 같은 사건이다. 베이즈 정리에 의해

$$\mathrm{P}(A \mid P) = \frac{\mathrm{P}(P \mid A)\,\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(P \mid A)\,\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(P \mid A')\,\mathrm{P}(A')} = \frac{\lambda p}{\lambda p + (1-\lambda)q}.$$

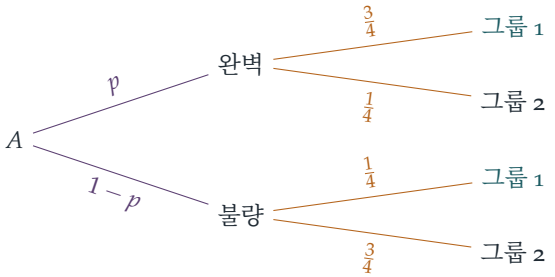
이것을 $\frac{2}{5}$와 같다고 놓고 양변에 분모를 곱하면(분모는 양수이다)

$$5\lambda p = 2\lambda p + 2(1-\lambda)q$$
$$3\lambda p + 2\lambda q = 2q$$
$$\lambda = \frac{2q}{3p+2q},$$

이고, $3p + 2q > 0$이므로 이것이 구하는 추정값이다.

잘못된 분류

이제 칩이 그룹 1에 들어가는 경우는 완벽한 칩이 올바르게 분류되는 경우와 불량 칩이 잘못 분류되는 경우 두 가지이다. 분류 오류는 칩을 만든 기계와 독립적으로 일어난다고 가정한다. 즉 칩이 완벽한지 아닌지가 주어지면, 그 칩의 분류는 어느 기계에서 나왔는지에 의존하지 않는다. 아래 수형도는 기계 A에서 나온 칩의 가지를 보여 준다. 기계 B는 p 대신 q를 넣으면 똑같다.



그룹 1로 가는 두 가지를 더하면

$$\mathrm{P}(G \mid A) = \tfrac{3}{4}p + \tfrac{1}{4}(1-p) = \frac{1+2p}{4}, \qquad \mathrm{P}(G \mid A') = \tfrac{3}{4}q + \tfrac{1}{4}(1-q) = \frac{1+2q}{4}.$$

따라서 다시 베이즈 정리에 의해(인수 $\frac{1}{4}$는 약분된다)

$$\mathrm{P}(A \mid G) = \frac{\lambda(1+2p)}{\lambda(1+2p) + (1-\lambda)(1+2q)}.$$

생각해 보기 증거가 달라졌는가? $\frac{2}{5}$를 여전히 사용해야 하는가?

그렇다. 표본은 실제로 그룹 1에서 뽑았고, 그 중 $\frac{2}{5}$는 실제로 기계 A에서 나왔다. 달라진 것은 칩이 그룹 1에 들어가는 방식에 대한 우리의 모형뿐이다. 따라서 $\mathrm{P}(A \mid G)$에 대한 새 식

을 $\frac{2}{5}$와 같다고 놓는다.

$$\begin{aligned} 5\lambda(1+2p) &= 2\lambda(1+2p) + 2(1-\lambda)(1+2q) \\ \lambda\big[3(1+2p) + 2(1+2q)\big] &= 2(1+2q) \\ \lambda &= \frac{2(1+2q)}{5+6p+4q}. \end{aligned}$$

이것이 λ의 새 추정값이다. 이 답은 첫 번째 답에서 p와 q를 그룹 1에 들어갈 새 확률인 $\frac{1+2p}{4}$와 $\frac{1+2q}{4}$로 바꾼 것임에 주목하자.

검산

- $p = q$이면 두 기계는 품질로 구별되지 않으므로 그룹 1은 생산 비율을 그대로 반영해야 하고 λ는 $\frac{2}{5}$가 되어야 한다. 두 공식 모두 이 값을 준다: $\frac{2p}{5p} = \frac{2}{5}$, $\frac{2(1+2p)}{5+10p} = \frac{2}{5}$.
- 두 추정값 모두 분자가 양수이고 분모보다 작으므로 0과 1 사이에 엄격하게 놓인다.
- $\lambda = 0.3$, $p = 0.6$, $q = 0.8$이고 분류가 잘못되는 경우에 칩 4×10^5개로 모의실험(simulation)을 하였더니, 그룹 1 중 기계 A에서 나온 비율이 0.2667로, 공식의 값 0.2661과 비교된다. 모의실험에서 얻은 비율로 공식을 거꾸로 풀면 $\lambda \approx 0.301$을 되찾는다.

흔한 실수

- $\frac{2}{5}$를 조건부 확률 $\mathrm{P}(A \mid G)$가 아니라 $\mathrm{P}(G \mid A)$나 λp와 같다고 놓는 것.
- 두 번째 부분에서 그룹 1에 잘못 들어간 불량 칩을 빠뜨리는 것, 즉 $\frac{3}{4}p$만 사용하는 것.

STEP 너머

관찰된 자료에 "정확히 들어맞는" 모수(parameter) 값을 고르는 것은 **적률법**(method of moments)이다. 여기서는 이것이 최대가능도 추정(maximum likelihood estimation)과 일치하는데, 최대가능도 추정은 대학 첫 통계학 강의에서 만나게 된다. 잘못 분류하는 기계는 측정 오차(measurement error), 즉 오분류(misclassification)의 간단한 모형이다. 이는 의학 검사에서 심각한 실제 문제로, 위양성(false positive)과 위음성(false negative)이 바로 이런 식으로 관찰된 비율을 왜곡한다. 베이즈 정리와 조건부 확률에 대해 더 알고 싶다면 Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)를 보라.

풀이

STEP I 2004, 문제 13

확률과 통계 • 균등분포 확률변수의 최댓값

> **STEP I 2004, 13번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/04-s1-q13

핵심 아이디어

서로 독립(independent)인 여러 수의 최댓값(maximum)이 x 이하인 것은 그 수들 **하나하나가 모두** x 이하인 것과 정확히 같다. 이렇게 하면 다루기 까다로운 "최댓값"이 똑같은 확률들의 곱으로 바뀌고, X의 분포함수(distribution function)를 단 한 줄로 얻는다. 나머지는 모두 여기서 따라 나온다. 미분하여 확률밀도함수(density)와 기댓값(expectation)을 구하고, 분포함수를 0.05와 같다고 놓아 검정(test)의 임계값(critical value)을 찾는다.

풀이

소문항 (i)

세 수를 U_1, U_2, U_3이라 하자. 이들은 서로 독립이고 각각 $[0,1]$에서 균등분포(uniform distribution)를 따르므로, $0 \le x \le 1$에 대하여 $\mathrm{P}(U_i \le x) = x$이다. $X = \max(U_1, U_2, U_3)$이므로

$$X \le x \iff U_1 \le x,\ U_2 \le x \text{ 그리고} U_3 \le x.$$

독립성에 의하여

$$F(x) = \mathrm{P}(X \le x) = x^3 \qquad (0 \le x \le 1).$$

특히 $\mathrm{P}(X \le 0.8) = 0.8^3 = 0.512$이므로 요구한 결과가 성립한다.

미분하면 X의 확률밀도함수는 $[0,1]$에서 $f(x) = F'(x) = 3x^2$이므로

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^1 x \cdot 3x^2 \,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{3}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{3}{4}.$$

이는 타당하다. 세 수 가운데 가장 큰 수는 한 수의 평균 $\frac{1}{2}$보다 꽤 위에 있어야 하기 때문이다.

소문항 (ii)

이제 서로 독립인 N개의 수가 있고, 각각 $[0, a]$에서 균등분포를 따르므로 $0 \le x \le a$에 대하여 $\mathrm{P}(U_i \le x) = x/a$이다. 같은 논법으로

$$\mathrm{P}(X \le x) = \left(\frac{x}{a}\right)^N \qquad (0 \le x \le a),$$

이고, $x \ge a$이면 $\mathrm{P}(X \le x) = 1$이다. X는 연속확률변수이므로 $\mathrm{P}(X < x)$도 이와 같다.

임계값. 이 검정은 $x < c$일 때 H_0을 기각하며, 유의수준(significance level) 5%라는 것은 H_0이 참일 때($a = 1$) 기각할 확률이 0.05라는 뜻이다.

$$\mathrm{P}(X < c \mid a = 1) = c^N = 0.05, \qquad \text{따라서} \qquad c = 0.05^{1/N}.$$

x의 값이 작으면 $a < 1$이라는 증거가 되므로, 기각역(rejection region)은 $x < c$이다.

> **?** **생각해 보기** "$x \le 0.8$이면 언제나 기각된다"는 조건을 어떻게 N에 대한 부등식으로 바꿀 수 있을까?

모든 $x \le 0.8$이 기각되는 것은 그러한 x가 모두 c보다 작을 때, 즉 $0.8 < c$일 때와 정확히 같다. $t > 0$에서 $t \mapsto t^N$은 증가함수이므로, 이는 다음과 동치이다.

$$0.8^N < c^N = 0.05.$$

따라서 $0.8^N < 0.05$를 만족하는 가장 작은 정수 N을 구해야 한다. (N이 커질수록 c가 1에 가까워지므로, N이 클수록 검정이 더 쉽게 기각한다는 점에 주의하자.)

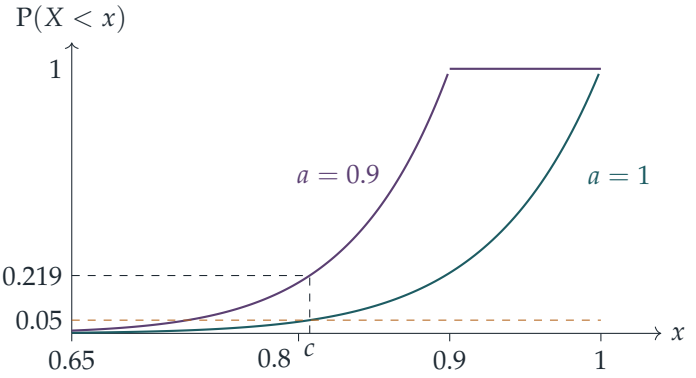
$2^{10} \approx 10^3$ 이용하기. $0.8 = 2^3/10$으로 쓰면 $0.8^N = 2^{3N}/10^N$이다.

- $N = 13$: $0.8^{13} = \dfrac{2^{39}}{10^{13}} = \dfrac{2^9 \cdot 2^{30}}{10^{13}} \approx \dfrac{512 \times 10^9}{10^{13}} = 0.0512 > 0.05.$
- $N = 14$: $0.8^{14} = \dfrac{2^{42}}{10^{14}} = \dfrac{2^2 \cdot 2^{40}}{10^{14}} \approx \dfrac{4 \times 10^{12}}{10^{14}} = 0.04 < 0.05.$

N이 커질수록 0.8^N은 감소하므로, $N \le 13$인 모든 경우도 조건을 만족하지 못한다. 따라서 가장 작은 값은

$$N = 14.$$

($2^{10} = 1024$이므로 이 근사는 2의 거듭제곱을 약간 작게 어림한다. 실제 값 $0.8^{13} \approx 0.0550$과 $0.8^{14} \approx 0.0440$으로도 같은 결론에 이른다.)



$N = 14$일 때 임계값은 $c = 0.05^{1/14} \approx 0.807$로, 0.8보다 아주 조금 크다.

$a = 0.8$인 경우. 모든 수가 $[0, 0.8]$에 있으므로 반드시 $X \le 0.8 < c$이다. 귀무가설(null hypothesis)은 확률 1로 기각된다.

$a = 0.9$인 경우. 이제 $c \approx 0.807 < 0.9$이므로

$$\mathrm{P}(\text{기각}) = \mathrm{P}(X < c \mid a = 0.9) = \left(\frac{c}{0.9}\right)^{14} = \frac{c^{14}}{0.9^{14}} = \frac{0.05}{0.9^{14}}.$$

여기서 $0.9^2 = 0.81, 0.9^4 = 0.6561, 0.9^8 \approx 0.4305$이므로 $0.9^{14} = 0.9^8 \cdot 0.9^4 \cdot 0.9^2 \approx 0.2288$이다. 따라서

$$\mathrm{P}(\text{기각} \mid a = 0.9) = \frac{0.05}{0.9^{14}} \approx 0.219.$$

즉 관측값이 14개나 있어도, 이 검정은 a가 1이 아니라 0.9라는 사실을 대개 알아채지 못한다.

검산

- 몬테카를로 시뮬레이션(Monte Carlo simulation)(2×10^5회 시행)으로 소문항 (i)에서 $\mathrm{P}(X \le 0.8) \approx 0.512$, $\mathrm{E}(X) \approx 0.750$을 얻었다.
- 일반적으로 $[0, 1]$에서 균등분포를 따르는 n개의 수의 최댓값의 평균은 $\frac{n}{n+1}$이다. $n = 1$이면 당연히 $\frac{1}{2}$이고, $n = 3$이면 $\frac{3}{4}$이다.
- $N = 14$, $c = 0.05^{1/14}$일 때 시뮬레이션 결과 기각 비율은 $a = 1$에서 약 0.0505(검정의 크기(size))였고, $a = 0.9$에서 약 0.218로 $0.05/0.9^{14} = 0.2186$과 일치하였다.

흔한 실수

- 0.8^N 대신 $1 - 0.8^N$을 쓰는 실수. 최댓값이 **작을** 확률은 곱 0.8^N이지, 그 여사건의 확률이 아니다.
- $a = 0.9$에서의 기각 확률을 $(0.8/0.9)^{14}$로 계산하는 실수. 검정은 $x < c$일 때 기각하며, c는 0.8이 아니다.
- 0.0512가 "대략 0.05"라는 이유로 $N = 13$에서 멈추는 실수. 0.05보다 엄격하게 작아야 한다.

STEP 너머

최댓값은 **순서통계량**(order statistic)의 하나이며, $[0, a]$에서의 균등분포에 대해서는 a의 **충분통계량**(sufficient statistic)이다. 즉 표본이 a에 대하여 담고 있는 모든 정보를 최댓값이 담고 있다. 참값 a의 함수로 본 기각 확률을 검정의 **검정력 함수**(power function)라 한다. 여기서는 $a \leq 1$에 대하여 $\min\{1, 0.05/a^N\}$이며, 통계학자들은 검정력 함수를 비교하여 여러 검정 가운데 하나를 고른다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 최댓값과 최솟값의 분포를 다루고, Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률 입문)는 순서통계량을 자세히 다룬다.

풀이

STEP I 2004, 문제 14

확률과 통계 • 배열의 개수 세기

STEP I 2004, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/04-s1-q14

핵심 아이디어

상자 안의 동전을 한 개씩 꺼내 모두 한 줄로 늘어놓는다고 생각하자. 해적들은 이 줄을 두 개의 납 동전에서 끊을 뿐이다. 첫째 해적은 첫 번째 납 동전 앞의 금화를, 둘째 해적은 두 납 동전 사이의 금화를, 셋째 해적은 두 번째 납 동전 뒤의 금화를 가진다. 동전의 모든 순서가 일어날 가능성이 같으므로, 결국 문제는 두 납 동전이 놓일 수 있는 자리를 세는 것으로 귀결된다.

풀이

실제로는 셋째 해적이 남은 동전을 그냥 쓸어 담지만, $n+2$개의 동전을 모두 무작위 순서로 꺼낸다고 상상하자. 그렇게 해도 누가 어떤 동전을 가지는지는 달라지지 않는다. 꺼내는 순서가 무작위이므로, ($n+2$개의 자리 중에서) 납 동전 두 개의 자리를 고르는 $\binom{n+2}{2}$가지 방법은 모두 일어날 가능성이 같다.

첫째, 둘째, 셋째 해적이 가져간 금화의 개수를 각각 A, B, C라 하자. 그러면 $A+B+C=n$이고, 동전의 줄은 다음과 같다.



여기서 금화는 호박색, 납 동전은 자주색으로 나타내었다. 납 동전의 자리가 (A, B, C)를 결정하고, $A+B+C=n$을 만족하는 음이 아닌 정수의 순서쌍 각각은 정확히 한 가지 자리 선택에서 나온다. 따라서 $\binom{n+2}{2}=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$개의 순서쌍 (A, B, C)는 모두 일어날 가능성이 같다.

소문항 (i)

첫째 해적이 금화를 하나도 얻지 못하는 것은 정확히 $A = 0$일 때, 즉 맨 처음 꺼낸 동전이 납 동전일 때이다. $n+2$개의 동전 각각이 처음 나올 가능성이 같으므로 그 확률(probability)은 $\frac{2}{n+2}$이다. 따라서

$$\mathrm{P}(A \geq 1) = 1 - \frac{2}{n+2} = \frac{n}{n+2}.$$

(경우의 수를 세어도 같은 답을 얻는다. $A = 0$이면 $B + C = n$이 남고, 이 방정식의 해는 $n+1$개이며, $(n+1)/\frac{1}{2}(n+1)(n+2) = \frac{2}{n+2}$이다.)

소문항 (ii)

> **생각해 보기** 둘째 해적은 무작위한 시점에 동전을 꺼내기 시작한다. 그녀가 정말 첫째 해적보다 불리하지 않을까?

그렇다. 불리하지 않다. $B = 0$인 순서쌍을 세어 보자. 이때 $A + C = n$이고, 이 방정식의 해는 소문항 (i)과 똑같이 $n+1$개이다. 따라서

$$\mathrm{P}(B \geq 1) = 1 - \frac{n+1}{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+2}.$$

사실 모든 순서쌍 (A, B, C)의 가능성이 같으므로 세 몫은 **교환 가능**(*exchangeable*)하다. 즉 셋째 해적까지 포함해 모든 해적이 금화를 얻을 확률은 똑같이 $\frac{n}{n+2}$이다.

소문항 (iii)

A, B, C가 모두 1 이상이어야 한다. $A = A' + 1, B = B' + 1, C = C' + 1$로 놓자. 그러면 구하는 순서쌍은 $A' + B' + C' = n - 3$의 음이 아닌 정수해와 대응한다. 별과 막대(stars and bars) 방법에 따르면 이러한 해는 $\binom{n-1}{2}$개인데, 이는 직접 확인할 수도 있다. 이웃한 금화 사이의 $n-1$개의 틈 중에서 납 동전이 들어갈 두 곳을 고르면 된다. 따라서 $n \geq 1$일 때

$$\mathrm{P}(A \geq 1,\ B \geq 1,\ C \geq 1) = \frac{\binom{n-1}{2}}{\binom{n+2}{2}} = \frac{(n-1)(n-2)}{(n+1)(n+2)}.$$

$n = 1$과 $n = 2$일 때 이 값은 0인데, 금화가 세 개보다 적으면 세 해적이 모두 금화를 가질 수 없으므로 당연히 그래야 한다. ($n = 0$일 때 확률은 자명하게 0이다. 이때는 $\binom{n-1}{2}$가 존재하지 않는 틈을 세게 되므로 공식이 적용되지 않는다.)

검산

- $n = 1$일 때 동전의 배열은 GLL, LGL, LLG이고 모두 가능성이 같다. 첫째 해적은 GLL에서만 금화를 얻으며 그 확률은 $\frac{1}{3} = \frac{1}{1+2}$이고, 둘째 해적은 LGL에서만 금화를 얻으며 그

확률도 $\frac{1}{3}$이다.

- $n = 3$일 때 조건을 만족하는 배열은 $\binom{5}{2} = 10$가지 배열 중 GLGLG 하나뿐이고, 공식은 $\frac{2 \cdot 1}{4 \cdot 5} = \frac{1}{10}$을 준다.
- $n = 1, \ldots, 14$에 대해 정확히 열거한 결과는 세 공식과 모두 일치한다. $n = 5$인 상자 2×10^5개를 시뮬레이션한 결과는 0.715, 0.714, 0.286으로, 이론값 $\frac{5}{7} \approx 0.714$, $\frac{5}{7}$, $\frac{12}{42} = \frac{2}{7} \approx 0.286$과 잘 맞는다.

흔한 실수

- 둘째 해적이 가득 찬 상자에서 새로 꺼내기 시작하는 것처럼 다루는 것. 그녀에게 남은 금화의 개수는 첫째 해적의 결과에 따라 달라진다.
- 소문항 (iii)에서 $\mathrm{P}(A \geq 1), \mathrm{P}(B \geq 1), \mathrm{P}(C \geq 1)$을 곱하는 것. 세 몫은 합이 n이 되어야 하므로 독립(independent)이 아니다.

STEP 너머

납 동전의 자리와 $A + B + C = n$의 해 사이의 대응은 "별과 막대" 전단사(bijection)이다. 이는 무작위로 놓은 표지들 사이의 간격이 교환 가능하다는 것을 보여 준다. 막대 위에 점을 균등하게 떨어뜨리는 연속 버전은 균등 간격(uniform spacings) 이론과 디리클레 분포(Dirichlet distribution)로 이어지며, 이런 종류의 순서통계량(order statistics)은 대학 1학년 확률론 곳곳에서 등장한다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)는 이러한 경우의 수 세기와 그에 따르는 대칭성 논증을 매우 잘 다룬다.

풀이

STEP II 2004, 문제 1

순수수학 • 무리식이 있는 방정식

STEP II 2004, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/04-s2-q1

핵심 아이디어

모든 방정식에 $\sqrt{x}$와 $\sqrt{3x^2+1}$이 들어 있으므로, $t=\sqrt{x}$ $(t\geq 0)$로 놓아 첫 번째 근호를 다항식으로 바꾼다. 그다음 남은 제곱근을 한쪽으로 분리하고 한 번 제곱한다. 그 결과는 t에 대한 사차방정식(quartic)이 되는데, $t=0$과 $t=1$이 항상 근이므로 쉽게 인수분해된다. 진짜 작업은 마지막에 있다. 제곱하면 거짓 근(false root)이 생길 수 있으므로, 제곱한 쪽이 음수가 아닌 근만 남긴다.

풀이

세 방정식 모두 $\sqrt{x}$가 실수이려면 $x\geq 0$이어야 하므로, $t\geq 0$인 t에 대해 $x=t^2$으로 쓴다. 그러면 $\sqrt{x}=t$이고 $3x^2+1=3t^4+1$이다.

제곱하는 단계는 한 방향으로만 성립한다. 실수 A, B에 대하여

$$\sqrt{A}=B \iff A=B^2 \text{ 이고} B\geq 0.$$

따라서 제곱한 뒤에는 각 근에서 우변이 음수가 아닌지 확인해야 한다.

소문항 (i)

근호를 분리하면

$$\sqrt{3t^4+1}=2t^2-t+1.$$

우변은 항상 양수이다. 판별식(discriminant)이 $1-8<0$이고 최고차항의 계수가 양수이기 때문이다. 따라서 여기서는 제곱해도 잃는 것이 없으며, 제곱한 방정식의 모든 근이 실제

해이다. 제곱하면

$$3t^4+1=(2t^2-t+1)^2=4t^4-4t^3+5t^2-2t+1,$$
$$0=t^4-4t^3+5t^2-2t=t\,(t^3-4t^2+5t-2).$$

삼차식은 $t=1$에서 0이 되고 ($1-4+5-2=0$이므로), 인수 $t-1$로 나누면

$$t^3-4t^2+5t-2=(t-1)(t^2-3t+2)=(t-1)^2(t-2).$$

따라서 $t\,(t-1)^2(t-2)=0$이고, $t=0,1,2$이다. 세 값 모두 음수가 아니므로

$$x=0,\quad x=1,\quad x=4.$$

검산으로, $x=4$일 때 $\sqrt{49}+2-8-1=0$이다.

소문항 (ii)

이번에는

$$\sqrt{3t^4+1}=-t^2+2t+1.$$

제곱하면

$$3t^4+1=(-t^2+2t+1)^2=t^4-4t^3+2t^2+4t+1,$$
$$0=2t^4+4t^3-2t^2-4t=2t\,(t^3+2t^2-t-2).$$

삼차식의 항을 $t^2(t+2)-(t+2)$로 묶으면

$$2t\,(t+2)(t-1)(t+1)=0.$$

$t\geq 0$이므로 $t=0$과 $t=1$만 남는다. 이때 우변 $-t^2+2t+1$의 값은 각각 1과 2로 모두 양수이므로, 두 근 모두 실제 해이다.

$$x=0,\quad x=1.$$

소문항 (iii)

이번에는

$$\sqrt{3t^4+1}=t^2+2t-1.$$

제곱하면

$$3t^4+1=(t^2+2t-1)^2=t^4+4t^3+2t^2-4t+1,$$
$$0=2t^4-4t^3-2t^2+4t=2t\,(t^3-2t^2-t+2).$$

삼차식을 $t^2(t-2)-(t-2)$로 묶으면

$$2t\,(t-2)(t-1)(t+1)=0.$$

음이 아닌 근은 $t=0,1,2$이다.

생각해 보기 이 세 값이 모두 원래 방정식을 만족하는가?

그렇지 않다. $t = 0$일 때 우변 $t^2 + 2t - 1$은 -1인데, 제곱근은 음수일 수 없다. 따라서 $t = 0$은 제곱하는 과정에서 생긴 거짓 근이다. (직접 확인하면, $x = 0$일 때 (iii)의 좌변은 $1 - 0 - 0 + 1 = 2 \neq 0$이다.) $t = 1$과 $t = 2$일 때 우변은 각각 2와 7로 모두 양수이므로, 이 근들은 실제 해이다. 따라서

$$x = 1, \quad x = 4.$$

(ii)와 (iii) 사이에는 깔끔한 연결 고리가 있다. t를 $-t$로 바꾸면 $-t^2 + 2t + 1$은 $-(t^2 + 2t - 1)$이 되고, 제곱하면 음의 부호가 사라진다. 따라서 (iii)에서 제곱한 방정식은 (ii)에서 제곱한 방정식의 t를 $-t$로 바꾼 것이며, 그 근 $0, \pm 1, 2$는 (ii)의 근 $0, \pm 1, -2$의 부호를 바꾼 것이다.

검산

각 답을 원래 방정식에 대입해 본다. 예를 들어 (iii)에 $x = 4$를 대입하면 $\sqrt{49} - 4 - 4 + 1 = 0$이다. $0 \leq x \leq 50$에서 각 좌변을 촘촘하게 수치적으로 조사해 보았지만 다른 영점은 없었다. (i)에서 좌변은 $x = 1$에서 부호가 바뀌지 않고 0에 닿는데, 이는 이중 인수 $(t - 1)^2$과 일치한다.

흔한 실수

- 제곱하는 쪽의 부호를 확인하지 않아서 (iii)에서 $x = 0$을 남기는 실수.
- t (또는 $\sqrt{x}$)로 나누어서 (i)과 (ii)에서 근 $x = 0$을 잃는 실수.
- 한쪽에 제곱근이 두 개 남은 상태에서 제곱하는 실수. 먼저 $\sqrt{3x^2 + 1}$을 분리해야 한 번의 제곱으로 근호를 없앨 수 있다.

STEP 너머

사상 $A \mapsto A^2$은 $\mathbb{R}$에서 단사(injective)가 아니므로, 양변을 제곱하면 동치(equivalence)가 아니라 함의(implication)만 얻는다. 어떤 단계가 거꾸로도 성립하는지 꼼꼼히 따지는 것은 방정식을 신중하게 푸는 모든 풀이의 바탕이 되는 습관이며, 해석학(analysis)에서는 함수가 언제, 어떤 정의역(domain)에서 역함수(inverse)를 갖는가 하는 질문이 된다. Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)에 이 내용이 자세히 정리되어 있다.

풀이

STEP II 2004, 문제 2

순수수학 • 이차부등식

> **STEP II 2004, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/04-s2-q2

핵심 아이디어

까다로운 부분은 절댓값(modulus) 하나뿐이며, $t = |x|$로 놓으면 이것이 사라진다. $x^2 = |x|^2$이므로 주어진 부등식은 $t \geq 0$이라는 조건이 덧붙은 t에 대한 평범한 이차부등식(quadratic inequality)이 된다. 그다음에는 완전제곱식으로 고치기(completing the square)나 판별식(discriminant)을 살펴보는 것만으로 모든 것을 알 수 있다. 허용되는 t의 구간 하나마다 원점의 양쪽에 하나씩, x의 구간이 두 개 생긴다.

풀이

풀이 전체에서 $t = |x| \geq 0$으로 놓는다. $x^2 = t^2$이므로 부등식 $(*)$는 정확히 다음과 같다.

$$q(t) = t^2 - \alpha t + 2 < 0, \qquad t = |x| \geq 0.$$

$|\alpha| < 2\sqrt{2}$일 때 해가 없음

완전제곱식으로 고치면

$$q(t) = \left(t - \frac{\alpha}{2}\right)^2 + 2 - \frac{\alpha^2}{4}.$$

$|\alpha| < 2\sqrt{2}$이면 $\alpha^2 < 8$이므로 $2 - \frac{\alpha^2}{4} > 0$이다. 제곱항은 결코 음수가 아니므로 모든 실수 t에 대하여 $q(t) > 0$이고, 특히 $t = |x|$일 때도 그렇다. 따라서 모든 x에 대하여 $x^2 - \alpha|x| + 2 > 0$이고, $(*)$를 만족하는 x의 값은 없다.

$\alpha = 3$인 경우

이제 $q(t) = t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2)$이고, 이것은 정확히 $1 < t < 2$일 때 음수이다. 그러므로 $(*)$는 $1 < |x| < 2$일 때, 그리고 그때에만 성립하며, 해집합은 다음과 같다.

$$\{x : -2 < x < -1\} \cup \{x : 1 < x < 2\}.$$

길이의 합 S

$\alpha > 2\sqrt{2}$라 하자. 그러면 $\alpha^2 > 8$이므로 q는 서로 다른 두 실근

$$t_1 = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 8}}{2}, \qquad t_2 = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 8}}{2},$$

를 가지며, q의 최고차항 계수(leading coefficient)가 양수이므로 $q(t) < 0$인 것은 정확히 $t_1 < t < t_2$일 때이다.

? **생각해 보기** 구간 $t_1 < t < t_2$의 일부가 음수인 t에 걸쳐 있을까 봐 걱정해야 할까?

그럴 필요 없다. 두 근의 곱은 $t_1 t_2 = 2 > 0$이고 합은 $t_1 + t_2 = \alpha > 0$이므로 두 근은 모두 양수이다. 따라서 구간 (t_1, t_2) 전체가 $t > 0$에 놓이고, 그 안의 모든 t 값은 실제로 $|x|$가 가질 수 있는 값이다.

그러므로 $(*)$는 $t_1 < |x| < t_2$일 때, 그리고 그때에만 성립한다. 즉

$$-t_2 < x < -t_1 \qquad \text{또는} \qquad t_1 < x < t_2.$$

이 두 구간은 ($t_1 > 0$이므로) 서로소(disjoint)이고, 각각의 길이는 $t_2 - t_1 = \sqrt{\alpha^2 - 8}$이다. 따라서

$$S = 2\sqrt{\alpha^2 - 8}.$$

$\alpha^2 - 8 < \alpha^2$이고 $\alpha > 0$이므로, 양의 제곱근을 취하면 $\sqrt{\alpha^2 - 8} < \alpha$이고, 따라서

$$S < 2\alpha,$$

이다. 이것으로 증명이 끝난다.

α에 대한 S의 그래프

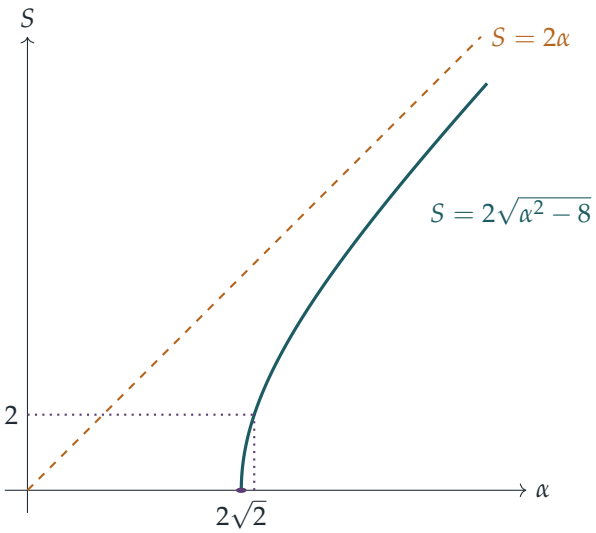
함수 $S = 2\sqrt{\alpha^2 - 8}$은 $\alpha > 2\sqrt{2}$에서 정의된다($\alpha \le 2\sqrt{2}$이면 구간이 아예 없다. $\alpha = 2\sqrt{2}$이면 $q(t) = (t - \sqrt{2})^2 \ge 0$이고, $\alpha \le 0$이면 언제나 모든 $t \ge 0$에 대하여 $q(t) \ge 2$이기 때문이다). 주요 특징은 다음과 같다.

- $\alpha \to 2\sqrt{2}^{+}$일 때 $S \to 0$이고, $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\alpha} = \dfrac{2\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 8}}$은 그 점에서 무한대로 발산한다. 즉 곡선은 점 $(2\sqrt{2}, 0)$에서 수직 접선(vertical tangent)을 가지며 시작한다.

- S는 증가하고, $\dfrac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}\alpha^2} = -\dfrac{16}{(\alpha^2-8)^{3/2}} < 0$이므로 곡선은 위로 볼록(concave)하다.
- 직선 $S = 2\alpha$는 점근선(asymptote)이며, 곡선은 아래쪽에서 이 직선에 다가간다. $(2\alpha - S)(2\alpha + S) = 4\alpha^2 - 4(\alpha^2 - 8) = 32$이므로

$$2\alpha - S = \frac{32}{2\alpha + S} \to 0 \quad \text{단, } \alpha \to \infty.$$

사실 $\frac{\alpha^2}{8} - \frac{S^2}{32} = 1$이므로, 이 그래프는 점근선이 $S = 2\alpha$인 쌍곡선(hyperbola)의 4분의 1이다.



검산

- $\alpha = 3$일 때 공식은 $S = 2\sqrt{1} = 2$를 주며, 이는 길이가 각각 1인 두 구간 $(-2,-1)$과 $(1,2)$에 들어맞는다(그래프에서 $\alpha = 3$에 점선으로 표시한 점).
- $\alpha = 5$일 때 $S = 2\sqrt{17} \approx 8.246$이다. $[-20,20]$에서 $x^2 - 5|x| + 2 < 0$인 x의 집합을 수치적으로 재어 보면 같은 값이 나오며, 이는 $2\alpha = 10$보다 넉넉히 작다.
- α가 클 때 $2\alpha - S \approx 8/\alpha$이다. $\alpha = 100$일 때 그 차는 $0.0800\ldots$이다.

흔한 실수

- $|x|$의 구간 하나마다 x의 구간이 두 개 생긴다는 것을 잊어서 $S = \sqrt{\alpha^2 - 8}$을 얻는 실수.
- $\alpha = 3$일 때의 답을 $1 < x < 2$만으로 적어서 음수 쪽 절반을 놓치는 실수.

- t에 대한 두 근이 모두 양수임을 확인하지 않고 판별식만 사용하는 실수. $a < 0$이면 판별식 조건은 같아도 근이 음수이므로 해가 전혀 없다.

STEP 너머

함수 $x \mapsto x^2 - a|x| + 2$는 우함수(even function)이므로 해집합은 대칭이고, 길이 S는 이 함수가 음수가 되는 집합의 **측도**(measure)이다. 부등식으로 정의된 집합의 크기를 재는 일은 측도론(measure theory)과 르베그(Lebesgue) 적분의 출발점이며, 대학 2학년 해석학(analysis)에서 배운다. 여기서 쓴 극한, 도함수, 부등식을 엄밀하게 다룬 내용은 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 읽어 보라.

풀이

STEP II 2004, 문제 3

순수수학 • 곡선 그리기

> **STEP II 2004, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/04-s2-q3

핵심 아이디어

모든 것은 하나의 곡선에서 나온다. C에 대해서는 도함수(derivative)를 완전히 인수분해(factorise)한다. 중근을 주는 인수 $(x-2)$는 미분한 뒤에도 남고, 나머지는 이차식이 된다. 그다음 나머지 두 곡선은 처음부터 새로 시작하지 않고 C로부터 만들어 낸다. (i)에서는 $y=\pm\sqrt{f(x)}$를 생각하고, (ii)에서는 f에 x^2을 대입한다. f가 어디에서 양수인지, 어디에서 단순근(simple root)을 갖는지, 어디에서 중근(repeated root)을 갖는지를 놓치지 말아야 한다. 이러한 세부 사항이 곡선의 모양을 결정한다.

풀이

$f(x)=x(x+1)(x-2)^4$으로 두면 C는 $y=f(x)$이다.

C의 정상점

곱의 미분법(product rule)을 쓰고 공통인수 $(x-2)^3$을 묶어 내면

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x+1)(x-2)^4 + 4x(x+1)(x-2)^3 \\ &= (x-2)^3\left[(2x+1)(x-2)+4x^2+4x\right] \\ &= (x-2)^3(6x^2+x-2) \\ &= (x-2)^3(3x+2)(2x-1). \end{aligned}$$

따라서 정상점(stationary point)은 $x=-\frac{2}{3}$, $x=\frac{1}{2}$, $x=2$에 있고,

$$f\left(-\tfrac{2}{3}\right)=\left(-\tfrac{2}{3}\right)\left(\tfrac{1}{3}\right)\left(-\tfrac{8}{3}\right)^4=-\frac{8192}{729}, \qquad f\left(\tfrac{1}{2}\right)=\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{2}\cdot\left(-\tfrac{3}{2}\right)^4=\frac{243}{64}, \qquad f(2)=0.$$

이들을 분류하기 위해 f'의 각 인수의 부호를 살펴본다.

	$x < -\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3} < x < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < x < 2$	$x > 2$
$(x-2)^3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$(3x+2)(2x-1)$	$+$	$-$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

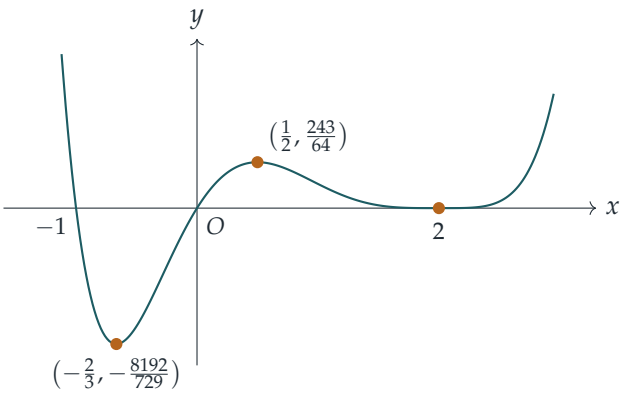
그러므로

- $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{8192}{729}\right)$은 극소점(minimum)이다($f'$의 부호가 $-$에서 $+$로 바뀐다).
- $\left(\frac{1}{2}, \frac{243}{64}\right)$은 극대점(maximum)이다($f'$의 부호가 $+$에서 $-$로 바뀐다).
- $(2, 0)$은 극소점이다(f'의 부호가 $-$에서 $+$로 바뀐다).

마지막 것은 미분을 쓰지 않아도 분명하다. $x = 2$ 근처에서는 $x(x+1) > 0$이고 $(x-2)^4 \geq 0$이므로 $f(x) \geq 0$이다.

C의 개형 그리기

곡선은 $x = -1$과 $x = 0$에서 x축을 가로지르고(단순근이며, 기울기는 $f'(-1) = -81$, $f'(0) = 16$이다), $x = 2$에서 x축에 접한다. $x = 2$ 근처에서 $f(x) \approx 2 \cdot 3\,(x-2)^4 = 6(x-2)^4$이므로 곡선은 그곳에서 매우 평평하다. f는 최고차항의 계수가 양수인 6차 다항식이므로 $x \to \pm\infty$일 때 $y \to +\infty$이다. 그림에서 세로 방향의 축척은 줄여서 나타내었다.



소문항 (i)

이제 $y^2 = f(x)$이므로 $y = \pm\sqrt{f(x)}$이다. 세 가지 사실로 모양이 정해진다.

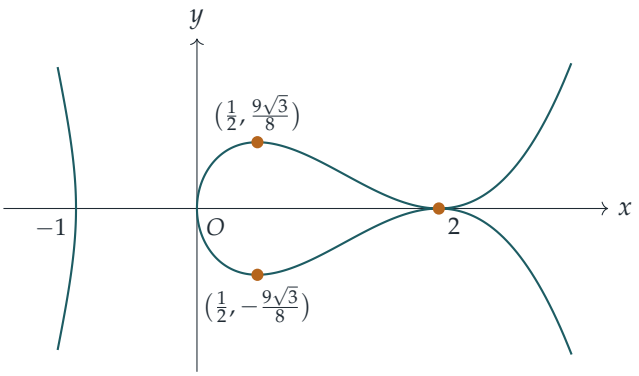
- **곡선이 존재하는 범위.** $f(x) \geq 0$이어야 하는데, C로부터 이는 $x \leq -1$ 또는 $x \geq 0$임을 뜻한다. $-1 < x < 0$에서는 곡선이 없다.

- **대칭성.** y를 $-y$로 바꾸어도 방정식이 변하지 않으므로 곡선은 x축에 대하여 대칭(symmetric)이다. 따라서 위쪽 절반 $y = \sqrt{f(x)} = (x-2)^2\sqrt{x(x+1)}$만 그린 다음 대칭이동하면 충분하다.
- **정상점.** $f > 0$일 때 $y = \sqrt{f}$에 대하여 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = f'/(2\sqrt{f})$이므로, 위쪽 절반은 정확히 $f' = 0$이고 $f > 0$인 곳에서 정상점을 갖는다. 그러한 곳은 $x = \frac{1}{2}$뿐이고(점 $x = -\frac{2}{3}$은 정의역 밖에 있다), 위쪽 절반에서는 $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{243/64}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{9\sqrt{3}}{8}\right)$에서 극대, 아래쪽 절반에서는 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{9\sqrt{3}}{8}\right)$에서 극소가 된다.

? **생각해 보기** $f = 0$인 점 $(-1,0)$, $(0,0)$, $(2,0)$에서는 어떤 일이 일어나는가?

$x = 0$과 같은 **단순**근에서는 $f(x) \approx 16x$이므로 원점 근처에서 $y^2 \approx 16x$이다. 이는 옆으로 누운 포물선이고, 곡선은 **수직** 접선(vertical tangent)을 가지며 축을 가로지른다. $y^2 \approx 81(-1-x)$인 $x = -1$에서도 마찬가지이다. **중근** $x = 2$에서는 $y^2 \approx 6(x-2)^4$이므로 $y \approx \pm\sqrt{6}\,(x-2)^2$이다. 즉 축의 위와 아래에 하나씩 포물선과 비슷한 두 호가 있고, 둘 다 $(2,0)$에서 x축에 접한다. 따라서 위쪽 절반과 아래쪽 절반은 그곳에서 공통의 수평 접선을 가지며 만난다. $(2,0)$에서 위쪽 절반은 극소, 아래쪽 절반은 극대를 갖는다.

$|x|$가 클 때 $y \approx \pm|x|^3$이다. 따라서 곡선은 $(0,0)$에서 $(2,0)$까지 이어지는 닫힌 고리이고, $(2,0)$에서 잘록하게 조여진 뒤 오른쪽으로 벌어지는 두 가지로 이어진다. 이와 함께 $(-1,0)$을 지나며 왼쪽으로 벌어지는 별개의 조각이 있다.



소문항 (ii)

여기서는 $y = x^2(x^2+1)(x^2-2)^4 = f(x^2)$이다. 두 가지 관찰로 대부분의 일이 해결된다.

- x가 x^2의 꼴로만 나타나므로 곡선은 y축에 대하여 대칭이다.
- x가 $[0,\infty)$를 움직일 때 $u = x^2$은 증가하면서 $[0,\infty)$를 움직이므로, $x \geq 0$에서 곡선은 C의 $x \geq 0$인 부분을 다시 매개변수화(re-parametrise)한 것이다. 특히 모든 곳에서 $y \geq 0$이고, x가 음수인 C의 부분(그 극소점을 포함하여)은 전혀 관여하지 않는다.

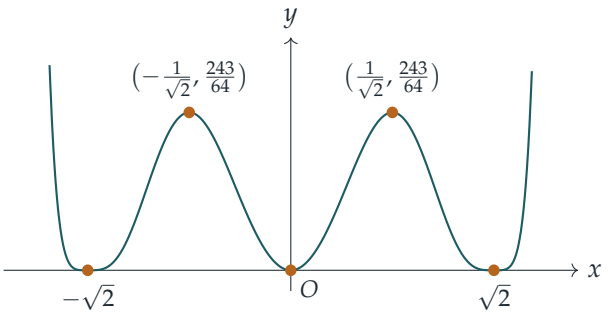
연쇄법칙(chain rule)에 의하여

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x\,f'(x^2) = 2x\,(x^2-2)^3(3x^2+2)(2x^2-1),$$

이고, 이는 $x = 0$, $x^2 = \frac{1}{2}$ 또는 $x^2 = 2$일 때 0이 된다(인수 $3x^2+2$는 결코 0이 아니다). $u \geq 0$에서 f는 0에서 출발하여 $u = \frac{1}{2}$에서 최댓값까지 증가하고, $u = 2$에서 0까지 감소한 다음 그 뒤로는 계속 증가한다. 그리고 $x \geq 0$에서 $u = x^2$은 이 순서를 보존한다. 따라서 정상점은 다음과 같다.

- $(0,0)$에서 극소이며, 이곳에서 $y \approx 16x^2$이다.
- $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{243}{64})$에서 극대이다.
- $(\pm\sqrt{2}, 0)$에서 극소이며, 이곳에서 곡선은 축에 매우 평평하게 접한다. 즉 $y \approx 384\,(x \mp \sqrt{2})^4$이다.

$|x|$가 클 때 $y \approx x^{12}$이므로 곡선은 매우 가파르게 올라간다.



검산

도함수를 간단히 확인해 보자. $x = 0$에서 $f(x) = x(x+1)(x-2)^4 \approx 16x$이고, 실제로 $f'(0) = (-8)(2)(-1) = 16$이다. 수치 계산으로 확인하면, 임의의 점들에서 f'의 인수분해가 유한 차분(finite difference)으로 구한 도함수와 일치하고, $f(-\frac{2}{3}) \approx -11.237$, $f(\frac{1}{2}) = 3.796875$이며, $[0,2]$에서 $\sqrt{f}$의 최댓값은 $x = 0.5$에서 $1.94856\ldots = \frac{9\sqrt{3}}{8}$이다. (ii)에서는 예측한 대로 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$의 부호가 $x \approx \pm 0.707$과 ± 1.414에서(그리고 0에서) 바뀐다.

흔한 실수

- 미분하기 전에 f를 전개하는 것. 그러면 f'은 인수가 보이지 않는 오차식이 된다. $(x-2)^3$을 밖으로 묶어 두면 이차식 하나만 풀면 된다.

- (i)에서 $(0,0)$과 $(-1,0)$에 첨점(cusp)이나 꺾인 점을 그리는 것. f의 단순근에서 $y^2 = f(x)$의 접선은 수직이다.
- (ii)에서 $x = -\frac{2}{3}$에 있는 C의 극소점을 그대로 옮겨 그리는 것. $x^2 \geq 0$이므로 C의 $x \geq 0$인 부분만 쓰이며, y는 결코 음수가 아니다.

STEP 너머

f의 근 근처에서 $y^2 = f(x)$가 보이는 행동은 대수곡선(algebraic curve)의 특이점(singular point) 연구의 출발점이다. 단순근은 수직 접선을 갖는 매끄러운 점을 주고, 중근은 $(2,0)$에서처럼 두 가지가 만나는 곳을 준다. f가 삼차식일 때 곡선 $y^2 = f(x)$는 **타원곡선**(*elliptic curve*)이며, 현대 정수론의 중심에 있다. 곡선의 개형 그리기의 바탕이 되는 미적분(단조성, 도함수의 부호, 연쇄법칙)을 엄밀하게 다룬 책으로는 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 참고하라.

풀이

STEP II 2004, 문제 4

순수수학 • 기하에서의 최적화

STEP II 2004, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

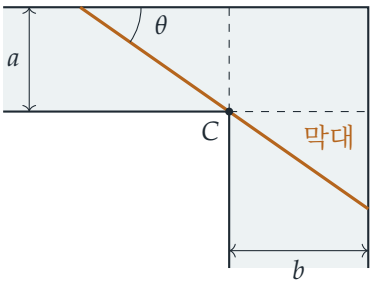
step.maths.org/questions/04-s2-q4

핵심 아이디어

어떤 경우든 막대(또는 탁자)는 한 복도를 따라 놓인 상태에서 다른 복도를 따라 놓인 상태로 돌아가야 하므로, 어느 순간에는 그 사이의 각 θ를 벽과 이루게 된다. 각을 하나로 고정하면, 가장 여유 있는 길이는 안쪽 모서리를 살짝 스치는 직선 위에 있고, 그 길이는 직각삼각형으로 쉽게 계산할 수 있다. 따라서 물체가 모퉁이를 돌 수 있으려면 그 길이가 모든 각에 대한 이 길이들 가운데 **가장 작은** 값 이하여야 하며, 그 최솟값은 미분으로 구한다.

풀이

이 풀이 전체에서 바깥 모서리를 원점에 두고, 바깥 벽을 $y = 0$(폭이 a이고 왼쪽으로 뻗은 복도)과 $x = 0$(폭이 b이고 아래쪽으로 뻗은 복도)을 따라 놓는다. 그러면 안쪽 모서리는 $C = (-b, -a)$이다.



소문항 (i)

어느 순간 막대가 a-복도의 벽과 예각 θ를 이루며, 그림처럼 바깥 벽 $y = 0$에서 바깥 벽 $x = 0$ 쪽으로 내려가며 기울어져 있다고 하자.

각 θ에서 가장 긴 선분. C를 지나고 각이 θ인 직선을 생각한다. C에서 벽 $y = 0$까지는 수직 방향으로 a만큼 올라가므로 그 부분의 길이는 $a\operatorname{cosec}\theta$이고, C에서 벽 $x = 0$까지는 수평 방향으로 b만큼 가므로 그 부분의 길이는 $b\sec\theta$이다. 따라서 이 직선에서 두 바깥 벽 사이에 놓인 현(chord)의 길이는

$$f(\theta) = a\operatorname{cosec}\theta + b\sec\theta.$$

이다. 한 복도에서 다른 복도로 이어지는, 각이 θ인 다른 직선은 모두 C의 바깥쪽을 지나야 한다(그렇지 않으면 안쪽 벽을 뚫고 지나가게 된다). 이런 직선은 두 바깥 벽과 함께 더 작은 닮은 직각삼각형을 잘라 내므로, 바깥 벽 사이의 현은 $f(\theta)$보다 짧다. 또 이 순간 막대가 완전히 a-복도 안에 있다면, 막대는 폭이 a인 띠 안에 들어가므로 $L\sin\theta \le a$이고, 따라서 $L \le a\operatorname{cosec}\theta < f(\theta)$이다. 마찬가지로 막대가 완전히 b-복도 안에 있으면 $L \le b\sec\theta < f(\theta)$이다. 어느 경우든

$$L \le f(\theta) \quad \text{막대가 거쳐 가는 모든 각 } \theta\text{에 대하여}$$

이다. 막대가 첫 번째 복도를 따라 놓인 상태에서 두 번째 복도를 따라 놓인 상태로 돌아가는 동안 θ는 0 근처에서 $\frac{1}{2}\pi$ 근처까지 연속적으로 변하므로, 그 사이의 모든 값을 지난다. 따라서 **모든** $\theta \in (0, \frac{1}{2}\pi)$에 대하여 $L \le f(\theta)$이고, 곧 L은 f의 최솟값 이하이다.

f의 최소화. 미분하면

$$f'(\theta) = -\frac{a\cos\theta}{\sin^2\theta} + \frac{b\sin\theta}{\cos^2\theta} = \frac{b\sin^3\theta - a\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}.$$

이다. 이 값은 $\tan^3\theta = a/b$일 때, 그리고 그때에만 0이 된다. $(0, \frac{1}{2}\pi)$에서 tan는 증가하므로 이 방정식의 해 α는 이 구간에 하나뿐이다. f'의 부호는 $b\tan^3\theta - a$의 부호와 같아서 α 앞에서는 음수, 뒤에서는 양수이므로, α에서 최솟값을 갖는다. (또한 양 끝에서 $f \to \infty$이다.) $L \le f(\theta)$에 $\theta = \alpha$를 대입하면

$$L \le a\operatorname{cosec}\alpha + b\sec\alpha, \qquad \tan^3\alpha = \frac{a}{b},$$

을 얻으며, 이것이 보이려던 것이다.

소문항 (ii)

이제 탁자의 긴 변이 막대의 역할을 한다. 안쪽 긴 변은 각이 θ인 직선 위에 있고, 바깥쪽 긴 변은 그와 평행하면서 바깥 모서리 쪽으로 거리 w만큼 더 나아간 직선 위에 있다. 바깥쪽에 있는 탁자의 두 꼭짓점은 모두 바깥 벽 안쪽에 있어야 한다.

바깥쪽 변을 따라 남는 여유. 바깥 모서리 O로부터의 거리가 d이고 각이 θ인 직선은 O에서 직각삼각형을 잘라 내는데, 이 삼각형의 빗변은 c(두 벽 사이의 현)이고, 두 직각변은 $c\cos\theta$와 $c\sin\theta$이며, O에서 내린 높이는 d이다. 넓이의 두 배는 $c\cos\theta\cdot c\sin\theta$이기도 하고 $c\,d$이기도 하므로

$$c = \frac{d}{\sin\theta\cos\theta} = 2d\operatorname{cosec}2\theta.$$

이다. 현의 길이는 O로부터의 거리에 비례한다. 따라서 직선을 (O 쪽으로) w만큼 안으로 옮기면 현의 길이는 $2w\operatorname{cosec}2\theta$만큼 줄어든다.

> **생각해 보기** 왜 바깥쪽 긴 변은 C를 지나는 직선에서 w만큼 안쪽에 있는 직선 위에서 바깥 벽 사이에 들어가야 하는가?

안쪽 긴 변은 안쪽 모서리를 가로지를 수 없으므로, C를 지나는 직선 위에 있거나 그 바깥에 있다. 그러면 바깥쪽 긴 변은 적어도 w만큼 더 바깥에 있는 직선 위에 있고, 그 현의 길이는 기껏해야 $f(\theta) - 2w\operatorname{cosec}2\theta$이다. (두 짧은 변은 바깥쪽 꼭짓점에서 긴 변에 수직으로 안쪽을 향해 뻗어 있고 복도 안에 머무르므로, 더 이상의 제약을 주지 않는다.) 반대로 탁자 전체가 a-복도 안에 있다면, 띠를 가로지르는 탁자의 높이는 $l\sin\theta + w\cos\theta \le a$이다. 이로부터 얻는 한계 $l \le (a - w\cos\theta)\operatorname{cosec}\theta$는 $w < b$이므로 아래의 $g(\theta)$보다 $(b - w\sin\theta)\sec\theta > 0$만큼 작다. b-복도의 경우도 같다. 따라서 소문항 (i)과 똑같이, 성공하려면 모든 $\theta \in (0, \frac{1}{2}\pi)$에 대하여 $l \le g(\theta)$여야 한다. 여기서

$$g(\theta) = a\operatorname{cosec}\theta + b\sec\theta - 2w\operatorname{cosec}2\theta.$$

이다. (탁자는 두 복도보다 폭이 좁아야 한다. 즉 $w < a$이고 $w < b$여야 하며, 그렇지 않으면 복도를 따라 이동하는 것조차 불가능하다.)

g의 최소화. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\operatorname{cosec}2\theta = -\dfrac{2\cos2\theta}{\sin^2 2\theta}$이므로

$$g'(\theta) = -\frac{a\cos\theta}{\sin^2\theta} + \frac{b\sin\theta}{\cos^2\theta} + \frac{4w\cos2\theta}{\sin^2 2\theta}.$$

이다. 양변에 $\sin^2\theta\cos^2\theta = \frac{1}{4}\sin^2 2\theta > 0$를 곱한다. 그러면 $g'(\theta) = 0$일 필요충분조건은

$$-a\cos^3\theta + b\sin^3\theta + w\cos2\theta = 0, \qquad \text{즉} \qquad w\cos2\theta = \cos^3\theta\,(a - b\tan^3\theta).$$

이다. $\cos2\theta = \cos^2\theta\,(1 - \tan^2\theta)$로 쓰고 $\cos^2\theta$로 나눈다. 만약 $\theta = \frac{1}{4}\pi$라면 방정식은 $0 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(a - b)$가 되는데, $a \ne b$이므로 이는 불가능하다. 따라서 정류점(stationary point)에서 $\tan^2\theta \ne 1$이고, $1 - \tan^2\theta$로 나누어

$$w = \left(\frac{a - b\tan^3\theta}{1 - \tan^2\theta}\right)\cos\theta.$$

를 얻는다. $\theta \to 0^+$일 때 $w < a$이므로 $g(\theta) \approx (a - w)/\theta \to +\infty$이고, 마찬가지로 $\theta \to \frac{1}{2}\pi^-$일 때 $w < b$이므로 $g \to +\infty$이다. 따라서 연속함수 g는 구간 내부의 한 점에서

최솟값을 가지며, 그 점에서 $g' = 0$이다. 이 점을 β라 하면, β는 위의 방정식을 만족한다. $l \leq g(\theta)$에 $\theta = \beta$를 대입하면

$$l \leq a\operatorname{cosec}\beta + b\sec\beta - 2w\operatorname{cosec}2\beta,$$

를 얻으며, 이것이 보이려던 것이다. (사실 이 방정식의 **어떤** 근 β에 대해서도 $l \leq \min g \leq g(\beta)$이므로, 어느 근을 뜻하는지는 상관없다.)

검산

- 소문항 (ii)에 $w = 0$을 대입하면 $\tan^3\beta = a/b$와 소문항 (i)의 한계를 얻으며, 당연히 그래야 한다.
- 소문항 (i)에서 $\sin\alpha = a^{1/3}/\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}}$이고 $\cos\alpha = b^{1/3}/\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}}$이므로, 한계는 $\left(a^{2/3}+b^{2/3}\right)^{3/2}$이다. $a = 1, b = 8$이면 이 값은 $5^{3/2} \approx 11.18$이고, f의 최솟값을 수치적으로 탐색한 결과와 일치한다.
- $a \neq b$이고 $w < \min(a, b)$인 무작위 값 수백 개에 대해 g의 최솟값을 전수 탐색으로 구하고, 최솟값을 주는 각이 β에 대한 방정식을 만족함을 확인했다. 현의 길이도 좌표로부터 직접 확인했다.

흔한 실수

- f를 최소화하는 대신 최대화하는 것. 막대는 **가장 불리한** 각에서도 버텨야 하므로, 한계는 쓸 수 있는 길이의 최솟값이다.
- 탁자의 **안쪽** 변이 바깥 벽에 의해 제한된다고 생각하는 것. 바깥 모서리에 w만큼 더 가까운 직선 위에 있는 바깥쪽 변이 바로 끼이는 변이다.
- 이것이 $a \neq b$를 필요로 한다는 점을 알아채지 못한 채 $1 - \tan^2\beta$로 나누는 것.

STEP 너머

소문항 (i)은 고전적인 "모퉁이를 도는 사다리" 문제이며, 그 답 $\left(a^{2/3}+b^{2/3}\right)^{3/2}$은 성망형(astroid)과 관련이 있다. 안쪽 모서리를 지나는 직선들이 포락선(envelope)을 그리기 때문이다. 소문항 (ii)는 **움직이는 소파 문제**(*moving sofa problem*)의 작은 경우이다. 폭이 1인 직각 모퉁이를 돌아 옮길 수 있는 도형 가운데 넓이가 가장 큰 것은 어떤 모양인가? 이 문제는 1966년 Leo Moser가 제기했으며, 그 역사 대부분 동안 완전한 해결을 허락하지 않았다. 이런 정신으로 기하와 미적분이 만나는 문제를 더 보고 싶다면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*를 읽어 보라.

풀이

STEP II 2004, 문제 5

순수수학 • 적분방정식

STEP II 2004, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/04-s2-q5

핵심 아이디어

미지의 함수가 적분 안에 들어 있어서 처음에는 무섭게 보이지만, 덧셈정리(compound-angle formula)로 $\sin(x+t)$를 전개하면 사정이 달라진다. 그러면 t가 적분 밖으로 나오고, 적분 안에 남는 것은 두 개의 고정된 수이다. 따라서 f는 t에 $\sin t$와 $\cos t$의 일차결합을 더한 꼴이어야 하고, 문제 전체는 두 개의 일차방정식(linear equations)으로부터 두 상수를 구하는 문제로 줄어든다. 첫 번째 부분의 두 적분은 바로 그 방정식에 필요한 것들이다.

풀이

두 적분

$u = x$, $\mathrm{d}v = \sin x\,\mathrm{d}x$로 두고 부분적분(integration by parts)을 하면

$$\int_0^\pi x\sin x\,\mathrm{d}x = \Big[-x\cos x\Big]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\,\mathrm{d}x = (-\pi\cos\pi - 0) + \Big[\sin x\Big]_0^\pi = \pi.$$

마찬가지로 $u = x$, $\mathrm{d}v = \cos x\,\mathrm{d}x$로 두면

$$\int_0^\pi x\cos x\,\mathrm{d}x = \Big[x\sin x\Big]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = 0 - \Big[-\cos x\Big]_0^\pi = -(1+1) = -2.$$

또한 $[0,\pi]$에서의 표준적인 적분 세 개가 필요하다.

$$\int_0^\pi \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^\pi \sin x\cos x\,\mathrm{d}x = 0.$$

처음 두 개는 $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$와 $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$에서 나오는데, $\cos 2x$를 한 주기(period) 전체에서 적분하면 0이 되기 때문이다. 세 번째는 같은 이유로 $\frac{1}{2}\int_0^\pi \sin 2x\,\mathrm{d}x = 0$이다.

f의 꼴

$\sin(x+t) = \sin x \cos t + \cos x \sin t$로 전개한다. 적분 변수는 x이므로 $\sin t$와 $\cos t$는 상수이고 적분 밖으로 나온다.

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(t) &= t + \int_0^\pi \mathrm{f}(x)\big(\cos x \sin t + \sin x \cos t\big)\,\mathrm{d}x \\ &= t + \sin t \int_0^\pi \mathrm{f}(x)\cos x\,\mathrm{d}x + \cos t \int_0^\pi \mathrm{f}(x)\sin x\,\mathrm{d}x \\ &= t + A\sin t + B\cos t, \end{aligned}$$

여기서 A와 B는 주어진 두 적분이다. 이들은 t에 의존하지 않으므로 진짜 상수이다. 이것이 구하려던 꼴이다.

A와 B 구하기

? **생각해 보기** f를 모르는데 어떻게 A와 B를 구할 수 있을까?

우리는 그 모양은 알고 있다: $\mathrm{f}(x) = x + A\sin x + B\cos x$. 이것을 다시 $(*)$에 대입하면 적분을 A와 B로 나타내어 계산할 수 있게 되고, 양변을 맞추면 이들에 대한 방정식이 나온다.

위에서 구한 $\sin(x+t)$의 전개를 이용하여 $(*)$의 우변에 대입하면

$$t + \sin t \int_0^\pi (x + A\sin x + B\cos x)\cos x\,\mathrm{d}x + \cos t \int_0^\pi (x + A\sin x + B\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x.$$

앞에서 구한 적분들을 이용하면

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (x + A\sin x + B\cos x)\cos x\,\mathrm{d}x &= -2 + A\cdot 0 + B\cdot\frac{\pi}{2} = -2 + \frac{\pi}{2}B, \\ \int_0^\pi (x + A\sin x + B\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x &= \pi + A\cdot\frac{\pi}{2} + B\cdot 0 = \pi + \frac{\pi}{2}A. \end{aligned}$$

따라서 $(*)$는 모든 t에 대하여 다음이 성립한다는 뜻이다.

$$t + A\sin t + B\cos t = t + \left(-2 + \frac{\pi}{2}B\right)\sin t + \left(\pi + \frac{\pi}{2}A\right)\cos t.$$

$\sin t$와 $\cos t$의 계수를 비교하면(이 항등식(identity)은 모든 t에 대하여 성립하므로 정당하다: $t = \frac{\pi}{2}$와 $t = 0$을 차례로 대입하면 각 계수를 따로 분리할 수 있다)

$$A = -2 + \frac{\pi}{2}B, \qquad B = \pi + \frac{\pi}{2}A.$$

두 번째 식을 첫 번째 식에 대입하면

$$A = -2 + \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{4}A \quad\Longrightarrow\quad A\left(1 - \frac{\pi^2}{4}\right) = \frac{\pi^2}{2} - 2, \quad \text{즉} \quad A\cdot\frac{4-\pi^2}{4} = -\frac{4-\pi^2}{2}.$$

$\pi^2 \neq 4$이므로 $4-\pi^2$로 나눌 수 있고, $A = -2$를 얻는다. 그러면 $B = \pi + \frac{\pi}{2}(-2) = 0$이다. 따라서

$$A = -2, \qquad B = 0, \qquad \text{따라서} \qquad \mathrm{f}(t) = t - 2\sin t.$$

검산

답을 A와 B의 정의에 직접 대입하여 확인한다. $\mathrm{f}(x) = x - 2\sin x$이면

$$\int_0^\pi \mathrm{f}(x)\cos x\,\mathrm{d}x = -2 - 2\cdot 0 = -2 = A, \qquad \int_0^\pi \mathrm{f}(x)\sin x\,\mathrm{d}x = \pi - 2\cdot\frac{\pi}{2} = 0 = B.$$

수치적으로, 심프슨 공식(Simpson's rule)을 쓰면 $\int_0^\pi x\sin x\,\mathrm{d}x \approx 3.14159$, $\int_0^\pi x\cos x\,\mathrm{d}x \approx -2.00000$을 얻는다. 또한 $\mathrm{f}(t) = t - 2\sin t$로 두고 임의로 고른 t의 값 50개에서 $(*)$의 우변을 계산해 보았는데, 매번 10^{-9} 이내의 오차로 $\mathrm{f}(t)$와 일치하였다.

흔한 실수

- $\int_0^\pi x\cos x\,\mathrm{d}x$에서 음의 부호를 빠뜨리는 것: 경계항(boundary term)은 0이 되고 $-\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = -2$이다.
- 어느 적분이 $\sin t$에 곱해지는지 혼동하는 것. $\sin(x+t)$의 $\cos x\sin t$ 부분이 $A\sin t$를 만들며, 이때 $A = \int \mathrm{f}(x)\cos x\,\mathrm{d}x$이지 $\int \mathrm{f}(x)\sin x\,\mathrm{d}x$가 아니다.
- $1 - \frac{\pi^2}{4}$가 0이 아님을 언급하지 않고 그것으로 나누는 것.

STEP 너머

방정식 $(*)$는 **제2종 프레드홀름 적분방정식**(*Fredholm integral equation of the second kind*)이다. 그 핵(kernel) $\sin(x+t) = \sin x\cos t + \cos x\sin t$는 x의 함수와 t의 함수의 곱을 유한 개 더한 것("퇴화(degenerate)" 핵 또는 "분리 가능(separable)" 핵)이며, 바로 이 때문에 문제가 2×2 연립일차방정식으로 줄어든다. 조건 $\pi^2 \neq 4$는 이 연립방정식의 행렬식(determinant)이 0이 아니라는 명제이다. 만약 행렬식이 0이라면 해가 없거나 무수히 많을 수 있는데, 이것은 특이 행렬(singular matrix)의 적분방정식 버전이다. 이 뒤에 있는 선형대수(linear algebra)에 대해서는 Strang, *Introduction to Linear Algebra*(선형대수 입문)를 참고하라.

풀이

STEP II 2004, 문제 6

순수수학 • 벡터의 분해

> **STEP II 2004, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/04-s2-q6

핵심 아이디어

벡터를 $\mathbf{a}$ 방향의 부분과 $\mathbf{a}$에 수직(perpendicular)인 부분으로 나누는 것은 바로 사영(projection)이다. $\mathbf{a}$가 단위벡터(unit vector)이므로, 임의의 벡터 $\mathbf{v}$의 그 방향 성분(component)은 $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{a}$이다. 둘째 부분은 같은 아이디어를 한 차원 올린 것이다. 벡터 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{q}$는 Π 안의 서로 수직인 두 방향이고, $\mathbf{R}$은 이 둘에 수직인 세 번째 방향을 맡는다. 따라서 각 방향으로 차례로 사영할 수도 있고, 미지의 스칼라배를 놓고 내적(dot product)으로 수직 조건을 부과할 수도 있다. 여기서는 두 번째 방법으로 풀고, 첫 번째 방법은 검산에 쓴다.

풀이

벡터 p와 q

$\mathbf{p}$는 $\mathbf{a}$에 평행하므로 $\mathbf{p}=\lambda\mathbf{a}$로 놓는다. 그러면

$$\mathbf{q}=\mathbf{a}+\mathbf{b}-\lambda\mathbf{a}=(1-\lambda)\mathbf{a}+\mathbf{b},$$

이고, 이 벡터는 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$가 그러하듯 자동으로 Π 위에 놓인다. $\mathbf{q}$가 $\mathbf{a}$에 수직이려면 다음이 성립해야 한다.

$$0=\mathbf{q}\cdot\mathbf{a}=(1-\lambda)\,|\mathbf{a}|^2+\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=(1-\lambda)+3,$$

여기서 $|\mathbf{a}|=1$과 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=3$을 이용하였다. 따라서 $\lambda=4$이고

$$\boxed{\mathbf{p}=4\mathbf{a},\qquad \mathbf{q}=\mathbf{b}-3\mathbf{a}.}$$

실제로 $\mathbf{q}\cdot\mathbf{a}=3-3=0$이고 $\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$이다. (같은 말로, $\mathbf{p}$는 사영 $\big((\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{a}\big)\mathbf{a}=4\mathbf{a}$이다.)

벡터 P, Q, R

먼저 앞으로 필요한 사실 몇 가지를 정리한다. $|\mathbf{b}| = 5$이므로

$$|\mathbf{q}|^2 = |\mathbf{b}|^2 - 6\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + 9|\mathbf{a}|^2 = 25 - 18 + 9 = 16,$$

이고, 따라서 $|\mathbf{q}| = 4$이다. 특히 $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$이므로 $\mathbf{b}$는 $\mathbf{a}$에 평행하지 않으며, $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$는 평면 Π를 생성(span)한다.

$\mathbf{P} = \alpha\mathbf{a}$, $\mathbf{Q} = \beta\mathbf{q} = \beta(\mathbf{b} - 3\mathbf{a})$로 놓자. 그러면 $\mathbf{R}$은 반드시 다음과 같아야 한다.

$$\mathbf{R} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} - \alpha\mathbf{a} - \beta(\mathbf{b} - 3\mathbf{a}) = \mathbf{c} + u\,\mathbf{a} + v\,\mathbf{b}, \qquad \text{여기서} u = 1 - \alpha + 3\beta,\ v = 1 - \beta.$$

> **생각해 보기** "$\mathbf{R}$이 Π에 수직이다"라는 조건을 어떻게 방정식으로 바꿀 수 있을까?

벡터가 평면에 수직일 필요충분조건은 그 평면 안의 평행하지 않은 두 벡터에 모두 수직인 것이다. 방금 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$가 그런 한 쌍임을 보았다. 따라서 조건은 $\mathbf{R}\cdot\mathbf{a} = 0$이고 $\mathbf{R}\cdot\mathbf{b} = 0$인 것이다. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} = -2$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = 2$, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 3$, $|\mathbf{a}|^2 = 1$, $|\mathbf{b}|^2 = 25$를 이용하면

$$\mathbf{R}\cdot\mathbf{a} = -2 + u + 3v = 0,$$
$$\mathbf{R}\cdot\mathbf{b} = 2 + 3u + 25v = 0.$$

첫째 식에서 $u = 2 - 3v$이다. 이를 둘째 식에 대입하면 $8 + 16v = 0$이므로

$$v = -\tfrac{1}{2}, \qquad u = \tfrac{7}{2}.$$

그러면 $\beta = 1 - v = \tfrac{3}{2}$이고 $\alpha = 1 + 3\beta - u = 1 + \tfrac{9}{2} - \tfrac{7}{2} = 2$이다. 따라서

$$\boxed{\mathbf{P} = 2\mathbf{a}, \qquad \mathbf{Q} = \tfrac{3}{2}(\mathbf{b} - 3\mathbf{a}), \qquad \mathbf{R} = \mathbf{c} + \tfrac{7}{2}\mathbf{a} - \tfrac{1}{2}\mathbf{b}.}$$

이들을 더하면 $\mathbf{a}$의 계수는 $2 - \tfrac{9}{2} + \tfrac{7}{2} = 1$, $\mathbf{b}$의 계수는 $\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2} = 1$, $\mathbf{c}$의 계수는 1이므로, 요구한 대로 $\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{R} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$이다.

끝으로 $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$이다. 만약 영벡터라면 $\mathbf{c} = \tfrac{1}{2}\mathbf{b} - \tfrac{7}{2}\mathbf{a}$가 Π 위에 놓이게 되어, $\mathbf{c}$가 Π에 평행하지 않다는 가정에 모순이다. 바로 이 가정 덕분에 $\mathbf{R}$이 진정한 법선벡터(normal vector)가 된다.

다른 관점: 서로 수직인 축으로의 사영

단위벡터 $\mathbf{a}$, $\hat{\mathbf{q}} = \tfrac{1}{4}(\mathbf{b} - 3\mathbf{a})$, 그리고 Π의 단위 법선벡터 $\mathbf{n}$은 정규직교(orthonormal) 집합을 이룬다. 따라서 $\mathbf{P}$와 $\mathbf{Q}$는 $\mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$를 앞의 두 벡터 위로 사영한 것이다.

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{a} = 1 + 3 - 2 = 2, \qquad \text{따라서} \mathbf{P} = 2\mathbf{a};$$
$$\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{q}} = \tfrac{1}{4}\left(\mathbf{a}\cdot\mathbf{q} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{q} + \mathbf{c}\cdot\mathbf{q}\right) = \tfrac{1}{4}(0 + 16 + 8) = 6, \qquad \text{따라서} \mathbf{Q} = 6\hat{\mathbf{q}} = \tfrac{3}{2}(\mathbf{b} - 3\mathbf{a}),$$

여기서 $\mathbf{b}\cdot\mathbf{q} = 25 - 9 = 16$과 $\mathbf{c}\cdot\mathbf{q} = 2 + 6 = 8$을 이용하였다. 남는 부분인 $\mathbf{R}$은 $\mathbf{c}$의 성분 가운데 Π에 수직인 성분이다. 이는 앞의 답과 일치한다.

검산

- 직접 확인: $\mathbf{R}\cdot\mathbf{a} = -2 + \frac{7}{2} - \frac{3}{2} = 0$이고 $\mathbf{R}\cdot\mathbf{b} = 2 + \frac{21}{2} - \frac{25}{2} = 0$이다.
- 구체적인 예: $\mathbf{a} = \mathbf{i}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\mathbf{c} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$로 잡으면 주어진 조건을 모두 만족한다. 그러면 $\mathbf{q} = 4\mathbf{j}$, $\mathbf{P} = 2\mathbf{i}$, $\mathbf{Q} = 6\mathbf{j}$, $\mathbf{R} = \mathbf{k}$이고, 이들의 합은 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + \mathbf{k}$이다.
- 또한 조건을 만족하면서 무작위 방향으로 놓인 배치 2000개에 대해 공식을 검증하였다. 매번 $\mathbf{q}\cdot\mathbf{a} = 0$, $|\mathbf{q}| = 4$였고, $\mathbf{R}$은 Π에 수직이었으며, 세 벡터의 합은 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$였다. 모두 10^{-9} 이내에서 성립하였다.

흔한 실수

- $\mathbf{p} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{a} = 3\mathbf{a}$로 잡는 실수. 이것은 $\mathbf{b}$만의 사영이다. 필요한 것은 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$의 사영, 즉 $4\mathbf{a}$이다.
- $\mathbf{R}\cdot\mathbf{a} = 0$만 부과하는 실수. 평면에 수직이려면 독립인 조건 두 개가 필요하다.
- $\mathbf{P} = \mathbf{p}$, $\mathbf{Q} = \mathbf{q}$라고 가정하는 실수. $\mathbf{c}$ 자체가 Π 안의 성분을 가지므로, $\mathbf{c}$를 더하면 평면 안의 성분도 달라진다.

STEP 너머

이것은 그람-슈미트 과정(Gram–Schmidt process)의 축소판이다. $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$로부터 서로 수직인 방향 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} - 3\mathbf{a}$, $\mathbf{c} + \frac{7}{2}\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b}$를 만들고, 그 방향들을 따라 벡터를 분해하였다. 같은 절차는 몇 차원에서든 통한다. 이 절차는 직교사영(orthogonal projection), 최소제곱 적합(least-squares fitting), 행렬의 QR 분해(QR factorisation)의 바탕이 된다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)가 이 모든 것을 다룬다.

풀이

STEP II 2004, 문제 7

순수수학 • 이분법

> **STEP II 2004, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/04-s2-q7

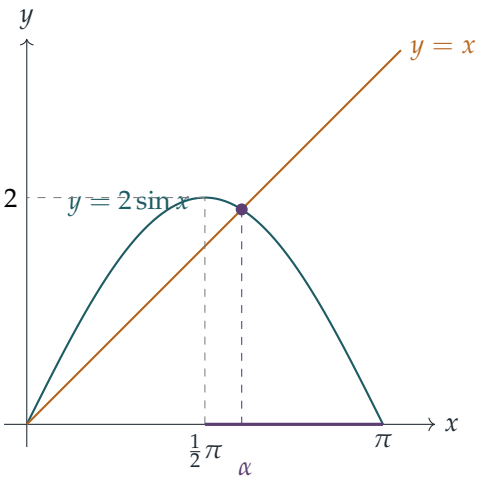
핵심 아이디어

$2\sin x - x = 0$의 근(root)은 곡선 $y = 2\sin x$와 직선 $y = x$가 만나는 점이므로, 그래프를 다루는 부분은 사인 곡선 하나와 직선 하나에 관한 문제이다. 그다음 이분법(bisection)의 각 단계는 매번 하나의 질문으로 귀결된다. 중점에서 $2\sin c$가 c보다 큰가, 작은가? 반각 공식(half-angle formula)을 쓰면 $\frac{5}{8}\pi$와 $\frac{9}{16}\pi$의 사인값이 중첩된 제곱근으로 바뀌고, 두 양수의 제곱을 비교하면 주어진 근삿값만으로 계산을 끝낼 수 있다.

풀이

I_0에서 근이 정확히 하나임

$\mathrm{f}(x) = 0 \iff 2\sin x = x$이므로, 근은 $y = 2\sin x$와 $y = x$가 만나는 점들의 x좌표이다.



$[\frac{1}{2}\pi, \pi]$에서 다음이 성립한다.

- $x = \frac{1}{2}\pi$에서 곡선의 높이는 2이고 직선의 높이는 $\frac{1}{2}\pi < 2$이다($\pi < 4$이므로). 따라서 곡선이 직선보다 위에 있다.
- $x = \pi$에서 곡선의 높이는 0이고 직선의 높이는 $\pi > 0$이다. 따라서 곡선이 직선보다 아래에 있다.
- 이 구간에서 곡선 $y = 2\sin x$는 감소(decreasing)하고 직선 $y = x$는 증가(increasing)한다.

두 그래프 모두 연속(continuous)이므로 곡선은 이 구간 어딘가에서 반드시 직선과 교차한다. 또 하나는 내려가고 다른 하나는 올라가므로, 곡선이 일단 직선 아래로 내려가면 다시는 위로 올라올 수 없다. 따라서 둘은 정확히 한 번 교차하고, $\mathrm{f}(x) = 0$은 I_0에서 정확히 하나의 근 α를 가진다. f로 말하면 $\mathrm{f}(\frac{1}{2}\pi) = 2 - \frac{1}{2}\pi > 0$, $\mathrm{f}(\pi) = -\pi < 0$이고, 이 구간에서 f는 순감소(strictly decreasing)한다.

아래의 모든 이분법 단계에서는 f의 부호가 바뀌는 쪽 절반을 남긴다. $\mathrm{f}(\frac{1}{2}\pi) > 0$이므로 모든 것은 $\mathrm{f}(c_n)$의 부호로 결정된다. $\mathrm{f}(c_n) < 0$이면 근은 c_n의 왼쪽에 있고, $\mathrm{f}(c_n) > 0$이면 오른쪽에 있다.

I_1 구하기

여기서 $c_0 = \frac{3}{4}\pi$이고

$$\mathrm{f}(\tfrac{3}{4}\pi) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{3}{4}\pi \approx 1.4 - \tfrac{3}{4}\sqrt{10}.$$

이다. $\sqrt{10} > 3$이므로 $\frac{3}{4}\sqrt{10} > 2.25 > 1.4$이고, 따라서 $f(c_0) < 0$이다. $f(a_0) > 0$과 합치면 $f(a_0)f(c_0) < 0$이므로

$$I_1 = [\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{3}{4}\pi].$$

이다.

I_2 구하기

이제 $c_1 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi + \frac{3}{4}\pi) = \frac{5}{8}\pi$이고, $2\sin\frac{5}{8}\pi - \frac{5}{8}\pi$의 부호를 알아야 한다.

> **생각해 보기** 계산기 없이 $\sin\frac{5}{8}\pi$를 어떻게 구할 수 있을까?

$\sin\frac{5}{8}\pi = \sin(\pi - \frac{5}{8}\pi) = \sin\frac{3}{8}\pi = \cos\frac{1}{8}\pi$를 이용한 다음, $\theta = \frac{1}{8}\pi$로 두고 배각 공식(double-angle formula) $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$을 쓰면

$$4\cos^2\tfrac{1}{8}\pi = 2\big(1 + \cos\tfrac{1}{4}\pi\big) = 2 + \sqrt{2}.$$

이다. 따라서 $(2\sin\frac{5}{8}\pi)^2 = 2 + \sqrt{2}$이다. $2\sin\frac{5}{8}\pi$와 $\frac{5}{8}\pi$는 모두 양수이므로 둘의 제곱을 비교해도 된다.

$$(2\sin\tfrac{5}{8}\pi)^2 = 2 + \sqrt{2} \approx 3.4, \qquad (\tfrac{5}{8}\pi)^2 \approx \tfrac{25}{64}\cdot 10 = \tfrac{250}{64} \approx 3.9.$$

그러므로 $2\sin\frac{5}{8}\pi < \frac{5}{8}\pi$, 즉 $f(c_1) < 0$이다. 이번에도 $f(a_1) = f(\frac{1}{2}\pi) > 0$이므로 $f(a_1)f(c_1) < 0$이고

$$I_2 = [\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{5}{8}\pi],$$

이며, 이것이 보이려던 결과이다.

I_3 구하기

이제 $c_2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi + \frac{5}{8}\pi) = \frac{9}{16}\pi$이다. 앞에서와 같이 $\sin\frac{9}{16}\pi = \sin\frac{7}{16}\pi = \cos\frac{1}{16}\pi$이고, $\theta = \frac{1}{16}\pi$로 두고 배각 공식을 쓰면

$$(2\sin\tfrac{9}{16}\pi)^2 = 4\cos^2\tfrac{1}{16}\pi = 2\big(1 + \cos\tfrac{1}{8}\pi\big) = 2 + 2\cos\tfrac{1}{8}\pi = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}},$$

이다. 여기서 앞 단계에서 얻은 $2\cos\frac{1}{8}\pi = \sqrt{2+\sqrt{2}}$를 이용하였다. $\sqrt{2} \approx 1.4$로 두면 $\sqrt{2+\sqrt{2}} \approx \sqrt{3.4} > 1.8$이므로($1.8^2 = 3.24$이기 때문이다)

$$(2\sin\tfrac{9}{16}\pi)^2 > 3.8, \qquad (\tfrac{9}{16}\pi)^2 \approx \tfrac{81}{256}\cdot 10 = \tfrac{810}{256} < 3.2.$$

이다. 따라서 $2\sin\frac{9}{16}\pi > \frac{9}{16}\pi$, 즉 $f(c_2) > 0$이다. 이번에는 $f(a_2)f(c_2) > 0$이고, 반면 $f(c_2)f(b_2) = f(\frac{9}{16}\pi)\,f(\frac{5}{8}\pi) < 0$이다. 그러므로

$$I_3 = [\tfrac{9}{16}\pi, \tfrac{5}{8}\pi].$$

이다.

여기서 근삿값을 써도 안전하다. 각 중점에서 비교하는 두 값은 약 0.5 이상 차이가 나는데, 이는 $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.7$이나 $\pi \approx \sqrt{10}$로 생기는 오차보다 훨씬 크다.

검산

- 이분법을 수치적으로 실행하면 같은 구간들이 나오고, 근은 $\alpha \approx 1.8955$로 $\frac{9}{16}\pi \approx 1.767$과 $\frac{5}{8}\pi \approx 1.963$ 사이에 있다.
- 정확한 값도 근삿값과 일치한다. $f(\frac{3}{4}\pi) \approx -0.942$, $f(\frac{5}{8}\pi) \approx -0.116$, $f(\frac{9}{16}\pi) \approx 0.194$이다.
- 각 구간의 길이는 바로 앞 구간의 절반이다. $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{1}{8}\pi$, $\frac{1}{16}\pi$.

흔한 실수

- 부호 변화는 보였지만 근이 왜 **하나뿐인지**는 설명하지 않는 것. 부호 변화만으로는 근이 적어도 하나 있다는 것만 알 수 있다. 유일성을 보이려면 감소와 증가를 비교하는 논증이 필요하다.
- $2\sin c$와 c가 모두 양수임을 먼저 확인하지 않고 제곱해서 비교하는 것.

STEP 너머

부호 변화 논증은 중간값 정리(intermediate value theorem)로, 대학 해석학(analysis) 강의에서 처음 만나는 중요한 정리 가운데 하나이다. 이 정리의 증명에는 실수의 완비성(completeness)이 필요하며, 이분법은 본질적으로 그 증명을 알고리즘으로 실행한 것이다. 이분법은 항상 수렴(converge)하지만 느리다(한 단계에 이진 자릿수 하나씩). 뉴턴-랩슨 방법(Newton–Raphson method) 같은 방법은 훨씬 빠르게 수렴하지만 실패할 수도 있으므로, 수치해석(numerical analysis)은 상당 부분 안전성과 속도 사이의 균형을 맞추는 일이다. 이론에 대해서는 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학의 이해)를 참고하라.

풀이

STEP II 2004, 문제 8

순수수학 • 미분방정식의 비교

STEP II 2004, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/04-s2-q8

핵심 아이디어

$0 \le x < 1$인 동안 우변(right-hand side)은 양수이므로 x는 t에 대해 증가하고, 따라서 방정식을 뒤집어 볼 수 있다. 즉 t를 x의 함수(function), 곧 높이 0에서 높이 x까지 올라가는 데 걸리는 시간으로 볼 수 있다. 모든 높이에서 기울기(gradient)가 더 크다는 것은 모든 높이에 더 빨리 도달한다는 뜻이므로, 주어진 우변 사이의 부등식(inequality)만으로 세 그래프의 위아래 순서가 곧바로 정해진다. 그러면 $x = 1$까지 올라가는 데 유한한 시간이 걸리는지 무한한 시간이 걸리는지는 어떤 이상적분(improper integral)이 수렴(converge)하는지의 문제가 된다.

풀이

이 풀이 전체에서 지수가 n인 경우의 해를 $x_n(t)$로 쓴다. $t = 0$에서 $x = 0$이고, 모든 n에 대해 기울기는 $(1-0)^{1/n} = 1$이므로 모든 곡선은 직선 $x = t$를 따라 원점을 출발한다. $0 \le x < 1$인 동안 기울기는 엄밀히 양수이므로 x는 증가하고,

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{(1-x^n)^{1/n}}, \qquad \text{따라서} \qquad t_n(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}\xi}{(1-\xi^n)^{1/n}}$$

는 $0 \le x < 1$에 대해 해가 높이 x에 도달하는 시각이다.

소문항 (i)

$n = 1$이면 방정식은 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1 - x$이다. 변수분리(separation of variables)를 하면(해를 따라 $1 - x > 0$이므로 문제없다)

$$t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}\xi}{1-\xi} = -\ln(1-x), \qquad \text{따라서} \qquad x = 1 - \mathrm{e}^{-t}.$$

그래프는 기울기 1로 원점에서 출발하여 계속 증가하고, 위로 볼록(concave)하며(기울기 e^{-t}가 감소한다), $t \to \infty$일 때 점근선(asymptote) $x = 1$에 다가가지만 결코 도달하지 않는다. 실제로 $x \to 1$일 때 $t_1(x) = -\ln(1-x) \to \infty$이다. 아래 그림에서 가장 아래 곡선이 이것이다.

소문항 (ii)

부등식. $0 < x < 1$이면 $1 - x$와 $(1-x^2)^{1/2}$가 모두 양수이므로, 주어진 부등식은 양변을 제곱하여 얻은 부등식과 동치이다.

$$(1-x)^2 < 1 - x^2 \iff 1 - 2x + x^2 < 1 - x^2 \iff 2x^2 < 2x \iff x < 1,$$

여기서 마지막 단계는 $2x > 0$으로 나눈 것이다. $x < 1$은 참이므로 $1 - x < (1-x^2)^{1/2}$도 참이다.

개형. 구간 $(0,1)$의 모든 높이 x에서 $n = 2$ 곡선은 $n = 1$ 곡선보다 가파르다. 따라서 $0 < x < 1$에 대해

$$t_2(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}\xi}{(1-\xi^2)^{1/2}} < \int_0^x \frac{\mathrm{d}\xi}{1-\xi} = t_1(x),$$

이다. $(0, x]$에서 왼쪽 피적분함수가 엄밀히 더 작기 때문이다. 그러므로 $n = 2$인 해는 모든 높이에 엄밀히 더 빨리 도달하고, 두 해가 모두 증가하므로 모든 시각 $t > 0$에서($x_2 < 1$인 동안) $n = 2$ 곡선은 $n = 1$ 곡선보다 엄밀히 위에 있다. 두 곡선 모두 기울기 1로 원점을 출발하므로 원점 근처에서는 매우 가깝고, t가 커질수록 벌어진다.

> ? **생각해 보기** 두 곡선은 원점에서 기울기가 같다. 왜 $n = 1$ 곡선이 나중에 슬그머니 위로 올라갈 수 없을까?

위로 올라가려면 어떤 높이 x에서 $n = 2$ 곡선을 따라잡아야, 즉 같은 시각에 x에 도달해야 한다. 그러나 모든 $x \in (0,1)$에 대해 $t_2(x) < t_1(x)$이다. 느리게 올라가는 쪽은 언제나 엄밀히 늦다. (같은 말로, 두 곡선이 같은 높이에 있는 곳에서는 언제나 $n = 2$ 곡선이 더 가파르므로 결코 추월당할 수 없다.)

풀기. $0 \le y < \frac{1}{2}\pi$이고 $t = 0$에서 $y = 0$이 되도록 $x = \sin y$로 놓는다. 그러면 $\cos y > 0$이므로 $(1-x^2)^{1/2} = (\cos^2 y)^{1/2} = \cos y$이고, 방정식은 다음과 같이 된다.

$$\cos y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \cos y \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 1 \quad \Longrightarrow \quad y = t,$$

여기서 $t = 0$에서 $y = 0$임을 이용했다. 따라서 해는

$$x = \sin t \qquad \text{단, } 0 \le t < \tfrac{1}{2}\pi.$$

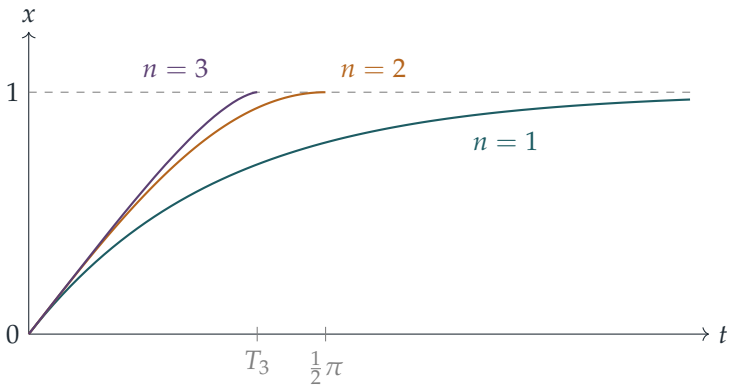
이다. 이는 $t_2(x) = \arcsin x$와 일치한다. $n = 1$인 경우와 달리 이 해는 유한한 시간 안에, 즉 $t = \frac{1}{2}\pi$에서 $x = 1$에 도달하며, 그때의 기울기는 $\cos\frac{1}{2}\pi = 0$이어서 직선 $x = 1$에 접한다.

소문항 (iii)

$(0,1)$에서 주어진 부등식 $(1-x^2)^{1/2} < (1-x^3)^{1/3}$을 앞에서와 똑같이 이용하면, 모든 높이에서 $n=3$ 곡선이 $n=2$ 곡선보다 가파르므로

$$t_3(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}\xi}{(1-\xi^3)^{1/3}} < \int_0^x \frac{\mathrm{d}\xi}{(1-\xi^2)^{1/2}} = \arcsin x \qquad (0<x<1).$$

이다. 따라서 $n=3$ 곡선은 다른 곡선들처럼 기울기 1로 원점을 출발하고, $t>0$에서 $x=\sin t$보다 엄밀히 위에 있다. 그 기울기 $(1-x^3)^{1/3}$은 $x\to 1$일 때 0으로 떨어지므로, 이 곡선 역시 직선 $x=1$과 만나면서 평평해진다.



$t=\frac{1}{2}\pi$ **이전에** $x=1$**에 도달함**. 개형을 보면 $n=3$ 곡선은 $\sin t$보다 위에 있고, $\sin t$는 $\frac{1}{2}\pi$에서 1에 도달한다. 따라서 $n=3$ 곡선은 늦어도 그때까지는 1에 도달해야 한다. 엄밀히 더 이르다는 것을 보이기 위해 적분의 비교에서 $x\to 1$로 보낸다. $x=1$에 도달하는 시각은

$$T_3 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\xi}{(1-\xi^3)^{1/3}}.$$

이다. 이 이상적분은 수렴한다. $[0,1]$에서 $1-\xi^3 = (1-\xi)(1+\xi+\xi^2) \geq 1-\xi$이므로 피적분함수는 $(1-\xi)^{-1/3}$ 이하이고, 이 함수의 $[0,1]$에서의 적분은 $\frac{3}{2}$이기 때문이다. 또 $(0,1)$에서 피적분함수가 $(1-\xi^2)^{-1/2}$보다 엄밀히 작으므로

$$T_3 < \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\xi}{(1-\xi^2)^{1/2}} = \Big[\arcsin\xi\Big]_0^1 = \tfrac{1}{2}\pi.$$

이다. 따라서 $n=3$인 해는 요구한 대로 $T_3 < \frac{1}{2}\pi$인 시각 T_3에 $x=1$에 도달한다. (일단 도달하면 기울기가 0이고 음수가 될 수 없으므로 $x=1$에 머문다.)

검산

- 다시 대입해 보면 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1-\mathrm{e}^{-t}) = \mathrm{e}^{-t} = 1-x$이고, $0\leq t\leq \frac{1}{2}\pi$에서 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin t = \cos t = (1-\sin^2 t)^{1/2}$이다. 각 방정식을 룽게–쿠타(Runge–Kutta) 방법으로 수치적으로 푼 해도 이 식들과 일치한다.

- 수치적으로 $T_3 \approx 1.2092$로, $\frac{1}{2}\pi \approx 1.5708$보다 넉넉히 작다. 사실 정확히 $T_3 = \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$이며(아래 참고), 소수점 아래 일곱째 자리까지 일치한다.
- 높이 $x = 0.9$에서 세 시각은 $-\ln 0.1 \approx 2.30$, $\arcsin 0.9 \approx 1.12$, $t_3(0.9) \approx 0.98$로, 예측한 순서와 같다.

흔한 실수

- 비교하는 것이 같은 시각이 아니라 **같은 높이에서의** 기울기라는 점을 언급하지 않고 "기울기가 더 크니까 곡선이 더 위에 있다"고 주장하는 것. t를 x의 함수로 바꾸어 보면 논증이 정직해진다.
- $\cos y \geq 0$인 이유를 말하지 않고 $(1 - \sin^2 y)^{1/2} = \cos y$로 쓰는 것. 이를 위해서는 $0 \leq y \leq \frac{1}{2}\pi$가 필요하다.
- $x = \sin t$를 $t = \frac{1}{2}\pi$ 너머까지 이어 가는 것. 그러면 감소하게 되지만, 방정식에 의해 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t \geq 0$이어야 한다.

STEP 너머

해가 유한한 시간에 $x = 1$에 도달한 뒤 영원히 $x = 1$에 머무는 현상은 $(1 - x^n)^{1/n}$이 $x = 1$에서 립시츠(Lipschitz) 조건을 만족하지 않기 때문에 일어난다. 바로 이 지점에서 미분방정식(differential equation)의 유일성 정리(uniqueness theorem)가 성립하지 않게 된다($n = 2$이면 $x = 1$과 $x = \sin t$가 모두 $(\frac{1}{2}\pi, 1)$을 지난다). 도달 시각은 베타 함수(Beta function)로 나타난다. $u = \xi^n$으로 치환하면 $T_n = \frac{1}{n}B(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}) = \dfrac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}$을 얻는데, 이는 $n = 2$일 때 $\frac{1}{2}\pi$, $n = 3$일 때 $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$이고, $n \to \infty$일 때 1을 향해 감소한다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 해의 존재성과 유일성, 그리고 해의 비교를 다룬다.

풀이

STEP II 2004, 문제 9

역학 • 무게중심

> **STEP II 2004, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/04-s2-q9

핵심 아이디어

곡면을 바닥에 대고 놓인 반구(hemisphere)는 구면 위의 한 점에서 평면에 닿아 있고, 구의 법선(normal)은 언제나 구의 중심을 지난다. 따라서 반력(reaction)은 밑면의 중심 O를 지나는 연직선을 따라 작용하고, 평형(equilibrium) 상태에서는 그 위에 놓인 물체 전체의 무게중심(centre of gravity)이 바로 그 연직선 위에 있어야 한다. 그러면 이 문제의 각 부분은 결국 "무게중심을 구하고, 그것이 O의 바로 아래에 올 때까지 기울인다"는 것에 지나지 않는다. 물체에 고정된 좌표를 쓰면 이 과정이 수월해진다.

풀이

모형과 평형 조건

반구를 한 점 C에서 수평면에 닿아 있는 강체(rigid body)로, 입자를 가장자리에 고정된 질점(point mass)으로 본다. 작용하는 힘은 무게와 C에서의 접촉력(contact force)뿐이다. C가 구면 위에 있으므로 C에서의 법선은 O를 지나고, 평면이 수평이므로 이 법선은 연직이다. 따라서 C는 O의 바로 아래에 있고, 물체가 어떻게 구르든 O의 높이는 r로 유지된다.

평형 상태에서 접촉력은 전체 무게와 균형을 이루어야 하므로 (마찰(friction)이 없으니) 연직이며, 무게와 같은 직선 위에서 작용한다. 그러므로 다음이 성립한다.

평형 상태에서 계의 무게중심은 O를 지나는 연직선 위에 있다.

물체가 밑면의 곡면 쪽을 바닥에 대고 있으므로, 무게중심은 O보다 아래에 있다.

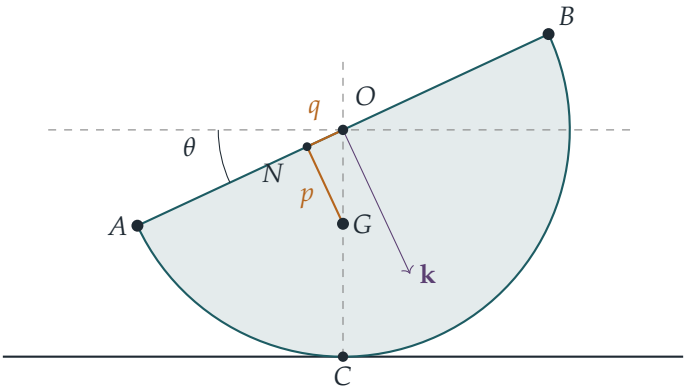
물체 좌표와 처음 위치

물체에 서로 수직인 두 단위벡터(unit vector)를 고정한다. $\mathbf{k}$는 대칭축(axis of symmetry)을 따라 O에서 곡면 쪽을 향하는 벡터이고, $\mathbf{e}$는 밑면 위에 있는 벡터이다. G는 밑면에서 거리 p, O에서 거리 $\sqrt{p^2+q^2}$만큼 떨어져 있으므로, G에서 밑면에 내린 수선의 발 N은 O에서 거리 q만큼 떨어져 있다. $\mathbf{e}$가 O에서 N 쪽을 향하도록 잡으면

$$\overrightarrow{OG} = p\,\mathbf{k} + q\,\mathbf{e}.$$

을 얻는다.

밑면은 $\mathbf{k}$에 수직이므로, 밑면이 수평과 이루는 각은 $\mathbf{k}$가 연직선과 이루는 각과 같다. 처음 위치에서 $\overrightarrow{OG}$는 연직 아래 방향이므로, 이 각 θ는 $\tan\theta = q/p$를 만족한다.



가장자리의 어느 점이 가장 낮을까? 가장자리 위의 점은 O로부터 $r(\cos\phi\,\mathbf{e} + \sin\phi\,\mathbf{f})$만큼 떨어져 있다. 여기서 $\mathbf{f}$는 두 벡터 모두에 수직인 세 번째 단위벡터이다. 이 점이 O보다 얼마나 아래에 있는지는 아래 방향 단위벡터 $(p\mathbf{k}+q\mathbf{e})/\sqrt{p^2+q^2}$ 방향의 성분(component), 즉

$$\frac{rq\cos\phi}{\sqrt{p^2+q^2}},$$

이고, 이 값은 $\phi = 0$일 때 가장 크다($q > 0$이라 하자. $q = 0$이면 밑면이 수평이 되어 가장 낮은 점이 하나로 정해지지 않는다). 따라서

$$\overrightarrow{OA} = r\,\mathbf{e}, \qquad \overrightarrow{OB} = -r\,\mathbf{e}.$$

이다. 말로 하면, A는 대칭축에 대해 G와 같은 쪽에 있고 O와 G를 지나는 연직 평면 위에 있으며, 문제 전체가 이 평면 안에서 다루어진다.

입자가 A에 있을 때

반구와 입자를 합친 무게중심 G_A는

$$(M+m)\,\overrightarrow{OG_A} = M(p\,\mathbf{k} + q\,\mathbf{e}) + mr\,\mathbf{e} = Mp\,\mathbf{k} + (Mq + mr)\,\mathbf{e}.$$

로 주어진다. 새 평형 상태에서 $\overrightarrow{OG_A}$는 연직이므로, θ의 경우와 똑같이 $\mathbf{k}$가 연직선과 이루는 각(곧 밑면이 수평과 이루는 각)은 $\overrightarrow{OG_A}$와 $\mathbf{k}$가 이루는 각이다.

$$\tan\alpha = \frac{Mq+mr}{Mp}, \qquad \text{따라서} \qquad \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{Mq+mr}{Mp}\right).$$

예상대로 A에 더해진 무게가 A를 더 아래로 끌어내리므로 $\alpha > \theta$이다.

? **생각해 보기** 밑면이 이루는 각이 왜 $\overrightarrow{OG_A}$와 대칭축이 이루는 각과 같을까?

밑면은 축 $\mathbf{k}$에 수직이고, 수평선은 연직선에 수직이다. 한 쌍의 직선을 둘 다 직각만큼 회전해도 두 직선이 이루는 각은 변하지 않으므로, 밑면과 수평선이 이루는 각은 $\mathbf{k}$와 연직선이 이루는 각과 같다. 평형 상태에서 O를 지나는 연직선은 직선 OG_A이고, 이 직선의 $\mathbf{k}$ 방향과 $\mathbf{e}$ 방향 성분은 ($M+m$으로 나누면) 각각 Mp와 $Mq+mr$이다. 이 직선이 $\mathbf{k}$와 이루는 각의 탄젠트는 이 두 값의 비이다.

입자가 B에 있을 때

이제 입자는 $-r\,\mathbf{e}$에 있으므로, 새 무게중심 G_B는

$$(M+m)\,\overrightarrow{OG_B} = Mp\,\mathbf{k} + (Mq-mr)\,\mathbf{e}, \qquad \text{따라서} \qquad \tan\beta = \frac{Mq-mr}{Mp}.$$

를 만족한다. m이 작으므로 $mr < Mq$이고, 따라서 $\overrightarrow{OG_B}$는 여전히 축에 대해 앞에서와 같은 쪽에 있으며 밑면은 더 작은 각 β만큼 같은 방향으로 기운다.

두 위치 사이의 각

덧셈정리(compound-angle formula)에 의해

$$\begin{aligned}\tan(\alpha-\beta) &= \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \frac{\dfrac{2mr}{Mp}}{1+\dfrac{(Mq+mr)(Mq-mr)}{M^2p^2}} \\ &= \frac{2mMrp}{M^2p^2+M^2q^2-m^2r^2} = \frac{2mMrp}{M^2\left(p^2+q^2\right)-m^2r^2},\end{aligned}$$

이다. 세 번째 단계에서는 분자와 분모에 M^2p^2을 곱하였다. 이것이 구하려던 결과이다.

검산

- $q=0$이면(예를 들어 균질한 반구) 두 위치는 서로 거울상이다. 즉 $\tan\alpha = mr/(Mp)$이고 $\beta=-\alpha$이다. 이때 공식은 $t=mr/(Mp)$에 대해 $\tan 2\alpha = 2t/(1-t^2)$, 즉 배각 공식(double-angle formula)을 주므로 마땅히 그래야 할 결과와 일치한다.

- $m \to 0$이면 α와 β는 모두 θ로 가까워지고 우변은 0으로 수렴한다.
- $M = 1, m = 0.1, r = 1, p = \frac{3}{8}, q = \frac{1}{8}$로 두면 $\tan\alpha = 0.6$, $\tan\beta = \frac{1}{15}$이므로 $\alpha \approx 30.96°$, $\beta \approx 3.81°$이다. 결과식의 양변은 모두 $\frac{20}{39} \approx 0.5128$이다. 또한 임의로 고른 2000가지 값의 조합에 대해 무게중심의 높이를 최소화하여 평형 각을 수치적으로 구해 보았더니, $\tan\alpha$와 $\tan\beta$에 대한 공식과 10^{-13} 이내에서 일치하였다.

흔한 실수

- G를 O의 아래가 아니라 **처음 위치에서의 접점**의 연직 아래에 두는 것. 접점은 물체가 구르면 움직인다. 언제나 접점의 바로 위에 있는 점은 O이다.
- A를 축의 반대쪽에 잡는 것. 가장자리에서 가장 낮은 점은 G와 같은 쪽에 있으며, 그렇기 때문에 A에 놓인 입자가 기울기를 **증가시킨다**.
- $mr > Mq$일 때 β를 양수로 취급하는 것. 이 경우 밑면은 반대 방향으로 기울고, β를 음수로 셀 때에만 공식이 성립한다. m이 작다는 조건은 바로 이 경우를 배제한다.

STEP 너머

여기서 쓴 원리는, 중력과 하나의 접촉력만 받으며 평형을 이루는 강체는 질량중심(centre of mass)이 그 접촉력의 작용선 위에 있다는 것이다. 이는 질량중심의 높이가 정류값을 가진다는 것과 같으며, 물체가 구를 때 그 높이를 살펴보면 평형이 안정(stable)한지도 판별할 수 있다. 이것이 대학 1학년 역학에서 흔들리거나 구르는 물체에 대해 다루는 안정성의 에너지 방법(energy method)의 출발점이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 관점에서 질량중심과 강체의 평형을 다룬다.

풀이

STEP II 2004, 문제 10

역학 • 경사면 위의 마찰

STEP II 2004, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/04-s2-q10

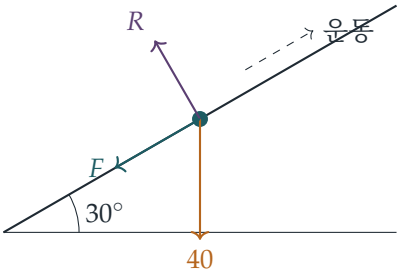
핵심 아이디어

마찰(friction)은 언제나 운동을 방해하므로, 평면을 따라 올라가며 미끄러지는 입자와 내려가며 미끄러지는 입자의 가속도는 서로 다르다. 먼저 두 가속도를 구한다. 수치가 매우 깔끔하게 나오도록 골라져 있다. 그러면 P는 올라가다가 멈추고, 다시 내려와서 아직 올라가는 중인 Q와 만난다. 두 위치를 모두 "최고점으로부터 아래쪽으로 잰 거리"로 쓰면 충돌(collision) 방정식이 제곱의 차(difference of two squares) 꼴이 된다.

(인쇄된 시험지의 소문항 (i)에는 오타가 있다. 충돌 시각에 나오는 "b"는 T여야 한다.)

풀이

각 입자를 거친 평면(rough plane) 위의 입자로 모형화하고, 위치 x는 A에서 ℓ을 따라 위쪽으로 재며, 비탈을 올라가는 방향을 양의 방향으로 잡는다.



평면에 수직인 방향으로는 가속도가 없으므로 수직항력(normal reaction)은

$$R = 4 \cdot 10 \cos 30^\circ = 20\sqrt{3}\ \text{N},$$

이고, 각 입자는 미끄러지고 있으므로 마찰은 한계 마찰(limiting friction)이다.

$$F = \mu R = \frac{1}{5\sqrt{3}} \cdot 20\sqrt{3} = 4\,\mathrm{N}.$$

비탈 아래 방향의 무게 성분은 $40\sin 30^\circ = 20\,\mathrm{N}$이다.

올라갈 때: 마찰은 비탈 아래 방향으로 작용하므로 $4a = -(20+4)$이고, 감속도(deceleration)는 $6\,\mathrm{m\,s^{-2}}$이다.

내려갈 때: 마찰은 비탈 위 방향으로 작용하므로 비탈 아래 방향의 가속도는 $(20-4)/4 = 4\,\mathrm{m\,s^{-2}}$이다.

$20 > 4$이므로, 정지한 입자는 정지 상태로 머물지 않는다. 한계 마찰로는 입자를 붙잡아 둘 수 없으므로 입자는 다시 미끄러져 내려온다.

소문항 (i)

P의 운동. 올라갈 때 $v = 6 - 6t$이므로 P는 $t = 1$에서 멈추며, 그동안 $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1 = 3\,\mathrm{m}$를 이동한다. $0 \le t \le 1$에서 $x_P = 6t - 3t^2 = 3 - 3(1-t)^2$이다. 그 뒤 P는 $x = 3$에서 정지 상태로부터 가속도 4로 미끄러져 내려오므로

$$x_P = 3 - 2(t-1)^2 \qquad (t \ge 1),$$

이고, 이 식은 P가 A로 돌아올 때까지, 즉 $2(t-1)^2 = 3$이 되는 $t = 1 + \sqrt{3/2}$까지 성립한다.

Q의 운동. T만큼 평행이동한 것만 빼면 똑같은 운동이다. $u = t - T$라 하면

$$x_Q = 6u - 3u^2 = 3 - 3(1-u)^2 \qquad (0 \le u \le 1).$$

> **생각해 보기** 둘 다 아직 올라가는 동안에 충돌할 수 있을까?

그럴 수 없다. 둘 다 올라가는 동안 Q는 P가 T초 전에 지나간 경로를 그대로 따라가고, 그 경로를 따라 x는 증가하므로 P가 항상 앞서 있다. 따라서 둘은 P가 방향을 바꾼 뒤, 즉 $t \ge 1$에서만 만날 수 있다. 또한 Q가 먼저 자신의 최고점($u = 1$일 때 $x = 3$)에 도달할 수도 없다. 그때에는 P가 이미 $x = 3$을 떠나 그 아래에 있기 때문이다. 그러므로 충돌하는 순간 P는 내려가는 중이고 Q는 올라가는 중이다.

충돌. P가 방향을 바꾼 뒤 흐른 시간을 $\tau = t - 1 \ge 0$이라 하자. 그러면 $1 - u = 1 - (t - T) = T - \tau$이고, $x_P = x_Q$에서

$$2\tau^2 = 3(T-\tau)^2.$$

τ와 $T - \tau = 1 - u$는 모두 음이 아니므로(뒤의 것은 Q가 아직 올라가는 중이기 때문이다)

양의 제곱근을 취할 수 있다.

$$\sqrt{2}\,\tau = \sqrt{3}\,(T-\tau)$$

$$\tau = \frac{\sqrt{3}\,T}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{2})\,T = (3-\sqrt{6})\,T,$$

여기서 $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 1$을 이용하여 분모를 유리화(rationalising)하였다. 따라서 충돌은 P를 쏘아 올린 뒤

$$t = (3-\sqrt{6})\,T + 1$$

초에 일어나며, 이것이 구하는 결과이다.

이제 T에 대한 조건이 어디에 쓰이는지 확인하면 된다. 이 시각은 P가 A로 돌아오기 전이어야 하므로 $\tau < \sqrt{3/2}$이어야 한다.

$$(3-\sqrt{6})\,T < \sqrt{\tfrac{3}{2}} \iff T < \frac{\sqrt{3/2}\,(3+\sqrt{6})}{3} = \sqrt{\tfrac{3}{2}} + \tfrac{\sqrt{9}}{3} = 1+\sqrt{\tfrac{3}{2}},$$

여기서 $\sqrt{3/2}\cdot\sqrt{6} = 3$을 이용하였다. 이것이 바로 주어진 조건이다. (같은 부등식은 $t \geq T$, 즉 Q가 이미 쏘아 올려졌다는 것도 보장한다. $(3-\sqrt{6})T + 1 \geq T \iff T \leq 1/(\sqrt{6}-2) = 1+\sqrt{3/2}$이기 때문이다.)

소문항 (ii)

$T = 1+\sqrt{2/3}$이면

$$\tau = (3-\sqrt{6})\left(1+\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right) = 3-\sqrt{6}+3\sqrt{\tfrac{2}{3}}-\sqrt{6}\sqrt{\tfrac{2}{3}} = 3-\sqrt{6}+\sqrt{6}-2 = 1,$$

이므로 충돌은 $t = 2$에서 일어난다. 이 T의 값은 $1+\sqrt{3/2}$보다 작으므로 소문항 (i)의 결과를 적용할 수 있다.

마찰력의 크기는 4 N으로 일정하고 언제나 운동을 방해하므로, 마찰로 잃은 에너지는 마찰력에 미끄러진 총거리를 곱한 값이다.

- P는 위로 3 m, 그다음 아래로 $2\tau^2 = 2$ m 미끄러졌으므로 모두 5 m이다.
- Q는 방향을 바꾸지 않았고 P와 같은 지점, 즉 $x = 3-2 = 1$에 있으므로 1 m 미끄러졌다.

따라서 잃은 에너지는

$$4\times(5+1) = 24\,\text{J}.$$

검산

에너지 수지를 따져 보면 이 결과가 확인된다. 처음 운동에너지(kinetic energy)는 $2\times\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 6^2 = 144$ J이다. $t = 2$에서 P의 속력은 $4\times 1 = 4$(운동에너지 32 J)이고, Q는

$u = 1 - \sqrt{2/3}$이고 속력이 $6(1-u) = 6\sqrt{2/3}$이므로 $v^2 = 24$(운동에너지 48 J)이다. 둘 다 비탈을 따라 1 m 위, 즉 $\frac{1}{2}$ m 더 높은 곳에 있으므로 위치에너지(potential energy)는 $2 \times 4 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = 40$ J 증가하였다. 그리고 $144 - 32 - 48 - 40 = 24$ J이다. 무작위로 고른 $T < 1 + \sqrt{3/2}$에 대하여 두 입자를 단계별로 수치 시뮬레이션해 보았더니 충돌 시각이 $(3-\sqrt{6})T + 1$과 일치하였고(예를 들어 $T \approx 1.816$일 때 ≈ 2.000), 마찰로 잃은 에너지는 24.000 J이었다.

흔한 실수

- P가 내려갈 때에도 올라갈 때와 같은 가속도를 쓰는 실수. 마찰의 방향이 반대가 되므로 가속도는 6이 아니라 4이다.
- Q에 작용하는 마찰을 빠뜨리는 실수. Q도 미끄러지고 있었으며, Q의 1 m가 4 J를 보탠다.
- $2\tau^2 = 3(T-\tau)^2$에서 제곱근의 부호를 잘못 택하는 실수. 부호는 $\tau \geq 0$과 $T - \tau \geq 0$으로 정해진다.

STEP 너머

마찰은 비보존력(non-conservative force)의 가장 간단한 예이다. 마찰이 하는 일은 양 끝점뿐 아니라 경로에 따라 달라지며, 그래서 변위가 아니라 미끄러진 총거리가 필요했던 것이다. 어떤 계에서는 역학적 에너지가 보존되고 어떤 계에서는 보존되지 않는 까닭이 여기에 있으며, 이 생각은 대학 1학년 역학 강의에서 선적분(line integral)과 퍼텐셜(potential)을 써서 엄밀하게 다듬어진다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 일, 보존력, 마찰을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP II 2004, 문제 11

역학 • 일률과 저항

STEP II 2004, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

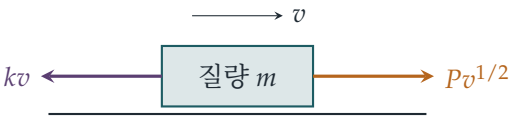
step.maths.org/questions/04-s2-q11

핵심 아이디어

일률(power)은 힘과 속력의 곱이므로, 최대 일률 $Pv^{3/2}$로 작동하는 엔진은 $Pv^{1/2}$의 힘으로 기차를 민다. 그러면 뉴턴의 제2법칙(Newton's second law)으로부터 $\sqrt{v}$가 들어 있는 미분방정식(differential equation)을 얻고, 치환(substitution) $u = \sqrt{v}$를 하면 이것이 바로 풀 수 있는 선형 1계 미분방정식(linear first-order equation)이 된다. 엔진을 끈 뒤에는 각 기차의 속력이 지수적으로 감소(exponential decay)하며, 소문항 (iii)의 요령은 두 감소율을 비교하는 것이다.

풀이

각 기차를 곧고 수평인 선로를 따라 움직이는 질점(particle)으로 모형화한다. 엔진이 최대 일률로 작동하는 동안 선로 방향으로 작용하는 힘은 구동력(driving force)과 저항(resistance) kv이다.



엔진이 속력 v에서 일률 H를 낸다면 구동력은 H/v이다. 따라서 최대 일률일 때 A에 작용하는 구동력은 $Pv^{3/2}/v = Pv^{1/2}$이고, B에 작용하는 구동력은 $2Pv^{1/2}$이다.

소문항 (i)

A에 대하여 선로 방향으로 뉴턴의 제2법칙을 쓰면

$$m\frac{\mathrm{d}v_A}{\mathrm{d}t} = Pv_A^{1/2} - kv_A.$$

$u = v_A^{1/2}$로 두면 $v_A = u^2$이고 $\dfrac{\mathrm{d}v_A}{\mathrm{d}t} = 2u\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$이다. 그러면

$$2mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = Pu - ku^2, \qquad \text{따라서} \qquad 2m\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = P - ku,$$

이다. 여기서 u로 나누었는데, 기차는 항상 움직이고 있으므로($u > 0$) 이는 허용된다. 이 방정식은 선형이다(그리고 변수분리형(separable)이기도 하다):

$$\int \frac{2m\,\mathrm{d}u}{P - ku} = \int \mathrm{d}t \quad \Longrightarrow \quad -\frac{2m}{k}\ln(P - ku) = t + \text{상수},$$

따라서 어떤 상수 C에 대하여 $P - ku = C\mathrm{e}^{-kt/2m}$이다. ($u$가 아주 작은 처음 순간에는 $P - ku > 0$이고, 해가 평형(equilibrium) $u = P/k$에 결코 도달하지 않으므로 계속 양수로 남는다.)

> **생각해 보기** "매우 낮은 속력으로 기어가듯 움직이고 있다"는 말은 무엇을 알려 주는가?

이것은 초기 조건(initial condition)을 준다. $t = 0$에서의 속력은 양수이지만(그러므로 u로 나눈 것은 문제가 없다) 무시할 수 있을 만큼 작으므로, $t = 0$에서 $u = 0$으로 둔다. 그러면 $C = P$이고,

$$u = \frac{P}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-kt/2m}\right), \qquad \text{따라서} \qquad v_A = \frac{P^2\left(1 - \mathrm{e}^{-kt/2m}\right)^2}{k^2},$$

이므로 원하는 결과를 얻는다. (기차가 정확히 정지해 있다면 구동력이 전혀 없으므로 $v \equiv 0$도 원래 방정식을 만족한다. 문제에서 기차들이 이미 천천히 움직이고 있다고 한 것은 이 때문이다.)

B에 대한 방정식은 $2m\dfrac{\mathrm{d}v_B}{\mathrm{d}t} = 2Pv_B^{1/2} - kv_B$이다. 같은 치환을 하면 $4m\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 2P - ku$를 얻는데, 이것은 A에 대한 방정식에서 P를 $2P$로, m을 $2m$으로 바꾼 것이다. 따라서

$$v_B = \frac{4P^2\left(1 - \mathrm{e}^{-kt/4m}\right)^2}{k^2}.$$

소문항 (ii)

두 속력이 모두 양수이므로 $9v_A = 4v_B$는 $3\sqrt{v_A} = 2\sqrt{v_B}$와 동치이다. $x = \mathrm{e}^{-kt/4m}$으로 두면 $\mathrm{e}^{-kt/2m} = x^2$이고, $t > 0$일 때 $0 < x < 1$이다. 조건은 다음과 같이 된다.

$$\frac{3P}{k}\left(1 - x^2\right) = \frac{4P}{k}(1 - x) \quad \Longrightarrow \quad 3(1 - x)(1 + x) = 4(1 - x).$$

$x \neq 1$이므로 $1-x$로 나눌 수 있고, $3+3x=4$에서 $x=\frac{1}{3}$(즉 $t=\frac{4m}{k}\ln 3$)이다. 그러면 $1-x^2=\frac{8}{9}$이고 $1-x=\frac{2}{3}$이므로

$$v_A=\frac{64P^2}{81k^2},\qquad v_B=\frac{16P^2}{9k^2}.$$

간단히 확인해 보면 $9v_A=\frac{64P^2}{9k^2}=4v_B$이다.

소문항 (iii)

엔진을 끈 순간부터 시간 τ를 재고, 그 순간의 속력을 $V_A=\frac{64P^2}{81k^2}$, $V_B=\frac{16P^2}{9k^2}$라 하자. 이제는 저항만 작용한다:

$$m\frac{\mathrm{d}v_A}{\mathrm{d}\tau}=-kv_A,\qquad 2m\frac{\mathrm{d}v_B}{\mathrm{d}\tau}=-kv_B,$$

따라서

$$v_A=V_A\,\mathrm{e}^{-k\tau/m},\qquad v_B=V_B\,\mathrm{e}^{-k\tau/2m}.$$

더 무거운 기차 B는 절반의 지수적 비율로 속력을 잃으므로, v_B를 제곱하면 지수가 맞추어진다:

$$v_B^2=V_B^2\,\mathrm{e}^{-k\tau/m}=\frac{V_B^2}{V_A}\,v_A.$$

마지막으로

$$\frac{V_B^2}{V_A}=\frac{256P^4}{81k^4}\cdot\frac{81k^2}{64P^2}=\frac{4P^2}{k^2},$$

이므로 $v_B^2=\dfrac{4P^2}{k^2}v_A$, 즉 이후의 모든 시각에서 $k^2v_B^2=4P^2v_A$이다. 이로써 원하는 결과를 얻는다.

검산

- $t\to\infty$일 때 $v_A\to P^2/k^2$이며, 이는 구동력 $Pv^{1/2}$가 저항 kv와 같아지는 속력이다. 마찬가지로 $v_B\to 4P^2/k^2$이며, 여기서 $2Pv^{1/2}=kv$이다.
- t가 작을 때 $v_A\approx P^2t^2/(4m^2)$이고 $v_B\approx P^2t^2/(4m^2)$이다. 즉 두 기차는 함께 출발하는데, 각각 단위 질량당 구동력이 $Pv^{1/2}/m$이므로 당연히 그래야 한다.
- $m=1.7$, $P=2.3$, $k=0.9$로 두고 아주 작은 초기 속력에서 시작하여 두 운동 방정식을 수치적으로(룽게–쿠타(Runge–Kutta) 방법으로) 계산했더니, 소문항 (i)의 공식과 약 10^{-5} 이내로 일치했다. $9v_A=4v_B$인 순간에는 $\mathrm{e}^{-kt/4m}=0.33333$, $v_A=5.1602$, $v_B=11.6104$를 얻었고, 엔진을 끈 채로 계속 계산했을 때 $k^2v_B^2$는 $4P^2v_A$와 계속 같았다(예를 들어 2초 뒤에 둘 다 37.8739였다).

흔한 실수

- $Pv^{3/2}$를 힘으로 사용하는 것. 이것은 일률이며, 힘은 일률을 속력으로 나눈 것이다.
- 소문항 (ii)의 조건이 $x = \mathrm{e}^{-kt/4m}$에 대한 이차방정식(quadratic equation)이고, $x = \frac{1}{3}$ 외에 근(root) $x = 1$(즉 두 속력이 모두 0인 $t = 0$)도 가진다는 사실을 잊는 것.

STEP 너머

치환 $u = \sqrt{v}$는 베르누이(Bernoulli) 방정식 $y' + p(t)y = q(t)y^n$을 푸는 방법의 특수한 경우인데, 이 방정식에서는 $u = y^{1-n}$으로 두면 항상 선형 방정식이 된다. 정확히 정지해 있는 기차에 대한 언급은 유일성 이론(uniqueness theory)을 처음 엿보게 해 준다. $\sqrt{v}$는 $v = 0$에서 기울기가 무한대이므로, 이 방정식은 $v = 0$에서 출발하는 해를 둘 이상 가지며, 이는 피카르–린델뢰프 정리(Picard–Lindelöf theorem)로 설명된다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)가 두 주제를 모두 다룬다. 일률과 저항의 역학에 대해서는 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 참고하라.

풀이

STEP II 2004, 문제 12

확률과 통계 • 연속 분포

STEP II 2004, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/04-s2-q12

핵심 아이디어

모든 것은 하나의 역도함수(antiderivative)에서 나온다. xe^{-ax^2}는 상수배를 제외하면 e^{-ax^2}의 도함수이다. 이로부터 정규화 상수(normalising constant)와 누적분포함수(cumulative distribution function)의 닫힌 꼴을 얻으므로, 중앙값(median)은 지수방정식 하나를 풀어서 구할 수 있다. 최빈값(mode)은 곡선이 최고점에 이르는 곳이다. 단, 그 최고점이 $[0,1]$ 안에 있어야 한다. 그렇지 않으면 밀도(density)는 $x = 1$에서도 여전히 증가하고 있다. 그러면 조건부 확률(conditional probability)은 m과 h에서의 누적분포함수 값만 있으면 구할 수 있다.

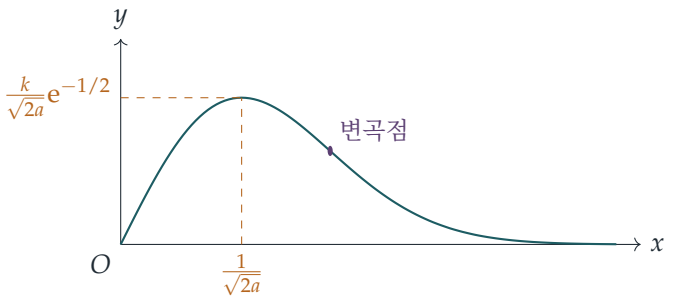
풀이

그래프 그리기

$x \geq 0$에 대하여 $g(x) = kxe^{-ax^2}$라 하자. 그러면 $g(0) = 0$이고, $x > 0$이면 $g(x) > 0$이며, 곱의 미분법(product rule)에 의해

$$g'(x) = ke^{-ax^2}(1 - 2ax^2),$$

이다. 이 값은 $0 \leq x < 1/\sqrt{2a}$에서 양수이고 그 이후로는 음수이다. 따라서 g는 원점에서 (그곳에서의 기울기는 k) 증가하여 $x = 1/\sqrt{2a}$에서 유일한 극댓값 $y = \dfrac{k}{\sqrt{2a}}e^{-1/2}$에 이른 뒤 감소한다. $x \to \infty$일 때 지수함수가 일차 인수를 압도하므로 $y \to 0$이다. 즉 x축이 점근선(asymptote)이다. (한 번 더 미분하면 $x = \sqrt{3/(2a)}$에서 변곡점(point of inflection)이 있음을 알 수 있고, 그곳에서 곡선은 위로 볼록(concave)에서 아래로 볼록(convex)으로 바뀐다.)



상수 k

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{-ax^2} = -2axe^{-ax^2}$이므로, $0 \le t \le 1$에 대하여

$$\int_0^t kxe^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{k}{2a}e^{-ax^2}\right]_0^t = \frac{k}{2a}\left(1 - e^{-at^2}\right).$$

전체 확률은 1이므로 $t = 1$로 놓으면 $\dfrac{k}{2a}(1 - e^{-a}) = 1$, 즉

$$k = \frac{2a}{1 - e^{-a}},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. ($a > 0$이므로 분모는 양수이다.) 이것을 다시 대입하면 $[0,1]$에서의 누적분포함수는

$$F(t) = P(X \le t) = \frac{1 - e^{-at^2}}{1 - e^{-a}}.$$

최빈값

밀도함수는 앞에서 그린 곡선을 $x = 1$에서 잘라 낸 것이다. 그래프에서 알 수 있듯이, $[0,1]$에서 밀도는 극대점이 구간 안에 있으면 그 극대점에서, 그렇지 않으면 오른쪽 끝점에서 가장 크다.

- $a > \frac{1}{2}$이면 $2a > 1$이므로 $1/\sqrt{2a} < 1$이다. 최고점이 구간 안에 있으므로 $m = \dfrac{1}{\sqrt{2a}}$이다.
- $a < \frac{1}{2}$이면 $1/\sqrt{2a} > 1$이므로 $[0,1)$ 전체에서 $f'(x) > 0$이다. 밀도는 구간 전체에서 증가하므로 $m = 1$이다.

($a = \frac{1}{2}$일 때는 두 공식 모두 $m = 1$을 준다.)

중앙값

중앙값 h는 $F(h) = \frac{1}{2}$를 만족한다.

$$1 - \mathrm{e}^{-ah^2} = \tfrac{1}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{-a}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{e}^{-ah^2} = \frac{1 + \mathrm{e}^{-a}}{2}.$$

로그를 취하고 $h > 0$을 이용하면

$$h = \sqrt{\frac{1}{a} \ln\left(\frac{2}{1 + \mathrm{e}^{-a}}\right)}.$$

$1 + \mathrm{e}^{-a} < 2$이므로 로그 값이 양수이고, 따라서 이 값은 실수이다.

$h > m$은 언제 성립하는가?

$a \leq \frac{1}{2}$이면 $m = 1$이고 $h < 1$이므로 (확률의 절반이 h 아래에 있고, 1 위에는 확률이 전혀 없다) $h < m$이다. 따라서 $h > m$은 $a > \frac{1}{2}$일 때만 가능하고, 이때 $m = 1/\sqrt{2a}$이다. 둘 다 양수이므로 제곱을 비교하면

$$\begin{aligned} h > m &\iff \frac{1}{a} \ln\left(\frac{2}{1 + \mathrm{e}^{-a}}\right) > \frac{1}{2a} \iff \ln\left(\frac{2}{1 + \mathrm{e}^{-a}}\right) > \frac{1}{2} \\ &\iff \frac{2}{1 + \mathrm{e}^{-a}} > \mathrm{e}^{1/2} \iff 1 + \mathrm{e}^{-a} < 2\mathrm{e}^{-1/2} \\ &\iff \mathrm{e}^{-a} < 2\mathrm{e}^{-1/2} - 1 \iff a > -\ln\left(2\mathrm{e}^{-1/2} - 1\right). \end{aligned}$$

첫 번째 단계에서는 $a > 0$을 곱했고, 세 번째 단계에서는 exp가 증가함수라는 사실을, 마지막 단계에서는 ln이 증가함수라는 사실을 이용했다. 마지막 단계에는 $2\mathrm{e}^{-1/2} - 1 > 0$도 필요한데, 이는 $\mathrm{e}^{1/2} < 2$이므로 (왜냐하면 $\mathrm{e} < 4$이므로) 성립한다.

> **생각해 보기** 위의 동치 사슬은 $a > \frac{1}{2}$를 가정했다. 그렇다면 결과에 이것을 추가 조건으로 붙여야 하지 않을까?

그렇지 않다. 바로 그 때문에 다음 소문항에서 그것을 묻는 것이다. 아래에서 $c = -\ln\left(2\mathrm{e}^{-1/2} - 1\right)$가 $\frac{1}{2}$보다 크다는 것을 보인다. 따라서 $a > c$이면 자동으로 $a > \frac{1}{2}$이고, 공식 $m = 1/\sqrt{2a}$가 적용되며, 위의 사슬에 의해 $h > m$이다. $a \leq \frac{1}{2}$인 경우와 합하면, $h > m$일 필요충분조건은 $a > c$이다.

상수가 $\frac{1}{2}$보다 크다

ln은 증가함수이므로

$$-\ln\left(2\mathrm{e}^{-1/2} - 1\right) > \tfrac{1}{2} \iff 2\mathrm{e}^{-1/2} - 1 < \mathrm{e}^{-1/2} \iff \mathrm{e}^{-1/2} < 1,$$

이고, 마지막 부등식은 참이다. (수치로는 $c \approx 1.546$이다.)

조건부 확률

$a > c$라 하자. 그러면 $m < h$이므로 사건 $\{X > m\} \cap \{X < h\}$는 사건 $\{m < X < h\}$와 같다. $P(X < h) = \frac{1}{2}$이므로

$$P(X > m \mid X < h) = \frac{P(m < X < h)}{P(X < h)} = \frac{F(h) - F(m)}{\frac{1}{2}} = 1 - 2F(m).$$

$m = 1/\sqrt{2a}$이면 $am^2 = \frac{1}{2}$이므로 $F(m) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-1/2}}{1 - \mathrm{e}^{-a}}$이다. 따라서

$$P(X > m \mid X < h) = \frac{(1 - \mathrm{e}^{-a}) - 2(1 - \mathrm{e}^{-1/2})}{1 - \mathrm{e}^{-a}} = \frac{2\mathrm{e}^{-1/2} - \mathrm{e}^{-a} - 1}{1 - \mathrm{e}^{-a}},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

검산

- $a = c$에서 분자 $2\mathrm{e}^{-1/2} - \mathrm{e}^{-a} - 1$은 정확히 0이며, 이는 그곳에서 $m = h$인 것과 맞아떨어진다. $a > c$이면 분자는 양수로, 확률이라면 마땅히 그래야 한다.
- $a \to \infty$일 때 답은 $2\mathrm{e}^{-1/2} - 1 \approx 0.213$으로 수렴(converge)하며, 이는 1보다 작다.
- $a = 2.5$이면 $k \approx 5.447$, $m \approx 0.447$, $h \approx 0.496$이고, 밀도를 수치적분하면 $P(X > m \mid X < h) \approx 0.1427$을 얻어 공식과 일치한다. $a = 1$이면 $m \approx 0.707 > h \approx 0.616$이며, 이는 $1 < c$와 부합한다.

흔한 실수

- 모든 경우에 $m = 1/\sqrt{2a}$라고 답하는 것. $a < \frac{1}{2}$이면 극대점이 밀도가 0인 $x = 1$ 너머에 있다.
- F 안의 k가 정규화된 값이어서 $F(1) = 1$이 되어야 한다는 것을 잊는 것.
- $P(X > m \mid X < h) = P(X > m)/P(X < h)$라고 쓰는 것. 분자는 두 사건이 함께 일어날 확률이어야 한다.

STEP 너머

이 밀도는 절단된 레일리 분포(truncated Rayleigh distribution)이다. $x = 1$에서 잘라 내지 않으면, $k = 2a$인 $kx\mathrm{e}^{-ax^2}$는 두 좌표가 서로 독립인 정규분포(normal distribution) 확률변수인 점과 원점 사이의 거리의 분포이다. 평균, 중앙값, 최빈값을 비교하고 절단이 이들을 어떻게 이동시키는지 살펴보는 것은 처음 배우는 통계학 강좌에서 거듭 등장하는 주제이

다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 연속확률변수와 그 밀도함수, 분포함수에 대해 더 읽어 보기에 좋은 책이다.

풀이

STEP II 2004, 문제 13

확률과 통계 • 최적 정지

> **STEP II 2004, 13번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/04-s2-q13

핵심 아이디어

한 번에 한 번씩 뽑는 것을 생각한다. 그녀가 흰 공 n개를 무사히 모았다면, 한 번 더 뽑을 때 £1이 더해지거나 지금 가진 £n이 모두 사라지므로, 그 기대 효과는 쉽게 적을 수 있다. 목표를 공 N개로 할 때의 전체 기대 보상은 추가로 한 번 더 뽑는 것의 기대 이득(expected gain)이 양수일 때에만 정확히 증가하므로, 최선의 목표는 그 이득이 아직 음수가 아닌 마지막 목표이다.

풀이

처음부터 끝까지 $1 \le r < b$라고 가정한다. 따라서 빨간 공이 적어도 하나, 흰 공이 적어도 하나 있다. ($r = 0$이면 그녀는 그냥 모든 공을 꺼내면 된다.)

다음 뽑기의 기대 이득

처음 n번의 뽑기에서 모두 흰 공이 나왔다고 하자. 이제 주머니에는 공이 $b - n$개 있다. 빨간 공이 r개, 흰 공이 $b - n - r$개이며, 각 공이 다음에 나올 확률(probability)은 모두 같다(흰 공이 남아 있으려면 $n \le b - r - 1$이어야 한다. 어떤 경우든 $b - n \ge r \ge 1$이다).

- 확률 $\dfrac{b-n-r}{b-n}$로 흰 공이 나오고, 그녀의 보상은 £n에서 £$(n+1)$이 된다. 즉 이득은 $+1$이다.
- 확률 $\dfrac{r}{b-n}$로 빨간 공이 나오고, 그녀는 원래 가졌을 £n을 잃는다. 즉 이득은 $-n$이다.

따라서 다음 뽑기에서 얻는 그녀의 기대 이득은

$$G_n = \frac{(b-n-r)\cdot 1 + r\cdot(-n)}{b-n} = \frac{b-r-n(r+1)}{b-n}.$$

분모가 양수이므로 $G_n = 0$인 것은 정확히 $b-r = n(r+1)$일 때, 즉

$$n = \frac{b-r}{r+1},$$

일 때이며, 이는 문제에서 요구한 결과이다. 더 유용하게는, $n < \frac{b-r}{r+1}$이면 $G_n > 0$이고 $n > \frac{b-r}{r+1}$이면 $G_n < 0$이다.

최선의 공의 개수

처음 N번의 뽑기가 모두 흰 공일 확률을 P_N이라 하고, 그녀가 공 N개를 꺼내는 것을 목표로 할 때의 전체 기대 보상을 E_N이라 하자. 그 N개의 공이 모두 흰 공이면 그녀는 £N을 받고, 그렇지 않으면 아무것도 받지 못하므로

$$E_N = NP_N.$$

> ? **생각해 보기** 한 번의 뽑기에서의 기대 이득은 전체 기대 보상 E_N과 어떤 관계가 있는가?

N을 목표로 하는 것과 $N+1$을 목표로 하는 것을 비교하자. 두 계획은 처음 N개의 공이 모두 흰 공일 때에만 달라지며(그렇지 않으면 두 경우 모두 이미 진 것이다), 이 일은 확률 P_N로 일어난다. 그리고 그 경우 추가 뽑기는 그녀의 보상을 기댓값(expected value)이 G_N인 양만큼 바꾼다. 따라서

$$E_{N+1} - E_N = P_N G_N = P_N \frac{b-r-N(r+1)}{b-N}.$$

(이는 $P_{N+1} = P_N \cdot \frac{b-r-N}{b-N}$로부터 직접 확인할 수도 있다.)

$N \le b-r$이면 $P_N > 0$이므로, $E_{N+1} - E_N$의 부호는 $b-r-N(r+1)$의 부호와 같다. $k = N+1$이라 쓰면, 이는

$$(b+1) - k(r+1).$$

의 부호이다. $m = \frac{b+1}{r+1}$이라 두자. 그러면 $k < m$일 때 $E_k > E_{k-1}$, $k = m$일 때 $E_k = E_{k-1}$, $k > m$일 때 $E_k < E_{k-1}$이다. 따라서 수열(sequence) $E_0, E_1, E_2, \ldots$는 $E_{\lfloor m \rfloor}$까지 순증가하고(m이 정수이면 $E_{m-1} = E_m$으로 같은 값이 생긴다) 그다음에는 순감소한다. 적어도 $k-1 \le b-r$인 동안은 그렇다. 그 너머에서는 $P_N = 0$이고 $E_N = 0$이므로 더 나을 것이 없다.

$\lfloor m \rfloor$이 타당한 목표인지, 즉 $\lfloor m \rfloor \le b - r$인지 확인해야 한다. $b = r + 1$이면 $m = \frac{r+2}{r+1}$이므로 $\lfloor m \rfloor = 1 = b - r$이다. $b \ge r + 2$이면

$$(b - r)(r + 1) - (b + 1) = r(b - r - 1) - 1 \ge r - 1 \ge 0,$$

이므로 $m \le b - r$이다. 어느 경우든 E_N의 최댓값은

$$n = \left\lfloor \frac{b+1}{r+1} \right\rfloor,$$

즉 $\frac{b+1}{r+1}$의 정수 부분(integer part)에서 얻어지며, 이는 문제에서 요구한 결과이다.

이 목표는 어떤 정지 규칙(stopping rule)을 쓰더라도 그녀가 얻을 수 있는 최선이기도 하다. 계속할지 정하기 전에 그녀가 알게 되는 것은 지금까지의 모든 공이 흰 공이었다는 사실뿐이므로(그렇지 않다면 게임은 끝난 것이다), 모든 규칙은 결국 수 N을 미리 정하는 것과 같다.

$r = 1$인 경우

빨간 공이 하나일 때, 처음 N번의 뽑기에서 빨간 공을 피하는 것은 정확히 빨간 공이 마지막 $b - N$개의 자리 중 하나에 있을 때이며, 모든 자리는 똑같이 가능하다. 따라서

$$P_N = \frac{b - N}{b}, \qquad E_N = \frac{N(b - N)}{b}.$$

최선의 목표는 $n = \lfloor \frac{b+1}{2} \rfloor$이다.

b가 짝수인 경우. 이때 $\frac{b+1}{2} = \frac{b}{2} + \frac{1}{2}$이므로 $n = \frac{b}{2}$이고

$$E_n = \frac{\frac{b}{2} \cdot \frac{b}{2}}{b} = \frac{b}{4}.$$

그녀의 전체 기대 보상은 £$\frac{1}{4}b$이며, 이는 문제에서 요구한 결과이다.

b가 홀수인 경우. 이때 $n = \frac{b+1}{2}$이므로 $b - n = \frac{b-1}{2}$이고

$$E_n = \frac{\frac{b+1}{2} \cdot \frac{b-1}{2}}{b} = \frac{b^2 - 1}{4b}.$$

그녀의 전체 기대 보상은 £$\frac{b^2 - 1}{4b}$이다. (여기서 $m = \frac{b+1}{2}$는 정수이므로, 대칭인 식 $N(b - N)/b$가 보여 주듯 공 $\frac{b-1}{2}$개를 목표로 해도 같은 값을 얻는다.)

검산

- $r = 1$일 때 $E_N = N(b - N)/b$는 N에 대해 아래로 볼록한(위로 열린 것이 아닌, 아래로 향한) 포물선(parabola)이고 꼭짓점(vertex)은 $N = b/2$이다. 이는 두 답과 모두 맞는다. b가 짝수이면 꼭짓점에서 정확히 $b/4$이고, b가 홀수이면 그보다 조금 작은 $\frac{b}{4} - \frac{1}{4b}$이다.

- $b = 7, r = 2$로 두자. 공식은 $n = \lfloor 8/3 \rfloor = 2$를 주고, 직접 계산하면 $E_0, \ldots, E_5 = 0, \frac{5}{7}, \frac{20}{21}, \frac{6}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{21}$로 $N = 2$에서 최대가 된다. 공을 늘어놓는 7!가지 순서를 모두 나열하여 이를 확인했고, 모든 $b \leq 24$에 대해 n의 공식을 완전한 최적 정지 계산과 비교하여 확인했다.
- $b = 9, r = 1$이면 답은 $\frac{80}{36} = \frac{20}{9} \approx 2.22$로, $\frac{9}{4}$보다 조금 작다.

흔한 실수

- 빨간 공이 나오면 이미 모은 £n을 잃는다는 것을 잊고, 기대 이득을 그냥 $\frac{b-n-r}{b-n}$로 쓰는 것.
- "이미 뽑은 공 n개"와 "목표인 공 n개"를 혼동하는 것. 이득 G_n은 $n = \frac{b-r}{r+1}$에서 0이 되며, 그래서 최선의 **목표**는 그보다 하나 많은 $\frac{b-r}{r+1} + 1 = \frac{b+1}{r+1}$이다.
- $\frac{b+1}{r+1}$이 정수일 때 값이 같아지는 경우를 놓치는 것. 이때는 n과 $n-1$이 모두 최적이다.

STEP 너머

이것은 작은 **최적 정지**(*optimal stopping*) 문제이며, 위의 논증은 "한 단계 앞보기(one-step look-ahead)" 규칙이다. 즉 한 단계를 더 가는 것의 기대 이득이 음수가 되는 순간 멈춘다. 이 규칙은 문제가 **단조**(*monotone*)일 때, 즉 계속하는 것이 일단 불리해 보이면 그 뒤로도 계속 불리할 때 언제나 최적이다. 여기서는 G_n이 n에 대해 감소하므로 그러하다. 같은 아이디어는 대학 1, 2학년 확률론에서 비서 문제(secretary problem)와 마팅게일(martingale) 방법으로 이어진다. Grimmett and Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 그 바탕이 되는 조건부 기댓값(conditional expectation) 도구를 익히기에 좋은 책이다.

풀이

STEP II 2004, 문제 14

확률과 통계 • 포함배제의 원리

STEP II 2004, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/04-s2-q14

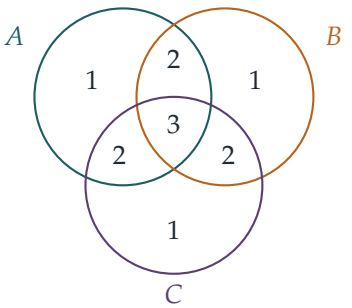
핵심 아이디어

포함배제 원리(inclusion–exclusion)는 중복으로 센 것을 바로잡는 셈법이다. $\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C)$를 더하면 겹치는 부분을 너무 여러 번 세게 되는데, 두 사건씩의 항과 세 사건 모두의 항이 이 셈을 바로잡는다. 푸딩 문제에서는 **여사건**(complement)을 다루는 편이 훨씬 쉽다. E_i를 푸딩 i가 비어 있는 사건이라 하자. **어떤** 푸딩이 비어 있을 확률은 합사건(union)의 확률이고, 이것이 바로 포함배제 원리가 다루는 대상이다. 게다가 E_i들의 각 교사건(intersection)의 확률은 매우 간단하다.

풀이

포함배제 공식

$A \cup B \cup C$를 벤 다이어그램(Venn diagram)의 서로소(disjoint)인 일곱 영역으로 나눈다. 영역들을 통째로 모아 만든 사건의 확률은 그 영역들의 확률의 합이므로, 우변에서 각 영역이 정확히 한 번씩 세어짐을 확인하면 충분하다.



그림의 숫자는 각 영역이 A, B, C 가운데 몇 개에 속하는지를 나타낸다. 세 사건 가운데 정확히 k개에 속하는 영역을 하나 잡자. 여기서 $k = 1, 2$ 또는 3이다.

- 이 영역은 항 $\mathrm{P}(A), \mathrm{P}(B), \mathrm{P}(C)$ 가운데 k개에 나타난다.
- 이 영역은 두 사건씩의 교사건 가운데 $\binom{k}{2}$개에 나타난다. 예를 들어 이 영역이 $A \cap B$에 속하는 것은 A와 B 모두에 속할 때와 정확히 같기 때문이다.
- 이 영역은 $k = 3$일 때만 세 사건의 교사건에 나타난다. 즉 $\binom{k}{3}$번 나타난다.

따라서 이 영역이 최종적으로 세어지는 횟수는

$$k - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} = \begin{cases} 1 - 0 + 0 = 1 & (k = 1), \\ 2 - 1 + 0 = 1 & (k = 2), \\ 3 - 3 + 1 = 1 & (k = 3). \end{cases}$$

이다. $A \cup B \cup C$의 모든 영역은 정확히 한 번씩 세어지고, 합사건 바깥의 영역은 전혀 세어지지 않는다. 따라서 우변은 $\mathrm{P}(A \cup B \cup C)$와 같다.

(같은 방법으로, 두 사건에 대한 법칙 $\mathrm{P}(X \cup Y) = \mathrm{P}(X) + \mathrm{P}(Y) - \mathrm{P}(X \cap Y)$를 $X = A \cup B$, $Y = C$에 적용한 뒤 다시 $(A \cap C) \cup (B \cap C)$에 적용해도 된다.)

각 푸딩에 6펜스 동전이 적어도 하나씩 들어갈 확률

모형. 골고루 저은 뒤 똑같은 양으로 나눈다는 것은, 각 6펜스 동전이 다른 동전과 독립적(independent)으로 푸딩 1, 2, 3에 각각 확률 $\frac{1}{3}$로 들어간다는 뜻이다. $r \geq 1$이라 하자.

E_i를 푸딩 i에 6펜스 동전이 하나도 없는 사건이라 하자.

- E_1은 r개의 동전이 모두 푸딩 1을 피할 때 일어난다. 각 동전이 그럴 확률은 $\frac{2}{3}$이므로 독립성에 의해 $\mathrm{P}(E_1) = \left(\frac{2}{3}\right)^r$이고, E_2, E_3도 마찬가지이다.
- $E_1 \cap E_2$는 모든 동전이 푸딩 3에 들어갈 때 일어나므로 $\mathrm{P}(E_1 \cap E_2) = \left(\frac{1}{3}\right)^r$이고, 나머지 쌍도 마찬가지이다.
- $E_1 \cap E_2 \cap E_3$이 일어나려면 세 푸딩이 모두 비어 있어야 하는데, $r \geq 1$이므로 이는 불가능하다. 따라서 그 확률은 0이다.

포함배제 원리에 의해, 적어도 한 푸딩이 비어 있을 확률은

$$p_r = \mathrm{P}(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = 3\left(\tfrac{2}{3}\right)^r - 3\left(\tfrac{1}{3}\right)^r.$$

이다. 각 푸딩에 6펜스 동전이 적어도 하나씩 들어 있을 확률은 그 여사건의 확률이다.

$$1 - 3\left(\tfrac{2}{3}\right)^r + 3\left(\tfrac{1}{3}\right)^r = \frac{3^r - 3 \cdot 2^r + 3}{3^r}.$$

적어도 여섯 개의 6펜스 동전

$p_r < \frac{1}{3}$이 되는 r의 값을 구해야 한다. 직접 계산하면

$$p_5 = \frac{3 \cdot 32 - 3}{243} = \frac{93}{243} = \frac{31}{81} > \frac{27}{81} = \frac{1}{3}, \qquad p_6 = \frac{3 \cdot 64 - 3}{729} = \frac{189}{729} = \frac{7}{27} < \frac{9}{27} = \frac{1}{3}.$$

이다. 더 작은 r이 조건을 만족하지 않음을 확실히 하기 위해 p_r이 감소함을 보이자. $r \geq 1$일 때

$$p_{r+1} - p_r = 3\left(\tfrac{2}{3}\right)^r \left(\tfrac{2}{3} - 1\right) - 3\left(\tfrac{1}{3}\right)^r \left(\tfrac{1}{3} - 1\right) = -\left(\tfrac{2}{3}\right)^r + 2\left(\tfrac{1}{3}\right)^r = \left(\tfrac{1}{3}\right)^r (2 - 2^r),$$

이고, 이 값은 $r = 1$일 때 0, $r \geq 2$일 때 음수이다. 따라서 $p_1 = p_2 \geq p_3 \geq p_4 \geq p_5 = \frac{31}{81}$이고, $r \leq 5$인 모든 r에 대해 $p_r > \frac{1}{3}$이다. ($r = 0$이면 모든 푸딩이 반드시 비어 있다.) 그러므로 어떤 푸딩에 6펜스 동전이 없을 확률이 $\frac{1}{3}$보다 작으려면 $r \geq 6$이어야 한다. 또 p_r은 계속 감소하므로 $r \geq 6$인 모든 r에 대해 실제로 $p_r \leq p_6 < \frac{1}{3}$이다. 따라서 요리사는 요구된 대로 6펜스 동전을 6개 이상 사용해야 한다.

각 푸딩에 6펜스 동전이 두 개씩

이제 $r = 6$이다. T를 각 푸딩에 6펜스 동전이 정확히 두 개씩 들어 있는 사건, S를 각 푸딩에 적어도 하나씩 들어 있는 사건이라 하자. 앞 문항에서

$$\mathrm{P}(S) = 1 - p_6 = 1 - \frac{7}{27} = \frac{20}{27}.$$

이다. (서로 구별되는) 여섯 개의 동전을 푸딩에 보내는 방법은 $3^6 = 729$가지이고 모두 같은 정도로 일어날 수 있다. 각 푸딩에 두 개씩 보내는 방법의 수는 여섯 개의 대상을 이름이 붙은 세 쌍으로 나누는 방법의 수인 $\dfrac{6!}{2!\,2!\,2!} = 90$이다. 따라서 $\mathrm{P}(T) = \frac{90}{729} = \frac{10}{81}$이다.

? **생각해 보기** 왜 $\mathrm{P}(T \cap S)$가 그냥 $\mathrm{P}(T)$일까?

모든 푸딩에 동전이 두 개씩 있으면 당연히 모든 푸딩에 적어도 하나씩 있으므로 $T \subseteq S$이고 $T \cap S = T$이다. 따라서 조건부확률(conditional probability)은

$$\mathrm{P}(T \mid S) = \frac{\mathrm{P}(T)}{\mathrm{P}(S)} = \frac{10/81}{20/27} = \frac{10}{81} \cdot \frac{27}{20} = \frac{1}{6}.$$

이다.

검산

$r = 1$과 $r = 2$일 때 공식은 모든 푸딩에 6펜스 동전이 들어 있을 확률을 0으로 주는데, 이는 옳다. 동전 세 개보다 적은 수로 푸딩 세 개를 채울 수는 없기 때문이다. $r = 3$일 때 공식은

$\frac{27-24+3}{27} = \frac{2}{9}$를 주는데, 이는 직접 센 값 $3!/3^3 = 6/27$과 일치한다. $r \leq 9$에 대해 3^r가지 배정을 모두 정확히 나열해 보면 공식과 일치하고, $p_5 = \frac{31}{81} \approx 0.383$과 $p_6 = \frac{7}{27} \approx 0.259$가 확인되며, 최종 답 $\frac{1}{6} \approx 0.167$을 얻는다(푸딩 200 000개를 시뮬레이션하면 0.166이 나왔다).

흔한 실수

- 6펜스 동전을 구별할 수 없다고 보고 $6 = a + b + c$로 나타내는 28가지 방법이 같은 정도로 일어난다고 세는 실수. 실제로는 그렇지 않다. $(2,2,2)$는 90가지 방법으로 일어날 수 있지만 $(6,0,0)$은 한 가지 방법으로만 일어난다.
- $r = 6$과 $r = 5$만 확인하는 실수. "6개 이상 사용해야 한다"를 보이려면 더 작은 모든 r이 조건을 만족하지 않음도 보여야 하며, 그래서 단조성(monotonicity)을 보이는 단계가 중요하다.
- 세 사건의 교사건이 공사건이라는 것을 잊거나, 아무 설명 없이 그 확률을 $(0)^r$로 두는 실수.

STEP 너머

n개의 사건에 대한 일반적인 포함배제 원리는 모든 k중 교사건의 교대합으로 이루어지며, $\sum_{j\geq 1}(-1)^{j-1}\binom{k}{j} = 1$을 이용하여 위와 똑같은 세기 논증으로 증명된다. 이를 n개의 푸딩에 적용하면 **전사**(surjection)의 개수를 세게 되며, 제2종 스털링 수(Stirling numbers of the second kind)와 고전적인 쿠폰 수집가 문제(coupon-collector problem)로 이어진다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)에서 포함배제 원리와 이러한 점유 문제들을 다룬다.

풀이

STEP III 2004, 문제 1

순수수학 • 쌍곡선 함수의 적분

> **STEP III 2004, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/04-s3-q1

핵심 아이디어

두 피적분함수는 모두 하나의 쌍곡선함수(hyperbolic function)에 다른 쌍곡선함수로 만든 식을 곱한 꼴이고, $\sinh x\,\mathrm{d}x$와 $\cosh x\,\mathrm{d}x$는 각각 정확히 $\cosh x$와 $\sinh x$의 미분이다. 따라서 치환(substitution) $c = \cosh x$와 $s = \sinh x$를 하면 두 적분은 유리함수의 적분이 된다. 하나는 부분분수(partial fractions)가 필요하고, 다른 하나는 역탄젠트(arctangent)가 된다. "hence" 부분에서 결정적인 관찰은 $2\cosh^2 x - 1 = 1 + 2\sinh^2 x$이므로 두 분모가 같은 함수라는 점이다.

풀이

첫 번째 적분

$c = \cosh x$로 놓으면 $\mathrm{d}c = \sinh x\,\mathrm{d}x$이고, 적분 구간의 끝 $x = 0$과 $x = a$는 $c = 1$과 $c = \cosh a$가 된다. 그러면

$$\int_0^a \frac{\sinh x}{2\cosh^2 x - 1}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\cosh a} \frac{\mathrm{d}c}{2c^2 - 1}.$$

분모는 $(\sqrt{2}\,c - 1)(\sqrt{2}\,c + 1)$로 인수분해되고,

$$\frac{1}{(\sqrt{2}\,c - 1)(\sqrt{2}\,c + 1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\,c - 1} - \frac{1}{\sqrt{2}\,c + 1}\right),$$

이다. 이는 다시 통분하여 확인할 수 있다. 분자는 $\frac{1}{2}\big((\sqrt{2}c + 1) - (\sqrt{2}c - 1)\big) = 1$이다. 각 항을 적분하면 로그가 되며, 연쇄법칙(chain rule)에 의해 $1/\sqrt{2}$라는 인수가 추가로 붙는다.

$c \geq 1$에서 $\sqrt{2}c \pm 1$은 모두 양수이므로 절댓값 기호(modulus signs)는 필요 없다.

$$\int_1^{\cosh a} \frac{\mathrm{d}c}{2c^2-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big[\ln(\sqrt{2}\,c-1) - \ln(\sqrt{2}\,c+1)\Big]_1^{\cosh a}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}\cosh a - 1}{\sqrt{2}\cosh a + 1}\right) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right).$$

$-\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$이므로, 이것이 바로 구하려는 결과이다.

두 번째 적분

이번에는 $s = \sinh x$로 놓으면 $\mathrm{d}s = \cosh x\,\mathrm{d}x$이고, 적분 구간의 끝은 $s = 0$과 $s = \sinh a$이다.

$$\int_0^a \frac{\cosh x}{1+2\sinh^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\sinh a} \frac{\mathrm{d}s}{1+(\sqrt{2}\,s)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\arctan(\sqrt{2}\,s)\Big]_0^{\sinh a}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\big(\sqrt{2}\sinh a\big).$$

무한 구간의 적분

생각해 보기 두 피적분함수의 분모는 생김새가 다르다. 어떻게 두 적분을 뺄 수 있을까?

$\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$를 이용하면

$$2\cosh^2 x - 1 = 2 + 2\sinh^2 x - 1 = 1 + 2\sinh^2 x,$$

이므로 두 분모는 같고,

$$\int_0^a \frac{\cosh x - \sinh x}{1+2\sinh^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\sinh a) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}\cosh a - 1}{\sqrt{2}\cosh a + 1}\right)$$
$$- \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right).$$

이제 $a \to \infty$로 보낸다. $\sinh a \to \infty$이므로 $\arctan(\sqrt{2}\sinh a) \to \frac{\pi}{2}$이다. $\cosh a \to \infty$이므로

$$\frac{\sqrt{2}\cosh a - 1}{\sqrt{2}\cosh a + 1} = \frac{1 - 1/(\sqrt{2}\cosh a)}{1 + 1/(\sqrt{2}\cosh a)} \to 1,$$

이고, ln이 1에서 연속(continuous)이므로 그 로그는 0으로 수렴한다. 세 항 모두 유한한 극한을 가지므로 이상적분(infinite integral)은 수렴(converges)하고

$$\int_0^\infty \frac{\cosh x - \sinh x}{1+2\sinh^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right),$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

마지막 적분

? **생각해 보기** $\cosh x - \sinh x$와 $1 + 2\sinh^2 x$를 e^x로 나타내면 어떤 모양일까?

$u = e^x$로 놓으면 $\cosh x - \sinh x = e^{-x} = 1/u$이고, 배각 공식(double-angle formula)을 이용하면

$$1 + 2\sinh^2 x = \cosh 2x = \frac{u^2 + u^{-2}}{2} = \frac{u^4 + 1}{2u^2}.$$

또 $\mathrm{d}u = e^x\,\mathrm{d}x$이므로 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/u$이고, 적분 구간의 끝 $x = 0$, $x \to \infty$는 $u = 1$, $u \to \infty$가 된다. 따라서

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\cosh x - \sinh x}{1 + 2\sinh^2 x}\,\mathrm{d}x &= \int_1^\infty \frac{1}{u} \cdot \frac{2u^2}{1 + u^4} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{u} \\ &= 2\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}u}{1 + u^4}.\end{aligned}$$

앞의 결과를 반으로 나누면

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}u}{1 + u^4} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln\left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}\right).$$

이 식은 더 깔끔하게 정리된다. $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = (\sqrt{2}+1)^2$이므로 로그는 $2\ln(1+\sqrt{2})$이고

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}u}{1 + u^4} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} - \frac{\ln(1 + \sqrt{2})}{2\sqrt{2}} \approx 0.2437.$$

검산

- $a = 0$일 때 첫 번째 공식은 $\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} + \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) = 0$을 준다. 길이가 0인 구간에서의 적분이므로 당연히 그래야 한다.
- 최종 답은 양수이고 $\int_1^\infty u^{-4}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}$보다 작다. $1 + u^4 > u^4$이므로 타당하다.
- $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}u}{1+u^4}$에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면($u = 1/t$로 치환하면 $\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$가 된다) 0.243748을 얻으며, 이는 공식과 소수점 아래 열두 자리까지 일치한다. x에 대한 이상적분은 수치적으로 그 두 배인 0.487495로 확인된다.

흔한 실수

- $\frac{1}{\sqrt{2}c \pm 1}$이나 $\frac{1}{1+2s^2}$을 적분할 때 생기는 인수 $\frac{1}{\sqrt{2}}$를 빠뜨린다.
- 치환할 때 적분 구간을 바꾸지 않거나, 답을 c나 s로 나타낸 채로 둔다.

- 마지막 부분에서 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/u$임을 잊으면 $2u/(1+u^4)$가 되어 발산하는(divergent) 적분을 얻는다.

STEP 너머

최종 결과는 고전적인 결과의 일부이다. $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{1+u^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$이고, 치환 $u \mapsto 1/u$를 하면 $[0,1]$과 $[1,\infty)$에서의 두 부분이 각각 $\int_0^1 \frac{1}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$와 $\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$임을 알 수 있는데, 이 둘의 합과 차는 초등적으로 계산된다. 대학 1학년 과정에서는 경로적분(contour integration)과 유수(residues)를 이용하는 더 매끄러운 방법도 배우게 되는데, 이 방법은 $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{1+u^n} = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}$을 한 번에 계산한다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이 아이디어를 배우기에 아름다운 책이다.

풀이

STEP III 2004, 문제 2

순수수학 • 점근선과 곡선의 개형

> **STEP III 2004, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/04-s3-q2

핵심 아이디어

$f(x)$를 직선 $y = x - 4$에 보정항을 더한 꼴로 쓴다. 보정항의 분자는 완전제곱식(perfect square)이므로 한 점에서 **두 번** 0이 되고, 바로 이 중근이 접한다(tangency)는 것의 의미이다. $f(x) = 0$의 근을 구할 때는 분모를 없앤다. 그러면 두 제곱의 차(difference of two squares)가 나오고, 이것은 곧바로 인수분해된다.

풀이

풀이 전체에서 다음과 같이 쓴다.

$$f(x) = (x-4) - \frac{16(2x+1)^2}{x^2(x-4)}.$$

소문항 (i)

분모는 $x = 0$과 $x = 4$에서 0이 된다. 분자 $16(2x+1)^2$은 두 점 모두에서 0이 아니므로, 수직 점근선(vertical asymptote)은 다음과 같다.

$$x = 0 \qquad \text{그리고} \qquad x = 4.$$

$|x|$가 클 때 이 분수는 분자가 이차식이고 분모가 삼차식이다.

$$\frac{16(2x+1)^2}{x^2(x-4)} = \frac{64x^2+64x+16}{x^3-4x^2} \approx \frac{64}{x} \to 0 \quad \text{극한} x \to \pm\infty,$$

따라서 $f(x) - (x-4) \to 0$이고, 사선 점근선(oblique asymptote)은 다음과 같다.

$$y = x - 4.$$

? 생각해 보기 점근선이 어떻게 접선이 될 수도 있을까?

점근선(asymptote)은 멀리 떨어진 곳에서 일어나는 일만 설명하므로, 그 직선이 어떤 유한한 점에서 곡선에 접하는 것을 막는 것은 없다. 직선과 곡선이 만나는 곳을 찾기 위해 $\mathrm{f}(x) = x - 4$로 놓는다.

$$\mathrm{f}(x) - (x-4) = -\frac{16(2x+1)^2}{x^2(x-4)} = 0 \iff x = -\tfrac{1}{2}.$$

인수 $(2x+1)$이 제곱되어 있으므로 $x = -\frac{1}{2}$는 $\mathrm{f}(x) - (x-4) = 0$의 **중근**(double root)이다. 이는 직선이 그 점에서 곡선에 접한다는 뜻이다. 직접 확인하기 위해 $h(x) = -16/\big(x^2(x-4)\big)$로 두고 $D(x) = \mathrm{f}(x) - (x-4) = (2x+1)^2\,h(x)$라 하자. 함수 h는 $x = -\frac{1}{2}$ 근처에서 미분가능(differentiable)하므로

$$D'(x) = 4(2x+1)h(x) + (2x+1)^2 h'(x),$$

이고, 이 값은 $x = -\frac{1}{2}$에서 0이다. 따라서 $\mathrm{f}'(-\frac{1}{2}) = 1$이며, 이는 점근선의 기울기와 같다. 또한 $\mathrm{f}(-\frac{1}{2}) = -\frac{9}{2}$이므로 이 점은 $y = x - 4$ 위에 있다. 그러므로 사선 점근선은 점 $(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{2})$에서 곡선의 접선(tangent)이다.

소문항 (ii)

모든 항을 공통분모 $x^2(x-4)$로 통분한다.

$$\mathrm{f}(x) = \frac{x^2(x-4)^2 - 16(2x+1)^2}{x^2(x-4)} = \frac{\big[x(x-4)\big]^2 - \big[4(2x+1)\big]^2}{x^2(x-4)}.$$

분자는 두 제곱의 차이다.

$$\begin{aligned}\big[x^2 - 4x - 4(2x+1)\big]\big[x^2 - 4x + 4(2x+1)\big] &= (x^2 - 12x - 4)(x^2 + 4x + 4)\\ &= (x^2 - 12x - 4)(x+2)^2.\end{aligned}$$

따라서

$$\mathrm{f}(x) = \frac{(x+2)^2(x^2 - 12x - 4)}{x^2(x-4)}.$$

인수 $(x+2)^2$로부터 $x = -2$가 $\mathrm{f}(x) = 0$의 중근임을 알 수 있고, 요구된 대로 $x = -2$는 분모의 영점이 아니다. 나머지 두 근은 $x^2 - 12x - 4 = 0$에서 나온다.

$$x = 6 \pm 2\sqrt{10} \approx 12.32,\ -0.32.$$

소문항 (iii)

그래프 개형을 그리는 데 필요한 특징들을 모아 보자.

$x = 0$ **근처.** $x \to 0$일 때 $f(x) \approx -\dfrac{16}{x^2 \cdot (-4)} = \dfrac{4}{x^2}$이므로, **양쪽** 모두에서 $f(x) \to +\infty$이다.

$x = 4$ **근처.** $x \to 4$일 때 $f(x) \approx -\dfrac{16 \cdot 81}{16(x-4)} = -\dfrac{81}{x-4}$이다. 따라서 $x \to 4^-$일 때 $f(x) \to +\infty$이고, $x \to 4^+$일 때 $f(x) \to -\infty$이다.

사선 점근선의 어느 쪽에 있는가? $f(x) - (x-4) = -16(2x+1)^2/\left(x^2(x-4)\right)$이다. 이 값은 $x < 4$에서($x = 0$과 $x = -\frac{1}{2}$는 제외) 양수이고, $x > 4$에서 음수이다. 따라서 곡선은 $x = 4$의 왼쪽에서는 $y = x - 4$보다 위에 있으면서 $x = -\frac{1}{2}$에서만 그 직선에 접하고, 오른쪽에서는 그 아래에 있다.

f의 부호. 인수분해된 꼴에서 인수 $(x+2)^2$과 x^2은 결코 음수가 아니다. 따라서 f의 부호는 $(x^2 - 12x - 4)/(x-4)$의 부호와 같다.

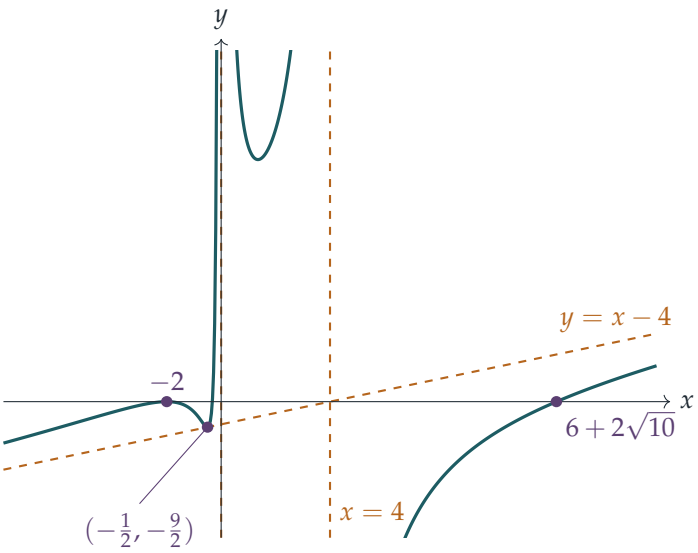
- $x < 6 - 2\sqrt{10}$일 때($f(-2) = 0$은 제외)와 $4 < x < 6 + 2\sqrt{10}$일 때 $f < 0$이다.
- $6 - 2\sqrt{10} < x < 4$일 때($x \neq 0$)와 $x > 6 + 2\sqrt{10}$일 때 $f > 0$이다.

곡선은 $x = -2$의 양쪽에서 음수이고 그 점에서 x축에 접하므로, $(-2, 0)$은 극댓점(local maximum)이다.

극점. 극점(turning point)은 STEP의 그래프 개형에는 필요 없지만, 그래프를 더 정확하게 만들어 준다. 미분하면 다음을 얻는다.

$$f'(x) = 1 + \frac{16(2x+1)(2x^2+3x-8)}{x^3(x-4)^2}.$$

$(-2, 6 - 2\sqrt{10})$에서 곡선은 높이 0에서 시작하여 높이 0에서 끝나고 그 사이에서는 음수이므로, 이 구간에 극솟점이 있다. 수치적으로 이 극솟점은 약 $(-0.51, -4.50)$으로, 접점의 바로 왼쪽에 있다. $(0, 4)$에서 곡선은 양 끝에서 $+\infty$로 가므로 여기에도 극솟점이 있으며, 그 위치는 약 $(1.35, 42.7)$이다. $f'(x) = 0$에서 분모를 없애면 $(x+2)(x^4 - 10x^3 + 100x^2 - 72x - 64) = 0$을 얻는다. 이 사차식(quartic)은 정확히 이 두 개의 실근을 가지므로 다른 극점은 없다. 특히 f는 $x > 4$ 전체에서 증가한다.



이 그래프는 축척에 맞게 그렸기 때문에 $x = -2$와 $x \approx -0.32$ 사이의 움푹 들어간 부분이 얕아 보인다. 그곳의 가장 낮은 점은 축보다 약 4.5만큼만 아래에 있고, 곡선은 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{2}\right)$에서 점근선에 접한다.

검산

- $\mathrm{f}(-\frac{1}{2}) = -\frac{9}{2} - 0 = -\frac{9}{2}$이고, 이는 $y = x - 4$ 위에 있다. $x = -\frac{1}{2}$에서 수치 미분을 하면 1.000이 나온다.
- $(x+2)^2(x^2 - 12x - 4)$를 전개하여 $x^2(x-4)^2 - 16(2x+1)^2$과 비교한다. 둘 다 $x^4 - 8x^3 - 48x^2 - 64x - 16$이다.
- $\mathrm{f}(1000) - (1000 - 4) \approx -0.064 \approx -64/1000$으로, $64/x$ 어림이 예측한 대로이다.

흔한 실수

- x^2 때문에 $x = 0$ 근처에서 곡선이 **양쪽** 모두 $+\infty$로 간다는 것을 잊는다. 두 수직 점근선에서의 모습은 서로 다르다.
- 직선이 곡선과 만난다는 것만 보이고 접한다고 증명한다. 기울기가 같다는 것, 또는 이와 동치로 중근이라는 것도 보여야 한다.
- 소문항 (ii)에서 두 제곱의 차를 알아보지 못하고, 사차식인 분자를 전개한 뒤 그 근을 찾으려 한다.

STEP 너머

직선이 곡선과 "중근"으로 만나는 것은 정확히 그 직선이 접선일 때이다. 이것이 **교점의 중복도**(multiplicity of intersection)라는 개념으로, 대수기하학(algebraic geometry)의 기본이며 두 곡선이 몇 번 만나는지에 관한 베주(Bézout)의 정리 같은 결과로 이어진다. 유리함수(rational function)는 무한대에서 다항식 부분으로 근사되고, 나머지의 크기(여기서는 $64/x$)는 곡선이 점근선에 얼마나 빨리 다가가는지 알려 준다. 이것이 점근 전개(asymptotic expansion)의 첫 맛보기이다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*에 이런 형식의 그래프 개형 문제가 더 있다.

풀이

STEP III 2004, 문제 3

순수수학 • 볼록성과 급수의 한계

STEP III 2004, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/04-s3-q3

핵심 아이디어

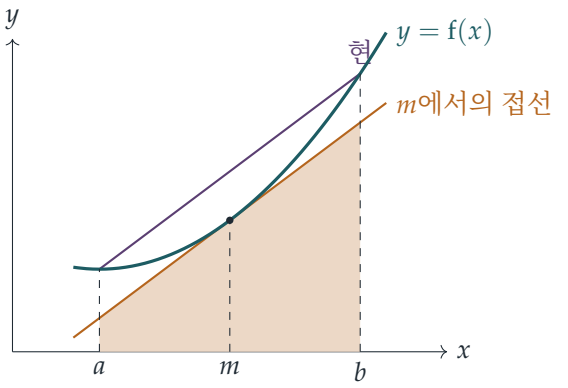
$f'' > 0$이면 곡선은 위로 휘어진다. 따라서 곡선은 모든 접선(tangent line)보다 위에 있고, 모든 현(chord)보다 아래에 있다. 중점에서의 접선과 양 끝을 잇는 현은 각각 넓이를 쉽게 쓸 수 있는 사다리꼴(trapezium)을 만들고, 이 두 넓이가 적분값을 위아래에서 가둔다. 구간 $[n-1, n]$에서 $f(x) = 1/x^2$로 두면 적분이 연쇄적으로 소거되는(telescoping) 꼴이 된다. 이 부등식들을 n에 대하여 더하면 $\sum 1/n^2$의 범위를 얻는다.

풀이

적분에 대한 두 부등식

$m = \frac{1}{2}(a+b)$라 하자. $[a, b]$에서 $f'' > 0$이므로 기울기 f'은 순증가(strictly increasing)하고, 따라서 곡선은 볼록(convex)하다. 이로부터 두 가지 사실을 얻는다.

- **곡선은 m에서의 접선보다 위에 있다.** $t(x) = f(m) + f'(m)(x-m)$, $g = f - t$라 하자. 그러면 $g(m) = g'(m) = 0$이고 $g'' = f'' > 0$이므로 g'은 증가한다. 따라서 m의 왼쪽에서 $g' < 0$, 오른쪽에서 $g' > 0$이므로 g는 m에서 엄격한 최솟값 0을 가지며, $x \neq m$일 때 $f(x) > t(x)$이다.
- **곡선은 현보다 아래에 있다.** $(a, f(a))$와 $(b, f(b))$를 지나는 직선을 $c(x)$, $h = f - c$라 하자. 그러면 $h(a) = h(b) = 0$이고 $h'' > 0$이다. 만약 h가 (a, b) 안에서 ≥ 0인 값을 가진다면, h는 그 안에서 최댓값을 가지고 그곳에서 $h'' \leq 0$이어야 하는데, 이는 불가능하다. 따라서 $a < x < b$일 때 $f(x) < c(x)$이다.



이제 $[a,b]$에서 넓이를 비교하자. 접선 아래의 넓이는 폭이 $b-a$인 사다리꼴이다. 그 평균 높이는 중점에서의 t의 높이 $t(m)=\mathrm{f}(m)$이므로, 넓이는 $(b-a)\,\mathrm{f}(m)$이다(색칠한 부분). 현 아래의 넓이는 평행한 두 변이 $\mathrm{f}(a)$와 $\mathrm{f}(b)$인 사다리꼴이므로, 넓이는 $(b-a)\frac{1}{2}\big(\mathrm{f}(a)+\mathrm{f}(b)\big)$이다. 곡선은 고립된 점들을 제외하면 두 직선 사이에 엄격하게 놓여 있다. 따라서

$$(b-a)\,\mathrm{f}\Big(\frac{a+b}{2}\Big) < \int_a^b \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x < (b-a)\,\frac{\mathrm{f}(a)+\mathrm{f}(b)}{2}.$$

(그림은 f가 양수인 경우를 보여 준다. 그러나 논증의 본질은 $\int(\mathrm{f}-t)>0$과 $\int(c-\mathrm{f})>0$이므로, f의 부호는 상관없다.)

a, b, f 정하기

가운데 항 $\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$은 $\big[-\frac{1}{x}\big]_{n-1}^{n}$처럼 보이므로 $\mathrm{f}(x)=1/x^2$, $a=n-1$, $b=n$으로 잡는다. 그러면 $b-a=1$이고, $n-1\geq 1>0$이므로 $[n-1,n]$에서 $\mathrm{f}''(x)=6/x^4>0$이다. 또한

$$\int_{n-1}^{n}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n},\qquad \mathrm{f}\Big(\frac{2n-1}{2}\Big)=\frac{4}{(2n-1)^2},$$

이므로 앞부분의 결과로부터

$$\frac{4}{(2n-1)^2}<\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}<\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n-1)^2}\Big)\qquad (n\geq 2),$$

를 얻고, 이것이 요구된 결과이다.

1에 대한 두 부등식 이끌어 내기

$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$이라 하자. $n\geq 2$일 때 $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$이고 이 항들은 연쇄적으로 소거되므로, 이 급수(series)는 수렴(converge)한다. $n=2,3,\ldots,N$에 대한 부등식들을 모두 더한다. 가운데 항들은 소거되어 $1-\frac{1}{N}$이 되고, 이는 1로 수렴한다.

생각해 보기 $N \to \infty$로 보내면 엄격한 부등식은 보통 $\leq$가 된다. 어떻게 하면 엄격한 부등식을 유지할 수 있을까?

차이를 살펴보자. 각 $n \geq 2$에 대하여 차이 $d_n = \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) - \frac{4}{(2n-1)^2}$은 양수이다. 따라서 차이들의 무한합은 적어도 첫째 항 $d_2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18} > 0$ 이상이다. 여기 나오는 급수는 모두 수렴하므로 항별로 더할 수 있고, 두 합의 차는 엄격하게 양수이다. 오른쪽 부등식에도 같은 논증이 적용된다.

왼쪽에서 $n = 2, 3, 4, \ldots$ 일 때 $2n - 1 = 3, 5, 7, \ldots$ 이므로

$$4\left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots\right) < 1.$$

오른쪽에서는

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n-1)^2}\right) = \frac{1}{2}(S-1) + \frac{1}{2}S = \frac{1}{2} + (S-1),$$

이므로

$$1 < \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right).$$

홀수 제곱과 비교하기

왼쪽 급수를 홀수 항 다음에 짝수 항이 오도록 연속된 두 항씩 묶는다. $k \geq 2$일 때 $2k > 2k - 1 > 0$이므로

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(2k-1)^2} + \frac{1}{(2k)^2}\right) < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(2k-1)^2} + \frac{1}{(2k-1)^2}\right) = \frac{1}{(2k-1)^2},$$

이다. $k = 2, 3, 4, \ldots$ 일 때 왼쪽의 쌍은 $(3^2, 4^2)$, $(5^2, 6^2), \ldots$ 이고, 이들을 모으면 $\frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{5^2}, \ldots$의 모든 항이 정확히 한 번씩 쓰인다. (모든 항이 양수이고 급수가 수렴하므로 이렇게 묶어도 된다.) 오른쪽은 $\frac{1}{3^2}, \frac{1}{5^2}, \ldots$ 이다. 앞에서처럼 엄격성을 유지하면서 k에 대하여 더하면

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots\right) < \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots.$$

S의 범위

하한. 오른쪽 부등식에서 $1 < \frac{1}{2} + (S-1)$이므로 $S > \frac{3}{2}$이다.

상한. $T = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = S - 1 - \frac{1}{4}$라 하자. 마지막 비교와 왼쪽 부등식을 합치면

$$\frac{1}{2}T < \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots < \frac{1}{4},$$

이므로 $T < \frac{1}{2}$이다. 따라서 $S = 1 + \frac{1}{4} + T < \frac{7}{4}$이다. 종합하면

$$\frac{3}{2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{7}{4}.$$

검산

- 참값은 $S = \pi^2/6 \approx 1.6449$이고, 이는 $(1.5, 1.75)$ 안에 있다.
- 수치적으로 $4\sum_{k\geq 2}(2k-1)^{-2} = 4(\pi^2/8 - 1) \approx 0.935 < 1$이고, $\frac{1}{2} + (S-1) \approx 1.145 > 1$이다.
- 비교 부등식의 경우 $\frac{1}{2}T \approx 0.197 < 0.234 \approx \sum_{k\geq 2}(2k-1)^{-2}$이다.
- $n = 2$를 대입하면 $\frac{4}{9} \approx 0.444 < \frac{1}{2} < \frac{5}{8} = 0.625$이다. $2 \leq n \leq 2000$에 대하여 정확한 분수로 확인해 보면 세 부등식이 모두 성립한다.

흔한 실수

- 빠진 $\frac{1}{4}$를 잊는 것: 괄호는 $\frac{1}{3^2}$부터 시작하므로 $T = S - \frac{5}{4}$이고, $S - 1$이 아니다. $S - 1$을 쓰면 $S < \frac{3}{2}$라는 틀린 결론에 이른다.
- 부등식의 방향을 거꾸로 쓰는 것. 위로 휘어진 곡선에서는 접선(중점) 근삿값이 너무 작고, 현(사다리꼴) 근삿값이 너무 크다.
- 무한합으로 넘어가면서 "$<$"가 극한을 거쳐도 유지되는 이유를 말하지 않고 슬그머니 그대로 두는 것.

STEP 너머

두 부등식은 중점 공식(midpoint rule)과 사다리꼴 공식(trapezium rule)이다. 볼록성은 각 공식이 어느 방향으로 오차를 내는지 알려 주고, 테일러 정리(Taylor's theorem)는 두 오차 모두 $(b-a)^3$처럼 줄어든다는 것을 보여 준다. 정확한 값 $\sum 1/n^2 = \pi^2/6$은 바젤 문제(Basel problem)에 대한 오일러(Euler)의 해답이다. 대학의 첫 해석학(analysis) 강의에서는 이를 푸리에 급수(Fourier series)로 증명한다. 또한 그 강의에서는 "극한에서의 엄격한 부등식" 단계도 엄밀하게 다룬다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)는 급수의 수렴과 볼록함수를 모두 다룬다.

풀이

STEP III 2004, 문제 4

순수수학 • 접하는 원과 급수

STEP III 2004, 4번 문제

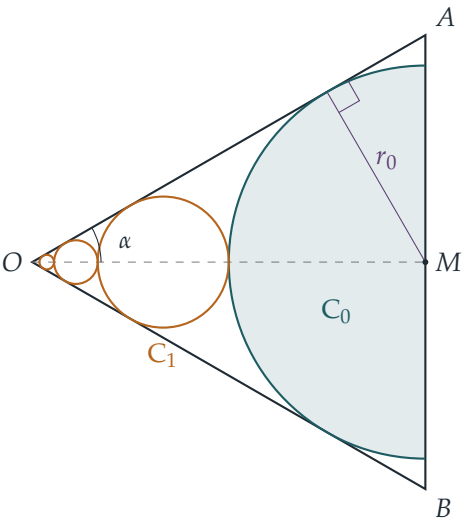
더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/04-s3-q4

핵심 아이디어

OA와 OB에 모두 접하는 원은 어느 것이든 그 중심이 각 AOB의 이등분선(angle bisector) 위에 있고, O에서 중심까지의 거리는 반지름에 의해 정해진다. O에서의 각이 α인 직각삼각형을 생각하면 거리 $= r/\sin\alpha$이다. "두 원이 접한다"는 조건을 이 거리들에 대한 방정식으로 쓰면 연속한 두 반지름 사이의 관계가 나오고, 반지름들은 등비수열(geometric progression)을 이룬다. 그러면 넓이들은 등비급수(geometric series)를 이루며, 마지막 부분은 한 변수 함수의 최대화 문제(또는 α 값을 잘 고르는 문제)가 된다.

풀이



반지름의 비

AB의 중점을 M이라 하자. $OA = OB$이므로 직선 OM은 각 AOB를 이등분하고 AB에 수직이다. 각 AOM과 각 BOM은 모두 α이다.

두 직선 OA와 OB에 모두 접하는 반지름 r인 원을 아무것이나 하나 잡자. 이 원의 중심은 두 직선에서 같은 거리에 있으므로 이등분선 OM 위에 있다. 중심을 P라 하고 원이 OA에 접하는 점을 T라 하면 $PT \perp OA$, $PT = r$이고 각 $POT = \alpha$이므로, 직각삼각형 OTP에서

$$OP = \frac{r}{\sin\alpha}.$$

이 사실은 C_0(중심 M)과 모든 C_n에 적용된다. O에서 C_n의 중심까지의 거리를 $d_n = r_n / \sin\alpha$로 나타내자.

원 C_{n+1}은 C_n과 O 사이의 구석에 놓인다(이 원은 변 OA와 OB의 연장선이 아니라 변 자체에 접하므로, 각의 내부에서 C_n의 O 쪽에 있어야 한다). 외접(touching externally)하는 두 원의 중심 사이의 거리는 $r_n + r_{n+1}$이고, 여기서는 두 중심이 모두 OM 위에 있으므로

$$d_n - d_{n+1} = r_n + r_{n+1}.$$

$d_n = r_n / \sin\alpha$를 대입하고 $\sin\alpha$를 곱하면

$$r_n - r_{n+1} = (r_n + r_{n+1})\sin\alpha$$
$$r_n(1 - \sin\alpha) = r_{n+1}(1 + \sin\alpha),$$

이고, 따라서

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{1 - \sin\alpha}{1 + \sin\alpha}$$

이므로 증명이 끝난다. 이 관계는 $n = 0$일 때도 성립한다. C_1은 반원(semicircle)의 곡선 부분, 즉 C_0에서 O를 향한 절반에 접하기 때문이다.

전체 넓이

$k = \dfrac{1 - \sin\alpha}{1 + \sin\alpha}$라 하자. $0 < \sin\alpha < 1$이므로 $0 < k < 1$이고, $r_n = k^n r_0$이다. 반원의 넓이는 $\frac{1}{2}\pi r_0^2$이고 C_n의 넓이는 $\pi k^{2n} r_0^2$이다. 급수 $\sum_{n\geq 1} k^{2n}$은 공비가 $k^2 < 1$인 등비급수이므로 $k^2/(1 - k^2)$로 수렴(converge)한다. 따라서

$$S = \pi r_0^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{k^2}{1 - k^2}\right).$$

그런데

$$1 - k^2 = \frac{(1 + \sin\alpha)^2 - (1 - \sin\alpha)^2}{(1 + \sin\alpha)^2} = \frac{4\sin\alpha}{(1 + \sin\alpha)^2}, \qquad \text{이므로} \qquad \frac{k^2}{1 - k^2} = \frac{(1 - \sin\alpha)^2}{4\sin\alpha}.$$

그러므로

$$S = \pi r_0^2 \frac{2\sin\alpha + 1 - 2\sin\alpha + \sin^2\alpha}{4\sin\alpha} = \frac{1+\sin^2\alpha}{4\sin\alpha}\pi r_0^2,$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

삼각형과 비교하기

첫 부분에서 $OM = d_0 = r_0/\sin\alpha$이다. 직각삼각형 OMA에서 $AM = OM\tan\alpha$이므로, 삼각형 OAB의 넓이는

$$T = OM \cdot AM = OM^2\tan\alpha = \frac{r_0^2}{\sin^2\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{r_0^2}{\sin\alpha\cos\alpha}.$$

(반원은 실제로 밑변 위에 들어간다. $r_0 = OM\sin\alpha < OM\tan\alpha = AM$이기 때문이다.) 나누면

$$\frac{S}{T} = \frac{\pi}{4}(1+\sin^2\alpha)\cos\alpha.$$

? **생각해 보기** 어떤 α 값을 시도해 보아야 할까?

$\alpha \to 0$일 때 이 비는 $\pi/4 \approx 0.785$로 다가가는데, 이는 0.8에 조금 못 미치므로 아주 가느다란 삼각형으로는 안 된다. 자연스러운 첫 시도는 O에서의 각을 직각으로, 즉 $\alpha = \pi/4$로 잡는 것이다. 그러면 $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}$이고 $\cos\alpha = 1/\sqrt{2}$이므로

$$\frac{S}{T} = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3\pi}{8\sqrt{2}}.$$

이 값이 $\frac{4}{5}$보다 클 필요충분조건은 $15\pi > 32\sqrt{2}$이다. 양변이 모두 양수이므로 제곱해도 되며, 조건은 $225\pi^2 > 2048$, 즉 $\pi^2 > 9.102\ldots$가 된다. $\pi > 3.1$이므로 $\pi^2 > 9.61$이고, 따라서 부등식이 성립한다. 그러므로 $\alpha = \pi/4$일 때(그리고 연속성(continuity)에 의해 $\pi/4$에 가까운 모든 α에 대해서도) 원들은 삼각형의 5분의 4보다 많은 부분을 덮는다.

덧붙여 두면, 가장 좋은 α는 $c = \cos\alpha$로 두고 $f(c) = (2-c^2)c$를 최대화하여 얻는다. $f'(c) = 2 - 3c^2 = 0$에서 $\cos\alpha = \sqrt{2/3}$, 곧 $\sin\alpha = 1/\sqrt{3}$이고, 최대 비율은 $\pi\sqrt{6}/9 \approx 0.855$이다.

검산

- $\alpha \to \pi/2$이면 삼각형이 납작해지고 $k \to 0$이다. 원 C_n들은 사라지고 $S \to \frac{1}{2}\pi r_0^2$가 되어 $\frac{1+1}{4}\pi r_0^2$와 일치한다.
- $\alpha = \pi/6$이면 $k = \frac{1}{3}$이고 $S = \pi r_0^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1/9}{8/9}\right) = \frac{5}{8}\pi r_0^2$이다. 공식으로 계산하면 $\frac{1+1/4}{2}\pi r_0^2 = \frac{5}{8}\pi r_0^2$이다.

- 수치적으로, 임의의 α에 대해 직접 접하는 조건으로 원 3000개를 만들어 보면 두 공식이 약 10^{-15}의 오차로 재현되며, $\alpha = \pi/4$에서의 비는 0.8330이다.

흔한 실수

- C_0을 온전한 원으로 세는 것. 이것은 반원이며, 그래서 $\frac{1}{2}$가 나타난다.
- $d_n + d_{n+1} = r_n + r_{n+1}$이나 $d_n - d_{n+1} = r_n - r_{n+1}$을 쓰는 것. 원들은 외접하고, 두 중심은 O의 같은 쪽에 있다.
- 마지막 부분에서 작은 α를 시도하는 것. 그 경우 비는 $\pi/4 < \frac{4}{5}$로 다가간다.

STEP 너머

이 원들의 사슬은 O를 중심으로 하고 닮음비가 k인 하나의 닮음변환(dilation, enlargement)으로 만들어진다. 이 변환은 구석 영역을 자기 자신으로 보내고 각 원을 다음 원으로 보낸다. 이와 같은 자기닮음 배치는 프랙탈(fractal), 그리고 아폴로니우스 원 채우기(Apollonian circle packing)로 이어지는데, 여기서 서로 접하는 원들의 곡률(curvature)은 데카르트(Descartes)의 원 정리를 따른다. 원을 직선으로 바꾸는 변환인 반전(inversion)을 쓰면 이런 접촉 문제의 상당수가 쉬워진다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)가 이를 아름답게 다룬다.

풀이

STEP III 2004, 문제 5

순수수학 • 삼각방정식

> **STEP III 2004, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/04-s3-q5

핵심 아이디어

두 코사인 값이 같을 필요충분조건은 두 각이 부호와 2π의 정수배 차이를 빼고 일치하는 것이다. 탄젠트로 넘어가면 θ와 $\theta+\pi$를 구별하는 정보가 사라지므로 함의는 한 방향으로만 성립하며, 이것이 바로 반례(counterexample)의 요점이다. 소문항 (i)과 (ii)에서는 $a\cos x + b\sin x$를 $R\cos(x-\alpha)$ 꼴로 바꾸고, 첫 번째 결과를 이용해 $\tan x$를 $\tan\omega$로 나타낸 다음, 각의 크기를 이용해 올바른 사분면(quadrant)을 고른다.

풀이

첫 번째 결과

$\cos(x-\alpha)=\cos\beta$이면, 코사인은 우함수이고 주기(period)가 2π이므로 어떤 정수 n에 대하여 $x-\alpha=\pm\beta+2n\pi$이다. 따라서

$$x=\alpha+\beta+2n\pi \quad \text{또는} \quad x=\alpha-\beta+2n\pi.$$

tan의 주기는 π이고, 따라서 당연히 2π도 주기이므로, (이 탄젠트 값들이 정의되는 한) $\tan x=\tan(\alpha+\beta)$ 또는 $\tan x=\tan(\alpha-\beta)$를 얻는다.

역(converse)이 성립하지 않는 것은 tan의 주기는 π이지만 cos는 그렇지 않기 때문이다. $\alpha=\beta=0$, $x=\pi$로 잡자. 그러면 $\tan x=0=\tan(\alpha+\beta)$이지만

$$\cos(x-\alpha)=\cos\pi=-1\neq 1=\cos\beta.$$

일반적으로 $x=\alpha+\beta+\pi$이면 $\cos(x-\alpha)=-\cos\beta$이다.

ω에 관한 두 가지 사실이 유용하다. $\tan\omega=\frac{4}{3}$이므로 $\cos\omega=\frac{3}{5}$, $\sin\omega=\frac{4}{5}$이다. 또 $\frac{4}{3}>1$이므로 $\frac{\pi}{4}<\omega<\frac{\pi}{2}$이다.

소문항 (i)

여기서 $\sqrt{1^2+7^2} = 5\sqrt{2}$이므로 양변을 $5\sqrt{2}$로 나눈다.

$$\tfrac{1}{5\sqrt{2}}\cos x - \tfrac{7}{5\sqrt{2}}\sin x = \tfrac{1}{\sqrt{2}}.$$

$\cos\varphi = \frac{1}{5\sqrt{2}}$, $\sin\varphi = \frac{7}{5\sqrt{2}}$인 예각을 φ라 하면 $\tan\varphi = 7$이다. 방정식은

$$\cos(x+\varphi) = \cos\tfrac{\pi}{4},$$

이 되고, 이는 $\alpha = -\varphi$, $\beta = \frac{\pi}{4}$일 때의 첫 번째 결과이다. $\tan(A\pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A\tan B}$를 이용하면

$$\tan(\alpha+\beta) = \tan\left(\tfrac{\pi}{4}-\varphi\right) = \frac{1-7}{1+7} = -\frac{3}{4},$$
$$\tan(\alpha-\beta) = -\tan\left(\varphi+\tfrac{\pi}{4}\right) = -\frac{7+1}{1-7} = \frac{4}{3}.$$

> **생각해 보기** 이 탄젠트 값 각각에 대응하는 각은 $[0,2\pi]$에 두 개씩 있지만, 방정식의 해는 이 구간에 두 개뿐이다. 어느 두 개인가?

반례에서 보았듯이 탄젠트만으로는 이를 결정할 수 없으므로, $x = \alpha \pm \beta + 2n\pi$로 돌아가 $\alpha\pm\beta$가 실제로 어디에 있는지 알아낸다. $\tan\varphi = 7 > 1$이므로 $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{2}$이다.

- $\alpha+\beta = \frac{\pi}{4} - \varphi$는 $(-\frac{\pi}{4}, 0)$에 있고 탄젠트 값이 $-\frac{3}{4}$이다. 한편 $\tan(\frac{\pi}{2}-\omega) = \cot\omega = \frac{3}{4}$이고 $\frac{\pi}{2}-\omega \in (0, \frac{\pi}{4})$이다. 따라서 $\alpha+\beta = \omega - \frac{\pi}{2}$이고, 2π를 더하면 $x = \frac{3\pi}{2}+\omega$를 얻는다.
- $\alpha-\beta = -\varphi - \frac{\pi}{4}$는 $(-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2})$에 있고 탄젠트 값이 $\frac{4}{3}$이다. 각 $\omega-\pi$도 이 구간에 있고 탄젠트 값이 $\frac{4}{3}$이다. 탄젠트는 점근선(asymptote)을 피하는 길이가 π보다 짧은 구간에서 일대일(one-to-one)이므로 $\alpha-\beta = \omega-\pi$이다. 2π를 더하면 $x = \pi+\omega$를 얻는다.

$0 < \omega < \frac{\pi}{2}$이므로 두 값 모두 $[0,2\pi]$에 있고, 다른 n을 택하면 이 범위의 값이 나오지 않는다. 그러므로

$$x = \pi+\omega \quad \text{또는} \quad x = \tfrac{3\pi}{2}+\omega.$$

확인해 보면, $x = \pi+\omega$일 때 $\cos x - 7\sin x = -\frac{3}{5} + \frac{28}{5} = 5$이고, $x = \frac{3\pi}{2}+\omega$일 때는 $\cos x = \sin\omega$, $\sin x = -\cos\omega$이므로 $\frac{4}{5}+\frac{21}{5} = 5$를 얻는다.

소문항 (ii)

여기서 $\sqrt{2^2+11^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$이므로

$$\tfrac{2}{5\sqrt{5}}\cos x + \tfrac{11}{5\sqrt{5}}\sin x = \tfrac{2}{\sqrt{5}}.$$

$\cos\alpha = \frac{2}{5\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = \frac{11}{5\sqrt{5}}$인 예각을 α라 하면 $\tan\alpha = \frac{11}{2}$이다. $\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$인 예각을 β라 하면 $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\tan\beta = \frac{1}{2}$이다. 방정식은 $\cos(x-\alpha) = \cos\beta$이고

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\frac{11}{2} - \frac{1}{2}}{1 + \frac{11}{4}} = \frac{5}{15/4} = \frac{4}{3},$$
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\frac{11}{2} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{11}{4}} = \frac{6}{-7/4} = -\frac{24}{7}.$$

두 번째 값은 $\tan 2\omega$이다. 왜냐하면

$$\tan 2\omega = \frac{2\cdot\frac{4}{3}}{1 - \frac{16}{9}} = \frac{8/3}{-7/9} = -\frac{24}{7}.$$

다시 각의 위치를 정한다. α와 β가 모두 예각이므로

- $\alpha - \beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$이고 탄젠트 값이 $\frac{4}{3}$이므로 $\alpha - \beta = \omega$이다.
- $\alpha + \beta \in (0, \pi)$이고 탄젠트 값이 음수이므로 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$에 있다. $\frac{\pi}{4} < \omega < \frac{\pi}{2}$이므로 각 2ω도 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$에 있고 탄젠트 값이 같으므로 $\alpha + \beta = 2\omega$이다.

ω와 2ω는 모두 $[0, 2\pi]$에 있고, $\pm 2\pi$를 더하면 이 구간을 벗어난다. 따라서 해는

$$x = \omega \quad \text{그리고} \quad x = 2\omega,$$

이고, 문제에서 요구한 대로 한 해가 다른 해의 두 배이다. 직접 확인해 보면 $x = \omega$일 때 $\frac{6}{5} + \frac{44}{5} = 10$이다. $x = 2\omega$일 때는 $\cos 2\omega = \frac{9-16}{25} = -\frac{7}{25}$, $\sin 2\omega = \frac{24}{25}$이므로 $-\frac{14}{25} + \frac{264}{25} = 10$을 얻는다.

검산

- $5 < 5\sqrt{2}$이고 $10 < 5\sqrt{5}$이어서 우변이 $-R$과 R 사이에 (등호 없이) 있으므로, 각 방정식은 $[0, 2\pi]$에서 정확히 두 근을 가져야 한다.
- 수치적으로 $\omega \approx 0.9273$이다. 부호 변화를 이용한 탐색으로 (i)의 근 4.0689와 5.6397을 찾을 수 있는데, 이는 $\pi + \omega$와 $\frac{3\pi}{2} + \omega$이다. (ii)에서는 0.9273과 1.8546을 찾게 되며, 이는 ω와 2ω이다.

흔한 실수

- $\tan x = \frac{4}{3}$ 또는 $\tan x = -\frac{3}{4}$를 풀어 $[0, 2\pi]$의 네 각을 모두 답으로 적는 것. 그중 두 개는 가짜 해이며, 그 이유는 정확히 반례가 보여 준 것과 같다.
- (i)에서 φ의 부호를 잘못 잡는 것. 예를 들어 $\cos x - 7\sin x$를 $\cos(x+\varphi)$ 대신 $\cos(x-\varphi)$로 쓰는 경우이다.

STEP 너머

여기서의 어려움은 tan가 단사(injective)가 아니어서 "$\tan x = \tan y$"로부터는 x를 π를 법으로 하여서만 알 수 있다는 점이다. 복소해석학(complex analysis)에서는 편각(argument)과 $\log z$의 분지(branch)를 정의할 때 같은 문제가 나타나는데, 거기서도 각은 2π의 정수배 차이를 빼고서만 정해진다. 이 관점에서 보면 $a\cos x + b\sin x = \mathrm{Re}\left((a - \mathrm{i}b)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)$이고, R와 α는 그저 $a + \mathrm{i}b$의 절댓값(modulus)과 편각일 뿐이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이러한 기하학적 관점을 아름답게 전개한다.

풀이

STEP III 2004, 문제 6

순수수학 • 점화식

> **STEP III 2004, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/04-s3-q6

핵심 아이디어

식 F_n은 **연속한 두 항의 쌍**마다 정해지는 양이고, 첫 번째 항등식(identity)은 한 쌍에서 다음 쌍으로 넘어갈 때 이 값이 언제 그대로 유지되는지를 정확히 알려 준다. (i)의 점화식(recurrence)에서는 두 번째 인수가 0이 되므로 F_n은 불변량(invariant)이고, 처음 값만 구하면 된다. (ii)에서는 논증을 거꾸로 진행한다. F_n이 일정하면 곱이 0이어야 하므로, 매 단계에서 두 인수 중 하나는 0이다. 그러면 단계마다 선택이 생기고, 주기(period)가 4인 수열은 이 선택을 잘 하는 데서 나온다.

풀이

항등식

두 항을 모두 전개하면 w_{n-1}^2 항이 소거된다.

$$\begin{aligned} F_n - F_{n-1} &= \left(w_n^2 + w_{n-1}^2 - 4w_n w_{n-1}\right) - \left(w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2 - 4w_{n-1}w_{n-2}\right) \\ &= \left(w_n^2 - w_{n-2}^2\right) - 4w_{n-1}\left(w_n - w_{n-2}\right) \\ &= (w_n - w_{n-2})(w_n + w_{n-2}) - 4w_{n-1}(w_n - w_{n-2}) \\ &= (w_n - w_{n-2})(w_n + w_{n-2} - 4w_{n-1}), \end{aligned}$$

이 식은 $n \geq 2$일 때 성립하고(w_{n-2}가 존재해야 하므로), 이것이 보이려던 것이다.

풀이 내내 쓸모 있는 관찰을 하나 더 해 두자. F_n은 w_n과 w_{n-1}에 대하여 **대칭**(symmetric)이다. 둘을 서로 바꾸어도 $w_n^2 + w_{n-1}^2 - 4w_n w_{n-1}$은 변하지 않는다.

소문항 (i)

$w_n = u_n$으로 두고, 이에 대응하는 양을 F_n이라 하자. $n \geq 2$일 때 점화식에 의해 $u_n + u_{n-2} - 4u_{n-1} = 0$이므로 항등식의 두 번째 인수가 0이고,

$$F_n = F_{n-1} \quad (n \geq 2).$$

따라서 모든 $n \geq 1$에 대하여 $F_n = F_1$이고,

$$F_1 = u_1^2 + u_0^2 - 4u_1u_0 = 4 + 1 - 8 = -3.$$

그러므로 모든 $n \geq 1$에 대하여 $u_n^2 + u_{n-1}^2 - 4u_nu_{n-1} = -3$, 즉 $u_n^2 + u_{n-1}^2 = 4u_nu_{n-1} - 3$이고, 이것이 보이려던 것이다. (수열은 $1, 2, 7, 26, 97, \ldots$로 이어진다.)

소문항 (ii)(a)

$(*)$에 $n = 1$과 $v_0 = 1$을 대입하면

$$v_1^2 + 1 = 4v_1 - 3 \iff v_1^2 - 4v_1 + 4 = 0 \iff (v_1 - 2)^2 = 0,$$

이므로 $v_1 = 2$이다. 중근(repeated root)이므로 여기에는 선택의 여지가 없다.

이제 $w_n = v_n$으로 두자. 조건 $(*)$는 바로 모든 $n \geq 1$에 대하여 $F_n = -3$이라는 뜻이다. 따라서 $n \geq 2$이면 F_n과 F_{n-1}이 모두 -3이고, 항등식에 의해

$$0 = F_n - F_{n-1} = (v_n - v_{n-2})(v_n + v_{n-2} - 4v_{n-1}).$$

두 실수의 곱이 0이 되는 것은 둘 중 하나가 0일 때뿐이므로, $v_n = v_{n-2}$ 또는 $v_n = 4v_{n-1} - v_{n-2}$이고, 이것이 보이려던 것이다.

생각해 보기 이것이 전부일까? 두 경우 모두 정말로 올바른 다음 항을 줄까?

그렇다. v_{n-1}을 고정하면 조건 $(*)$는 $x = v_n$에 대한 이차방정식(quadratic) $x^2 - 4v_{n-1}x + (v_{n-1}^2 + 3) = 0$이다. F가 대칭이고 $F_{n-1} = -3$이므로 $x = v_{n-2}$가 근이라는 것을 안다. 두 근의 합은 $4v_{n-1}$이므로 다른 근은 $4v_{n-1} - v_{n-2}$이다. 따라서 (a)의 두 경우는 정확히 두 근에 해당한다. 매 단계에서 어느 쪽을 골라도 되고, 그 결과는 언제나 $(*)$를 만족한다. ($n = 1$일 때처럼 두 근이 같으면 경우는 하나뿐이다.)

소문항 (ii)(b)

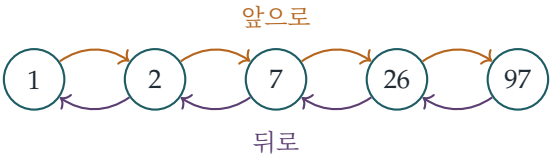
여기서 $v_0 = 1$이므로 조건에 맞고, 연속한 두 항의 쌍 (v_{n-1}, v_n)은 모두 $(1, 2)$ 또는 $(2, 1)$이다. F가 대칭이므로 두 경우 모두

$$v_n^2 + v_{n-1}^2 - 4v_nv_{n-1} = 1 + 4 - 8 = -3,$$

이 되어, 모든 $n \geq 1$에 대하여 $(*)$가 성립한다. (a)의 표현으로 말하면, 이 수열은 언제나 $v_n = v_{n-2}$ 쪽을 택한다.

소문항 (ii)(c)

$v_0 = 1, v_1 = 2$이다. (a)에 의해 그 뒤의 각 항은 두 자리 앞의 항("뒤로 가기")이거나 $4\times$(직전 항) $-$ (그 앞의 항)("앞으로 가기")이다. $(1,2)$에서 앞으로 가면 7, 이어서 26, 97, ...이 나오는데, 이것이 바로 수열 u_n이다. 뒤로 가기는 마지막 앞으로 가기를 되돌린다.



따라서 수열은 1에서 출발하여 매번 이웃한 칸으로 옮겨 가는, 이 사슬 위의 걷기이다. 1의 이웃은 하나뿐이므로, 1을 방문한 직후에는 반드시 2로 가야 한다.

$v_0 = 1$이면서 주기가 4가 되려면 $v_4 = 1$이어야 한다. (b)의 주기 2인 수열은 1과 2 사이를 오갈 뿐이다. 새로운 것을 얻으려면 한 걸음 더 나아간다.

$$v_0 = 1, \quad v_1 = 2, \quad v_2 = 4\cdot 2 - 1 = 7, \quad v_3 = v_1 = 2, \quad v_4 = v_2 \text{ 또는 } 4\cdot 2 - 7 = 1.$$

$v_4 = 1$을 고르고 이를 반복하면

$$v_n = \begin{cases} 1 & n \equiv 0 \pmod 4, \\ 2 & n\text{이 홀수}, \\ 7 & n \equiv 2 \pmod 4, \end{cases} \qquad \text{즉} \quad 1,2,7,2,1,2,7,2,\ldots$$

$(*)$를 직접 확인해 보자. 연속한 두 항의 쌍은 모두 $(1,2)$, $(2,7)$, $(7,2)$, $(2,1)$ 중 하나이다. 대칭성에 의해

$$1+4-8=-3 \quad \text{그리고} \quad 4+49-56=-3,$$

만 확인하면 되고, 둘 다 성립한다. 따라서 모든 $n \geq 1$에 대하여 $(*)$가 성립하고, 수열의 주기는 4이다($v_2 \neq v_0$이므로 주기 2는 아니다).

사실 정확히 주기가 4인 답은 이것뿐이다. 1, 2 다음에 걷기는 $v_4 = 1$이 되어야 하므로, v_2에서만 7에 도달할 수 있고 곧바로 되돌아와야 한다.

검산

- $n = 40$까지 u_n을 계산하여 매번 $u_n^2 + u_{n-1}^2 - 4u_nu_{n-1} = -3$임을 확인한다. 예를 들어 $(26,97)$이면 $676 + 9409 - 10088 = -3$이다.
- 첫 번째 항등식을 무작위 정수 세 쌍 수천 개에 대해 검사한다.
- 1, 2로 시작하여 (a)가 허용하는 모든 수열을 v_8까지 나열한다. 처음부터 끝까지 $v_{k+4} = v_k$인 것은 $1,2,1,2,\ldots$와 $1,2,7,2,\ldots$뿐이다.

흔한 실수

- (ii)에서 이유를 밝히지 않고 $F_n - F_{n-1} = 0$이라고 결론짓는 것. 그 이유는 $(*)$에 의해 **모든** F_n이 -3이 되기 때문이다.
- v_1이 하나로 정해진다는 사실을 잊는 것. 이차방정식이 중근 2를 가지므로 경우를 나눌 필요가 없다.
- (c)에서 한 주기 분량의 쌍만 확인하고, "한 바퀴 돌아오는" 쌍 $(v_3, v_4) = (2, 1)$을 빠뜨리는 것.

STEP 너머

양 F_n은 이 점화식의 **불변량**으로, 역학에서의 에너지처럼 보존되는 양이다. 방정식 $x^2 + y^2 - 4xy = -3$은 마르코프(Markov)형(또는 펠(Pell)형) 디오판토스 방정식(Diophantine equation)이다. 이차방정식의 한 근을 다른 근으로 바꾸는 $x \mapsto 4y - x$는 고전적인 "비에트 점핑(Vieta jumping)" 기법으로, 가장 작은 해로부터 모든 정수해를 만들어 낸다. 대븐포트(Davenport)의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 펠 방정식(Pell's equation)과 점화식을 이용한 그 해법을 다룬다.

풀이

STEP III 2004, 문제 7

순수수학 • 점화 공식

STEP III 2004, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/04-s3-q7

핵심 아이디어

I_{n+1}의 피적분함수(integrand)는 I_n의 피적분함수에 $\frac{t}{t+1}$을 곱한 것이므로, 이 인수 하나의 상계를 구하면 이웃한 두 적분 사이의 부등식을 얻는다. 부분적분(integration by parts)으로는 두 적분 사이의 정확한 관계식도 얻을 수 있으며, 이 부등식과 등식을 나란히 놓으면 I_n만에 대한 상계가 나온다. 정확한 관계식을 연쇄적으로 더하면 중간 항이 상쇄되어(telescoping) 이미 알고 있는 로그 값인 I_1까지 내려가고, 이로써 모든 것이 제어 가능한 오차항(error term)을 가진 $\ln 2$의 급수(series)로 바뀐다.

풀이

부등식 $I_{n+1} < \frac{1}{2} I_n$

$0 \leq t \leq 1$에서

$$\frac{t}{t+1} = 1 - \frac{1}{t+1}$$

이고, 이는 t에 대하여 증가하므로 최댓값은 $\frac{1}{2}$이며 이 값은 $t = 1$에서만 취한다. 이제 I_{n+1}의 피적분함수를

$$\frac{t^n}{(t+1)^{n+1}} = \frac{t}{t+1} \cdot \frac{t^{n-1}}{(t+1)^n}$$

로 쓴다. 따라서

$$\frac{1}{2} I_n - I_{n+1} = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{t}{t+1} \right) \frac{t^{n-1}}{(t+1)^n} \, \mathrm{d}t$$

이다. 여기서 피적분함수는 연속이고, 음이 되는 일이 없으며, $0 < t < 1$에서는 순양수이다(그 구간에서 두 인수가 모두 양수이기 때문이다). 그러므로 적분값은 순양수이고, $I_{n+1} < \frac{1}{2} I_n$이다.

생각해 보기 $\frac{t}{t+1}$이 실제로 $\frac{1}{2}$에 도달하는데도 부등식이 엄격한 이유는 무엇인가?

$\frac{1}{2}$에 도달하는 것은 단 한 점 $t=1$에서뿐이다. 음이 아닌 연속함수가 어떤 구간 전체에서 양수이면 그 적분은 양수이므로, 등호가 성립하는 점 하나는 아무런 영향을 주지 않는다.

점화식

$u=t^n$, $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=(t+1)^{-(n+1)}$로 두고 I_{n+1}을 부분적분하면 $v=-\dfrac{1}{n(t+1)^n}$이다($n\geq 1$이므로 성립한다).

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \Big[-\frac{t^n}{n(t+1)^n}\Big]_0^1 + \int_0^1 \frac{nt^{n-1}}{n(t+1)^n}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{n\,2^n} + I_n, \end{aligned}$$

대괄호 안의 값은 $t=1$에서 $-\frac{1}{n2^n}$이고 $t=0$에서 0이기 때문이다. 이것이 구하려던 점화식(recurrence)이다.

I_n의 상계

점화식을 부등식에 대입하면

$$I_n - \frac{1}{n\,2^n} = I_{n+1} < \frac{1}{2}I_n \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{2}I_n < \frac{1}{n\,2^n} \quad\Longrightarrow\quad I_n < \frac{1}{n\,2^{n-1}}.$$

$\ln 2$의 급수

먼저

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t = \big[\ln(t+1)\big]_0^1 = \ln 2.$$

점화식에 따르면 각 $r\geq 1$에 대하여 $I_r - I_{r+1} = \dfrac{1}{r\,2^r}$이다. 이 식들을 $r=1,\ldots,n$에 대하여 더하면 좌변의 중간 항이 모두 상쇄된다.

$$I_1 - I_{n+1} = \sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r\,2^r}, \qquad \text{따라서} \qquad \ln 2 = \sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r\,2^r} + I_{n+1}.$$

범위 $\frac{2}{3} < \ln 2 < \frac{17}{24}$

나머지(remainder)에 대하여 두 가지 사실을 알고 있다. 피적분함수가 $(0,1]$에서 양수이므로 $I_{n+1}>0$이고, 앞의 상계에서 n 대신 $n+1$을 넣으면 $I_{n+1} < \dfrac{1}{(n+1)2^n}$이다. 따라서 모든 n에 대하여

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r\,2^r} < \ln 2 < \sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r\,2^r} + \frac{1}{(n+1)2^n}$$

이다. 부분합(partial sum)은 다음과 같다.

$$\frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}, \qquad \frac{5}{8}+\frac{1}{24}=\frac{16}{24}=\frac{2}{3}.$$

생각해 보기 각 경계에 대하여 n을 어떤 값으로 잡아야 하는가?

서로 다른 값을 잡는다. 하계에는 $n=3$을 택하여 $\ln 2 > \frac{2}{3}$을 얻는다. 상계에는 $n=2$를 택하는데, 이때 오차의 상계는 $\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{12}$이다.

$$\ln 2 < \frac{5}{8}+\frac{1}{12}=\frac{15}{24}+\frac{2}{24}=\frac{17}{24}.$$

두 결과를 합하면 요구한 대로 $\frac{2}{3} < \ln 2 < \frac{17}{24}$이다.

검산

수치적으로 $\ln 2 \approx 0.6931$이며, 이는 실제로 $\frac{2}{3} \approx 0.6667$과 $\frac{17}{24} \approx 0.7083$ 사이에 있다. 심프슨(Simpson) 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 $I_3 \approx 0.0681$로 상계 $\frac{1}{12} \approx 0.0833$보다 충분히 작고, 실제로 $\frac{5}{8}+0.0681=0.6931$이다. 또한 n이 24 이하인 경우에 대하여 점화식과 두 부등식을 수치적으로 확인하였다.

흔한 실수

- 두 경계에 같은 n을 쓰는 것: $n=3$을 쓰면 상계 $\frac{2}{3}+\frac{1}{32}=\frac{67}{96}$을 얻는데, 이는 참이고 더 정밀하지만 문제에서 요구한 $\frac{17}{24}$는 아니다.
- 부분적분에서 경계항(boundary term)의 부호를 틀리는 것. v는 음수이다.
- $I_{n+1} > 0$인 이유를 밝히지 않는 것. 엄격한 하계를 얻으려면 이 사실이 필요하다.

STEP 너머

이것은 급수 $\ln 2 = \sum_{r\geq 1} \frac{1}{r2^r}$로, $-\ln(1-x)=\sum x^r/r$에 $x=\frac{1}{2}$를 대입한 것이며, 처음 n개 항 뒤의 나머지에 대한 명시적인 상계를 함께 준다. 나머지를 적분으로 추정하는 것은 바로 적분형 나머지(integral remainder)를 갖는 테일러(Taylor) 정리(Taylor's theorem)의 작동 방식이며, 대학 1학년 해석학(analysis)의 기본 내용이다. 거듭제곱급수(power series)와 그 나머지에 관한 이론은 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 참고하라.

풀이

STEP III 2004, 문제 8

순수수학 • 미분방정식

STEP III 2004, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/04-s3-q8

핵심 아이디어

$1/y$ 항 때문에 이 방정식은 y에 대하여 선형(linear)이 아니다. 그러나 양변에 y를 곱하면 $y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$는 y^2의 도함수(derivative)의 절반이 되고, $1/y$ 항은 x만의 함수가 된다. 따라서 $u = y^2$으로 나타내면 방정식은 선형이 되며(베르누이(Bernoulli)형 방정식), 적분인자(integrating factor)를 쓰면 풀이가 끝난다. 세 곡선은 이차곡선(conic)이 되고, 그 정체를 알아내면 그래프를 쉽게 그릴 수 있다.

풀이

치환

$u = y^2$이라 하자. 연쇄법칙(chain rule)에 의하여

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2y\left(f(x)\,y + \frac{g(x)}{y}\right) = 2f(x)\,y^2 + 2g(x).$$

y^2을 u로 바꾸면

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - 2f(x)\,u = 2g(x),$$

이고, 이는 u에 대하여 선형이다. 즉 u와 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$가 일차로만 나타나고, 그 계수는 x에만 의존한다. 이것이 보여야 할 내용이었다.

방정식 풀기

여기서 $f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = -1$이므로 선형 방정식은

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \frac{2}{x}\,u = -2.$$

적분인자는 $\exp\left(-\int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x\right) = \mathrm{e}^{-2\ln|x|} = \frac{1}{x^2}$이다. 양변에 이를 곱하면

$$\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \frac{2}{x^3}u = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^2}.$$

적분하면 상수 C에 대하여 $\frac{u}{x^2} = \frac{2}{x} + C$이므로, 일반해(general solution)는

$$y^2 = 2x + Cx^2.$$

(원래 방정식은 $x \neq 0$이고 $y \neq 0$이어야 하므로, 각 해는 0을 포함하지 않으면서 $2x + Cx^2 > 0$인 x의 구간 위에서 정의되고, 그 구간 전체에서 y의 부호는 일정하다.)

세 곡선

세 점 모두 $x > 0$이고 $y > 0$이므로, 각 해곡선은 그 점을 포함하는 양의 x 구간 위에서 $y^2 = 2x + Cx^2$의 $y > 0$인 부분이다.

$(1,1)$을 지나는 곡선: $1 = 2 + C$이므로 $C = -1$이고 $y^2 = 2x - x^2$이다. 완전제곱식(completing the square)으로 고치면

$$(x-1)^2 + y^2 = 1,$$

이고, 이는 중심이 $(1,0)$이고 반지름이 1인 원이다. 해곡선은 $0 < x < 2$에서 위쪽 반원 $y = \sqrt{2x - x^2}$이다.

$(2,2)$를 지나는 곡선: $4 = 4 + 4C$이므로 $C = 0$이고 $y^2 = 2x$이다. 이는 꼭짓점이 원점이고 축이 x축인 포물선(parabola)이다. 해곡선은 $x > 0$에서 $y = \sqrt{2x}$이다.

$(4,4)$를 지나는 곡선: $16 = 8 + 16C$이므로 $C = \frac{1}{2}$이고 $y^2 = 2x + \frac{1}{2}x^2$이다. 완전제곱식으로 고치면 $\frac{1}{2}(x+2)^2 - y^2 = 2$, 즉

$$\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1,$$

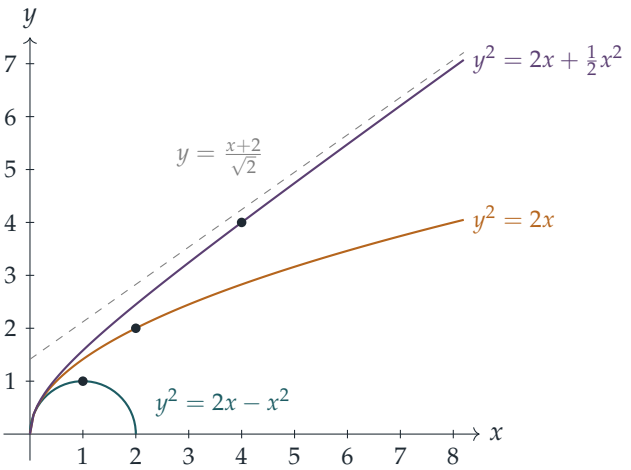
이고, 이는 중심이 $(-2,0)$, 꼭짓점이 $(0,0)$과 $(-4,0)$, 점근선(asymptote)이 $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(x+2)$인 쌍곡선(hyperbola)이다. 해곡선은 오른쪽 가지의 위쪽 절반, 즉 $x > 0$에서 $y = \sqrt{2x + \frac{1}{2}x^2}$이다.

? **생각해 보기** 쌍곡선의 왼쪽 가지나 아래쪽 절반은 왜 포함하지 않는가?

미분방정식(differential equation)의 해는 어떤 구간에서 미분가능하고 그 구간에서 방정식을 만족해야 하는데, 이 방정식은 $x = 0$ 또는 $y = 0$일 때 정의되지 않는다. $(4,4)$에서 출발하여 왼쪽으로 가면 곡선은 $(0,0)$에 이르고, 여기서는 두 조건이 모두 깨지므로 그 너머로 이어갈 수 없다. 왼쪽 가지($x \leq -4$)와 아래쪽 절반도 $y^2 = 2x + \frac{1}{2}x^2$을 만족하지만, 이들은 $(4,4)$를 지나는 해가 아닌 다른 해이다.

그래프

세 곡선은 모두 원점에서 수직인 접선(tangent)을 가지며 출발하고($x = 0$ 근처에서 각각 $y \approx \sqrt{2x}$처럼 행동한다), 주어진 점에서의 기울기(gradient)는 각각 $\frac{1}{1} - \frac{1}{1} = 0$, $\frac{2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $\frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$이다. x가 커지면 원은 $(2, 0)$으로 다시 내려오고, 포물선은 $\sqrt{x}$처럼 증가하며, 쌍곡선은 점근선 $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + 2)$에 가까워진다. $x > 0$일 때 $2x - x^2 < 2x < 2x + \frac{1}{2}x^2$이므로, 원은 포물선보다 아래에 있고 포물선은 쌍곡선보다 아래에 있다.



검산

- 다시 대입해 보자. $y^2 = 2x + Cx^2$이면 $2yy' = 2 + 2Cx$이므로 $y' = \frac{1+Cx}{y}$이고, 한편 $\frac{y}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y^2 - x}{xy} = \frac{x + Cx^2}{xy} = \frac{1+Cx}{y}$이다. 두 값이 일치한다.
- 원래 방정식을 룽게-쿠타(Runge–Kutta) 방법으로 $(4, 4)$에서 $x = 8$까지 수치적으로 풀면 $y \approx 6.92820$을 얻는데, 이는 $\sqrt{16 + 32} = \sqrt{48}$과 일치한다. $(1, 1)$과 $(2, 2)$에서 같은 방식으로 계산하면 반원 및 포물선과 약 10^{-12} 이내로 일치한다.

흔한 실수

- 적분인자를 x^{-2}가 아니라 x^2으로 구하는 실수. u의 계수가 $-\frac{2}{x}$이므로 지수는 $-2\ln x$이다.
- $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$에서 나오는 인수 2를 빠뜨려 $y^2 = x + Cx^2$을 얻는 실수. 이 결과는 대입 검산을 통과하지 못한다.
- 원 전체, 포물선의 위아래 두 부분, 또는 쌍곡선의 두 가지를 모두 "해곡선"으로 그리는 실수.

STEP 너머

여기서 쓴 방법은 모든 **베르누이 방정식**(*Bernoulli equation*) $y' = f(x)y + g(x)y^n$에 통한다. 치환 $u = y^{1-n}$을 하면 언제나 선형이 된다(여기서는 $n = -1$이므로 $u = y^2$). $x = 0$과 $y = 0$에서 주의를 기울여야 했던 것은 존재성과 유일성 정리(existence and uniqueness theorem)를 처음 엿보는 것이다. 우변이 잘 정의되고 좋은 성질을 갖는 각 점을 지나는 해는 정확히 하나뿐이며, 곡선족은 그렇지 않은 점에서만 만날 수 있다. 우리의 곡선들이 모두 원점에서 만나는 것이 바로 그런 경우이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에서 베르누이 방정식과 이 정리를 다룬다.

풀이

STEP III 2004, 문제 9

역학 • 힘의 모멘트와 마찰

> **STEP III 2004, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/04-s3-q9

핵심 아이디어

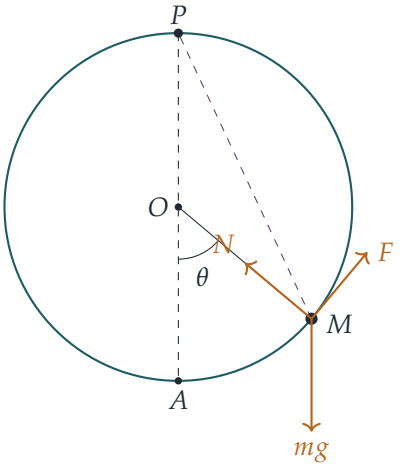
고리의 무게는 회전축 바로 아래에 있는 O를 지나므로 P에 대한 모멘트(moment)가 없다. 고리에 작용하는 다른 힘은 (회전축에서의 반력을 제외하면) 쥐가 가하는 접촉력(contact force)뿐이다. 따라서 고리가 그대로 머무는 것은 이 접촉력의 P에 대한 모멘트가 0일 때, 즉 그 작용선(line of action)이 P를 지날 때와 정확히 같다. 나머지는 모두 쥐의 접촉력이 언제 MP 방향을 향할 수 있는지를 묻는 데서 나온다. 한 번은 속력에 대해, 또 한 번은 마찰의 한계에 대해 묻는다.

풀이

모형

쥐를 질량 m인 입자로, 고리를 P를 지나는 매끄러운 수평 회전축에 대하여 자유롭게 도는 강체(rigid) 고리로 본다(고리의 질량은 결국 상관없음이 드러난다). 연직 아래 방향에서부터 잰 각을 $\theta = \angle AOM$이라 하고, 쥐는 θ가 증가하는 방향으로 달린다고 하자. 고리가 정지해 있는 동안 쥐는 O를 중심으로 하는 반지름 a인 고정된 원 위를 일정한 속력 u로 움직인다.

쥐에 작용하는 힘은 무게 mg, 고리가 O 쪽으로 가하는 수직항력(normal reaction) N, 그리고 접선 방향의 마찰력(friction) F이다. F는 θ가 증가하는 방향(고리를 따라 위쪽)을 양의 방향으로 잡는다.



쥐에 대하여 접선 방향(속력이 일정하므로 접선 방향 가속도는 없다)과 반지름 방향(O 쪽으로 가속도 u^2/a)으로 힘을 분해하면 다음을 얻는다.

$$F = mg\sin\theta,$$
$$N - mg\cos\theta = \frac{mu^2}{a}.$$

고리는 언제 평형을 이루는가?

뉴턴 제3법칙(Newton's third law)에 의해 쥐는 쥐에 작용하는 접촉력(N과 F)과 크기가 같고 방향이 반대인 힘으로 고리를 민다. 고리의 무게는 P의 연직 아래에 있는 O에 작용하고 회전축의 반력은 P에 작용하므로, 둘 다 P에 대한 모멘트가 없다. 따라서 고리가 POA가 연직인 상태로 평형(equilibrium)을 유지할 필요충분조건은 접촉력의 P에 대한 모멘트가 0인 것, 즉 접촉력의 작용선이 P를 지나는 것이다.

삼각형 OPM은 이등변삼각형(isosceles triangle)이고($OP = OM = a$) $\angle POM = \pi - \theta$이므로 $\angle OMP = \frac{1}{2}\theta$이다. 따라서 직선 MP는 반지름 MO와 각 $\frac{1}{2}\theta$를 이루며 θ가 증가하는 방향으로 기울어 있다. 그러므로 쥐에 작용하는 접촉력이 MP 방향을 향하는 것은 정확히 다음이 성립할 때이다.

$$\frac{F}{N} = \tan\tfrac{1}{2}\theta. \qquad (*)$$

(같은 내용을 P에 대한 모멘트를 직접 계산해서 얻을 수도 있다. 쥐가 고리에 가하는 힘의 모멘트는 $a\left[N\sin\theta - F(1+\cos\theta)\right]$이고, $\sin\theta/(1+\cos\theta) = \tan\frac{1}{2}\theta$이다.)

생각해 보기 이것을 어떻게 u에 대한 조건으로 바꿀 수 있을까?

운동 방정식을 이용한다. 쥐에 작용하는 접촉력은 쥐의 질량과 가속도의 곱에서 무게를 뺀

것이다.

$$\mathbf{R} = m \cdot \frac{u^2}{a}\,\widehat{MO} + mg\,\widehat{\text{위}}.$$

그런데 $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OP} = a\,\widehat{MO} + a\,\widehat{\text{위}}$이고, 두 계수가 같다. 따라서 모든 θ에 대하여 $\mathbf{R}$이 MP와 평행할 필요충분조건은 $u^2/a = g$, 즉

$$u = \sqrt{ag}.$$

대수적으로 확인하면 다음과 같다. $u^2 = ag$일 때 운동 방정식에서 $F = mg\sin\theta$, $N = mg(1+\cos\theta)$이므로

$$\frac{F}{N} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta}{2\cos^2\frac{1}{2}\theta} = \tan\tfrac{1}{2}\theta,$$

이고, 이것이 바로 $(*)$이다. 일반적인 속력에 대해서는 P에 대한 모멘트가 $m\sin\theta\,(u^2 - ag)$로 계산되며, 이것이 모든 위치에서 0이 되는 것은 $u^2 = ag$일 때뿐이다. 따라서 고리가 이 마찰력을 실제로 제공할 수만 있다면, 쥐는 요구한 대로 속력 $\sqrt{ag}$로 달려서 고리를 평형 상태로 유지할 수 있다. 다음에는 이 점을 살펴본다.

마찰의 한계

쥐의 발이 미끄러지지 않고 붙어 있는 것은 $|F| \le \mu N$인 동안뿐이다. $u = \sqrt{ag}$이고, $\cos\frac{1}{2}\theta > 0$이 되도록 $|\theta| < \frac{1}{2}\pi$인 아래쪽 부분에서는 이 조건이 다음과 같다.

$$\tan\tfrac{1}{2}|\theta| \le \mu \quad\Longleftrightarrow\quad |\theta| \le 2\arctan\mu.$$

따라서 $\angle AOM = 2\arctan\mu$가 될 때까지는 모든 것이 잘 된다. (이 점은 $\mu < 1$일 때만 고리의 아래쪽 절반에 있다. $\mu \ge 1$이면 쥐는 이 점에 이르지 않는다.)

이 점을 지나면 어떤 속력을 택해도 소용없다. 평형을 이루려면 $F/N = \tan\frac{1}{2}\theta > \mu$이어야 하는데, 마찰력은 이것을 만들어 낼 수 없다. 어떤 속력이든, 그리고 $|F| \le \mu N$을 만족하는 어떤 마찰력이든, 쥐가 고리에 가하는 힘의 P에 대한 모멘트는

$$a\big[N\sin\theta - F(1+\cos\theta)\big] \;\ge\; aN(1+\cos\theta)\big(\tan\tfrac{1}{2}\theta - \mu\big) > 0.$$

무슨 일이 일어나는가

쥐가 $\angle AOM = 2\arctan\mu$를 지나면 더 이상 충분히 세게 붙잡을 수 없다. 발이 미끄러지고, 마찰력은 한계값 μN으로 떨어지며, 쥐는 속력을 유지하지 못하고 뒤로 미끄러지기 시작한다. 이제 쥐가 고리에 가하는 접촉력은 P의 옆을 지나가므로 모멘트가 0이 아니고, 고리는 더 이상 평형 상태가 아니다. 고리는 P를 중심으로 회전하기 시작한다. 위의 모멘트는 쥐의 수직 방향 밀기가 줄어든 마찰력을 이기는 방향이므로, 고리는 A가 쥐가 있는 쪽, 즉 쥐가 달리던 방향으로 움직이도록 흔들린다. 그 뒤의 운동은 더 이상 단순한 평형 그림이 아니다. 고리는 P를 중심으로 흔들리고 쥐는 그 위에서 미끄러진다.

검산

- $\theta = 0$일 때 쥐는 A에 있고, 접촉력 $N = 2mg$는 연직이며 P를 지나고, 예상대로 마찰력은 필요 없다.
- 속력 $\sqrt{ag}$는 속력의 단위를 가지며, μ에도 고리의 질량에도 의존하지 않고, 수직항력을 $mg(1 + \cos\theta)$로 만들어 아래쪽 절반 전체에서 양수가 되게 한다.
- $\mu = 0.5$일 때 임계각은 $2\arctan 0.5 \approx 0.927$ rad $\approx 53.1°$이다. 이때 $\sin\theta = 0.8$, $1 + \cos\theta = 1.6$이므로 정확히 $F/N = 0.5 = \mu$이다. $u^2 = ag$로 두고 임의의 위치에서 P에 대한 모멘트를 수치적으로 확인하면 $10^{-15}mga$ 이내에서 0이 나왔다.

흔한 실수

- P 대신 O에 대한 모멘트를 취하는 것. 고리는 P를 중심으로 회전하며, (O를 지나는) 수직항력은 P에 대한 모멘트를 분명히 가진다.
- N에서 구심(centripetal) 항을 빠뜨리는 것. 그러면 $N = mg\cos\theta$가 되어 잘못된 마찰 조건을 얻는다.
- 쥐가 단순히 "떨어진다"고 주장하는 것. 아래쪽 절반에서는 내내 $N > 0$이다. 실패하는 것은 접촉이 아니라 붙잡는 힘이다.

STEP 너머

여기서 눈여겨볼 사실은, 물체가 회전축에 대하여 평형을 이루는 것은 다른 힘들의 합력이 회전축을 지날 때와 정확히 같다는 점이다. "P를 지나는 작용선" 논법은 한 쪽 분량의 힘 분해를 대신한다. 후반부는 연결계(coupled system)를 처음 맛보는 것으로, 미끄러지는 접촉을 통해 한 물체의 운동이 다른 물체의 운동으로 전달된다. 미끄러진 뒤의 운동을 분석하려면 고리의 관성 모멘트(moment of inertia)와 강체 회전의 완전한 운동 방정식이 필요하다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 고정축에 대한 토크(torque)와 마찰의 제한을 받는 운동을 모두 이런 방식으로 다룬다.

풀이

STEP III 2004, 문제 10

역학 • 탄성 끈과 단진동

STEP III 2004, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

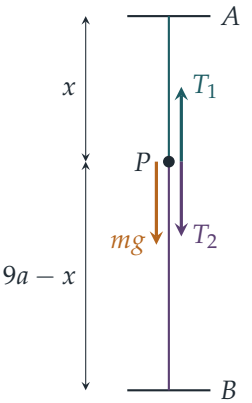
step.maths.org/questions/04-s3-q10

핵심 아이디어

각 줄은 팽팽할(taut) 때에만 훅의 법칙(Hooke's law)을 따르므로, 어느 줄이 팽팽한지에 따라 운동을 여러 단계로 나눈다. 각 단계에서 가속도는 $7a - x$의 상수배이므로 입자는 $x = 7a$를 중심으로 단진동(simple harmonic motion)을 하지만, 단계마다 ω가 다르다. 첫 번째 단계가 끝나는 시각과 그때의 속력을 구하고, 이를 두 번째 단계의 출발 조건으로 사용한다.

풀이

P를 입자로, 두 줄을 늘어나면 훅의 법칙을 따르고 느슨할(slack) 때에는 힘을 작용하지 않는 가벼운 줄로 모형화한다. A에서 아래쪽으로 잰 $x = AP$를 잡으면 $PB = 9a - x$이고, 아래쪽을 양의 방향으로 잡는다.



운동 방정식

$x > 6a$이면 줄 AP는 $x - 6a$만큼 늘어나므로, P를 위로 당기는 장력(tension)은

$$T_1 = \frac{6mg(x-6a)}{6a} = \frac{mg(x-6a)}{a}.$$

이다. $x < 7a$이면 줄 BP는 $(9a - x) - 2a = 7a - x$만큼 늘어나므로, P를 B 쪽으로 아래로 당기는 장력은

$$T_2 = \frac{6mg(7a-x)}{2a} = \frac{3mg(7a-x)}{a},$$

이고, BP가 느슨해지는 $x \geq 7a$에서는 $T_2 = 0$이다.

$6a < x < 7a$일 때, 두 줄이 모두 팽팽하므로 아래 방향으로 뉴턴의 운동 제2법칙(Newton's second law)을 적용하면

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg - \frac{mg(x-6a)}{a} + \frac{3mg(7a-x)}{a} \\ &= \frac{mg}{a}\left(a - x + 6a + 21a - 3x\right) = \frac{mg}{a}(28a - 4x), \end{aligned}$$

이므로, 요구한 대로 $\ddot{x} = \dfrac{4g}{a}(7a - x)$이다.

$7a < x < 9a$일 때, AP만 팽팽하므로

$$m\ddot{x} = mg - \frac{mg(x-6a)}{a} = \frac{mg}{a}(7a - x),$$

이고, 요구한 대로 $\ddot{x} = \dfrac{g}{a}(7a - x)$를 얻는다.

B에 도달하는 시간

1단계: $6a \leq x \leq 7a$. $y = x - 7a$로 놓는다. 그러면 $\omega_1^2 = 4g/a$에 대하여 $\ddot{y} = -\omega_1^2 y$이고, 이는 $x = 7a$를 중심으로 하는 단진동이다. $y = -a$에서 정지 상태로 출발하므로

$$x = 7a - a\cos\omega_1 t, \qquad \dot{x} = a\omega_1 \sin\omega_1 t.$$

이다. $x = 6a$에서 정지 상태로 출발한 입자는 (그곳에서 $\ddot{x} > 0$이므로) 아래로 가속되고, 따라서 x는 $6a$에서부터 증가하며 $x = 7a$가 될 때까지 이 단계에 머문다. 이는 $\cos\omega_1 t = 0$일 때, 처음으로는 $\omega_1 t = \pi/2$일 때 일어나므로, 걸리는 시간은

$$t_1 = \frac{\pi}{2\omega_1} = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{a}{g}},$$

이고, 이때 입자는 속력 $a\omega_1 = 2\sqrt{ag}$로 아래로 움직이고 있다.

생각해 보기 $x = 7a$에서 방정식이 바뀐다. 어떻게 계속할까?

위치와 속도는 $x = 7a$에서 연속이므로, 1단계가 끝날 때의 상태가 2단계의 출발 조건이 된다. 그 지점에서 시간을 다시 0부터 잰다.

2단계: $7a \le x \le 9a$. 이제 $\omega_2^2 = g/a$에 대하여 $\ddot{y} = -\omega_2^2 y$이고, 중심 $y = 0$에서 속력 $2\sqrt{ag}$로 출발한다. 따라서 $x = 7a$ 이후 흐른 시간을 τ라 하면

$$x = 7a + \frac{2\sqrt{ag}}{\omega_2}\sin\omega_2\tau = 7a + 2a\sin\omega_2\tau.$$

이다. 진폭(amplitude)이 정확히 $2a$이므로, 입자는 $\sin\omega_2\tau = 1$일 때, 처음으로는 $\omega_2\tau = \pi/2$일 때 $x = 9a$, 즉 점 B에 도달한다. 그 순간 $\dot{x} = 2\sqrt{ag}\cos\omega_2\tau = 0$이므로, 입자는 속력 0으로 B에 도착한다. 이 단계에 걸리는 시간은

$$t_2 = \frac{\pi}{2\omega_2} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

이다.

따라서 입자가 B에 도달하는 데 걸리는 시간은

$$t_1 + t_2 = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{a}{g}} + \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}} = \frac{3\pi}{4}\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

이다.

검산

에너지를 이용하면 P가 정지 상태로 꼭 B에 도달함을 확인할 수 있다. BP가 a만큼 늘어난 출발 시점과, AP가 $3a$만큼 늘어난 B 도착 시점을 비교하자. 탄성 에너지(elastic energy)는 $\frac{6mg\,a^2}{2\cdot 2a} = \frac{3}{2}mga$에서 $\frac{6mg\,(3a)^2}{2\cdot 6a} = \frac{9}{2}mga$로 바뀐다. 증가량은 $3mga$로, $3a$만큼 떨어지며 잃은 중력 위치 에너지와 정확히 같으므로 B에서의 운동 에너지(kinetic energy)는 0이다. 수치적으로, $a = 0.7$, $g = 9.8$로 두고 $x = 6a$에서 정지 상태로 출발하여 전체 운동 방정식을 단계적으로 계산하면 $t \approx 0.2099$에서 $x = 7a$, $t \approx 0.6297$에서 최저점 $x = 9a$를 얻으며, $\frac{3\pi}{4}\sqrt{a/g} = 0.6297$이다.

흔한 실수

- $x > 7a$에서 T_2를 사용하는 것: 줄은 밀 수 없으므로, BP가 $2a$보다 짧아지면 힘을 작용하지 않는다.
- 운동 전체에 ω_1을 사용하거나, 두 번째 단진동을 첫 번째 단진동에서 이어받은 속력 $2\sqrt{ag}$로 다시 시작하는 것을 잊는 것.
- 진폭 $2a$가 실제로 P를 B까지 데려가는지 확인하지 않고 두 번째 단계를 주기(period)의 4분의 1이라고 단정하는 것.

STEP 너머

이것은 조각별 선형 진동자(piecewise-linear oscillator)이다. 복원력은 선형이지만 강성이 $x = 7a$에서 바뀐다. 각 구간마다 위상 평면(phase plane)에서 고유한 타원이 있고, 궤적은 줄이 느슨해지는 지점에서 이어진 서로 다른 두 타원의 호로 이루어진다. 튀는 공에서 충돌 진동자에 이르기까지 이와 같은 계는 비선형 동역학(nonlinear dynamics)의 표준적인 출발점이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 진동과 에너지 방법을 깊이 있게 다룬다.

풀이

STEP III 2004, 문제 11

역학 • 두 물체의 척력

STEP III 2004, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/04-s3-q11

이 문제는 *Beyond STEP*의 10.6 절 **두 물체가 하나가 되다**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch10/two-body.html

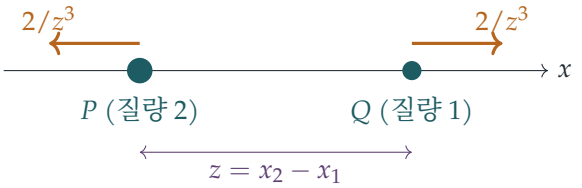
핵심 아이디어

서로를 밀어내는 두 입자로부터 두 개의 운동 방정식(equation of motion)을 얻고, 이 둘을 영리하게 조합한 두 식이 모든 일을 해낸다. **차** $x_2 - x_1$로부터 간격 z에 대한 하나의 방정식을 얻고, 이것은 $v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}z$ 기법으로 한 번 적분된다(사실 이것은 에너지 보존(energy conservation)이다). **가중합** $2x_1 + x_2$는 질량 중심(centre of mass)의 세 배이고, 힘이 모두 내력(internal force)이므로 이것에는 알짜힘이 전혀 작용하지 않는다.

풀이

z에 대한 방정식

P와 Q를 직선 위의 입자로 모형화하고, x는 P에서 Q 쪽으로 증가한다고 하자($x_2 > x_1$이므로). 척력은 P를 음의 방향으로, Q를 양의 방향으로 밀며, 그 크기는 각각 $2/z^3$이다.



각 입자에 뉴턴(Newton)의 제2법칙(second law)을 적용하면

$$2\ddot{x}_1 = -\frac{2}{z^3}, \qquad \ddot{x}_2 = \frac{2}{z^3}.$$

따라서 $\ddot{x}_1 = -1/z^3$이고, 빼면

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = \frac{2}{z^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{z^3},$$

이 되어 요구된 식을 얻는다.

z 구하기

먼저 초기 조건(initial condition)을 보자. $t = 0$일 때 $z = 1$이다. P는 Q 쪽으로, 즉 양의 방향으로 움직이므로 $\dot{x}_1 = 1$이고, $\dot{x}_2 = 0$이다. 따라서 $t = 0$에서 $v = \dot{z} = 0 - 1 = -1$이다. 즉 간격이 줄어들고 있다.

$\ddot{z} = v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}z$를 쓰면 방정식은

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} = \frac{3}{z^3} \quad \Longrightarrow \quad \tfrac{1}{2}v^2 = -\frac{3}{2z^2} + C.$$

이 된다. $z = 1$에서 $v^2 = 1$이므로 $\frac{1}{2} = -\frac{3}{2} + C$이고 $C = 2$이다. 그러므로

$$v^2 = 4 - \frac{3}{z^2}, \qquad \text{또는} \qquad z^2\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2 = 4z^2 - 3.$$

좌변은 $\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{d}(z^2)/\mathrm{d}t\right)^2$이므로, $u = \sqrt{4z^2 - 3} \geq 0$으로 놓아 볼 만하다. 그러면 $u^2 = 4z^2 - 3$이므로 $u\,\dot{u} = 4z\dot{z}$이고, 위 방정식은 $(z\dot{z})^2 = u^2$, 즉 $z\dot{z} = \pm u$임을 말해 준다. 따라서

$$\dot{u} = \frac{4z\dot{z}}{u} = \pm 4.$$

처음에 $u = 1$이고 $z\dot{z} = -1 < 0$이므로 음의 부호를 택한다. 즉 $u = 1 - 4t$이다.

> **생각해 보기** u가 0에 도달하면 어떤 일이 일어나는가? 그리고 $\dot{z}$의 부호는 계속 음으로 남는가?

그렇지 않다. $t = \frac{1}{4}$에서 $u = 0$이 되므로 $z = \sqrt{3}/2$이고 $v = 0$이다. 즉 두 입자가 순간적으로 가장 가까워진다. 이때 $\ddot{z} = 3/z^3 > 0$이므로 z가 증가하기 시작하고, $\dot{z}$가 양이 되어 양의 부호가 적용되며, $t \geq \frac{1}{4}$에 대하여 $u = 4t - 1$을 얻는다($t = \frac{1}{4}$에서 연속이다). 두 경우 모두 $u^2 = (4t-1)^2$이므로, 모든 $t \geq 0$에 대하여

$$4z^2 - 3 = 16t^2 - 8t + 1 \quad \Longrightarrow \quad z^2 = 4t^2 - 2t + 1,$$

이고, $z > 0$이므로

$$z = \sqrt{4t^2 - 2t + 1}.$$

이것이 요구된 결과이다. ($4t^2 - 2t + 1 = 4(t - \frac{1}{4})^2 + \frac{3}{4} > 0$이므로 제곱근은 항상 정의된다는 점에 주의하라.)

x_1과 x_2 구하기

두 운동 방정식으로부터

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(2x_1 + x_2) = 2\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = -\frac{2}{z^3} + \frac{2}{z^3} = 0.$$

이것은 운동량 보존(conservation of momentum)이다. 두 힘은 크기가 같고 방향이 반대이기 때문이다. 따라서 $2x_1 + x_2$는 t에 대한 일차식이다. $t = 0$에서 그 값은 $2 \cdot 0 + 1 = 1$이고, 변화율은 $2\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = 2 \cdot 1 + 0 = 2$이다. 따라서

$$2x_1 + x_2 = 2t + 1, \qquad x_2 - x_1 = \sqrt{4t^2 - 2t + 1}.$$

첫째 식에서 둘째 식을 빼면 $3x_1$을 얻고, 첫째 식에 둘째 식의 두 배를 더하면 $3x_2$를 얻는다.

$$x_1 = \frac{2t + 1 - \sqrt{4t^2 - 2t + 1}}{3}, \qquad x_2 = \frac{2t + 1 + 2\sqrt{4t^2 - 2t + 1}}{3}.$$

검산

- $t = 0$에서 이 식들은 $x_1 = 0$, $x_2 = 1$을 준다. 미분하면 $\dot{x}_1(0) = \frac{1}{3}\left(2 - \frac{1}{2} \cdot (-2)\right) = 1$이고 $\dot{x}_2(0) = \frac{1}{3}(2 - 2) = 0$이므로 조건과 맞는다.
- z를 더 빨리 구하는 방법: $w = z^2$으로 두면 $\ddot{w} = 2\dot{z}^2 + 2z\ddot{z} = 2\left(4 - 3/z^2\right) + 6/z^2 = 8$이므로, $w(0) = 1$과 $\dot{w}(0) = 2z\dot{z} = -2$로부터 $w = 4t^2 - 2t + 1$이다. 이 방법은 부호 걱정을 아예 피해 간다.
- $t \to \infty$일 때 $z \approx 2t - \frac{1}{2}$이므로 $x_1 \to \frac{1}{2}$이고 $\dot{x}_2 \to 2$이다. 즉 P는 결국 정지하고, Q가 모든 운동량($1 \times 2 = 2 \times 1$)과 모든 에너지를 가져간다. 퍼텐셜 에너지(potential energy)는 $1/z^2$이므로 처음 에너지는 $1 + 1 = 2$이고, 마지막 에너지는 $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2^2 = 2$이다.
- 원래 방정식을 수치적으로(룽게-쿠타(Runge–Kutta) 방법, 간격 10^{-4}) $t = 5$까지 계산하면 x_1, x_2, z에 대한 공식과 10^{-11} 이내로 일치하며, 최근접 거리는 $z = 0.8660\ldots = \sqrt{3}/2$이다.

흔한 실수

- $\dot{z}(0) = +1$로 놓는 것. P는 Q 쪽으로 움직이므로 간격은 줄어들고 있다.
- 모든 시각에서 $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t = -\sqrt{4 - 3/z^2}$로 써서 $t = \frac{1}{4}$에서의 전환점을 놓치는 것.
- P의 방정식에서 질량 2를 빠뜨려 $\ddot{z} = 4/z^3$을 얻는 것.

STEP 너머

이것은 이체 문제(two-body problem)의 축소판이다. 질량 중심은 등속으로 움직이고, 상대 좌표는 같은 힘을 받는 **환산 질량**(reduced mass) $m_1 m_2/(m_1+m_2) = \frac{2}{3}$인 하나의 입자처럼 행동한다. 실제로 $\frac{2}{3}\ddot{z} = 2/z^3$이기 때문이다. 같은 분리를 통해 행성의 운동은 하나의 궤도 문제로 환원된다. 역세제곱 힘도 특별하다. z^2이 정확히 t에 대한 이차식이 되는데, 이것은 등각 역학(conformal mechanics)에서 연구하는 $1/z^2$ 퍼텐셜의 숨은 대칭성이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 환산 질량과 이체 운동을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP III 2004, 문제 12

확률과 통계 • 지시변수와 교란순열

STEP III 2004, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/04-s3-q12

핵심 아이디어

개수를 지시확률변수(indicator variable)의 합으로 나타내는 것은 확률론에서 가장 유용한 기법 중 하나이다. 지시확률변수의 기댓값(expectation)은 그냥 확률이므로 $\mathrm{E}(N)$은 거의 저절로 구해진다. 분산(variance)을 구하려면 쌍들 사이의 공분산(covariance)이 필요한데, 셔츠가 독립적으로 배정되지 않기 때문에 이 값들은 작지만 0은 아니다. N의 평균과 분산이 모두 1임을 알고 나면, 모수가 1인 푸아송 분포(Poisson distribution)가 시도해 볼 만한 자연스러운 모형이 된다.

풀이

지시확률변수 하나, C_1

셔츠를 배정하는 $m!$가지 방법은 모두 같은 확률로 일어나므로, 셔츠 1은 m명의 선수 중 누구에게나 같은 확률로 돌아간다. 따라서 $\mathrm{P}(C_1 = 1) = \frac{1}{m}$이고, C_1은 0과 1의 값만 가지므로

$$\mathrm{E}(C_1) = 1 \cdot \mathrm{P}(C_1 = 1) = \frac{1}{m}$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다. 또한 $C_1^2 = C_1$이므로($0^2 = 0$이고 $1^2 = 1$이므로) $\mathrm{E}(C_1^2) = \frac{1}{m}$이고, 따라서

$$\mathrm{Var}(C_1) = \frac{1}{m} - \frac{1}{m^2} = \frac{m-1}{m^2}$$

이다.

C_1과 C_2의 공분산

여기서는 $m \geq 2$가 필요하다. 곱 C_1C_2는 선수 1과 선수 2가 둘 다 자기 셔츠를 받을 때 정확히 1이고, 그렇지 않으면 0이다. 선수 1이 셔츠 1을 받았다고 하면, 남은 $m-1$장의 셔츠는 나머지 $m-1$명의 선수에게 무작위로 나누어지므로 선수 2가 셔츠 2를 받을 확률은 $\frac{1}{m-1}$이다. 그러므로

$$\mathrm{E}(C_1C_2) = \mathrm{P}(C_1 = 1,\, C_2 = 1) = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{m-1}$$

이고

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(C_1, C_2) &= \mathrm{E}(C_1C_2) - \mathrm{E}(C_1)\,\mathrm{E}(C_2) = \frac{1}{m(m-1)} - \frac{1}{m^2} \\ &= \frac{m-(m-1)}{m^2(m-1)} = \frac{1}{m^2(m-1)}\end{aligned}$$

이다. 이 값은 양수이다. 선수 1이 맞는 셔츠를 받았다는 사실을 알면 선수 2에게 돌아갈 수 있는 셔츠 더미에서 틀린 셔츠 하나가 빠지므로, 선수 2의 확률이 조금 올라가기 때문이다.

> **생각해 보기** 공분산이 왜 0이 아닐까? 선수들의 셔츠는 따로따로 정해지는 것이 아닌가?

그렇지 않다. 셔츠는 선수마다 한 장씩 배정되므로, 선수 1이 무엇을 받느냐가 다른 모든 선수에게 남는 셔츠에 영향을 준다. C_i들은 **종속**(*dependent*)이며, 바로 그 때문에 $\mathrm{Var}(N)$에 공분산 항들을 포함해야 한다.

N의 평균과 분산

대칭성에 의해 모든 C_i는 C_1과 같은 분포를 가지고, $i \neq j$인 모든 쌍 C_i, C_j는 C_1, C_2와 같은 결합분포를 가진다(선수와 셔츠의 번호를 함께 바꾸어 붙여도 무작위 배정은 달라지지 않는다). 독립성이 전혀 필요 없는 기댓값의 선형성(linearity of expectation)에 의해

$$\mathrm{E}(N) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{E}(C_i) = m \cdot \frac{1}{m} = 1$$

이다. 합의 분산을 구하려면 모든 분산과, $i \neq j$인 순서쌍 전체에 대한 모든 공분산을 더한다. 이러한 순서쌍은 $m(m-1)$개이다.

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(N) &= \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Var}(C_i) + \sum_{i \neq j} \mathrm{Cov}(C_i, C_j) \\ &= m \cdot \frac{m-1}{m^2} + m(m-1) \cdot \frac{1}{m^2(m-1)} \\ &= \frac{m-1}{m} + \frac{1}{m} = 1.\end{aligned}$$

따라서 요구된 대로 $\mathrm{E}(N) = \mathrm{Var}(N) = 1$이다. ($m = 1$이면 항상 $N = 1$이므로 $\mathrm{Var}(N) = 0$이 된다. 공분산을 구할 때 이미 필요했듯이, 문제는 암묵적으로 $m \geq 2$를 가정하고 있다.)

어떤 근사를 쓸까?

정규 근사(Normal approximation)는 m의 값이 무엇이든 좋지 않다. N은 정수 값 $0, 1, 2, \ldots$만 가지며, 평균이 1이고 표준편차(standard deviation)가 1이므로 확률의 거의 전부가 $0, 1, 2, 3$의 서너 개 값에 몰려 있다. 분포는 평균보다 표준편차 하나만큼 아래인 0에서 잘려 있으므로 오른쪽으로 크게 치우쳐(skewed) 있다. 반면 $\mathrm{N}(1, 1)$ 분포는 대칭이고, 연속성 수정(continuity correction)을 하더라도 N이 결코 가질 수 없는 $-\frac{1}{2}$ 아래에 무시할 수 없는 확률(약 7%)을 준다. 결정적으로, m을 늘려도 도움이 되지 않는다. 평균과 분산은 모든 m에 대해 1로 유지되므로, 분포의 모양이 퍼져서 종 모양이 되는 일은 결코 없다.

반면 푸아송 근사는 그럴듯하다. N은 각각 작은 확률 $\frac{1}{m}$을 가지는 많은 수 m개의 사건 가운데 "성공"의 개수를 세며, 이 사건들은 약하게만 종속되어 있다(공분산 $\frac{1}{m^2(m-1)}$은 매우 작다). 바로 이런 상황에서 개수가 근사적으로 푸아송 분포를 따른다. 게다가 푸아송 확률변수는 평균과 분산이 같은데, N이 정확히 이 성질을 가지므로 $\mathrm{Po}(1)$이 자연스러운 선택이다.

$m = 4$인 경우

같은 확률로 일어나는 배정은 $4! = 24$가지이다. 배정을 선수 $1, 2, 3, 4$가 입은 셔츠의 목록으로 나타내면, 아무도 자기 셔츠를 받지 않는 배정은

$$2143, \quad 2341, \quad 2413, \quad 3142, \quad 3412,$$
$$3421, \quad 4123, \quad 4312, \quad 4321.$$

이다. (체계적으로 나열하려면, 선수 1이 셔츠 2, 3, 4 중 하나를 받고, 각 경우마다 나머지를 마무리하는 방법이 정확히 세 가지이므로 $3 \times 3 = 9$이다.) 따라서

$$\mathrm{P}(N = 0) = \frac{9}{24} = \frac{3}{8} = 0.375$$

이다.

모수가 1인 푸아송 근사는 $\mathrm{P}(N = 0) \approx \mathrm{e}^{-1}$을 준다. $\mathrm{e} \approx 2.72$를 쓰면

$$\mathrm{e}^{-1} \approx \frac{100}{272} = \frac{25}{68}$$

이다. 참값을 기준으로 잰 상대오차(relative error)는

$$\frac{\frac{3}{8} - \frac{25}{68}}{\frac{3}{8}} = 1 - \frac{25}{68} \cdot \frac{8}{3} = 1 - \frac{200}{204} = \frac{1}{51} \approx 0.0196$$

이고, 이는 주장한 대로 약 2%이다. (대신 근사값을 기준으로 오차를 재면 $\frac{1}{50}$, 즉 정확히 2%가 된다. 어느 쪽이든 이렇게 작은 m에 대해 놀라울 만큼 잘 맞는다.)

검산

- $m = 2$이면 가능한 경우는 둘 다 맞는 경우($N = 2$)와 둘 다 틀린 경우($N = 0$)뿐이고, 각각의 확률은 $\frac{1}{2}$이다. 평균은 1, 분산은 1이다. 맞다.
- $m = 2, \ldots, 7$에 대해 모든 순열을 컴퓨터로 나열하여 $\mathrm{E}(C_1) = \frac{1}{m}$, $\mathrm{Var}(C_1) = \frac{m-1}{m^2}$, $\mathrm{Cov}(C_1, C_2) = \frac{1}{m^2(m-1)}$, $\mathrm{E}(N) = \mathrm{Var}(N) = 1$이 정확히 성립함을 확인했고, 4개 대상의 교란순열(derangement)이 9개임을 찾았다. 따라서 $\mathrm{P}(N = 0) = 0.375$이고, 이를 $1/2.72 \approx 0.3676$과 비교할 수 있다.
- $N = m - 1$은 불가능하다는 점에 주목하자. 한 명을 뺀 모든 선수가 맞는 셔츠를 받았다면, 마지막 선수도 맞는 셔츠를 받는다. 이것도 N이 정규분포와 매우 거리가 멀다는 또 하나의 신호이다.

흔한 실수

- C_i들을 독립으로 취급하는 것. 그러면 1 대신 $\mathrm{Var}(N) = \frac{m-1}{m}$을 얻는다.
- 공분산 항을 $m(m-1)$개가 아니라 $\binom{m}{2}$개만 세는 것. 즉 $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y)$에서 인수 2를 빠뜨리는 것이다.
- 교란순열을 부주의하게 나열하는 것. 체계적으로 세면 (3×3) 하나를 빠뜨리는 일을 피할 수 있다.

STEP 너머

이것은 고전적인 "맞추기(matching)" 문제, 곧 교란순열 문제이다. 포함배제 원리(inclusion–exclusion)를 이용하면 $\mathrm{P}(N = 0) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{k!}$임을 보일 수 있고, 이 값은 e^{-1}로 매우 빠르게 수렴한다. 실제로 $m \to \infty$일 때 N은 $\mathrm{Po}(1)$로 분포수렴(convergence in distribution)한다. 드물고 약하게 종속된 많은 사건의 개수는 거의 푸아송 분포를 따른다는 더 넓은 원리는 첸–스타인 방법(Chen–Stein method)으로 엄밀하게 다듬어진다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)는 지시확률변수와 맞추기 문제를 반복해서 등장하는 예로 사용한다.

풀이

STEP III 2004, 문제 13

확률과 통계 • 기하분포

STEP III 2004, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/04-s3-q13

핵심 아이디어

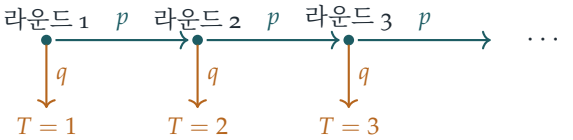
잠시 대회 전체는 잊고 참가자 한 명만 따라가 보자. 그 참가자가 탈락하는 라운드는 기하 확률변수(geometric random variable)이고, 세 참가자의 탈락 라운드는 서로 독립(independent)이다. 그러면 모든 소문항은 독립인 세 기하 확률변수에 관한 문제가 된다. 대상(grand prize)은 **가장 늦은** 탈락 라운드가 겹치는지 아닌지에만 달려 있음이 밝혀지므로, 마지막 소문항은 앞의 두 소문항을 합친 사건의 여사건(complement)이다.

풀이

$q = 1 - p$로 쓰고, $0 < p < 1$이라 가정한다. 참가자 j ($j = 1, 2, 3$)에 대하여 T_j를 그 참가자가 실패하는 라운드라 하자. 참가자가 라운드 k에서 실패하는 것은 라운드 $1, \ldots, k-1$을 통과한 뒤 라운드 k에서 실패하는 경우와 정확히 같으므로

$$\mathrm{P}(T_j = k) = p^{k-1}q, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

이다.



각 라운드의 통과 여부는 독립적으로 정해지고 참가자들도 서로 독립적으로 행동하므로, T_1, T_2, T_3는 독립이다. 또한 다음에 주목하자.

$$\mathrm{P}(T_j \le r - 1) = 1 - \mathrm{P}(\text{다음 라운드를 모두 통과: } 1, \ldots, r-1) = 1 - p^{r-1}.$$

소문항 (i)

독립성에 의하여 세 명이 모두 라운드 k에서 탈락할 확률은 $(p^{k-1}q)^3$이다. 이를 k에 대하여 더하면 공비가 $p^3 < 1$인 등비급수(geometric series)가 되므로

$$\mathrm{P}(T_1 = T_2 = T_3) = \sum_{k=1}^{\infty} q^3 p^{3(k-1)} = \frac{q^3}{1-p^3} = \frac{(1-p)^2}{1+p+p^2}.$$

소문항 (ii)

먼저 탈락하는 참가자를 고르는 방법은 3가지이다. 한 가지 선택에 대하여, 나머지 두 명이 모두 라운드 r에서 실패할 확률은 $(p^{r-1}q)^2$이고, 먼저 탈락하는 참가자가 r 이전의 어떤 라운드에서 실패할 확률은 $1-p^{r-1}$이다. 선택이 다르면 이 사건들은 서로 배반이므로

$$\mathrm{P}(\text{두 명은 라운드}r,\ \text{나머지는 더 일찍}) = 3p^{2r-2}q^2\left(1-p^{r-1}\right).$$

소문항 (iii)

? **생각해 보기** T_1, T_2, T_3로 나타낼 때, 대상은 정확히 언제 수여되는가?

T_j 중 최댓값(maximum)을 단 한 명의 참가자만 가진다고 하자. 예를 들어 $T_3 > T_1, T_2$라 하고 $m = \max(T_1, T_2)$라 하자. 라운드 m에서 참가자 3은 아직 남아 있고 그 라운드를 통과한다. 그 라운드에 남아 있는 다른 모든 참가자는 $T_j = m$이므로 그 라운드에서 실패한다. 따라서 참가자 3이 라운드 m에서 상을 받는다.

역으로, 최댓값을 여러 명이 공유한다고 하자. 예를 들어 $T_2 = T_3 = M \geq T_1$이라 하자. 라운드 M 이전에는 참가자 2와 3이 모두 남아 있고 매 라운드를 둘 다 통과하므로, 생존자가 단 한 명인 라운드는 없다. 라운드 M에서는 남은 모든 참가자가 실패하므로 생존자가 아예 없다. 따라서 상은 수여되지 않는다.

그러므로 상이 수여되지 **않는** 것은 가장 늦은 두 탈락 라운드가 같을 때와 정확히 일치한다. 즉 세 값이 모두 같거나(소문항 (i)), 두 값이 어떤 라운드 r에서 같고 세 번째가 그보다 이른 경우이다. 두 번째 경우는 $r \geq 2$이어야 하며, 이는 소문항 (ii)의 사건이다. 소문항 (ii)의 결과를 $r \geq 2$에 대하여 더하고 $s = r-1$로 쓰면

$$\begin{aligned}\sum_{r=2}^{\infty} 3q^2 p^{2r-2}\left(1-p^{r-1}\right) &= 3q^2\sum_{s=1}^{\infty}\left(p^{2s}-p^{3s}\right) = 3q^2\left(\frac{p^2}{1-p^2}-\frac{p^3}{1-p^3}\right)\\ &= 3q^2\,\frac{p^2(1-p^3)-p^3(1-p^2)}{(1-p^2)(1-p^3)} = 3q^2\,\frac{p^2(1-p)}{(1-p^2)(1-p^3)}\\ &= \frac{3p^2q^2}{(1+p)(1-p^3)}.\end{aligned}$$

여기에 소문항 (i)의 결과를 더하고 $1-p^3 = q(1+p+p^2)$를 이용하면

$$\mathrm{P}(\text{상 없음}) = \frac{q^3(1+p)+3p^2q^2}{(1+p)(1-p^3)} = \frac{q^2(1+2p^2)}{(1+p)(1-p^3)} = \frac{(1-p)(1+2p^2)}{(1+p)(1+p+p^2)}.$$

$(1+p)(1+p+p^2) = 1+2p+2p^2+p^3$이고 $(1-p)(1+2p^2) = 1-p+2p^2-2p^3$이므로, 둘의 차는 $3p+3p^3$이다. 따라서

$$\mathrm{P}(\text{대상 수여}) = \frac{3p(1+p^2)}{(1+p)(1+p+p^2)}.$$

검산

- $p \to 0$이면 모두가 라운드 1에서 실패하고, (iii)의 답은 0으로 수렴한다. $p \to 1$이면 동률이 일어나기 어려워지고, 답은 $\frac{3\cdot 2}{2\cdot 3} = 1$로 수렴한다.
- 직접 계산하면, 상은 어떤 T_j 하나가 나머지 둘보다 클 때 수여되므로 그 확률은 $3\sum_k p^{k-1}q\,(1-p^{k-1})^2$이다. $p = \frac{1}{2}$일 때 정확히 합을 구하면 $\frac{5}{7} \approx 0.714$이고, 이는 $\frac{3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{7}{4}} = \frac{5}{7}$과 일치한다.
- 대회 자체를 시뮬레이션한 결과($p = 0.6$에서 2×10^5회 실행), 전체 실행의 77.9%에서 상이 수여되었으며, 공식의 값은 0.7806이다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)에서 어느 참가자가 먼저 탈락하는지를 고르는 인수 3을 빠뜨린다.
- 상이 수여되려면 마지막 두 명이 서로 다른 라운드에서 탈락해야 한다고 생각한다. 두 명이 라운드 m에서 함께 탈락하고 세 번째 참가자가 그 라운드를 통과하면, 그 참가자는 여전히 상을 받는다. 상을 막는 것은 **맨 위**에서의 동률뿐이다.

STEP 너머

이 문제는 독립인 기하 확률변수들의 최댓값과 그 최댓값이 유일한지에 관한 것이다. 참가자가 n명일 때, 맨 위에서 동률이 일어날 확률은 $n \to \infty$일 때 극한값에 수렴하지 않는다. 그 확률은 $\log n$에 따라 아주 미세하게 진동하는데, 이는 리더 선출(leader election) 같은 알고리즘 분석에서 잘 알려진 놀라운 사실이다. 여기서 쓴 도구, 즉 한 변수에 대한 조건부(conditioning) 계산과 등비급수의 합은 Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*(확률론 입문)에서 자세히 다룬다.

풀이

STEP III 2004, 문제 14

확률과 통계 • 가설 검정의 오류

STEP III 2004, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/04-s3-q14

핵심 아이디어

두 가설(hypothesis) 모두에서 $\overline{X}$의 중심은 같은 값 μ이고, 다른 것은 $\overline{X}$가 얼마나 퍼져 있는가뿐이다. 따라서 H_0에 반하는 증거는 $\overline{X}$가 어느 쪽으로든 μ에서 **멀리 떨어진** 곳에 놓이는 것이며, 대칭인 양측(two-sided) 기각역(rejection region)이 바로 이것을 잡아낸다. 그 다음에는 모든 것이 각 가설 아래에서 한 번씩 $\overline{X}$를 표준화(standardising)하는 일로 귀결된다.

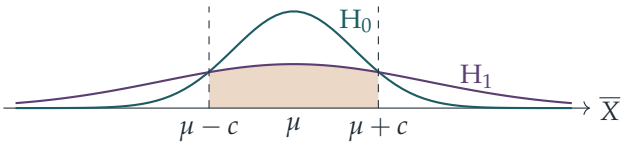
풀이

왜 양측검정인가

$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$이고 표본값들이 서로 독립이므로, 표본평균(sample mean)은

$$\overline{X} \sim \mathrm{N}\left(\mu,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

을 만족한다. 어느 가설 아래에서든 $\overline{X}$의 중심은 알려진 값 μ이며, 유일한 차이는 H_1 아래에서 표준편차(standard deviation) $\sigma_1/\sqrt{n}$이 $\sigma_0/\sqrt{n}$보다 크다는 것이다. μ에 가까운 $\overline{X}$의 값은 상대적으로 H_0 아래에서 더 나오기 쉽고, μ에서 먼 값은 상대적으로 H_1 아래에서 더 나오기 쉽다(더 넓은 곡선의 꼬리가 더 두껍다. 그림을 보라). 두 분포가 모두 μ에 대하여 대칭이므로, $\overline{X}$의 큰 값이 같은 정도로 작은 값보다 H_1에 대한 더 강한 증거가 되지는 않는다. 그러므로 자연스러운 검정은 $|\overline{X} - \mu|$가 어느 방향으로든 클 때 H_0을 기각하는 것이고, 대칭성에 의해 채택구간(acceptance interval)은 μ를 중심으로 해야 한다. 즉 $\mu - c < \overline{X} < \mu + c$일 때 H_0을 채택한다. 단측검정(one-sided test)은 여기서 틀린 방법인데, 더 큰 퍼짐에 대한 증거의 절반을 무시하게 되기 때문이다.



색칠한 부분의 넓이(H_1이 참인데도 H_0을 채택하는 경우)가 β이고, 점선 바깥쪽 청록색 곡선 아래의 넓이가 α이다.

c 구하기

H_0 아래에서 $Z = \dfrac{\sqrt{n}\,(\overline{X}-\mu)}{\sigma_0}$는 표준정규분포(standard normal distribution)를 따른다. $|\overline{X}-\mu| \geq c$일 때, 즉 $|Z| \geq c\sqrt{n}/\sigma_0$일 때 H_1을 채택한다. 표준정규분포의 대칭성에 의해

$$\alpha = \mathrm{P}\left(|Z| \geq \frac{c\sqrt{n}}{\sigma_0}\right) = 2\left(1-\Phi\left(\frac{c\sqrt{n}}{\sigma_0}\right)\right), \qquad \text{따라서} \qquad \Phi\left(\frac{c\sqrt{n}}{\sigma_0}\right) = 1-\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Φ는 순증가함수(strictly increasing function)이므로 이는 $c\sqrt{n}/\sigma_0 = z_\alpha$를 뜻하고, 따라서

$$c = \frac{z_\alpha\,\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

이다.

β는 n에 의존하지 않는다

H_1 아래에서 $W = \dfrac{\sqrt{n}\,(\overline{X}-\mu)}{\sigma_1}$는 표준정규분포를 따르고,

$$\begin{aligned}\beta = \mathrm{P}(|\overline{X}-\mu| < c) &= \mathrm{P}\left(|W| < \frac{c\sqrt{n}}{\sigma_1}\right) = \mathrm{P}\left(|W| < \frac{z_\alpha\sigma_0}{\sigma_1}\right)\\ &= 2\,\Phi\left(\frac{z_\alpha\sigma_0}{\sigma_1}\right) - 1,\end{aligned}$$

이다. 여기서 앞 단계에서 얻은 $c\sqrt{n} = z_\alpha\sigma_0$를 대입하였다. c에 들어 있는 $\sqrt{n}$이 표준화에서 나온 $\sqrt{n}$과 약분되므로, β는 n이 아니라 α와 σ_0/σ_1에만 의존한다.

> ? **생각해 보기** 표본이 클수록 검정이 더 좋아져야 하지 않을까?

보통은 그렇다. n이 커지면서 두 표본분포(sampling distribution)가 서로 멀어지기 때문이다. 그러나 여기서는 결코 멀어지지 않는다. 두 분포 모두 중심이 μ이고, n을 늘리면 두 표준편차가 똑같이 $\sqrt{n}$배만큼 줄어든다. 그림 전체가 단순히 축척만 바뀌므로 넓이 α와 β는 변하지 않는다. 표본평균은 분산을 검정하기에는 나쁜 통계량이다. 개별 값들이 담고 있는 퍼짐에 관한 정보를 버리기 때문이다.

비 σ_1/σ_0의 최솟값

$r = \sigma_1/\sigma_0 > 1$이라 하자.

조건 $\alpha < 0.05$. 이는 $\Phi(z_\alpha) = 1 - \frac{1}{2}\alpha > 0.975 \approx \Phi(1.960)$을 뜻하므로, Φ가 증가함수이므로 $z_\alpha > 1.960$이다.

조건 $\beta < 0.05$. 이는 $2\Phi(z_\alpha/r) - 1 < 0.05$, 즉 $\Phi(z_\alpha/r) < 0.525 \approx \Phi(0.063)$을 뜻하므로 $z_\alpha/r < 0.063$, 곧

$$r > \frac{z_\alpha}{0.063}$$

이다. 둘을 합치면 $r > z_\alpha/0.063 > 1.960/0.063$이어야 한다. 역으로 $r > 1.960/0.063$이면 1.960보다 조금 크면서 $z_\alpha < 0.063\,r$인 z_α를 고를 수 있고, 그러면 두 조건이 모두 성립한다. 따라서 비는

$$\frac{1.960}{0.063} \approx 31.1,$$

보다 커야 하므로, σ_1/σ_0의 최솟값은 약 31이다. 표본 크기가 얼마이든, 표본평균이 이 정도로 믿을 만하게 두 표준편차를 구별하려면 표준편차가 약 서른 배는 차이 나야 한다.

검산

- $\mu = 3, \sigma_0 = 1, \sigma_1 = 2.5, \alpha = 0.1, n = 1, 4, 9, 25$로 모의실험(simulation)을 해 보면, H_0 아래에서의 기각률은 매번 약 0.10이었고, H_1 아래에서의 채택률은 모든 n에 대하여 약 0.489로 $2\Phi(1.645/2.5) - 1 \approx 0.489$와 일치하였다.
- $r = 1.960/0.063$이고 정확히 $\alpha = 0.05$이면 $\beta = 2\Phi(0.063) - 1 \approx 0.050$으로, 예상대로 경계에 놓인다. Φ의 정확한 역함수 값을 쓰면 $r \approx 31.3$이므로, 답 31은 주어진 표 값의 반올림에 영향을 받지 않는다.
- 타당성 확인: $\sigma_1 = \sigma_0$이면 $\beta = 2\Phi(z_\alpha) - 1 = 1 - \alpha$인데, 두 가설이 일치할 때 당연히 그래야 한다.

흔한 실수

- $\overline{X} > \mu + c$와 같은 단측 기각역을 쓰는 것: H_1 아래에서 평균은 움직이지 않으므로 한쪽 꼬리를 더 중시할 이유가 없다.
- 기각역에 꼬리가 두 개라는 것을 잊고 $\alpha = 1 - \Phi(c\sqrt{n}/\sigma_0)$라고 쓰는 것.
- r에 대한 부등식의 방향을 거꾸로 잡는 것: β가 작으려면 z_α/r가 **작아야** 하므로 r가 커야 한다.

STEP 너머

이 문제는 두 종류의 오류(error) 사이의 상충 관계와 검정통계량(test statistic)의 선택이 왜 중요한지를 보여 준다. 네이만-피어슨 보조정리(Neyman–Pearson lemma)에 따르면 가장 강력한 검정은 두 가설 아래에서의 가능도(likelihood)를 비교하는 검정이다. 여기서 그것은 통계량 $\sum(X_i - \mu)^2$로 이어지는데, 이 통계량이 따르는 χ^2_n 분포는 $\overline{X}$와 달리 n이 커질수록 실제로 두 가설을 갈라놓는다. 이러한 개념을 읽기 쉽게 소개한 책으로는 Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문), 또는 Grimmett과 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률: 입문)을 보라.

Beyond STEP

STEP은 대부분의 학생이 학창 시절에 치르는 수학 시험 가운데 가장 어려운 시험이다. 또한 가장 훌륭한 시험 가운데 하나이기도 하다. 문제는 짧고 낯설며 깊이가 있고, 그중 가장 뛰어난 문제들은 대학 수학의 작은 조각이 모습을 감추고 있는 것이다.

이 책은 1987년 첫 시험에 앞서 나온 예시 시험지(specimen papers)부터 2025년 시험지까지 가운데 가장 흥미로운 STEP 문제들을 골라, 각 문제를 하나의 문으로 삼는다. 모든 문제는 뛰어난 학생이 풀어 가면서 던질 법한 질문들과 함께 꼼꼼하게 풀이하고, 그런 다음 책은 그 문을 지나 한 걸음 더 나아간다. 그 아이디어가 어디에서 왔는지, 대학에서는 무엇으로 발전하는지, 그리고 다음에는 무엇을 읽으면 좋은지를 살펴본다.

이 책은 STEP을 준비하면서 기출 문제 연습 이상의 것을 원하는 재능 있는 예비 수학자를 위해 쓰였다. 수학과 학부생처럼 생각하기 시작하고, 앞으로 무엇이 자신을 기다리고 있는지 알아보고 싶은 학생들을 위한 책이다.

- 순수수학(pure mathematics), 역학(mechanics), 확률(probability)과 통계(statistics)를 아우르는 13개의 장
- 이 36개의 STEP 기출 문제와 각 문제의 안내식 풀이
- 모든 문제 뒤에 숨은 대학 수학
- 답이 실린 후속 연습 문제와 더 읽을거리

2004년 풀이. 책 전체와 모든 장,
모든 풀이를 다음 주소에서 무료로 읽고, 내려받고, 공유할 수 있다.

beyondstep.keithmcnulty.org

본문은 퍼블릭 도메인(CC0 1.0)으로 공개한다. STEP 문제 © Cambridge University Press & Assessment.

