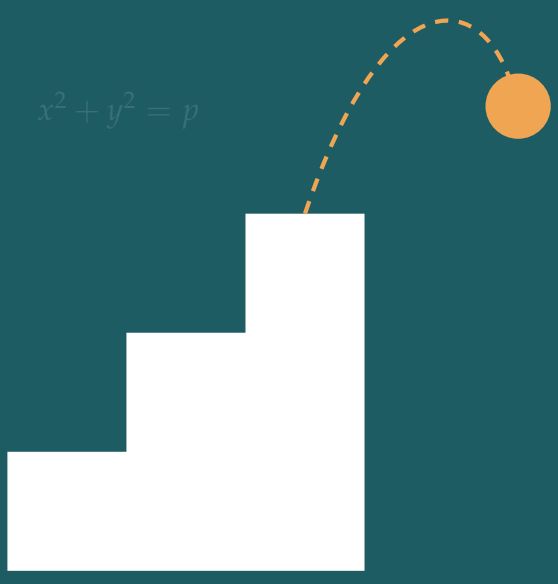
STEP 대비 · 대학 수학

# Beyond STEP

## STEP I, II 및 III

## 2003년 풀이



KEITH McNULTY

# Beyond STEP

STEP 기출문제로 여는
대학 수학의 세계

**STEP I, II 및 III**

## 2003년 풀이

Keith McNulty

**Beyond STEP: STEP 기출문제로 여는 대학 수학의 세계**

**2003년 풀이**

2003년 STEP 문제지(STEP I, II 및 III)의 42개 문제 전체에 대한 풀이. 견본 문제지 이후 모든 STEP 문제의 풀이와 *Beyond STEP* 책 전체, 그리고 각 장을 `beyondstep.keithmcnulty.org`에서 무료로 읽고 내려받을 수 있다.

풀이를 읽기 전에 먼저 문제를 제대로 풀어 보자. 모든 답은 수치적으로 검증하였지만, 풀이가 이렇게 많으면 실수가 어느 정도 있을 수밖에 없다. 무언가 잘못된 것처럼 보이면 자신의 풀이를 믿고 꼼꼼히 확인해 보자.

영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.

2026년 11월 온라인 초판 발행.

이 PDF에서 지은이가 직접 만든 모든 것, 곧 본문, 풀이, 그림, 연습문제와 해답은 크리에이티브 커먼즈 CC0 1.0 Universal 라이선스에 따라 퍼블릭 도메인(public domain)으로 공개한다. 누구든 허락을 구하지 않고 어떤 목적으로든 복사하고, 고쳐 쓰고, 공유할 수 있다. 자세한 내용은 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`을 보라.

여기에서 다루는 STEP 문제의 저작권은 Cambridge University Press & Assessment에 있다. 문제는 이 책에 싣지 않았으며, 각 문제마다 공식 출처인 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스나 OCR의 기출 시험지로 가는 링크를 달았다.

오류 제보는 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty에 이슈로 남겨 주기 바란다.

# 차례

## STEP I


Q1 거듭제곱의 합 순수수학 3

Q2 대수적 항등식 순수수학 7

Q3 반각 삼각방정식 순수수학 11

Q4 삼각부등식(삼각함수) 순수수학 15

Q5 이항급수 순수수학 19

Q6 부분분수를 이용한 적분 순수수학 22

Q7 자릿수와 나누어떨어짐 순수수학 25

Q8 로지스틱 미분방정식 순수수학 29

Q9 한 점을 지나는 포물체 역학 32

Q10 얇은 판의 질량중심 역학 36

Q11 경사면 위에서의 충돌 역학 40

Q12 곱의 기댓값 확률과 통계 44

Q13 기하분포의 기댓값 확률과 통계 47

Q14 푸아송 분포 확률과 통계 51


## STEP II


Q1 연립일차방정식 순수수학 54

Q2 역삼각함수 순수수학 58

Q3 무리수와 수학적 귀납법 순수수학 61

Q4 활꼴의 넓이 순수수학 64

Q5 직선의 벡터 기하 순수수학 68

Q6 반복 함수와 적분 순수수학 72

Q7 이상적분과 급수 순수수학 76

Q8 변수분리형 미분방정식 순수수학 80

Q9 최대 정지 마찰과 평형 역학 84
Q10 마찰이 있는 구속 운동 역학 88
Q11 포물체 운동 역학 92
Q12 분기 과정 확률과 통계 96
Q13 절단 푸아송 분포 확률과 통계 100
Q14 가설 검정의 오류 확률과 통계 104

**STEP III**

Q1 역쌍곡선함수의 적분 순수수학 108
Q2 이항급수 순수수학 112
Q3 곡선 그리기 순수수학 116
Q4 매개변수 곡선의 접선 순수수학 120
Q5 삼차방정식의 근 순수수학 124
Q6 삼각함수의 망원합 순수수학 129
Q7 심슨 선 순수수학 133
Q8 일계 미분방정식 순수수학 137
Q9 평형의 안정성 역학 141
Q10 가변 가속도 역학 145
Q11 요격의 운동학 역학 149
Q12 지수분포를 따르는 대기 시간 확률과 통계 153
Q13 흡수 마르코프 연쇄 확률과 통계 157
Q14 확률생성함수 확률과 통계 161

풀이

# STEP I 2003, 문제 1

순수수학 • 거듭제곱의 합

> **STEP I 2003, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q1

## 핵심 아이디어

문제에서 답의 꼴, 즉 계수(coefficient)를 모르는 $n$에 대한 다항식(polynomial)이 주어졌으므로, 남은 일은 그 계수들을 정확히 정하는 것뿐이다. 모든 $n$에 대하여 성립하는 다항식 항등식(identity)은 계산하기 편한 몇몇 $n$의 값에 대해서도 당연히 성립하고, 각 값마다 일차방정식(linear equation)이 하나씩 얻어진다. 합을 음의 첨자에서 시작하는 것은 의도된 요령이다. 이렇게 하면 $n=-1$이나 $n=-2$ 같은 작은 값을 쓸 수 있어서 방정식이 보기 좋게 대칭적인 꼴이 된다.

## 풀이

문제에서는 $r$를 합의 변수(summation variable)와 계수 두 가지로 모두 쓰고 있다. 혼동을 피하기 위해 합의 변수를 $k$로 쓰고, $p, q, r, s$와 $a, b, c, d, e$는 계수로 남겨 둔다.

### 제곱의 합

$S(n) = \sum_{k=-1}^{n} k^2$이라 하면

$$S(n) = pn^3 + qn^2 + rn + s.$$

$k=-1$에서 시작하는 합은 $n \geq -1$인 모든 $n$에 대하여 의미가 있고,

$$S(-1) = 1, \qquad S(0) = 1+0 = 1, \qquad S(1) = 1+0+1 = 2, \qquad S(2) = 1+0+1+4 = 6.$$

이다. 주어진 꼴에 $n = -1, 0, 1, 2$를 대입하면 다음 네 방정식을 얻는다.

$$-p + q - r + s = 1, \tag{1}$$
$$s = 1, \tag{2}$$
$$p + q + r + s = 2, \tag{3}$$
$$8p + 4q + 2r + s = 6. \tag{4}$$

(2)에서 $s = 1$이므로 (1)과 (3)은 각각 $-p + q - r = 0$과 $p + q + r = 1$이 된다. 두 식을 더하면 $2q = 1$이므로 $q = \frac{1}{2}$이고, 따라서 $p + r = \frac{1}{2}$이다. 식 (4)는

$$8p + 2 + 2r + 1 = 6 \quad \Longrightarrow \quad 8p + 2r = 3 \quad \Longrightarrow \quad 6p + 2(p + r) = 3,$$

이 되므로 $6p = 2$이고, $p = \frac{1}{3}$, $r = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$이다. 따라서

$$\sum_{k=-1}^{n} k^2 = \tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{6}n + 1.$$

? **생각해 보기** 문제에서 원하는 것은 $k = 0$부터의 합인데, 우리가 구한 것은 $k = -1$부터의 합이다. 두 합은 어떻게 다른가?

두 합은 $k = -1$인 항, 즉 $(-1)^2 = 1$만큼만 다르다. 그러므로

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{6}n = \tfrac{1}{6}n\left(2n^2 + 3n + 1\right) = \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

### 세제곱의 합

이번에는 $T(n) = \sum_{k=-2}^{n} k^3 = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + e$라 하자. 미지수가 다섯 개이므로 다섯 개의 값 $n = -2, -1, 0, 1, 2$를 사용한다.

$$T(-2) = -8, \quad T(-1) = -9, \quad T(0) = -9, \quad T(1) = -8, \quad T(2) = 0.$$

이로부터 다음을 얻는다.

$$16a - 8b + 4c - 2d + e = -8, \tag{5}$$
$$a - b + c - d + e = -9, \tag{6}$$
$$e = -9, \tag{7}$$
$$a + b + c + d + e = -8, \tag{8}$$
$$16a + 8b + 4c + 2d + e = 0. \tag{9}$$

(7)에서 $e = -9$이다. 방정식들이 $\pm n$에서 짝을 이루므로, 각 짝을 더하고 빼는 것이 유리하다. 그러면 짝수 차수와 홀수 차수가 분리된다.

$e = -9$를 이용하면 (6)과 (8)은 $a - b + c - d = 0$과 $a + b + c + d = 1$이 된다. 두 식을 더하고 빼면

$$a + c = \tfrac{1}{2}, \qquad b + d = \tfrac{1}{2}.$$

마찬가지로 (5)와 (9)는 $16a - 8b + 4c - 2d = 1$과 $16a + 8b + 4c + 2d = 9$가 된다. 두 식을 더하고 빼면

$$32a + 8c = 10, \qquad 16b + 4d = 8,$$

즉 $16a + 4c = 5$이고 $4b + d = 2$이다. $c = \frac{1}{2} - a$를 대입하면 $12a + 2 = 5$이므로 $a = \frac{1}{4}$, $c = \frac{1}{4}$이다. $d = \frac{1}{2} - b$를 대입하면 $3b + \frac{1}{2} = 2$이므로 $b = \frac{1}{2}$, $d = 0$이다. 따라서

$$\sum_{k=-2}^{n} k^3 = \tfrac{1}{4}n^4 + \tfrac{1}{2}n^3 + \tfrac{1}{4}n^2 - 9.$$

$k = -2$부터의 합은 $k = 0$부터의 합에 비해 $(-2)^3 + (-1)^3 = -9$라는 항을 더 포함하므로 9를 더한다.

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \tfrac{1}{4}n^4 + \tfrac{1}{2}n^3 + \tfrac{1}{4}n^2 = \tfrac{1}{4}n^2\left(n^2 + 2n + 1\right) = \tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

## 검산

$n = 10$일 때 공식은 $\frac{1}{6} \cdot 10 \cdot 11 \cdot 21 = 385$와 $\frac{1}{4} \cdot 100 \cdot 121 = 3025$를 주는데, $0^2 + 1^2 + \cdots + 10^2$과 $0^3 + 1^3 + \cdots + 10^3$을 직접 더해 보아도 같은 값이 나온다. 또한 $3025 = 55^2 = (0 + 1 + \cdots + 10)^2$임에 주목하자. 처음 $n$개의 세제곱의 합은 처음 $n$개의 정수의 합의 제곱이다. 우리는 컴퓨터로도 두 공식이 0부터 59까지의 모든 $n$에 대하여 정확히 성립함을 확인하였다.

## 흔한 실수

- 우리가 계산한 합에서 문제가 원하는 합으로 넘어갈 때 $k = -1$인 항(또는 $k = -2$와 $k = -1$인 항)을 빠뜨리는 것. $(-2)^3 + (-1)^3 = -9$이지 $+9$가 아님에 주의하라.
- 세제곱의 경우에 $n$의 값을 네 개만 쓰려고 하는 것. 미지수가 다섯 개이면 방정식도 다섯 개가 필요하다.
- 계수 $r$와 문제에 나오는 합의 변수 $r$를 혼동하는 것. 둘 중 하나의 이름을 바꾸면 실수를 피할 수 있다.

## STEP 너머

답이 차수가 하나 더 높은 다항식이라고 가정해도 되는 이유는 무엇일까? 차수가 $m+1$인 다항식의 차분 $P(n)-P(n-1)$은 차수가 $m$이므로, 차분이 $n^m$이 되는 다항식을 언제나 구할 수 있기 때문이다. 이것이 **차분법**(*calculus of finite differences*)의 출발점이며, 일반적으로 나타나는 계수는 베르누이 수(Bernoulli numbers)로 결정된다(파울하버 공식(Faulhaber's formula)). 여기서 사용한 방법, 즉 몇몇 점에서의 값으로 다항식을 결정하는 방법은 **다항식 보간법**(*polynomial interpolation*)이며, 수치해석(numerical analysis)에서 라그랑주 보간법(Lagrange interpolation)으로 다시 등장한다. 이런 성격의 문제를 더 보고 싶다면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*를 참고하라.

풀이

# STEP I 2003, 문제 2

순수수학 • 대수적 항등식

> **STEP I 2003, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q2

## 핵심 아이디어

수험생의 답은 그것이 방정식을 만족할 때 정확히 옳다. 따라서 그 답을 대입하고 분모를 없애 보자. 그러면 각 문항은 주어진 수들에 대한 다항식 조건으로 바뀐다. 첫 번째 문항에서 그 조건은 0이 아닌 실수에 대해서는 결코 0이 될 수 없는 이차 형식(quadratic form)이다. 두 번째 문항에서는 아름답게 인수분해(factorise)되는 삼차식이 나오는데, 그 인수들이 바로 문제에서 묻는 세 방정식이다.

## 풀이

### 첫 번째 문항

이 풀이 전체에서 $a$와 $b$는 0이 아닌 실수이다. 수험생의 답은 $x = a + b$가 방정식을 만족할 때 정확히 옳다. 우선 이것이 의미를 가지려면 $a + b \neq 0$이어야 하고, 그다음

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}.$$

이어야 한다. 0이 아닌 $ab(a+b)$를 양변에 곱하면, 이는 다음과 동치이다.

$$ab = (a+b)^2, \qquad \text{즉,} \qquad a^2 + ab + b^2 = 0.$$

완전제곱식으로 고치면(completing the square)

$$a^2 + ab + b^2 = \left(a + \tfrac{1}{2}b\right)^2 + \tfrac{3}{4}b^2.$$

두 항 모두 실수의 제곱이므로 둘 다 $\geq 0$이고, $b \neq 0$이므로 두 번째 항은 순양수이다. 따라서 모든 실수 $a$와 0이 아닌 실수 $b$에 대해 $a^2 + ab + b^2 > 0$이므로, 이 조건은 결코 성립할 수 없다.

($a+b=0$이면 수험생의 "답" $x=0$은 방정식에서 아예 의미를 갖지 않으므로, 이 경우도 나을 것이 없다.) 그러므로 $x=a+b$가 옳은 답이 되는 $a$와 $b$의 값은 존재하지 않으며, 이것으로 증명이 끝난다.

### 두 번째 문항

이제 $a$, $b$, $c$는 0이 아닌 수이다. 답 $x=a+b+c$가 옳을 필요충분조건(if and only if)은 $a+b+c\neq 0$이고

$$\frac{1}{a+b+c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{bc+ca+ab}{abc}.$$

인 것이다. 양변에 $abc(a+b+c)\neq 0$을 곱하면, 이는 다음과 동치이다.

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=0. \qquad (*)$$

**?** **생각해 보기** $(*)$의 좌변이 인수분해된다는 것을 어떻게 알아챌 수 있을까?

증명해야 할 결과를 보면 $a+b$, $b+c$, $c+a$가 인수일 것이라고 예상할 수 있다. 하나를 확인해 보자. $b=-a$를 대입하면 $a+b+c=c$이고 $ab+bc+ca=-a^2-ac+ca=-a^2$이므로, 좌변은 $c(-a^2)-(-a^2c)=0$이 된다. 따라서 $a+b$는 인수이고, 대칭성에 의해 $b+c$와 $c+a$도 인수이다. 좌변의 차수(degree)는 3이므로 좌변은 $(a+b)(b+c)(c+a)$의 상수배이다. $a^2b$의 계수(coefficient)를 비교하면(양변 모두 1이다) 그 상수는 1이다. 또는 양변을 모두 전개해도 된다.

$$\begin{aligned}(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc &= a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b+3abc-abc\\ &= a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b+2abc\\ &= (a+b)(b+c)(c+a).\end{aligned}$$

따라서 $(*)$는 다음과 같다.

$$(a+b)(b+c)(c+a)=0.$$

이제 두 방향을 모두 증명한다.

**답이 옳다면.** 이때 $a+b+c\neq 0$이고 $(*)$가 성립하므로 $(a+b)(b+c)(c+a)=0$이다. 여러 수의 곱이 0이 되는 것은 인수 중 하나가 0일 때뿐이므로, $a+b=0$, $b+c=0$, $c+a=0$ 중 적어도 하나가 성립한다.

**역(*converse*)으로,** 이 중 적어도 하나가 성립한다고 하자. 대칭성에 의해 $a+b=0$이라고 해도 된다. 그러면 $a+b+c=c\neq 0$이므로 수험생의 답은 0이 아닌 정당한 수이고, $(*)$의 인수분해된 꼴이 성립한다. 방정식에서 $(*)$로 가는 과정은 거꾸로 되돌릴 수 있으므로(0이 아닌 수 $abc(a+b+c)$를 곱하기만 했다), $x=a+b+c$는 방정식을 만족한다. 이는 직접 확인할 수도 있다. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a}=0$이므로 방정식은 $\frac{1}{x}=\frac{1}{c}$가 되고, 그 해는 $x=c=a+b+c$이다.

따라서 수험생의 답이 옳을 필요충분조건은 $a+b=0, b+c=0, c+a=0$ 중 적어도 하나가 성립하는 것이다. ■

이 논증에서 $a, b, c$가 실수라는 사실은 한 번도 쓰지 않았다는 점에 주목하자. 인수분해는 대수적 항등식(identity)이므로, 이 결과는 0이 아닌 복소수(complex number)에 대해서도 성립한다. 반면 첫 번째 문항에서는 $a$와 $b$가 실수라는 조건이 정말로 필요하다. 복소수 범위에서는 $a^2+ab+b^2=0$이 $b=a\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$와 같은 해를 갖기 때문이다.

## 검산

- $a=2, b=-2, c=5$로 두면 $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{1}{5}$이고 $a+b+c=5$이므로 수험생의 답이 옳다.
- $a=b=c=1$로 두면 참인 답은 $x=\frac{1}{3}$이지만 수험생은 3이라고 답한다. 실제로 $(a+b)(b+c)(c+a)=8\neq 0$이다.
- $a=1, b=2, c=3$에서 $(a+b)(b+c)(c+a)$를 계산하면 $3\cdot 5\cdot 4=60$이고, $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=6\cdot 11-6=60$이다.
- $|n|\leq 6$이고 $d\in\{1,2,3\}$인 0이 아닌 유리수 $n/d$로 이루어진 17 576개의 순서쌍 전체에 대해, 정확한 분수 계산으로 두 방향을 빠짐없이 검사했으며 예외는 없었다.

## 흔한 실수

- $a^2+ab+b^2=(a+b)^2-ab$라고 쓰고 멈추는 것. 이것으로는 양수임이 보이지 않는다. 완전제곱식으로 고쳐야 보인다.
- 두 번째 문항에서 한 방향만 증명하는 것. "필요충분조건"을 보이려면 두 방향이 모두 필요하고, 역을 보일 때는 $a+b+c\neq 0$임을 확인해야 한다.
- 양변에 곱하기 전에 $abc(a+b+c)$가 0이 아니어야 한다는 점을 잊는 것. 바로 이 점 때문에 과정을 거꾸로 되돌릴 수 있다.

## STEP 너머

식 $(a+b)(b+c)(c+a)$는 대칭다항식(symmetric polynomial)이다. 그리고 $e_1=a+b+c$, $e_2=ab+bc+ca$, $e_3=abc$일 때의 항등식 $(a+b)(b+c)(c+a)=e_1e_2-e_3$은 대칭다항식의 기본 정리(fundamental theorem of symmetric polynomials)의 한 예이다. 이 정리에 따르면 모든 대칭다항식은 이 기본 대칭다항식(elementary symmetric polynomial)들의 다항식으로 나타낼 수 있다. 이 $e_1, e_2, e_3$는 부호를 무시하면 $a, b, c$를 근으로 갖는 삼차식의

계수이며, 그래서 방정식 이론 곳곳에 등장한다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 이러한 관점에서 다항식환(polynomial ring)을 다루고, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에는 인수분해를 알아채는 STEP 연습 문제가 더 실려 있다.

풀이

# STEP I 2003, 문제 3

순수수학 • 반각 삼각방정식

> **STEP I 2003, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q3

## 핵심 아이디어

각 소문항은 $\frac{1}{2}\theta$에 대한 함수와 $\theta$에 대한 같은 함수를 비교하므로, 배각 공식(double-angle formula)을 이용해 모든 것을 반각(half-angle)으로 나타낸다. 그러면 각 방정식은 하나의 양($\sin\frac{1}{2}\theta$, $\tan\frac{1}{2}\theta$ 또는 $\cos\frac{1}{2}\theta$)에 대한 다항방정식(polynomial equation)이 되고, 이것은 인수분해(factorise)하거나 이차방정식(quadratic equation)으로 풀 수 있다. 주의할 점은 반각 함수가 실제로 가질 수 있는 값이 무엇인지, 그리고 함수가 어디에서 정의되는지를 놓치지 않는 것뿐이다.

## 풀이

### 소문항 (i)

$\sin\theta = 2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta$를 이용하면 방정식 $2\sin\frac{1}{2}\theta = \sin\theta$는 다음과 동치(equivalent)이다.

$$2\sin\tfrac{1}{2}\theta - 2\sin\tfrac{1}{2}\theta\cos\tfrac{1}{2}\theta = 0, \qquad \text{즉,} \qquad 2\sin\tfrac{1}{2}\theta\left(1-\cos\tfrac{1}{2}\theta\right) = 0.$$

따라서 방정식이 성립할 필요충분조건은 $\sin\frac{1}{2}\theta = 0$ 또는 $\cos\frac{1}{2}\theta = 1$이다.

그런데 $\cos\frac{1}{2}\theta = 1$이면 $\sin^2\frac{1}{2}\theta = 1-\cos^2\frac{1}{2}\theta = 0$이므로 어차피 $\sin\frac{1}{2}\theta = 0$이다. 따라서 두 번째 경우는 첫 번째 경우에 포함되고,

$$2\sin\tfrac{1}{2}\theta = \sin\theta \iff \sin\tfrac{1}{2}\theta = 0,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. (다시 말해, 해는 정확히 정수 $n$에 대하여 $\theta = 2n\pi$이다.)

### 소문항 (ii)

$t = \tan\frac{1}{2}\theta$라 하자. 방정식이 의미를 가지려면 $\tan\frac{1}{2}\theta$와 $\tan\theta$가 모두 정의되어야 하므로 $\cos\frac{1}{2}\theta \neq 0$이고 $\cos\theta \neq 0$이어야 한다. $\cos\theta = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$이므로 두 번째 조건은 $t^2 \neq 1$을 뜻한다. 이 제한 아래에서 $\tan\theta = \dfrac{2t}{1-t^2}$이고, 방정식은 다음과 같이 된다.

$$2t = \frac{2t}{1-t^2}.$$

0이 아닌 $1-t^2$를 양변에 곱하면 $2t - 2t^3 = 2t$이므로 $t^3 = 0$이고 $t = 0$이다.

> **생각해 보기** $1-t^2$를 양변에 곱해도 괜찮은가? 그 과정에서 해를 잃거나 새로 얻지는 않았는가?

0이 아닌 양을 곱하는 것은 되돌릴 수 있는 연산이므로, 두 탄젠트가 모두 정의되는 집합 위에서 $t$에 대한 방정식은 $t = 0$과 정확히 동치이다. 역으로 $t = 0$이면 $\tan\theta = 0$이고 $\tan\frac{1}{2}\theta = 0$이어서 양변이 모두 0이다.

이제 $\tan\frac{1}{2}\theta = 0$인 것은 정확히 $\frac{1}{2}\theta = n\pi$일 때이다. 따라서 해는

$$\theta = 2n\pi, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

이고, 이는 소문항 (i)과 같은 집합이다.

### 소문항 (iii)

$c = \cos\frac{1}{2}\theta$라 하자. $\cos\theta = 2\cos^2\frac{1}{2}\theta - 1 = 2c^2 - 1$을 이용하면 방정식 $2\cos\frac{1}{2}\theta = \cos\theta$는 다음과 동치이다.

$$2c = 2c^2 - 1 \iff 2c^2 - 2c - 1 = 0 \iff c = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

$c$는 코사인 값이므로 $-1 \le c \le 1$이다. 근 $\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}) \approx 1.37$은 너무 크고, $\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}) \approx -0.37$은 가능하다. 따라서 방정식이 성립할 필요충분조건은

$$\cos\tfrac{1}{2}\theta = \tfrac{1}{2}(1-\sqrt{3}) = -\cos\phi,$$

이다. 여기서 $\phi$는 문제에서 정의한 것이다. $0 < \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1) < 1$이고 $[0, \frac{1}{2}\pi]$에서 cos는 1에서 0으로 감소하므로, 이러한 $\phi$는 존재하며 유일하다.

> **생각해 보기** $\cos\frac{1}{2}\theta = -\cos\phi$를 어떻게 주어진 꼴로 바꿀 수 있을까?

$-\cos\phi = \cos(\pi - \phi)$로 쓴다. $\cos x = \cos\alpha$의 일반해(general solution)는 $x = 2m\pi \pm \alpha$이므로

$$\tfrac{1}{2}\theta = 2m\pi \pm (\pi - \phi) \qquad \text{즉,} \qquad \theta = 4m\pi \pm (2\pi - 2\phi), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

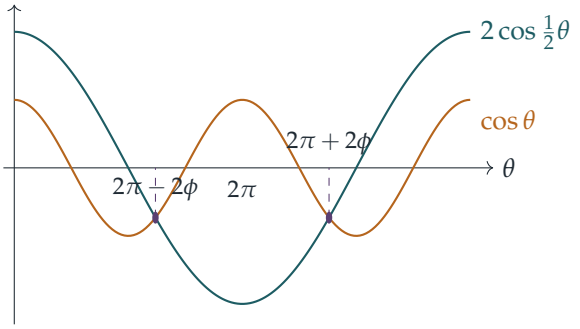
두 부호를 따로 살펴보자.

- $+$ 부호일 때: $n = m$으로 두면 $\theta = 4m\pi + 2\pi - 2\phi = (4n+2)\pi - 2\phi$이다.
- $-$ 부호일 때: $n = m-1$로 두면 $\theta = 4m\pi - 2\pi + 2\phi = \big(4(m-1)+2\big)\pi + 2\phi = (4n+2)\pi + 2\phi$이다.

$m$이 모든 정수를 지나면 각 경우에서 $n$도 모든 정수를 지난다. 따라서

$$2\cos\tfrac{1}{2}\theta = \cos\theta \iff \theta = (4n+2)\pi \pm 2\phi, \text{ 어떤 정수} n.$$

모든 단계가 동치였으므로 양방향이 모두 증명된다. 역을 직접 확인해 보면, $\theta = (4n+2)\pi \pm 2\phi$일 때 $\cos\tfrac{1}{2}\theta = \cos\big((2n+1)\pi \pm \phi\big) = -\cos\phi = c$이고, 이는 $2c = 2c^2 - 1$을 만족한다.




$2\cos\tfrac{1}{2}\theta$의 한 주기(period) $0 \le \theta \le 4\pi$에서 두 곡선은 두 번 만나며, 그 두 점은 $2\cos\tfrac{1}{2}\theta$가 최솟값 $-2$에 이르는 $\theta = 2\pi$에 대하여 대칭이다.

## 검산

- 수치적으로 $\cos\phi \approx 0.3660$이면 $\phi \approx 1.1961$이므로, (iii)의 첫 번째 양의 해는 $2\pi - 2\phi \approx 3.8911$이다. 이 점에서 $2\cos\tfrac{1}{2}\theta \approx -0.7321$이고 $\cos\theta \approx -0.7321$이므로 조건을 만족한다. $[-6\pi, 6\pi]$에서 $2\cos\tfrac{1}{2}\theta - \cos\theta$의 근을 탐색하면 이 범위에 있는 $(4n+2)\pi \pm 2\phi$ 꼴의 값 여섯 개만 정확히 나온다.
- (ii)에 대해서도 극(pole)을 피해 비슷하게 탐색하면 $2\pi$의 배수에서만 근이 나온다.
- (i)과 (ii)의 타당성 확인: $\theta = \pi$는 $2\sin\tfrac{1}{2}\pi = 2 \neq 0 = \sin\pi$이므로 (i)을 만족하지 않고, (ii)에서는 $\tan\tfrac{1}{2}\pi$가 정의되지 않으므로 정의역(domain) 밖에 있다.

## 흔한 실수

- (i)에서 $\sin\frac{1}{2}\theta$가 0일 수 있다는 언급 없이 약분하거나, $\cos\frac{1}{2}\theta = 1$이 이미 포함되어 있다는 것을 알아차리지 못하고 별도의 해의 족으로 제시하는 것.
- (ii)에서 분모를 없애기 전에 $\theta$가 $\tan\theta$ 또는 $\tan\frac{1}{2}\theta$가 정의되지 않는 점을 피해야 한다는 것을 잊는 것.
- (iii)에서 1보다 큰 근 $\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$을 버리지 않거나, $4m\pi \pm (2\pi - 2\phi)$를 $(4n+2)\pi \pm 2\phi$ 꼴로 바꿀 때 $\pm$를 잘못 다루는 것.

## STEP 너머

각 소문항은 반각에 대한 하나의 함수로 치환하여 방정식을 푸는데, 이 치환은 삼각방정식을 대수방정식으로 바꾼다. 특히 (ii)의 치환 $t = \tan\frac{1}{2}\theta$는 매우 강력하다. 이 치환은 $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$를 $t$의 유리함수(rational function)로 나타내며, 이 때문에 대학 1학년 미적분학에서 $\sin\theta$와 $\cos\theta$의 임의의 유리함수를 적분하는 데 쓰인다. 기하학적으로는 단위원(unit circle)을 유리점으로 매개화(parametrise)한다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*에 이러한 아이디어를 다루는 STEP 스타일의 연습 문제가 더 있다.

풀이

# STEP I 2003, 문제 4

순수수학 • 삼각부등식(삼각함수)

> **STEP I 2003, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q4

## 핵심 아이디어

양변에 $\cos\theta$를 곱하고 싶어지지만, $\cos\theta$는 $[0, 2\pi)$에서 부호가 바뀌고, 음수를 곱하면 부등식(inequality)의 방향이 뒤집힌다. 그래서 $\cos\theta > 0$인 경우와 $\cos\theta < 0$인 경우로 나눈다. $1 + \sin\theta$는 절대 음수가 아니므로 한 경우는 자명하다. 다른 경우는 $\sin\theta - \cos\theta$를 $R\sin(\theta - \alpha)$ 꼴로 나타내면 사인에 관한 부등식 하나로 정리된다.

## 풀이

$f(\theta) = \dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$라 하자. 이 풀이 전체에서 $0 \le \theta < 2\pi$이고 $\theta \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$이다.

**경우 1:** $\cos\theta < 0$, **즉** $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$

$\sin\theta \ge -1$이므로 분자(numerator) $1+\sin\theta$는 0 이상이고, 분모(denominator)는 음수이다. 따라서 $f(\theta) \le 0 < 1$이다.

$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$에 속하는 **모든** $\theta$가 부등식을 만족한다.

**경우 2:** $\cos\theta > 0$, **즉** $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ **또는** $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

양수 $\cos\theta$를 곱하면 부등식의 방향이 유지되므로

$$f(\theta) \le 1 \iff 1+\sin\theta \le \cos\theta \iff \sin\theta - \cos\theta \le -1.$$

이제 $\sin\theta - \cos\theta = \sqrt{2}\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{4} - \cos\theta\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$이므로, 조건은 다음과 같이 된다.

$$\sin\left(\theta - \tfrac{\pi}{4}\right) \le -\tfrac{1}{\sqrt{2}}.$$

**?** **생각해 보기** $\phi = \theta - \frac{\pi}{4}$의 어떤 값들을 살펴보아야 하는가?

이 경우에 허용되는 두 범위만 보면 된다.

- $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$이면 $-\frac{\pi}{4} \le \phi < \frac{\pi}{4}$이다. 이 구간에서 $\sin\phi$는 증가하고 $\sin\phi \ge \sin(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$이며, 등호는 $\phi = -\frac{\pi}{4}$일 때만 성립한다. 따라서 여기서의 해는 $\theta = 0$뿐이다. (확인: $f(0) = 1/1 = 1$이므로 등호가 성립한다.)
- $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$이면 $\frac{5\pi}{4} < \phi < \frac{7\pi}{4}$이다. $\sin\phi$는 양 끝에서 $-\frac{1}{\sqrt{2}}$이고 그 사이 $\phi = \frac{3\pi}{2}$에서 $-1$까지 내려가므로, 이 열린구간에서 $\sin\phi < -\frac{1}{\sqrt{2}}$이다. 따라서 $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$에 속하는 모든 $\theta$가 해이다.

### 종합하기

$\theta = \frac{3\pi}{2}$에서는 $\cos\theta = 0$이므로 이 값은 제외된다. 두 경우를 합치면, 부등식이 성립할 필요충분조건은 다음과 같다.

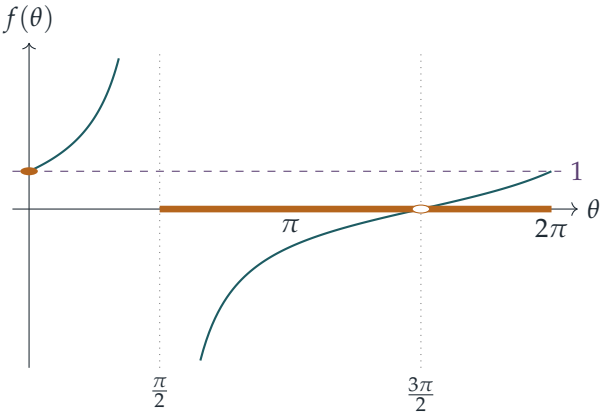
$$\theta = 0 \qquad \text{또는} \qquad \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \qquad \text{또는} \qquad \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi.$$

### 더 매끄러운 관점

$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$, $\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}$, $1 = \cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}$를 이용하면

$$f(\theta) = \frac{\left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1 + \tan\frac{\theta}{2}}{1 - \tan\frac{\theta}{2}} = \tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

이다. 여기서 공통인수를 약분했는데, $\cos\theta \neq 0$이므로 이 인수는 0이 아니다. ($\theta = \pi$에서는 가운데 식이 정의되지 않지만, 처음 식과 마지막 식은 그곳에서도 같다.) $\theta$가 $[0, 2\pi)$를 움직이면 $\psi = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}$는 $[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$를 움직인다. $\tan\psi$의 그래프를 보면 $\tan\psi \le 1$인 것은 $\psi = \frac{\pi}{4}$일 때와 $\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{5\pi}{4}$일 때뿐임을 곧바로 알 수 있다. $\psi = \pi$ (즉 $\theta = \frac{3\pi}{2}$)를 제외하면 앞의 답과 같다.




해집합(호박색)은 곡선이 점선 $f = 1$ 위에 있거나 그 아래에 있는 부분이다. $\theta = \frac{3\pi}{2}$에 구멍이 있다는 점에 주목하자. 그곳에서 $f(\theta) \to 0$이지만 $f$는 정의되지 않는다.

## 검산

- $\theta = 0$: $f(0) = 1$로 경계 위에 있다. 0보다 조금 큰 곳에서는 분자가 1보다 크고 분모는 1보다 작으므로 $f > 1$이다. 이로써 $\theta = 0$이 고립된 해(isolated solution)임을 확인할 수 있다.
- $\theta = \frac{7\pi}{4}$: $f = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) / \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 \approx 0.414 \leq 1$. 맞다.
- $\theta = \pi$: $f = 1/(-1) = -1 \leq 1$. 맞다.
- $[0, 2\pi)$에서 무작위로 고른 $\theta$ $2 \times 10^5$개를 시험해 본 결과, 위에서 구한 해집합과 완전히 일치했다. $\theta = \frac{3\pi}{2}$ 근처에서는 $f \approx 5 \times 10^{-5}$였는데, 이는 $f \to 0$과 들어맞는다.

## 흔한 실수

- 경우를 나누지 않고 $\cos\theta$를 양변에 곱하는 것. 그러면 모든 곳에서 $1 + \sin\theta \leq \cos\theta$를 얻게 되어, 구간 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ 전체를 잘못 버리게 된다.
- 고립된 해 $\theta = 0$을 빠뜨리는 것. 문제에서 $\theta = 0$을 허용하고, 등호도 포함된다.
- $\theta = \frac{3\pi}{2}$를 포함하는 것. 그곳에서 식은 $\frac{0}{0}$이므로, 극한(limit)이 0이더라도 정의되지 않는다.

## STEP 너머

여기서 얻는 교훈은 부등식이 **증가하는** 연산, 즉 양수를 곱하거나 증가함수(increasing function)를 적용하는 것 등에 의해서만 보존된다는 것이다. 이를 꼼꼼히 따지는 것이 실해석학(real analysis)의 일상적인 작업이다. $f$가 극한은 갖지만 값은 갖지 않는 $\theta = \frac{3\pi}{2}$에서의 제거 가능한 특이점(removable singularity) 역시 실해석학의 또 다른 주제이다. 연속성(continuity)이란 극한과 함숫값이 일치하는 것에 관한 개념이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해하기)는 이 두 아이디어를 꼼꼼하면서도 읽기 쉽게 전개한다.

풀이

# STEP I 2003, 문제 5

순수수학 • 이항급수

> **STEP I 2003, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q5

## 핵심 아이디어

어떤 이항전개(binomial expansion)에서든 일반항(general term)을 적고, 그 항에 붙는 $x$의 거듭제곱을 추적한다. 상수항(constant term)은 그 지수가 0인 항이다. 소문항 (ii)에서는 전개가 유한하지 않으므로 먼저 지배적인 인수를 묶어 낸다. $|x|$가 클 때는 그것이 $x^6$이어서 $3/x$에 대한 급수(series)가 남고, $|x|$가 작을 때는 $3x^5$이어서 $x/3$에 대한 급수가 남는다. 그다음 $x$의 어떤 거듭제곱이 나타날 수 있는지를 보면 모든 것이 결정된다.

## 풀이

### 소문항 (i)

$(2x + x^{-2})^6$의 일반항은

$$\binom{6}{r}(2x)^{6-r}\left(x^{-2}\right)^r = \binom{6}{r}2^{6-r}x^{6-3r}, \qquad r = 0, 1, \ldots, 6.$$

이 항이 $x$와 무관할 필요충분조건은 $6 - 3r = 0$, 즉 $r = 2$이고, 이때 그 항은

$$\binom{6}{2}2^4 = 15 \times 16 = 240,$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

같은 방법으로 $(ax^3 + bx^{-2})^{5n}$의 일반항은

$$\binom{5n}{r}\left(ax^3\right)^{5n-r}\left(bx^{-2}\right)^r = \binom{5n}{r}a^{5n-r}b^r\,x^{15n-5r}.$$

$x$의 지수는 $15n = 5r$일 때 0이므로 $r = 3n$이다(이 값은 $0 \le r \le 5n$ 안에 있다). 따라서 $x$와

무관한 항은

$$\binom{5n}{3n} a^{2n} b^{3n} = \frac{(5n)!}{(2n)!\,(3n)!}\, a^{2n} b^{3n}.$$

**소문항 (ii)**

**$|x|$가 클 때.** 인수 $x^6$을 묶어 내면

$$f(x) = \left(x^6(1+3/x)\right)^{1/2} = x^3\Big(1+\frac{3}{x}\Big)^{1/2},$$

이다. 여기서 문제의 의도대로 $(x^6)^{1/2} = x^3$으로 둔다(엄밀히는 $|x|^3$이다. 아래의 설명을 보라). $|x| > 3$이면 $|3/x| < 1$이므로, $u = 3/x$로 둔 $(1+u)^{1/2}$의 이항급수(binomial series)는 수렴(converges)한다.

$$(1+u)^{1/2} = 1 + \tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{8}u^2 + \tfrac{1}{16}u^3 - \tfrac{5}{128}u^4 + \cdots,$$

여기서 $u^3$의 계수는

$$\binom{1/2}{3} = \frac{\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{3}{2})}{3!} = \frac{3/8}{6} = \frac{1}{16}.$$

급수에 $x^3$을 곱하면 항 $\binom{1/2}{k}3^k x^{-k}$는 $\binom{1/2}{k}3^k x^{3-k}$가 되므로, 상수를 주는 것은 $k = 3$뿐이다.

$$f(x) = x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{9}{8}x + \frac{1}{16}\cdot 27 - \frac{405}{128x} + \cdots,$$

따라서 $x$와 무관한 항은 $\frac{27}{16}$이고, 원하는 결과를 얻는다.

**?** **생각해 보기** $x < -3$이면 어떻게 되는가?

제곱근은 음이 아닌 근을 뜻하며, $(x^6)^{1/2} = |x|^3$이고 이는 $x < 0$일 때 $-x^3$과 같다. 따라서 $x < -3$이면 전개의 모든 항의 부호가 바뀌고, 상수항은 $-\frac{27}{16}$이 된다. 주어진 결과 $\frac{27}{16}$은 $x > 3$일 때 정확히 맞고, $x < -3$일 때는 $(x^6)^{1/2}$를 $x^3$으로 읽으면 성립하는데, 이것이 분명히 문제의 의도이다.

**$|x|$가 작을 때.** 이제 괄호 안에서 지배적인 항은 $3x^5$이므로 대신 그것을 묶어 낸다.

$$x^6 + 3x^5 = 3x^5\Big(1+\frac{x}{3}\Big).$$

$f(x)$가 실수이려면 $x^5(x+3) \geq 0$이어야 한다. $|x| < 3$이면 인수 $x+3$은 양수이므로 $x \geq 0$이어야 한다. ($-3 < x < 0$에서는 $f$가 실함수로서 아예 정의되지 않는다.) $0 < x < 3$일 때

$$f(x) = \sqrt{3}\,x^{5/2}\Big(1+\frac{x}{3}\Big)^{1/2} = \sqrt{3}\,x^{5/2}\sum_{k\geq 0}\binom{1/2}{k}\frac{x^k}{3^k},$$

이고, $|x/3| < 1$이므로 이 급수는 수렴한다. 모든 항은

$$x^{5/2+k}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

의 상수배이고, $\frac{5}{2}+k$는 결코 정수가 아니므로 특히 0이 될 수 없다. 따라서 $|x|<3$에서 $f(x)$를 $x$의 거듭제곱으로 전개한 식에는 $x$와 무관한 항이 없다. ($x=0$ 자체에서는 $f(0)=0$이다.)

## 검산

- 큰 양수 $x$에 대해 $f(x)-\left(x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{9}{8}x\right)$는 $\frac{27}{16}=1.6875$에 가까워져야 한다. $x=1000$에서 계산기로 구하면 1.68434이고, 급수의 다음 항 $-\frac{405}{128x}\approx -0.00316$이 그 차이를 설명한다.
- 0 근처에서 $f(x)\approx\sqrt{3}\,x^{5/2}$이다. $x=0.01$에서 $f(0.01)=\sqrt{10^{-12}+3\times10^{-10}}\approx 1.734\times10^{-5}$으로 $\sqrt{3}\times10^{-5}$에 가깝고, 0이 아닌 상수로 다가가지 않는 것은 분명하다.
- 일반 공식에서 $n=1$, $a=b=1$로 두면 $\binom{5}{3}=10$을 얻는데, 이는 $(x^3+x^{-2})^5$의 상수항이다. 직접 전개해 보면 확인된다.

## 흔한 실수

- 일반항의 지수를 반대로 적어서, 예를 들어 $(2x)^r(x^{-2})^{6-r}$으로 쓰고 나서 $r$과 이항계수(binomial coefficient)를 엇갈리게 맞추는 것. 일관되게만 쓴다면 어느 쪽으로 번호를 붙여도 된다.
- $\binom{1/2}{3}$의 부호를 틀리는 것. 두 음수 인수 $(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})$ 때문에 양수가 된다.
- 작은 $x$에 대해 $(x^6+3x^5)^{1/2}$를 $x^6$을 묶어 내어 전개하는 것. 그러면 $3/x$에 대한 급수가 나오는데, 이는 $|x|<3$일 때 발산(diverges)한다.

## STEP 너머

$f$의 두 전개는 서로 다른 영역에서 유효하며, 어떤 인수를 묶어 내느냐가 어느 영역을 얻는지를 결정한다. 이것은 함수를 서로 다른 점을 중심으로 전개한다는 아이디어이며, 복소해석학(complex analysis)에서 로랑 급수(Laurent series)와 퓌죄 급수(Puiseux series, 여기의 $x^{5/2+k}$처럼 분수 지수의 거듭제곱으로 전개한 것)로 이어진다. $x<-3$에서 부호 문제를 일으킨 제곱근의 분지(branch) 역시 그 분야의 중심 주제이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 두 가지를 모두 그림으로 설명한다.

풀이

# STEP I 2003, 문제 6

순수수학 • 부분분수를 이용한 적분

> **STEP I 2003, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q6

## 핵심 아이디어

두 이차식(quadratic) 모두 인수분해(factorise)되므로, 자연스러운 도구는 부분분수(partial fractions)이다. "여러 경우"는 두 일차 인수가 일치하는 순간에서 생긴다. 이때는 부분분수가 성립하지 않으므로 대신 완전제곱식(perfect square)을 적분한다. 소문항 (ii)를 시작하기 전에 두 이차식을 잘 살펴보아라. 변수를 간단히 평행이동하면 한 식이 다른 식으로 바뀐다.

## 풀이

### 소문항 (i)

$2 \times a = 2a$이고 $2 + a = a + 2$이므로 이차식은 다음과 같이 인수분해된다.

$$x^2 + (a+2)x + 2a = (x+2)(x+a).$$

$a > 0$이므로 $0 \le x \le 1$에서 두 인수는 모두 양수이다. 따라서 피적분함수(integrand)는 구간 전체에서 연속(continuous)이고, 모든 $a > 0$에 대하여 적분이 존재한다. 두 인수는 정확히 $a = 2$일 때 같아지며, 이것이 경우를 나누는 기준이 된다.

**$a \neq 2$인 경우.** 두 인수는 서로 다르고,

$$\frac{1}{(x+2)(x+a)} = \frac{1}{a-2}\left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+a}\right),$$

이다. 이는 통분하여 확인할 수 있다. 분자가 $(x+a) - (x+2) = a - 2$가 된다. $[0,1]$에서

$x+2$와 $x+a$가 모두 양수이므로 로그에 절댓값 기호(modulus signs)가 필요 없다.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)(x+a)} &= \frac{1}{a-2}\Big[\ln(x+2)-\ln(x+a)\Big]_0^1 \\ &= \frac{1}{a-2}\Big(\ln 3-\ln(1+a)-\ln 2+\ln a\Big) \\ &= \frac{1}{a-2}\ln\left(\frac{3a}{2(a+1)}\right).\end{aligned}$$

**생각해 보기** $0<a<2$이면 인수 $\frac{1}{a-2}$는 음수이다. 피적분함수가 양수이므로 답은 양수여야 하는데, 그래도 답이 양수인가?

그렇다. $\dfrac{3a}{2(a+1)}<1 \iff 3a<2a+2 \iff a<2$이므로, $0<a<2$이면 로그도 음수가 되어 몫은 양수이다. 마찬가지로 $a>2$이면 둘 다 양수이다. 모든 부분이 양수인 형태를 원한다면, $0<a<2$일 때의 답을 $\dfrac{1}{2-a}\ln\left(\dfrac{2(a+1)}{3a}\right)$로 쓰면 된다. 이는 같은 값이다.

**$a=2$인 경우.** 이제 피적분함수는 $(x+2)^{-2}$이고,

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2} = \left[-\frac{1}{x+2}\right]_0^1 = -\frac{1}{3}+\frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

**소문항 (ii)**

여기서 이차식은 $u^2+au+a-1=(u+1)(u+a-1)$이다. 하지만 같은 계산을 반복하기 전에 $u=x+1$로 치환(substitution)해 보자.

$$(x+1)^2+a(x+1)+a-1 = x^2+(a+2)x+2a.$$

이는 정확히 소문항 (i)의 이차식이다. 또한 $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$이고, $u=1,2$는 $x=0,1$에 대응한다. 따라서

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}u}{u^2+au+a-1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+(a+2)x+2a},$$

이고, 답은 소문항 (i)과 같다.

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}u}{u^2+au+a-1} = \begin{cases}\dfrac{1}{a-2}\ln\left(\dfrac{3a}{2(a+1)}\right), & a\neq 2, \\ \dfrac{1}{6}, & a=2.\end{cases}$$

직접 계산할 수도 있다. $[1,2]$에서 $u+1>0$이고 $u+a-1\geq a>0$이므로 피적분함수는 역시 연속이며, 두 인수는 정확히 $a-1=1$, 즉 $a=2$일 때 일치한다. 부분분수를 이용하면 $\frac{1}{a-2}\big[\ln\frac{u+1}{u+a-1}\big]_1^2 = \frac{1}{a-2}\big(\ln\frac{3}{a+1}-\ln\frac{2}{a}\big)$를 얻는데, 이는 같은 식이다.

## 검산

- **$a = 2$에서의 연속성.** $a \to 2$일 때 로그는 $\ln 1 = 0$으로 수렴하므로, 공식은 $0/0$ 꼴이 된다. 그 극한(limit)은 $a = 2$에서 $\ln 3a - \ln(2a+2)$의 미분계수(derivative), 즉 $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$이고, 이는 특수한 경우의 값과 일치한다. 두 경우는 마땅히 그래야 하듯 매끄럽게 이어진다.
- **특수한 값.** $a = 1$이면 (i)의 피적분함수는 $\frac{1}{(x+1)(x+2)}$이고, 공식은 $-\ln\frac{3}{4} = \ln\frac{4}{3} \approx 0.2877$을 준다.
- **수치 계산.** $a = 1$, $a = 2$, 0과 2에 가까운 $a$, 그리고 20 이하의 무작위 $a$ 값 200개에 대하여 두 적분에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면, 공식과 $10^{-10}$보다 작은 오차로 일치한다.

## 흔한 실수

- 부분분수 계수 $\frac{1}{a-2}$가 정의되지 않는 $a = 2$인 경우를 빠뜨린다.
- 부분분수의 부호를 반대로 쓴다. 통분하여 확인하라.
- $0 < a < 2$와 $a > 2$를 정말로 다른 답으로 취급한다. 부호를 잘 따라가기만 하면 하나의 공식으로 두 경우를 모두 나타낼 수 있다.

## STEP 너머

$a = 2$에서의 현상은 제거 가능한 특이점(removable singularity)의 작은 예이다. 어떤 점에서 정의되지 않는 것처럼 보이지만, 그 점에서의 극한이 정확히 적분값과 같은 공식이다. 해석학(analysis)에서는 매개변수(parameter)에 의존하는 적분이 언제 그 매개변수에 대하여 연속(또는 미분가능)인지를 배우는데, 이것이 두 경우가 일치해야만 했던 이유를 설명해 준다. Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)는 극한, 연속, 리만 적분(Riemann integral)을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

# STEP I 2003, 문제 7

순수수학 • 자릿수와 나누어떨어짐

**STEP I 2003, 7번 문제**

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/03-s1-q7

## 핵심 아이디어

$N = 100a + 10b + c$로 쓰고 $S = N$으로 놓으면 세 자릿수에 대한 방정식 하나를 얻는다. 이를

$$99a + (10b - b^2) = c^3 - c,$$

로 정리하면 첫 문단의 두 사실이 그대로 들어맞는다. $b$에 관한 항은 0과 25 사이에 갇혀 있고, $99a$와 $c^3 - c$는 모두 3의 배수이다. 첫째 사실에 따르면 $c^3 - c$는 99의 배수보다 조금 큰 값이어야 하고, 둘째 사실은 $b$가 될 수 있는 값을 줄여 준다. 그러고 나면 손으로 확인할 경우가 몇 개밖에 남지 않는다.

## 풀이

### 두 가지 예비 사실

완전제곱식(completing the square)으로 만들면

$$10k - k^2 = 25 - (5 - k)^2.$$

$(5 - k)^2 \geq 0$이므로 $10k - k^2 \leq 25$이다. $0 \leq k \leq 9$이므로 $-4 \leq 5 - k \leq 5$이고, 따라서 $(5 - k)^2 \leq 25$, 곧 $10k - k^2 \geq 0$이다. (등호는 0 쪽에서는 $k = 0$일 때, 25 쪽에서는 $k = 5$일 때 성립한다.)

다음으로, $k - 1, k, k + 1$은 연속한 세 정수이므로 그중 정확히 하나가 3의 배수이다. 따라서 이들의 곱 $k(k - 1)(k + 1)$은 3으로 나누어떨어진다. (이는 $0 \leq k \leq 9$일 때뿐 아니라 모든 정수 $k$에 대하여 성립한다.)

## 수 찾기

$N = 100a + 10b + c$라 하자. 여기서 각 자리의 숫자는 $1 \le a \le 9$ ($N \ge 100$이므로), $0 \le b, c \le 9$이다. 그러면 $S = a + b^2 + c^3$이고

$$\begin{aligned} S = N &\iff a + b^2 + c^3 = 100a + 10b + c \\ &\iff 99a + (10b - b^2) = c^3 - c = (c-1)c(c+1). \qquad (*) \end{aligned}$$

**?** **생각해 보기** 왜 $10b - b^2$을 $99a$와 같은 쪽에 두는가?

그것이 바로 방금 다루는 법을 익힌 조합이기 때문이다. $t = 10b - b^2$이라 하면 첫째 사실에 의해 $0 \le t \le 25$이고, $99a$는 25보다 훨씬 큰 99의 배수이다. 따라서 $(*)$는 $c^3 - c$가 99의 배수에 작은 "나머지" $t$를 더한 값이라는 뜻이고, 이 덕분에 경우가 매우 빠르게 좁혀진다.

**$b$의 범위 좁히기.** 둘째 사실에 의해 3은 $c^3 - c = (c-1)c(c+1)$을 나누고, 3은 $99a$도 나눈다. 따라서 $(*)$에 의해 3은 $t = b(10-b)$를 나눈다. $10 - b \equiv 1 - b \pmod 3$이므로 $b \equiv 0$ 또는 $b \equiv 1 \pmod 3$이어야 한다. 가능한 경우는

| $b$ | 0 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t = 10b - b^2$ | 0 | 9 | 21 | 24 | 24 | 21 | 9 |

이므로 $t \in \{0, 9, 21, 24\}$이다. ($b = 2, 5, 8$이면 $t = 16, 25, 16$이 되어 어느 것도 3으로 나누어 떨어지지 않는다.)

**$c$의 범위 좁히기.** $a \ge 1$이고 $t \ge 0$이므로 $(*)$에서 $c^3 - c \ge 99$이다. $c^3 - c$의 값은

| $c$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c^3 - c$ | 0 | 0 | 6 | 24 | 60 | 120 | 210 | 336 | 504 | 720 |

이므로 $c \ge 5$이다.

**경우 나누기.** 각 $c \ge 5$에 대하여 구간 $[c^3 - c - 25,\ c^3 - c]$ 안에 놓이는 배수 $99a$ (단, $1 \le a \le 9$)가 있어야 하고, 이때 $t = c^3 - c - 99a$는 $0, 9, 21, 24$ 중 하나여야 한다.

- $c = 5$: $c^3 - c = 120$. $[95, 120]$ 안에 있는 99의 배수는 99뿐이므로 $a = 1$, $t = 21$이고, 따라서 $b = 3$ 또는 $b = 7$이다. 이로부터 $N = 135$와 $N = 175$를 얻는다.
- $c = 6$: $c^3 - c = 210$. $[185, 210]$ 안에 있는 99의 배수는 198뿐이므로 $a = 2$, $t = 12$이다. 그런데 12는 $0, 9, 21, 24$ 중 어느 것도 아니다 (실제로 $10b - b^2 = 12$는 정수근을 갖지 않는다). 해가 없다.
- $c = 7$: $c^3 - c = 336$. 가까운 배수는 297과 396인데, 둘 다 $[311, 336]$ 안에 있지 않다. 해가 없다.
- $c = 8$: $c^3 - c = 504$. $[479, 504]$ 안에 있는 99의 배수는 495뿐이므로 $a = 5$, $t = 9$이고, 따라서 $b = 1$ 또는 $b = 9$이다. 이로부터 $N = 518$과 $N = 598$을 얻는다.

- $c = 9$: $c^3 - c = 720$. 가까운 배수는 693과 792인데, 둘 다 $[695, 720]$ 안에 있지 않다. 해가 없다.

위의 모든 단계는 거꾸로도 성립하므로 이 네 수는 실제로 $S = N$을 만족한다. 직접 확인하면

$$135 : 1 + 3^2 + 5^3 = 1 + 9 + 125 = 135, \quad 175 : 1 + 7^2 + 5^3 = 1 + 49 + 125 = 175,$$
$$518 : 5 + 1^2 + 8^3 = 5 + 1 + 512 = 518, \quad 598 : 5 + 9^2 + 8^3 = 5 + 81 + 512 = 598.$$

따라서 $S = N$을 만족하는 수는 정확히

$$N = 135, \quad 175, \quad 518, \quad 598.$$

이다.

## 검산

세 자리 수 900개 모두에 대하여 $a + b^2 + c^3$을 계산하는 전수 조사(brute-force search)를 하면 정확히 135, 175, 518, 598을 얻으며, 이는 경우 나누기의 결과와 일치한다. 구조적으로 깔끔한 확인 방법도 있다. 각 쌍에서 두 $b$ 값의 합은 10이다 ($3 + 7$과 $1 + 9$). 이는 필연적인데, $b$를 $10 - b$로 바꾸어도 $t = 10b - b^2$이 변하지 않기 때문이다.

## 흔한 실수

- $a \geq 1$임을 잊고, 세 자리 수가 아닌 000이나 001 같은 "해"를 받아들이는 실수.
- 주어진 $a$와 $c$에 대하여 $b$를 하나 찾고 멈추는 실수: $t(b) = t(10 - b)$이므로 해는 쌍으로 나타난다.
- 3으로 나누어떨어진다는 사실만 쓰고 범위 $0 \leq t \leq 25$를 쓰지 않는 실수: 각 $c$에 대하여 가능한 $a$를 많아야 하나로 줄여 주는 것은 바로 이 범위이다.

## STEP 너머

자기 자신의 각 자리 숫자의 거듭제곱으로 만든 합과 같아지는 수는 고전적인 수학 놀이의 소재이다 ($153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$과 같은 암스트롱 수(Armstrong number), 곧 "나르시시스트 수(narcissistic number)"가 가장 잘 알려진 예이다). 그 밑에 깔린 진지한 아이디어는 여기서 쓴 것과 같다. 양변의 크기를 제한하여 탐색을 유한하게 만든 다음, 합동식(congruence)을 이용해 경우를 쳐내는 것이다. 크기 추정과 모듈러 연산(modular arithmetic)을 이렇게 짝지어 쓰는 방법은 많은 디오판토스 방정식(Diophantine equation)을

푸는 원동력이 된다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 합동식과 그 활용을 훌륭하게 소개하는 책이다.

풀이

# STEP I 2003, 문제 8

순수수학 • 로지스틱 미분방정식

> **STEP I 2003, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q8

## 핵심 아이디어

"$A$가 $B$로 바뀌는 비율"을 도함수(derivative)로 옮긴다. 이것은 $B$의 부피가 증가하는 비율이다. $x = 1 - y$이므로, 이로부터 $y$만으로 이루어진 변수분리형(separable variables) 미분방정식(differential equation)을 얻고, 부분분수(partial fractions)로 적분을 마무리한다. 마지막 부분은 $x = 1 - y$에 대한 식이 언젠가 0이 될 수 있는지를 묻는 것이며, 그 답은 지수함수(exponential)가 결코 무한대가 되지 않는다는 사실에 달려 있다.

## 풀이

### 방정식 세우기

$B$의 부피는 $yV$이고, $V$는 일정하다. $A$는 $kVxy$의 비율로 $B$로 바뀌므로, $B$의 부피는 그 비율로 증가한다:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(yV) = kVxy \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = kxy = ky(1-y),$$

여기서 $V$로 나누고 $x = 1 - y$를 이용하였다. (같은 이야기로, $A$의 부피는 이 비율로 줄어든다: $V\,\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = -kVxy$이며, $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = -\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$이므로 이는 같은 내용이다.)

### 방정식 풀기

처음에 $x > 0$이고 $y > 0$이므로 $0 < y < 1$이다. $0 < y < 1$인 동안에는 $y(1-y)$로 나누어 변수를 분리할 수 있다:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y(1-y)} = \int k\,\mathrm{d}t.$$

부분분수로 $\dfrac{1}{y(1-y)} = \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{1-y}$이므로

$$\ln y - \ln(1-y) = kt + c,$$
$$\ln \frac{y}{1-y} = kt + c,$$

이다. 여기서 $y$와 $1-y$가 모두 양수라는 사실을 이용했으므로 절댓값 기호는 필요 없다. 양변에 지수함수를 취하고 $D = \mathrm{e}^c$로 쓰면

$$\frac{y}{1-y} = D\mathrm{e}^{kt}.$$

그러면 $y = D\mathrm{e}^{kt} - yD\mathrm{e}^{kt}$이므로 $y\left(1 + D\mathrm{e}^{kt}\right) = D\mathrm{e}^{kt}$이고

$$y = \frac{D\mathrm{e}^{kt}}{1 + D\mathrm{e}^{kt}},$$

즉 요구된 식을 얻는다. $t = 0$을 대입하면 $D = \dfrac{y_0}{1-y_0} = \dfrac{y_0}{x_0}$임을 알 수 있다. 여기서 $x_0$과 $y_0$은 초깃값이다. 특히 $D > 0$이다.

**생각해 보기** 적분을 하기 위해 $0 < y < 1$이라고 가정하였다. 이것이 모든 시간에 대해 계속 성립한다는 것을 어떻게 알 수 있을까?

그렇지 않다고 가정하고, $y$가 처음으로 0 또는 1에 도달하는 시각을 $T$라 하자. $0 \le t < T$에서는 위의 풀이가 유효하므로, 그 구간에서 $y$는 위의 식으로 주어진다. $y$는 연속(continuous)이므로 $y(T)$는 $t \to T$일 때 그 식의 극한(limit), 즉 $D\mathrm{e}^{kT}/\left(1 + D\mathrm{e}^{kT}\right)$이다. $D > 0$이므로 이 값은 0과 1 사이에 엄격하게 놓이며, 이는 모순이다. 따라서 모든 $t$에 대해 $0 < y < 1$이고, 위의 식은 모든 $t$에 대해 성립한다.

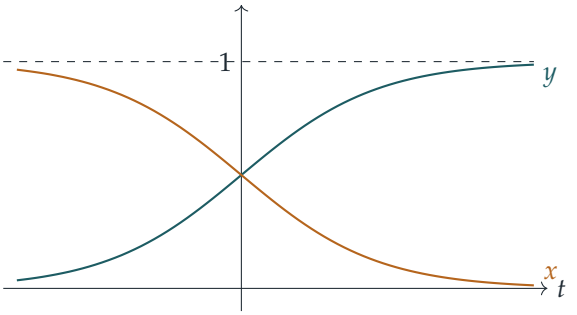
### $A$는 언젠가 완전히 바뀌는가?

그렇지 않다. 위의 식으로부터

$$x = 1 - y = \frac{1}{1 + D\mathrm{e}^{kt}},$$

이고, 모든 $t$에 대해 $D\mathrm{e}^{kt}$는 유한하므로 모든 시각에서 $x > 0$이다. 즉 $A$의 일부는 항상 남아 있다. 그러나 $t \to \infty$일 때 ($k > 0$이고 $D > 0$이므로) $D\mathrm{e}^{kt} \to \infty$이고, 따라서 $x \to 0$, $y \to 1$이다. 변환은 완료에 한없이 가까워지지만 유한한 시간 안에 끝나지는 않는다.

이는 물리적으로도 타당하다. 반응 속도 $kVxy$는 남아 있는 $A$의 양에 비례하므로, $A$가 줄어들수록 반응이 느려진다.




그림($D = k = 1$인 경우)은 1에 다가가는 $y$의 $S$자 모양 로지스틱 곡선(logistic curve)과 0에 다가가는 $x$의 곡선을 보여 준다. 두 곡선 모두 결코 극한값에 도달하지 않는다.

## 검산

- 답을 미분해 본다: $u = De^{kt}$로 두면 $y = u/(1+u)$이고 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = ku/(1+u)^2 = ky(1-y)$이므로 예상대로이다.
- $D = k = 1$일 때(즉 같은 부피에서 시작할 때) 식은 $t = \ln 3$에서 $y = \frac{3}{4}$를 준다. 또한 $k$와 초깃값을 무작위로 200번 골라 방정식을 수치적으로 단계별로 계산해 보았는데, 결과가 식과 $10^{-12}$ 이내로 일치했고 $x$는 내내 양수로 유지되었다.

## 흔한 실수

- "극한에서 $y = 1$"을 "어떤 시각에 $y = 1$"로 여기는 것. $t \to \infty$일 때의 극한은 어떤 유한한 시각에서도 실제로 도달되지 않는다.
- $\ln(y/(1-y))$ 단계에 $0 < y < 1$이 필요하다는 것을 잊거나, 그 조건이 왜 계속 유지되는지 말하지 않는 것.

## STEP 너머

방정식 $\dot{y} = ky(1-y)$는 로지스틱 방정식(logistic equation)으로, 자원에 의해 제한되는 성장을 나타내는 표준 모형이다. 여기서 $y = 0$과 $y = 1$은 평형해(equilibrium solution)이며, 미분방정식의 유일성 정리(uniqueness theorem)에 따르면 다른 어떤 해도 이들과 교차하거나 맞닿을 수 없다. 이것이 마지막 부분을 해결하는 더 깔끔한 방법이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)은 로지스틱 방정식과 이런 종류의 안정성 분석을 자세히 다룬다.

풀이

# STEP I 2003, 문제 9

역학 • 한 점을 지나는 포물체

**STEP I 2003, 9번 문제**

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

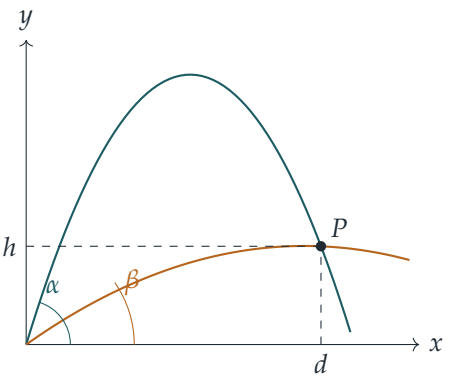
step.maths.org/questions/03-s1-q9

## 핵심 아이디어

수평 변위와 수직 변위를 적고, 시간을 소거한 다음 $\sec^2\theta$를 $1+\tan^2\theta$로 바꾼다. 그러면 궤적(trajectory)의 방정식은 $T=\tan\theta$에 대한 이차방정식이 된다. 그 뒤로는 모든 것이 이 이차방정식에 관한 문제이다. 각이 두 개라는 것은 서로 다른 두 실근(real root)이 있다는 뜻이므로 판별식(discriminant)을 살펴본다. 그리고 $\alpha+\beta$는 $\tan(\alpha+\beta)$의 공식을 통해 두 근의 합과 곱으로 결정된다.

## 풀이

입자는 중력만 받으며 자유롭게 움직인다고(공기 저항(air resistance)은 없다고) 모형화하고, 원점을 발사 지점으로, $x$축을 $P$ 쪽을 향하는 수평 방향으로, $y$축을 연직 위쪽으로 잡는다. 따라서 $P$는 $d>0$인 점 $(d,h)$이다. $h>0$, 즉 $P$가 발사 지점보다 위에 있다고 하자. $h\le 0$인 경우는 마지막에 다시 다룬다.



### $T$에 대한 이차방정식

수평 속도는 $V\cos\theta$로 일정하고, 수직 운동은 일정한 가속도 $-g$를 가지므로 시각 $t$에서

$$x = Vt\cos\theta, \qquad y = Vt\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

이다. 입자는 시각 $t = d/(V\cos\theta)$에 $x = d$에 도달한다(입자가 $P$ 쪽으로 움직이므로 여기서 $\cos\theta > 0$이다). 이것을 $y$에 대입하고 $y = h$로 놓으면, $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$를 이용하여

$$h = d\tan\theta - \frac{gd^2}{2V^2\cos^2\theta} = dT - \frac{gd^2}{2V^2}\left(1 + T^2\right),$$

를 얻는다. 이제 양변에 $\dfrac{2V^2}{gd^2} = \dfrac{2k}{d}$를 곱하면

$$\frac{2kh}{d} = 2kT - \left(1 + T^2\right), \qquad \text{즉,} \qquad T^2 - 2kT + \frac{2kh}{d} + 1 = 0,$$

이 되어 원하는 식을 얻는다.

### 서로 다른 두 각

주어진 $V$(따라서 주어진 $k$)에 대하여, 가능한 발사각은 탄젠트 값이 이 이차방정식의 근이 되는 $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$이다. 이 구간에서 tan는 순증가하므로, 서로 다른 실근 $T$는 서로 다른 각을 준다. 따라서 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가져야 하며, 이는 판별식이 양수일 때와 정확히 일치한다.

$$4k^2 - 4\left(\frac{2kh}{d} + 1\right) > 0 \iff k^2d^2 - 2h(kd) - d^2 > 0 \iff (kd - h)^2 > h^2 + d^2,$$

여기서는 $d^2 > 0$을 곱한 뒤 $kd$에 대하여 완전제곱식을 만들었다(completing the square).

> **생각해 보기** 부등식을 제곱하면 잘못될 수 있는데, 주어진 조건이 왜 $(kd - h)^2 > h^2 + d^2$을 함의하는가?

$kd > h + \sqrt{h^2 + d^2}$이면 $kd - h > \sqrt{h^2 + d^2} > 0$이다. 양변이 모두 양수이므로 제곱해도 부등식이 유지된다: $(kd - h)^2 > h^2 + d^2$. 따라서 판별식이 양수이고 서로 다른 두 근 $T$가 존재하므로, 서로 다른 두 발사각이 존재한다.

(역(converse)도 성립한다. $(kd - h)^2 > h^2 + d^2$이 되는 다른 경우는 $kd < h - \sqrt{h^2 + d^2}$이지만, $\sqrt{h^2 + d^2} > |h|$이므로 우변은 음수인 반면 $kd = V^2/g > 0$이다. 따라서 두 각이 가능한 것은 **정확히** $kd > h + \sqrt{h^2 + d^2}$일 때이다.)

두 각은 모두 실제로 수평선 **위쪽**을 향한다. 두 근의 합은 $2k > 0$이고 곱은 $1 + 2kh/d > 0$($h > 0$이므로)이므로 두 근은 모두 양수이다.

### 두 각의 합

두 근을 $\tan\alpha$와 $\tan\beta$라 하자. 이차방정식으로부터

$$\tan\alpha + \tan\beta = 2k, \qquad \tan\alpha\tan\beta = 1 + \frac{2kh}{d}.$$

이다. 곱은 1이 아니므로($kh/d \neq 0$이므로) $\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2}$이고, 덧셈정리(compound-angle formula)를 적용할 수 있다.

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{2k}{-2kh/d} = -\frac{d}{h}.$$

$k$가 약분되어 사라졌다는 점에 주목하자. 두 각의 합은 속력에 의존하지 않는다.

**생각해 보기** $\tan(\alpha+\beta) = -d/h$는 무수히 많은 해를 가진다. 그중 어느 것이 $\alpha+\beta$인가?

$\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$임을 보였으므로 $0 < \alpha+\beta < \pi$이다. 게다가 $\tan(\alpha+\beta) < 0$이므로 $\alpha+\beta$는 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$에 속한다. $\arctan(d/h) \in (0, \frac{\pi}{2})$이고 $\tan(\pi - u) = -\tan u$이므로, $(\frac{\pi}{2}, \pi)$에서 탄젠트 값이 $-d/h$인 유일한 각은 $\pi - \arctan(d/h)$이다. 그러므로

$$\alpha + \beta = \pi - \arctan\left(\frac{d}{h}\right),$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

이를 보는 멋진 방법이 있다. $\arctan(d/h)$는 $OP$와 연직 위쪽 방향이 이루는 각이므로, $P$의 앙각(angle of elevation)을 $\gamma$라 하면 $\pi - \arctan(d/h) = \frac{\pi}{2} + \gamma$이다. 그러면 $\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2}$이다. 즉, 두 발사 방향은 $OP$와 연직선이 이루는 각의 이등분선에 대하여 대칭이다.

## 검산

- $h = 0$이면(목표물이 같은 높이에 있으면) 공식은 $\alpha+\beta = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$를 준다. 이는 같은 수평 도달 거리를 주는, 익히 알려진 서로 여각인 두 각이다.
- $d = 3, h = 4, k = 4$로 잡자. 그러면 $kd = 12 > 4 + 5$이고, 근은 $T = 4 \pm \sqrt{13/3}$이며 $\alpha \approx 1.4078$, $\beta \approx 1.0903$이다. 따라서 $\alpha+\beta \approx 2.4981$이고, 이는 $\pi - \arctan(0.75) \approx 2.4981$과 같다.
- 수천 개의 무작위 $d, h, k$에 대하여 두 각 각각으로 비행을 수치 시뮬레이션하면 궤적이 $(d, h)$를 지나며, 조건과 두 각의 합이 모두 확인된다.

## 흔한 실수

- $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$를 잊어서 $T$에 대한 이차방정식에 이르지 못한다.

- $\alpha + \beta = \arctan(-d/h) = -\arctan(d/h)$라고 쓰는데, 이 값은 음수이다. 역탄젠트(inverse tangent)는 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$의 각만 돌려주므로, $\alpha + \beta$의 범위를 이용하여 올바른 분지(branch)를 골라야 한다.
- $h < 0$인 경우(목표물이 발사 지점보다 아래에 있는 경우)를 주의 없이 다룬다. 이때는 한 근이 음수일 수 있으며, 올바른 일반적인 명제는 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + \arctan(h/d)$이다. 이것은 $h > 0$일 때에만 문제에 주어진 형태와 일치한다.

## STEP 너머

두 각이 하나로 합쳐지는 경계의 경우 $kd = h + \sqrt{h^2 + d^2}$는 속력 $V$로 발사한 모든 궤적의 **포락선**(envelope)을 그린다. 이것이 "안전 포물선(parabola of safety)" $y = \dfrac{V^2}{2g} - \dfrac{gx^2}{2V^2}$이다. 그 안쪽의 점은 두 가지 방법으로, 그 위의 점은 한 가지 방법으로 맞힐 수 있고, 바깥쪽의 점은 전혀 맞힐 수 없다. 곡선족의 포락선은 방정식과 그 방정식을 매개변수에 대해 미분한 식을 동시에 풀어서 구하는데, 이는 미분방정식(differential equations)과 광학(optics)에서 다시 등장한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 포물체 운동과 구속 운동을 이와 같은 세심함으로 전개한다.

풀이

# STEP I 2003, 문제 10

역학 • 얇은 판의 질량중심

**STEP I 2003, 10번 문제**

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/03-s1-q10

## 핵심 아이디어

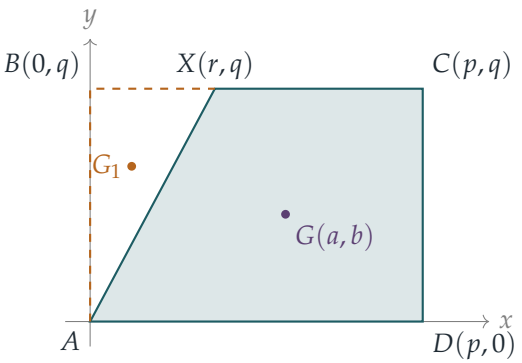
한 조각이 잘려 나간 도형은 **빼기**로 다루는 것이 가장 좋다. 각 축에 대한 직사각형의 모멘트(moment)는 사다리꼴(trapezium)의 모멘트와 삼각형의 모멘트의 합과 같고, 이때 질량은 넓이에 비례한다. 매다는 상황에서는, 한 점에 자유롭게 매달린 박판(lamina)이 그 점의 바로 아래에 무게중심(centre of gravity)이 오도록 정지하므로, 선분 $AG$는 연직이다. 그러면 $45^\circ$ 조건은 $a$와 $b$ 사이의 매우 간단한 관계로 바뀐다.

## 풀이

박판이 균일하고 얇다고 모형화하므로, 각 조각의 질량은 그 넓이에 비례하고 삼각형의 무게중심은 그 도심(centroid, 세 꼭짓점의 평균)에 있다.

### 무게중심

주어진 좌표축에서 $A = (0,0)$, $D = (p,0)$, $C = (p,q)$이므로 $B = (0,q)$이다. $X$는 $BC$ 위에 있고 $BX = r$이므로 $X = (r,q)$이며, 여기서 $0 \le r \le p$이다.




세 조각은 다음과 같다.

- 직사각형 $ABCD$: 넓이 $pq$, 무게중심 $(\frac{p}{2}, \frac{q}{2})$.
- 잘려 나간 삼각형 $ABX$: 넓이 $\frac{1}{2}qr$, 무게중심 $G_1$은 $(0,0)$, $(0,q)$, $(r,q)$의 평균인 $(\frac{r}{3}, \frac{2q}{3})$.
- 남은 사다리꼴 $AXCD$: 넓이 $pq - \frac{1}{2}qr = \frac{1}{2}q(2p-r)$, 무게중심 $G = (a,b)$.

각 축에 대한 직사각형의 모멘트는 두 부분의 모멘트의 합이다. $y$축에 대한 모멘트를 취하면(즉 $x$좌표를 비교하면)

$$pq \cdot \frac{p}{2} = \frac{qr}{2} \cdot \frac{r}{3} + \frac{q(2p-r)}{2}\, a.$$

양변을 $\frac{q}{2}$로 나누면 $p^2 = \frac{r^2}{3} + (2p-r)a$이고, $2p - r \geq p > 0$이므로 이것으로 나눌 수 있다.

$$a = \frac{3p^2 - r^2}{3(2p-r)}.$$

마찬가지로 $x$축에 대해서는

$$pq \cdot \frac{q}{2} = \frac{qr}{2} \cdot \frac{2q}{3} + \frac{q(2p-r)}{2}\, b,$$

이므로 $pq = \frac{2qr}{3} + (2p-r)b$이고

$$b = \frac{q(3p-2r)}{3(2p-r)}.$$

간단히 확인해 보면, $r = 0$(아무것도 잘라 내지 않음)일 때 $a = \frac{p}{2}, b = \frac{q}{2}$로 직사각형의 중심이 나온다.

### $A$에 매달기

박판이 $A$에 자유롭게 매달려 평형(equilibrium) 상태에 있을 때, 박판에 작용하는 힘은 $G$를 지나는 무게와 $A$에서의 반작용력, 이 두 가지뿐이다. 평형 상태에 있는 두 힘은 같은 직선 위에서 작용해야 하므로, $G$는 $A$의 연직 아래에 있다.

**생각해 보기** "$AD$가 수평선 아래로 45°를 이룬다"는 조건은 어떻게 $a$와 $b$에 대한 방정식이 되는가?

$AG$가 연직이고 $AD$가 수평선과 45°를 이루므로, $AD$는 $AG$와도 45°를 이룬다. 즉 각 $GAD$는 45°이다. 우리의 좌표축에서 $AD$는 $x$축의 양의 방향이고 $G = (a, b)$이며 $a, b > 0$이므로(사다리꼴 내부에 있으므로) $\tan \angle GAD = b/a$이다. 따라서 $b/a = 1$, 즉

$$a = b.$$

위의 식을 대입하고 공통인 양의 분모 $3(2p - r)$를 약분하면

$$\begin{aligned} & 3p^2 - r^2 = q(3p - 2r) \\ \iff \quad & r^2 - 2qr + 3pq - 3p^2 = 0. \end{aligned}$$

근의 공식(quadratic formula)에 의해

$$r = q \pm \sqrt{q^2 - (3pq - 3p^2)} = q \pm \sqrt{q^2 - 3pq + 3p^2}.$$

근호 안의 값은 $(q - \frac{3}{2}p)^2 + \frac{3}{4}p^2 > 0$이므로 두 근은 서로 다른 실근이다. $s = \sqrt{q^2 - 3pq + 3p^2} > 0$이라 하자.

**부호 고르기.** $X$는 길이가 $p$인 변 $BC$ 위에 있으므로 $0 \le r \le p$이어야 한다. 근 $q + s$가 항상 $p$보다 큼을 보이자.

- $q \ge p$이면, $s > 0$이므로 $q + s > q \ge p$이다.
- $q < p$이면 $p - q > 0$이고

  $$s^2 - (p - q)^2 = (q^2 - 3pq + 3p^2) - (p^2 - 2pq + q^2) = 2p^2 - pq = p(2p - q) > 0,$$

  이다. $q < p < 2p$이기 때문이다. 따라서 $s > p - q$이고, 그러므로 $q + s > p$이다.

어느 경우든 양의 부호를 택하면 $X$가 $C$를 넘어 박판 밖에 놓이게 되므로 불가능하다. 따라서

$$r = q - \sqrt{q^2 - 3pq + 3p^2},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

덧붙이자면, 이 근이 실제로 $[0, p]$에 속하는 것은 정확히 $p \le q \le 2p$일 때이다. 실제로 $q - s \ge 0 \iff q^2 \ge s^2 \iff 3p(q - p) \ge 0 \iff q \ge p$이고, ($q > p$일 때) $q - s \le p \iff (q - p)^2 \le s^2 \iff p(2p - q) \ge 0 \iff q \le 2p$이다. 따라서 문제에서 묘사한 상황은 이러한 도형에서만 일어날 수 있으며, 이는 직관과도 맞는다. 자르지 않은 정사각형($q = p, r = 0$)은 한 꼭짓점에 매달면 대각선이 연직이 되고, 반대쪽 극단($q = 2p$, $r = p$)에서 도형은 직각삼각형 $ACD$가 되는데, 그 도심 $(\frac{2p}{3}, \frac{q}{3})$도 역시 $a = b$를 만족한다.

## 검산

- $r = 0$으로 두면 직사각형의 중심 $(\frac{p}{2}, \frac{q}{2})$가 다시 나오고, $r = p$이면 삼각형 $ACD$의 도심 $(\frac{2p}{3}, \frac{q}{3})$가 나온다.
- $p = 1, q = 1.5$일 때 공식은 $r = 1.5 - \sqrt{0.75} \approx 0.634$를 주고, 이때 $a = b \approx 0.634$이므로 $AG$는 실제로 $AD$와 45°를 이룬다. 다른 근 $\approx 2.37$은 $p = 1$보다 크다.
- 또한 무작위로 고른 수천 개의 $p, q, r$에 대하여 무게중심 공식을 일반적인 다각형 도심 공식과 비교하여 확인하였다.

## 흔한 실수

- 삼각형의 도심을 $(\frac{r}{3}, \frac{q}{3})$로 잡는 것: 세 꼭짓점 중 두 개가 높이 $q$에 있으므로 도심의 높이는 $\frac{2q}{3}$이다.
- 삼각형의 모멘트를 빼지 않고 더하는 것: 사다리꼴은 직사각형에서 삼각형을 뺀 것이다.
- "$r$은 작아야 한다"는 막연한 이유로 양의 부호를 버리는 것. 진짜 이유는 $r \le p$이며, 이를 보이려면 $q \ge p$인지 아닌지로 경우를 나누는 짧은 논증이 필요하다.

## STEP 너머

빼기로 질량중심(centre of mass)을 구하는 것은 $\iint x\,\mathrm{d}A \big/ \iint \mathrm{d}A$를 계산하는 것의 이산적인 형태이며, 대학에서는 밀도가 변하는 박판이나 입체에 대해 이중적분(double integral)으로 같은 아이디어를 만나게 된다. 매달기 조건은 일반적인 원리의 가장 간단한 경우이다. 한 점을 축으로 고정된 강체(rigid body)는 질량중심이 축의 바로 아래에 있을 때, 즉 퍼텐셜 에너지(potential energy)가 최소일 때 안정 평형 상태에 있다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 질량중심과 강체의 평형을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

# STEP I 2003, 문제 11

역학 • 경사면 위에서의 충돌

**STEP I 2003, 11번 문제**

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/03-s1-q11

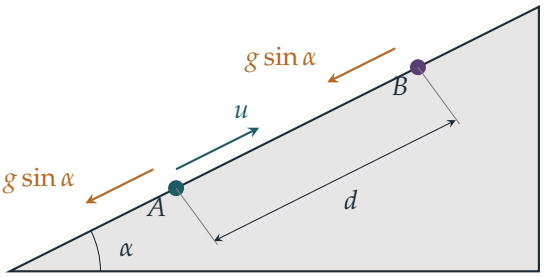
## 핵심 아이디어

매끄러운 경사면 위에서는 모든 입자가 속도와 관계없이 최대 경사선을 따라 아래쪽으로 같은 가속도 $g\sin\alpha$를 가진다. 따라서 중력은 두 입자의 **상대** 운동(relative motion)을 바꿀 수 없다. 한 입자에서 보면 다른 입자는 등속도로 움직인다. 이 덕분에 충돌 시각을 쉽게 구할 수 있고, 번거로운 운동학 계산 없이도 충돌 순간의 상대 속도를 알 수 있다. 충돌에서 잃는 에너지는 그 상대 속도에만 의존하며, 그래서 답에서 $\alpha$, $g$, $d$가 모두 사라진다.

## 풀이

### 모형

두 입자를 $A$와 $B$를 지나는 최대 경사선(line of greatest slope)을 따라 움직이는 질점(point mass)으로 다룬다. 평면이 매끄러우므로 각 입자에 작용하는 힘은 무게와 수직항력(normal reaction)뿐이다. 평면에 수직인 방향으로 힘을 분해하면 수직항력은 $mg\cos\alpha$와 평형을 이룬다. 평면을 따라 힘을 분해하면 각 입자는 경사면 아래쪽으로 가속도 $g\sin\alpha$를 가진다. $x$를 $A$에서부터 경사면 위쪽으로 잰 거리로 잡는다.



### 충돌 시각

$a = g\sin\alpha$라 하자. 경사면 위쪽을 양의 방향으로 잡으면, $A$에서 출발한 입자($P$라 하자)와 $B$에서 출발한 입자($Q$라 하자)의 위치는

$$x_P = ut - \tfrac{1}{2}at^2,$$
$$x_Q = d - \tfrac{1}{2}at^2.$$

이다. 두 입자 사이의 간격은

$$x_Q - x_P = d - ut,$$

인데, $\frac{1}{2}at^2$ 항이 소거되기 때문이다. 간격은 $d$에서부터 일정하게 줄어들며, 정확히

$$t = \frac{d}{u},$$

일 때 0이 된다. 이것이 보여야 할 내용이다. 이 소거가 바로 핵심 아이디어가 작동하는 모습이다. 두 입자가 경사면 아래로 똑같은 방식으로 떨어지므로, 처음의 상대 속력 $u$만이 중요하다.

### 운동 에너지의 손실

$t = d/u$일 때 경사면 위쪽 방향의 속도는

$$v_P = u - \frac{ad}{u}, \qquad v_Q = -\frac{ad}{u}.$$

이다. 간단히 $w = ad/u$로 쓰자. 그러면 $v_P = u - w$, $v_Q = -w$이고, $P$는 상대 속력 $v_P - v_Q = u$로 $Q$에 다가간다.

> **생각해 보기** 중력이 작용하고 있는데 왜 운동량 보존(conservation of momentum)을 쓸 수 있는가?

충돌은 순간적으로 일어난다. 아주 짧은 충돌 시간 동안 중력과 수직항력 같은 유한한 힘이 만드는 충격량(impulse)은 두 입자 사이의 큰 충격량에 비하면 무시할 수 있을 만큼 작다. 따라서 충돌에서 경사면 방향의 운동량은 보존된다.

충돌 후 경사면 위쪽 방향의 속도를 $v'_P$, $v'_Q$이라 하자. 두 질량이 같으므로 운동량 보존에 의해

$$v'_P + v'_Q = v_P + v_Q = u - 2w. \tag{1}$$

이다. 뉴턴(Newton)의 실험 법칙(Newton's experimental law)에 따르면 분리 속력은 접근 속력의 $e$배이다.

$$v'_Q - v'_P = e(v_P - v_Q) = eu. \tag{2}$$

$v'_P$과 $v'_Q$을 각각 구하는 대신 항등식

$$p^2 + q^2 = \tfrac{1}{2}\left[(p+q)^2 + (p-q)^2\right].$$

을 이용한다. 이를 충돌 전과 후에 적용하면 전체 운동 에너지는

$$\text{충돌 전 운동 에너지} = \tfrac{1}{2}m\left(v_P^2 + v_Q^2\right) = \tfrac{1}{4}m\left[(u-2w)^2 + u^2\right],$$
$$\text{충돌 후 운동 에너지} = \tfrac{1}{2}m\left(v_P'^2 + v_Q'^2\right) = \tfrac{1}{4}m\left[(u-2w)^2 + e^2u^2\right],$$

이다. 여기서 충돌 후의 합과 차에는 (1)과 (2)를 사용했다. 합에 해당하는 항은 두 식에서 같으므로

$$\text{운동 에너지 손실} = \tfrac{1}{4}mu^2 - \tfrac{1}{4}me^2u^2 = \tfrac{1}{4}mu^2\left(1-e^2\right),$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

**?** **생각해 보기** $(u-2w)^2$ 항은 물리적으로 무엇이며, 왜 변하지 않는가?

$v_P + v_Q$의 절반은 질량중심(centre of mass)의 속도이다. 항 $\frac{1}{4}m(u-2w)^2$은 전체 질량 $2m$이 그 속도로 움직일 때의 운동 에너지이며, 운동량 보존이 이 값을 고정시킨다. 잃을 수 있는 것은 질량중심에 **상대적인** 운동의 운동 에너지뿐이고, 이는 상대 속력, 즉 충돌 전의 $u$와 충돌 후의 $eu$에만 의존한다.

## 검산

- $e = 1$(완전 탄성 충돌)이면 손실은 0이며, 당연히 그래야 한다. $e = 0$이면 두 입자는 충돌 후 함께 움직이고 손실은 상대 운동의 운동 에너지 전부인 $\frac{1}{4}mu^2$이다.
- $\alpha = 0$이면 평면은 수평이고 $Q$는 정지해 있으며, $P$는 시간 $d/u$ 후에 속력 $u$로 $Q$에 도달하므로 결과와 일치한다.
- 수치로 확인해 보자. $\alpha = 30^\circ$, $g = 9.8$, $d = 2$, $u = 4$, $e = \frac{1}{2}$, $m = 1$이면 $t = 0.5$에서 두 속도는 1.55와 $-2.45$이다. 충돌 후에는 $-1.45$와 0.55가 되고, 운동 에너지는 4.2025에서 1.2025로 줄어 손실은 3이며, 이는 $\frac{1}{4}\cdot 16\cdot\frac{3}{4}$과 같다. 운동을 수치적으로 단계별 계산한 1000개의 무작위 사례 검사에서도 결과가 일치했다.

## 흔한 실수

- 충돌 순간 $Q$의 속도를 0으로 놓는 실수. $P$가 감속하는 동안 $Q$도 시간 $d/u$ 동안 경사면 아래로 미끄러져 왔다.
- 뉴턴의 법칙에서 부호를 틀리는 실수. 두 속도를 모두 같은 양의 방향으로 쓴 다음, 분리 속력 $= e \times$ 접근 속력으로 놓는다.

- $v'_P$과 $v'_Q$을 끝까지 구한 뒤 네 개의 제곱을 전개하는 것. 이 방법도 되지만, 합과 차의 항등식을 쓰면 대수 계산을 거의 다 피할 수 있다.

## STEP 너머

두 부분 모두 질량중심 좌표계(centre-of-mass frame)로 바꾸는 예이다. 균일한 중력장은 모든 입자에 같은 가속도를 주므로 상대 운동에서는 완전히 사라진다. 또한 어떤 계의 운동 에너지든 질량중심의 운동 에너지와 질량중심에 상대적인 운동 에너지의 합으로 나뉜다(쾨니히 정리(König's theorem)). 이체 문제(two-body problem)에서 두 번째 부분은 환산 질량(reduced mass) $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$를 써서 $\frac{1}{2}\mu v_{\text{rel}}^2$이며, 여기서는 $\frac{1}{2}m$이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이 두 아이디어를 꼼꼼하게 전개한다.

풀이

# STEP I 2003, 문제 12

확률과 통계 • 곱의 기댓값

> **STEP I 2003, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q12

## 핵심 아이디어

기댓값(expected value)은 모든 같은 확률의 결과에 대하여 (값 $\times$ 확률)을 더한 것이므로, 두 소문항 모두 수의 순서쌍을 나열하고 그 곱을 더하는 문제로 귀결된다. 이중합(double sum) $\sum_r \sum_s rs$는 $\left(\sum r\right)^2$으로 인수분해되며, 이것이 소문항 (i)의 전부이다. 소문항 (ii)에서 달라지는 것은 $r = s$인 쌍이 더 이상 나올 수 없다는 점뿐이므로, 같은 이중합에서 대각선 항들을 빼면 된다.

## 풀이

첫 번째 공에 적힌 수를 $X$, 두 번째 공에 적힌 수를 $Y$라 하자.

### 소문항 (i)

첫 번째 공을 다시 넣으므로, 두 번째 공은 다시 가득 찬 주머니에서 뽑히며 첫 번째 시행과 무관하다. 따라서 임의의 $r, s \in \{1, \ldots, n\}$에 대하여

$$\mathrm{P}(X = r,\ Y = s) = \mathrm{P}(X = r)\,\mathrm{P}(Y = s) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}.$$

이러한 순서쌍 $(r, s)$는 $n^2$개이고 각각의 곱은 $rs$이므로, 기댓값의 정의에 의하여

$$\mathrm{E}(XY) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} rs\,\mathrm{P}(X = r,\ Y = s) = \frac{1}{n^2} \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} rs,$$

이며, 이것이 바로 설명하라고 요구된 식이다.

이를 간단히 하기 위해, $r$는 $s$에 의존하지 않으므로 안쪽 합 밖으로 꺼낼 수 있음에 주목한다.

$$\sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} rs = \sum_{r=1}^{n} r\left(\sum_{s=1}^{n} s\right) = \left(\sum_{r=1}^{n} r\right)^2 = \tfrac{1}{4} n^2 (n+1)^2.$$

그러므로

$$\mathrm{E}(XY) = \frac{(n+1)^2}{4}.$$

(같은 이야기로, $X$와 $Y$는 독립(independent)이므로 $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$이다.)

**소문항 (ii)**

공을 두 개 뽑으려면 $n \geq 2$이어야 한다. 이번에는 첫 번째 공을 다시 넣지 않으므로, 가능한 결과는 $r \neq s$인 순서쌍 $(r, s)$이다. 이러한 쌍에 대하여

$$\mathrm{P}(X = r,\ Y = s) = \mathrm{P}(X = r)\,\mathrm{P}(Y = s \mid X = r) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1},$$

이다. 공 $r$를 꺼낸 뒤에는 두 번째 공이 남은 $n-1$개 중 어느 것이든 같은 확률로 뽑히기 때문이다. 이러한 쌍은 $n(n-1)$개이고 모두 같은 확률이며, $r = s$인 쌍의 확률은 0이다. 따라서

$$\mathrm{E}(XY) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{r \neq s} rs.$$

? **생각해 보기** $r \neq s$인 쌍에 대해서만 $rs$를 어떻게 더할 수 있을까?

소문항 (i)에서 구한 모든 쌍에 대한 합에서, $r \cdot r = r^2$을 기여하는 대각선 항 $r = s$를 빼면 된다.

$$\sum_{r \neq s} rs = \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} rs - \sum_{r=1}^{n} r^2 = \tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2 - \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

공통인수 $\frac{1}{12}n(n+1)$을 묶어 내면

$$\begin{aligned}\sum_{r \neq s} rs &= \tfrac{1}{12}n(n+1)\left[3n(n+1) - 2(2n+1)\right] \\ &= \tfrac{1}{12}n(n+1)\left(3n^2 - n - 2\right) \\ &= \tfrac{1}{12}n(n+1)(n-1)(3n+2).\end{aligned}$$

$n \geq 2$이므로 0이 아닌 $n(n-1)$로 나누면

$$\mathrm{E}(XY) = \frac{(n+1)(3n+2)}{12},$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다.

## 검산

$n = 3$이라 하자. 복원추출(with replacement)에서는 아홉 개의 곱의 평균이 $\frac{1}{9}(1+2+3)^2 = 4$이고, $\frac{(3+1)^2}{4} = 4$이다. 비복원추출(without replacement)에서는 순서 없는 쌍

$\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}$의 곱이 $2,3,6$이고 평균은 $\frac{11}{3}$이며, $\frac{4\cdot 11}{12} = \frac{11}{3}$이다. $n = 2$이면 비복원추출에서 가능한 곱은 2뿐이고, 공식은 $\frac{3\cdot 8}{12} = 2$를 준다. 또한 12 이하의 모든 $n$에 대하여 정확한 전수 나열로 두 공식을 모두 확인하였다.

두 답을 비교하는 것도 좋은 타당성 점검이 된다.

$$\frac{(n+1)(3n+2)}{12} - \frac{(n+1)^2}{4} = -\frac{n+1}{12} < 0.$$

비복원추출일 때의 답이 더 작은데, 이는 $n \cdot n$과 같은 큰 대각선 곱들이 빠졌으므로 당연하다.

## 흔한 실수

- 소문항 (ii)에서 $n^2$으로 나누는 것. 가능한 순서쌍은 $n(n-1)$개뿐이고, 각각의 확률은 $\frac{1}{n(n-1)}$이다.
- 합은 순서 없는 쌍으로 구하고 개수는 순서쌍으로 세는 것(또는 그 반대). 순서 없는 쌍에 대해 더하면 합과 개수가 모두 절반이 되므로 비는 같지만, 둘을 섞으면 2배만큼 어긋난다.
- 소문항 (ii)에서 $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$라고 쓰는 것. 이 식은 독립성이 필요한데, 공을 다시 넣지 않으면 $X$와 $Y$는 독립이 아니다.

## STEP 너머

우리가 구한 차이는 정확히 공분산(covariance)이다. 즉 $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) = -\frac{n+1}{12}$이며, 첫 번째 수가 크면 두 번째 수가 클 가능성이 조금 줄어들기 때문에 음수가 된다. 이러한 공분산은 비복원추출에서 합의 분산(variance)을 구할 때 필요하며, 이로부터 초기하분포(hypergeometric distribution)의 분산과 표본조사에서 쓰이는 "유한모집단 수정(finite population correction)"이 나온다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)는 바로 이런 종류의 공분산과 지시변수(indicator) 방법을 다룬다.

풀이

# STEP I 2003, 문제 13

확률과 통계 • 기하분포의 기댓값

> **STEP I 2003, 13번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q13

## 핵심 아이디어

첫 번째 부분에서는 각 팀의 골 대신 **실축**(miss) 횟수를 센다. 각 팀이 다섯 번씩 찬 뒤 두 팀이 동점인 것은 정확히 두 팀의 실축 횟수가 같을 때이다. 기댓값(expectation)을 구할 때는 서든데스(sudden death) 단계가 두 번의 킥으로 이루어진 라운드 단위로 진행되고, 각 라운드가 같은 확률로 승부차기(shoot-out)를 끝내는 독립(independent) 시행이라는 점에 주목한다. 따라서 라운드 수는 기하분포(geometric distribution)를 따르고, 킥 횟수의 기댓값은 "항상 차는 열 번"과 "필요할 확률로 가중된 추가 킥"의 합으로 나뉜다.

## 풀이

모형이 의도하는 대로, 모든 킥은 다른 모든 킥과 독립이고, A팀은 항상 확률 $p_A$로, B팀은 확률 $p_B$로 득점한다고 가정한다. $q_A = 1 - p_A$, $q_B = 1 - p_B$로 둔다.

### 열 번의 킥 후 동점일 확률 $\alpha$

A팀이 처음 다섯 번의 킥 중 실축한 횟수를 $X$, B팀이 실축한 횟수를 $Y$라 하자. 각 팀의 다섯 번의 킥은 실축 확률이 같은 독립 시행이므로

$$X \sim \mathrm{B}(5, q_A), \qquad Y \sim \mathrm{B}(5, q_B),$$

즉 이항분포(binomial distribution)를 따르고, 두 팀의 킥이 독립이므로 $X$와 $Y$도 독립이다.

A팀은 $5 - X$골, B팀은 $5 - Y$골을 넣으므로, 점수가 같은 것은 정확히 $X = Y$일 때이다.

$i = 0, 1, \ldots, 5$에 대한 사건 $\{X = Y = i\}$는 서로 배반이므로

$$\begin{aligned}\alpha = \mathrm{P}(X = Y) &= \sum_{i=0}^{5} \mathrm{P}(X = i)\,\mathrm{P}(Y = i) \\ &= \sum_{i=0}^{5} \binom{5}{i} q_A^i p_A^{5-i} \binom{5}{i} q_B^i p_B^{5-i} \\ &= \sum_{i=0}^{5} \binom{5}{i}^2 (1-p_A)^i (1-p_B)^i p_A^{5-i} p_B^{5-i},\end{aligned}$$

이고, 이것이 구하는 식이다. (대신 골 수를 세어 각 팀이 $5-i$골씩 넣는 경우를 생각해도 $\binom{5}{i} = \binom{5}{5-i}$이므로 같은 합을 얻는다.)

### 킥 횟수의 기댓값

열 번의 킥 후에도 동점이면 서든데스 단계는 **라운드**(round) 단위로 진행된다. 각 라운드에서 A가 한 번, B가 한 번 찬다. 한 라운드에서 두 킥 중 정확히 하나만 들어가면 승부가 결정되고, 그 확률은

$$p_A q_B + q_A p_B = p_A(1-p_B) + p_B(1-p_A) = p_A + p_B - 2p_A p_B = \beta.$$

이다. 그렇지 않으면(둘 다 득점하거나 둘 다 실축하면) 다음 라운드를 진행한다. $\beta > 0$이어야 하므로, 어떤 라운드도 승부를 결정할 수 없는 자명한 경우 $p_A = p_B = 0$과 $p_A = p_B = 1$은 제외한다.

> ? **생각해 보기** 승부차기가 라운드 도중에 끝날 수 없는 이유는 무엇인가?

규칙에 따르면 한 팀은 득점하고 다른 팀은 득점하지 못했을 때 두 팀이 찬 횟수가 같아야 한다. A가 실축하더라도 B는 여전히 자기 킥을 차야 한다(B도 실축할 수 있기 때문이다). 따라서 서든데스의 킥은 항상 짝을 이루어 나오고, 전체 킥 횟수는 $10 + 2R$이다. 여기서 $R$은 진행된 라운드 수이다(처음 열 번의 킥에서 승부가 결정되면 $R = 0$).

서든데스에 도달했다는 조건 아래에서 각 라운드는 확률 $\beta$로 승부가 결정되는 독립 시행이므로, $R$은 기하분포를 따른다.

$$\mathrm{P}(R = k \mid \text{열 번 후 동점}) = (1-\beta)^{k-1}\beta, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

그 평균은

$$\mathrm{E}(R \mid \text{열 번 후 동점}) = \sum_{k=1}^{\infty} k\beta(1-\beta)^{k-1} = \beta \cdot \frac{1}{\big(1-(1-\beta)\big)^2} = \frac{1}{\beta},$$

이다. 여기서 $|x| < 1$일 때 성립하는 $\sum_{k\geq 1} k x^{k-1} = (1-x)^{-2}$를 이용했으며, $0 < \beta \leq 1$이므로 이를 적용할 수 있다.

처음 열 번의 킥에서 승부가 결정되면 $R = 0$이다. 열 번의 킥 후 동점인지 아닌지로 조건을 나누면

$$\mathrm{E}(R) = \alpha \cdot \frac{1}{\beta} + (1-\alpha)\cdot 0 = \frac{\alpha}{\beta}.$$

따라서 킥 횟수의 기댓값은

$$\mathrm{E}(10+2R) = 10 + \frac{2\alpha}{\beta},$$

이고, 이것이 증명하려던 결과이다.

## 검산

- 두 팀의 실력이 같아 $p_A = p_B = \frac{1}{2}$인 경우: 방데르몽드(Vandermonde) 항등식(Vandermonde's identity)에 의해 $\sum_i \binom{5}{i}^2 = \binom{10}{5} = 252$이므로 $\alpha = 252/2^{10} = \frac{63}{256}$이고, $\beta = \frac{1}{2}$이다. 킥 횟수의 기댓값은 $10 + \frac{63}{64} = \frac{703}{64} \approx 10.98$이다.
- 한 팀은 완벽하고 다른 팀은 전혀 못 넣는 경우($p_A = 1$, $p_B = 0$), $\alpha = 0$이다($i = 0$인 항만 남을 수 있는데, 그 항에는 $p_B^5 = 0$이 들어 있다). 따라서 상식대로 정확히 10번의 킥만 이루어진다.
- $\alpha$에 대한 식은 처음 열 번의 킥에서 나올 수 있는 $2^{10}$가지 결과를 모두 직접 나열하여 확인했고, $10 + 2\alpha/\beta$는 $2 \times 10^5$번의 승부차기 시뮬레이션으로 확인했다. $p_A = \frac{3}{4}$, $p_B = \frac{2}{3}$일 때 식은 11.264, 시뮬레이션은 11.25를 준다.

## 흔한 실수

- $\beta$를 $A$가 한 라운드를 이길 확률 $p_A(1-p_B)$로 잡는 것. 승부차기는 어느 팀이든 한 라운드를 이기면 끝난다.
- 서든데스가 확률 $\alpha$로만 일어난다는 것을 잊고 답을 $10 + 2/\beta$로 쓰는 것.
- 서든데스의 각 단계에서 킥을 두 번이 아니라 한 번으로 세는 것.

## STEP 너머

$\mathrm{E}(R) = \alpha\,\mathrm{E}(R \mid \text{동점}) + (1-\alpha)\,\mathrm{E}(R \mid \text{동점 아님})$으로 나누는 단계는 전체 기댓값의 법칙(law of total expectation)으로, 대학 1학년 확률론에서 가장 유용한 도구 중 하나이다. 서든데스 단계는 흡수 상태(absorbing state)를 가진 간단한 마르코프 연쇄(Markov chain)이기도 하며, 여기서 한 "흡수까지 걸리는 시간의 기댓값" 계산은 랜덤워크(random walk)와 도박꾼의 파산(gambler's ruin) 문제로 일반화된다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An*

*Introduction*(확률론 입문)은 조건부 기댓값(conditional expectation)과 이러한 연쇄를 모두 다룬다.

풀이

# STEP I 2003, 문제 14

확률과 통계 • 푸아송 분포

> **STEP I 2003, 14번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/03-s1-q14

## 핵심 아이디어

제인(Jane)이 만나는 친구의 수는 전화한 친구의 수 자체가 아니라, 그 수를 2에서 잘라 낸(capped) 값이다. 이렇게 상한이 있는 확률변수(random variable)는 세 가지 경우만 구별한다. 아무도 전화하지 않는 경우, 정확히 한 명이 전화하는 경우, 두 명 이상이 전화하는 경우이다. 따라서 푸아송(Poisson) 급수(series) 전체를 더할 필요가 전혀 없다. $P(0)$과 $P(1)$만 구하면 되고, "두 명 이상"의 확률은 나머지 확률 전부이다. 새 친구에 대해서는 그 친구가 전화하는지 여부를 조건으로 한다.

## 풀이

### 원래의 친구들

어느 날 전화하는 친구의 수를 $N$이라 하면 $N \sim \mathrm{Po}(2)$이고

$$P(N=k) = \frac{\mathrm{e}^{-2}2^k}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

이다. 제인은 $S = \min(N, 2)$명의 친구를 만난다. 즉 $N = 0$이면 $S = 0$, $N = 1$이면 $S = 1$, $N \geq 2$이면 $S = 2$이다. 이제

$$P(N=0) = \mathrm{e}^{-2}, \qquad P(N=1) = 2\mathrm{e}^{-2}, \qquad P(N \geq 2) = 1 - 3\mathrm{e}^{-2},$$

이므로

$$\mathrm{E}(S) = 0 \cdot \mathrm{e}^{-2} + 1 \cdot 2\mathrm{e}^{-2} + 2\left(1 - 3\mathrm{e}^{-2}\right) = 2 - 4\mathrm{e}^{-2},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

같은 계산을 더 깔끔하게 쓰는 방법이 있으며, 아래에서 다시 사용한다. $\{0,1,2,\dots\}$에 속하는 값을 갖는 임의의 확률변수 $X$에 대하여

$$\mathrm{E}\big(\min(X,2)\big) = 2 - 2P(X=0) - P(X=1),$$

이 성립한다. $\min(X,2)$는 $X=0$일 때 2보다 2만큼, $X=1$일 때 1만큼 작고, 그 밖의 경우에는 2와 같기 때문이다. $X=N$으로 놓으면 다시 $2-2\mathrm{e}^{-2}-2\mathrm{e}^{-2}$를 얻는다.

### 새 친구가 생긴 경우

새 친구가 전화하면 $B=1$, 그렇지 않으면 $B=0$으로 두면 $P(B=1)=p$이다. 문제에서 $B$는 $N$과 독립(independent)이라고 하였다. 이제 전화하는 사람의 총수는 $M=N+B$이고, 제인은 $\min(M,2)$명의 친구를 만난다.

> **?** **생각해 보기** $M$의 분포 전체가 필요한가?

필요하지 않다. 위의 항등식에 따르면 $P(M=0)$과 $P(M=1)$만 있으면 된다. 독립성을 이용하여 확률을 곱하면

$$\begin{aligned} P(M=0) &= P(N=0)\,P(B=0) = (1-p)\mathrm{e}^{-2},\\ P(M=1) &= P(N=1)\,P(B=0) + P(N=0)\,P(B=1) = 2(1-p)\mathrm{e}^{-2} + p\,\mathrm{e}^{-2}. \end{aligned}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\big(\min(M,2)\big) &= 2 - 2(1-p)\mathrm{e}^{-2} - 2(1-p)\mathrm{e}^{-2} - p\,\mathrm{e}^{-2}\\ &= 2 - (4-3p)\mathrm{e}^{-2}. \end{aligned}$$

**다른 방법으로**, $B$를 조건으로 할 수도 있다. 새 친구가 전화하지 않으면(확률 $1-p$) 평균은 앞에서와 같이 $2-4\mathrm{e}^{-2}$이다. 새 친구가 전화하면(확률 $p$) 제인은 $\min(N+1,2)$명을 만나는데, 이 값은 $N=0$이면 1, 그 밖에는 2이므로 평균은 $\mathrm{e}^{-2}+2(1-\mathrm{e}^{-2}) = 2-\mathrm{e}^{-2}$이다. 그러므로 평균은

$$(1-p)(2-4\mathrm{e}^{-2}) + p(2-\mathrm{e}^{-2}) = 2-(4-3p)\mathrm{e}^{-2}.$$

이다. 따라서 이제 제인은 하루에 평균 $2-(4-3p)\mathrm{e}^{-2}$명의 친구를 만나며, 이는 $3p\,\mathrm{e}^{-2}$만큼 늘어난 것이다.

## 검산

- $p=0$이면 새 친구는 전혀 전화하지 않으므로 $2-4\mathrm{e}^{-2}\approx 1.4587$을 다시 얻는다.
- $p=1$이면 $2-\mathrm{e}^{-2}\approx 1.8647$을 얻는데, 이는 당연히 $\min(N+1,2)$의 평균이다.

- 답은 $p$에 대하여 증가하고 항상 2보다 작으므로 타당하다.
- 정확한 분포에 대하여 $\min(k+b,2)$를 더한 값과, $p=0.3$으로 $4\times10^5$일을 모의실험한 결과 모두 약 1.580으로, $2-3.1\mathrm{e}^{-2}$와 일치한다.

## 흔한 실수

- 친구 두 명이라는 상한을 잊고 $\mathrm{E}(N)=2$ 또는 $2+p$라고 답하는 것.
- $N+B$를 푸아송 분포로 취급하는 것. 베르누이(Bernoulli) 확률변수는 푸아송 확률변수가 아니므로, 그 합도 푸아송 분포를 따르지 않는다.
- 전화하는 사람이 정확히 한 명이 되는 두 가지 경우(원래 친구 한 명이 전화하고 새 친구는 전화하지 않는 경우, 원래 친구는 아무도 전화하지 않고 새 친구가 전화하는 경우) 중 하나를 빠뜨리는 것.

## STEP 너머

항등식 $\mathrm{E}(\min(X,2))=P(X\geq1)+P(X\geq2)$는 음이 아닌 정수 값을 갖는 확률변수에 대한 꼬리 합 공식(tail-sum formula) $\mathrm{E}(X)=\sum_{k\geq1}P(X\geq k)$의 특수한 경우이다. 이는 생존 함수(survival function)를 적분하는 것의 이산 버전이다. 이와 같이 상한이 있는 평균은 대기행렬 모형(queueing model)과 재고 모형(inventory model)에 나타나며, 수용능력이 제한되어 있을 때 서비스를 받는 고객 수의 기댓값을 준다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 여기서 사용한 두 도구인 꼬리 합 공식과 조건부 기댓값(conditional expectation)을 다룬다.

풀이

# STEP II 2003, 문제 1

순수수학 • 연립일차방정식

> **STEP II 2003, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/03-s2-q1

## 핵심 아이디어

미지수 $x$는 언제나 $ax$의 꼴로만 나타나고, $y$는 모든 방정식에서 계수가 $-1$이다. 따라서 이웃한 방정식끼리 빼면 $y$가 완전히 소거되고, 이렇게 얻은 두 식은 좌변이 같다. 그러므로 이 연립방정식은 $b$의 값이 하나일 때에만 해를 가지며(consistent), 해를 가지는 경우에는 자유매개변수(free parameter)가 하나 생긴다. 나머지 문제는 이 매개변수를 잘 고르는 것에 관한 것이다.

## 풀이

세 방정식에 차례로 (1), (2), (3)의 번호를 붙인다. (2)에서 (1)을 빼고, (3)에서 (2)를 빼면

$$ax - 2z = 4, \tag{A}$$

$$ax - 2z = b - 7. \tag{B}$$

을 얻는다. 연립방정식의 해는 모두 (A)와 (B)를 동시에 만족하므로, 해가 존재하려면 $4 = b - 7$, 즉 $b = 11$이어야 한다. 이는 $a$의 값에 관계없이 성립한다.

### 소문항 (i)

$a = 0$이면 방정식은 $-y - z = 3$, $-y - 3z = 7$, $-y - 5z = b$가 되고, $x$는 전혀 나타나지 않는다.

해가 존재한다면 앞의 관찰에 의해 $b = 11$이다.

역으로 $b = 11$이라 하자. 이제 식 (A)는 $-2z = 4$가 되므로 $z = -2$이고, (1)에서 $y =$

$-3-z=-1$이다. $y=-1, z=-2$를 세 방정식에 모두 대입하여 확인하면

$$1+2=3, \qquad 1+6=7, \qquad 1+10=11=b,$$

이므로 ($x$가 어떤 값이든) 해가 된다. 따라서 이 방정식은 $b=11$일 때, 그리고 그때에만 해를 가진다.

### 소문항 (ii)

이제 $a\neq 0$이고 $b=11$이다. $z=\lambda$라 두자. 식 (A)에서 $ax=4+2\lambda$이고, $a\neq 0$이므로 양변을 나눌 수 있다.

$$x=\frac{4+2\lambda}{a}.$$

그러면 (1)에서 $y=ax-z-3=4+2\lambda-\lambda-3=1+\lambda$이다.

이 값들은 (1)과 (2)만 사용하여 구한 것이므로, (3)도 만족하는지 확인해야 한다.

$$3ax-y-5z=3(4+2\lambda)-(1+\lambda)-5\lambda=12+6\lambda-1-6\lambda=11=b.$$

따라서 모든 수 $\lambda$에 대하여

$$x=\frac{4+2\lambda}{a}, \qquad y=1+\lambda, \qquad z=\lambda$$

는 $z=\lambda$인 해이며, 이것이 구하는 것이다. (사실 이것이 해의 **전부**이다. 어떤 해든 $z$는 어떤 값 $\lambda$를 가지고, 그러면 위의 계산에 의해 $x$와 $y$가 정해진다.)

> **생각해 보기** 왜 식 (3)을 따로 확인해야 할까?

$x$와 $y$를 구할 때는 (1)과 (2)를 ((1)과 (A)의 꼴로) 사용했다. 미지수가 세 개인 방정식 세 개가 저절로 서로 들어맞는 것은 아니며, $b$가 들어오는 곳이 바로 (3)이다. $b=11$이라는 조건은 이 확인 과정에서 쓰인다.

### 소문항 (iii)

$a=2$일 때, 소문항 (ii)에 의해 모든 해는 $(x,y,z)=(2+\lambda,\ 1+\lambda,\ \lambda)$이다. 그러면

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= (2+\lambda)^2+(1+\lambda)^2+\lambda^2 \\ &= 3\lambda^2+6\lambda+5 \\ &= 3(\lambda+1)^2+2, \end{aligned}$$

이고, 이 값은 정확히 $\lambda=-1$일 때 최솟값 2를 가진다. 따라서 구하는 해는

$$x=1, \qquad y=0, \qquad z=-1.$$

이다. 기하적으로 보면, 해 전체는 방향이 $(1,1,1)$인 직선을 이루고, 우리는 이 직선 위에서 원점에 가장 가까운 점을 찾은 것이다. 실제로 $(1,0,-1)\cdot(1,1,1)=0$이므로, 위치벡터(position vector)가 직선과 수직이며, 이는 마땅히 그래야 하는 결과이다.

### 소문항 (iv)

처음의 관찰에 의해 $b$는 11이어야 한다. $a = 0$이면 소문항 (i)에 의해 $y = -1, z = -2$이므로 $y^2 + z^2 = 5$가 되어 너무 크다. 따라서 $a \neq 0$이고, 소문항 (ii)에 의해 해는 $x = (4 + 2\lambda)/a$, $y = 1 + \lambda, z = \lambda$이다.

> **?** **생각해 보기** $y$와 $z$는 작게 유지하면서 $x$를 어떻게 엄청나게 크게 만들 수 있을까?

$a$가 나타나는 곳은 $x = (4 + 2\lambda)/a$뿐이다. $\lambda$를 고르면 $y$와 $z$가 정해지고, 그다음 $a$를 충분히 작게 하면 $x$를 원하는 만큼 크게 만들 수 있다.

$y^2 + z^2 = (1 + \lambda)^2 + \lambda^2 = 2\lambda^2 + 2\lambda + 1 < 1$, 즉 $2\lambda(\lambda + 1) < 0$, 즉 $-1 < \lambda < 0$이어야 한다. $\lambda = -\frac{1}{2}$로 잡으면 $y = \frac{1}{2}, z = -\frac{1}{2}$이고 $y^2 + z^2 = \frac{1}{2} < 1$이며, $x = 3/a$이다.

$$a = 10^{-6}$$

으로 고르면 $x = 3 \times 10^6 > 10^6$이다. 따라서 ($b = 11$과 함께) $a = 10^{-6}$이 조건을 만족한다.

더 일반적으로, $-1 < \lambda < 0$이면 $2 < 4 + 2\lambda < 4$이므로, 조건에 맞는 해는 정확히 $0 < a < 4 \times 10^{-6}$일 때 존재한다. $a$가 음수이면 $x < 0$이 되므로 불가능하다.

## 검산

- $a = 2, (x, y, z) = (1, 0, -1)$을 원래 방정식에 대입하면 $2 - 0 + 1 = 3, 4 - 0 + 3 = 7$, $6 - 0 + 5 = 11$이다.
- 소문항 (iv)에서 $a = 10^{-6}, (x, y, z) = (3 \times 10^6, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$이면 $3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3, 6 - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 7, 9 - \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 11$이다.
- 무작위로 고른 수백 개의 $a$와 $\lambda$에 대하여, 소문항 (ii)의 공식이 세 방정식을 모두 만족함을 정확한 분수 계산으로 확인했으며, $\lambda$에 대한 격자 탐색(grid search)으로 소문항 (iii)에서 $\lambda = -1$일 때 최솟값이 2임을 확인했다.

## 흔한 실수

- 두 방정식에서 $x$와 $y$를 구하고 나머지 하나를 확인하는 것을 잊는다.
- 소문항 (iv)에서 $y$와 $z$가 "둘 다 작을 수는 없다"고 생각하여 불가능하다고 단정한다. 둘 다 작을 수 있다. $y - z = 1$에서 강제되는 것은 $y^2 + z^2 \geq \frac{1}{2}$뿐이다.

## STEP 너머

이것은 선형대수학(linear algebra)에서 계수(rank)와 해의 존재성(consistency)을 처음 맛보는 문제이다. 여기서 계수행렬(coefficient matrix)은 특이행렬(singular matrix)이므로(행들이 $r_1 - 2r_2 + r_3 = 0$을 만족한다), 우변이 같은 관계식을 만족하는지에 따라 연립방정식은 해가 없거나, 해가 직선 하나 전체를 이룬다. 소문항 (iv)는 또한 특이행렬에 가까운 연립방정식이 수치 계산에서 왜 위험한지도 보여 준다. 아주 작은 계수 $a$가 엄청나게 큰 해를 만들어 내기 때문이다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 소문항 (iii)과 같은 최소 노름 해(least-norm solution)를 포함하여 이 모든 내용을 다룬다.

풀이

# STEP II 2003, 문제 2

순수수학 • 역삼각함수

**STEP II 2003, 2번 문제**

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/03-s2-q2

## 핵심 아이디어

식 $a\cos\theta + b\sin\theta$는 언제나 하나의 코사인 $R\cos(\theta - \alpha)$ 꼴로 쓸 수 있다. 이렇게 하면 주어진 방정식은 arccos에 관한 명제가 되고, $\alpha$ 자체는 arctan으로 나타난다. 따라서 깔끔한 해 $\theta$를 하나 찾아내기만 하면, $\pi$에 관한 항등식은 "$\theta = (\theta - \alpha) + \alpha$"를 다시 쓴 것에 지나지 않는다. 정말로 주의해야 할 점은 각 각이 우리가 사용하는 역함수(inverse function)의 치역(range) 안에 있는지 확인하는 것뿐이다.

## 풀이

### 첫 번째 항등식

$(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 안의 뻔한 각들을 대입해 보자. $\theta = \frac{1}{3}\pi$이면

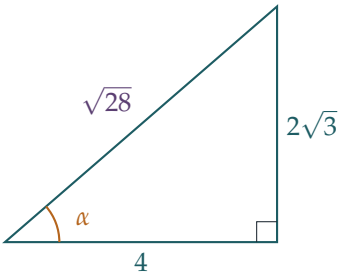
$$4\cos\tfrac{\pi}{3} + 2\sqrt{3}\,\sin\tfrac{\pi}{3} = 4\cdot\tfrac{1}{2} + 2\sqrt{3}\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2} = 2 + 3 = 5,$$

이므로 $\theta = \frac{1}{3}\pi$는 해이고, $\frac{1}{4}\pi < \frac{1}{3}\pi < \frac{1}{2}\pi$이다.

이제 좌변을 $R\cos(\theta - \alpha) = R\cos\theta\cos\alpha + R\sin\theta\sin\alpha$ 꼴로 쓰자. 계수를 비교하면

$$R\cos\alpha = 4, \qquad R\sin\alpha = 2\sqrt{3},$$

이므로 $R^2 = 16 + 12 = 28$, 즉 $R = \sqrt{28}$이고, $\tan\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$이다. $\cos\alpha$와 $\sin\alpha$가 모두 양수이므로 $\alpha$를 예각으로 잡을 수 있고, 따라서 $\alpha = \arctan(\sqrt{3}/2)$이다.




따라서 방정식은

$$\sqrt{28}\cos(\theta-\alpha)=5, \qquad \text{즉,} \qquad \cos(\theta-\alpha)=\frac{5}{\sqrt{28}},$$

이 되고, $\theta=\frac{1}{3}\pi$는 이 식을 만족한다.

**생각해 보기** 곧바로 $\frac{1}{3}\pi-\alpha=\arccos(5/\sqrt{28})$라고 결론지을 수 있을까?

꼭 그렇지는 않다. $\cos x=c$의 해는 무수히 많고, $\arccos c$는 그중 $[0,\pi]$에 속하는 하나일 뿐이다. 그러므로 $\frac{1}{3}\pi-\alpha$가 $[0,\pi]$에 속하는지 확인해야 한다. tan는 $(0,\frac{1}{2}\pi)$에서 증가하고 $\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}<\sqrt{3}=\tan\frac{\pi}{3}$이므로 $0<\alpha<\frac{1}{3}\pi$이다. 따라서

$$0<\tfrac{1}{3}\pi-\alpha<\tfrac{1}{3}\pi\le\pi,$$

이고, 그러므로 $\frac{1}{3}\pi-\alpha=\arccos(5/\sqrt{28})$이다. 이항한 뒤 3을 곱하면

$$\pi=3\arccos(5/\sqrt{28})+3\alpha=3\arccos(5/\sqrt{28})+3\arctan(\sqrt{3}/2),$$

가 되어 원하는 결과를 얻는다.

### 두 번째 항등식

같은 아이디어를 그대로 따라 하자. 우리가 원하는 것은 $\frac{1}{4}\pi=\arcsin(7\sqrt{2}/10)-\arctan(3/4)$이므로, $\beta=\arctan(3/4)$로 놓고 $\sin(\frac{1}{4}\pi+\beta)$를 살펴본다.

$0<\frac{3}{4}$이므로 $\beta$는 예각이고, 세 변의 길이가 3, 4, 5인 직각삼각형으로부터 $\sin\beta=\frac{3}{5}$, $\cos\beta=\frac{4}{5}$이다. 그러면 덧셈정리(addition formula)에 의해

$$\begin{aligned}\sin\left(\tfrac{1}{4}\pi+\beta\right)&=\sin\tfrac{\pi}{4}\cos\beta+\cos\tfrac{\pi}{4}\sin\beta\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\right)=\frac{7}{5\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{10}.\end{aligned}$$

**생각해 보기** $\frac{1}{4}\pi+\beta$가 정말로 arcsin이 내놓는 각일까?

arcsin의 치역은 $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$이므로 $\frac{1}{4}\pi + \beta$가 이 구간에 속해야 한다. $\tan\beta = \frac{3}{4} < 1 = \tan\frac{\pi}{4}$이고 tan는 $(0, \frac{1}{2}\pi)$에서 증가하므로 $0 < \beta < \frac{1}{4}\pi$이고, 따라서

$$\tfrac{1}{4}\pi < \tfrac{1}{4}\pi + \beta < \tfrac{1}{2}\pi.$$

그러므로 $\arcsin(7\sqrt{2}/10) = \frac{1}{4}\pi + \arctan(3/4)$이고, 4를 곱해 이항하면

$$\pi = 4\arcsin(7\sqrt{2}/10) - 4\arctan(3/4),$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

## 검산

수치로 계산하면 $\arctan(\sqrt{3}/2) \approx 0.713724$이고 $\arccos(5/\sqrt{28}) \approx 0.333473$이다. 두 값의 합은 $1.047198 \approx \pi/3$이고, 그 세 배는 3.141593이다. 두 번째 항등식의 경우 $\arcsin(7\sqrt{2}/10) \approx 1.428899$이고 $\arctan(3/4) \approx 0.643501$이며, 그 차는 $0.785398 \approx \pi/4$이다. 또한 간단히 살펴보면 $\frac{1}{3}\pi$가 $(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi)$에서 방정식의 유일한 해임을 알 수 있다. 그 근처의 다른 해 $\alpha - \arccos(5/\sqrt{28}) \approx 0.380$은 $\frac{1}{4}\pi$보다 작기 때문이다.

## 흔한 실수

- $x \in [0, \pi]$인지 확인하지 않고 $\arccos(\cos x) = x$라고 쓰는 것(또는 $x \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$인지 확인하지 않고 $\arcsin(\sin x) = x$라고 쓰는 것). 엄밀성에 대한 점수가 바로 여기에 걸려 있다.
- $\tan\alpha$를 거꾸로 구하는 것. $R\cos\alpha = 4$, $R\sin\alpha = 2\sqrt{3}$으로부터 얻는 값은 $4/(2\sqrt{3})$이 아니라 $\tan\alpha = 2\sqrt{3}/4$이다.

## STEP 너머

$\pi$를 역탄젠트들의 조합으로 나타내는 항등식은 $\frac{1}{4}\pi = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$와 같은 마친형 공식(Machin-type formulae)의 바탕이 된다. $x$가 작을 때 $\arctan x$의 급수(series)가 빠르게 수렴(converge)하기 때문에, 이런 공식들은 $\pi$를 아주 많은 자릿수까지 계산하는 데 쓰였다. 이 공식들을 가장 깔끔하게 이해하는 방법은 복소수(complex number)를 통하는 것이다. $\arctan(b/a)$는 $a + bi$의 편각(argument)이므로, 역탄젠트를 더하는 것은 복소수를 곱하는 것에 대응한다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이러한 기하학적 관점을 아름답게 전개한다.

풀이

# STEP II 2003, 문제 3

순수수학 • 무리수와 수학적 귀납법

**STEP II 2003, 3번 문제**

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/03-s2-q3

## 핵심 아이디어

무리수임(irrationality)은 "아니다"라는 성질이므로 대우(contrapositive)가 자연스러운 도구이다. 무리수의 세제곱근(cube root)이 무리수임을 보이는 대신, 세제곱근이 유리수(rational)이면 그 수 자체도 유리수일 수밖에 없음을 보인다. 각 $u_{n+1}$이 $u_n$의 세제곱근이므로, 이 사실 하나가 그대로 귀납법(induction)을 이끌어 간다. 마지막 부분에서는 $u_n \to 1$임에 주목하고 수열(sequence) 전체를 정수만큼 평행이동한다. 이렇게 해도 모든 항은 여전히 무리수이다.

## 풀이

### 무리수의 세제곱근

$x$를 실수라 하고 $y = \sqrt[3]{x}$를 $x$의 실수 세제곱근이라 하자. 그러면 $y^3 = x$이다. 대우를 증명한다. 즉 $y$가 유리수이면 $x$도 유리수임을 보인다.

$p, q$가 정수이고 $q \neq 0$일 때 $y = \dfrac{p}{q}$라 하자. 그러면

$$x = y^3 = \frac{p^3}{q^3},$$

이고 $p^3$과 $q^3$은 정수이며 $q^3 \neq 0$이다. 따라서 $x$는 두 정수의 비, 즉 유리수이다.

그러므로 유리수인 세제곱근은 유리수에서만 나올 수 있다. 이를 바꾸어 말하면, $x$가 무리수이면 $\sqrt[3]{x}$는 유리수일 수 없으므로 무리수이다. 이것이 증명해야 할 내용이었다.

? **생각해 보기** 왜 주어진 명제를 직접 공략하지 않는가?

직접 증명하려면 "$x$는 정수의 비가 아니다"에서 출발해야 하는데, 여기에는 구체적으로 계산할 거리가 전혀 없다. 대우는 "$y = p/q$"에서 출발하므로 다룰 정수가 손에 들어오고, 증명은 한 줄로 끝난다. 가정이 어떤 것이 유리수가 **아니라고** 말할 때는 언제나 대우나 귀류법(proof by contradiction)을 시도해 볼 가치가 있다.

### 귀납법

$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n$이므로 지수법칙(laws of indices)에 의해

$$u_{n+1} = 5^{1/3^{n+1}} = \left(5^{1/3^n}\right)^{1/3} = \sqrt[3]{u_n}.$$

이다. 따라서 각 항은 바로 앞 항의 세제곱근이다.

**기초 단계**(*base case*). $u_1 = 5^{1/3} = \sqrt[3]{5}$이고, 이 수는 무리수라고 주어져 있다.

**귀납 단계**(*inductive step*). 어떤 양의 정수 $k$에 대하여 $u_k$가 무리수라고 가정하자. 그러면 $u_{k+1} = \sqrt[3]{u_k}$는 무리수의 세제곱근이므로, 첫 번째 부분에 의해 무리수이다.

따라서 수학적 귀납법에 의해 모든 양의 정수 $n$에 대하여 $u_n$은 무리수이다.

### $m$으로 수렴하는 수열

먼저 $u_n$의 극한(limit)을 구한다. 로그(logarithm)를 취하면

$$\ln u_n = \frac{\ln 5}{3^n} \to 0 \quad \text{단, } n \to \infty,$$

이고, 지수함수(exponential function)는 연속(continuous)이므로 $u_n = \mathrm{e}^{\ln u_n} \to \mathrm{e}^0 = 1$이다. 또한 $\ln u_n > 0$이므로 모든 $n$에 대하여 $u_n > 1$이다. 각 항은 1을 향해 감소한다.

$$u_1 \approx 1.710, \quad u_2 \approx 1.196, \quad u_3 \approx 1.061, \quad u_4 \approx 1.020, \ldots$$

> ? **생각해 보기** 무리수라는 성질을 해치지 않으면서 극한을 1에서 $m$으로 옮기려면 어떻게 해야 하는가?

무리수에 정수를 더하면 무리수가 된다. 실제로 $a$가 정수이고 $u + a = r$가 유리수라면, 유리수끼리의 차는 유리수이므로 $u = r - a$도 유리수가 된다.

그러므로 주어진 정수 $m$에 대하여

$$a_n = u_n + m - 1 = 5^{1/3^n} + m - 1.$$

으로 정의한다. $m - 1$은 정수이고 $u_n$은 무리수이므로 각 $a_n$은 무리수이며,

$$a_n \to 1 + m - 1 = m \quad \text{단, } n \to \infty.$$

이다. 따라서 $(a_n)$은 $m$으로 수렴(converge)하는 무리수들의 무한수열이다. 이 방법은 $m = 0$을 포함한 모든 정수 $m$에 대하여 성립한다.

(또 다른 자연스러운 선택인 $m\,u_n$도 무리수이고 $m$으로 수렴하지만, 이는 $m \neq 0$일 때에만 그렇다. $m = 0$이면 모든 항이 0이 되어 유리수이다. 그래서 $m - 1$만큼 평행이동하는 쪽이 더 안전한 답이다.)

## 검산

- 수치적으로 $u_2^3 \approx 1.19581^3 \approx 1.70998 \approx u_1$이므로 $u_{n+1} = \sqrt[3]{u_n}$이 확인된다.
- $m = 4$이면 $a_1 \approx 4.710$, $a_2 \approx 4.196$, $a_3 \approx 4.061$이고, $a_{20}$은 소수점 아래 여덟 자리 넘게 4와 일치한다.
- 차 $a_n - m = u_n - 1$은 양수이고 대략 $\ln 5/3^n$이므로, 한 단계마다 약 3분의 1로 줄어든다.

## 흔한 실수

- 역(converse), 즉 "무리수의 세제곱은 무리수이다"를 증명하는 것. 이는 거짓이다: $\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = 2$.
- $m = 0$일 때 실패한다는 점을 알아차리지 못하고 $m\,u_n$을 사용하는 것.
- $u_n \to 1$임을 정당화하는 것을 잊는 것. "지수가 0으로 간다"는 말만으로는 부족하고, 연속성에 대한 언급이나 위의 로그를 이용한 논증이 필요하다.

## STEP 너머

이 문제는 무리수가 실수직선에서 **조밀하다**(dense)는 것을 보여 준다. 즉 모든 정수뿐 아니라 모든 실수가 무리수들의 극한이다(유리수 $q_n \to x$에 대하여 $q_n + \sqrt{2}/n$을 생각해 보라). 유리수 역시 조밀하지만, 정확한 의미에서 무리수가 유리수보다 훨씬 많다. 유리수는 가산(countable)이지만 실수는 그렇지 않기 때문이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 앞쪽 장들에서 조밀성, 가산성, 수열의 극한을 아름답게 다룬다.

풀이

# STEP II 2003, 문제 4

순수수학 • 활꼴의 넓이

**STEP II 2003, 4번 문제**

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/03-s2-q4

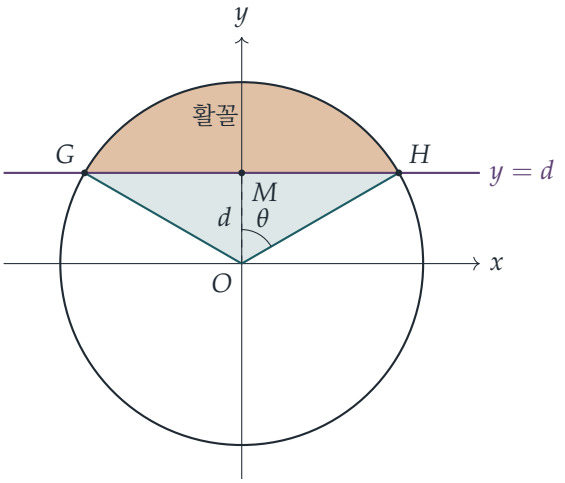
## 핵심 아이디어

작은 활꼴(minor segment)은 부채꼴(sector)에서 삼각형을 떼어 낸 것이므로, 첫 번째 결과는 그저 "부채꼴 빼기 삼각형"이다. 나머지 부분에서는 $(*)$에 나오는 수 $d$가 사실은 **원의 중심에서 직선까지의 수직 거리**(*perpendicular distance*)라는 점에 주목한다. 그림을 평행이동하거나 회전해도 넓이는 변하지 않으므로, 모든 경우에 $(*)$를 그대로 두고 $d$를 그 거리로 바꾸면 된다. 할 일은 모두 거리를 계산하는 데 있다.

## 풀이

### 기본 결과

직선이 원과 두 점에서 만나므로 $0 < d < R$이다. $x^2 + y^2 = R^2$에 $y = d$를 대입하면 $x = \pm\sqrt{R^2 - d^2}$이므로 $G = \left(-\sqrt{R^2 - d^2},\, d\right)$, $H = \left(\sqrt{R^2 - d^2},\, d\right)$이다. $M = (0, d)$을 $GH$의 중점이라 하고, $\theta = \angle MOH$라 하자.




직각삼각형 $OMH$에서 빗변은 $OH = R$이고 이웃변은 $OM = d$이므로 $\cos\theta = d/R$이다. $0 < d/R < 1$이므로 $\theta = \arccos(d/R)$이고 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이며, 대칭성에 의해 $\angle GOH = 2\theta < \pi$이다.

중심각이 $2\theta$인 부채꼴 $OGH$의 넓이는

$$\tfrac{1}{2}R^2(2\theta) = R^2\arccos\left(\frac{d}{R}\right).$$

이다. 삼각형 $OGH$는 밑변이 $GH = 2\sqrt{R^2 - d^2}$, 높이가 $OM = d$이므로 그 넓이는 $d\sqrt{R^2 - d^2}$이다. $2\theta < \pi$이므로 중심 $O$는 현(chord) $GH$에 대해 작은 호와 반대쪽에 있고, 따라서 부채꼴은 정확히 삼각형과 작은 활꼴을 합친 것이다. 그러므로

$$\text{작은 활꼴의 넓이} = R^2\arccos\left(\frac{d}{R}\right) - d\sqrt{R^2 - d^2},$$

이고, 이것이 $(*)$이다.

**생각해 보기** 기하적으로 볼 때 $(*)$에서 $d$는 실제로 무엇을 나타내는가?

위 논증에서는 좌표축을 전혀 사용하지 않았다. 사용한 것은 반지름 $R$과 중심에서 현까지의 거리 $OM = d$뿐이다. 그림 전체를 평행이동하거나 회전해도 이 두 값은 보존되고, 넓이도 보존된다. 따라서 반지름이 $R$인 임의의 원과 중심에서의 수직 거리가 $p$인 임의의 직선에 대하여, $0 \le p < R$일 때 작은 활꼴의 넓이는

$$R^2\arccos\left(\frac{p}{R}\right) - p\sqrt{R^2 - p^2}. \qquad (\dagger)$$

이다. ($p = 0$이면 직선은 지름이고, 두 조각은 똑같은 반원이며, $(\dagger)$는 올바르게 $\frac{1}{2}\pi R^2$을 준다.) 각 소문항에서는 $p$를 구해 $(\dagger)$에 대입한다.

**소문항 (i)**

중심은 $(a, b)$이고 직선 $y = c$는 수평이므로, 중심에서 직선까지의 거리는 $p = |c - b|$이다. $d$를 $|c - b|$로 바꾸면

$$R^2 \arccos\left(\frac{|c-b|}{R}\right) - |c-b|\sqrt{R^2 - (c-b)^2}.$$

이다. 절댓값이 중요하다. $c$가 $b$보다 작을 수도 있기 때문이다.

**소문항 (ii)**

여기서는 중심이 $O$이다. $O$에서 $y = mx + c$까지의 거리를 구해야 한다. 직선이 $x$축과 이루는 각을 $\alpha$라 하면 $\tan\alpha = m$이고, 직선이 $y$축과 만나는 점을 $C = (0, c)$라 하자. $O$에서 직선에 수선을 내려 그 발을 $F$라 하자. $OC$(수직 방향)와 $OF$(직선에 수직)가 이루는 각은 수평선과 직선이 이루는 각, 즉 $\alpha$와 같다. 따라서 직각삼각형 $OFC$에서

$$p = OF = |c|\,|\cos\alpha| = \frac{|c|}{\sqrt{1 + \tan^2\alpha}} = \frac{|c|}{\sqrt{1+m^2}}.$$

이다. (이는 직선 $mx - y + c = 0$과 점 $(0,0)$에 대한 익숙한 공식 $|Ax_0 + By_0 + C|/\sqrt{A^2 + B^2}$이다.) 그러면

$$\sqrt{R^2 - p^2} = \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{1+m^2}} = \frac{\sqrt{R^2(1+m^2) - c^2}}{\sqrt{1+m^2}},$$

이므로 작은 활꼴의 넓이는

$$R^2 \arccos\left(\frac{|c|}{R\sqrt{1+m^2}}\right) - \frac{|c|\sqrt{R^2(1+m^2) - c^2}}{1+m^2}.$$

이다. 직선이 원과 만나는 것은 정확히 $c^2 < R^2(1+m^2)$일 때이므로, 제곱근 안은 실수가 된다.

**소문항 (iii)**

$X = x - a, Y = y - b$로 놓아 원점을 중심으로 옮긴다. 원은 $X^2 + Y^2 = R^2$이 되고 직선은

$$Y + b = m(X + a) + c \quad \Longleftrightarrow \quad Y = mX + k, \qquad k = c + ma - b.$$

이 된다. 이는 소문항 (ii)에서 $c$를 $k$로 바꾼 것이고, 평행이동은 넓이를 바꾸지 않는다. 따라서 $p = |c + ma - b|/\sqrt{1+m^2}$이고, 작은 활꼴의 넓이는

$$R^2 \arccos\left(\frac{|c+ma-b|}{R\sqrt{1+m^2}}\right) - \frac{|c+ma-b|\sqrt{R^2(1+m^2) - (c+ma-b)^2}}{1+m^2}.$$

이다. $m = 0$을 대입하면 소문항 (i)이 다시 나오고, $a = b = 0$을 대입하면 소문항 (ii)가 다시 나온다.

**생각해 보기** 소문항 (i)에서 왜 절댓값 없이 그냥 $c-b$라고 쓸 수 없는가?

$c<b$이면 $(c-b)/R$은 음수이고, arccos는 $\frac{\pi}{2}$보다 큰 각 $\pi-\theta$를 돌려주며, 둘째 항의 부호가 바뀐다. 식은 $R^2(\pi-\theta)+p\sqrt{R^2-p^2}$가 되는데, 이는 작은 활꼴이 아니라 **큰 활꼴**(*major segment*)의 넓이이다.

## 검산

- $R=2, d=1$이면 $\theta=\frac{\pi}{3}$이고, $(*)$는 $\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}\approx 2.4567$을 준다. 이는 원판 넓이의 절반 $(2\pi\approx 6.28)$보다 작으므로 마땅히 그래야 하는 결과이다.
- $d\to R$이면 넓이는 0으로 가고, $d=0$이면 $\frac{1}{2}\pi R^2$과 같다.
- 수백 개의 무작위 원과 직선에 대해 현의 길이를 직접 수치 적분하여 네 공식을 모두 확인하였다. 오차는 $2\times 10^{-6}$ 이내였다.

## 흔한 실수

- 절댓값을 빠뜨리는 것. 부호가 있는 거리를 쓰면 중심이 직선의 "잘못된" 쪽에 있을 때마다 큰 활꼴의 넓이가 나온다.
- 소문항 (ii)와 (iii)에서 수직 거리 $|c|/\sqrt{1+m^2}$ 대신 세로 간격 $|c|$를 쓰는 것.
- 중심각이 $\theta$가 아니라 $2\theta$임을 잊고 부채꼴의 넓이로 $\frac{1}{2}R^2\theta$를 쓰는 것.

## STEP 너머

이 문제는 넓이가 **등거리변환**(*isometry*), 즉 평면의 평행이동, 회전, 반사에 의해 변하지 않는다는 사실에 바탕을 둔다. 대학 1학년 과정에서는 이것이 등거리변환의 야코비 행렬식(Jacobian determinant)의 절댓값이 1이라는 명제가 되며, 따라서 이중적분의 변수변환 공식(change-of-variables formula)이 넓이를 바꾸지 않는다. 등거리변환과 그것이 보존하는 양을 분류하는 일은 기하학과 군론(group theory)으로 들어가는 좋은 길이다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수 입문)는 회전 행렬과 넓이의 배율로서의 행렬식을 다룬다.

풀이

# STEP II 2003, 문제 5

순수수학 • 직선의 벡터 기하

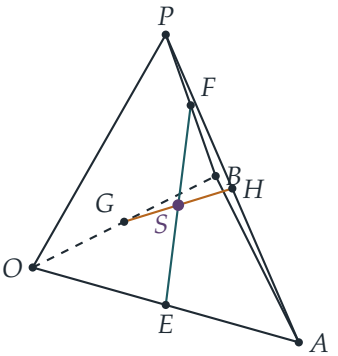
**STEP II 2003, 5번 문제**

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/03-s2-q5

## 핵심 아이디어

네 중점(midpoint)을 적고, 각 직선을 "점 + 매개변수 × 방향" 꼴로 나타낸 다음 둘을 같다고 놓는다. 3차원 공간의 두 직선은 보통 서로 만나지 않으므로, 핵심은 두 미지 매개변수(parameter)에 대한 세 성분(component) 방정식이 모순 없이 동시에 성립함(consistent)을 보이는 데 있다. $\mathbf{k}$ 성분을 보면 빠르게 정리된다. 기하학적으로 보면 $O$, $A$, $B$, $P$는 사면체(tetrahedron)를 이루고, $EF$와 $GH$는 각각 마주 보는 한 쌍의 모서리의 중점을 잇는다. 그러므로 두 직선이 네 꼭짓점의 "평균"에서 만난다고 짐작할 수 있다.




## 풀이

### 직선 $EF$와 $GH$는 만난다

$\mathbf{p} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$라 하자. 중점들의 위치벡터(position vector)는 다음과 같다.

$$\mathbf{e} = \tfrac{1}{2}a\mathbf{i}, \qquad \mathbf{f} = \tfrac{1}{2}\big(l\mathbf{i} + (b+m)\mathbf{j} + n\mathbf{k}\big),$$
$$\mathbf{g} = \tfrac{1}{2}b\mathbf{j}, \qquad \mathbf{h} = \tfrac{1}{2}\big((a+l)\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}\big).$$

$EF$ 위의 일반적인 점은 $\mathbf{e} + s(\mathbf{f} - \mathbf{e})$이고, $GH$ 위의 일반적인 점은 $\mathbf{g} + t(\mathbf{h} - \mathbf{g})$이다. 분모의 2를 없애기 위해 둘 다 두 배 하면

$$2\big(\mathbf{e} + s(\mathbf{f} - \mathbf{e})\big) = \big(a + s(l-a)\big)\mathbf{i} + s(b+m)\mathbf{j} + sn\,\mathbf{k},$$
$$2\big(\mathbf{g} + t(\mathbf{h} - \mathbf{g})\big) = t(a+l)\mathbf{i} + \big(b + t(m-b)\big)\mathbf{j} + tn\,\mathbf{k}.$$

두 직선이 만날 필요충분조건은 이 둘을 같게 하는 $s$와 $t$의 값이 존재하는 것이므로, 다음 세 식이 모두 성립해야 한다.

$$\mathbf{i}: \quad a + s(l-a) = t(a+l),$$
$$\mathbf{j}: \quad s(b+m) = b + t(m-b),$$
$$\mathbf{k}: \quad sn = tn.$$

> **생각해 보기** 미지수는 두 개인데 방정식은 세 개이다. 도대체 왜 해가 존재해야 하는가?

일반적으로는 해가 없고, 바로 그래서 공간의 두 직선은 보통 서로 만나지 않는다. 여기서는 두 방정식을 풀고 나머지 하나도 성립하는지 확인한다. $n \neq 0$이므로 $\mathbf{k}$ 방정식에서 $s = t$를 얻는다. 그러면 $\mathbf{i}$ 방정식은 $a + sl - sa = sa + sl$이 되어 $a = 2sa$이고, $a \neq 0$이므로 $s = \frac{1}{2}$이다. 마지막으로 $s = t = \frac{1}{2}$일 때 $\mathbf{j}$ 방정식은

$$\tfrac{1}{2}(b+m) = b + \tfrac{1}{2}(m-b) = \tfrac{1}{2}(b+m),$$

이 되어 참이다. 따라서 $s = t = \frac{1}{2}$일 때 세 방정식이 모두 성립하고, 요구한 대로 직선 $EF$와 $GH$는 만난다.

교점은 $EF$의 중점(또한 $GH$의 중점)이다.

$$\mathbf{s} = \tfrac{1}{4}\big((a+l)\mathbf{i} + (b+m)\mathbf{j} + n\mathbf{k}\big) = \tfrac{1}{4}\big(\mathbf{0} + a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + \mathbf{p}\big),$$

즉 $O$, $A$, $B$, $P$의 위치벡터의 평균이다.

### 점 $T$

$S$가 $DT$의 중점이므로 $\mathbf{s} = \frac{1}{2}(\mathbf{d} + \mathbf{t})$이고, 따라서 $\mathbf{t} = 2\mathbf{s} - \mathbf{d}$이다.

$$\mathbf{t} = \tfrac{1}{2}(a+l)\,\mathbf{i} + \tfrac{1}{2}(b+m)\,\mathbf{j} + \big(\tfrac{1}{2}n - d\big)\mathbf{k}.$$

평면 $OAB$는 $O$를 지나고 벡터 $a\mathbf{i}$와 $b\mathbf{j}$를 포함한다. $a$와 $b$가 0이 아니므로 이 벡터들은 각각 $x$축과 $y$축 방향이고, 따라서 평면 $OAB$는 평면 $z = 0$이다. 그러므로 $T$가 이 평면 위에 있을 필요충분조건은 $\mathbf{k}$ 성분이 0이 되는 것, 즉 $\frac{1}{2}n - d = 0$이다. 따라서

$$d = \tfrac{1}{2}n.$$

$n \neq 0$이므로 이 값은 0이 아니고, 따라서 조건 $d \neq 0$과도 모순되지 않는다.

## 검산

- $a = 2, b = 4, \mathbf{p} = (2,0,4)$로 잡자. 그러면 $E = (1,0,0)$, $F = (1,2,2)$, $G = (0,2,0)$, $H = (2,0,2)$이다. $EF$와 $GH$의 중점은 둘 다 $(1,1,1)$이고, 이는 $\frac{1}{4}\big((0,0,0) + (2,0,0) + (0,4,0) + (2,0,4)\big)$이다.
- $d = 2 = \frac{1}{2}n$이면 $T = 2(1,1,1) - (0,0,2) = (2,2,0)$이고, 이 점은 $z = 0$ 위에 있다.
- 컴퓨터로 $a, b, l, m, n, d$를 무작위로 20 000번 골라 정확한 유리수 연산으로 확인한 결과, 두 직선은 $s = t = \frac{1}{2}$에서 위의 점에서 만나며, $T$가 평면 $OAB$ 위에 있을(스칼라 삼중곱(scalar triple product)이 0일) 필요충분조건이 $d = \frac{1}{2}n$임을 확인했다.

## 흔한 실수

- 처음부터 두 직선에 **같은** 매개변수를 써서 같다고 놓는 것. 이는 답 $s = t$를 미리 가정하는 것인데, 여기서 이 사실은 $\mathbf{k}$ 방정식에서 나온다.
- 성분 방정식 두 개만 풀고 멈추는 것. 공간의 두 직선이 만남을 보이려면 세 번째 방정식도 확인해야 한다.
- $a \neq 0$과 $n \neq 0$을 어디에 썼는지 밝히지 않는 것. 이 조건들이 있어야 나눗셈을 하여 $s$와 $t$를 구할 수 있다.

## STEP 너머

임의의 사면체에서 마주 보는 모서리의 중점을 잇는 세 직선(**이중중선**(bimedian))은 모두 무게중심(centroid), 즉 네 꼭짓점의 평균을 지나고, 각 선분은 그 점에서 이등분된다. 이는 삼각형의 중선(median)들이 무게중심에서 만난다는 사실의 3차원판이며, 점을 가중평균으로 생각하는 관점, 즉 무게중심 좌표(barycentric coordinates)와 아핀 좌표(affine coordinates)의 바탕이 되는 아이디어를 처음 맛보는 것이다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 여기서 사용한 벡터와 연립일차방정식의 관점을 발전시키며, 미지수보다 방정식이 많은 연립방정식이 언제 해를 갖는지도 다룬

다.

풀이

# STEP II 2003, 문제 6

순수수학 • 반복 함수와 적분

**STEP II 2003, 6번 문제**

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/03-s2-q6

## 핵심 아이디어

$f$를 한 번 더 적용한다는 것은 "1을 빼고, 음수가 된 부분은 축 위로 다시 뒤집어 올린다"는 뜻이다. 어떤 구간에서 값이 0과 1 사이에 있는 그래프에 이 조작을 하면, 그 구간은 띠 $0 \le y \le 1$ 안에서 그냥 위아래로 뒤집히고, 길게 뻗은 직선 팔에는 톱니가 하나 더 생긴다. 따라서 그래프는 지그재그, 곧 삼각파(triangle wave)가 되며, 이것을 알아차리면 마지막 소문항의 두 적분은 모두 똑같은 주기들 위에서의 합에 지나지 않는다.

## 풀이

### 그래프 그리기

두 가지 사실이 모든 일을 해낸다.

**점화식**(*recurrence*). $g_{n+1} = f \circ g_n$이므로 $g_{n+1}(x) = |g_n(x) - 1|$이다. 즉 $g_n$의 그래프를 아래로 1만큼 평행이동하고, $x$축 아래에 놓인 부분을 뒤집어 올리면 된다.

**대칭성**(*symmetry*). $f(2-x) = |1-x| = f(x)$이므로 $n \ge 2$일 때 $g_n(2-x) = g_{n-1}\big(f(2-x)\big) = g_{n-1}\big(f(x)\big) = g_n(x)$이고, $n = 1$일 때는 직접 확인된다. 따라서 모든 $g_n$은 직선 $x = 1$에 대하여 대칭이며, $x \ge 1$인 부분만 이해하면 충분하다.

먼저 $g_1(x) = |x - 1|$은 꼭짓점이 $(1, 0)$인 V자 모양이다.

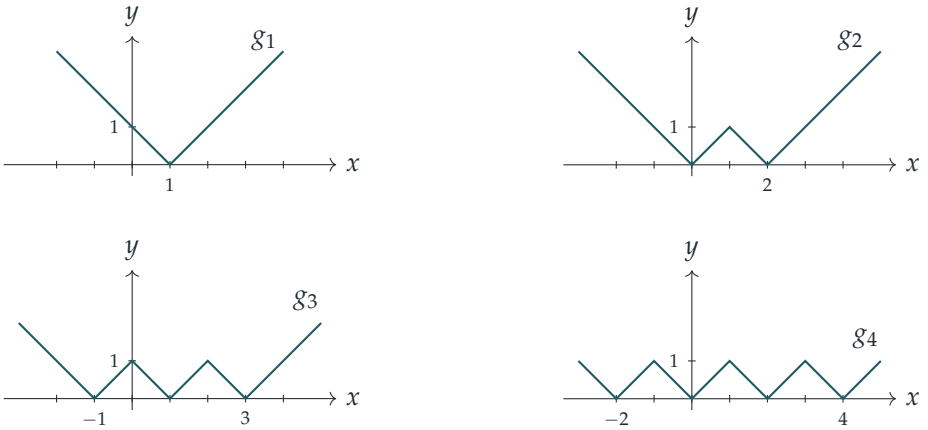
$g_2$의 경우: $[0, 2]$에서 $0 \le g_1 \le 1$이므로 $g_2 = 1 - |x - 1|$이다. 이것은 $x = 1$에서 1까지 올라가고 $x = 0$과 $x = 2$에서 0으로 내려오는 텐트 모양이다. $x \ge 2$일 때는 $g_2 = x - 2$이고, 대칭성에 의해 $x \le 0$일 때는 $g_2 = -x$이다. 따라서 $g_2$는 W자 모양이다.

그다음 단계마다 같은 일이 일어난다. 값이 $[0, 1]$에 있는 지그재그 부분은 위아래로 뒤집히

고, 직선 팔 $x-n$은 $|x-n-1|$이 되어 $[n, n+1]$ 위에 (그리고 대칭성에 의해 $[1-n, 2-n]$ 위에) 톱니가 하나 더 생긴다. $x$에서 가장 가까운 짝수까지의 거리와 가장 가까운 홀수까지의 거리를 각각 $d_{\text{even}}(x)$, $d_{\text{odd}}(x)$로 쓰면 다음을 얻는다.

$$g_n(x) = \begin{cases} 2-n-x, & x \le 2-n, \\ d_{\text{even}}(x)\ (n\text{이 짝수일 때}),\ d_{\text{odd}}(x)\ (n\text{이 홀수일 때}), & 2-n \le x \le n, \\ x-n, & x \ge n. \end{cases}$$

이는 점화식으로부터 수학적 귀납법(induction)에 의해 따라 나온다. 모든 실수 $x$에 대하여 $d_{\text{even}} + d_{\text{odd}} = 1$이므로(연속한 두 정수 사이에서 두 거리는 $t$와 $1-t$이다), "1에서 지그재그를 뺀 것"은 홀짝성(parity)을 바꾼다. 또 $[n, n+1]$에서 새로 생긴 조각 $n+1-x$는 정확히 $n+1$까지의 거리이고, $n+1$은 새로운 홀짝성을 가진 가장 가까운 정수이다. 왼쪽 부분은 $x=1$에 대한 대칭성으로부터 따라 나온다.




말로 설명하면 다음과 같다. $g_3$은 $-1, 1, 3$에서 영점을 갖고 0과 2에서 높이 1인 봉우리를 가지며, 팔은 $y=-1-x$와 $y=x-3$이다. $g_4$는 $-2, 0, 2, 4$에서 영점을 갖고 $-1, 1, 3$에서 높이 1인 봉우리를 가지며, 팔은 $y=-2-x$와 $y=x-4$이다. 네 그래프는 모두 $x=1$에 대하여 대칭이다.

### 적분

$n$이 짝수라 하자. $n \ge 2$이므로 구간 $[0, n]$은 $[2-n, n]$ 안에 들어 있고, 따라서 그 위에서 $g_n(x) = d_{\text{even}}(x)$이다.

> **생각해 보기** 왜 $[0, 2]$에서만 적분해도 충분할까?

두 함수 모두 주기(period)가 2이다. 2만큼 평행이동하면 짝수는 짝수로 옮겨지므로 $d_{\text{even}}(x+2) = d_{\text{even}}(x)$이고, $\left|\sin \frac{\pi(x+2)}{2}\right| = \left|-\sin \frac{\pi x}{2}\right| = h(x)$이다. $n$이 짝수이므로

$[0,n]$은 정확히 $\frac{n}{2}$개의 온전한 주기 $[0,2],[2,4],\ldots,[n-2,n]$으로 이루어진다. 따라서 $[0,n]$에서의 각 적분은 $[0,2]$에서의 적분의 $\frac{n}{2}$배이다.

$[0,2]$에서 $g_n$은 텐트 $1-|x-1|$, 즉 밑변이 2이고 높이가 1인 삼각형이므로

$$\int_0^2 g_n(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 1 = 1.$$

$[0,2]$에서 $\frac{\pi x}{2}\in[0,\pi]$이므로 $\sin\frac{\pi x}{2}\geq 0$이고, 절댓값(modulus)을 없앨 수 있다.

$$\int_0^2 h(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \sin\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x = \Big[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}\Big]_0^2 = \frac{2}{\pi}+\frac{2}{\pi} = \frac{4}{\pi}.$$

따라서

$$\int_0^n \big(h(x)-g_n(x)\big)\,\mathrm{d}x = \frac{n}{2}\Big(\frac{4}{\pi}-1\Big) = \frac{2n}{\pi}-\frac{n}{2},$$

이므로 증명이 끝난다.

## 검산

- 값 하나를 골라 손으로 반복 적용해 본다. $g_4(-1)$: $-1\to 2\to 1\to 0\to 1$이므로 $g_4(-1)=1$이고, 그림에서처럼 봉우리이다.
- $4/\pi\approx 1.27>1$이므로 답은 양수이다. 사인 아치는 밑변과 높이가 같은 곧은 변의 텐트보다 위로 볼록하게 솟아 있으며, 이는 두 그래프의 그림과 일치한다.
- 수치적으로, $n=2$일 때 심프슨 공식(Simpson's rule)은 0.273240을 주며, 이는 $\frac{4}{\pi}-1\approx 0.273240$과 일치한다. $n=4,6,8,10$에서도 마찬가지로 일치한다.

## 흔한 실수

- 왼쪽 부분을 잊는 것: $n\geq 3$이면 $x<0$에서 그래프는 직선이 아니다. 대칭성 $g_n(2-x)=g_n(x)$을 이용하는 것이 이 부분을 바르게 그리는 가장 빠른 방법이다.
- $\sin\frac{\pi x}{2}$를 절댓값 없이 $[0,n]$에서 적분하는 것: 그러면 짝수 $n$에 대하여 $\frac{2n}{\pi}$ 대신 0이 나온다.

## STEP 너머

간단한 사상을 반복 적용하면서 그래프가 어떻게 변하는지 지켜보는 것은 이산 동역학계(discrete dynamical systems)의 출발점이다. 여기서 지그재그는 삼각파로 자리 잡으며, 이와 밀접하게 관련된 "텐트 사상(tent map)"은 혼돈(chaos)의 고전적인 예이다. $h$와 삼각파를 비교하는 것은 또한 푸리에 급수(Fourier series)를 가리킨다. 푸리에 급수에서는

삼각파를 사인과 코사인의 합으로 나타내며, |sin|은 가장 먼저 다루는 예 가운데 하나이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에는 푸리에 급수에 대한 읽기 쉬운 입문이 실려 있다.

풀이

# STEP II 2003, 문제 7

순수수학 • 이상적분과 급수

**STEP II 2003, 7번 문제**

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/03-s2-q7

## 핵심 아이디어

$\ln x \times$ (거듭제곱 꼴의 $x$) 꼴의 피적분함수(integrand)는 부분적분(integration by parts)에 안성맞춤이다. 로그를 미분하면 로그가 사라지기 때문이다. 이것으로 첫 번째 적분을 처리한다. 문제의 나머지 부분은 정확한 값 $2/(n^2\mathrm{e})$를 거꾸로 이용한다. 즉 이 값 덕분에 $1/n^2$을 적분으로 **나타낼** 수 있다. 그다음 모든 적분의 아래끝(lower limit)을 같은 곳으로 옮기는데, 이렇게 하면 각 적분은 커질 수밖에 없다. 마지막으로 적분 안에서 등비급수(geometric series)를 더한다.

## 풀이

### 적분

$a > 1, n > 0$일 때

$$I_n(a) = \int_a^\infty \frac{\ln x}{x^{n+1}}\,\mathrm{d}x.$$

이라 하자. $u = \ln x$, $\mathrm{d}v = x^{-n-1}\,\mathrm{d}x$로 놓고 부분적분하면 $v = -\frac{1}{n}x^{-n}$이다(여기서 $n \neq 0$을 이용한다). 구간 $[a, X]$에서

$$\begin{aligned}\int_a^X \frac{\ln x}{x^{n+1}}\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{\ln x}{nx^n}\right]_a^X + \frac{1}{n}\int_a^X x^{-n-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\ln a}{na^n} - \frac{\ln X}{nX^n} + \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{a^n} - \frac{1}{X^n}\right).\end{aligned}$$

이제 $X \to \infty$로 보내자. $n > 0$이므로 $X^{-n} \to 0$이다. 나머지 항에 대해서는 $Y = X^n$으로 놓으면 $\ln X = \frac{1}{n}\ln Y$이고

$$\frac{\ln X}{X^n} = \frac{1}{n}\cdot\frac{\ln Y}{Y} \to 0,$$

이다. $X \to \infty$일 때 $Y \to \infty$이고, $(\ln Y)/Y \to 0$은 가정해도 되기 때문이다. (여기서 $(\ln X)/X \to 0$을 그대로 인용할 수는 없다. $0 < n < 1$이면 $X^n$은 $X$보다 느리게 커지기 때문이다.) 따라서 이 적분은 수렴(converge)하고

$$I_n(a) = \frac{\ln a}{na^n} + \frac{1}{n^2 a^n}.$$

이다. $a = \mathrm{e}^{1/n}$에서는 $a^n = \mathrm{e}$, $\ln a = 1/n$이므로

$$I_n\left(\mathrm{e}^{1/n}\right) = \frac{1}{n^2\mathrm{e}} + \frac{1}{n^2\mathrm{e}} = \frac{2}{n^2\mathrm{e}},$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

### 두 적분의 비교

$1 < a < b$이면

$$I_n(a) - I_n(b) = \int_a^b \frac{\ln x}{x^{n+1}}\,\mathrm{d}x.$$

이다. $x > 1$에서 $\ln x > 0$이고 $x^{n+1} > 0$이므로 피적분함수는 $[a, b]$에서 항상 양수이다. 또한 연속이고 $b > a$이므로 이 적분은 양수이다. 따라서 $I_n(b) < I_n(a)$이다. 아래끝을 오른쪽으로 옮기면 양의 넓이 한 조각을 버리는 셈이다.

### 부등식

첫 번째 부분에 의해 모든 양의 정수 $n$에 대하여

$$\frac{1}{n^2} = \frac{\mathrm{e}}{2} I_n\left(\mathrm{e}^{1/n}\right).$$

이다.

> **생각해 보기** 합의 각 항은 아래끝 $\mathrm{e}^{1/n}$이 서로 다르지만, 우변에는 아래끝이 $\mathrm{e}^{1/N}$ 하나뿐이다. 어떻게 한쪽에서 다른 쪽으로 넘어갈 수 있을까?

$1 \le n \le N$이라 하자. 그러면 $1/N \le 1/n$이므로 $1 < \mathrm{e}^{1/N} \le \mathrm{e}^{1/n}$이다. $n < N$이면 이 부등식은 등호 없이 성립하고, 두 번째 부분($a = \mathrm{e}^{1/N}$, $b = \mathrm{e}^{1/n}$)에 의해

$$I_n\left(\mathrm{e}^{1/n}\right) < I_n\left(\mathrm{e}^{1/N}\right);$$

이다. $n = N$이면 양변이 같다. $n = 1, \ldots, N$에 대하여 더하면, $N > 1$이므로 $n < N$인 항이 적어도 하나(예를 들어 $n = 1$) 있어서 합에서도 등호가 성립하지 않는다.

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = \frac{\mathrm{e}}{2} \sum_{n=1}^{N} I_n\left(\mathrm{e}^{1/n}\right) < \frac{\mathrm{e}}{2} \sum_{n=1}^{N} I_n\left(\mathrm{e}^{1/N}\right).$$

바로 이 지점에서 $N > 1$이 필요하다. $N = 1$이면 양변이 같아진다.

이제 적분들을 더하는 일만 남았다. 같은 구간에서 수렴하는 적분들의 유한합은 합의 적분과 같으므로

$$\sum_{n=1}^{N} I_n\left(\mathrm{e}^{1/N}\right) = \int_{\mathrm{e}^{1/N}}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} x^{-(n+1)}\right) \ln x \,\mathrm{d}x.$$

이다. 괄호 안은 첫째항이 $x^{-2}$, 공비가 $x^{-1} \neq 1 (x > 1$이므로$)$이고 항이 $N$개인 등비급수이다.

$$\sum_{n=1}^{N} x^{-(n+1)} = \frac{x^{-2}\left(1 - x^{-N}\right)}{1 - x^{-1}} = \frac{1 - x^{-N}}{x^2 - x},$$

여기서 마지막 등호는 분자와 분모에 $x^2$을 곱하여 얻는다. 그러므로

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} < \frac{\mathrm{e}}{2} \int_{\mathrm{e}^{1/N}}^{\infty} \left(\frac{1 - x^{-N}}{x^2 - x}\right) \ln x \,\mathrm{d}x,$$

이고, 이것이 증명하려던 것이다.

## 검산

- $I_n(a)$의 공식을 $a$에 대하여 미분해 보자. 미적분학의 기본정리(fundamental theorem of calculus)가 요구하는 대로 피적분함수에 음의 부호를 붙인 $-\ln a / a^{n+1}$이 나와야 한다.
- 수치로 확인해 보자. $x = \mathrm{e}^u$로 치환하면 마지막 부분의 적분은 $\int_{1/N}^{\infty} u(1 - \mathrm{e}^{-Nu})/(\mathrm{e}^u - 1)\,\mathrm{d}u$가 된다. $N = 2$일 때 우변은 약 1.4865이고, 좌변은 $1 + \frac{1}{4} = 1.25$이다. $N = 10$일 때 우변은 약 2.0579이고, 좌변은 1.5498이다.
- $N \to \infty$이면 우변은 $\frac{\mathrm{e}}{2}\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2 - x}\,\mathrm{d}x$로 수렴하고, $x = 1/t$로 치환하면 이것은 $\frac{\mathrm{e}}{2}\int_0^1 \frac{-\ln t}{1-t}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}}{2} \cdot \frac{\pi^2}{6} \approx 2.236$이 된다. 이 값은 마땅히 그래야 하듯 $\pi^2/6 \approx 1.645$보다 넉넉히 크다.

## 흔한 실수

- $(\ln X)/X^n$을 없애려고 $(\ln X)/X \to 0$을 그대로 쓰는 것. 이것은 $n \geq 1$일 때만 통하지만, 결과는 모든 $n > 0$에 대하여 주장되어 있다.
- 아래끝을 반대 방향으로 옮기는 것. $\mathrm{e}^{1/N}$은 $\mathrm{e}^{1/n}$들 가운데 **가장 작은** 값이므로 모든 적분이 커진다.
- 이유를 대지 않고 등호 없는 부등식을 주장하는 것. $n = N$인 항에서는 등호가 성립하므로, 등호가 빠지는 것은 $n < N$인 항들 덕분이며 이런 항은 $N > 1$이기 때문에 존재한다.

## STEP 너머

수를 적분으로 나타낸 다음 적분 기호 안에서 합하는 것은 해석학(analysis)의 표준적인 기법이다. 이를 극한까지 밀고 가면 $\sum 1/n^2 = \int_0^1 \frac{-\ln t}{1-t}\,\mathrm{d}t$를 얻는데, 이것은 $\pi^2/6$에 이르는 한 가지 길이다. $N \to \infty$로 보내는 것은 무한합과 이상적분(improper integral)의 순서를 바꾸는 일이다. 이렇게 순서를 바꾸려면 단조 수렴 정리(monotone convergence theorem)나 지배 수렴 정리(dominated convergence theorem)를 통한 정당화가 필요하며, 이 정리들은 해석학 입문이나 측도론(measure theory) 강좌에서 배운다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해)는 이런 순서 교환이 왜 실패할 수 있는지, 그리고 언제 안전한지를 살펴보기에 좋은 친절한 책이다.

풀이

# STEP II 2003, 문제 8

순수수학 • 변수분리형 미분방정식

**STEP II 2003, 8번 문제**

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/03-s2-q8

## 핵심 아이디어

이 방정식은 1계(first order)이며 변수분리형(separable)이다. 즉 $\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$가 $t$에 대한 유리함수(rational function)와 같다. 이차식을 $t+1$로 나누면 그 함수는 다항식과 간단한 분수의 합으로 쪼개지고, 각 항은 곧바로 적분된다. 정상점(stationary point)은 해를 미분할 필요 없이 미분방정식(differential equation) 자체에서 바로 얻어진다. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0$인 곳은 정확히 이차식 $t^2-3t+2$가 0이 되는 곳이다.

## 풀이

### $y$ 구하기

다항식의 나눗셈(polynomial division)을 하면

$$\frac{t^2-3t+2}{t+1} = t-4+\frac{6}{t+1},$$

이다. 실제로 $(t+1)(t-4)+6 = t^2-3t-4+6 = t^2-3t+2$이기 때문이다.

해는 $y=A>0$에서 출발해야 한다. 만약 $y$가 어느 순간 0이 된다면, 이 선형 방정식의 해의 유일성(uniqueness)에 의해 그 해는 영해가 되어야 하고, 이는 $y(0)=A$에 모순이다. 따라서 (계수가 정의되는 $t>-1$에서) 항상 $y>0$이고, 양변을 $y$로 나눌 수 있다.

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -k\left(t-4+\frac{6}{t+1}\right).$$

0부터 $t$까지 적분하고 $\ln 1 = 0$을 이용하면

$$\ln\frac{y}{A} = -k\left(\frac{t^2}{2}-4t+6\ln(t+1)\right),$$

이므로

$$\boxed{y = A\,(t+1)^{-6k}\,\mathrm{e}^{-k(t^2/2-4t)} = A\,(t+1)^{-6k}\,\mathrm{e}^{k(8t-t^2)/2}}.$$

**정상값**

미분방정식으로부터

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -k\,\frac{(t-1)(t-2)}{t+1}\,y.$$

$k \neq 0$이라고 가정한다(그렇지 않으면 $y \equiv A$이고 모든 점이 정상점이다). $y > 0$이고 $t+1 > 0$이므로 도함수는 $t = 1$과 $t = 2$에서만 0이 되며, 각각이 단순근(simple root)이므로 두 점에서 모두 부호가 바뀐다. 따라서 정상값(stationary value)은 정확히 두 개이다.

$$y(1) = A \cdot 2^{-6k}\,\mathrm{e}^{-k(1/2-4)} = A \cdot 2^{-6k}\,\mathrm{e}^{7k/2},$$
$$y(2) = A \cdot 3^{-6k}\,\mathrm{e}^{-k(2-8)} = A \cdot 3^{-6k}\,\mathrm{e}^{6k}.$$

두 값의 비는

$$\frac{y(1)}{y(2)} = \frac{3^{6k}}{2^{6k}}\,\mathrm{e}^{7k/2-6k} = \left(\frac{3}{2}\right)^{6k}\mathrm{e}^{-5k/2},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

> ? **생각해 보기** 두 정상값 중 어느 것이 더 큰가?

로그를 취하면

$$\ln\frac{y(1)}{y(2)} = k\left(6\ln\tfrac{3}{2} - \tfrac{5}{2}\right),$$

이고 $6\ln 1.5 \approx 2.433 < 2.5$이므로 괄호 안은 음수(약 $-0.067$)이다. 따라서 $k > 0$이면 $y(1) < y(2)$이고 $k < 0$이면 $y(1) > y(2)$이다. 차이가 작으므로 그래프의 굴곡은 완만하다. 마찬가지로

$$\ln\frac{y(1)}{A} = k\left(\tfrac{7}{2} - 6\ln 2\right) \approx -0.659k, \qquad \ln\frac{y(2)}{A} = k(6 - 6\ln 3) \approx -0.592k,$$

이므로 $k > 0$이면 두 정상값 모두 $A$보다 작고, $k < 0$이면 모두 $A$보다 크다.

**$t \to +\infty$일 때의 행동**

다음과 같이 쓴다.

$$\ln\frac{y}{A} = -k\left(\frac{t^2}{2} - 4t + 6\ln(t+1)\right).$$

$t \to \infty$일 때 괄호 안은 $+\infty$로 발산하며, $\frac{1}{2}t^2$이 지배한다($\ln$ 항은 훨씬 느리게 증가한다). 따라서

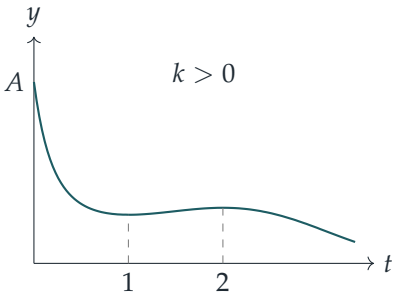
- $k > 0$이면 $\ln(y/A) \to -\infty$이므로 $y \to 0$이다($\mathrm{e}^{-kt^2/2}$처럼 매우 빠르게).
- $k < 0$이면 $\ln(y/A) \to +\infty$이므로 $y \to \infty$이다($\mathrm{e}^{|k|t^2/2}$처럼).

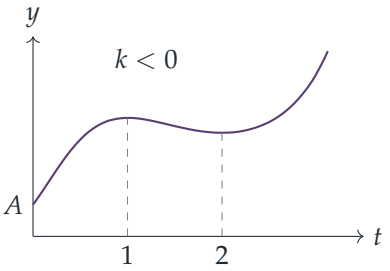
### 그래프 그리기

$t > 0$에서 $\frac{dy}{dt}$의 부호는 $-k(t-1)(t-2)$의 부호와 같다.

- $k > 0$: $y$는 $(0,1)$에서 $A$부터 감소하여 $t = 1$에서 극솟값(local minimum)에 이르고, 증가하여 $t = 2$에서 극댓값(local maximum)에 이른 뒤(여전히 $A$보다 작다), 다시 0을 향해 감소한다.
- $k < 0$: $y$는 $A$부터 증가하여 $t = 1$에서 극댓값에 이르고, 감소하여 $t = 2$에서 극솟값에 이른 뒤(여전히 $A$보다 크다), 한없이 증가한다.

아래 그래프는 $A = 1, k = \pm 2$로 정확하게 그린 것이다.




## 검산

- $t = 0$에서 공식은 $A \cdot 1 \cdot e^0 = A$를 준다. $\ln y = \ln A - 6k \ln(t+1) - k(t^2/2 - 4t)$를 미분하면 $\frac{y'}{y} = -\frac{6k}{t+1} - k(t-4)$이고, 이를 다시 정리하면 원래 방정식이 된다.
- 수치적으로, $A = 1.5, k = \pm 2$로 놓고 미분방정식을 단계별로 적분(룽게–쿠타(Runge–Kutta) 방법)하면 $t = 3$에서 공식과 유효숫자 여덟 자리까지 일치한다. $k = 2$일 때 비 $y(1)/y(2)$는 0.8742로, $(1.5)^{12}e^{-5}$와 일치한다.

## 흔한 실수

- 나눗셈을 틀리는 경우: 나머지는 2가 아니라 6이다. 다시 $t+1$을 곱해서 확인하라.
- 비를 뒤집는 경우: 구하는 것은 $y(1)/y(2)$이며, 지수의 부호 때문에 실수로 $y(2)/y(1)$을 구하기 쉽다.
- 두 전환점(turning point)을 $A$의 반대쪽에 그리는 경우: 앞의 계산에 따르면 $k > 0$일 때는 둘 다 $A$보다 아래에, $k < 0$일 때는 둘 다 $A$보다 위에 있다.

## STEP 너머

이 방정식은 선형(linear) 방정식 $y' + p(t)y = 0$이며, 그 해 $A\exp(-\int_0^t p)$는 적분인자법(integrating-factor method)의 가장 간단한 경우이다. 또한 이 문제는 상미분방정식(ODE) 첫 강의에서 만나게 될 일반적인 원리를 보여 준다. 즉 방정식을 풀지 않고도 정상점, 해의 부호, 증가나 감소와 같은 정성적 특징을 방정식에서 직접 읽어 낼 수 있는 경우가 많다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 두 아이디어를 모두 다루며, $y$가 결코 0이 되지 않음을 보일 때 사용한 유일성 정리도 포함하고 있다.

풀이

# STEP II 2003, 문제 9

역학 • 최대 정지 마찰과 평형

**STEP II 2003, 9번 문제**

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/03-s2-q9

## 핵심 아이디어

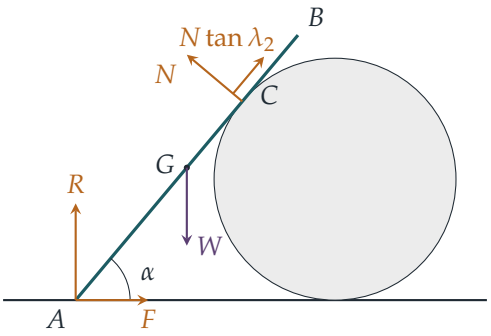
마찰계수(coefficient of friction)가 $\tan\lambda_1$과 $\tan\lambda_2$로 주어져 있으므로, 자연스러운 도구는 **전체 반력**(total reaction, 수직항력과 마찰력을 하나의 힘으로 합친 것)이다. 마찰이 한계 상태(limiting)일 때, 전체 반력은 법선과 마찰각(angle of friction) $\lambda$를 이룬다. 그러면 막대에는 방향을 알고 있는 세 힘만 작용하게 되고, 수평 방향과 수직 방향으로 분해(resolving)하면 미지의 크기 두 개에 대한 방정식 두 개를 얻는다. 실제로 해야 할 일은 각 마찰력이 어느 방향을 향하는지 정하는 것뿐이다.

## 풀이

### 모형과 마찰력의 방향

막대는 균일한 강체(rigid) 막대로, 원기둥은 고정된 것으로 본다. 막대는 원기둥에 접선(tangent)을 따라 닿으므로, $C$에서의 수직항력(normal reaction)은 막대에 수직이다. 원기둥이 $A$에서 수평 방향으로 양의 쪽에 있다고 하자. 그러면 막대에 작용하는 힘은 다음과 같다.

- 무게 $W$: 중점 $G$에서 연직 아래로 작용한다.
- $A$에서: 연직 위로 향하는 수직항력 $R$과 바닥을 따라 작용하는 마찰력(friction) $F$.
- $C$에서: 막대에 수직이고 위쪽, 그리고 $A$ 쪽으로 향하는 수직항력 $N$과, 막대를 따라 작용하는 마찰력.




**생각해 보기** $A$와 $C$에서 마찰력은 어느 방향으로 작용하는가? 막대가 반대 방향으로 미끄러지기 직전일 수도 있는가?

두 접촉을 유지하면서 막대가 움직일 수 있는 방식은 하나뿐이다. $A$가 바닥을 따라 미끄러지면 각 $\alpha$가 변하고 막대는 원기둥 위를 미끄러진다. $A$가 원기둥에서 멀어지면 막대는 내려앉고($\alpha$가 감소하고), $C$에 있는 막대의 점은 원기둥에 대하여 막대를 따라 **아래로** 미끄러진다. $A$가 원기둥 쪽으로 움직이면 모든 것이 반대가 된다.

두 번째 경우라면 $A$에서의 마찰력은 원기둥에서 멀어지는 쪽을, $C$에서의 마찰력은 막대를 따라 아래쪽을 향할 것이다. 그러면 세 수평 방향 힘($A$에서의 마찰력, $N$의 수평 성분, $C$에서의 마찰력의 수평 성분)이 모두 원기둥에서 멀어지는 쪽을 향하게 되어 수평 방향의 평형이 불가능하다. 따라서 극한 평형(limiting equilibrium)에서 막대는 아래로 미끄러지기 직전이다. 즉 $A$에서 막대에 작용하는 마찰력은 원기둥 **쪽으로**, $C$에서의 마찰력은 막대를 따라 **위쪽으로** 작용하며, 그림에 그린 그대로이다.

### 전체 반력

$A$에서의 전체 반력을 $S$, $C$에서의 전체 반력을 $T$라 하자. 두 접촉점 모두에서 마찰이 한계 상태이므로 다음이 성립한다.

- $F = R\tan\lambda_1$이므로, $S$는 위쪽 연직 방향과 각 $\lambda_1$을 이루며 원기둥 쪽으로 기울어 있다.
- 막대가 수평과 각 $\alpha$를 이루므로, $C$에서의 법선은 위쪽 연직 방향과 각 $\alpha$를 이루며 $A$ 쪽으로 기울어 있다. 막대를 따라 위로 향하는 마찰력은 $T$를 연직 방향 쪽으로 $\lambda_2$만큼 돌려놓는다. 따라서 $T$는 원기둥에서 먼 쪽에서 재어 위쪽 연직 방향과 각 $\alpha - \lambda_2$를 이룬다.

막대에 대하여 힘을 분해하면

$$\begin{aligned} \text{수평 방향:} \quad & S\sin\lambda_1 = T\sin(\alpha - \lambda_2), \\ \text{수직 방향:} \quad & S\cos\lambda_1 + T\cos(\alpha - \lambda_2) = W. \end{aligned}$$

$T$를 소거하기 위해 첫째 식에 $\cos(\alpha-\lambda_2)$를, 둘째 식에 $\sin(\alpha-\lambda_2)$를 곱한 다음 둘째 식에서 첫째 식을 빼면

$$S\left[\cos\lambda_1\sin(\alpha-\lambda_2)+\sin\lambda_1\cos(\alpha-\lambda_2)\right]=W\sin(\alpha-\lambda_2),$$
$$S\sin(\alpha+\lambda_1-\lambda_2)=W\sin(\alpha-\lambda_2),$$

이다. 여기서 sin의 덧셈정리(addition formula)를 이용하였다. $\alpha\neq\lambda_2-\lambda_1$이라고 주어졌으므로 $\sin(\alpha+\lambda_1-\lambda_2)\neq 0$이다(모든 각이 예각이므로 $\alpha+\lambda_1-\lambda_2$는 $-\frac{\pi}{2}$와 $\pi$ 사이에 엄격히 놓인다). 따라서 나눌 수 있고

$$S=\frac{W\sin(\alpha-\lambda_2)}{\sin(\alpha+\lambda_1-\lambda_2)}.$$

$A$에서의 마찰력은 $S$의 수평 성분, 즉 $F=S\sin\lambda_1$이므로

$$F=\frac{W\sin\lambda_1\,\sin(\alpha-\lambda_2)}{\sin(\alpha+\lambda_1-\lambda_2)},$$

이고, 이것이 구하는 결과이다. 같은 방법으로 $T=W\sin\lambda_1/\sin(\alpha+\lambda_1-\lambda_2)$이다.

**생각해 보기** 모멘트(moment)를 한 번도 잡지 않았다. 수상하지 않은가?

이 문제에서는 그렇지 않다. 두 방향으로 분해하는 것만으로 미지의 크기 두 개를 구하기에 충분하다. $A$에 대한 모멘트를 잡으면($S$는 $A$에 대한 모멘트가 없고, 막대를 따라 작용하는 $C$에서의 마찰력도 마찬가지이다) $N=T\cos\lambda_2$와 함께 $N\cdot AC=W\cdot AG\cos\alpha$를 얻는다. 이것은 극한 평형이 되려면 $C$가 어디에 있어야 하는지만 알려 준다.

$$\frac{AC}{AB}=\frac{\cos\alpha\,\sin(\alpha+\lambda_1-\lambda_2)}{2\sin\lambda_1\cos\lambda_2}.$$

주어진 조건 $AC>CB$는 마찰력을 구하는 데에는 필요하지 않다. 물리적으로는 $S>0$과 $T>0$도 필요한데, 이는 정확히 $\alpha>\lambda_2$일 때 성립한다. $\lambda_2$보다 완만한 각도로 원기둥에 기대어 있는 막대는 원기둥을 따라 아래로 미끄러지기 직전일 수 없다.

## 검산

- 매끄러운 바닥, $\lambda_1=0$: 공식은 당연히 $F=0$을 준다.
- $\alpha=\lambda_2$: 이때 $T$는 연직 방향이고, $T$ 혼자서 막대를 받치며 $F=0$이다. 이것은 막대가 원기둥에 겨우 기대어 있을 수 있는 경계 각도이다.
- 수치적으로 $\lambda_1=0.3$, $\lambda_2=0.5$, $\alpha=1.0$(라디안)으로 두고 성분 방정식을 $R$와 $N$에 대해 직접 풀면 $F\approx 0.1975W$를 얻으며, 공식과 일치한다. 이 경우 $A$에 대한 모멘트로부터 $C$는 막대의 약 0.75 지점에 놓이며, $AC>CB$와 모순되지 않는다.

## 흔한 실수

- $C$에서의 반력을 연직 방향이거나 원기둥의 "꼭대기"에 수직이라고 보는 것. 반력은 공통 접선, 즉 막대 자체에 수직이다.
- 마찰력의 방향을 확인하지 않고 정하는 것. 잘못된 조합을 고르면 수평 방향의 평형이 불가능해진다.
- $C$에서의 전체 반력을 반대쪽으로 기울이는 것. 그러면 $\alpha - \lambda_2$ 대신 $\alpha + \lambda_2$가 나온다.

## STEP 너머

전체 반력을 법선과 각 $\lambda$를 이루도록 잡는 것은 **마찰 원뿔**(cone of friction)의 바탕이 되는 아이디어이다. 전체 반력이 법선을 축으로 하는 반각 $\lambda$의 원뿔 안에 머무는 한 접촉은 유지될 수 있다. 세 힘이 작용할 때는 작용선(line of action)들이 한 점을 지나야 하므로, 많은 정역학(statics) 문제가 기하 문제로 바뀐다. 거친 접촉이 여러 개 있어서 어느 쪽이 먼저 미끄러지는지가 중요한 문제들은 강체 정역학에 대한 좋은 입문이 된다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 마찰과 강체의 평형을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

# STEP II 2003, 문제 10

역학 • 마찰이 있는 구속 운동

**STEP II 2003, 10번 문제**

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/03-s2-q10

## 핵심 아이디어

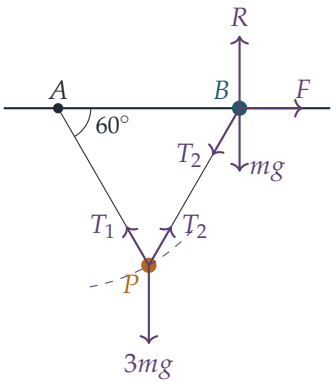
처음에 $AP = PB = AB = \ell$이므로 $APB$는 정삼각형(equilateral triangle)이다. $AP$가 팽팽하게(taut) 유지되므로 $P$는 $A$를 중심으로 하는 원 위를 움직인다. 모든 것이 정지 상태에서 출발하므로 구심(centripetal) 항이 없고, $P$의 초기 가속도는 그 원의 접선(tangent) 방향이어야 한다. 이것으로 가속도의 방향이 정해진다. 또한 $P$는 항상 $AB$ 위에 놓인 이등변삼각형(isosceles triangle)의 꼭짓점에 있으므로, $P$의 수평 위치는 언제나 $B$의 수평 위치의 절반이다. 마지막 부분에서는 $B$와 $P$ 각각에 대해 뉴턴(Newton)의 제2법칙을 쓴다. $P$에 대해 가속도 방향($AP$에 수직인 방향)으로 성분을 분해하면(resolving) $AP$의 장력(tension)은 전혀 나타나지 않는다.

## 풀이

$B$와 $P$를 입자(particle)로, 줄을 가볍고 늘어나지 않는 것으로 모형화한다. 줄의 두 부분은 모두 팽팽하게 유지된다. $A$를 원점으로 잡고, 철사가 $x$축을 따라 놓이며 $B$가 처음에 $(\ell, 0)$에 있도록 한다. 각 $PAB$를 $\theta$라 하자. $AP = PB = \ell$이므로

$$B = (2\ell\cos\theta,\, 0), \qquad P = (\ell\cos\theta,\, -\ell\sin\theta),$$

이고, 처음에 $\theta = \frac{\pi}{3}$이다.




### $P$의 가속도의 방향

$AP = \ell$이 고정되어 있으므로 $P$는 반지름이 $\ell$이고 $A$를 중심으로 하는 원(그림의 점선) 위를 움직인다. 원 위를 움직이는 점의 가속도는 중심을 향하는 성분 $\ell\dot{\theta}^2$와 접선 방향의 성분 $\ell\ddot{\theta}$를 가진다. 계가 정지 상태에서 놓이므로 처음에는 $\dot{\theta} = 0$이다. 따라서 $P$의 초기 가속도는 접선 방향, 즉 $AP$에 수직인 방향을 향한다.

$AP$는 수평과 $60°$의 각을 이루므로, $AP$에 수직인 방향은 수평과 $30°$의 각을 이룬다. 가속도의 크기를 $a$라 하면

$$a_1 = a\cos 30° = \tfrac{\sqrt{3}}{2}a, \qquad a_2 = a\sin 30° = \tfrac{1}{2}a,$$

이고, 따라서 요구한 대로 $a_1 = \sqrt{3}\,a_2$이다.

$\theta$로 나타내면 다음과 같다. $P$의 위치를 미분하고 $\dot{\theta} = 0$을 대입하면 초기 가속도 $\ell\ddot{\theta}(-\sin\theta, -\cos\theta)$를 얻는다. $\ddot{\theta} > 0$이면 $P$는 아래쪽이면서 $A$ 쪽으로 움직인다. 그 크기는 $a = \ell\ddot{\theta}$이다.

### $B$의 가속도

$P$는 $AB$의 수직이등분선(perpendicular bisector) 위에 있으므로, $B$의 $x$좌표는 항상 $P$의 것의 정확히 두 배이다. 두 번 미분하면 $B$의 가속도가 항상 $P$의 수평 가속도의 두 배임을 알 수 있다. 따라서 요구한 대로 $B$의 초기 가속도는 크기가 $2a_1$이고 $A$를 향한다.

> ? **생각해 보기** $B$가 $A$ 쪽으로 움직인다고 말할 수 있는 이유는 무엇이며, 마찰력(friction)은 어느 방향으로 작용하는가?

$P$가 떨어지면 $\theta$가 증가하므로 $x_B = 2\ell\cos\theta$는 감소한다. 따라서 $B$는 $A$ 쪽으로 미끄러지고, $B$에 작용하는 마찰력은 $A$에서 멀어지는 방향(양의 $x$ 방향)으로 작용한다. 여기서는 $B$가 실제로 움직인다고 가정하고 있다. 문제에서 마찰력을 미끄러지는 동안의 값인 $\frac{\sqrt{3}}{6}R$로 주고 있으므로 이 가정이 확인된다.

### 초기 가속도의 크기

$AP$와 $PB$의 장력을 각각 $T_1$, $T_2$라 하자. $B$에 작용하는 수직항력(normal reaction)을 $R$, 마찰력을 $F = \frac{\sqrt{3}}{6}R$라 하자. $P$의 초기 가속도의 크기를 $a$로 쓰면 $a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}a$이고, $B$의 가속도는 $A$를 향하는 $2a_1 = \sqrt{3}\,a$이다.

**구슬**(*bead*) $B$. 줄 $BP$는 $B$를 수평 아래 $60^\circ$ 방향으로, $A$ 쪽으로 당긴다. $B$는 연직 방향의 가속도가 없으므로 연직 방향으로 분해하면

$$R = mg + \tfrac{\sqrt{3}}{2}T_2.$$

이다. $A$를 향하는 방향을 양의 방향으로 잡고 수평 방향으로 분해하면

$$m(\sqrt{3}\,a) = \tfrac{1}{2}T_2 - \tfrac{\sqrt{3}}{6}\left(mg + \tfrac{\sqrt{3}}{2}T_2\right) = \tfrac{1}{4}T_2 - \tfrac{\sqrt{3}}{6}mg,$$

이므로

$$T_2 = 4\sqrt{3}\,ma + \tfrac{2\sqrt{3}}{3}mg. \tag{1}$$

이다.

**입자** $P$. $P$의 가속도 방향, 즉 수평 아래 $30^\circ$로 아래쪽이면서 $A$ 쪽을 향하는 방향으로 분해한다. 이 방향은 $AP$에 수직이므로 $T_1$은 아무 기여도 하지 않는다. 무게 $3mg$는 이 방향과 $60^\circ$의 각을 이루므로 $3mg\cos 60^\circ = \frac{3}{2}mg$만큼 기여한다. 장력 $T_2$는 $PB$를 따라, 수평 위 $60^\circ$로 위쪽이면서 $A$에서 멀어지는 방향으로 작용한다. 이것은 가속도 방향과 $150^\circ$의 각을 이루므로 $T_2\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}T_2$만큼 기여한다. 따라서

$$3ma = \tfrac{3}{2}mg - \tfrac{\sqrt{3}}{2}T_2. \tag{2}$$

이다. (1)을 (2)에 대입하면

$$3ma = \tfrac{3}{2}mg - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\left(4\sqrt{3}\,ma + \tfrac{2\sqrt{3}}{3}mg\right) = \tfrac{3}{2}mg - 6ma - mg,$$

$$9ma = \tfrac{1}{2}mg,$$

이므로 $P$의 초기 가속도의 크기는

$$a = \frac{g}{18},$$

이고, 이는 요구한 결과이다.

이 답은 모순이 없다. (1)에서 $T_2 = \frac{8\sqrt{3}}{9}mg > 0$이므로 줄 $PB$는 팽팽하다. 그러면 $R = \frac{7}{3}mg > 0$이다. $P$에 대해 수평 방향으로 분해하면 $T_1 = T_2 + 6ma_1 = \frac{19\sqrt{3}}{18}mg > 0$이므로 $AP$도 팽팽하다.

## 검산

- 사용하지 않은 $P$의 연직 방향 식: $\frac{\sqrt{3}}{2}(T_1 + T_2) - 3mg = \frac{35}{12}mg - 3mg = -\frac{1}{12}mg$. 이는 $-3ma_2 = -3m\cdot\frac{g}{36}$와 같으며, 마땅히 그래야 한다.

- 수치적으로, $B$와 $P$의 위치를 미분하여 $a_1/a_2 \approx 1.7320508$과 $a_B/a_1 = 2$를 얻었다. 그다음 $g = 9.81$로 두고 세 힘의 방정식을 $T_1$, $T_2$, $\ddot{\theta}$에 대해 풀었다. 그 결과 $|a| = 0.545 = g/18$이고, $T_2/mg \approx 1.5396$, $R/mg \approx 2.3333$이었다.
- 마찰이 없다면 (1)은 $T_2 = 2\sqrt{3}\,ma$가 되고 (2)는 $6ma = \frac{3}{2}mg$를 주므로 $a = g/4$이다. 마찰은 운동을 늦춰야 하는데, 실제로 $g/18 < g/4$이다.

## 흔한 실수

- 구심 항을 포함하는 것. 놓는 순간에는 $\dot{\theta} = 0$이므로 가속도는 순전히 접선 방향이다.
- $T_2$가 $B$를 아래로 당겨 $R$를, 따라서 마찰력을 증가시킨다는 사실을 잊는 것. $R = mg$로 두면 틀린 답이 나온다.
- $P$에 대해 수평과 연직 방향으로 분해하는 것. 이 방법도 가능하지만 $T_1$이 들어오게 되어 식이 하나 더 필요하다. $AP$에 수직인 방향으로 분해하면 이것이 사라진다.

## STEP 너머

이것은 자유도(degree of freedom)가 1인 구속된 계(constrained system)이다. 즉 모든 것이 하나의 각 $\theta$로 정해진다. 위치를 $\theta$로 나타내고 미분하는 것은 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)의 첫 단계이다. 라그랑주 역학에서는 $T_1$과 같은 구속력(constraint force)을 교묘한 방향 선택이 아니라 체계적인 방법으로 제거한다. 마찰은 그 틀에 깔끔하게 들어맞지 않는데, 이것이 이런 문제가 뉴턴 역학의 방법을 연습하기에 좋은 이유 중 하나이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 구속된 운동과 비등속 원운동을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

# STEP II 2003, 문제 11

역학 • 포물체 운동

**STEP II 2003, 11번 문제**

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

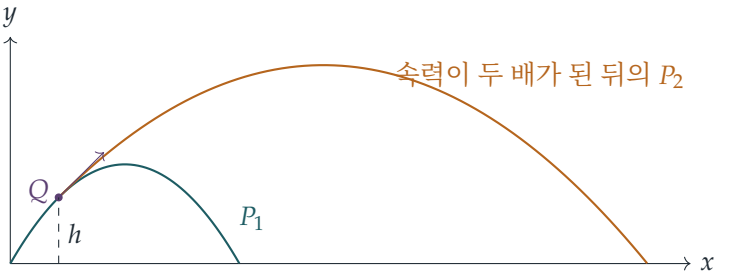
step.maths.org/questions/03-s2-q11

## 핵심 아이디어

속도(velocity)의 수평 성분(horizontal component)과 수직 성분(vertical component)을 따로 다룬다. 운동 방향이 수평과 45°를 이루는 것은 두 성분이 같을 때이고, 오직 그때뿐이다. 이로부터 첫 번째 시각이 바로 나온다. 속력(speed)이 두 배가 되어도 방향은 바뀌지 않으므로 두 성분이 모두 두 배가 된다. 그 뒤의 비행은 알려진 높이에서 출발하는 새로운 포물체(projectile) 문제가 된다.

## 풀이

각 입자를 공기 저항(air resistance) 없이 중력만 받아 움직이는 점 포물체로 모형화한다. $s = \sin\alpha$, $c = \cos\alpha$로 쓰자. $\alpha > 45°$이므로 $s > c > 0$이다.




그림은 $\alpha = 60°$인 경우이다. 두 입자는 운동 방향이 처음으로 수평과 45°를 이루는 점 $Q$까지 청록색 경로를 따라간다. 그 뒤로 $P_2$는 호박색 경로를 따라간다.

### $P_1$의 비행 시간

시각 $t$에서의 수직 변위(displacement)는 $y = Vs\,t - \frac{1}{2}gt^2 = t\left(Vs - \frac{1}{2}gt\right)$이다. 이 값은 다음 시각에 다시 영이 된다.

$$T_1 = \frac{2V\sin\alpha}{g}.$$

### 처음으로 $45^\circ$가 되는 순간

시각 $t$에서 속도 성분은 다음과 같다.

$$\dot{x} = Vc, \qquad \dot{y} = Vs - gt.$$

수평 성분은 변하지 않는다. 발사 순간에는 $\dot{y} = Vs > Vc = \dot{x}$이므로 방향이 $45^\circ$보다 가파르다. $\dot{y}$가 줄어들면서 각은 $\dot{y} = \dot{x}$일 때 처음으로 $45^\circ$까지 내려가며, 이때 입자는 아직 올라가는 중이다.

$$Vs - gt_1 = Vc \quad\Longrightarrow\quad t_1 = \frac{V(s-c)}{g}.$$

(내려오는 도중 $\dot{y} = -Vc$일 때 방향이 다시 $45^\circ$를 이루지만, 그것은 더 나중이다.) $\frac{1}{2}T_1 = Vs/g$이므로

$$t_1 = \frac{Vs}{g}\left(1 - \frac{c}{s}\right) = \tfrac{1}{2}(1 - \cot\alpha)\,T_1,$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

### $P_2$의 비행

시각 $t_1$까지 $P_2$는 $P_1$과 똑같이 움직인다. $t_1$에서 두 속도 성분은 모두 $Vc$이고, 높이는 다음과 같다.

$$h = Vs\,t_1 - \tfrac{1}{2}gt_1^2 = \frac{V^2}{g}\left[s(s-c) - \tfrac{1}{2}(s-c)^2\right]$$
$$= \frac{V^2}{2g}(s-c)\left[2s - (s-c)\right] = \frac{V^2}{2g}\,(s^2 - c^2).$$

$s > c$이므로 이 값은 양수이다.

**생각해 보기** "속력이 두 배가 된다"는 것은 속도의 각 성분에 어떤 영향을 주는가?

속력은 바뀌지만 방향은 바뀌지 않으므로 속도 벡터(vector) 전체에 2가 곱해진다. 두 성분 모두 $2Vc$가 된다. 즉 입자는 높이 $h$에서 수평 위로 $45^\circ$ 방향으로 속력 $2\sqrt{2}\,Vc$로 출발한다.

속력이 두 배가 된 순간부터 $P_2$가 착지할 때까지 걸린 시간을 $\tau$라 하자. 수직 변위를 $Q$에서 위쪽으로 재면, 착지한다는 것은 변위가 $-h$라는 뜻이다.

$$2Vc\,\tau - \tfrac{1}{2}g\tau^2 = -\frac{V^2}{2g}(s^2 - c^2).$$

양변에 $-2/g$를 곱하고, 차원이 없는 양 $u$를 써서 $\tau = (V/g)u$로 놓으면

$$u^2 - 4cu - (s^2 - c^2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = 2c \pm \sqrt{4c^2 + s^2 - c^2} = 2c \pm \sqrt{s^2 + 3c^2}.$$

두 근(root)의 곱이 $-(s^2 - c^2) < 0$이므로 한 근은 음수이다. $\tau > 0$이어야 하므로 더하기 부호를 택한다.

$$\tau = \frac{V}{g}\left(2c + \sqrt{s^2 + 3c^2}\right).$$

따라서

$$T_2 = t_1 + \tau = \frac{V}{g}\left(s - c + 2c + \sqrt{s^2 + 3c^2}\right) = \frac{V}{g}\left(s + c + \sqrt{s^2 + 3c^2}\right).$$

$\frac{1}{2}T_1 = Vs/g$로 나누고 $\sqrt{s^2 + 3c^2}/s = \sqrt{1 + 3c^2/s^2}$($s > 0$이므로 성립한다)를 이용하면

$$\frac{2T_2}{T_1} = \frac{s + c + \sqrt{s^2 + 3c^2}}{s} = 1 + \cot\alpha + \sqrt{1 + 3\cot^2\alpha},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

## 검산

- $\alpha \to 90°$이면 $\cot\alpha \to 0$이고 비는 2로 다가간다. 이는 타당하다. 이 경우 45°가 되는 순간은 비행의 최고점이고 그곳에서 속력은 영이므로, 이를 두 배로 해도 아무 변화가 없어 $T_2 = T_1$이다.
- $\alpha = 45°$(경계의 경우)에서는 발사 순간에 속력이 두 배가 되므로 $P_2$는 그냥 $2V$로 발사되는 것이고 $T_2 = 2T_1$이다. 공식은 $1 + 1 + 2 = 4$를 주므로 일치한다.
- $\alpha = 60°$에서 $t_1/T_1 = \frac{1}{2}(1 - 1/\sqrt{3}) \approx 0.2113$이고 $2T_2/T_1 = 1 + 1/\sqrt{3} + \sqrt{2} \approx 2.9916$이다. $\alpha$와 $V$를 무작위로 2000번 골라 $P_2$의 비행을 단계별로 수치 시뮬레이션한 결과가 $T_2$의 공식과 일치했다.

## 흔한 실수

- 수직 성분만, 또는 수평 성분만 두 배로 하는 것. 방향이 바뀌지 않으므로 두 성분이 모두 두 배가 된다.
- $P_2$의 운동을 높이 $h$가 아니라 지면에서 다시 시작하는 것.
- 부호를 확인하지 않고 $\tau$로 음의 근을 택하는 것.

## STEP 너머

속도가 순간적으로 바뀌는 것은 **충격량**(impulse), 즉 매우 짧은 시간 동안 작용하는 매우 큰 힘이다. 대학 1학년 역학에서는 충돌, 로켓 분사, 발로 차기를 충격량으로 다룬다. 궤적을 충격량으로 이어진 여러 조각으로 나누는 것은 바로 궤도(orbit) 기동을 계획하는 방식이기도 하다. 짧은 엔진 분사로 우주선을 한 원뿔곡선(conic) 궤도에서 다른 궤도로 옮기는 것이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 충격량과 운동량(momentum)을 꼼꼼하게 전개하며, 이런 종류의 문제를 많이 담고 있다.

풀이

# STEP II 2003, 문제 12

확률과 통계 • 분기 과정

**STEP II 2003, 12번 문제**

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/03-s2-q12

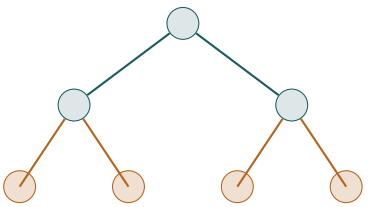
이 문제는 *Beyond STEP*의 12.15 절 **멸종인가 폭발인가**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch12/branching.html

## 핵심 아이디어

이것은 분지 과정(branching process)이다. 각 세대는 바로 앞 세대로부터 만들어지며, 모든 입자는 서로 독립적으로 분열한다. 모든 계산을 떠받치는 단 하나의 사실은, $m$개의 입자가 각각 독립적으로 $\mathrm{B}(2, p)$를 따르는 수의 자손을 낳으면 자손의 총수는 $\mathrm{B}(2m, p)$를 따른다는 것이다. 그래서 확률을 구할 때도, 기댓값을 구할 때도 앞 세대의 크기를 조건으로 둔다.

## 풀이

모형의 의도대로, 서로 다른 입자들은 서로에 대해서도, 과거에 대해서도 독립적으로 분열한다고 가정한다. $0 < t < T$ 동안 살아 있는 하나의 입자에 대하여 $X_0 = 1$이라 쓴다. $t = nT$에서 살아 있는 $X_{n-1}$개의 입자는 각각 자기 자손으로 바뀌므로, $X_n$은 제$n-1$세대가 낳은 자손의 총수이다.



$X_0 = 1$

$X_1 = 2$

$X_2 \leq 4$

그림은 $X_1 = 2$인 경우를 보여 준다. 이때 두 입자는 합쳐서 최대 네 개의 자손을 낳고, 가능한 네 자손은 각각 독립적으로 확률 $p$로 태어난다.

### 결합 확률

$X_1 \sim \mathrm{B}(2, p)$이므로 $\mathrm{P}(X_1 = 2) = p^2$이다. $X_1 = 2$일 때 두 입자는 각각 독립적으로 $\mathrm{B}(2, p)$를 따르는 수의 자손을 낳으므로, $X_2$는 성공 확률이 $p$인 독립 시행 4번에서의 성공 횟수이다. 즉 $X_2 \mid X_1 = 2 \sim \mathrm{B}(4, p)$이다. 따라서

$$\mathrm{P}(X_1 = 2 \text{ 그리고} X_2 = 2) = \mathrm{P}(X_1 = 2)\,\mathrm{P}(X_2 = 2 \mid X_1 = 2) = p^2 \cdot \binom{4}{2} p^2 q^2 = 6p^4 q^2,$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

### 조건부 확률

조건부 확률(conditional probability)의 정의를 쓰려면 $\mathrm{P}(X_2 = 2)$가 필요하다. 이것은 $X_1$을 조건으로 두어 구한다.

- $X_1 = 0$이면 개체군이 소멸했으므로 $X_2 = 0$이다.
- $X_1 = 1$이면(확률 $2pq$) $X_2 \sim \mathrm{B}(2, p)$이고 $\mathrm{P}(X_2 = 2 \mid X_1 = 1) = p^2$이다.
- $X_1 = 2$이면 그 기여는 방금 구한 $6p^4q^2$이다.

따라서

$$\mathrm{P}(X_2 = 2) = 2pq \cdot p^2 + 6p^4 q^2 = 2p^3 q\,(1 + 3pq),$$

이고, $0 < p < 1$일 때

$$\mathrm{P}(X_1 = 2 \mid X_2 = 2) = \frac{6p^4 q^2}{2p^3 q(1 + 3pq)} = \frac{3pq}{1 + 3pq}.$$

이다. 이 값을 $\frac{9}{25}$로 두면 $75pq = 9 + 27pq$이므로 $48pq = 9$, 즉 $pq = \frac{3}{16}$이다. $q = 1 - p$를 대입하면

$$p^2 - p + \tfrac{3}{16} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (p - \tfrac{1}{4})(p - \tfrac{3}{4}) = 0,$$

이므로 $p = \frac{1}{4}$ 또는 $p = \frac{3}{4}$이다. ($p = 0$과 $p = 1$인 경우는 제외된다. $p = 0$이면 사건 $X_2 = 2$가 일어날 수 없고, $p = 1$이면 조건부 확률이 0이다.)

> **생각해 보기** 왜 두 $p$ 값이 같은 답을 주는가?

조건부 확률은 오직 $pq = p(1 - p)$를 통해서만 $p$에 의존하는데, 이 값은 $p$를 $1 - p$로 바꾸어도 변하지 않는다. 따라서 근은 $p, 1 - p$ 꼴의 쌍으로 나와야 하며, 여기서는 $\frac{1}{4}$와 $\frac{3}{4}$이다.

### 기댓값

$X_{n-1} = m$이라 하자. 이 $m$개의 입자는 각각 평균 $\mathrm{E}(X) = 2p$개의 자손을 낳으므로, 다음 세대 크기의 기댓값은 $2pm$이다.

$$\mathrm{E}(X_n \mid X_{n-1} = m) = 2pm.$$

가능한 $m$ 값들에 대하여 평균을 내면(전체 기댓값의 법칙(law of total expectation))

$$\mathrm{E}(X_n) = \sum_m \mathrm{P}(X_{n-1} = m)\, 2pm = 2p\,\mathrm{E}(X_{n-1}).$$

이다. 말로 하면, 한 구간에 살아 있는 모든 입자는 다음 구간에 평균 $2p$개의 입자를 보탠다. $\mathrm{E}(X_1) = 2p$(또는 $\mathrm{E}(X_0) = 1$)이므로, 이 점화식(recurrence)은 등비수열(geometric sequence)을 준다.

$$\mathrm{E}(X_n) = (2p)^n.$$

### 극한

$p = \frac{1}{4}$이면 $0 < \frac{1}{2} < 1$이므로 $n \to \infty$일 때 $\mathrm{E}(X_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$이다.

$p = \frac{3}{4}$이면 $\frac{3}{2} > 1$이므로 $\mathrm{E}(X_n) = \left(\frac{3}{2}\right)^n \to +\infty$이다.

이처럼 조건부 확률에서는 똑같아 보이던 두 $p$ 값이 장기적으로는 전혀 다른 행동으로 이어진다. 평균적으로 개체군은 $p = \frac{1}{4}$일 때 사라져 가고, $p = \frac{3}{4}$일 때 폭발적으로 늘어난다.

## 검산

- $p = \frac{3}{4}$일 때 $6p^4q^2 = \frac{243}{2048} \approx 0.1187$이고, 두 세대짜리 개체군 $10^6$개를 시뮬레이션하면 0.1186이 나왔다.
- $p = \frac{1}{4}$일 때 $pq = \frac{3}{16}$이므로 $3pq = \frac{9}{16}$이고 $\dfrac{9/16}{25/16} = \frac{9}{25}$로, 마땅히 그래야 하는 값이 나온다.
- 여러 $p$에 대하여 $X_1, \ldots, X_5$의 정확한 분포(각 세대는 앞 세대가 주어질 때 $\mathrm{B}(2m, p)$)를 계산하면 평균이 정확히 $(2p)^n$이 된다.

## 흔한 실수

- $\mathrm{P}(X_2 = 2)$를 구할 때 $X_1 = 1$, $X_2 = 2$인 경로를 빠뜨리는 것. $X_1 = 0$을 거치는 경로는 올바르게 아무것도 기여하지 않는다.
- $X_2 \mid X_1 = 2$를 서로 독립인 두 복사본의 합, 즉 $\mathrm{B}(4, p)$로 보지 않고 $2 \times \mathrm{B}(2, p)$(한 입자의 자손 수의 두 배)로 보는 것.

## STEP 너머

이것은 골턴–왓슨 분지 과정(Galton–Watson branching process)으로, 처음에는 성씨가 왜 사라지는지를 설명하기 위해 연구되었다. 자손 수의 평균 $\mu = 2p$가 모든 것을 결정한다. $\mu \leq 1$이면 개체군은 확률 1로 소멸하고, $\mu > 1$이면 양의 확률로 영원히 살아남는다. $p = \frac{3}{4}$일 때조차 개체군은 여전히 확률 $\frac{1}{9}$로 소멸하는데, 이 값은 확률생성함수(probability generating function)에서 나오는 방정식 $s = (q + ps)^2$의 가장 작은 근이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 생성함수를 써서 분지 과정을 다루는데, 그 내용이 이 문제에서 곧바로 이어진다.

풀이

# STEP II 2003, 문제 13

확률과 통계 • 절단 푸아송 분포

**STEP II 2003, 13번 문제**

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/03-s2-q13

## 핵심 아이디어

이 분포는 포아송 분포(Poisson distribution)에서 값 0을 제거하고, 남은 확률들의 합이 여전히 1이 되도록 비례적으로 키운 것이다. 따라서 우리에게 필요한 모든 합은 $k = 0$ 항이 빠진 포아송 합이며, 평균(mean)과 분산(variance)에서는 어차피 $k = 0$ 항이 아무것도 기여하지 않는다. 그러므로 익숙한 포아송 분포의 사실 $\sum k\, p_k = \lambda$와 $\sum k^2 p_k = \lambda + \lambda^2$를 빌려와서 $A$를 곱하기만 하면 된다.

## 풀이

**상수 $A$**

일반적인 $\mathrm{Po}(\lambda)$의 확률을 $p_k = \dfrac{\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}$로 쓰자. $\sum_{k\geq 0} \lambda^k/k! = \mathrm{e}^{\lambda}$이므로

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \mathrm{e}^{-\lambda}\left(\mathrm{e}^{\lambda} - 1\right) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda}.$$

확률 $\mathrm{P}(X = k) = A p_k$의 합은 1이어야 하므로 $A(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}) = 1$, 즉

$$A = (1 - \mathrm{e}^{-\lambda})^{-1},$$

이고, 이것이 요구된 결과이다. $\lambda > 0$일 때 $0 < 1 - \mathrm{e}^{-\lambda} < 1$이므로 $A > 1$임에 주목하자. 즉 남은 확률 $p_0$이 $k \geq 1$인 값들에 나누어 분배된 것이다.

### 평균

$\sum k\,p_k$의 $k=0$ 항은 0이므로

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\,p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k\,p_k = \lambda,$$

이고, 이것은 $\mathrm{Po}(\lambda)$의 평균이다. (직접 계산하면 $\sum_{k\geq 1} k\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}/k! = \lambda \sum_{k\geq 1} \lambda^{k-1}\mathrm{e}^{-\lambda}/(k-1)! = \lambda$이다.) 따라서

$$\mu = \mathrm{E}(X) = A\lambda = \frac{\lambda}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}.$$

### 분산

마찬가지로 $\sum k^2 p_k$의 $k=0$ 항도 0이며, $\mathrm{Po}(\lambda)$에 대해서는 $\mathrm{E}(Y^2) = \mathrm{Var}(Y) + (\mathrm{E}\,Y)^2 = \lambda + \lambda^2$이다. 이 사실을 그냥 인용하고 싶지 않다면 $k^2 = k(k-1)+k$로 쓰면 된다.

$$\sum_{k\geq 2} k(k-1)\frac{\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!} = \lambda^2 \sum_{k\geq 2} \frac{\lambda^{k-2}\mathrm{e}^{-\lambda}}{(k-2)!} = \lambda^2, \qquad \text{이므로} \qquad \sum_{k\geq 1} k^2 p_k = \lambda^2 + \lambda.$$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X^2) &= A\lambda(1+\lambda) = \mu(1+\lambda),\\ \mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}(X^2) - \mu^2 = \mu(1+\lambda) - \mu^2 = \mu(1-\mu+\lambda),\end{aligned}$$

이고, 이것이 요구된 결과이다.

### 부등식

> **생각해 보기** 엄격한 부등식(strict inequality) $\mu < 1+\lambda$는 어디에서 나올 수 있을까?

분산에서 나온다. $X$는 모든 값 $1, 2, 3, \ldots$을 양의 확률로 취하므로 상수가 아니며, 상수가 아닌 확률변수(random variable)의 분산은 0보다 엄격하게 크다($\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\big((X-\mu)^2\big)$이고 $(X-\mu)^2 > 0$이 양의 확률로 성립하기 때문이다). 따라서

$$\mu(1-\mu+\lambda) > 0.$$

$\mu > 0$이므로(양의 확률변수의 평균이므로) $\mu$로 나누어 $1-\mu+\lambda > 0$, 즉 $\mu < 1+\lambda$를 얻는다.

하한에 대해서는, $\mu = A\lambda$이고 $A > 1$, $\lambda > 0$이므로 $\mu > \lambda$이다. 이를 종합하면

$$\lambda < \mu < 1+\lambda.$$

### $\lambda = 100$일 때의 정규근사

이제 $e^{-100}$은 천문학적으로 작으므로(약 $4 \times 10^{-44}$), 어떤 합리적인 정확도로 보아도

$$\mu = \frac{100}{1 - e^{-100}} \approx 100, \qquad \mathrm{Var}(X) = \mu(101 - \mu) \approx 100 \times 1 = 100.$$

따라서 $X$를 $Y \sim \mathrm{N}(100, 10^2)$로 근사한다. 이를 정규근사(normal approximation)라 한다. $X$는 정수값을 가지므로 연속성 수정(continuity correction)을 사용한다. 즉 사건 $X = 100$은 $99.5 < Y < 100.5$에 대응한다. $Z = (Y - 100)/10$으로 표준화하면

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X = 100) &\approx \mathrm{P}(-0.05 < Z < 0.05) \\ &= 2\Phi(0.05) - 1 \\ &\approx 2(0.51994) - 1 = 0.0399, \end{aligned}$$

이므로 소수점 아래 둘째 자리까지 $\mathrm{P}(X = 100) \approx 0.04$이다.

## 검산

- $\lambda \to 0$일 때 $\mu = \lambda/(1 - e^{-\lambda}) \to 1$이고 분산은 $\to 0$이다. 즉 거의 모든 확률이 $k = 1$에 몰리며, 이는 당연한 결과이다. 이것은 부등식 $\lambda < \mu < 1 + \lambda$가 $\mu$를 1 쪽으로 조여 가는 것과도 일치한다.
- 여러 임의의 $\lambda$에 대해 급수를 수치적으로 합하면 $A$, $\mu$, $\mu(1 - \mu + \lambda)$가 기계 정밀도까지 재현된다.
- $\lambda = 100$일 때 정확한 확률은 $\dfrac{100^{100} e^{-100}}{100!\,(1 - e^{-100})} \approx 0.03986$이고, 정규근사값은 0.03988이다. 둘 다 반올림하면 0.04이다.

## 흔한 실수

- 연속성 수정을 잊고 $\mathrm{P}(Y = 100) = 0$을 계산하거나, 정당화 없이 확률밀도 값을 사용하는 것.
- $\mu \le 1 + \lambda$만 증명하는 것. 엄격한 부등식을 얻으려면 $X$가 상수가 아니라는 관찰이 필요하다.
- $\mu > 0$임을 언급하지 않고 $\mu$로 나누는 것.

## STEP 너머

$X$는 **영절단 포아송**(zero-truncated Poisson) 분포이다. 통계학자들은 개수가 0인 경우를 관측할 수 없을 때 이 분포를 사용한다(예를 들어 검문소를 지나는 차량의 탑승자 수가 그렇다. 탑승자가 0명인 차는 없다). 정규근사가 잘 맞는 이유는 Po(100) 확률변수가 서로 독립인 100개의 Po(1) 확률변수의 합이어서 중심극한정리(central limit theorem)가 적용되기 때문이다. 이 규모에서는 절단의 효과가 보이지 않는다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 이 문제의 두 부분 모두의 바탕이 되는 생성함수(generating function)와 중심극한정리를 다룬다.

풀이

# STEP II 2003, 문제 14

확률과 통계 • 가설 검정의 오류

> **STEP II 2003, 14번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/03-s2-q14

## 핵심 아이디어

처음으로 6이 나올 때까지 필요한 던지기 횟수는 기하분포(geometric distribution)를 따르며, 그 꼬리(tail) 확률은 아주 간단한 꼴이다. "$M$번보다 많이 던진다"는 사건은 곧 "처음 $M$번의 던지기가 모두 실패한다"는 사건이다. 따라서 두 오류 확률은 모두 순수한 $M$제곱 꼴이고, 둘 사이에서 $M$을 소거하는 일은 로그(logarithm)를 취하는 것으로 해결된다.

## 풀이

### 두 오류 확률

각 던지기는 서로 독립(independent)이고, 매번 같은 확률 $p$로 6이 나온다고 모형화하자. 그러면 처음으로 6이 나오는 던지기까지 포함한 던지기 횟수 $X$는 다음을 만족한다.

$$X > M \iff \text{처음 } M\text{번의 던지기 중 6이 하나도 없음}, \qquad \text{따라서} \qquad \mathrm{P}(X > M) = (1-p)^M,$$

여기서 던지기의 독립성을 이용하였다. (등비급수 $\sum p(1-p)^{k-1}$을 더할 필요는 없다. 사건 자체를 직접 생각하는 편이 더 빠르다.)

이 검정은 정확히 $X > M$일 때 $H_1$을 채택한다. 따라서 실제로는 $p = B$인데 $H_1$을 채택할 확률 $\alpha$는

$$\alpha = (1-B)^M,$$

이고, 실제로는 $p = A$인데 $H_0$을 채택할(즉 $X \le M$일) 확률 $\beta$는

$$\beta = 1 - \mathrm{P}(X > M \mid p = A) = 1 - (1-A)^M.$$

이다.

### $M$ 소거하기

$(1-A)^M$을 $\alpha=(1-B)^M$의 거듭제곱으로 나타내고자 한다. $0<B<1$이므로 $\ln(1-B)$는 정의되고 0이 아니다. 따라서 $\alpha$에 로그를 취하면

$$M=\frac{\ln\alpha}{\ln(1-B)}.$$

를 얻는다. 그러면

$$(1-A)^M=\mathrm{e}^{M\ln(1-A)}=\exp\left(\frac{\ln(1-A)}{\ln(1-B)}\ln\alpha\right)=\alpha^K,\qquad \text{여기서}\quad K=\frac{\ln(1-A)}{\ln(1-B)}.$$

이다. 그러므로

$$\beta=1-\alpha^K,\qquad K=\frac{\ln(1-A)}{\ln(1-B)},$$

이고, 요구된 대로 $K$는 $M$과 무관하게 $A$와 $B$에만 의존한다.

**?** **생각해 보기** $K$의 크기에 대해 무엇을 말할 수 있는가?

$0<A<B<1$이므로 $1>1-A>1-B>0$이고, 따라서 두 로그는 모두 음수이며 $\ln(1-B)<\ln(1-A)<0$이다. 나누면 $K$는 양수이고

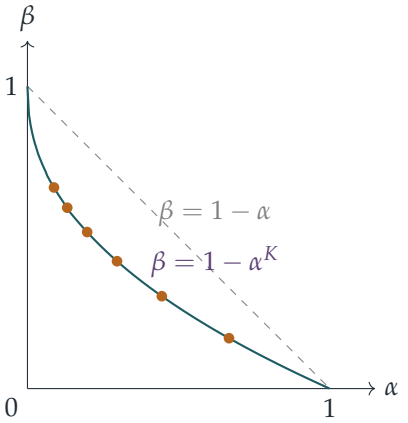
$$0<K<1.$$

이다. 바로 이것이 그래프의 모양을 결정한다.

### $\alpha$에 대한 $\beta$의 그래프

$M$이 $1,2,3,\ldots$을 차례로 지나면 $\alpha=(1-B)^M$은 $(0,1)$ 안의 값을 가지며 0을 향해 감소한다. 엄밀히 말하면 그래프는 점들의 수열이고, 이 점들은 모두 곡선 $\beta=1-\alpha^K$, $0\le\alpha\le1$ 위에 놓인다. 이 곡선에 대하여 다음이 성립한다.

- 곡선은 $(0,1)$과 $(1,0)$을 지난다.
- $\dfrac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha}=-K\alpha^{K-1}<0$이므로 $\alpha$가 커지면 $\beta$는 작아진다. 즉 한 오류의 가능성을 줄이면 다른 오류의 가능성이 커진다.
- $K-1<0$이므로 $\alpha\to0^+$일 때 기울기는 $-\infty$로 발산하고(곡선은 $(0,1)$에서 수직으로 출발한다), $\alpha=1$에서 기울기는 $-1$과 0 사이의 값인 $-K$이다.
- $\dfrac{\mathrm{d}^2\beta}{\mathrm{d}\alpha^2}=K(1-K)\alpha^{K-2}>0$이므로 곡선은 아래로 볼록(convex)하다.
- $0<\alpha<1$이고 $0<K<1$이면 $\alpha^K>\alpha$이므로 $\beta<1-\alpha$이다. 즉 곡선은 $(0,1)$과 $(1,0)$을 잇는 직선보다 아래에 있다.




곡선은 $A = \frac{1}{6}$, $B = \frac{1}{3}$인 경우(따라서 $K \approx 0.45$)에 대해 그린 것이며, $M = 1, \ldots, 6$에 해당하는 점들을 표시하였다. $M$이 커지면 점은 왼쪽 위로 이동한다.

## 검산

- $A = \frac{1}{6}$, $B = \frac{1}{3}$, $M = 4$로 놓자. 직접 계산하면 $\alpha = (\frac{2}{3})^4 \approx 0.1975$이고 $\beta = 1 - (\frac{5}{6})^4 \approx 0.5177$이다. $K = \ln \frac{5}{6} / \ln \frac{2}{3} \approx 0.4497$로 계산해도 $1 - \alpha^K \approx 0.5177$이다. 이 검정을 $2 \times 10^5$번 시행한 시뮬레이션(simulation)에서는 0.198과 0.518을 얻었다.
- 극단적인 경우에도 타당하게 동작한다. $A$가 $B$에 가까우면 $K \approx 1$이고 $\beta \approx 1 - \alpha$이므로, 이 검정은 던진 결과를 무시하고 무작위로 결정하는 것보다 별로 나을 것이 없다. $A$가 아주 작으면 $K \approx 0$이고, 적당한 어떤 $\alpha$에 대해서도 $\beta$를 작게 만들 수 있다.

## 흔한 실수

- 어느 가설(hypothesis)이 어느 것인지 혼동하는 것. 여기서 $H_0$은 **더 큰** 값 $B$이므로, 6이 나올 때까지 오래 기다리는 것은 $H_0$에 반하는 증거가 된다.
- $K$를 거꾸로 $\ln(1 - B) / \ln(1 - A)$로 구하는 것. 이 값은 1보다 크다. $\beta < 1 - \alpha$(합리적인 검정이라면 어림짐작보다 낫다)인지 확인하면 이 실수를 잡아낼 수 있다.

## STEP 너머

$\alpha$에 대한 $\beta$의 곡선은 두 종류의 오류 사이의 상충 관계(trade-off)를 나타내는 곡선으로, 통계학과 기계 학습(machine learning) 전반에서 쓰이는 ROC 곡선(ROC curve)과 밀접하게 관련되어 있다. 네이만-피어슨 보조정리(Neyman–Pearson lemma)에 따르면, 이와 같은

두 단순가설에 대해서는 가능도비(likelihood ratio)에 기반한 검정이 각 $\alpha$에 대해 가능한 가장 작은 $\beta$를 준다. 여기서는 가능도비가 $X$에 대해 단조이므로, "$X$가 클 때 $H_0$을 기각한다"는 검정이 실제로 최적이다. 이러한 개념을 더 알고 싶다면 기초로 Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)을 읽고, 그다음에 수리통계학 입문 과정의 아무 교재나 보면 된다.

풀이

# STEP III 2003, 문제 1

순수수학 • 역쌍곡선함수의 적분

**STEP III 2003, 1번 문제**

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/03-s3-q1

## 핵심 아이디어

처음 두 결과는 연쇄법칙(chain rule)을 꼼꼼히 적용하는 계산이다. 이 계산에서 얻는 쓸모 있는 것은 하나의 틀이다. 각 역함수(inverse function)의 도함수는 $\dfrac{\text{상수}}{(\text{일차식})\sqrt{\text{일차식}}}$ 꼴이고, 이것이 바로 두 피적분함수(integrand)의 꼴이다. 따라서 각 적분마다 이 틀에 맞도록 $a$와 $b$를 고른다. 근호 밖에 있는 괄호를 보면 어느 공식을 쓸지 알 수 있다. 그것이 더 큰 상수를 가진 $x+b$이면 arcsin을 쓰고, 더 작은 상수를 가진 $x+a$이면 arcosh를 쓴다.

## 풀이

### 두 도함수

$y = \dfrac{x+a}{x+b}$라 하자. 몫의 미분법(quotient rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{(x+b)-(x+a)}{(x+b)^2} = \frac{b-a}{(x+b)^2}.$$

$x+a>0$이고 $x+b>0$이므로 $y>0$이며, $b>a$이므로 분자가 분모보다 작다. 따라서 $0<y<1$이고, 이 범위에서 $\arcsin y$는 미분가능(differentiable)하다. 다음으로, 제곱의 차(difference of two squares)를 이용하면

$$1-y^2 = \frac{(x+b)^2-(x+a)^2}{(x+b)^2} = \frac{(b-a)(2x+a+b)}{(x+b)^2},$$

이다. $x+b>0$이므로 $(x+b)^2$의 제곱근은 $x+b$ 자신이고, 따라서

$$\sqrt{1-y^2} = \frac{\sqrt{b-a}\,\sqrt{a+b+2x}}{x+b}.$$

연쇄법칙에 의해

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arcsin\left(\frac{x+a}{x+b}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x+b}{\sqrt{b-a}\,\sqrt{a+b+2x}}\cdot\frac{b-a}{(x+b)^2}$$
$$= \frac{\sqrt{b-a}}{(x+b)\sqrt{a+b+2x}},$$

이다. 여기서 $(b-a)/\sqrt{b-a} = \sqrt{b-a}$를 썼다. 이것이 구하려던 결과이다.

arcosh의 경우에는 $z = \dfrac{x+b}{x+a}$라 하자. $x+b > x+a > 0$이므로 $z > 1$이다. 그러면

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{(x+a)-(x+b)}{(x+a)^2} = -\frac{b-a}{(x+a)^2}, \qquad z^2-1 = \frac{(b-a)(2x+a+b)}{(x+a)^2}.$$

$x+a > 0$이므로 $\sqrt{z^2-1} = \sqrt{b-a}\,\sqrt{a+b+2x}\,/(x+a)$이고, 따라서

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arcosh}\left(\frac{x+b}{x+a}\right) = \frac{x+a}{\sqrt{b-a}\,\sqrt{a+b+2x}}\cdot\left(-\frac{b-a}{(x+a)^2}\right) = -\frac{\sqrt{b-a}}{(x+a)\sqrt{a+b+2x}}.$$

두 결과는 거의 비슷해 보인다. 차이는 부호와, 어느 괄호가 근호 밖에 있느냐뿐이다.

? **생각해 보기** arcsin 계산에서 실제로 쓰인 가정(hypothesis)은 어느 것인가?

$\sqrt{(x+b)^2}$을 간단히 하기 위해 $x+b > 0$이 필요했고, $1-y^2 > 0$도 필요했다. 인수분해한 꼴에서 보면, $b > a$일 때 $1-y^2 > 0$은 정확히 $a+b+2x > 0$일 때 성립한다. $x+a > 0$ 자체는 한 번도 쓰지 않았다. 따라서 arcsin 공식은 $x+b > 0$이고 $a+b+2x > 0$이기만 하면 $x+a$가 음수이더라도 성립하며, 이때 $y$는 $(-1, 0]$에 놓인다. 이 사실은 (ii)에서 중요하다.

### 소문항 (i)

근호 밖의 괄호는 $x+1$이므로, 이를 arcosh 공식의 $x+a$에 맞춰 본다. $\sqrt{x+3} = \sqrt{2x+6}\,/\sqrt{2}$로 쓰면, $a = 1$과 함께 $a+b = 6$이 필요하다. 그러면 $b = 5$이고 $b-a = 4$이다. 이 값들에 대해 가정 $x+a > 0$, $x+b > 0$, $b > a$는 $x > -1$에서 모두 성립하고,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arcosh}\left(\frac{x+5}{x+1}\right) = -\frac{2}{(x+1)\sqrt{2x+6}} = -\frac{\sqrt{2}}{(x+1)\sqrt{x+3}}.$$

$-\sqrt{2}$로 나누면

$$\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x+3}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arcosh}\left(\frac{x+5}{x+1}\right) + C.$$

### 소문항 (ii)

이번에는 밖의 괄호가 $x+3$이므로, 이를 arcsin 공식의 $x+b$에 맞춘다. 즉 $b = 3$이다. 근호 안에서는 $a+b+2x = 2(x+1)$이어야 하므로 $a+b = 2$이고 $a = -1$이다. 그러면

$b-a=4$이고

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arcsin\left(\frac{x-1}{x+3}\right)=\frac{2}{(x+3)\sqrt{2x+2}}=\frac{\sqrt{2}}{(x+3)\sqrt{x+1}}.$$

**생각해 보기** $a=-1$이면 가정 $x+a>0$은 $x>1$을 요구한다. 그래도 우리의 답이 범위 $x>-1$ 전체에서 성립하는가?

그렇다. 앞에서 보았듯이 arcsin 공식에는 $x+b>0$과 $a+b+2x>0$만 있으면 된다. 여기서 이 두 조건은 $x+3>0$과 $2x+2>0$이며, 둘 다 모든 $x>-1$에 대해 성립한다. 이 범위에서 $(x-1)/(x+3)$은 $-1$에서 1을 향해 증가하므로 arcsin이 정의된다. 따라서 $x>-1$에 대해

$$\int\frac{1}{(x+3)\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{x-1}{x+3}\right)+C.$$

### 다른 방법: 치환

두 적분 모두 근호 안의 식을 $x+c$라 할 때 $u=\sqrt{x+c}$로 치환(substitution)해도 풀린다. 이때 $\mathrm{d}x=2u\,\mathrm{d}u$이기 때문이다. (ii)에서 $u=\sqrt{x+1}$로 두면 적분은 $\int\frac{2}{u^2+2}\,\mathrm{d}u=\sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{(x+1)/2}\right)+C$가 된다. 이것은 우리의 답과 상수 $-\pi/(2\sqrt{2})$만큼만 차이 난다. (i)에서 $u=\sqrt{x+3}$으로 두면 $\int\frac{2}{u^2-2}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{2}}\right|+C$를 얻는다. 이것은 arcosh로 쓴 답을 로그로 나타낸 것과 정확히 같다.

## 검산

- 답을 다시 미분해 본다. 예를 들어 $x=0$에서 $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x-1}{x+3}$의 도함수는 $\frac{1}{3}$이어야 하는데, 위의 공식은 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot3\cdot1}=\frac{1}{3}$을 준다.
- 수치적으로, 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x+3}}\approx0.374543$이고 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(x+3)\sqrt{x+1}}\approx0.240301$이다. 두 값 모두 원시함수(antiderivative)로 구한 값과 $10^{-12}$보다 작은 오차로 일치한다. 이 일치는 (ii)에서 $x+a<0$이 되는 범위 $-1<x<1$ 안쪽인 $x=-0.9$까지 내려가는 구간에서도 성립한다.
- 부호: (i)의 피적분함수는 양수이므로 그 적분은 증가해야 한다. 우리의 답은 실제로 증가한다. $x$가 증가하면 $\frac{x+5}{x+1}$이 감소하므로, 그 arcosh에 마이너스를 붙인 것은 증가하기 때문이다.

## 흔한 실수

- 괄호와 공식을 잘못 짝짓기: (i)에서 근호 밖의 $x+1$은 **더 작은** 상수를 가지므로 $x+a$여야 하고, 따라서 arcsin이 아니라 arcosh를 써야 한다.
- $\sqrt{x+3}$을 $\sqrt{2x+6}/\sqrt{2}$로 쓰면서 생기는 인수 $\sqrt{2}$를 빠뜨리기.
- $\mathrm{d}z/\mathrm{d}x < 0$에서 나오는 arcosh 도함수의 마이너스 부호를 빠뜨리기.

## STEP 너머

(ii)의 두 답, 즉 arcsin으로 쓴 답과 arctan으로 쓴 답은 상수만큼 차이 난다. 이것이 보장되는 까닭은 **구간**(interval)에서 도함수가 같은 두 함수는 상수만큼만 차이 나기 때문이며, 이는 평균값 정리(mean value theorem)의 결과이다. 서로 떨어진 두 조각으로 이루어진 집합에서는 그 상수가 조각마다 다를 수 있다. (i)에 로그가 나온 것도 우연이 아니다. 역쌍곡선함수(inverse hyperbolic function)는 모습을 바꾼 로그이며, 그래서 $1/\sqrt{\text{이차식}}$의 적분은 역삼각함수 아니면 로그가 된다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 평균값 정리를 꼼꼼하게 증명하고, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(STEP 대비 문제집)에는 이런 종류의 적분이 더 실려 있다.

풀이

# STEP III 2003, 문제 2

순수수학 • 이항급수

**STEP III 2003, 2번 문제**

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/03-s3-q2

## 핵심 아이디어

중심 이항계수(central binomial coefficient) $\binom{2r}{r}$는 음의 반정수 거듭제곱에 대한 이항급수(binomial series) 속에 숨어 있다. 처음에 주어진 항등식(identity)으로 $(2r)!$을 홀수 인수와 짝수 인수로 나누고 나면, $(1-p)^{-1/2}$에서 $p^r$의 계수가 정확히 $\binom{2r}{r}/4^r$임이 드러난다. 그러면 각 합은 모습을 바꾼 이항급수일 뿐이고, 할 일은 $p$를(그리고 (ii)에서는 알맞은 거듭제곱을) 고르는 것뿐이다.

## 풀이

### 항등식

$(2r)!$의 인수를 홀수인 것과 짝수인 것으로 나눈다.

$$(2r)! = \big[1 \times 3 \times \cdots \times (2r-1)\big] \times \big[2 \times 4 \times \cdots \times 2r\big].$$

$r$개의 짝수 인수는 각각 $1, 2, \ldots, r$ 중 하나에 2를 곱한 것이므로, 두 번째 괄호는 $2^r\, r!$이다. 따라서

$$\binom{2r}{r} = \frac{(2r)!}{r!\,r!} = \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2r-1) \times 2^r\, r!}{r!\,r!} = \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2r-1)}{r!} \times 2^r,$$

이므로 원하는 식이 성립한다.

**소문항 (i)**

$|p| < 1$일 때, 이항급수에 의해

$$\begin{aligned}(1-p)^{-\frac{1}{2}} &= 1 + \left(-\tfrac{1}{2}\right)(-p) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}(-p)^2 \\ &\quad + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}(-p)^3 + \cdots \\ &= 1 + \tfrac{1}{2}p + \tfrac{3}{8}p^2 + \tfrac{5}{16}p^3 + \cdots .\end{aligned}$$

일반항도 같은 규칙을 따른다. $p^r$의 계수에는 인수 $-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots$에서 나오는 음의 부호 $r$개와 $(-p)^r$에서 나오는 음의 부호 $r$개가 더 있으므로, 이들이 서로 상쇄되어 다음이 남는다.

$$\frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\cdots\times\frac{2r-1}{2}}{r!}\,p^r = \frac{1\times 3\times\cdots\times(2r-1)}{2^r\,r!}\,p^r.$$

**?** **생각해 보기** 이것은 $\binom{2r}{r}$와 어떻게 연결되는가?

항등식에 의해 $\dfrac{1\times 3\times\cdots\times(2r-1)}{r!} = \dfrac{\binom{2r}{r}}{2^r}$이다. 따라서 $p^r$의 계수는 $\binom{2r}{r}/4^r$이고, $r = 0$일 때도 양변이 모두 1이므로 이 식이 성립한다. 그러므로

$$(1-p)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{2r}{r}\left(\frac{p}{4}\right)^r \qquad (|p|<1).$$

구하려는 합에서는 $(p/4)^r = 1/8^r$이므로 $p = \frac{1}{2}$로 잡는데, 이 값은 수렴 구간(interval of convergence) 안에 있다. 그러면

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\binom{2r}{r}}{8^r} = \left(1-\tfrac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$$

**소문항 (ii)**

추가된 인수 $2r+1$은 거듭제곱을 한 단계 더 나아가 $(1-p)^{-3/2}$를 생각해 보라는 암시이다. $|p| < 1$일 때, 이 함수의 이항급수에서 $p^r$의 계수는 앞에서처럼 부호가 상쇄되어

$$\begin{aligned}\frac{\frac{3}{2}\times\frac{5}{2}\times\cdots\times\frac{2r+1}{2}}{r!} &= \frac{3\times 5\times\cdots\times(2r+1)}{2^r\,r!} \\ &= (2r+1)\,\frac{1\times 3\times\cdots\times(2r-1)}{2^r\,r!} = \frac{(2r+1)\binom{2r}{r}}{4^r},\end{aligned}$$

이다. 여기서 $3\times 5\times\cdots\times(2r+1) = (2r+1)\times\left[1\times 3\times\cdots\times(2r-1)\right]$임을 이용한 뒤, (i)에서와 똑같이 항등식을 사용하였다. ($r = 0$일 때는 양 끝이 모두 1이다.) 따라서

$$(1-p)^{-\frac{3}{2}} = \sum_{r=0}^{\infty}(2r+1)\binom{2r}{r}\left(\frac{p}{4}\right)^r \qquad (|p|<1).$$

이제 $p/4 = \frac{1}{5}$, 즉 $p = \frac{4}{5}$가 필요한데, 이번에도 $|p| < 1$이다. 따라서

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(2r+1)\binom{2r}{r}}{5^r} = \left(1 - \tfrac{4}{5}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(\tfrac{1}{5}\right)^{-\frac{3}{2}} = 5^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{5}\right)^3,$$

이므로 원하는 결과가 성립한다.

**다른 방법으로**, $|x| < \frac{1}{4}$일 때 $f(x) = \sum \binom{2r}{r} x^r = (1-4x)^{-1/2}$로 놓는다. 거듭제곱급수(power series)를 수렴 구간 안에서 항별로 미분(term-by-term differentiation)하면 $\sum r\binom{2r}{r} x^r = xf'(x) = 2x(1-4x)^{-3/2}$이므로

$$\sum (2r+1)\binom{2r}{r} x^r = 4x(1-4x)^{-\frac{3}{2}} + (1-4x)^{-\frac{1}{2}} = (1-4x)^{-\frac{3}{2}},$$

이고, $x = \frac{1}{5}$를 대입하면 같은 답을 얻는다.

## 검산

- (i)의 처음 몇 항은 $1 + \frac{2}{8} + \frac{6}{64} + \frac{20}{512} \approx 1.371$로, 이미 $\sqrt{2} \approx 1.414$에 가깝다. 200개 항을 더하면 $1.41421356\ldots$이 된다.
- (ii)의 급수는 더 천천히 수렴하지만(항의 비가 $\frac{4}{5}$에 가까워진다), 400개 항을 더하면 $11.18033988\ldots$이 되어 $5\sqrt{5} \approx 11.1803$과 일치한다.
- $r = 0, 1, 2, 3$일 때 계수 $\binom{2r}{r}/4^r$는 $1, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{5}{16}$로, 직접 구한 네 항과 일치한다.

## 흔한 실수

- 부호를 놓치는 것: 계수에 있는 음의 인수 $r$개와 $(-p)^r$에서 나오는 $(-1)^r$은 항상 상쇄되므로, 모든 계수는 양수이다.
- 고른 $p$가 $|p| < 1$을 만족하는지 확인하지 않는 것: 이 조건이 없으면 급수가 그 함수로 수렴한다는 보장이 없다.
- (ii)에서 $p$만 바꾸어 다시 $(1-p)^{-1/2}$를 사용하는 것: 인수 $2r+1$은 그 급수만으로는 나올 수 없다.

## STEP 너머

함수 $\sum \binom{2r}{r} x^r = (1-4x)^{-1/2}$는 중심 이항계수의 생성함수(generating function)로, 조합론(combinatorics)의 표준 도구이다. 예를 들어 이것을 제곱하면 $\sum_r 4^r x^r$이 되고, 이로부터 $\sum_k \binom{2k}{k}\binom{2r-2k}{r-k} = 4^r$이 증명된다. 항별 미분을 정당화하는 것, 그리고 거듭제곱급수가 정확

히 어디에서 수렴하는지 아는 것은 대학 1학년 해석학(analysis)의 주제이다. 거듭제곱급수에 대해서는 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를, 급수에 관한 STEP 연습 문제를 더 보려면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(STEP 대비 문제집)를 참고하라.

풀이

# STEP III 2003, 문제 3

순수수학 • 곡선 그리기

> **STEP III 2003, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/03-s3-q3

## 핵심 아이디어

$u = (1+x)^m$, $v = (1-x)^m$로 놓는다. 그러면 $\mathrm{f} = (u-v)/(u+v)$이고, $u'v - uv'$에 공통인수 $(1-x^2)^{m-1}$이 있으므로 몫의 미분법(quotient rule)을 쓰면 식이 깔끔하게 정리된다. 이 도함수는 결코 음수가 되지 않으며, 이 사실만으로 $y = \mathrm{f}(x)$의 모양에 대해 거의 모든 것을 알 수 있다. 역수 곡선에는 숨은 대칭성이 있다. $x$를 $1/x$로 바꾸면 f가 $1/\mathrm{f}$로 바뀐다.

## 풀이

### 분모는 결코 0이 되지 않는다

어떤 실수 $x$에 대하여 $(1+x)^m + (1-x)^m = 0$이라고 가정하자.

$m$이 짝수이면 두 항이 모두 음이 아니므로 두 항 모두 0이어야 한다. 그러려면 $x = -1$과 $x = 1$이 동시에 성립해야 하므로 불가능하다.

$m$이 홀수이면 $(1+x)^m = -(1-x)^m = (x-1)^m$이다. $m$이 홀수일 때 사상 $t \mapsto t^m$은 $\mathbb{R}$에서 순증가(strictly increasing)하므로 일대일(one-to-one)이고, 따라서 $1+x = x-1$, 즉 $1 = -1$이다. 이것은 모순이다.

그러므로 모든 실수 $x$에 대하여 $(1+x)^m + (1-x)^m \neq 0$이고, f는 $\mathbb{R}$ 전체에서 정의되며 미분가능하다.

## 도함수

$u = (1+x)^m$, $v = (1-x)^m$이라 하면 $u' = m(1+x)^{m-1}$, $v' = -m(1-x)^{m-1}$이다. 몫의 미분법에 의하여

$$\mathrm{f}'(x) = \frac{(u'-v')(u+v) - (u-v)(u'+v')}{(u+v)^2} = \frac{2(u'v - uv')}{(u+v)^2}.$$

분자는 다음과 같이 간단해진다.

$$\begin{aligned} u'v - uv' &= m(1+x)^{m-1}(1-x)^m + m(1+x)^m(1-x)^{m-1} \\ &= m(1+x)^{m-1}(1-x)^{m-1}\big[(1-x)+(1+x)\big] \\ &= 2m(1-x^2)^{m-1}. \end{aligned}$$

따라서

$$\mathrm{f}'(x) = \frac{4m\,(1-x^2)^{m-1}}{\big[(1+x)^m + (1-x)^m\big]^2}.$$

### $m = 5$인 경우: 곡선 $y = \mathrm{f}(x)$

이항정리(binomial theorem)로 전개하면 분자에서는 짝수 차수 항이, 분모에서는 홀수 차수 항이 소거된다.

$$\mathrm{f}(x) = \frac{2(5x + 10x^3 + x^5)}{2(1 + 10x^2 + 5x^4)} = \frac{x(x^4 + 10x^2 + 5)}{5x^4 + 10x^2 + 1}, \qquad \mathrm{f}'(x) = \frac{20(1-x^2)^4}{\big[(1+x)^5 + (1-x)^5\big]^2}.$$

이제 곡선의 특징을 읽어 낸다.

- **대칭성**. $\mathrm{f}(-x) = -\mathrm{f}(x)$이므로 곡선은 원점에 대하여 회전대칭(rotational symmetry)이다. 곡선은 $(0,0)$을 지나며, 그 점에서의 기울기는 $\mathrm{f}'(0) = 20/2^2 = 5$이다.
- **단조성**(*monotonic*). 모든 $x$에 대하여 $\mathrm{f}'(x) \geq 0$이고, 등호는 $x = \pm 1$에서만 성립한다. 따라서 f는 모든 곳에서 증가한다. $x = \pm 1$에서 정류점(stationary point)을 가지며, $(1-x^2)^4$의 부호가 바뀌지 않으므로 이 점들은 극점(turning point)이 아니라 변곡점(point of inflection)이다. 이 점들은 $(1,1)$과 $(-1,-1)$이다. $(1-x)^5$ 항 또는 $(1+x)^5$ 항이 o이 되어 $\mathrm{f} = \pm 1$이 남기 때문이다.
- **$|x|$가 클 때**. $\mathrm{f}(x) \approx x/5$이다. 더 정확히 쓰면

  $$\mathrm{f}(x) - \frac{x}{5} = \frac{x(40x^2 + 24)}{5(5x^4 + 10x^2 + 1)},$$

  이고, 이 값은 $|x| \to \infty$일 때 0으로 수렴한다. 따라서 $y = x/5$는 경사점근선(oblique asymptote)이다. 곡선은 $x > 0$에서 점근선의 위쪽에, $x < 0$에서 아래쪽에 있다.

**생각해 보기** $f(x)$의 크기가 1보다 큰 곳은 어디이고, 작은 곳은 어디인가?

f는 증가함수이고 $f(\pm1) = \pm1$이므로, $|x| < 1$에서 $|f(x)| < 1$이고 $|x| > 1$에서 $|f(x)| > 1$이다. 이 사실은 역수 곡선을 그릴 때 중요하다. ($|x| < 1$일 때 $x = \tanh t$로 놓으면 $(1+x)/(1-x) = e^{2t}$이고, f의 분자와 분모를 $(1-x)^5$로 나누면 $f(\tanh t) = \tanh 5t$임을 알 수 있다. 이것은 $-1$과 1 사이의 S자 모양을 이해하는 또 다른 방법이다.)

**곡선** $y = 1/f(x)$

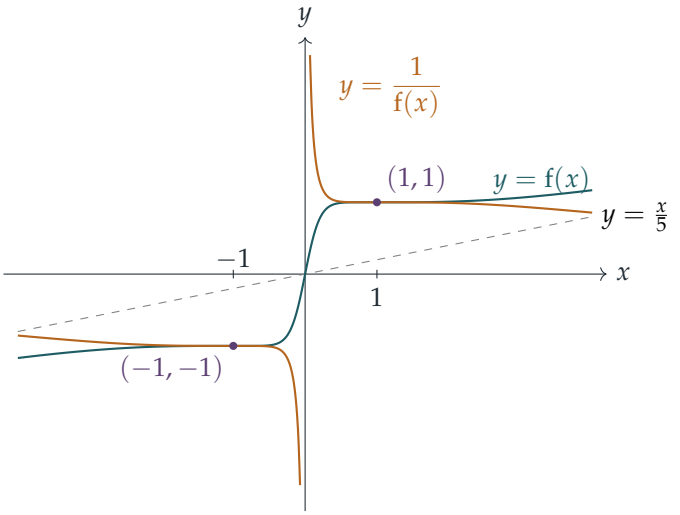
$x$를 $1/x$로 바꾸고 분자와 분모에 $x^5$을 곱하면

$$f(1/x) = \frac{(x+1)^5 - (x-1)^5}{(x+1)^5 + (x-1)^5} = \frac{(1+x)^5 + (1-x)^5}{(1+x)^5 - (1-x)^5} = \frac{1}{f(x)},$$

을 얻는다. 여기서 $(x-1)^5 = -(1-x)^5$을 이용하였다. 따라서 $y = 1/f(x)$는 곡선 $y = f(1/x)$이고, 그 특징은 f의 특징으로부터 얻어진다.

- 이 함수는 기함수(odd function)이고, f의 유일한 영점인 $x = 0$에서 정의되지 않는다. 0 근처에서 $1/f(x) \approx 1/(5x)$이므로 $y$축은 수직점근선(vertical asymptote)이며, $x \to 0^+$일 때 $y \to +\infty$이고 $x \to 0^-$일 때 $y \to -\infty$이다.
- 도함수는 $-f'(x)/f(x)^2 \le 0$이므로 $x > 0$과 $x < 0$에서 각각 감소한다. $(1,1)$과 $(-1,-1)$에서 정류 변곡점을 가진다.
- $|x| \to \infty$일 때 $1/f(x) \approx 5/x \to 0$이므로 $x$축이 점근선이다. 곡선은 $x > 0$에서 점근선의 위쪽에, $x < 0$에서 아래쪽에 있다.

두 곡선은 $f(x)^2 = 1$인 곳, 즉 $(1,1)$과 $(-1,-1)$에서만 만난다. 그 점들에서 두 곡선은 모두 수평이므로, 서로 가로지르는 것이 아니라 접한다.



## 검산

- $m = 1$로 놓으면 공식에서 $\mathrm{f}'(x) = 4/2^2 = 1$을 얻는데, 실제로 $\mathrm{f}(x) = 2x/2 = x$이다.
- 수치적으로 $\mathrm{f}(1000)/1000 \approx 0.2000016$이며, 이는 점근선 $y = x/5$와 일치한다. $m = 1, \ldots, 8$에 대하여 임의의 점들에서 중심차분(central difference)으로 구한 도함수 값이 $\mathrm{f}'$의 공식과 일치한다.
- $\mathrm{f}(\tanh t) = \tanh 5t$와 $\mathrm{f}(1/x) = 1/\mathrm{f}(x)$ 모두 임의의 점들에서 $10^{-9}$ 이내로 성립함을 확인하였다.

## 흔한 실수

- $x = \pm 1$을 극댓값 또는 극솟값으로 부르는 것. 그 점에서 도함수가 0에 닿기는 하지만 부호가 바뀌지 않으므로, 이 점들은 정류 변곡점이다.
- 경사점근선을 놓치는 것. f는 5차식(quintic)을 4차식(quartic)으로 나눈 것이므로 일정한 값에 가까워지는 것이 아니라 $x/5$처럼 커진다.
- $y = 1/\mathrm{f}(x)$가 $(\pm 1, \pm 1)$에서 $y = \mathrm{f}(x)$를 가로지르도록 그리는 것. 그 점에서 두 곡선은 모두 평평하므로 서로 접한다.

## STEP 너머

치환 $x = \tanh t$를 이용하면 f가 $\tanh 5t$를 $\tanh t$로 나타낸 공식, 즉 $\tan 5\theta$에 대한 배각공식(multiple-angle formula)의 쌍곡선 함수(hyperbolic function) 버전임을 알 수 있다. 이렇게 보면 f는 5를 곱하는 사상과 켤레(conjugate)인 유리사상(rational map)이다. 이런 사상들과 그것들을 반복 합성할 때의 거동은 복소역학(complex dynamics)의 출발점이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이러한 유리함수가 복소평면 전체에 어떻게 작용하는지 살펴보기에 아주 좋은 책이다.

풀이

# STEP III 2003, 문제 4

순수수학 • 매개변수 곡선의 접선

**STEP III 2003, 4번 문제**

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/03-s3-q4

## 핵심 아이디어

직선은 매개변수(parameter)에 대한 **삼차식**(*cubic*)이 0이 되는 곳에서 이 곡선과 만난다. 접선(tangent)은 $t$에서 중근(double root)을 주므로, 근의 합을 이용하면 세 번째 근 $T$를 곧바로 알 수 있다. 그러면 $T$의 공식이 tan의 배각 공식(double-angle formula)과 꼭 닮아 있으므로 $t = \tan\theta$로 놓아 볼 생각이 든다. 이렇게 하면 사상 $t \mapsto T$는 각에 대한 간단한 일차 사상이 되고, 이를 반복(iterate)하는 것도 쉬워진다.

## 풀이

### $T$의 공식

$y = t + t^3$은 $t$에 대하여 순증가하므로 서로 다른 매개변수는 서로 다른 점을 준다. 따라서 곡선 위의 점과 매개변수의 값은 일대일 대응(one-to-one correspondence)을 이룬다.

미분하면 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2t$이고 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 1 + 3t^2$이므로, $t \neq 0$일 때 $t$에서의 접선의 기울기(gradient)는

$$m = \frac{1 + 3t^2}{2t}.$$

이다. ($t \neq 0$이므로 접선은 수직선이 아니다.) 접선의 방정식은 $y - (t + t^3) = m(x - t^2)$이다. 매개변수가 $s$인 점이 이 접선 위에 있을 필요충분조건은

$$s + s^3 - (t + t^3) = m(s^2 - t^2), \qquad \text{즉} \qquad f(s) \equiv s^3 - ms^2 + s - \left(t + t^3 - mt^2\right) = 0.$$

이다. 분명히 $f(t) = 0$이고, $m$의 선택에 의해 $f'(t) = 3t^2 - 2mt + 1 = 0$이다. 따라서 $s = t$는 이 삼차식의 (적어도) 중근이고, 근은 어떤 실수 $T$에 대하여 $t,\ t,\ T$이다.

$s^3 - ms^2 + \ldots$의 근의 합은 $m$이므로

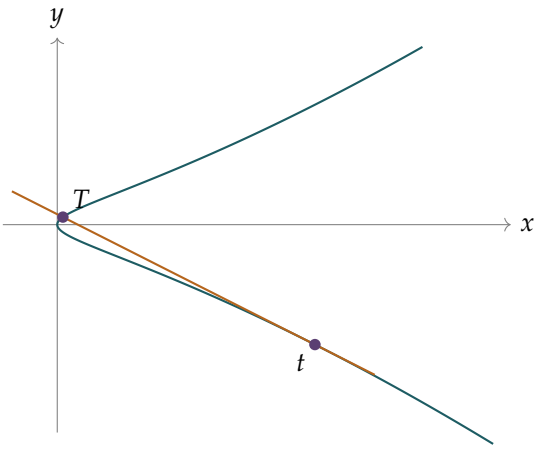
$$2t + T = \frac{1+3t^2}{2t}$$
$$T = \frac{1+3t^2-4t^2}{2t} = \frac{1-t^2}{2t}.$$

이다. 이 근 $T$가 직선이 곡선과 만날 수 있는 유일한 다른 곳이다.

접선이 곡선과 **다시** 만나려면 $T \neq t$이어야 한다. 그런데

$$T = t \iff 1 - t^2 = 2t^2 \iff 3t^2 = 1,$$

이므로 $3t^2 \neq 1$이어야 한다. ($3t^2 = 1$일 때 근 $t$는 삼중근이 되고 접선은 곡선과 한 번만 만난다. 이 점들이 변곡점(points of inflection)이다.) 이로써 두 결과가 모두 증명된다.




**$t_0 = \tan\frac{7}{18}\pi$인 수열**

$t = \tan\theta$로 놓자. 배각 공식에 의해

$$T = \frac{1-\tan^2\theta}{2\tan\theta} = \frac{1}{\tan 2\theta} = \cot 2\theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right).$$

이다. 따라서 $t_i = \tan\theta_i$이면 $\theta_{i+1} = \frac{\pi}{2} - 2\theta_i$로 잡을 수 있다. tan은 주기(period)가 $\pi$이고 길이가 $\pi$인 임의의 구간에서 ($\frac{\pi}{2}$의 홀수 배를 제외하면) 일대일이므로, 두 매개변수가 같을 필요충분조건은 대응하는 각의 차가 $\pi$의 배수인 것이다.

**생각해 보기** 반복하기 전에, 다음 점이 존재하려면 각 $t_i$에 대해 무엇을 확인해야 할까?

이 작도가 가능하려면 매 단계에서 $t_i \neq 0$이고 $3t_i^2 \neq 1$이어야 한다. 즉 $\theta_i$는 $\frac{\pi}{2}$의 배수가 아니어야 하고, $\pm\frac{\pi}{6}$에 $\pi$의 배수를 더한 값도 아니어야 한다. $\frac{\pi}{18}$의 배수로 나타내면, 18을 법으로 $0, \pm 3, \pm 9$를 피해야 한다.

$\theta_0 = \frac{7\pi}{18}$에서 시작하면

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \frac{9\pi}{18} - \frac{14\pi}{18} = -\frac{5\pi}{18},\\ \theta_2 &= \frac{9\pi}{18} + \frac{10\pi}{18} = \frac{19\pi}{18} \equiv \frac{\pi}{18} \pmod{\pi},\\ \theta_3 &= \frac{9\pi}{18} - \frac{2\pi}{18} = \frac{7\pi}{18}.\end{aligned}$$

이다. $7, -5, 1$은 어느 것도 금지된 값이 아니므로 모든 단계가 유효하다. 따라서 $t_3 = \tan\frac{7\pi}{18} = t_0$이므로 $P_3 = P_0$이다. 그러나 $\theta_1 - \theta_0 = -\frac{12\pi}{18}$은 $\pi$의 배수가 아니므로 $t_1 = \tan(-\frac{5\pi}{18}) < 0 < t_0$이고 $P_1 \neq P_0$이다. 세 점의 매개변수는 $\tan 70^\circ$, $-\tan 50^\circ$, $\tan 10^\circ$이다.

### 두 번째 시작값

$g(\theta) = \frac{\pi}{2} - 2\theta$로 놓자. 반복하면

$$g^2(\theta) = -\frac{\pi}{2} + 4\theta, \qquad g^3(\theta) = \frac{3\pi}{2} - 8\theta.$$

이다. 따라서 $P_3 = P_0$일 필요충분조건은 $\frac{3\pi}{2} - 8\theta \equiv \theta \pmod{\pi}$, 즉 $9\theta \equiv \frac{3\pi}{2} \pmod{\pi}$이고, 이로부터

$$\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{9} = \frac{(3+2k)\pi}{18}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

를 얻는다. 마찬가지로 $P_1 = P_0$일 필요충분조건은 $3\theta \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$, 즉 $\theta = \frac{(3+6j)\pi}{18}$이다. 이는 정확히 $3 + 2k \equiv 3, 9, 15 \pmod{18}$인 경우이다. 이 경우들은 $t = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$이 되거나 유한한 $t$가 아예 없으므로 어차피 제외된다.

$\pi$를 법으로 남는 것은 $\theta \in \{\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}, \frac{11\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{17\pi}{18}\}$이다. $t_0 > 0$이려면 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이어야 하므로 $\tan\frac{\pi}{18}$, $\tan\frac{5\pi}{18}$, 그리고 주어진 $\tan\frac{7\pi}{18}$을 얻는다. $\tan\frac{\pi}{18}$은 위 순환의 $P_2$일 뿐이다. 진정으로 새로운 순환을 주는 값은

$$t_0 = \tan\frac{5\pi}{18} \ (= \tan 50^\circ),$$

이며, 이때 $\theta_0 = \frac{5\pi}{18}$, $\theta_1 = -\frac{\pi}{18}$, $\theta_2 = \frac{11\pi}{18}$, $\theta_3 = \frac{9\pi}{18} - \frac{22\pi}{18} = -\frac{13\pi}{18} \equiv \frac{5\pi}{18}$이다. $5, -1, 11$은 어느 것도 금지된 값이 아니고, $t_1 = -\tan 10^\circ \neq t_0$이다. $\tan\frac{5\pi}{18}$과 $\tan\frac{\pi}{18}$ 중 어느 것이든 문제의 답이 된다.

**생각해 보기** 각을 "$\pi$를 법으로(modulo $\pi$)" 다루어도 되는 이유는 무엇일까?

우리가 사용하는 것은 $t = \tan\theta$뿐이고, $\tan(\theta + \pi) = \tan\theta$이기 때문이다. $\theta_i$에 $\pi$를 더하면 $g(\theta_i)$는 $2\pi$만큼 바뀌는데, 이는 $t_{i+1}$을 바꾸지 않는다. 따라서 매개변수의 수열 전체는 $\pi$를 법으로 한 $\theta_0$에만 의존한다.

## 검산

- $t = -1$이면 $T = 0$이다. 실제로 $(1, -2)$에서의 접선은 기울기가 $-2$이고 원점을 지난다.
- 수치적으로, $t_0 = \tan 70^\circ \approx 2.747477$이면 $t_1 \approx -1.191754$, $t_2 \approx 0.176327$, $t_3 \approx 2.747477$이다. 마찬가지로 $\tan 50^\circ \approx 1.191754 \to -0.176327 \to -2.747477 \to 1.191754$이다.
- 임의의 $t$에 대하여 다른 교점을 구하는 삼차방정식을 수치적으로 풀어 보면 $T = (1 - t^2)/(2t)$와 일치한다.

## 흔한 실수

- 현(chord)의 기울기를 구해 같다고 놓은 다음, 인수 $T - t$를 약분하는 것을 잊는 실수. 근의 합에 대한 비에트(Vieta) 공식을 쓰면 이 문제를 아예 피할 수 있다.
- $t$에 대한 사상을 소수로 직접 반복하는 것. 그러면 정확한 순환이 가려진다. $P_3 = P_0$을 정확하게 보여 주는 것은 바로 치환 $t = \tan\theta$이다.
- 두 번째 값으로 $\tan\frac{\pi}{6}$을 드는 실수. 이때는 $T = t$이므로 다음 점이 아예 없다.

## STEP 너머

현과 접선을 이용한 이 작도는 타원곡선(elliptic curves) 이론의 핵심이다. 타원곡선 이론에서는 똑같은 "세 번째 교점" 규칙이 삼차곡선 위의 점들을 군(group)으로 만든다. 여기서 곡선 $y^2 = x(1+x)^2$은 특이 삼차곡선(singular cubic)이며 (점 $(-1, 0)$에 고립점(isolated point)을 가진다), 치환 $t = \tan\theta$는 접선 사상이 사실은 각을 두 배로 하는 사상이 변장한 것임을 보여 준다. 순환이 원을 아홉 등분하는 데서 나오는 것은 이 때문이다. Silverman과 Tate의 *Rational Points on Elliptic Curves*(타원곡선 위의 유리점)는 이 내용을 학부 수준에서 아름답게 전개한다.

풀이

# STEP III 2003, 문제 5

순수수학 • 삼차방정식의 근

**STEP III 2003, 5번 문제**

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/03-s3-q5

## 핵심 아이디어

근의 개수는 그래프를 보고 센다. 최고차항의 계수가 양수인 이차식은 최솟값이 $x$축 아래에 있을 때, 그리고 그때에만 $x$축과 두 번 만난다. 최고차항의 계수가 양수인 삼차식은 극댓값이 $x$축 위에 있고 극솟값이 $x$축 아래에 있을 때, 그리고 그때에만 $x$축과 세 번 만난다. 모든 근이 양수가 되게 하려면 극점(turning point)이 $y$축의 어느 쪽에 있는지, 그리고 곡선이 $y$축과 만나는 점에서 곡선의 부호가 무엇인지를 살펴본다. 마지막 방정식은 평행이동한 삼차식이 모습을 바꾼 것이다. 완전세제곱식을 만들어 그 꼴로 바꾸면 된다.

## 풀이

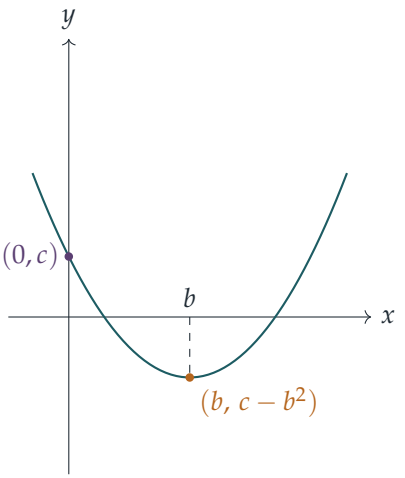
### 이차식

완전제곱식(completing the square)을 만들면

$$y = x^2 - 2bx + c = (x-b)^2 + c - b^2,$$

이므로 극점(최솟값)은 $(b,\ c-b^2)$이다.

서로 다른 두 실근이 있을 때, 곡선은 $x = b$에 대하여 대칭인 아래로 볼록한 포물선($\cup$ 모양)이고 그 꼭짓점은 $x$축 아래에 있다. 이 곡선은 $y$축과 $(0, c)$에서 만난다.




서로 다른 두 실근. 이 포물선은 최고차항의 계수가 양수이므로 $x \to \pm\infty$일 때 $y \to +\infty$이고, 최솟값은 $c - b^2$이다. $c - b^2 < 0$이면 곡선은 $x$축 아래로 내려갔다가 $x = b$의 양쪽에서 다시 올라오므로 $x$축과 두 번 만난다. $c - b^2 = 0$이면 곡선은 $x$축에 접하고(중근(repeated root)), $c - b^2 > 0$이면 $x$축과 만나지 않는다. 따라서 조건은

$$b^2 > c.$$

이다.

서로 다른 두 양의 근. 조건이

$$b^2 > c, \qquad b > 0, \qquad c > 0.$$

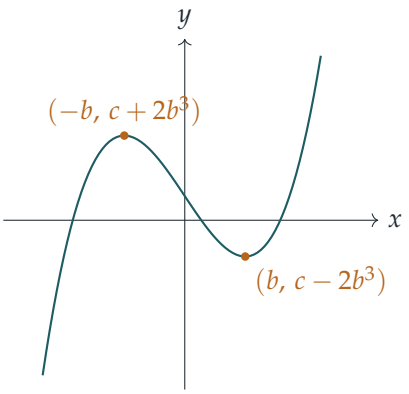
임을 보이자. **필요조건(necessary):** 두 근 $\alpha, \beta$는 $\alpha + \beta = 2b$, $\alpha\beta = c$를 만족하고, 두 근이 모두 양수이면 이 두 값도 모두 양수이다. **충분조건(sufficient):** $b^2 > c$이면 근이 두 개 있고, $x = b$의 양쪽에 하나씩 있다. $b > 0$이므로 오른쪽 근은 양수이다. 왼쪽 근은 곡선이 감소하는 구간에 있다. 곡선은 $x = 0$에서 양수(높이 $c > 0$)이고 $x = b > 0$에서 음수이므로, 이 근은 0과 $b$ 사이에 있고, 따라서 이 근도 양수이다.

### 삼차식

$y = x^3 - 3b^2x + c$에 대하여 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2 - 3b^2 = 3(x - b)(x + b)$이고, 이는 $x = \pm b$에서 0이다. 대입하면

$$x = -b : \ y = -b^3 + 3b^3 + c = c + 2b^3, \qquad x = b : \ y = b^3 - 3b^3 + c = c - 2b^3.$$

이다. $b > 0$이므로 극점은 $(-b,\ c + 2b^3)$에서 극대, $(b,\ c - 2b^3)$에서 극소이다. 도함수는 $x < -b$에서 양수, 그 사이에서 음수, $x > b$에서 양수이기 때문이다.




곡선은 $-\infty$에서 극대까지 증가하고, 극소까지 감소한 다음, $+\infty$까지 증가하며, 이 세 구간 각각에서 순단조(strictly monotonic)이다. 따라서 극댓값이 $x$축 위에 있고 극솟값이 $x$축 아래에 있을 때, 그리고 그때에만 각 구간에 근이 하나씩 있어 서로 다른 세 근을 갖는다.

$$c+2b^3>0 \text{ 이고 } c-2b^3<0, \qquad \text{즉} \qquad -2b^3<c<2b^3.$$

극값 중 하나가 0이면 중근이 생기고, 두 극값이 같은 부호(0이 아닌)를 가지면 실근은 하나뿐이다. 따라서 $|c|<2b^3$이 필요충분조건이다.

### 평행이동한 삼차식의 서로 다른 세 양의 근

곡선 $y=(x-a)^3-3b^2(x-a)+c$는 앞의 곡선을 오른쪽으로 $a$만큼 평행이동(translation)한 것이다($b>0$은 그대로 둔다). 따라서 이 곡선이 서로 다른 세 실근을 가질 필요충분조건은 $|c|<2b^3$이고, 이때 극대는 $x=a-b$, 극소는 $x=a+b$에서 일어나며, 근 $x_1<x_2<x_3$은

$$x_1<a-b<x_2<a+b<x_3.$$

을 만족한다. 세 근이 모두 양수일 필요충분조건은 가장 작은 근 $x_1$이 양수인 것이다. 곡선이 $y$축과 만나는 높이를

$$y(0)=(-a)^3-3b^2(-a)+c=c-a^3+3ab^2$$

라 하자. 조건이

$$|c|<2b^3, \qquad a>b, \qquad c<a^3-3ab^2.$$

임을 보이자.

? **생각해 보기** 왜 "$y(0)<0$"만으로는 세 근을 모두 원점 오른쪽에 둘 수 없는가?

$y$는 $x_2$와 $x_3$ 사이에서도 음수이기 때문이다. $x=0$에서의 값이 음수라는 것은 원점이 가운데 근과 가장 큰 근 사이에 있다는 뜻일 수도 있다. 따라서 0이 곡선의 첫 번째 증가 구간, 즉 극대점의 왼쪽에 있다는 것도 알아야 한다. 이것이 $a>b$의 역할이다.

**필요조건.** 서로 다른 세 양의 근이 있다고 하자. 그러면 앞 문항에 의하여 $|c|<2b^3$이다. 또 $0<x_1<a-b$이므로 $a>b$이다. 마지막으로, $y$는 $(-\infty, a-b]$에서 순증가하고 $y(x_1)=0$이므로 $0<x_1$에서 $y(0)<0$이다. 이로부터 $c<a^3-3ab^2$를 얻는다.

**충분조건.** 세 조건이 모두 성립한다고 하자. 그러면 서로 다른 세 실근이 있고 $0<a-b$이므로 0은 $y$가 순증가하는 구간 $(-\infty, a-b]$에 속한다. $y(0)<0=y(x_1)$이므로 $0<x_1$이고, 따라서 세 근은 모두 양수이다.

그러므로 이 방정식이 서로 다른 세 양의 근을 가질 필요충분조건은

$$a>b \quad \text{이고} \quad -2b^3<c<\min\left(2b^3,\ a^3-3ab^2\right).$$

이다. ($a>b>0$일 때 $a^3-3ab^2+2b^3=(a-b)^2(a+2b)>0$이므로 $c$에 대한 이 범위는 모순 없이 성립한다.)

### 마지막 방정식

2로 나누고 완전세제곱식을 만든다. $(x-a)^3$의 $x^2$항은 $-3ax^2$이므로 $3a=\frac{9}{2}$, 즉 $a=\frac{3}{2}$이어야 한다. $x=t+\frac{3}{2}$로 놓으면

$$\begin{aligned} x^3-\tfrac{9}{2}x^2+\tfrac{7}{2}x-\tfrac{1}{2} &= t^3+\left(\tfrac{27}{4}-\tfrac{27}{2}+\tfrac{7}{2}\right)t+\left(\tfrac{27}{8}-\tfrac{81}{8}+\tfrac{21}{4}-\tfrac{1}{2}\right) \\ &= t^3-\tfrac{13}{4}t-2, \end{aligned}$$

이고, $a$를 그렇게 골랐으므로 $t^2$항은 소거된다. 따라서

$$2x^3-9x^2+7x-1=0 \iff \left(x-\tfrac{3}{2}\right)^3-3b^2\left(x-\tfrac{3}{2}\right)+c=0, \qquad a=\tfrac{3}{2},\ b^2=\tfrac{13}{12},\ c=-2,$$

이고, $b=\sqrt{13/12}>0$이다. 이제 세 조건을 확인한다.

- $|c|<2b^3$: 이는 $2<2b^3$, 즉 $b^2>1$이라는 뜻이고, $b^2=\frac{13}{12}>1$이므로 성립한다.
- $a>b$: 둘 다 양수이고 $a^2=\frac{9}{4}=\frac{27}{12}>\frac{13}{12}=b^2$이다.
- $c<a^3-3ab^2$: $a^3-3ab^2=a(a^2-3b^2)=\frac{3}{2}\left(\frac{9}{4}-\frac{13}{4}\right)=-\frac{3}{2}$이고 $-2<-\frac{3}{2}$이다.

세 조건이 모두 성립하므로, 구하는 대로 $2x^3-9x^2+7x-1=0$은 서로 다른 세 양의 근을 갖는다.

## 검산

- 부호의 변화로 최종 답을 직접 확인할 수 있다. $p(x)=2x^3-9x^2+7x-1$이라 하면 $p(0)=-1$, $p(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$, $p(1)=-1$, $p(3)=-7$, $p(4)=11$이다. 따라서 $(0,\frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2},1)$,

$(3, 4)$에 근이 있다. 수치적으로 이 근들은 0.185, 0.760, 3.555이다.

- $y(0) = c - a^3 + 3ab^2 = -2 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$는 최고차항의 계수가 1인 삼차식(monic cubic) $x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{1}{2}$의 상수항과 일치하며, 당연히 그래야 한다.
- $(a, b, c)$를 수천 번 무작위로 골라 시험해 본 결과, 매번 위의 조건과 일치했다.

## 흔한 실수

- 양수 조건으로 $y(0) < 0$만(또는 $a > b$만) 쓰는 것. 둘 다 필요하다. $y(0) < 0$은 원점이 더 큰 두 근 사이에 있을 때에도 성립한다.
- $|c| \leq 2b^3$에서 등호가 성립하면 중근이 생기므로 "서로 다른 세 근"이 아니라는 점을 잊는 것.
- 평행이동의 방향을 반대로 생각하는 것. $x - a$에 대한 곡선은 원래 곡선을 **오른쪽**으로 $a$만큼 옮긴 것이다.

## STEP 너머

여기서처럼 어떤 삼차식이든 평행이동으로 "축약된(depressed)" 꼴 $t^3 + pt + q$로 바꿀 수 있다. 이때 이 삼차식이 서로 다른 세 실근을 가질 필요충분조건은 $4p^3 + 27q^2 < 0$이다. $p = -3b^2$, $q = c$로 놓으면 이는 위에서 구한 조건 $c^2 < 4b^6$이 된다. $-(4p^3 + 27q^2)$를 **판별식**(discriminant)이라 하며, 이는 삼차방정식을 어떻게 풀었는가(카르다노(Cardano)의 공식), 그리고 마침내 갈루아(Galois) 이론에 이르는 이야기의 출발점이다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 그 이론으로 나아가는 좋은 다음 단계이다.

풀이

# STEP III 2003, 문제 6

순수수학 • 삼각함수의 망원합

**STEP III 2003, 6번 문제**

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/03-s3-q6

## 핵심 아이디어

각이 같은 간격으로 커지는 코사인들의 합은 그대로 두면 다루기 어렵지만, 모든 항에 $2\sin\frac{1}{2}\theta$를 곱하면 각 코사인이 두 사인의 **차**로 바뀌고, 그러면 합이 연쇄적으로 소거된다(telescoping). 남는 것은 두 사인의 차이며, 이것은 합차 공식(factor formula)으로 곱으로 바꿀 수 있다. 곱이 영이 되는 조건을 찾는 것은 쉽다. 단 하나 조심할 점은 우리가 곱한 $\sin\frac{1}{2}\theta$ 자체가 영이 될 수 있다는 것이다.

## 풀이

### 항등식(identity)

$A = r\theta$, $B = \frac{1}{2}\theta$로 두고 $\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2\cos A \sin B$를 쓰면

$$\sin\left(r+\tfrac{1}{2}\right)\theta - \sin\left(r-\tfrac{1}{2}\right)\theta = 2\cos r\theta \, \sin\tfrac{1}{2}\theta,$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

### 급수(series)의 합 구하기

다음과 같이 두자.

$$S(\theta) = \sum_{r=a}^{b-1} \cos r\theta.$$

양변에 $2\sin\frac{1}{2}\theta$를 곱하고 $a$부터 $b-1$까지의 각 $r$에 대하여 항등식을 쓰면

$$\begin{aligned} 2\sin\tfrac{1}{2}\theta\, S(\theta) &= \sum_{r=a}^{b-1}\left[\sin\left(r+\tfrac{1}{2}\right)\theta - \sin\left(r-\tfrac{1}{2}\right)\theta\right] \\ &= \sin\left(b-\tfrac{1}{2}\right)\theta - \sin\left(a-\tfrac{1}{2}\right)\theta, \end{aligned}$$

이다. 각 $\sin\left(r+\frac{1}{2}\right)\theta$가 다음 항의 $-\sin\left((r+1)-\frac{1}{2}\right)\theta$와 상쇄되어, 마지막 항의 위쪽 끝과 첫 항의 아래쪽 끝만 남기 때문이다.

이제 $\frac{P+Q}{2} = \frac{1}{2}(a+b-1)\theta$, $\frac{P-Q}{2} = \frac{1}{2}(b-a)\theta$로 두고 $\sin P - \sin Q = 2\cos\frac{P+Q}{2}\sin\frac{P-Q}{2}$를 쓰면

$$\sin\tfrac{1}{2}\theta\, S(\theta) = \cos\tfrac{1}{2}(a+b-1)\theta\ \sin\tfrac{1}{2}(b-a)\theta. \qquad (*)$$

**$S(\theta)=0$ 풀기**

> ? **생각해 보기** $(*)$를 그냥 $\sin\frac{1}{2}\theta$로 나누어도 될까?

$\sin\frac{1}{2}\theta \neq 0$일 때, 즉 $\theta$가 $2\pi$의 배수가 아닐 때에만 그렇다. 그러므로 그런 값들을 먼저 처리한다. 정수 $m$에 대하여 $\theta = 2m\pi$이면 모든 항 $\cos r\theta$가 1이므로 $S(\theta) = b-a \geq 2$이다. 이 값들은 결코 해가 아니다.

그 밖의 모든 $\theta$에 대해서는 $\sin\frac{1}{2}\theta \neq 0$이고, $(*)$에 의하여

$$S(\theta) = 0 \iff \cos\tfrac{1}{2}(a+b-1)\theta = 0 \text{ 또는 } \sin\tfrac{1}{2}(b-a)\theta = 0.$$

- $\cos\frac{1}{2}(a+b-1)\theta = 0$일 필요충분조건은 $\frac{1}{2}(a+b-1)\theta = \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi$, 즉

  $$\theta = \frac{(2k+1)\pi}{a+b-1}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

  이다. ($a+b-1 \geq 3$이므로 영으로 나누는 것이 아님에 주의한다.) 이 값들 중 어느 것도 $2\pi$의 배수가 아니다. 그러려면 $2k+1 = 2m(a+b-1)$이어야 하는데, 이는 홀수가 짝수와 같다는 뜻이기 때문이다. 따라서 이 값들은 모두 해이다.

- $\sin\frac{1}{2}(b-a)\theta = 0$일 필요충분조건은 $\frac{1}{2}(b-a)\theta = k\pi$, 즉

  $$\theta = \frac{2k\pi}{b-a}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

  이다. 이 값이 $2\pi$의 배수가 되는 것은 정확히 $b-a$가 $k$를 나눌 때이고, 그런 값들은 해가 되지 않음을 이미 보았다. 따라서 이들은 제외해야 한다.

> ? **생각해 보기** $(*)$가 성립하는 것처럼 보이는데도, 왜 두 번째 해 집합에서 $2\pi$의 배수들을 버려야 할까?

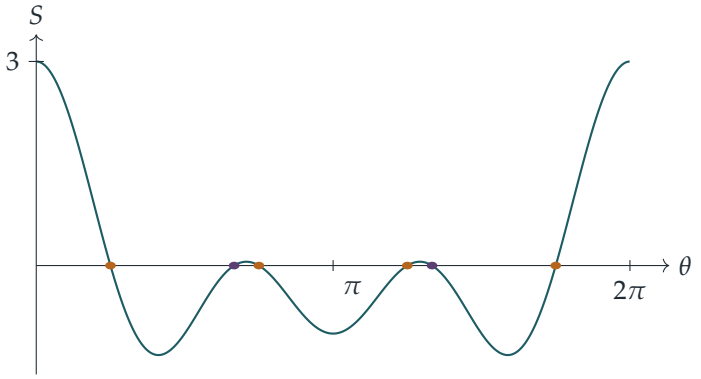
$\theta = 2m\pi$에서는 $S$가 무엇이든 $(*)$의 양변이 모두 영이므로, $(*)$는 그곳에서 $S$에 대하여 아무것도 알려 주지 않는다. 이것은 양변에 $\sin\frac{1}{2}\theta$를 곱하면서 생긴 거짓 단서였다. $b-a \geq 2$이므로 두 번째 해 집합에는 $\theta = 2\pi/(b-a)$와 같은 진짜 해가 여전히 들어 있다.

이를 종합하면, 해는 정확히 다음과 같다.

$$\theta = \frac{(2k+1)\pi}{a+b-1} \ (k \in \mathbb{Z}) \qquad \text{또는} \qquad \theta = \frac{2k\pi}{b-a} \ (k \in \mathbb{Z},\ b-a \nmid k).$$

두 해 집합은 겹칠 수 있다. 그래도 문제될 것은 없는데, 양쪽에 모두 속하는 값도 여전히 하나의 해일 뿐이기 때문이다.

예를 들어 $a=1, b=4$이면 방정식은 $\cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta = 0$이다. $(0, 2\pi)$에서 이 방정식의 근은 첫 번째 해 집합에서 나온 $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$와 두 번째 해 집합에서 나온 $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$이다. $S=3$이 되는 $\theta = 0$과 $\theta = 2\pi$는 빠져 있음에 주의한다.




곡선 $S = \cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta$: 호박색 근은 코사인 인수에서, 자주색 근은 사인 인수에서 나온다.

## 검산

- $a=1, b=4$일 때: $\theta = \frac{\pi}{4}$에서 $\frac{\sqrt{2}}{2} + 0 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$이고, $\theta = \frac{2\pi}{3}$에서 $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 0$이다.
- 수치적으로, 여러 쌍 $a, b$에 대하여 임의의 $\theta$에서 $(*)$가 성립한다. 모든 $1 \leq a \leq 6$, $a+2 \leq b \leq 11$에 대하여 $(0, 6\pi)$에서 $S$를 촘촘하게 조사하면 공식이 주는 근만 정확히 나오고 다른 근은 나오지 않는다. 예를 들어 $a=1, b=3$일 때 근 $\theta = 13\pi/3 \approx 13.6136$은 첫 번째 해 집합에서 나온다.

## 흔한 실수

- 확인하지 않고 $(*)$를 $\sin\frac{1}{2}\theta$로 나누어 $\theta = 2m\pi$를 해에 포함시키는 것. 그곳에서는 $S = b - a \neq 0$이다.
- 연쇄 소거되는 합의 끝 항을 잘못 구하는 것. 마지막 코사인이 $\cos(b-1)\theta$이므로 끝 항은 $\sin\left(b-\frac{1}{2}\right)\theta$와 $\sin\left(a-\frac{1}{2}\right)\theta$이다.
- 문제가 모든 해를 구하라고 하는데 $[0, 2\pi)$와 같은 한 구간의 해만 제시하는 것.

## STEP 너머

$\sum \cos r\theta$의 닫힌 꼴은 $e^{i\theta}$에 대한 등비급수(geometric series)의 실수부(real part)이다. $a = -n$, $b = n+1$로 두면 **디리클레 핵**(Dirichlet kernel) $\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta / \sin\frac{1}{2}\theta$를 얻는데, 이것은 푸리에(Fourier) 급수 이론과 그 급수가 수렴(converge)하는지의 문제에서 핵심적인 역할을 한다. 이와 같은 삼각함수의 합이 왜 $e^{i\theta}$로 다루면 간단해지는지 알아보려면 Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)가 좋은 출발점이다.

풀이

# STEP III 2003, 문제 7

순수수학 • 심슨 선

> **STEP III 2003, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/03-s3-q7

## 핵심 아이디어

수선의 발(foot of the perpendicular)은 $P$에서 직선의 법선(normal) 방향으로 걸어가다가 직선과 만나는 점이므로, $N = P + \lambda$(법선)으로 놓고 $\lambda$를 구한다. 두 번째 부분에서 $s$와 $t$에 대한 조건은 두 기울기(gradient)의 곱이 $-1$이라는 것이다. 즉 $PA$와 $PB$가 수직이라는 뜻이다. 이 조건을 원의 방정식으로 바꾸면, 바로 그 식 덕분에 세 점이 한 직선 위에 있음(collinearity)을 확인하는 계산이 깔끔하게 정리된다.

## 풀이

### $N$의 좌표

직선 $AB$의 방정식은 $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$, 즉

$$bx + ay = ab.$$

이다. 이 직선의 법선벡터는 $(b, a)$이므로, $P$에서 내린 수선의 발 $N$은 어떤 $\lambda$에 대하여

$$N = (s + \lambda b,\ t + \lambda a)$$

의 꼴이다. $N$이 $AB$ 위에 있으므로

$$b(s + \lambda b) + a(t + \lambda a) = ab \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{ab - bs - at}{a^2 + b^2}.$$

따라서

$$x = s + \lambda b = \frac{s(a^2 + b^2) + ab^2 - b^2 s - abt}{a^2 + b^2} = \frac{ab^2 - abt + a^2 s}{a^2 + b^2} = \frac{ab^2 - a(bt - as)}{a^2 + b^2},$$

$$y = t + \lambda a = \frac{t(a^2 + b^2) + a^2 b - abs - a^2 t}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 b + b^2 t - abs}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 b + b(bt - as)}{a^2 + b^2},$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

### $N$은 $XY$ 위에 있다

먼저 조건이 무엇을 말하는지 살펴보자. 조건이 의미를 가지려면 $s \neq 0$이고 $s \neq a$이어야 하며, 곱이 0이 아니라 $-1$이므로 $t \neq 0$이고 $t \neq b$이기도 하다. 식을 전개하면

$$t(t-b) = -s(s-a) \quad \Longleftrightarrow \quad s^2 + t^2 = as + bt. \tag{$*$}$$

이제 $X = (s, 0)$, $Y = (0, t)$이다. $s \neq 0$이고 $t \neq 0$이므로 이 두 점은 원점이 아닌 서로 다른 점이며, 직선 $XY$는

$$\frac{x}{s} + \frac{y}{t} = 1, \qquad \text{즉} \qquad tx + sy = st.$$

이다. 따라서 $N$의 좌표에 대하여 $tx + sy = st$임을 보이면 된다.

> **생각해 보기** 그냥 대입하고 잘되기를 바랄 것인가, 아니면 계산을 깔끔하게 정리하는 방법이 있을까?

식을 짧게 쓰기 위해 $k = bt - as$로 놓자. 위의 공식을 이용하면

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)(tx+sy) &= t(ab^2 - ak) + s(a^2b + bk) \\ &= ab^2t + a^2bs + k(bs - at).\end{aligned}$$

마지막 곱은 깔끔하게 전개된다.

$$k(bs-at) = (bt-as)(bs-at) = b^2st - abt^2 - abs^2 + a^2st = (a^2+b^2)st - ab(s^2+t^2).$$

그러므로

$$(a^2+b^2)(tx+sy) = (a^2+b^2)st + ab\big(as + bt - s^2 - t^2\big).$$

이 식은 모든 $P$에 대하여 성립한다. $(*)$에 의해 괄호 안은 0이므로 $tx + sy = st$이고, $N$은 직선 $XY$ 위에 있다.

### 기하학적 해석

$PB$의 기울기는 $\dfrac{t-b}{s}$이고 $PA$의 기울기는 $\dfrac{t}{s-a}$이므로, 조건은 $PA \perp PB$, 즉 각 $APB$가 직각이라는 뜻이다. 같은 말로, $(*)$는

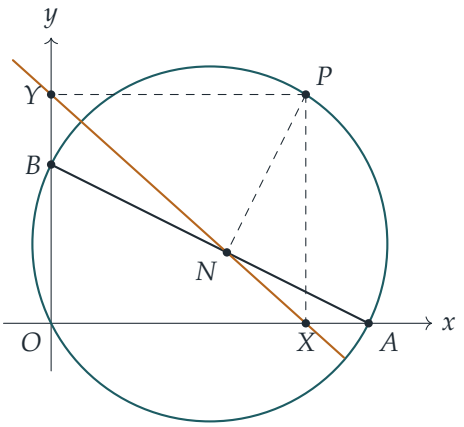
$$\left(s - \tfrac{a}{2}\right)^2 + \left(t - \tfrac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{4},$$

이므로 $P$는 $AB$를 지름으로 하는 원 위에 있다. 각 $AOB$ 역시 직각이므로 이 원은 $O$를 지난다. 즉 이 원은 **삼각형 $OAB$의 외접원**(*circumcircle*)이다.

점 $X$, $Y$, $N$은 $P$에서 삼각형의 세 변 $OA$, $OB$, $AB$에 내린 수선의 발이다. 따라서 이 결과는 다음을 말한다.

$P$가 삼각형의 외접원 위에 있으면, $P$에서 세 변(필요하면 연장한 변)에 내린 수선의 발은 한 직선 위에 있다.

이것이 심슨 선(*Simson line*) 정리이며, 여기서는 직각이 원점에 오도록 놓인 직각삼각형에 대하여 증명한 것이다.




$a = 4$, $b = 2$인 경우: $P$는 $O$, $A$, $B$를 지나는 원 위에 있고, 직선 $XY$(호박색)는 $N$을 지난다.

## 검산

- $P = O$, 즉 $s = t = 0$으로 놓으면 공식은 $N = \left(\frac{ab^2}{a^2+b^2}, \frac{a^2b}{a^2+b^2}\right)$을 준다. 이 점은 $bx + ay = ab$ 위에 있고, $O$를 지나고 $AB$에 수직인 직선 $y = \frac{a}{b}x$ 위에도 있으므로 예상대로이다.
- $a = 4$, $b = 2$이고 원 위의 점 $P = (2 + \sqrt{5}\cos 1,\ 1 + \sqrt{5}\sin 1) \approx (3.208, 2.882)$에 대하여 공식은 $N \approx (2.214, 0.893)$을 주며, $\frac{2.214}{3.208} + \frac{0.893}{2.882} \approx 0.690 + 0.310 = 1$이므로 $N$은 $XY$ 위에 있다.
- 항등식 $(a^2 + b^2)(tx + sy - st) = ab(as + bt - s^2 - t^2)$으로부터 역(converse)도 얻는다. 즉 $P$가 좌표축 위에 있지 않을 때, $N$이 $XY$ 위에 있는 것은 $P$가 원 위에 있을 때뿐이다.

## 흔한 실수

- $AB$의 법선으로 $(a, b)$를 쓰는 것. $AB$의 방향은 $(-a, b)$이므로 법선은 $(b, a)$이다.
- 모든 것을 한꺼번에 전개하다가 계산에 파묻히는 것. 주어진 답이 암시하듯 $bt - as$를 하

나의 기호로 묶으면 계산이 몇 줄로 끝난다.

- "각 $APB$가 직각이다"에서 멈추는 것. 문제가 원하는 해석은 심슨 선이다. 즉 $X$, $Y$, $N$은 삼각형 $OAB$의 세 변에 내린 수선의 발이다.

## STEP 너머

심슨 선은 모든 삼각형에 대하여 성립하며, 종합적 증명에서는 원에 내접하는 사각형(cyclic quadrilateral)과 같은 호에 대한 원주각이 같다는 성질을 이용한다. 그 역도 참이며, $P$가 외접원을 따라 움직일 때 심슨 선들의 포락선(envelope)은 델토이드(deltoid, 슈타이너(Steiner)의 내사이클로이드)가 된다. 좌표나 복소수를 이용한 방법은 이런 결과를 기계적인 계산으로 만든다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석)는 복소수가 원의 기하를 얼마나 우아하게 다루는지 보여 주며, 콕서터(Coxeter)와 Greitzer의 *Geometry Revisited*(기하학 다시 보기)는 심슨 선을 비롯한 고전적인 삼각형 기하를 폭넓게 다룬다.

풀이

# STEP III 2003, 문제 8

순수수학 • 일계 미분방정식

> **STEP III 2003, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/03-s3-q8

## 핵심 아이디어

소문항 (i)은 음함수 미분(implicit differentiation) 문제이지만, 사실은 한 가지 기법을 보여 주는 예제이다. 곡선족(family of curves) $(y+ax)^n(y+bx)=c$의 기울기(gradient)는 $x$와 $y$에 대한 두 일차식의 비로 나타난다는 것이다. 소문항 (ii)는 이 기법을 거꾸로 적용한다. 일반적인 곡선족을 미분하여 기울기를 $a, b, n$으로 나타낸 다음, 주어진 방정식과 일치하도록 이 값들을 정한다. 일단 일치하면 그 식은 모든 해곡선(solution curve)을 따라 일정하고, 이 일정한 관계가 바로 일반해(general solution)이다.

## 풀이

### 소문항 (i)

곱의 미분법(product rule)과 연쇄법칙(chain rule)을 이용하여 $(y+2x)^3(y-4x)=c$를 $x$에 대하여 미분하고, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$를 $y'$으로 쓰자.

$$3(y+2x)^2(y'+2)(y-4x)+(y+2x)^3(y'-4)=0.$$

$y+2x\neq 0$인 점에서는 $(y+2x)^2$으로 나눌 수 있다.

$$3(y'+2)(y-4x)+(y+2x)(y'-4)=0.$$

$y'$이 있는 항을 모으면

$$\begin{aligned} y'\big[3(y-4x)+(y+2x)\big] &= -6(y-4x)+4(y+2x), \\ y'(4y-10x) &= 32x-2y, \end{aligned}$$

이고, 분자와 분모를 2로 나누면

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{16x - y}{2y - 5x},$$

이므로 원하는 결과를 얻는다. (직선 $y = -2x$ 위에서는 곡선의 $c = 0$이며, 이때에도 이 공식은 올바른 기울기 $-2$를 준다.)

**소문항 (ii)**

$y$가 $x$의 함수일 때 $F = (y + ax)^n(y + bx)$라 하자. 소문항 (i)과 똑같이 하면

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} &= n(y + ax)^{n-1}(y' + a)(y + bx) + (y + ax)^n(y' + b) \\ &= (y + ax)^{n-1}\Big[y'\big((n+1)y + (nb + a)x\big) + (na + b)y + (n+1)ab\,x\Big].\end{aligned}$$

따라서 $y = -ax$를 벗어난 곳에서, 곡선을 따라 $F$가 일정할 필요충분조건은

$$y' = -\frac{(na + b)y + (n+1)ab\,x}{(n+1)y + (nb + a)x}. \qquad (*)$$

이다. (소문항 (i)은 $a = 2, b = -4, n = 3$인 경우로, $(32x - 2y)/(4y - 10x)$를 준다.)

> **생각해 보기** 분수는 여러 가지 방법으로 쓸 수 있는데, $(*)$를 $\dfrac{10x - 4y}{3x - y}$와 어떻게 맞출 수 있을까?

분수는 분자와 분모에 같은 수를 곱해도 변하지 않으므로, 두 식은 공통 인수를 제외하고서만 맞출 수 있다. 목표 식을 $-(4y - 10x)/(y - 3x)$로 쓰고, 분모의 $y$의 계수가 같아지도록 분자와 분모에 $k = n + 1$을 곱한다. 그러면 다음이 성립해야 한다.

$$na + b = -4(n+1), \qquad (n+1)ab = 10(n+1), \qquad nb + a = -3(n+1).$$

$n + 1 \neq 0$이므로 (만약 $n = -1$이면 $(*)$의 분모에 $y$항이 없다) 가운데 식에서 $ab = 10$을 얻는다. 바깥쪽 두 식을 더하면 $(n+1)(a+b) = -7(n+1)$이므로 $a + b = -7$이다. 따라서 $a$와 $b$는 $t^2 + 7t + 10 = 0$의 두 근, 즉 $-2$와 $-5$이다. 바깥쪽 두 식을 빼면

$$(n-1)(a-b) = -(n+1).$$

- $a = -5, b = -2$이면 $-3(n-1) = -(n+1)$이므로 $n = 2$이다.
- $a = -2, b = -5$이면 $3(n-1) = -(n+1)$이므로 $n = \frac{1}{2}$이다.

$(y - 2x)^{1/2}(y - 5x) = c$를 제곱하면 $(y - 5x)^2(y - 2x) = c^2$이 되므로 두 선택은 같은 곡선들을 나타낸다. 제곱근을 피할 수 있도록 $n = 2$를 택한다.

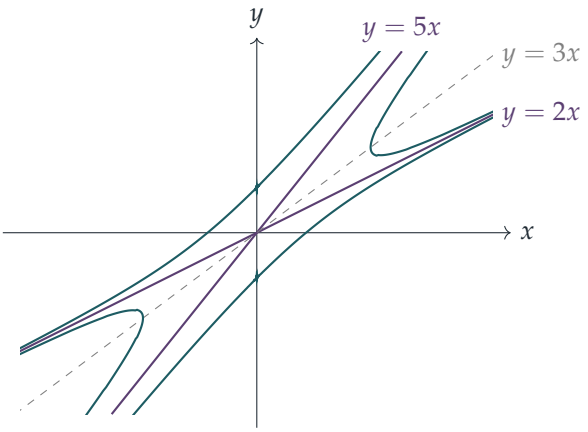
확실히 하기 위해 직접 확인해 보자. $G = (y-5x)^2(y-2x)$라 하면

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x} &= (y-5x)\big[2(y'-5)(y-2x) + (y-5x)(y'-2)\big] \\ &= (y-5x)\big[3y'(y-3x) - 12y + 30x\big] \\ &= 3(y-5x)\big[y'(y-3x) - (4y-10x)\big].\end{aligned}$$

$y$가 미분방정식(differential equation)을 만족하면 $y'(y-3x) = 4y-10x$이므로 대괄호 안이 사라지고 $\mathrm{d}G/\mathrm{d}x = 0$이다. 따라서 $G$는 모든 해곡선 위에서 일정하며, 일반해는

$$\boxed{(y-5x)^2(y-2x) = C}$$

이다. 여기서 $C$는 임의의 상수이다. $C = 0$인 경우는 직선 $y = 5x$와 $y = 2x$를 준다. 이 둘은 실제로 해이다. $y = 2x$ 위에서 우변은 $2x/x = 2$이고, $y = 5x$ 위에서는 $(-10x)/(-2x) = 5$이다. 모든 곡선은 방정식이 정의되지 않는 직선 $y = 3x$와 만나는 곳에서 수직 접선(vertical tangent)을 가진다.




곡선 $(y-5x)^2(y-2x) = \pm 1$(청록색)과 $C = 0$인 직선 해(자주색). 두 직선 사이에 있는 가지들은 점선 $y = 3x$와 만나는 곳에서 수직 접선을 가진다.

### 소문항 (ii)의 다른 풀이

우변은 $y/x$에만 의존하므로 치환(substitution) $y = vx$를 써도 된다. 그러면

$$x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{(v-2)(v-5)}{3-v},$$

을 얻고, 변수분리(separation of variables)와 부분분수(partial fractions)를 이용하면 $\ln|x| = -\frac{1}{3}\ln|v-2| - \frac{2}{3}\ln|v-5| +$ 상수에 이르며, 이를 정리하면 같은 답이 나온다. 문제에서 제시한 방법을 쓰면 부분분수를 피할 수 있다.

## 검산

- 소문항 (i)은 $(*)$에 대한 검산을 담고 있다. $(*)$에 $a = 2, b = -4, n = 3$을 대입하면 그곳에서 구한 기울기가 다시 나온다.
- 점 $(1, 0)$에서 방정식은 기울기 $10/3$을 준다. 그 점에서 $(y - 5x)^2(y - 2x) = C$를 음함수 미분하면 $(-5)\left[2(y' - 5)(-2) + (-5)(y' - 2)\right] = 0$이므로 $-9y' + 30 = 0$, 즉 $y' = 10/3$이다.
- 수치적으로, 무작위로 고른 쉰 개의 시작점에서 룽게-쿠타 방법(Runge–Kutta method)으로 미분방정식을 단계적으로 풀었다. 각 경로를 따라 $(y - 5x)^2(y - 2x)$의 값은 약 $10^{-13}$ 이내로 일정하게 유지되었다.

## 흔한 실수

- 공통 인수 없이 $(*)$의 계수를 $10x - 4y$와 $3x - y$에 직접 맞추는 것. 그러면 모순된 방정식들이 나온다.
- 같은 곡선족이라는 것을 알아차리지 못하고 답을 $(y - 2x)^{1/2}(y - 5x) = c$로 남겨 두는 것. 또한 부호를 주의 깊게 다루지 않으면 $y < 2x$인 해들을 잃게 된다.
- $C = 0$도 허용된다는 것을 잊는 것. 이 경우가 직선 해 $y = 2x$와 $y = 5x$를 준다.

## STEP 너머

여기서 다룬 방정식은 **동차**(*homogeneous*) 방정식이다. 즉, 우변이 $y/x$에만 의존한다. 해를 따라 일정한 함수 $G(x, y)$를 찾는 것은 **완전미분방정식**(*exact equations*)과 **적분인자**(*integrating factors*)의 바탕이 되는 아이디어이다. 역학에서 같은 아이디어는 에너지와 같은 보존량(conserved quantities)을 찾는 일이다. 두 가지 모두 Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식) 앞부분에서 다룬다.

풀이

# STEP III 2003, 문제 9

역학 • 평형의 안정성

**STEP III 2003, 9번 문제**

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/03-s3-q9

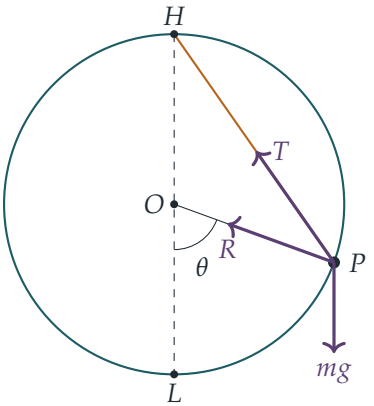
## 핵심 아이디어

철사는 매끄러우므로 철사의 반작용(reaction)은 항상 반지름 방향으로 작용하고 일을 하지 않는다. 따라서 모든 일은 **접선**(*tangential*) 방향에서 일어난다. 장력과 무게를 접선 방향으로 분해하면 $\ddot{\theta}$에 대한 하나의 방정식을 얻고, 이 방정식이 평형 위치와 작은 진동을 모두 알려 준다. 필요한 각은 모두 이등변삼각형 $OHP$의 기하에서 나온다.

## 풀이

### 설정

$P$를 매끄러운 철사 위의 입자로 모형화하면, 철사가 주는 반작용 $R$은 $PO$ 방향으로 작용한다. 줄은 가볍고 훅의 법칙(Hooke's law)을 따른다. $0 < \theta < \pi$로 두어 $P$가 연직 지름 $LH$의 한쪽에 있도록 한다.



$OH = OP = a$이므로 삼각형 $OHP$는 $\angle HOP = \pi - \theta$인 이등변삼각형이고, 따라서 두 밑각은

$$\angle OHP = \angle OPH = \tfrac{1}{2}\theta, \qquad HP = 2a\cos\tfrac{1}{2}\theta.$$

이다. 줄은 $HP > a$일 때, 즉 $\cos\frac{1}{2}\theta > \frac{1}{2}$일 때 팽팽하며, 이때 훅의 법칙에 의해

$$T = \frac{\alpha mg}{a}\left(2a\cos\tfrac{1}{2}\theta - a\right) = \alpha mg\left(2\cos\tfrac{1}{2}\theta - 1\right).$$

이다.

이제 $P$에서의 접선을 따라 $\theta$가 증가하는 방향($H$ 쪽)으로 힘을 분해한다. 줄은 $PO$와 각 $\frac{1}{2}\theta$를 이루므로 이 접선과는 각 $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\theta$를 이루고, 줄의 장력의 접선 성분은 $T\sin\frac{1}{2}\theta$이다. 무게의 접선 성분은 $-mg\sin\theta$이고, $R$의 접선 성분은 없다. 접선 가속도가 $a\ddot{\theta}$이므로

$$\begin{aligned} ma\ddot{\theta} &= T\sin\tfrac{1}{2}\theta - mg\sin\theta \\ &= mg\left[\alpha\left(2\cos\tfrac{1}{2}\theta - 1\right)\sin\tfrac{1}{2}\theta - 2\sin\tfrac{1}{2}\theta\cos\tfrac{1}{2}\theta\right], \end{aligned}$$

이고, 따라서 줄이 팽팽한 동안

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{a}\sin\tfrac{1}{2}\theta\left[2(\alpha-1)\cos\tfrac{1}{2}\theta - \alpha\right]. \qquad (*)$$

이다. (같은 방정식을 에너지 $\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 - mga\cos\theta + \frac{1}{2}\alpha mga(2\cos\frac{1}{2}\theta - 1)^2$을 미분하여 얻을 수도 있다.)

### 평형 위치

평형(equilibrium)에서는 $\ddot{\theta} = 0$이다. $0 < \theta < \pi$에서는 $\sin\frac{1}{2}\theta \neq 0$이므로

$$\cos\tfrac{1}{2}\theta = \frac{\alpha}{2(\alpha-1)},$$

이어야 하고, $\alpha > 1$이므로 이 식은 의미가 있다. 이것이 $0 < \theta < \pi$를 주려면 $0 < \cos\frac{1}{2}\theta < 1$이어야 한다. 이 값은 양수이고,

$$\frac{\alpha}{2(\alpha-1)} < 1 \iff \alpha < 2\alpha - 2 \iff \alpha > 2.$$

이다. 또한 $(*)$에서 가정한 대로 그 위치에서 줄이 팽팽해야 한다. 즉 $\dfrac{\alpha}{2(\alpha-1)} > \dfrac{1}{2} \iff \alpha > \alpha - 1$이어야 하는데, 이는 항상 참이다. 따라서 $\alpha > 2$이면 $0 < \theta < \pi$인 평형 위치가 존재하며, 이것이 보이려던 것이다.

**? 생각해 보기** 평형 위치에서 줄이 느슨하다면 어떻게 될까?

그렇다면 접선 성분을 가진 힘은 중력뿐이고, $-mg\sin\theta = 0$은 $0 < \theta < \pi$에서 해가 없다. 그래서 우리가 찾은 평형 위치가 자동으로 $\cos\frac{1}{2}\theta > \frac{1}{2}$를 만족한다는 사실이 중요하다.

**$\alpha = 2+\sqrt{2}$일 때의 작은 진동**

이제

$$\cos\tfrac{1}{2}\theta = \frac{2+\sqrt{2}}{2(1+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{2(\sqrt{2}+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

이므로 평형 위치는 $\frac{1}{2}\theta = \frac{1}{4}\pi$, 즉 $\theta = \frac{1}{2}\pi$이고, 이때 $P$는 $O$와 같은 높이에 있다. $\theta = \frac{1}{2}\pi + \phi$로 두면 $\ddot{\theta} = \ddot{\phi}$이다. $(*)$를 $\ddot{\theta} = \frac{g}{a}f(\theta)$로 쓰면 $f(\frac{1}{2}\pi) = 0$이다. $\phi$가 작을 때

$$f(\tfrac{1}{2}\pi + \phi) \approx f'(\tfrac{1}{2}\pi)\,\phi.$$

이다. $(*)$의 대괄호 부분이 $\theta = \frac{1}{2}\pi$에서 0이 되므로, 곱의 미분법을 적용하면 한 항만 남는다.

$$f'(\tfrac{1}{2}\pi) = \sin\tfrac{1}{4}\pi \cdot \left[-2(\alpha-1)\cdot\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{4}\pi\right] = -(\alpha-1)\sin^2\tfrac{1}{4}\pi = -\frac{\alpha-1}{2} = -\frac{\sqrt{2}+1}{2}.$$

따라서 $\phi$가 작을 때

$$\ddot{\phi} \approx -\frac{g(\sqrt{2}+1)}{2a}\,\phi$$

이며, 이것이 보이려던 것이다.

**마지막 부분**

$\phi$의 계수가 음수이므로, 작은 변위를 주면 입자는 $\theta = \frac{1}{2}\pi$를 중심으로 (근사적으로) 단진동(simple harmonic motion)을 한다. 즉 이 평형은 안정(stable)하다. 각진동수는 $\omega = \sqrt{g(\sqrt{2}+1)/(2a)}$이므로 주기는

$$\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2a}{(\sqrt{2}+1)g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2(\sqrt{2}-1)a}{g}},$$

이고, 에너지가 보존되므로 진폭은 계속 작게 유지된다(철사는 매끄럽고 줄은 탄성체이므로 에너지를 소산시키는 것이 없다).

## 검산

- $\alpha = 2$이면 평형 위치 공식에서 $\cos\frac{1}{2}\theta = 1$, 즉 $\theta = 0$이 된다. 평형 위치가 최저점과 겹치게 되므로 조건 $\alpha > 2$와 잘 맞는다.
- $\alpha \to \infty$이면 $\cos\frac{1}{2}\theta \to \frac{1}{2}$이므로 $\theta \to \frac{2}{3}\pi$이고 $HP \to a$이다. 매우 뻣뻣한 줄은 거의 늘어나지 않는다.
- $a = 1.3\,\mathrm{m}$, $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$로 두고 $\phi = 0.01$에서 시작하여 전체 방정식 $(*)$를 수치적으로 풀면 주기가 약 $2.0819\,\mathrm{s}$로 나오며, 이는 $2\pi\sqrt{2(\sqrt{2}-1)a/g} \approx 2.0818\,\mathrm{s}$와 일치한다.

## 흔한 실수

- $HP = 2a \sin \frac{1}{2}\theta$로 쓰는 것: 이것은 $HP$가 아니라 현 $LP$의 길이이다. 삼각형 $OHP$에서 $O$에서의 각은 $\pi - \theta$이다.
- 평형 위치에서 줄이 팽팽한지 확인하지 않는 것: 느슨한 줄에는 장력이 없다.
- 접선 방향 대신 반지름 방향으로 분해하는 것: 반지름 방향의 방정식에는 미지의 반작용 $R$이 들어가고, $\ddot{\theta}$에 대해서는 아무것도 알려 주지 않는다.

## STEP 너머

평형 위치 근처에서 $\ddot{\phi} \approx f'(\theta_0)\,\phi$로 선형화(linearisation)하는 것은 모든 동역학계의 안정성을 연구할 때 표준적인 첫 단계이다. $f'(\theta_0)$의 부호(위치 에너지에 대해서는 동등하게 $V''(\theta_0)$의 부호)가 진동할지 아니면 멀어져 버릴지를 결정한다. 대학 1학년 과정에서 이 내용은 비선형 상미분방정식의 상평면 분석(phase-plane analysis)으로 발전한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 위치 에너지를 이용하여 안정 평형 근처의 작은 진동을 매우 명료하게 다룬다.

풀이

# STEP III 2003, 문제 10

역학 • 가변 가속도

> **STEP III 2003, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/03-s3-q10

## 핵심 아이디어

가속도(acceleration) $kx\dot{x}$는 시간에 대한 어떤 함수의 도함수 그 자체(exact derivative)이다. 즉 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}kx^2\right)$이다. 따라서 곧바로 한 번 적분하여 1계 방정식(first-order equation) $\dot{x} = \frac{1}{2}kx^2 + C$를 얻을 수 있고, 이 방정식은 변수분리(separation of variables)가 된다. 모든 것은 상수 $C$의 부호가 결정한다. 상수가 양수이면 아크탄젠트(arctangent)가 나오고 해는 발산하며, 음수이면 부분분수(partial fractions)와 로그가 나오고 해는 한 값으로 안정된다.

## 풀이

입자가 $x$축 위에서 $\ddot{x} = kx\dot{x}$에 따라 움직인다고 보자. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^2) = 2x\dot{x}$이므로 운동방정식(equation of motion)은

$$\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tfrac{1}{2}kx^2\right), \qquad \text{따라서} \qquad \dot{x} = \tfrac{1}{2}kx^2 + C$$

이다. 여기서 $C$는 상수이다. $t = 0$일 때 $x = d$, $\dot{x} = U$이므로 $C = U - \frac{1}{2}kd^2$이고,

$$\dot{x} = \tfrac{1}{2}k\left(x^2 - d^2\right) + U. \qquad (*)$$

### 소문항 (i)

$U = kd^2$이면 식 $(*)$는

$$\dot{x} = \tfrac{1}{2}k\left(x^2 + d^2\right)$$

가 된다. 우변은 항상 양수이므로 변수를 분리할 수 있다.

$$\int_d^x \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + d^2} = \int_0^t \tfrac{1}{2}k\,\mathrm{d}s \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{d}\left[\arctan\frac{x}{d} - \arctan 1\right] = \tfrac{1}{2}kt.$$

$\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$이므로 $\arctan(x/d) = \frac{1}{2}dkt + \frac{\pi}{4}$이고, 따라서

$$x = d\tan\Big(\frac{dkt}{2} + \frac{\pi}{4}\Big).$$

이 식은 tan의 인수가 $\frac{\pi}{2}$보다 작은 동안 성립한다(아크탄젠트의 값은 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$에 속한다). $t$가 0에서부터 증가하면 인수는 $\frac{\pi}{4}$에서부터 증가하고,

$$\frac{dkt}{2} = \frac{\pi}{4}, \qquad \text{즉,} \qquad t = \frac{\pi}{2dk}$$

일 때 $\frac{\pi}{2}$에 도달한다. $\theta \to \frac{\pi}{2}$ from below, 즉 $\theta$가 아래쪽에서 다가갈 때 $\tan\theta \to +\infty$이고 $d > 0$이므로, $t \to \frac{\pi}{2dk}$일 때 $x \to \infty$이다. 이것이 보이려던 것이다. 입자는 유한한 시간 안에 무한대에 도달한다.

### 소문항 (ii)

이제 $U < 0$이므로 $C = U - \frac{1}{2}kd^2 < 0$이다. $a > 0$인 $a$를 써서 $C = -\frac{1}{2}ka^2$으로 나타내자. 즉,

$$a = \sqrt{d^2 - \frac{2U}{k}}, \qquad \text{따라서} \qquad \dot{x} = \tfrac{1}{2}k\big(x^2 - a^2\big).$$

$U < 0$이고 $k > 0$이므로 $a > d > 0$이다.

> **?** **생각해 보기** 부분분수에서 나오는 로그로 $\ln\frac{x-a}{x+a}$와 $\ln\frac{a-x}{a+x}$ 중 어느 것을 써야 할까?

이는 $x$가 어느 범위에 있느냐에 달려 있다. 상수해(constant solutions) $x = \pm a$는 $\dot{x} = 0$이 되는 곳이다. 처음에 $x = d$는 $-a$와 $a$ 사이에 엄격히 놓여 있고, 거기서 출발한 해는 상수해 $x = \pm a$를 가로지를 수 없다(이와 같은 1계 방정식의 서로 다른 두 해는 만날 수 없다). 따라서 모든 시각에서 $-a < x < a$이다. 이 범위에서 $\dot{x} < 0$이므로 $x$는 감소하고, $a - x$와 $a + x$는 둘 다 양수이다.

$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\Big(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\Big)$를 이용하여 변수를 분리하면

$$\frac{1}{2a}\Big[\ln\frac{a-u}{a+u}\Big]_d^x = \tfrac{1}{2}kt \quad\Longrightarrow\quad \frac{a-x}{a+x} = A\,\mathrm{e}^{akt}, \qquad \text{여기서} A = \frac{a-d}{a+d}.$$

$a > d > 0$이므로 $0 < A < 1$임에 주의하자. $x$에 대해 풀면

$$x = a\,\frac{1 - A\mathrm{e}^{akt}}{1 + A\mathrm{e}^{akt}}, \qquad a = \sqrt{d^2 - \frac{2U}{k}}, \quad A = \frac{a-d}{a+d}.$$

이 식은 모든 $t \geq 0$에서 정의된다(분모가 양수이다). $\ln A = -2\,\mathrm{artanh}(d/a)$이므로, 이를 $x = a\tanh\big(\mathrm{artanh}(d/a) - \frac{1}{2}akt\big)$로 나타낼 수도 있다.

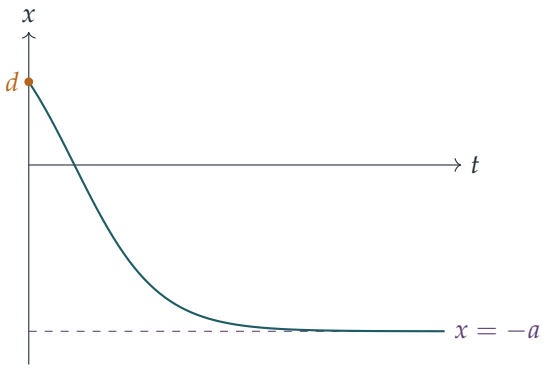
$t \to \infty$이면 $A > 0$이고 $ak > 0$이므로 $A\mathrm{e}^{akt} \to \infty$이다. 분자와 분모를 $A\mathrm{e}^{akt}$로 나누면

$$x = a\,\frac{A^{-1}\mathrm{e}^{-akt} - 1}{A^{-1}\mathrm{e}^{-akt} + 1} \longrightarrow -a.$$

따라서 $x$는 극한값

$$-a = -\sqrt{d^2 - \frac{2U}{k}}.$$

에 수렴한다. (이 극한값에는 $k$도 들어 있다. $d$와 $U$를 고정하고 $k$를 바꾸면 극한값이 바뀌므로, 이를 $d$와 $U$만으로 나타낼 수는 없다.)




이 그래프($d = 1, a = 2, k = 1$인 경우)는 입자가 음의 속도로 $d$에서 출발하여 원점을 지나고, 점점 느려지면서 $-a$에 다가가는 모습을 보여 준다.

## 검산

- 소문항 (i)에서 $t = 0$이면 $x = d\tan\frac{\pi}{4} = d$이고, 미분하면 $\dot{x} = \frac{1}{2}kd^2\sec^2\frac{\pi}{4} = kd^2 = U$이다.
- 소문항 (ii)에서 $t = 0$이면 $x = a\frac{1-A}{1+A} = d$이다. $U \to 0^-$이면 $a \to d$이고 $A \to 0$이므로 $x$는 $d$에 머문다. $x = d, \dot{x} = 0$이면 가속도가 0이 되므로 이는 옳다.
- 수치적으로, 임의의 $k, d, U$에 대해 룽게-쿠타 방법(Runge–Kutta method)으로 $\ddot{x} = kx\dot{x}$를 단계별로 계산해 보면 두 공식과 $10^{-6}$보다 작은 오차로 일치하였다. 예를 들어 $k = 1, d = 1, U = -1.5$이면 $a = 2$이고, 수치적으로 구한 $x$는 $-2.000000$에 안정된다.

## 흔한 실수

- 절댓값 없이 $\ln\frac{x-a}{x+a}$를 쓰는 것: $|x| < a$이면 이는 음수의 로그이다.
- 극한값으로 양의 제곱근을 택하는 것: $x$는 $d$에서부터 감소하므로 극한값은 $+a$가 아니라 $-a$이다.
- 가속도를 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$로 써서 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = kxv$를 얻은 뒤, $v \neq 0$임을 언급하지 않고 $v$로 나누는 것. 여기서는 결과가 맞지만, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$를 직접 적분하면 이 문제를 피할 수 있다.

## STEP 너머

소문항 (i)은 **유한 시간 폭발**(*finite-time blow-up*)의 작은 예이다. $f$가 일차보다 빠르게(여기서는 이차로) 증가하는 방정식 $\dot{x} = f(x)$는 해를 유한한 시간 안에 무한대로 보낼 수 있으므로, 해가 모든 $t$에서 존재한다는 보장은 없다. 소문항 (ii)는 다른 행동을 보여 준다. 상수해 $x = \pm a$는 평형점(equilibria)이고, $-a$는 안정(stable)하며 $+a$는 불안정(unstable)하다. 위상선(phase line) 그림을 그려 보면 적분을 하기도 전에 극한값을 예측할 수 있다. 이 두 아이디어는, 해가 서로 가로지르지 못하게 하는 유일성 정리(uniqueness theorem)와 함께, Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에서 다룬다.

풀이

# STEP III 2003, 문제 11

역학 • 요격의 운동학

> **STEP III 2003, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/03-s3-q11

## 핵심 아이디어

잠시 운동은 잊고, 충돌이 일어날 바로 그 한 점만 생각해 보자. 그 순간 $A$, $B$와 충돌 지점은 삼각형을 이루고, 그 세 변은 $d$, $P$가 이동한 거리, $Q$가 이동한 거리이며, $B$에서의 각은 방위각(bearing)으로 정해진다. 그러면 코사인 법칙(cosine rule)으로 방정식 하나를 얻고, 두 이동 거리를 모두 시간으로 나타내면 이 방정식은 이차방정식(quadratic equation)이 된다. 따라서 충돌이 가능한지는 이 이차방정식이 양의 근(root)을 가지는지의 문제가 된다.

## 풀이

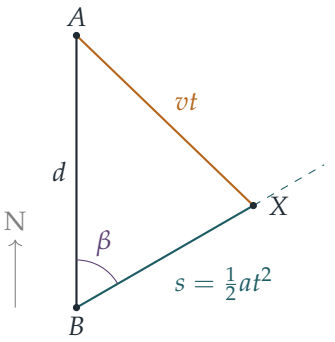
$P$와 $Q$를 수평면 위에서 움직이는 입자로 모형화한다. 방위각은 북쪽에서 시계 방향으로 잰 것이고, $v > 0$이다.

### 충돌 방정식

$Q$가 시각 $t > 0$에 점 $X$에서 $P$와 부딪친다고 하자. 그때까지 $P$는 정지 상태에서 출발하여 고정된 직선을 따라 일정한 가속도 $a$로 움직였으므로

$$BX = s = \tfrac{1}{2}at^2,$$

이고, $Q$는 일정한 속력으로 직선 운동을 했으므로 $AX = vt$이다.




$B$에서 $A$로 향하는 방향은 정북쪽이고 $B$에서 $X$로 향하는 방향의 방위각은 $\beta$이므로, 각 $ABX$는 $\beta$이다(또는 $\beta > 180°$이면 $360° - \beta$인데, 코사인 값은 같다). 삼각형 $ABX$에서 코사인 법칙을 쓰면

$$v^2t^2 = d^2 + s^2 - 2ds\cos\beta.$$

이다. ($\beta = 0$ 또는 $180°$이면 이 "삼각형"은 납작해지지만 방정식은 여전히 성립한다. 이때 식은 $(vt)^2 = (d \mp s)^2$이 된다.) $t^2 = 2s/a$이므로 좌변은 $2v^2s/a$이고, 정리하면

$$s^2 - 2\left(d\cos\beta + \frac{v^2}{a}\right)s + d^2 = 0. \qquad (*)$$

이다.

역으로, $(*)$가 근 $s > 0$을 가진다면 $t = \sqrt{2s/a}$로 두고, 그 시각에서 $P$의 위치를 $X$라 하자. 그러면 $(*)$는 정확히 $AX = vt$임을 말해 주고, $AX > 0$이다. 따라서 $Q$를 $A$에서 $X$를 향해 쏘아 보내면, $Q$는 $P$와 마찬가지로 시각 $t$에 $X$에 도달하여 부딪친다. 그러므로

$$\text{적절한 방향이 존재한다} \iff (*)\text{가 다음 양의 근을 가진다: } s.$$

### 필요조건

$k = d\cos\beta + v^2/a$로 두면 $(*)$는 $s^2 - 2ks + d^2 = 0$이다.

> **생각해 보기** 이 이차방정식은 분명 실근을 가져야 한다. 그런데 그것으로 충분할까? 근에 대해 무엇을 더 알아야 할까?

$s$는 이동한 거리이므로 근은 **양수**이기도 해야 한다. 두 근의 곱은 $d^2 > 0$이므로 두 근의 부호는 같고, 두 근의 합은 $2k$이다. 따라서 양의 근이 존재할 필요충분조건은 판별식(discriminant)이 음이 아니고 $k > 0$인 것이다.

$$k^2 \geq d^2 \quad \text{그리고} \quad k > 0 \iff k \geq d.$$

($d > 0$이므로 $k > 0$이면 $k^2 \geq d^2$은 $k \geq d$와 같고, $k \geq d$이면 반드시 $k > 0$이다.)

따라서 $Q$가 $P$와 부딪칠 수 있다면

$$d\cos\beta + \frac{v^2}{a} \geq d, \qquad \text{즉,} \qquad v^2 \geq ad(1-\cos\beta),$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

### $P$가 거리 $d$만큼 움직이기 전에 부딪치기

이제 $v^2 > ad(1-\cos\beta)$라 하면 $k > d > 0$이다. 그러면 판별식 $4(k^2-d^2)$은 양수이고, $(*)$는 서로 다른 두 근 $s_1 < s_2$를 가진다. 두 근의 합 $2k$와 곱 $d^2$이 모두 양수이므로 두 근은 모두 양수이다. 두 근은 서로 다르고

$$s_1 s_2 = d^2,$$

이므로 둘 다 $d$ 이상이거나 둘 다 $d$ 이하일 수는 없다. 따라서

$$s_1 < d < s_2.$$

이다. 구체적으로 $s_1 = k - \sqrt{k^2-d^2}$이다.

앞의 역(converse)에 의해, $P$의 경로를 따라 $B$에서 거리 $s_1$만큼 떨어진 점 $X_1$을 향해 $Q$를 쏘아 보내면 $Q$는 시각 $t_1 = \sqrt{2s_1/a}$에 $P$와 부딪치고, 그 순간 $P$는 겨우 $s_1 < d$만큼만 움직였다. 따라서 $P$가 거리 $d$만큼 움직이기 전에 $Q$가 $P$와 부딪치도록 겨냥할 수 있고, 이것이 증명할 내용이었다.

## 검산

- $\beta = 0$으로 두자. 그러면 $P$는 곧장 $A$를 향해 달리므로, $v$의 값에 관계없이 둘은 반드시 만난다. 조건은 $v^2 \geq 0$이 되고, 이는 항상 성립한다. 이때 $(*)$는 $s^2 - 2(d+v^2/a)s + d^2 = 0$이 되고, 작은 근은 $d$보다 작다. 즉 상식대로 둘은 $P$가 $A$에 닿기 전에 만난다.
- $a = d = 1$, $\beta = 90°$(따라서 $P$는 정동쪽으로 달린다), 그리고 $v^2 = 2 > 1 = ad(1-\cos\beta)$로 두자. 그러면 $(*)$는 $s^2 - 4s + 1 = 0$이므로 $s_1 = 2 - \sqrt{3} \approx 0.268 < 1$이다. $t_1 = \sqrt{2s_1}$에서 $s_1^2 + 1 = 2t_1^2$이므로, 충돌 지점은 실제로 $A$에서 거리 $vt_1$만큼 떨어져 있다. $a$, $d$, $\beta$, $v$에 여러 무작위 값을 넣은 수치 검산으로 $s_1 < d$에서의 충돌을 확인했고, $v^2 < ad(1-\cos\beta)$일 때는 $P$가 항상 $A$에서 $vt$보다 멀리 떨어져 있음도 확인했다.
- 경계의 경우 $v^2 = ad(1-\cos\beta)$에서는 $k = d$이고 중근 $s = d$를 얻는다. 가능한 충돌은 $P$가 정확히 $d$만큼 이동했을 때뿐이며, 그래서 마지막 부분에서는 엄격한 부등식이 필요하다.

## 흔한 실수

- 판별식이 음이 아니라는 조건만 요구하는 것. 그러면 $|k| \geq d$를 얻는데, 이는 $k \leq -d$도 허용하고, 이 경우 두 근이 모두 음수여서 충돌이 일어나지 않는다.
- 코사인 법칙에서 엉뚱한 각을 쓰는 것. $B$에서의 각은 $BA$(정북쪽)와 $BX$(방위각 $\beta$) 사이의 각이므로 $180^\circ - \beta$가 아니라 $\beta$ 자체이다.
- 마지막 부분에서 필요조건만 증명하는 것. $X_1$을 향한 겨냥이 실제로 성공한다는 것, 즉 역 방향의 논증도 보여야 한다.

## STEP 너머

이것은 추격과 요격 문제이다. 여기서는 표적의 경로가 미리 알려져 있고 요격하는 쪽은 직선으로 움직이므로, 문제는 만나는 시각에 대한 방정식 하나로 귀결된다. 미사일 유도나, 추격자가 계속 표적 쪽으로 방향을 트는 "추적 곡선(pursuit curves)"은 그 대신 미분방정식으로 이어진다. 만나는 점을 먼저 정해 놓고 누가 제시간에 그곳에 닿을 수 있는지 묻는 습관은 대학 1학년 역학의 표준 도구이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 상대 운동의 운동학을 꼼꼼하게 전개한다.

풀이

# STEP III 2003, 문제 12

확률과 통계 • 지수분포를 따르는 대기 시간

> **STEP III 2003, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/03-s3-q12

## 핵심 아이디어

임의의 구간에서 방해 횟수가 포아송 분포(Poisson distribution)를 따른다면, "다음 방해가 $t$분보다 더 뒤에 일어난다"는 사건은 "다음 $t$분 동안 방해가 **전혀** 없다"는 사건과 같다. 이 사실이 이산 분포를 연속 분포로 바꾸어 주며, 대기 시간은 지수분포(exponential distribution)를 따른다. 그다음에는 연속한 방해 사이의 간격들이 서로 독립(independent)이므로, 긴 간격을 찾는 일은 독립 시행의 열이 된다. 각 시행은 "성공"(30분 이상의 간격) 아니면 "실패"이다. 나머지는 기하분포(geometric distribution)와 조건부 기댓값(conditional expectation)이 해결한다.

## 풀이

### $T$의 분포

방해는 평균 10분마다 일어나므로 비율은 분당 $\frac{1}{10}$이고, $t$분 동안의 방해 횟수는 평균이 $\frac{t}{10}$인 포아송 분포를 따른다.

방금 일어난 방해 시점에서 시계를 시작하자. 다음 방해까지의 시간 $T$가 $t$ 이상인 것은 다음 $t$분 동안 방해가 없을 때와 정확히 같으므로

$$\mathrm{P}(T \geq t) = \mathrm{P}(\text{방해 없는 시간 구간의 길이} t) = \mathrm{e}^{-t/10}.$$

따라서 $t \geq 0$에 대하여 작업 시간이 $t$분보다 짧을 확률은

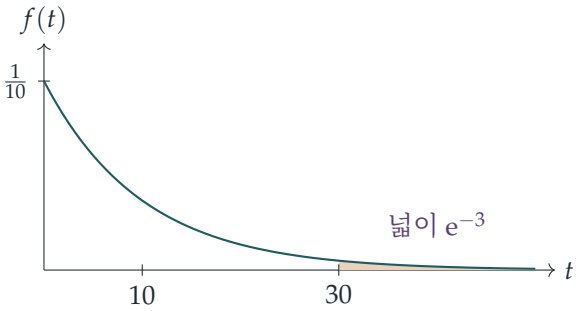
$$\mathrm{P}(T < t) = 1 - \mathrm{e}^{-t/10}.$$

이것이 $T$의 누적분포함수(cumulative distribution function) $F(t)$이다($t < 0$이면 $F(t) =$

0). 미분하면

$$f(t) = F'(t) = \tfrac{1}{10}\,\mathrm{e}^{-t/10} \quad (t \geq 0), \qquad f(t) = 0 \quad (t < 0).$$

그러므로 $T$는 평균이 10분인 지수분포를 따른다.




**방해 횟수의 기댓값**

이 과정은 기억이 없으므로(겹치지 않는 구간에서의 포아송 횟수들은 서로 독립이다), 방해가 일어날 때마다 다음 방해까지의 시간은 이전의 모든 것과 독립적으로 $T$와 같은 분포를 가지고 새로 시작된다. 따라서 연속한 간격 $T_1, T_2, \ldots$는 서로 독립이고 각각 $T$와 같은 분포를 따른다.

간격이 30분 이상이면 그 간격을 **긴** 간격이라 하자. 각 간격은 다른 간격과 독립적으로 확률

$$p = \mathrm{P}(T \geq 30) = \mathrm{e}^{-30/10} = \mathrm{e}^{-3},$$

으로 긴 간격이 된다. 첫 번째 긴 간격이 오기 전까지의 방해 횟수를 $N$이라 하자(방금 일어난 방해는 세지 않는다). 짧은 간격은 모두 방해로 끝나고 첫 번째 긴 간격이 바로 방해받지 않는 30분이므로, $N$은 첫 번째 긴 간격 이전의 짧은 간격의 개수이다. 따라서

$$\mathrm{P}(N = n) = (1-p)^n p, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

**? 생각해 보기** 1이 아니라 0에서 시작하는 이 기하분포의 평균은 어떻게 구할까?

기하급수(geometric series) $\sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$를 미분하면 $|x| < 1$일 때 $\sum_{n\geq 1} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$을 얻는다. $x = 1-p$로 두면

$$\mathrm{E}(N) = \sum_{n=1}^{\infty} n(1-p)^n p = p(1-p)\cdot\frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p}.$$

(다른 방법으로, $N+1$은 첫 번째 성공을 포함하여 그때까지의 시행 횟수이고, 그 평균은 $\frac{1}{p}$이다.) $p = \mathrm{e}^{-3}$이므로

$$\mathrm{E}(N) = \frac{1-\mathrm{e}^{-3}}{\mathrm{e}^{-3}} = \mathrm{e}^3 - 1,$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다.

### 짧은 간격의 길이의 기댓값

구하려는 것은 $\mathrm{E}(T \mid T < 30)$이다. $T < 30$이라는 조건 아래에서 $T$의 조건부 확률밀도함수(probability density function)는 $0 \le t < 30$에서 $f(t)/\mathrm{P}(T < 30)$이므로

$$\mathrm{E}(T \mid T < 30) = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-3}} \int_0^{30} \frac{t}{10}\,\mathrm{e}^{-t/10}\,\mathrm{d}t.$$

$u = t$, $\mathrm{d}v = \frac{1}{10}\mathrm{e}^{-t/10}\,\mathrm{d}t$로 두고 부분적분(integration by parts)하면 $v = -\mathrm{e}^{-t/10}$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^{30} \frac{t}{10}\,\mathrm{e}^{-t/10}\,\mathrm{d}t &= \Big[-t\,\mathrm{e}^{-t/10}\Big]_0^{30} + \int_0^{30} \mathrm{e}^{-t/10}\,\mathrm{d}t \\ &= -30\,\mathrm{e}^{-3} + 10\big(1-\mathrm{e}^{-3}\big) \\ &= 10 - 40\,\mathrm{e}^{-3}.\end{aligned}$$

따라서 분자와 분모에 $\mathrm{e}^3$을 곱하면

$$\mathrm{E}(T \mid T < 30) = \frac{10-40\,\mathrm{e}^{-3}}{1-\mathrm{e}^{-3}} = \frac{10\,\mathrm{e}^3 - 40}{\mathrm{e}^3 - 1}\text{ 분} \approx 8.43\text{ 분}.$$

이 값이 10보다 조금 작은 것은 자연스럽다. 긴 간격을 버렸기 때문이다.

### 대기 시간의 기댓값

방해받지 않는 30분이 시작되기 전까지의 대기 시간은 $N$개의 짧은 간격의 합이다. $N = n$일 때 이것들은 각각 30분보다 짧다는 조건이 붙은 $n$개의 독립인 간격이므로, $N = n$일 때 대기 시간의 기댓값은 $n\,\mathrm{E}(T \mid T < 30)$이다. $N$에 대하여 평균을 내면

$$\mathrm{E}(\text{대기 시간}) = \mathrm{E}(N)\,\mathrm{E}(T \mid T < 30) = (\mathrm{e}^3 - 1)\cdot\frac{10\,\mathrm{e}^3 - 40}{\mathrm{e}^3 - 1} = 10\,\mathrm{e}^3 - 40\text{ 분},$$

이고, 이는 약 161분, 즉 2시간 41분이다. (논문을 **끝낼** 때까지의 시간을 원한다면 30분 자체를 더하면 된다: $10\,\mathrm{e}^3 - 10 \approx 191$분.)

## 검산

- $\int_0^{\infty} \frac{1}{10}\mathrm{e}^{-t/10}\,\mathrm{d}t = 1$이므로 $f$는 실제로 확률밀도함수이고, 그 평균은 10으로 "평균 10분마다"와 일치한다.
- 조건 없이 $\mathrm{E}(T) = 10$은 $\mathrm{P}(T < 30)\,\mathrm{E}(T \mid T < 30) + \mathrm{P}(T \ge 30)\,\mathrm{E}(T \mid T \ge 30)$로 나뉘어야 한다. 비기억성(memorylessness)에 의해 $\mathrm{E}(T \mid T \ge 30) = 40$이고, 실제로 $(10 - 40\mathrm{e}^{-3}) + 40\mathrm{e}^{-3} = 10$이다.
- 이 과정을 200 000번 시뮬레이션한 결과 평균 방해 횟수는 19.1회($\mathrm{e}^3 - 1 \approx 19.09$와 비교), 평균 대기 시간은 161.1분($10\mathrm{e}^3 - 40 \approx 160.86$과 비교)이었다.

## 흔한 실수

- $\mathrm{E}(N) = \frac{1}{p} = e^3$을 사용하는 것: 이것은 긴 간격까지 세는 것인데, 긴 간격은 30분이 지나기 전에 방해 없이 끝난다.
- 대기 시간을 구하려고 $\mathrm{E}(N)$에 조건 없는 평균 10을 곱하는 것. 대기 시간을 이루는 간격들은 짧다는 것이 알려져 있으므로, 그 평균은 10이 아니라 $\mathrm{E}(T \mid T < 30)$이다.

## STEP 너머

방해들은 **포아송 과정**(Poisson process)을 이루며, 간격들이 서로 독립인 지수분포를 따른다는 결과는 그 정의적 성질 가운데 하나이다. 마지막 단계인 $\mathrm{E}(\text{항}N\text{개의 합}) = \mathrm{E}(N) \times \mathrm{E}(\text{항})$은 **왈드 항등식**(Wald's identity)과 밀접하게 관련된 조건부 논증이다. 이 둘은 함께 대학 1, 2학년 확률론 강의에서 배우는 재생 이론(renewal theory)과 대기행렬 모형(queueing models)으로 이어진다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 포아송 과정과 조건부 기댓값을 알맞은 수준에서 다룬다.

풀이

# STEP III 2003, 문제 13

확률과 통계 • 흡수 마르코프 연쇄

**STEP III 2003, 13번 문제**

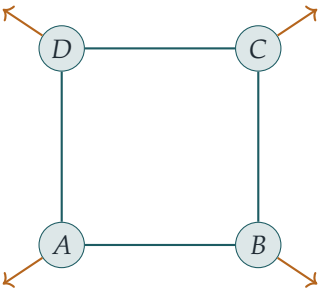
더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/03-s3-q13

## 핵심 아이디어

이것은 "첫걸음 분석(first-step analysis)"이다. 토끼가 다음에 무엇을 하는지에 대해 조건을 걸면, 한 방에서 출발했을 때의 확률을 그 방에서 갈 수 있는 방들에서 출발했을 때의 확률로 나타낼 수 있다. 그러면 네 개의 연립일차방정식(linear equations)을 얻고, 정사각형의 대칭성(symmetry)(대각선 $AC$에 대한 반사는 $B$와 $D$를 맞바꾼다)을 이용하면 계산이 줄어든다. 마지막 문항에서는 $C$에 들어가는 것을 실패로 치는 변형된 토끼굴에 같은 방법을 적용한 다음, 조건부 확률(conditional probability)의 정의를 이용한다.

## 풀이




지상으로 나가는 굴

풀이 전체에서 각 움직임은 토끼의 과거와 독립적으로 각각 확률 $\frac{1}{3}$로 선택된다고 본다(어느 방에 "있게 된" 토끼에게 각 선택이 "똑같이 가능하다"는 말을 이렇게 해석한다). 토끼가 결국 $A$의 굴을 통해 밖으로 나가는 사건을 $E_A$라 하자.

**소문항 (i)**

토끼가 $A$에 있다고 하고, 다음 움직임에 대해 조건을 건다.

- 확률 $\frac{1}{3}$로 토끼는 곧바로 $A$의 굴로 올라가고, 사건 $E_A$가 일어난다.
- 확률 $\frac{1}{3}$로 토끼는 $B$로 달려간다. 이제 토끼는 $B$에 있고, 앞으로의 움직임은 어떻게 그곳에 왔는지와 무관하므로 결국 $A$로 나갈 확률은 $p_B$이다.
- 확률 $\frac{1}{3}$로 토끼는 $D$로 달려가고, 마찬가지로 이때의 확률은 $p_D$이다.

전확률 법칙(law of total probability)에 의해

$$p_A = \tfrac{1}{3}\cdot 1 + \tfrac{1}{3}p_B + \tfrac{1}{3}p_D,$$

이므로 증명이 끝난다.

**소문항 (ii)**

다른 방들에서 같은 논법을 쓰면 방정식이 세 개 더 나온다. 유일한 차이는 $B$, $C$, $D$의 굴로 나가면 $E_A$가 **실패**한 것이므로 그 갈래의 기여가 $\frac{1}{3}\cdot 0$이라는 점이다.

$$\begin{aligned} p_B &= \tfrac{1}{3}p_A + \tfrac{1}{3}p_C, \\ p_C &= \tfrac{1}{3}p_B + \tfrac{1}{3}p_D, \\ p_D &= \tfrac{1}{3}p_A + \tfrac{1}{3}p_C. \end{aligned}$$

$p_B$와 $p_D$에 대한 방정식의 우변이 같으므로 $p_B = p_D$이다. 이 공통값을 $b$라 하자. (이것이 $AC$에 대한 반사 대칭이다.) 그러면

$$p_A = \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}b, \qquad p_C = \tfrac{2}{3}b,$$

이고, 이를 $p_B$에 대한 방정식에 대입하면

$$b = \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}b + \tfrac{2}{3}b\right) = \tfrac{1}{9} + \tfrac{4}{9}b \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{5}{9}b = \tfrac{1}{9} \quad\Longrightarrow\quad b = \tfrac{1}{5}.$$

따라서

$$p_A = \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{15} = \frac{7}{15}, \qquad \text{이고 또한} \qquad p_B = p_D = \tfrac{1}{5},\ p_C = \tfrac{2}{15}.$$

**생각해 보기** 토끼가 애초에 밖으로 나간다는 것을, 그래서 이 방정식들이 정말로 확률을 결정한다는 것을 어떻게 알 수 있는가?

매 단계마다 토끼는 확률 $\frac{1}{3}$로 밖으로 나가므로, $n$단계 뒤에도 여전히 땅속에 있을 확률은 $(\frac{2}{3})^n \to 0$이다. 즉 토끼는 확률 1로 밖으로 나간다. 또한 네 개의 연립일차방정식은 해가 하나뿐이므로(우리는 아무런 선택 없이 풀었다), 위의 값들이 바로 구하는 확률이다.

**소문항 (iii)**

토끼가 $C$를 한 번도 방문하지 않는 사건을 $N$이라 하자. 구하는 것은

$$\mathrm{P}(N \mid E_A) = \frac{\mathrm{P}(N \cap E_A)}{\mathrm{P}(E_A)},$$

이고, 토끼는 $A$에서 출발하므로 분모는 $p_A = \frac{7}{15}$이다.

분자를 구하기 위해, 토끼가 현재 각각 $A$, $B$, $D$에 있을 때(그리고 아직 $C$를 방문하지 않았을 때) $C$에 **한 번도 들어가지 않고** $A$의 굴로 나갈 확률을 $q_A$, $q_B$, $q_D$라 하자. 첫걸음 분석은 앞과 똑같이 적용되는데, 다만 이제는 $C$로 들어가는 움직임을 실패로 친다.

$$q_A = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}q_B + \tfrac{1}{3}q_D,$$
$$q_B = \tfrac{1}{3}q_A + \tfrac{1}{3}\cdot 0 + \tfrac{1}{3}\cdot 0,$$

왜냐하면 $B$에서 토끼는 $A$로 되돌아가거나, $C$로 달려 들어가거나(실패), 잘못된 굴로 나가기(실패) 때문이다. 대칭성에 의해 $q_D = q_B = \frac{1}{3}q_A$이므로

$$q_A = \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{9}q_A \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{7}{9}q_A = \tfrac{1}{3} \quad\Longrightarrow\quad q_A = \tfrac{3}{7}.$$

그러므로

$$\mathrm{P}(N \mid E_A) = \frac{3/7}{7/15} = \frac{45}{49}.$$

## 검산

- 네 값 $p_A, p_B, p_C, p_D$는 각 방에서 출발하여 $A$로 나갈 확률이다. 대칭성에 의해 이들은 또한 $A$에서 출발하여 각각 $A, B, C, D$로 나갈 확률이기도 하므로, 합이 1이어야 한다. 실제로 $\frac{7}{15} + \frac{3}{15} + \frac{2}{15} + \frac{3}{15} = 1$이다.
- 마땅히 그래야 하듯이 $p_A > p_B = p_D > p_C$이다. 토끼가 $A$에서 먼 곳에서 출발할수록 $A$로 나갈 가능성은 작아진다.
- (iii)의 답은 1에 가깝다. $A$로 나가는 토끼는 대개 짧게만 돌아다닌 뒤에 나간다. 토끼 $4 \times 10^5$마리를 모의실험한 결과 $p_A$는 0.469, 조건부 확률은 0.918이었으며, 이론값은 $\frac{7}{15} \approx 0.467$과 $\frac{45}{49} \approx 0.918$이다.

## 흔한 실수

- $p_B$, $p_C$, $p_D$에 대한 방정식에 $\frac{1}{3}$의 "지금 나가기" 항을 포함하는 실수. $A$가 아닌 다른 굴로 나가는 것은 0을 기여한다.
- (iii)의 답으로 $q_A = \frac{3}{7}$을 제시하는 실수. 이것은 $\mathrm{P}(N \cap E_A)$이다. 문제는 조건부 확률을 묻고 있으므로 여전히 $p_A$로 나누어야 한다.

## STEP 너머

토끼는 **마르코프 연쇄**(*Markov chain*)를 따라 움직이고 있다. 즉 다음 움직임은 지금 어디에 있는지에만 의존한다. 지상은 **흡수 상태**(*absorbing state*)이고, $p_A, p_B, p_C, p_D$는 **흡수 확률**(*absorption probabilities*)이며, 첫걸음 분석은 이를 언제나 연립일차방정식으로 바꾸어 준다. 같은 아이디어로 흡수될 때까지 걸리는 시간의 기댓값, 도박꾼의 파산(gambler's ruin) 확률 등 훨씬 많은 것을 구할 수 있다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 마르코프 연쇄를 처음 공부하기에 좋은 설명을 담고 있다.

풀이

# STEP III 2003, 문제 14

확률과 통계 • 확률생성함수

> **STEP III 2003, 14번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/03-s3-q14

## 핵심 아이디어

서로 독립(independent)인 점수들의 합의 확률생성함수(probability generating function, pgf)는 각 점수의 pgf의 곱이다. 따라서 어떤 주사위들이 같은 합의 분포를 주는가라는 질문은 다항식을 두 인수로 어떻게 나눌 수 있는가라는 질문이 된다. 모든 것을 기약(irreducible) 인수로 인수분해(factorise)한 뒤, 그 인수들을 두 주사위에 나누어 주는 방법을 살펴보면 가능한 눈의 재배치를 모두 읽어 낼 수 있다.

## 풀이

### 첫 번째 부분

$X$를 공정한 표준 주사위의 눈이라 하자. $1,\dots,6$의 각 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$이므로

$$G_X(t) = \mathrm{E}\left(t^X\right) = \tfrac{1}{6}\left(t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6\right) = \tfrac{1}{6}\,t\left(1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5\right).$$

괄호 안을 인수분해하려면 항을 둘씩 묶은 다음 세제곱의 차를 이용한다.

$$1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 = (1+t) + t^2(1+t) + t^4(1+t) = (1+t)(1+t^2+t^4),$$
$$1 + t^2 + t^4 = (1+t^2)^2 - t^2 = (1+t+t^2)(1-t+t^2).$$

따라서

$$G_X(t) = \tfrac{1}{6}\,t\,(1+t)(1-t+t^2)(1+t+t^2).$$

$X_1$과 $X_2$가 독립적으로 던진 두 주사위의 눈이면 $t^{X_1}$과 $t^{X_2}$도 독립이므로 $\mathrm{E}\left(t^{X_1+X_2}\right) = \mathrm{E}\left(t^{X_1}\right)\mathrm{E}\left(t^{X_2}\right)$이고

$$G_{X_1+X_2}(t) = G_X(t)^2 = \frac{1}{36}\,t^2(1+t)^2(1-t+t^2)^2(1+t+t^2)^2,$$

이것이 구하는 꼴이다.

### 두 번째 부분

$Y$와 $Z$를 각각 눈이 $1,2,2,3,3,4$와 $1,3,4,5,6,8$인 주사위의 눈이라 하자. 면의 개수를 세면

$$G_Y(t) = \tfrac{1}{6}\left(t + 2t^2 + 2t^3 + t^4\right),$$
$$G_Z(t) = \tfrac{1}{6}\left(t + t^3 + t^4 + t^5 + t^6 + t^8\right).$$

$Y$에 대하여: $1 + 2t + 2t^2 + t^3 = (1+t)(1+t+t^2)$이며, 이는 전개해 보면 확인할 수 있다. 따라서

$$G_Y(t) = \tfrac{1}{6}\, t\,(1+t)(1+t+t^2).$$

$Z$에 대해서는 첫 번째 부분에서 얻은 곱 $(1+t)(1-t+t^2) = 1+t^3$과 $(1+t+t^2)(1-t+t^2) = 1+t^2+t^4$가 유용하다. 그러면

$$(1+t^3)(1+t^2+t^4) = 1+t^2+t^3+t^4+t^5+t^7,$$

이고, 여기에 $t$를 곱하면 정확히 $t+t^3+t^4+t^5+t^6+t^8$이 된다. 따라서

$$G_Z(t) = \tfrac{1}{6}\, t\,(1+t)(1+t+t^2)(1-t+t^2)^2.$$

독립적으로 던지므로

$$G_{Y+Z}(t) = G_Y(t)G_Z(t) = \frac{1}{36}\, t^2(1+t)^2(1-t+t^2)^2(1+t+t^2)^2 = G_{X_1+X_2}(t).$$

다항식으로서 같은 두 pgf는 계수가 같고, $t^n$의 계수는 합이 $n$일 확률이다. 따라서 이 주사위들로 얻는 모든 합의 확률은 표준 주사위 두 개로 얻는 확률과 같다.

### 마지막 부분

표준 사면체 주사위의 pgf는

$$\tfrac{1}{4}\left(t + t^2 + t^3 + t^4\right) = \tfrac{1}{4}\, t\,(1+t)(1+t^2),$$

이므로, 이런 주사위 두 개의 합에 대한 목표 pgf는

$$\frac{1}{16}\, t^2(1+t)^2(1+t^2)^2.$$

두 새 주사위의 pgf를 $\frac{1}{4}f(t)$와 $\frac{1}{4}g(t)$라 하자. $f$에서 $t^n$의 계수는 눈이 $n$인 면의 개수이므로, $f$와 $g$는 계수가 음이 아닌 정수인 다항식이고 $f(1) = g(1) = 4$이다. 모든 눈이 양의 정수이므로 $f(0) = g(0) = 0$이다. 필요한 조건은

$$f(t)\, g(t) = t^2(1+t)^2(1+t^2)^2.$$

**생각해 보기** 왜 $f$는 같은 인수 $t, 1+t, 1+t^2$만으로 이루어져야 하고 다른 것은 들어갈 수 없을까?

인수 $t$와 $1+t$는 일차식이고 $1+t^2$는 실근이 없으므로, 세 인수 모두 실수 범위에서 기약이다. 다항식은 (상수배를 제외하면) 기약 인수로 유일하게 인수분해되므로, 우변의 모든 인수는

$$f(t) = c\,t^k(1+t)^a(1+t^2)^b, \qquad g(t) = \tfrac{1}{c}\,t^{2-k}(1+t)^{2-a}(1+t^2)^{2-b},$$

의 꼴이며, 여기서 $0 \le k, a, b \le 2$이고 $c > 0$은 상수이다.

이제 $f$와 $g$에 대한 조건을 하나씩 이용한다.

- **상수 $c$.** $f$의 최저차 계수는 $c$이고 $g$의 최저차 계수는 $1/c$이다. 둘 다 면의 개수이므로 둘 다 양의 정수이고, 따라서 $c = 1$일 수밖에 없다.
- **$t$의 거듭제곱.** $f(0) = 0$이려면 $k \ge 1$이어야 하고, $g(0) = 0$이려면 $2-k \ge 1$이어야 한다. 따라서 $k = 1$이다. 즉 각 주사위는 인수 $t$를 정확히 하나씩 가진다.
- **네 개의 면.** $f(1) = 2^a \cdot 2^b = 4$에서 $a+b = 2$이고, 그러면 $g(1) = 2^{2-a}2^{2-b} = 4$는 자동으로 성립한다.

따라서 $(a,b)$는 $(2,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$ 중 하나이고, $g$는 나머지 보완적인 선택을 가진다. 두 주사위를 서로 바꾸어도 같은 쌍이므로 경우는 두 가지이다.

- 둘 다 $(a,b) = (1,1)$인 경우: $f = g = t(1+t)(1+t^2) = t+t^2+t^3+t^4$, 즉 표준 쌍 $1,2,3,4$와 $1,2,3,4$이다.
- $(a,b) = (2,0)$과 $(0,2)$인 경우:

  $$f(t) = t(1+t)^2 = t+2t^2+t^3, \qquad g(t) = t(1+t^2)^2 = t+2t^3+t^5,$$

  이는 눈이 $1,2,2,3$과 $1,3,3,5$인 주사위이다.

각 경우에 두 다항식 모두 계수가 음이 아닌 정수이고 그 합이 4이므로 실제로 주사위가 되며, 만든 방법에 의해 올바른 pgf를 준다.

따라서 가능한 눈의 배치는 표준 쌍과 $\{1,2,2,3\}$, $\{1,3,3,5\}$의 쌍뿐이다.

## 검산

비표준 사면체 주사위 쌍에 대해 합을 나열해 보자. 같은 확률로 나오는 16개의 합은 $2,4,4,6,\ 3,5,5,7,\ 3,5,5,7,\ 4,6,6,8$이고, 합 $2,\dots,8$의 빈도는 $1,2,3,4,3,2,1$로, 표준 주사위 두 개의 경우와 정확히 같다. 위의 어느 pgf에든 $t = 1$을 대입하면 1이 나오는데, 이는 각 인수분해를 빠르게 검증하는 방법이다. 눈이 1부터 7까지인 모든 사면체 주사위 쌍을 컴퓨

터로 탐색하면 정확히 위의 두 쌍만 나오며, $1,2,2,3,3,4$와 $1,3,4,5,6,8$ 주사위의 합은 표준 분포와 정확히 일치한다 (예를 들어 두 경우 모두 $\mathrm{P}(\text{합} = 7) = \frac{6}{36}$이다).

## 흔한 실수

- 상수 $c$를 잊는 것: 한 주사위가 인수 2를, 다른 주사위가 인수 $\frac{1}{2}$을 가질 수 없는 이유가 필요하다. 두 주사위 모두 최저차 계수가 양의 정수라는 사실이 바로 그 이유이다.
- $k = 0$이나 $k = 2$를 허용하는 것. 그러면 한 주사위에 눈이 0인 면이 생기는데, 0은 양의 정수가 아니다.
- $(1 - t + t^2)$를 복소수 일차 인수로 인수분해한 채로 두는 것. 실수 범위에서 이 식은 기약이며, 인수를 나누어 주는 데 필요한 것은 바로 그 꼴이다.

## STEP 너머

여기서 나온 육면체 주사위 쌍은 **시셔만 주사위**(*Sicherman dice*)이며, 같은 방법으로 이것이 양의 눈을 가진 유일한 비표준 육면체 주사위 쌍임을 보일 수 있다. 이 논증은 다항식의 유일 인수분해(unique factorisation)에 기대고 있는데, 이는 환과 체(rings and fields)에 대한 첫 강좌에서 산술의 기본정리(fundamental theorem of arithmetic)의 다항식 판으로 만나게 된다. 생성함수(generating function)는 또한 어려운 세기 문제를 대수 문제로 바꾸어 주는 경우가 많다. 두 아이디어 모두에 대해서는 Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군), 그리고 Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)을 참고하라.

# Beyond STEP

STEP은 대부분의 학생이 학창 시절에 치르는 수학 시험 가운데 가장 어려운 시험이다. 또한 가장 훌륭한 시험 가운데 하나이기도 하다. 문제는 짧고 낯설며 깊이가 있고, 그중 가장 뛰어난 문제들은 대학 수학의 작은 조각이 모습을 감추고 있는 것이다.

이 책은 1987년 첫 시험에 앞서 나온 예시 시험지(specimen papers)부터 2025년 시험지까지 가운데 가장 흥미로운 STEP 문제들을 골라, 각 문제를 하나의 문으로 삼는다. 모든 문제는 뛰어난 학생이 풀어 가면서 던질 법한 질문들과 함께 꼼꼼하게 풀이하고, 그런 다음 책은 그 문을 지나 한 걸음 더 나아간다. 그 아이디어가 어디에서 왔는지, 대학에서는 무엇으로 발전하는지, 그리고 다음에는 무엇을 읽으면 좋은지를 살펴본다.

이 책은 STEP을 준비하면서 기출 문제 연습 이상의 것을 원하는 재능 있는 예비 수학자를 위해 쓰였다. 수학과 학부생처럼 생각하기 시작하고, 앞으로 무엇이 자신을 기다리고 있는지 알아보고 싶은 학생들을 위한 책이다.

- 순수수학(pure mathematics), 역학(mechanics), 확률(probability)과 통계(statistics)를 아우르는 13개의 장
- 이 36개의 STEP 기출 문제와 각 문제의 안내식 풀이
- 모든 문제 뒤에 숨은 대학 수학
- 답이 실린 후속 연습 문제와 더 읽을거리

**2003년 풀이.** 책 전체와 모든 장,
모든 풀이를 다음 주소에서 무료로 읽고, 내려받고, 공유할 수 있다.

**beyondstep.keithmcnulty.org**

본문은 퍼블릭 도메인(CC0 1.0)으로 공개한다. STEP 문제 © Cambridge University Press & Assessment.

