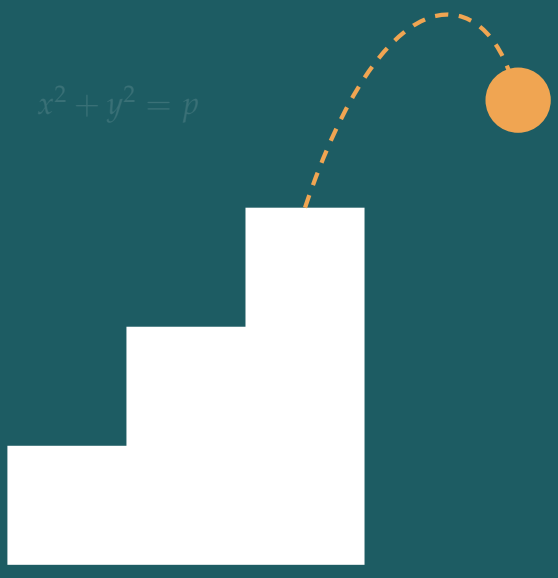
STEP 대비 · 대학 수학

Beyond STEP

STEP I, II 및 III

2002년 풀이



KEITH McNULTY

Beyond STEP

STEP 기출문제로 여는
대학 수학의 세계

STEP I, II 및 III

2002년 풀이

Keith McNulty

Beyond STEP: STEP 기출문제로 여는 대학 수학의 세계

2002년 풀이

2002년 STEP 문제지(STEP I, II 및 III)의 42개 문제 전체에 대한 풀이. 견본 문제지 이후 모든 STEP 문제의 풀이와 *Beyond STEP* 책 전체, 그리고 각 장을 `beyondstep.keithmcnulty.org`에서 무료로 읽고 내려받을 수 있다.

풀이를 읽기 전에 먼저 문제를 제대로 풀어 보자. 모든 답은 수치적으로 검증하였지만, 풀이가 이렇게 많으면 실수가 어느 정도 있을 수밖에 없다. 무언가 잘못된 것처럼 보이면 자신의 풀이를 믿고 꼼꼼히 확인해 보자.

영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.

2026년 11월 온라인 초판 발행.

이 PDF에서 지은이가 직접 만든 모든 것, 곧 본문, 풀이, 그림, 연습문제와 해답은 크리에이티브 커먼즈 CC0 1.0 Universal 라이선스에 따라 퍼블릭 도메인(public domain)으로 공개한다. 누구든 허락을 구하지 않고 어떤 목적으로든 복사하고, 고쳐 쓰고, 공유할 수 있다. 자세한 내용은 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`을 보라.

여기에서 다루는 STEP 문제의 저작권은 Cambridge University Press & Assessment에 있다. 문제는 이 책에 싣지 않았으며, 각 문제마다 공식 출처인 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스나 OCR의 기출 시험지로 가는 링크를 달았다.

오류 제보는 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty에 이슈로 남겨 주기 바란다.

차례

STEP I

Q1 원과 타원 순수수학 3

Q2 곡선 그리기 순수수학 6

Q3 미분을 이용한 부등식 순수수학 10

Q4 접선과 부등식 순수수학 14

Q5 다항식의 정수근 순수수학 18

Q6 각뿔의 기하 순수수학 21

Q7 삼각함수의 적분 순수수학 25

Q8 복리 대출 순수수학 29

Q9 경사면에서의 넘어짐 역학 33

Q10 탄성 충돌 역학 37

Q11 비스듬한 탄성 충돌 역학 41

Q12 기하학적 확률 확률과 통계 44

Q13 조건부 기댓값 확률과 통계 48

Q14 확률에서의 등비급수 확률과 통계 52

STEP II

Q1 치환적분 순수수학 55

Q2 상반방정식 순수수학 58

Q3 페르마 수와 소수 순수수학 62

Q4 적분에서 얻는 부등식 순수수학 65

Q5 로지스틱 사상의 반복 순수수학 69

Q6 경사면 위의 직선 순수수학 73

Q7 직선의 벡터 기하 순수수학 77

Q8 일계 미분방정식 순수수학 81

Q9 포물체 운동 역학 85
Q10 운동학과 최적화 역학 89
Q11 마찰과 한계 평형 역학 93
Q12 정규근사와 푸아송 근사 확률과 통계 97
Q13 변환된 분포함수 확률과 통계 101
Q14 혼합분포와 베이즈 정리 확률과 통계 105

STEP III

Q1 이상적분과 부피 순수수학 109
Q2 역탄젠트 급수 순수수학 112
Q3 곡선 그리기 순수수학 116
Q4 디오판토스 부등식 순수수학 120
Q5 사차방정식의 인수분해 순수수학 124
Q6 비선형 미분방정식 순수수학 127
Q7 좌표기하의 항등식 순수수학 131
Q8 프톨레마이오스 정리 순수수학 135
Q9 질량중심과 넘어짐 역학 139
Q10 마찰이 있는 회전 역학 144
Q11 벽과의 비스듬한 충돌 역학 148
Q12 조건부를 이용한 기댓값 확률과 통계 153
Q13 지수분포 확률변수의 최솟값 확률과 통계 157
Q14 분산과 공분산 확률과 통계 160

풀이

STEP I 2002, 문제 1

순수수학 • 원과 타원

> **STEP I 2002, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/02-s1-q1

핵심 아이디어

두 타원(ellipse)이 실제로 만나는 곳을 찾는다. 두 방정식 모두 y를 y^2의 꼴로만 포함하므로, y^2을 소거하면 x에 대한 이차방정식이 남고, 결국 두 타원은 단 두 개의 실점에서만 교차한다는 것이 드러난다. 주어진 두 점을 지나는 원의 중심은 두 점을 잇는 선분의 수직이등분선(perpendicular bisector) 위에 있으며, 이 사실로부터 원의 방정식은 매개변수가 하나인 족(one-parameter family)으로 정해진다.

풀이

교점 구하기

전개하면 두 타원은 다음과 같다.

$$x^2 + 4x + 2y^2 = 14,$$
$$9x^2 - 18x + 16y^2 = 16.$$

첫째 식에 8을 곱하고 둘째 식을 빼면 y^2이 소거된다.

$$8x^2 + 32x - 9x^2 + 18x = 112 - 16 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 50x + 96 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x-2)(x-48) = 0.$$

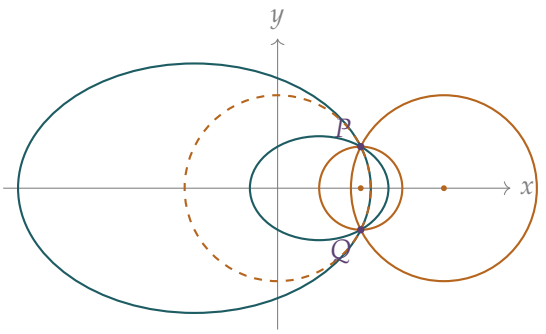
> ? **생각해 보기** 왜 두 근을 그대로 다 받아들일 수 없을까?

각 근은 여전히 실수 y를 주어야 한다. 첫째 타원에서 $2y^2 = 14 - x^2 - 4x$이다.

- ▶ $x = 48$: $2y^2 = 14 - 2304 - 192 < 0$이므로 실점이 없다. (어차피 첫째 타원은 $-2 - 3\sqrt{2} \le x \le -2 + 3\sqrt{2}$ 범위만 차지한다.)

▶ $x = 2$: $2y^2 = 14 - 4 - 8 = 2$이므로 $y = \pm 1$이다.

따라서 두 타원은 정확히 두 점 $P = (2, 1)$과 $Q = (2, -1)$에서 만난다. (두 점 모두 둘째 방정식도 만족한다: $9 + 16 = 25$.)



그림은 두 타원(청록색)과, P와 Q를 지나고 중심이 각각 $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(4, 0)$인 세 원(호박색)을 보여 준다.

P와 Q를 지나는 원

P와 Q를 지나는 원의 중심은 두 점에서 같은 거리에 있으므로 PQ의 수직이등분선 위에 있다. 선분 PQ는 수직이고 중점이 $(2, 0)$이므로, 그 수직이등분선은 x축이다. 따라서 중심은 어떤 실수 a에 대해 $(a, 0)$이고, 반지름은 다음을 만족한다.

$$r^2 = (2 - a)^2 + 1^2.$$

그러므로 원의 방정식은

$$\begin{aligned}(x - a)^2 + y^2 &= (2 - a)^2 + 1 \\ x^2 - 2ax + a^2 + y^2 &= 4 - 4a + a^2 + 1 \\ x^2 - 2ax + y^2 &= 5 - 4a,\end{aligned}$$

이고, 이것이 바로 요구된 꼴이다.

역으로, 모든 실수 a에 대해 이 방정식은 중심이 $(a, 0)$이고 반지름이 $\sqrt{(a-2)^2 + 1} > 0$인 진짜 원을 나타내며, $4 - 4a + 1 = 5 - 4a$이므로 $(2, \pm 1)$을 지난다. 따라서 이 족은 정확히 교점들을 지나는 원 전체의 집합이다.

생각해 보기 두 방정식의 일차결합을 취하는 흔한 방법은 어떨까?

$7\times$(첫째 식) $-$ (둘째 식)으로 결합하면 x^2과 y^2의 계수가 같아지고 $x^2 - 23x + y^2 + 41 = 0$을 얻는데, 이는 우리 족에서 $a = \frac{23}{2}$인 원이다. 그러나 이것은 원 하나일 뿐이다. 두 방

정식의 결합은 $x = 48$인 두 허점을 포함한 네 개의 (복소) 공통점을 모두 지나는 이차곡선(conic)들인 반면, 원은 두 실점만 지나면 된다. 그래서 여기서는 직접적인 방법이 필요하다.

검산

- $a = 2$이면 $x^2 - 4x + y^2 = -3$, 즉 $(x-2)^2 + y^2 = 1$이다. 마땅히 그래야 하듯 PQ를 지름으로 하는 원이다.
- $a = 0$이면 $x^2 + y^2 = 5$이고, 실제로 $2^2 + 1^2 = 5$이다.
- $-6 \le x \le 6$ 범위에서 두 타원 위에 동시에 놓인 점을 수치적으로 탐색하면 $x = 2$만 나온다. $(2, 1)$에서 두 타원의 법선(normal)은 각각 $(8, 4)$와 $(18, 32)$ 방향인데, 이 둘은 평행하지 않으므로 두 타원은 그 점에서 접하는 것이 아니라 실제로 교차한다.

흔한 실수

- y가 실수인지 확인하지 않고 $x = 48$을 남겨 두는 것.
- 타원 방정식의 결합으로 원 하나를 만들어 내고 거기서 멈추는 것. 문제는 그 점들을 지나는 **임의의** 원에 대해 묻고 있다.

STEP 너머

두 이차곡선의 결합 $\lambda E_1 + \mu E_2 = 0$을 **속**(pencil)이라 한다. 이는 복소 사영평면(complex projective plane)에서 셸 때 네 공통점을 지나는 이차곡선들로 이루어진다. 이 문제는 그 점들 가운데 일부가 허점일 수 있다는 것, 그리고 원이 특별하다는 것(모든 원은 고정된 두 복소점인 "무한원점의 원형점(circular points at infinity)"을 지난다)을 깔끔하게 상기시켜 준다. 이러한 개념은 사영기하학과 대수기하학(algebraic geometry)에 속한다. 이런 관점에서 평면곡선과 이차곡선을 친절하게 처음 살펴보려면 Reid, *Undergraduate Algebraic Geometry*(학부 대수기하학)를 보면 좋고, Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에는 STEP 스타일의 연습 문제가 더 실려 있다.

풀이

STEP I 2002, 문제 2

순수수학 • 곡선 그리기

> **STEP I 2002, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/02-s1-q2

핵심 아이디어

다항식 $x^m(x-1)^n$은 $x=0$과 $x=1$에서 값이 0이 되므로, 그 사이 어딘가에서 그래프가 방향을 바꾸어야 한다. 곱의 미분법(product rule)으로 미분한 다음 **공통인수를 모두 묶어 낸다**. 그러면 도함수가 간단한 조각들로 나뉘고, 각 조각의 부호를 바로 읽어 낼 수 있다. 그래프의 개형 전체는 홀짝성(parity)이 결정한다. 거듭제곱의 지수가 짝수인지 홀수인지에 따라 곡선이 축에 접하는지 축을 가로지르는지, 그리고 축의 어느 쪽에 있는지가 정해진다.

풀이

정류점

곱의 미분법에 의해

$$\begin{aligned} \mathrm{f}'(x) &= mx^{m-1}(x-1)^n + nx^m(x-1)^{n-1} \\ &= x^{m-1}(x-1)^{n-1}\big[m(x-1)+nx\big] \\ &= x^{m-1}(x-1)^{n-1}\big[(m+n)x-m\big]. \end{aligned}$$

따라서 $\mathrm{f}'(x)=0$이 되는 것은 정확히 다음 경우이다: $x=0$, $x=1$ 또는

$$x = x_0 = \frac{m}{m+n}.$$

$m, n > 0$이므로 $0 < m < m+n$이고, 따라서 $0 < x_0 < 1$이다. 이것이 구하려던 정류점(stationary point)이다. ($m, n \geq 2$이므로 지수 $m-1$과 $n-1$은 적어도 1이고, 따라서 $x=0$과 $x=1$도 정류점이다. 그래프를 그릴 때 이 점들이 필요하다.)

정류점의 종류

$g(x) = x^{m-1}(x-1)^{n-1}$, $h(x) = (m+n)x - m$이라 하고 $\mathrm{f}'(x) = g(x)\,h(x)$로 쓰자. 그러면 다음이 성립한다.

$$\mathrm{f}''(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) = g'(x)h(x) + (m+n)g(x).$$

? **생각해 보기** g를 정말로 끝까지 미분해야 할까?

그럴 필요 없다. x_0에서는 $h(x_0) = 0$이므로, g'이 무엇이든 첫째 항은 사라진다.

$$\mathrm{f}''(x_0) = (m+n)\,x_0^{m-1}\,(x_0-1)^{n-1}.$$

여기서 $m+n > 0$이고 $x_0^{m-1} > 0$이지만 $x_0 - 1 < 0$이다. 따라서 $\mathrm{f}''(x_0)$는 0이 아니고, 그 부호는 $(-1)^{n-1}$의 부호와 같다.

- n이 짝수이면 $n-1$은 홀수이고, $\mathrm{f}''(x_0) < 0$이므로 x_0은 **극대**(maximum)이다.
- n이 홀수이면 $n-1$은 짝수이고, $\mathrm{f}''(x_0) > 0$이므로 x_0은 **극소**(minimum)이다.

$\mathrm{f}''(x_0) \neq 0$이므로 이계도함수 판정법(second-derivative test)으로 결론을 내릴 수 있다. 이것이 보여야 할 내용이었다.

그래프의 개형

네 가지 경우는 m과 n의 홀짝성으로 나뉜다. 각 경우의 그래프를 그리기 위해 다음 사실들을 모은다.

f의 부호. $x > 1$이면 두 인수가 모두 양수이므로 $\mathrm{f} > 0$이다. $0 < x < 1$이면 $x^m > 0$이고 $(x-1)^n$의 부호는 $(-1)^n$의 부호와 같다. $x < 0$이면 부호는 $(-1)^m(-1)^n = (-1)^{m+n}$이다.

근 근처에서의 모양. $x = 0$ 근처에서 $\mathrm{f}(x) \approx (-1)^n x^m$이다. m이 짝수이면 f는 0의 양쪽에서 같은 부호를 유지하므로, 곡선은 그 점에서 축에 접한다(극점(turning point)). m이 홀수이면 f의 부호가 바뀌고, $\mathrm{f}'(0) = 0$이므로 곡선은 수평으로 축을 가로지른다(정류 변곡점(stationary point of inflection)). $x = 1$에서도 n에 대해 같은 논리가 적용된다.

양 끝. $|x|$가 클 때 $\mathrm{f}(x)$는 x^{m+n}처럼 행동하므로, $x \to +\infty$일 때 $\mathrm{f} \to +\infty$이다. $x \to -\infty$일 때는 $m+n$이 짝수이면 $\mathrm{f} \to +\infty$이고, $m+n$이 홀수이면 $\mathrm{f} \to -\infty$이다.

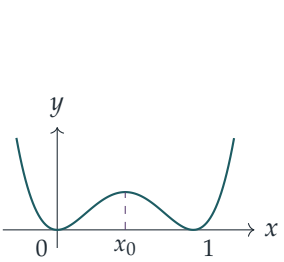
다른 정류점은 없다. 정류점은 $x = 0, x_0, x = 1$뿐이다.

이를 종합하면 다음과 같다.

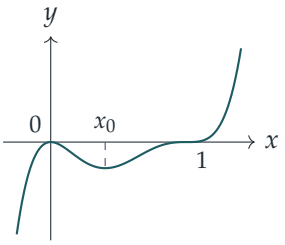
- **m 짝수, n 짝수:** 모든 곳에서 $\mathrm{f} \geq 0$이다. 0과 1에서 축 위의 극소를 갖고 x_0에서 극대를 갖는다. W자 모양이다.

- m **짝수,** n **홀수:** 곡선은 $-\infty$에서 올라와 0에서 아래쪽으로부터 축에 접하고(극대), x_0의 극소까지 내려간 다음, 1에서 정류 변곡점을 지나 $+\infty$로 올라간다.
- m **홀수,** n **짝수:** 곡선은 $-\infty$에서 올라와 0에서 정류 변곡점을 지나 x_0의 극대에 이르고, 내려가서 1에서 축에 접한 다음(극소), $+\infty$로 올라간다.
- m **홀수,** n **홀수:** 곡선은 $+\infty$에서 내려와 0에서 정류 변곡점을 지나 x_0의 극소에 이르고, 다시 올라가 1에서 정류 변곡점을 지나 $+\infty$로 간다.

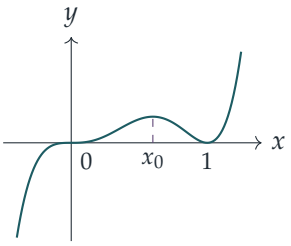
아래 그래프는 가장 작은 경우인 $(m,n) = (2,2), (2,3), (3,2), (3,3)$을 그린 것이며, 각각 세로 축척이 다르다. x_0에서의 값은 작아서 각각 $\frac{1}{16}$, $-\frac{108}{3125}$, $\frac{108}{3125}$, $-\frac{1}{64}$이다.



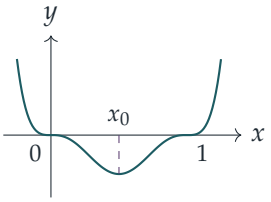
m 짝수, n 짝수



m 짝수, n 홀수



m 홀수, n 짝수



m 홀수, n 홀수

검산

- $m = n = 2$로 두자. $f(x) = \big(x(x-1)\big)^2$은 $x = \frac{1}{2}$에 대하여 대칭이고, $x_0 = \frac{1}{2}$은 실제로 극대이며 그 값은 $\frac{1}{16}$이다.
- 치환 $x \mapsto 1-x$는 $x^m(x-1)^n$을 $(-1)^{m+n}x^n(x-1)^m$으로 바꾼다. 따라서 m과 n을 맞바꾸면 그래프가 $x = \frac{1}{2}$에 대하여 대칭이동된다($m+n$이 홀수이면 x축에 대해서도 대칭이동된다). 그래서 홀짝성이 섞인 두 그래프가 서로 거울상이 된다.
- $2 \le m, n \le 8$인 모든 경우에 대하여 f'을 수치 미분과 비교하고, $f''(x_0)$의 부호를 유한 차분과 비교하여 확인하였다. 예를 들어 $(m,n) = (2,3)$일 때 $f''(\frac{2}{5}) = 5 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{9}{25} = 0.72 > 0$이므로, 예측대로 극소이다.

흔한 실수

- $f''(x)$를 끝까지 전개하는 것. x_0에서는 인수 $(m+n)x-m$이 0이므로 한 항만 남는다.
- $x=0$과 $x=1$도 정류점이라는 사실($m,n\geq 2$이기 때문)을 잊고, 그 점들에서 곡선이 비스듬히 축을 가로지르도록 그리는 것.
- $x<0$에서의 부호를 잘못 구하는 것. 부호는 m만이 아니라 $m+n$에 따라 정해진다.

STEP 너머

중복도(multiplicity)가 k인 근 근처에서 다항식의 국소적인 모양은 $c(x-a)^k$와 같고, k의 홀짝성이 접하는지 가로지르는지를 결정한다. 이것은 테일러(Taylor) 정리와 정류점에 대한 고계도함수 판정법(higher-derivative test)으로 나아가는 첫걸음이다. 정류점에서 0이 아닌 첫 번째 도함수의 계수가 k일 때, k가 짝수이면 그 점은 극점이고 k가 홀수이면 변곡점이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해)는 이러한 아이디어를 엄밀한 토대 위에 세운다.

풀이

STEP I 2002, 문제 3

순수수학 • 미분을 이용한 부등식

> **STEP I 2002, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/02-s1-q3

핵심 아이디어

두 제곱근을 $\sqrt{P}$와 $\sqrt{Q}$라 하자. 근호 안의 두 양은 깔끔하게 연결되어 있다. $P+Q = a^2+b^2$는 상수이고, 두 양의 도함수(derivative)는 크기가 같고 부호가 반대이다. 그래서 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta$가 깔끔하게 인수분해되고, 그 부호는 삼각함수 인수 하나로 결정된다. y의 최댓값과 최솟값을 알고 나면 이중 부등식(double inequality)은 그저 "최솟값 $\le y \le$ 최댓값"일 뿐이며, 첫 번째 부분은 두 끝값의 대소가 올바르다는 것을 알려 준다.

풀이

첫 번째 부등식

전개하면

$$2a^2+2b^2-(a+b)^2 = a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2 \ge 0,$$

이므로 $(a+b)^2 \le 2a^2+2b^2$이고, 등호는 정확히 $a=b$일 때 성립한다.

정류점

$c=\cos\theta$, $s=\sin\theta$라 하고

$$P = a^2c^2+b^2s^2, \qquad Q = a^2s^2+b^2c^2, \qquad y = \sqrt{P}+\sqrt{Q}.$$

라 두자. 먼저 두 가지 특수한 경우를 보자. $a^2=b^2$이면 모든 θ에 대하여 $P=Q=a^2$이므로 $y=2|a|$는 상수이고 모든 점이 (자명하게) 정류점(stationary point)이다. 이 경우는 잠시 미루어 둔다. $a=0$ 또는 $b=0$이면(둘 다 0은 아닐 때) 어떤 θ에서 P나 Q가 0이 되고, 그 곳에서 y는 미분가능(differentiable)하지 않다. 이 경우는 마지막에 다룬다. 따라서 당분간

$ab \neq 0$이고 $a^2 \neq b^2$라고 가정한다. 그러면 $P \geq \min(a^2, b^2)(c^2 + s^2) > 0$이고, 마찬가지로 $Q > 0$이므로 y는 모든 곳에서 미분가능하다.

미분하면

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\theta} = -2a^2cs + 2b^2sc = (b^2 - a^2)\sin 2\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\theta} = (a^2 - b^2)\sin 2\theta.$$

이다. 따라서

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = \frac{(b^2 - a^2)\sin 2\theta}{2\sqrt{P}} - \frac{(b^2 - a^2)\sin 2\theta}{2\sqrt{Q}} = \frac{(b^2 - a^2)\sin 2\theta\left(\sqrt{Q} - \sqrt{P}\right)}{2\sqrt{PQ}}.$$

이다. $\sqrt{Q} - \sqrt{P}$의 부호를 알아보기 위해 유리화(rationalise)하면

$$\sqrt{Q} - \sqrt{P} = \frac{Q - P}{\sqrt{Q} + \sqrt{P}}, \qquad Q - P = (a^2 - b^2)(s^2 - c^2) = (b^2 - a^2)\cos 2\theta.$$

이다. 이것을 대입하고 $2\sin 2\theta \cos 2\theta = \sin 4\theta$를 이용하면

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = \frac{(a^2 - b^2)^2 \sin 4\theta}{4\sqrt{PQ}\left(\sqrt{P} + \sqrt{Q}\right)}.$$

를 얻는다.

생각해 보기 왜 굳이 $\sqrt{Q} - \sqrt{P}$를 유리화하는 수고를 들일 가치가 있을까?

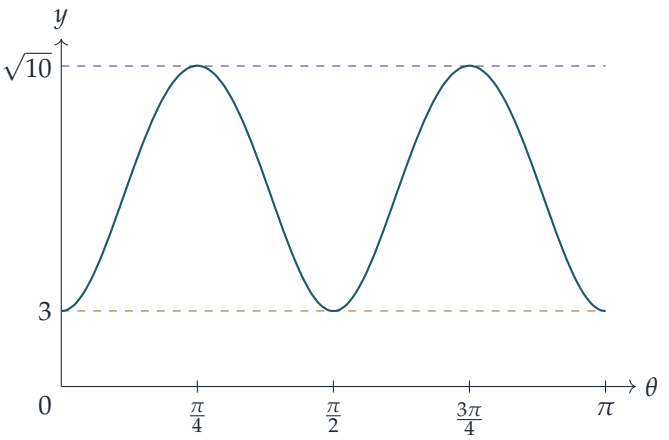
이제 $\sin 4\theta$를 제외한 모든 것이 양수임이 한눈에 보이기 때문이다. $(a^2 - b^2)^2 > 0$이고, P, Q는 양수이다. 따라서 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta$의 부호는 정확히 $\sin 4\theta$의 부호와 같고, 이것으로 정류점의 위치와 종류를 모두 알 수 있다.

정류점은 $\sin 4\theta = 0$인 곳, 즉 정수 n에 대하여 $\theta = \frac{1}{4}n\pi$인 곳이다.

- n이 짝수이면 $\theta = \frac{1}{2}k\pi$이므로 $\{c^2, s^2\} = \{1, 0\}$이고 $\{P, Q\} = \{a^2, b^2\}$이다. 이때 $y = |a| + |b|$이다($\sqrt{a^2} = |a|$임을 기억하자).
- n이 홀수이면 $\theta = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi$이므로 $c^2 = s^2 = \frac{1}{2}$이고 $P = Q = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$이다. 이때 $y = 2\sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)} = \sqrt{2a^2 + 2b^2}$이다.

종류 판정. θ가 증가하면서 $\frac{1}{2}k\pi$를 지날 때 $\sin 4\theta$는 음수에서 양수로 바뀌므로 y는 감소에서 증가로 바뀐다. 따라서 이 점들은 **극소(minimum)**이다. θ가 증가하면서 $\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi$를 지날 때 $\sin 4\theta$는 양수에서 음수로 바뀌므로 이 점들은 **극대(maximum)**이다.

아래 그림은 세로 방향을 늘려서 $a = 2$, $b = 1$인 경우를 나타낸 것이다. y는 주기(period) $\frac{1}{2}\pi$로 3과 $\sqrt{10} \approx 3.162$ 사이를 진동한다.



마지막 부등식

θ를 $\theta + \frac{1}{2}\pi$로 바꾸면 c^2과 s^2이 서로 바뀌고, 따라서 P와 Q가 서로 바뀌므로 y의 주기는 $\frac{1}{2}\pi$이다. 한 주기 $[0, \frac{1}{2}\pi]$에서 y는 $[0, \frac{1}{4}\pi]$에서 증가하고 $[\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi]$에서 감소한다($\sin 4\theta$의 부호). 따라서 최솟값은 양 끝에서의 값 $|a| + |b|$이고, 최댓값은 $\frac{1}{4}\pi$에서의 값 $\sqrt{2a^2 + 2b^2}$이다. 주기성에 의해 이 값들은 모든 θ에 대한 최솟값과 최댓값이므로

$$|a| + |b| \;\le\; y \;\le\; \sqrt{2a^2 + 2b^2}.$$

이다. 이 두 경계는 서로 모순이 없다. 첫 번째 부분을 $|a|$와 $|b|$에 적용하면 $(|a| + |b|)^2 \le 2a^2 + 2b^2$이므로, 하한은 실제로 상한을 넘지 않는다.

미루어 둔 경우. $a^2 = b^2$이면 $y = 2|a|$이고, $|a| + |b| = 2|a|$, $\sqrt{2a^2 + 2b^2} = \sqrt{4a^2} = 2|a|$이므로 부등식은 모두 등호로 성립한다. $b = 0$이면 $y = |a|(|\cos\theta| + |\sin\theta|)$이다. 이때 각 항이 1 이하이므로 $|\cos\theta| + |\sin\theta| \ge \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$이고, 첫 번째 부분에 의해 $(|\cos\theta| + |\sin\theta|)^2 \le 2$이다. 따라서 $|a| \le y \le \sqrt{2}\,|a|$이며, 이것이 바로 구하는 부등식이다. $a = 0$인 경우는 a와 b를 바꾸면 똑같고, $a = b = 0$인 경우는 자명하다. 이로써 모든 a, b, θ에 대하여 결과가 증명된다. ■

검산

- $a = 2$, $b = 1$일 때 $y(0) = 2 + 1 = 3$이고 $y(\frac{1}{4}\pi) = 2\sqrt{5/2} = \sqrt{10} \approx 3.1623$이다. 많은 θ 값에 대해 y를 수치적으로 훑어보면 이 두 값 사이에 머문다.
- 무작위로 고른 a, b, θ에서 도함수 공식은 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta$의 유한차분(finite difference) 추정값과 약 10^{-9} 이내로 일치한다.
- $a = b$이면 두 경계가 모두 $2|a|$로 같아지며, 이는 상수인 y와 일치한다.

흔한 실수

- $\sqrt{a^2} = a$라고 쓰는 것. 최솟값은 $|a| + |b|$이며, 답에 절댓값(modulus)이 나타나는 이유가 바로 이것이다.
- $\sin 2\theta = 0$에서 멈추어 $\sqrt{P} = \sqrt{Q}$가 되는 $\frac{1}{4}\pi$의 홀수 배에서의 정류점을 놓치는 것.
- 근거 없이 극대나 극소라고 부르는 것. $\sin 4\theta$의 부호를 보면 한 줄로 근거를 댈 수 있다.

STEP 너머

기하학적으로 보면, $\sqrt{P}$는 타원(ellipse) $x = a\cos\phi$, $y = b\sin\phi$의 중심에서 타원 위의 한 점까지의 거리이고, $\sqrt{Q}$는 매개변수로 4분의 1바퀴 더 돌아간 점까지의 거리이다. 따라서 이 문제는 이 두 "켤레" 반지름(conjugate radii)이 고정된 합 $a^2 + b^2$를 어떻게 나누어 갖는지에 관한 것이다. 두 경계는 또한 벡터(vector) (a, b)의 ℓ^1 노름(norm)과 (상수배한) ℓ^2 노름이기도 하며, 이처럼 노름을 비교하는 것은 대학 1학년 해석학(analysis)과 선형대수학(linear algebra)에서 늘 쓰는 도구이다. 도함수를 이용해 부등식을 증명하는 방법에 대해 더 알고 싶다면 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 참고하라.

풀이

STEP I 2002, 문제 4

순수수학 • 접선과 부등식

STEP I 2002, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/02-s1-q4

핵심 아이디어

$(0,1)$을 지나면서 더 나아간 곳에서 곡선에 접하는 직선은 그 두 점 사이에서 곡선보다 **아래**에 있어야 한다. 그 구간에서 곡선이 오목(concave)하다가 이후 완만해지기 때문이다. 직선 아래의 영역은 사다리꼴(trapezium)이고, 이를 y축을 중심으로 회전시키면 원기둥과 원뿔이 되므로 미적분 없이도 넓이와 부피를 쉽게 구할 수 있다. 이것들을 곡선 아래 영역의 정확한 넓이 및 부피와 비교하면 두 부등식을 얻는다.

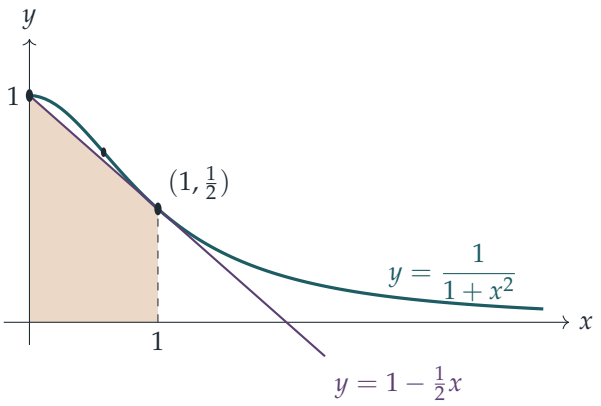
풀이

개형 그리기

$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$이라 하자. 그러면 $f(0) = 1$, $f(x) > 0$이고, $x \to \infty$일 때 $f(x) \to 0$이므로 x축이 점근선(asymptote)이다. 미분하면

$$f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \qquad f''(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}.$$

따라서 $f'(0) = 0$이고(곡선은 $(0,1)$에서 수평으로 출발한다) $x > 0$에서 $f'(x) < 0$이므로 곡선은 계속 감소한다. 또 $0 \le x < 1/\sqrt{3}$에서 $f''(x) < 0$이고 $x > 1/\sqrt{3}$에서 $f''(x) > 0$이므로 $\left(1/\sqrt{3}, \frac{3}{4}\right)$에 변곡점(point of inflection)이 있다. 곡선은 y축 근처에서는 오목하고(아래로 휘어지고) 더 바깥쪽에서는 볼록(convex)하다.



색칠한 사다리꼴은 $0 \le x \le 1$에서 직선 아래의 영역이며, 곡선 아래의 영역 안에 놓인다.

직선 구하기

직선은 $(0, f(0)) = (0,1)$을 지나므로 어떤 기울기(gradient) m에 대하여 $y = 1 + mx$이다. 이 직선이 $x = a > 0$에서 접한다고(tangent) 하자. 그 점에서 두 조건이 성립해야 한다.

곡선과 만난다: $1 + ma = \dfrac{1}{1+a^2}$이므로 $ma = -\dfrac{a^2}{1+a^2}$이고, $a \neq 0$이므로

$$m = -\frac{a}{1+a^2}.$$

곡선과 기울기가 같다: $m = f'(a) = -\dfrac{2a}{(1+a^2)^2}$.

두 식을 같게 놓고 $-a/(1+a^2)$로 나누면($a > 0$이므로 가능하다) $1 = \dfrac{2}{1+a^2}$이므로 $a^2 = 1$이고, $a > 0$이므로 $a = 1$이다. 그러면 $m = -\frac{1}{2}$이고 직선은

$$y = 1 - \tfrac{1}{2}x,$$

이며, 곡선에 $(1, \frac{1}{2})$에서 접한다.

다른 교점이 없음

직선의 식에서 곡선의 식을 빼면

$$\left(1 - \frac{x}{2}\right) - \frac{1}{1+x^2} = \frac{(2-x)(1+x^2) - 2}{2(1+x^2)} = \frac{-x^3 + 2x^2 - x}{2(1+x^2)} = -\frac{x(x-1)^2}{2(1+x^2)}.$$

이 값은 $x = 0$ 또는 $x = 1$일 때만 0이 된다. 따라서 직선은 곡선과 $x = 0$에서, 그리고 접점 $x = 1$에서 만나며(중복 인수 $(x-1)^2$은 접한다는 사실의 대수적 표시이다), 그 밖에서는 만나지 않는다. $x \ge 0$에서뿐만 아니라 사실 음수 x에서도 만나지 않는다.

여기서 다음 단계에 필요한 사실도 읽어 낼 수 있다. $x > 0$이고 $x \neq 1$이면 이 식은 엄격히 음수이므로

$$0 < 1 - \tfrac{1}{2}x < \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{단, } 0 < x < 1. \tag{$*$}$$

(왼쪽 부등식은 $[0,1]$에서 $1 - \frac{1}{2}x \geq \frac{1}{2}$이기 때문에 성립한다.) 따라서 $[0,1]$에서 직선은 양 끝점을 제외하면 그림에서처럼 곡선보다 엄격히 아래에 있다.

$\pi > 3$

$(*)$를 $[0,1]$에서 적분한다. 두 함수는 연속이고 열린구간에서 곡선이 직선보다 엄격히 위에 있으므로, 적분한 뒤에도 부등식은 엄격한 부등식으로 남는다.

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x > \int_0^1 \Big(1 - \frac{x}{2}\Big)\mathrm{d}x.$$

좌변은 $\frac{\pi}{4}$이다($\big[\arctan x\big]_0^1$이기 때문이다). 우변은 평행한 두 변의 길이가 1과 $\frac{1}{2}$이고 폭이 1인 색칠한 사다리꼴의 넓이이므로 $\frac{1}{2}\big(1 + \frac{1}{2}\big) = \frac{3}{4}$이다. 따라서 $\frac{\pi}{4} > \frac{3}{4}$, 즉

$$\pi > 3.$$

$\ln 2 > 2/3$

이제 같은 두 영역$(0 \leq x \leq 1)$을 y축을 중심으로 2π만큼 회전시킨다. $(*)$에 의해 사다리꼴은 곡선 아래 영역 안에 있으므로, 사다리꼴의 회전체(solid of revolution)는 다른 회전체 안에 있고 부피가 더 작다.

> **생각해 보기** 곡선이 x에 대한 y의 식으로 주어졌을 때, y축을 중심으로 한 회전체의 부피는 어떻게 구할까?

원통형 껍질(cylindrical shells)을 이용한다. x에서 폭이 δx이고 높이가 y인 얇은 띠는 부피가 약 $2\pi x\, y\, \delta x$인 껍질을 쓸고 지나가므로, 부피는 $\int_0^1 2\pi x\, y\, \mathrm{d}x$이다. (또는 수평으로 자를 수도 있다. 검산 참고.)

곡선의 경우

$$V_{\text{곡선}} = \int_0^1 \frac{2\pi x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi\big[\ln(1+x^2)\big]_0^1 = \pi \ln 2,$$

이다. 분자 $2x$가 분모의 도함수이기 때문이다.

직선의 경우 회전체는 반지름이 1이고 높이가 $\frac{1}{2}$인 원기둥(사다리꼴 중 $y = \frac{1}{2}$ 아래 부분에서 생긴다) 위에 반지름이 1이고 높이가 $\frac{1}{2}$인 원뿔(그 위의 삼각형에서 생긴다)을 얹은 것이다. 따라서

$$V_{\text{직선}} = \pi \cdot 1^2 \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot \tfrac{1}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}.$$

껍질 방법으로 확인하면 $\int_0^1 2\pi x\big(1 - \frac{1}{2}x\big)\mathrm{d}x = 2\pi\big(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\big) = \frac{2\pi}{3}$이다.

피적분함수(integrand) $2\pi x\left(\frac{1}{1+x^2}-1+\frac{x}{2}\right)$는 연속이고, $(*)$에 의해 $[0,1]$에서 음이 아니며 $(0,1)$에서 엄격히 양수이므로 $V_{\text{curve}} > V_{\text{line}}$이다.

$$\pi \ln 2 > \frac{2\pi}{3} \quad \Longrightarrow \quad \ln 2 > \frac{2}{3},$$

이므로 증명이 끝난다.

검산

- 수치로 보면 $\pi/4 \approx 0.7854 > 0.75$이고 $\ln 2 \approx 0.6931 > 0.6667$이므로 두 부등식 모두 참이며, 어느 쪽도 여유가 그리 크지 않다.
- 대신 수평으로 자르면: $\frac{1}{2} \le y \le 1$에서 곡선은 $x^2 = \frac{1}{y} - 1$이므로, 부피는 원기둥 $\pi \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{2}$에 $\int_{1/2}^{1} \pi\left(\frac{1}{y}-1\right)\mathrm{d}y = \pi\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right)$를 더한 것이고, 다시 $\pi \ln 2$를 얻는다.
- 인수분해(factorisation)의 간단한 확인: $x = 2$에서 직선의 값은 0, 곡선의 값은 $\frac{1}{5}$로 차이가 $-\frac{1}{5}$이다. 공식으로는 $-\frac{2\cdot 1}{2\cdot 5} = -\frac{1}{5}$이다.

흔한 실수

- 일반적인 점에서의 접선을 구하고 $(0,1)$을 지난다는 조건을 잊는 것(또는 그 반대). a를 결정하려면 두 조건이 모두 필요하다.
- "$\ge$"에서 멈추는 것. 엄격한 부등식을 얻으려면 어떤 구간에서 직선이 곡선보다 엄격히 아래에 있어야 하며, 바로 이것을 인수 $x(x-1)^2$이 보장해 준다.
- 실수로 x축을 중심으로 회전시키는 것. 그러면 $\int \pi y^2 \,\mathrm{d}x$가 되어 다른 값이 나온다.

STEP 너머

이 논증은 비교 원리(comparison principle)이다. 어떤 구간에서 두 함수 g, h가 모두 연속이고 $g \le h$이며 어딘가에서 엄격한 부등식이 성립하면 $\int g < \int h$이다. "어딘가에서 엄격히"를 엄밀하게 다루는 것은 적분을 상합과 하합(upper and lower sums)으로 정의하는 첫 해석학(analysis) 강의의 전형적인 연습 문제이다. 간단한 도형의 넓이로 π의 범위를 구하는 방법은 아르키메데스(Archimedes)까지 거슬러 올라가며, 이 문제를 훨씬 정밀하게 만든 형태(예를 들어 $\int_0^1 x^4(1-x)^4/(1+x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{22}{7} - \pi$)도 찾아볼 만하다. 해석학을 공부하려면 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 읽어 보라.

풀이

STEP I 2002, 문제 5

순수수학 • 다항식의 정수근

STEP I 2002, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/02-s1-q5

핵심 아이디어

일차인수(linear factor)의 곱으로 쓴 다항식(polynomial)은 특별한 점에서 값을 계산하기 쉽다. $x = 0$, $x = 1$ 또는 $x = -1$을 대입하면 인수분해(factorise)된 꼴은 각각 k_i, $k_i + 1$ 또는 $k_i - 1$의 곱이 되고, 전개된 꼴은 계수(coefficient)들의 합이 된다. 사차식(quartic)에서는 이 값들이 정해진 정수이고, 근(root)이 정수라는 것은 모든 $k_i \pm 1$이 알려진 수의 약수(divisor)여야 한다는 뜻이다. 그 수들을 소인수분해하면 가능성은 거의 남지 않는다.

풀이

세 항등식

$f(x)$의 두 표현은 같은 다항식이므로, 모든 x의 값에서 일치한다.

$x = 0$을 대입하자. 다른 모든 항은 x를 인수로 가지므로, 전개된 꼴에서는 $f(0) = a_n$이다. 인수분해된 꼴에서는 $f(0) = k_1 k_2 \cdots k_n$이다. 따라서

$$k_1 k_2 \cdots k_n = a_n.$$

$x = 1$을 대입하자. x의 모든 거듭제곱이 1이 되므로 전개된 꼴에서는 $f(1) = 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$이고, 인수분해된 꼴에서는 $(1 + k_1)(1 + k_2) \cdots (1 + k_n)$이다. 따라서

$$(k_1 + 1)(k_2 + 1) \cdots (k_n + 1) = 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

이므로 요구된 결과가 성립한다.

$x = -1$을 대입하자. 인수분해된 꼴에서는 $(k_1 - 1)(k_2 - 1) \cdots (k_n - 1)$이다. 전개된 꼴에

서 항 $a_j x^{n-j}$는 ($(-1)^{-j} = (-1)^j$를 이용하면) $(-1)^{n-j}a_j = (-1)^n(-1)^j a_j$가 되므로

$$(k_1 - 1)(k_2 - 1)\cdots(k_n - 1) = (-1)^n\big(1 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n\big).$$

n이 짝수이면 이는 단순히 $1 - a_1 + a_2 - \cdots + a_n$이고, n이 홀수이면 모든 부호가 반대가 된다.

사차식

사차식을 $f(x) = (x + k_1)(x + k_2)(x + k_3)(x + k_4)$로 쓰자. 그러면 근은 $-k_1, \ldots, -k_4$이고, 이들은 정수이다. $n = 4$일 때 항등식(identity)을 이용하면

$$k_1k_2k_3k_4 = 576 = 2^6 \cdot 3^2,$$
$$(k_1 + 1)(k_2 + 1)(k_3 + 1)(k_4 + 1) = 1 + 22 + 172 + 552 + 576 = 1323 = 3^3 \cdot 7^2,$$
$$(k_1 - 1)(k_2 - 1)(k_3 - 1)(k_4 - 1) = 1 - 22 + 172 - 552 + 576 = 175 = 5^2 \cdot 7.$$

모든 k_i는 2 이상이다. 모든 계수가 양수이므로 모든 $x \geq 0$에 대해 $f(x) > 0$이다. 따라서 모든 근은 음수이고, 모든 k_i는 양의 정수이다. 또한 어떤 k_i도 1이 아니다. 그렇지 않으면 세 번째 곱이 175가 아니라 0이 되기 때문이다. 따라서 각 i에 대해 $k_i \geq 2$이고, 수 $k_i - 1$과 $k_i + 1$은 모두 양의 정수이다.

생각해 보기 세 곱을 어떻게 가능한 k_i의 짧은 목록으로 바꿀 수 있을까?

각 $k_i - 1$은 175의 양의 약수이고, 각 $k_i + 1$은 1323의 양의 약수이다. 175의 약수는 $1, 5, 7, 25, 35, 175$이므로

$$k_i \in \{2, 6, 8, 26, 36, 176\}, \qquad k_i + 1 \in \{3, 7, 9, 27, 37, 177\}.$$

이 $k_i + 1$의 값들 가운데 $1323 = 3^3 \cdot 7^2$을 나누는 것은 $3, 7, 9, 27$뿐이다(37은 소수(prime)이고 $177 = 3 \cdot 59$이기 때문이다). 따라서 각 k_i는 $2, 6, 8, 26$ 중 하나이고, 각 $k_i + 1$은 $3, 7, 9, 27$ 중 하나이다.

이제 곱 $\prod(k_i + 1) = 3^3 \cdot 7^2$을 살펴보자.

- 인수 7^2은 7과 같은 인수에서만 나올 수 있으므로, $k_i + 1$ 중 정확히 두 개가 7이다. 즉 k_i 중 두 개가 6이다.
- 나머지 두 인수는 $\{3, 9, 27\}$에 속하는 3의 거듭제곱이고, 그 곱은 $3^3 = 27$이다. 각각은 3 이상이므로 27은 불가능하고(짝이 되는 인수가 1이 되어야 한다), 가능한 경우는 3×9뿐이다. 따라서 나머지 k_i는 2와 8이다.

그러므로 $\{k_1, k_2, k_3, k_4\} = \{2, 6, 6, 8\}$이다. 첫 번째 곱으로 확인해 보면 $2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 = 576$이므로 요구된 대로이다. 전개해서도 확인할 수 있다.

$$(x + 2)(x + 8) = x^2 + 10x + 16, \qquad (x + 6)^2 = x^2 + 12x + 36,$$

이고

$$(x^2+10x+16)(x^2+12x+36) = x^4+22x^3+172x^2+552x+576.$$

따라서 근은

$$x=-2, \quad x=-6 \text{ (중근)}, \quad x=-8.$$

검산

- k_i의 합은 $2+6+6+8=22$로, x^3의 계수와 일치한다.
- $f(-6) = 1296-4752+6192-3312+576 = 0$이고, $f'(x) = 4x^3+66x^2+344x+552$도 $x=-6$에서 0이 되므로 -6이 중근(repeated root)임이 확인된다.
- 항등식을 수치로 간단히 시험해 보자. $f(x) = (x+2)(x-3) = x^2-x-6$에 대해 $(2-1)(-3-1) = -4$이고 $1-(-1)+(-6) = -4$이다.

흔한 실수

- $x=-1$에 대한 결과에서 부호를 틀리는 것: n이 홀수일 때는 인수 $(-1)^n$이 중요하다.
- 중근이 허용된다는 것을 잊는 것: 1323에서 7^2을 보았다면 k_i 중 두 개는 같아야 한다.
- 모든 $k_i \geq 2$임을 먼저 보이지 않고 양의 약수만 나열하는 것: 바로 그 단계가 모든 $k_i \pm 1$을 양수로 만들어 준다.

STEP 너머

여기서 다룬 항등식은 비에트 공식(Vieta's formulae)의 특수한 경우이다. 비에트 공식은 다항식의 계수를 근의 기본대칭함수(elementary symmetric functions)로 나타낸다. 약수를 이용한 논증은 유리근 정리(rational root theorem)와, 정수 계수 다항식의 인수분해에 관한 가우스(Gauss)의 보조정리(Gauss's lemma)와 가까운 관계에 있으며, 이는 환(ring)에 관한 첫 강의에서 만나게 된다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 이러한 아이디어를 꼼꼼하게 전개한다.

풀이

STEP I 2002, 문제 6

순수수학 • 각뿔의 기하

STEP I 2002, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

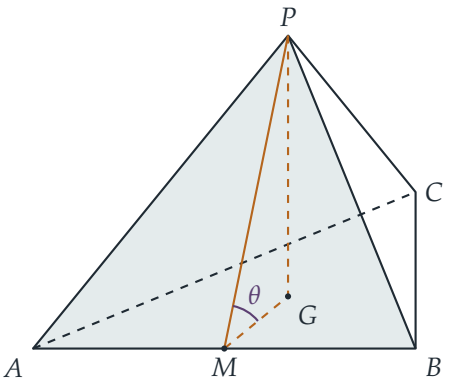
step.maths.org/questions/02-s1-q6

핵심 아이디어

대칭성(symmetry)에 의해 꼭대기 꼭짓점(apex)은 정삼각형 밑면의 중심 바로 위에 있으므로, 높이는 피타고라스 정리(Pythagorean theorem)를 한 번 적용하면 얻는다. 일단 부피를 알면 새 높이를 직접 구할 필요가 전혀 없다. 어느 면을 바닥에 놓든 부피는 같으므로 $V = \frac{1}{3} \times (\text{새 밑면의 넓이}) \times h$이기 때문이다. 마지막 부분의 각은 공통 모서리(edge)를 따라 만나는 두 면 사이의 각이며, 이를 가장 깔끔하게 보는 방법은 그 모서리에 수직이면서 꼭대기 꼭짓점을 지나는 단면(cross-section)을 생각하는 것이다.

풀이

밑면을 ABC라 하고 그 변의 길이를 a라 하자. 꼭대기 꼭짓점을 P라 하고 $PA = PB = PC = b$라 하자. ABC의 중심을 G, AB의 중점을 M이라 하자.



부피

밑면으로부터 P의 높이를 H라 하고, P에서 내린 수선의 발을 F라 하자. 직각삼각형 PFA, PFB, PFC는 변 $PF = H$를 공유하고 빗변의 길이가 b이므로

$$FA = FB = FC = \sqrt{b^2 - H^2}.$$

따라서 F는 세 꼭짓점에서 같은 거리에 있다. 즉 이 점은 ABC의 외심(circumcentre)이며, 정삼각형에서 외심은 중심 G와 같다. ABC의 중선(median)의 길이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$이고, G는 꼭짓점에서부터 중선을 따라 3분의 2 되는 지점에 있으므로 $GA = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{a}{\sqrt{3}}$이다. 삼각형 PGA에서 피타고라스 정리에 의해

$$H^2 = b^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{3b^2 - a^2}{3}.$$

밑면의 넓이는 $\frac{1}{2}a^2 \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$이므로

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot \frac{\sqrt{3b^2 - a^2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{12}\, a^2 \left(3b^2 - a^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. (이런 모양의 각뿔(pyramid)은 $3b^2 > a^2$일 때만 존재하며, 이는 정확히 이 값이 양의 실수가 되는 조건이다.)

새 높이

이제 면 PAB가 바닥에 놓여 있다. 이 면은 $PA = PB = b$이고 $AB = a$인 이등변삼각형(isosceles triangle)이므로 PM은 AB에 수직이고, 삼각형 PMA에서 피타고라스 정리에 의해

$$PM^2 = b^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{4b^2 - a^2}{4}, \qquad \text{넓이} PAB = \frac{1}{2}\, a \cdot PM = \frac{a}{4}\sqrt{4b^2 - a^2}.$$

생각해 보기 h를 구하려면 정말 새로운 꼭대기 꼭짓점의 위치를 찾아야 할까?

그렇지 않다. 입체는 변하지 않았으므로 부피는 여전히 V이고, 부피 공식은 어느 면을 밑면으로 잡아도 성립한다. 이때 높이는 그 면에 수직으로 잰다. 따라서

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{4}\sqrt{4b^2 - a^2} \cdot h.$$

첫 번째 부분의 결과와 같다고 놓으면

$$\frac{a}{12}\sqrt{4b^2 - a^2}\, h = \frac{a^2}{12}\sqrt{3b^2 - a^2} \quad \Longrightarrow \quad h = \frac{a\sqrt{3b^2 - a^2}}{\sqrt{4b^2 - a^2}},$$

이고, 양변을 제곱하면

$$h^2 = \frac{a^2(3b^2 - a^2)}{4b^2 - a^2},$$

을 얻는다. 이것이 구하려던 결과이다. 여기서 $4b^2 - a^2 > 0$인데, $4b^2 > 3b^2 > a^2$이기 때문이다.

정삼각형 면의 각

새 위치에서 바닥은 PAB의 평면이고, 정삼각형 면 ABC는 모서리 AB를 따라 바닥과 만난다. 두 평면 사이의 각은, 공통 모서리 위의 같은 점에서 그 모서리에 수직이 되도록 각 평면 안에 하나씩 그은 두 직선 사이의 각이다. M에서, 면 PAB 위의 직선 MP는 AB에 수직이고(PAB가 이등변삼각형이므로), 면 ABC 위의 직선 MC는 AB에 수직이며(ABC가 정삼각형이므로), G는 MC 위에 있다. 따라서 구하는 각은 $\theta = \angle PMC = \angle PMG$이다.

삼각형 PMG는 G에서 직각인데, PG가 밑면 전체에 수직이기 때문이다. 또한 GM은 중선의 3분의 1이므로 $GM = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{a}{2\sqrt{3}}$이다. 그러므로

$$\tan\theta = \frac{PG}{GM} = \frac{\sqrt{3b^2 - a^2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{a} = \frac{2\sqrt{3b^2 - a^2}}{a},$$

이고, 따라서 정삼각형과 수평면 사이의 각은

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3b^2 - a^2}}{a}\right).$$

G가 밑면 내부에 있으므로 이 각은 예각이고, 따라서 이 각은 그 보각(supplement)이 아니라 실제로 두 평면 사이의 각이다.

새 높이를 이용해도 같은 결과를 얻는다. 꼭짓점 C는 바닥으로부터 높이 h에 있고, 면을 따라 모서리 AB로부터 거리 $MC = \frac{\sqrt{3}}{2}a$만큼 떨어져 있으므로 $\sin\theta = h \big/ \frac{\sqrt{3}}{2}a$이고, 따라서

$$\sin\theta = \frac{2\sqrt{3b^2 - a^2}}{\sqrt{3(4b^2 - a^2)}}, \qquad \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{3(4b^2 - a^2)}},$$

이다. 이 값들은 위에서 구한 $\tan\theta$의 값과 일치한다.

검산

정사면체(regular tetrahedron)는 $a = b = 1$인 경우이다. 이때 공식에 의해 $V = \frac{\sqrt{2}}{12}$, $h^2 = \frac{2}{3}$(대칭성에 의해 당연히 원래 높이와 같다)이고, $\cos\theta = \frac{1}{3}$이 되는데, 이는 잘 알려진 정사면체의 이면각(dihedral angle) $\theta \approx 70.53°$이다. $b \to a/\sqrt{3}$이면 각뿔이 납작해지고 $\theta \to 0$이며, $b \to \infty$이면 높고 뾰족한 모양이 되어 $\theta \to 90°$이다. 또한 무작위로 고른 20,000개의 쌍 (a, b)에 대해 좌표로 각뿔을 만들고, 삼중곱(triple product)으로 V를, C에서 평면 PAB까지의 거리로 h를, 법선(normal)으로부터 θ를 계산했다. 세 값 모두 약 10^{-13} 이내로 공식과 일치했다. 예를 들어 $a = 2, b = 3$이면 $h \approx 1.6956, \theta \approx 78.22°$이다.

흔한 실수

- GA를 중선의 절반으로 잡거나, 외접원의 반지름(circumradius) $\frac{a}{\sqrt{3}}$이 필요한 곳에 내접원의 반지름(inradius) $\frac{a}{2\sqrt{3}}$을 사용하는 것(마지막 부분에서는 그 반대).
- AC나 PC처럼 공통 모서리에 수직이 아닌 직선을 써서 면과 바닥 사이의 각을 재는 것.

STEP 너머

서로 다른 면을 밑면으로 삼아 같은 부피를 계산하는 것은, 부피가 입체를 어떻게 자르거나 어떤 방향으로 놓는지에 의존하지 않는다는 생각을 처음 엿보는 일이다. 대학 1학년 과정에서 사면체의 부피는 스칼라 삼중곱(scalar triple product)인 $\frac{1}{6}|\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})|$(즉 3×3 행렬식(determinant))가 되고, 면 사이의 각은 법선벡터 사이의 각이 되는데, 우리의 수치 검산도 바로 이 방식으로 이루어졌다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*는 행렬식을 부피로서 전개한다.

풀이

STEP I 2002, 문제 7

순수수학 • 삼각함수의 적분

STEP I 2002, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/02-s1-q7

핵심 아이디어

I와 J는 각각 따로 보면 다루기 쉬워 보이지 않지만, 그 합과 차는 둘 다 쉽다. 두 적분을 더하면 분자에 분모가 그대로 올라오므로 피적분함수(integrand)가 1이 된다. 두 적분을 빼면 분자에 분모의 **도함수**(*derivative*)가 올라오므로 적분값이 로그(logarithm)가 된다. 뒤의 두 적분도 같은 요령을 더 일반적인 형태로 사용한다. 즉, 분자를 분모의 상수배와 분모의 도함수의 상수배의 합으로 나눈다.

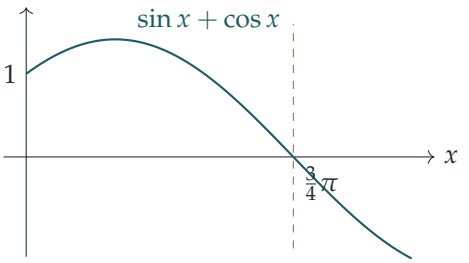
풀이

주 결과

먼저, a에 왜 제한이 있을까? 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\,\sin\left(x + \tfrac{\pi}{4}\right),$$

이 값은 $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$에서 양수이고 $x = \frac{3}{4}\pi$에서 처음으로 0이 된다. 따라서 $0 \le a < \frac{3}{4}\pi$이면 분모는 $[0, a]$ 전체에서 양수이다. 그러면 두 적분 모두 아무 문제 없는 보통의 적분이 되고, 아래에 나오는 로그도 양수의 로그가 된다.



두 적분을 더하면

$$I + J = \int_0^a \frac{\cos x + \sin x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x = \int_0^a 1\,\mathrm{d}x = a.$$

두 적분을 빼면

$$I - J = \int_0^a \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x.$$

분자 $\cos x - \sin x$는 분모 $\sin x + \cos x$의 도함수와 정확히 같으므로, 피적분함수는 $[0, a]$에서 $f > 0$인 $f'(x)/f(x)$ 꼴이다. 따라서

$$I - J = \Big[\ln(\sin x + \cos x)\Big]_0^a = \ln(\sin a + \cos a) - \ln 1 = \ln(\sin a + \cos a).$$

두 결과를 더하면

$$2I = a + \ln(\sin a + \cos a),$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. (두 결과를 빼면 덤으로 $2J = a - \ln(\sin a + \cos a)$도 얻는다.)

소문항 (i)

$p, q > 0$이고, $[0, \frac{\pi}{2}]$에서 $\sin x$와 $\cos x$는 모두 음이 아니며 동시에 0이 되는 일이 없으므로, 분모 $D(x) = p\sin x + q\cos x$는 이 구간에서 양수이다. 그 도함수는 $D'(x) = p\cos x - q\sin x$이다.

> **생각해 보기** 분모의 계수가 p와 q일 때, "$I + J$와 $I - J$를 생각한다"는 방법을 어떻게 일반화할 수 있을까?

앞에서 합과 차가 통했던 것은, 분자들을 더하면 분모가 되고 빼면 분모의 도함수가 되었기 때문이다. 그래서 이번에는 다음을 만족하는 상수 A와 B를 찾는다.

$$\cos x = A\,(p\sin x + q\cos x) + B\,(p\cos x - q\sin x) \qquad \text{모든} x.$$

$\sin x$와 $\cos x$의 계수를 비교(comparing coefficients)하면

$$pA - qB = 0, \qquad qA + pB = 1.$$

첫째 식에서 $B = pA/q$이고, 이를 둘째 식에 넣으면 $qA + p^2A/q = 1$이므로

$$A = \frac{q}{p^2 + q^2}, \qquad B = \frac{p}{p^2 + q^2}.$$

이제 적분은 쉬운 부분과 로그 부분으로 나뉜다.

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{p\sin x + q\cos x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2} \left(A + B\,\frac{D'(x)}{D(x)}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2}A + B\Big[\ln D(x)\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}A + B\ln\frac{p}{q},\end{aligned}$$

여기서 둘 다 양수인 $D(\frac{\pi}{2}) = p$와 $D(0) = q$를 사용하였다. 따라서

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{p\sin x + q\cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{\frac{1}{2}\pi q + p\ln(p/q)}{p^2+q^2}.$$

소문항 (ii)

이번에는 분모가 $D(x) = 3\sin x + 4\cos x + 25$이고 $D'(x) = 3\cos x - 4\sin x$이다. $|3\sin x + 4\cos x| \le 5 < 25$이므로 분모는 양수이다. D에 상수 25가 있으므로 상수항까지 맞춰야 한다. 그래서 다음을 만족하는 A와 B를 찾는다.

$$\cos x + 4 = A\,(3\sin x + 4\cos x + 25) + B\,(3\cos x - 4\sin x).$$

계수를 비교하면

$$\sin x:\ 3A - 4B = 0, \qquad \cos x:\ 4A + 3B = 1, \qquad \text{상수항}:\ 25A = 4.$$

처음 두 식에서 $A = \frac{4}{25}$, $B = \frac{3}{25}$를 얻고, 이때 상수항에 대한 식 $25\cdot\frac{4}{25} = 4$도 성립한다. 식은 세 개인데 미지수는 두 개뿐이므로 이것이 저절로 성립하는 것은 아니다. 분자의 "+4"는 바로 이것이 성립하도록 고른 것이다. 따라서

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x + 4}{3\sin x + 4\cos x + 25}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2}\left(\frac{4}{25} + \frac{3}{25}\frac{D'(x)}{D(x)}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{4}{25}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{3}{25}\Big[\ln D(x)\Big]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{2\pi}{25} + \frac{3}{25}\ln\frac{28}{29},\end{aligned}$$

이다. 여기서 $D(\frac{\pi}{2}) = 3 + 25 = 28$, $D(0) = 4 + 25 = 29$이다.

검산

- $p = q = 1$일 때 소문항 (i)은 $a = \frac{\pi}{2}$에서의 주 결과와 일치해야 한다. 주 결과에서 $2I = \frac{\pi}{2} + \ln 1$이므로 $I = \frac{\pi}{4}$이다. 공식은 $\frac{\pi/2+0}{2} = \frac{\pi}{4}$를 준다. 일치한다.
- $a \to \frac{3}{4}\pi$이면 $\ln(\sin a + \cos a) \to -\infty$이다. 이는 분모가 0이 되기 직전에 I의 피적분함수가 절댓값이 큰 음수가 된다는 사실과 맞는다. 그 근처에서 $\cos x < 0$이기 때문이다.
- 수치적으로 소문항 (ii)의 값은 $\frac{2\pi}{25} + \frac{3}{25}\ln\frac{28}{29} \approx 0.247116$이며, 이 적분에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용한 값과 소수점 아래 열두 자리까지 일치한다. 주 결과와 소문항 (i)도 각각 무작위로 고른 200개의 a 값, 그리고 p와 q 값에 대해 수치 적분(quadrature) 결과와 일치한다.

흔한 실수

- 소문항 (i)에서 $\ln(p/q)$ 대신 $\ln(q/p)$를 얻는 실수. 위끝 $\frac{\pi}{2}$에서 남는 것은 sin 항이므로 p가 나온다.
- 소문항 (ii)에서 상수항을 잊고 $\sin x$와 $\cos x$의 계수만 맞추는 실수. 마침 이 경우에는 잘 되지만, 그렇다고 가정하지 말고 확인해야 한다.

STEP 너머

분자를 "분모의 A배와 분모의 도함수의 B배의 합"으로 쓰는 것은 작은 선형대수(linear algebra)이다. 함수 $\sin x$와 $\cos x$는 2차원 공간을 생성(span)하고, $p^2 + q^2 \neq 0$이면 D와 D'은 그 공간의 또 다른 기저(basis)를 이룬다. 알맞은 기저를 찾아 그것으로 전개한다는 같은 아이디어가 부분분수(partial fractions)와 미분방정식(differential equations)의 미정계수법(method of undetermined coefficients)의 바탕이 되며, 이는 대학 1학년 수리 방법론 과목에서 만나게 된다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*에는 이런 종류의 대칭 요령으로 풀리는 적분이 더 많이 실려 있다.

풀이

STEP I 2002, 문제 8

순수수학 • 복리 대출

> **STEP I 2002, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/02-s1-q8

핵심 아이디어

한 해 동안 일어나는 일을 식으로 써 보자. 빚은 $1+\alpha$배로 늘어나고, 그다음 상환액이 빠진다. 이 한 단계짜리 점화식(recurrence)을 거슬러 풀어 보면, 각 상환액 R_k는 n년째 말에 $(1+\alpha)^{n-k}R_k$만큼의 "가치"를 가진다는 것을 알 수 있다. 그만큼의 이자가 쌓이는 것을 막아 주었기 때문이다. 나머지는 모두 등비급수(geometric series)이다. 마지막 근삿값을 구할 때는 이항정리(binomial theorem)로 $1+\alpha$의 거듭제곱을 전개하되, 꼭 필요한 만큼의 항만 남긴다.

풀이

C_{n+1}에 대한 일반 공식

k년째 말에 이자가 붙으면 빚 C_k는 $(1+\alpha)C_k$가 되고, 그다음 R_k를 갚는다. 남은 금액이 $k+1$년째 초의 빚이다.

$$C_{k+1} = (1+\alpha)C_k - R_k.$$

이 식을 반복해서 적용하면

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= (1+\alpha)C_n - R_n \\ &= (1+\alpha)^2 C_{n-1} - (1+\alpha)R_{n-1} - R_n \\ &\vdots \\ &= (1+\alpha)^n C_1 - (1+\alpha)^{n-1}R_1 - (1+\alpha)^{n-2}R_2 - \cdots - R_n, \end{aligned}$$

이고, $C_1 = C$이므로

$$\boxed{C_{n+1} = (1+\alpha)^n C - \sum_{k=1}^{n} (1+\alpha)^{n-k} R_k}.$$

이다. (이를 엄밀하게 보이려면, $n = 1$일 때 성립함, 즉 $C_2 = (1+\alpha)C - R_1$임을 확인하고, n일 때 성립하면 양변에 $1+\alpha$를 곱하고 R_{n+1}을 빼서 $n+1$일 때도 성립함을 보이면 된다.)

상환액 $R_k = (1+\alpha)^k r$

N년 만에 대출을 모두 갚는다는 것은 $C_{N+1} = 0$이라는 뜻이다. $R_k = (1+\alpha)^k r$이면 합의 모든 항이 같다.

$$(1+\alpha)^{N-k} R_k = (1+\alpha)^{N-k}(1+\alpha)^k r = (1+\alpha)^N r.$$

따라서

$$0 = C_{N+1} = (1+\alpha)^N C - N(1+\alpha)^N r = (1+\alpha)^N (C - Nr).$$

$(1+\alpha)^N \neq 0$이므로 $C = Nr$, 즉 $r = C/N$을 얻는다. 이것이 보이려던 결과이다.

이는 직관적으로도 자연스럽다. k번째 상환액은 "현재 가치로" C/N이고 여기에 k년 치 이자가 붙은 것이므로, 전체적으로 원금 C와 그에 대한 이자를 정확히 갚는 셈이다.

균등 상환액 R

이제 모든 k에 대해 $R_k = R$이고, $C_{N+1} = 0$에서

$$(1+\alpha)^N C = R \sum_{k=1}^{N} (1+\alpha)^{N-k} = R\big(1 + (1+\alpha) + \cdots + (1+\alpha)^{N-1}\big).$$

를 얻는다. 괄호 안은 첫째항이 1, 공비가 $1+\alpha$, 항의 개수가 N인 등비급수이므로 ($\alpha > 0$이라 공비가 1이 아니다) 그 값은

$$\frac{(1+\alpha)^N - 1}{(1+\alpha) - 1} = \frac{(1+\alpha)^N - 1}{\alpha}.$$

이다. 따라서 $(1+\alpha)^N C = R\,\dfrac{(1+\alpha)^N - 1}{\alpha}$이고, 이를 정리하면

$$\frac{R}{C} = \frac{\alpha(1+\alpha)^N}{(1+\alpha)^N - 1},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

$\alpha = \frac{1}{50}, N = 4$인 경우

> **생각해 보기** 이항전개에서 항을 몇 개까지 남겨야 할까? 그리고 왜 분자는 분모보다 적은 항만 있어도 될까?

분모 $(1+\alpha)^4 - 1$은 α의 1차항부터 시작하지만, 분자 $\alpha(1+\alpha)^4$는 1로 시작하는 식에 α를 곱한 것이다. 그래서 공통인수 α를 약분하면 분자는 $(1+\alpha)^4$, 분모는 $\left((1+\alpha)^4 - 1\right)/\alpha$가 된다. 둘 다 α의 1차까지 정확하게 하려면 분자에서는 $(1+\alpha)^4 \approx 1 + 4\alpha$이면 충분하지만, 분모에서는 $(1+\alpha)^4 \approx 1 + 4\alpha + 6\alpha^2$까지 필요하다($6\alpha^2$은 α로 나누면 6α가 된다). 따라서

$$\frac{R}{C} = \frac{(1+\alpha)^4}{\left((1+\alpha)^4 - 1\right)/\alpha} = \frac{1 + 4\alpha + 6\alpha^2 + \ldots}{4 + 6\alpha + 4\alpha^2 + \alpha^3} \approx \frac{1 + 4\alpha}{4 + 6\alpha}.$$

$\alpha = \frac{1}{50}$을 대입하면

$$\frac{R}{C} \approx \frac{1 + \frac{4}{50}}{4 + \frac{6}{50}} = \frac{54}{206} = \frac{27}{103},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. 버린 항들의 상대적인 크기는 대략 α^2 정도로, 여기서는 1퍼센트에도 한참 못 미친다.

검산

- $N = 1$이면 공식은 $R/C = 1 + \alpha$를 준다. C를 빌려서 1년 치 이자와 함께 갚는 것이므로 맞다.
- $\alpha \to 0$이면 $(1+\alpha)^N - 1 \approx N\alpha$이므로 $R/C \to 1/N$이다. 이자가 없으면 매년 C/N씩 갚으면 된다. 이는 $r = C/N$과도 일치한다.
- 정확한 값은 $R/C = \frac{6765201}{25760050} \approx 0.26262$이고, $27/103 \approx 0.26214$이므로 둘의 차이는 약 0.2%이다. $R = 0.26262\,C$로 놓고 빚을 한 해씩 계산해 나가면, 4년 뒤에는 (반올림 오차를 제외하면) 남은 빚이 없다.

흔한 실수

- 합에서 지수를 잘못 쓰는 것: R_k는 k년째 말에 갚으므로, 이후 $n - k + 1$년이 아니라 $n - k$년 동안의 이자를 막아 준다.
- 분모에서도 $(1+\alpha)^4 \approx 1 + 4\alpha$로 근사하는 것: 그러면 $R/C \approx 27/100$이라는 더 거친 답이 나와 주어진 결과와 맞지 않는다.

STEP 너머

$\sum(1+\alpha)^{-k}R_k$라는 양은 상환액들의 **현재 가치**(*present value*)이며, 상환액의 현재 가치가 빌린 금액과 같아지는 바로 그때 대출이 청산된다. R에 대한 공식은 표준적인 연금(주택담보대출) 공식(annuity formula)이다. $C_{k+1} = (1+\alpha)C_k - R_k$와 같은 점화식은 1계 선형 차분방정식(first-order linear difference equation)으로, 미분방정식 $y' = \alpha y - R(t)$의 이산적인 사촌이며 같은 "적분인자(integrating factor)" 아이디어로 풀린다. 이처럼 대수와 모델링이 어우러진 문제를 더 보고 싶다면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*를 참고하라.

풀이

STEP I 2002, 문제 9

역학 • 경사면에서의 넘어짐

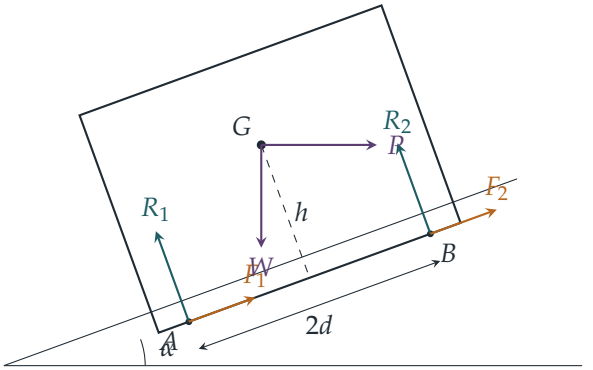
> **STEP I 2002, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/02-s1-q9

핵심 아이디어

트럭은 평형(equilibrium) 상태에 있는 강체(rigid body)이므로 세 개의 방정식을 얻는다. 경사면을 따라 힘을 분해하고(resolve), 경사면에 수직인 방향으로 분해하고, 모멘트(moment)를 취한다. G에 대한 모멘트를 취하는 것이 영리한 선택인데, 무게와 P가 모두 G를 지나므로 식에서 사라지고 바퀴에 작용하는 힘만 남기 때문이다. 이 하나의 방정식이 수직항력(normal reaction)의 차와 마찰력(friction)의 합을 연결하며, 거의 모든 일을 해준다. 그러면 "넘어지지 않는다"는 것은 단순히 어느 수직항력도 음수가 아니라는 뜻이 된다.

풀이

트럭을 바퀴가 경사면의 두 점 A(낮은 쪽)와 B(높은 쪽)에서 경사면에 닿는 강체로 모형화한다. 두 점 사이의 거리는 $2d$이다. A에서의 수직항력을 R_1, B에서의 수직항력을 R_2라 하고, 마찰력을 F_1과 F_2라 하자. 마찰력은 둘 다 경사면 **위쪽**을 양의 방향으로 잡는다(어느 쪽이든 음수로 나올 수 있다). 마찰력은 미끄러짐을 막을 만큼 충분히 크다고 가정한다. 이 문제는 오직 넘어짐에 관한 것이다. 그림에서처럼 P는 경사면 쪽을 향하는 수평 방향의 힘이므로, 경사면 위쪽 방향으로 $P\cos\alpha$, 경사면 안쪽 방향으로 $P\sin\alpha$의 성분을 가진다.



경사면에 수직인 방향과 경사면을 따르는 방향(경사면 위쪽이 양)으로 힘을 분해하면 다음과 같다.

$$R_1 + R_2 = W\cos\alpha + P\sin\alpha, \tag{1}$$

$$F_1 + F_2 = W\sin\alpha - P\cos\alpha. \tag{2}$$

이제 G에 대한 모멘트를 취한다. 무게와 P는 G를 지나며 작용하므로 아무 기여도 하지 않는다. 각 수직항력은 G로부터 수직 거리 d인 곳에 작용하고, 각 마찰력은 경사면을 따라 G로부터 수직 거리 h인 곳에 작용한다. 반시계 방향을 양으로 잡으면(그림에서처럼 경사면이 오른쪽으로 올라가는 경우), R_2는 트럭을 G에 대해 반시계 방향으로 돌리고, R_1은 시계 방향으로 돌리며, G 아래에서 경사면 위쪽으로 작용하는 마찰력은 반시계 방향으로 돌린다. 따라서

$$d(R_2 - R_1) + h(F_1 + F_2) = 0. \tag{3}$$

소문항 (i)

$R_1 = R_2$이면 식 (3)은 $h(F_1 + F_2) = 0$이 된다. $h > 0$이므로 $F_1 + F_2 = 0$이다. 즉 마찰력의 합은 0이고, 이것이 보이려던 것이다.

((2)에 의해 이는 정확히 $P = W\tan\alpha$일 때 일어난다. P의 경사면 위쪽 성분이 무게의 경사면 아래쪽 성분과 정확히 균형을 이루므로, 경사면이 알짜 마찰력을 제공할 필요가 없다.)

소문항 (ii)

(2)를 (3)에 대입하면

$$R_2 - R_1 = \frac{h}{d}(P\cos\alpha - W\sin\alpha),$$

이고, 이를 (1)과 결합하면

$$2R_1 = W\cos\alpha + P\sin\alpha - \frac{h}{d}(P\cos\alpha - W\sin\alpha),$$

$$2R_2 = W\cos\alpha + P\sin\alpha + \frac{h}{d}(P\cos\alpha - W\sin\alpha).$$

? 생각해 보기 "넘어지지 않는다"는 것은 이 방정식들로 보면 무슨 뜻인가?

지면은 바퀴를 밀 수는 있지만 당길 수는 없으므로, 각 수직항력은 $R \geq 0$을 만족해야 한다. 만약 R_2에 대한 식이 음수로 나온다면 높은 쪽 바퀴를 아래로 붙잡아 두어야 한다는 뜻인데, 실제로는 바퀴가 들리고 트럭은 A를 중심으로 회전한다. 마찬가지로 $R_1 < 0$은 B를 중심으로 한 회전을 뜻한다. 따라서 트럭은 정확히 $R_1 \geq 0$이고 $R_2 \geq 0$일 때 똑바로 서 있다.

이하에서는 $\frac{d}{h} = \tan\beta, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, 그리고 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$를 사용한다.

높은 쪽 바퀴가 지면에 붙어 있는 조건$(R_2 \geq 0)$. $2R_2 \geq 0$에 $d/h > 0$을 곱하면

$$\tan\beta\,(W\cos\alpha + P\sin\alpha) + P\cos\alpha - W\sin\alpha \geq 0.$$

$\cos\beta > 0$을 곱하고 항을 정리하면

$$P(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) \geq W(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta),$$

즉

$$P\cos(\alpha-\beta) \geq W\sin(\alpha-\beta).$$

$-\frac{\pi}{2} < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$이므로 $\cos(\alpha-\beta) > 0$이고, 따라서 부등호 방향을 바꾸지 않고 이것으로 나눌 수 있다.

$$P \geq W\tan(\alpha-\beta).$$

낮은 쪽 바퀴가 지면에 붙어 있는 조건$(R_1 \geq 0)$. 같은 방법으로 $2R_1 \geq 0$으로부터

$$\tan\beta\,(W\cos\alpha + P\sin\alpha) - P\cos\alpha + W\sin\alpha \geq 0,$$

을 얻고, $\cos\beta > 0$을 곱하면

$$P(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) \leq W(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta),$$

즉

$$P\cos(\alpha+\beta) \leq W\sin(\alpha+\beta).$$

$\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$라면(주어진 답은 이를 암묵적으로 가정하고 있다. 그렇지 않으면 $\tan(\alpha+\beta)$가 음수이거나 정의되지 않기 때문이다) $\cos(\alpha+\beta) > 0$이고, 나누면

$$P \leq W\tan(\alpha+\beta).$$

반대로 $\alpha + \beta \geq \frac{\pi}{2}$이면, $P \geq 0$일 때 좌변은 ≤ 0이고 우변은 양수이므로, 경사면 쪽을 향하는 수평 방향의 힘은 아무리 커도 트럭을 높은 쪽 바퀴를 넘어 넘어뜨릴 수 없다.

두 조건을 합하면, 트럭이 넘어지지 않을 필요충분조건은

$$W\tan(\alpha-\beta) \leq P \leq W\tan(\alpha+\beta),$$

이며, 이것이 보이려던 결과이다. 미는 힘이 너무 작으면 트럭은 A를 중심으로 경사면 아래쪽으로 넘어지고, 너무 크면 B를 중심으로 경사면 위쪽으로 밀려 넘어진다.

검산

- **기하학적 그림.** 무게와 P는 G를 지나는 하나의 힘으로 합쳐지며, 이 힘은 연직 방향과 각 θ를 이루고 $\tan\theta = P/W$이다. 이 합력이 바퀴의 접촉점을 지날 때 트럭은 막 넘어지려 한다. 직선 GA는 경사면의 법선과 각 β를 이루고, 법선은 연직 방향과 각 α를 이루므로, 합력은 $\theta = \alpha - \beta$일 때 A를 지나고 $\theta = \alpha + \beta$일 때 B를 지난다. 이것이 정확히 두 끝점이다.
- **경사가 없는 경우.** $\alpha = 0$이면 조건은 $|P| \le Wd/h$가 된다. 이는 평평한 지면 위의 상자가 높이 h에서 옆으로 미는 힘을 받을 때 넘어지지 않을 익숙한 조건이다.
- **수치.** $W = 3, \alpha = 0.4, d = 1, h = 1.5$이면 구간은 $-0.571 \le P \le 4.551$이다. 20 000개의 무작위 설정에 대해 $R_1, R_2 \ge 0$을 이 구간과 직접 비교해 보았더니 완전히 일치했으며, 아래쪽 끝에서는 $R_2 = 0$, 위쪽 끝에서는 $R_1 = 0$이었다.

흔한 실수

- G 대신 바퀴에 대한 모멘트를 취하는 것. 그렇게 해도 되지만, 그러면 무게와 P의 모멘트 팔이 다루기 까다로워지고 부호 오류가 생기기 쉽다.
- 마찰력이 G에 대해 모멘트를 가진다는 것을 잊는 것. 마찰력은 경사면, 즉 G보다 거리 h만큼 아래에서 작용하며, 바로 여기서 h가 답에 들어온다.
- $\cos(\alpha \pm \beta)$의 부호를 확인하지 않고 나누는 것. 부등호의 방향을 결정하는 것이 바로 이 부호이다.

STEP 너머

바퀴와 지면 사이의 마찰력은 **부정정**(*statically indeterminate*)이다. 평형 조건은 $F_1 + F_2$만 정해 줄 뿐 F_1과 F_2를 따로 정해 주지는 않으며, 그 배분을 알아내려면 타이어가 어떻게 변형되는지에 대한 모형이 필요하다. 공학자들은 엄밀히 필요한 것보다 더 많은 지지점을 가진 구조물에서 이런 상황을 늘 마주한다. 위의 기하학적 검산은 **합력의 작용선**(*line of action of the resultant*)과 지지 다각형(support polygon)이라는 개념이며, 이는 보행 로봇과 쌓아 올린 블록의 안정성의 바탕이 되기도 한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 강체의 정역학을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP I 2002, 문제 10

역학 • 탄성 충돌

STEP I 2002, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/02-s1-q10

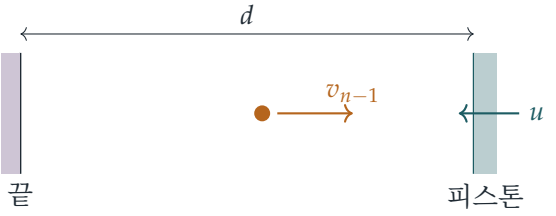
이 문제는 *Beyond STEP*의 10.4 절 **분자 하나와 피스톤**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch10/piston.html

핵심 아이디어

입자보다 훨씬 무거운 벽과의 완전 탄성 충돌(perfectly elastic collision)은 **상대 속도**(relative velocity)를 뒤집는다. 따라서 피스톤의 기준틀(frame of reference)에서 생각하는 것이 가장 쉽다. 그 기준틀에서는 입자가 그저 정지한 벽에 부딪혀 튕겨 나올 뿐이다. 그러므로 피스톤에 한 번 튕길 때마다 속력이 $2u$만큼 늘어나고, 고정된 끝에 튕길 때는 아무것도 변하지 않는다. 거리에 대해서는, 피스톤과의 두 충돌 사이에 입자와 피스톤이 함께 일정한 패턴의 길이를 이동한다는 점에 주목하자. 이로부터 d_{n+1}을 d_n으로 나타내는 일차방정식 하나를 얻는다.

풀이

공기를 입자로, 피스톤을 충돌의 영향을 받지 않고 일정한 속력 u로 움직이는 벽으로, 실린더의 끝을 고정된 벽으로 모형화한다. 모든 운동은 축을 따라 일어나므로, 실린더의 끝에서 피스톤을 향하는 방향을 양의 방향으로 잡는다.



속력

입자가 속력 w로 피스톤에 다가간다고 하자. 피스톤의 속도는 $-u$이므로, 피스톤에 대한 입자의 상대 속도는 (피스톤을 향하여) $w+u$이다. 밀려나지 않는 벽과의 완전 탄성 충돌에서, $e=1$인 뉴턴의 실험 법칙(Newton's experimental law)에 따르면 상대 속도가 뒤집히므로, 충돌 후 피스톤에 대한 입자의 상대 속도는 $-(w+u)$이다. 그러면 입자의 실제 속도는

$$-u-(w+u)=-(w+2u),$$

이므로, 입자는 속력 $w+2u$로 피스톤에서 멀어진다.

실린더의 고정된 끝에서는 같은 법칙이, 벽이 정지해 있으므로 단지 속도를 뒤집을 뿐이다. 즉 속력은 변하지 않는다. 따라서 피스톤과의 연이은 두 충돌 사이에서 입자의 속력은 일정하게 유지된다.

첫 번째 충돌 전에 입자는 속력 v로 피스톤을 향해 움직이므로 $v_1=v+2u$이다. n번째 충돌 직후 입자의 속력은 v_n이다. 입자는 속력의 변화 없이 끝에서 튕겨 나와 속력 v_n으로 다시 피스톤을 만나고, $v_{n+1}=v_n+2u$의 속력으로 떠난다. 귀납법(induction)에 의하여

$$v_n=v+2nu,$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

거리

n번째 충돌과 $(n+1)$번째 충돌 사이(시간 t_n 동안)에 피스톤은 속력 u로 안쪽으로 움직이므로

$$d_n-d_{n+1}=u\,t_n.$$

같은 시간 동안 입자는 일정한 속력 v_n으로 움직이면서 피스톤에서 끝까지(끝은 피스톤이 있던 곳에서 d_n만큼 떨어져 있으므로 거리 d_n) 갔다가, 다시 피스톤까지(피스톤이 지금 있는 곳까지이므로 거리 d_{n+1}) 돌아온다. 따라서

$$d_n+d_{n+1}=v_nt_n.$$

생각해 보기 t_n을 어떻게 없앨 수 있을까?

한 식을 다른 식으로 나눈다. $t_n>0$이므로

$$\frac{d_n+d_{n+1}}{d_n-d_{n+1}}=\frac{v_n}{u}.$$

분모를 양변에 곱하면 $ud_n+ud_{n+1}=v_nd_n-v_nd_{n+1}$이므로

$$(v_n+u)\,d_{n+1}=(v_n-u)\,d_n.$$

$v_n = v + 2nu$이면 $v_n - u = v + (2n-1)u$이고 $v_n + u = v + (2n+1)u$이므로

$$d_{n+1} = \frac{v + (2n-1)u}{v + (2n+1)u}\, d_n,$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

d_n에 대한 공식

점화식(recurrence relation)을 반복하여 적용하면

$$d_n = d_1 \prod_{k=1}^{n-1} \frac{v + (2k-1)u}{v + (2k+1)u} = d_1 \cdot \frac{v+u}{v+3u} \cdot \frac{v+3u}{v+5u} \cdots \frac{v + (2n-3)u}{v + (2n-1)u}.$$

이 곱은 연쇄적으로 소거된다(telescopes). 각 분모가 다음 분자와 약분되어

$$d_n = \frac{v+u}{v + (2n-1)u}\, d_1.$$

만 남는다. 이 식은 $n = 1$일 때도 성립하며, 이때는 $d_1 = d_1$이 된다.

$v = u$인 경우

$v = u$를 대입하면

$$d_n = \frac{2u}{2nu}\, d_1 = \frac{d_1}{n}.$$

그러면 $ut_n = d_n - d_{n+1}$로부터

$$ut_n = \frac{d_1}{n} - \frac{d_1}{n+1} = \frac{d_1}{n(n+1)},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

검산

- $u = 0$이면 피스톤은 고정된 벽이다. 이때 공식은 모든 n에 대하여 $v_n = v$와 $d_n = d_1$을 주며, 마땅히 그래야 한다.
- $u = 1$, $v = 3$, $d_1 = 75$로 두자. 공식은 $d_2 = 50$, $d_3 = 37.5$, $d_4 = 30$과 속력 $5, 7, 9, 11$을 예측한다. 튕김 운동을 (유리수 연산으로) 한 단계씩 정확하게 시뮬레이션하면 정확히 이 값들이 나오며, u, v와 출발 위치를 무작위로 200번 골라도 마찬가지로 일치한다.
- $v = u$일 때 $\sum ut_n = d_1 \sum \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = d_1$이다. 즉 피스톤은 전체적으로 정확히 d_1만큼 이동하여 실린더의 끝에 도달하며, 이는 $d_n = d_1/n \to 0$과 일치한다.

흔한 실수

- $d_n - d_{n+1}$을 잘못 사용하는 것. 예를 들어 입자의 왕복 거리를 $2d_n$으로 잡는 경우이다. 그사이에 피스톤이 움직였으므로 돌아오는 구간은 d_{n+1}뿐이다.
- 충돌할 때마다 $2u$가 아니라 u를 더하는 것. 상대 속도가 뒤집히므로, 입자 속도의 변화는 피스톤이 더해 준 접근 속력의 두 배이다.

STEP 너머

충돌할 때마다 입자의 속력은 일정한 양만큼 변하지만, 간격이 좁아질수록 충돌은 더 잦아지고, n이 클 때 곱 $v_n d_n$은 거의 일정하게 유지된다(여기서는 n이 클 때 $v_n d_n \approx (v+u)d_1$). 이처럼 천천히 변하는 보존량을 **단열 불변량**(*adiabatic invariant*)이라 하며, 많은 분자에 대하여 평균을 내면 이것으로 기체를 빠르게 압축할 때 온도가 올라가는 이유를 설명할 수 있다. 1차원에서 천천히 압축하는 경우 $T \propto 1/L^2$이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 충돌과 기준틀을 더 공부하기에 좋은 다음 단계이다.

풀이

STEP I 2002, 문제 11

역학 • 비스듬한 탄성 충돌

STEP I 2002, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

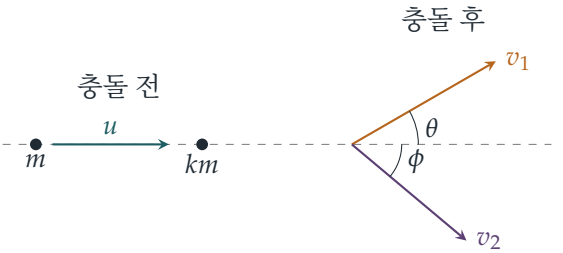
step.maths.org/questions/02-s1-q11

핵심 아이디어

충돌(collision)에서는 두 가지 보존 법칙(conservation law)을 쓸 수 있다. 하나는 운동량(momentum)으로, 벡터(vector)이므로 성분별로 두 개의 방정식을 준다. 다른 하나는 에너지 손실이 없으므로 성립하는 운동 에너지(kinetic energy) 보존이다. 두 운동량 방정식은 충돌 후의 미지의 속력에 대해 일차이므로, 이 속력들을 각으로 나타낼 수 있다. 이것을 에너지 방정식에 대입하면 모든 속력이 사라지고, 각과 k만의 관계식이 남는다.

풀이

P_1과 P_2를 평면 위에서 움직이는 입자로 모형화하고, 충돌하는 동안 외력은 작용하지 않는다고 하자. P_1이 x축을 따라 속력 $u > 0$으로 다가오고, 충돌 후의 속력을 v_1(P_1, 축 위쪽으로 각 θ)과 v_2(P_2, 축 아래쪽으로 각 ϕ)라 하자. 여기서 $0 < \theta < \pi, 0 < \phi < \pi$이다.



항등식

처음 운동 방향과 그에 수직인 방향으로 운동량 보존을 적용하면 (m을 약분한 뒤)

$$v_1 \cos\theta + kv_2 \cos\phi = u,$$
$$v_1 \sin\theta - kv_2 \sin\phi = 0,$$

을 얻는다. 여기서 음의 부호는 P_2가 축의 반대편으로 움직이기 때문이다. 운동 에너지 보존에서 $\frac{1}{2}m$을 약분하면

$$v_1^2 + kv_2^2 = u^2. \qquad (*)$$

운동량 방정식은 두 미지수 v_1과 kv_2에 대한 두 개의 일차방정식이다. 첫째 식에 $\sin\phi$를, 둘째 식에 $\cos\phi$를 곱하여 더하면 kv_2 항이 소거되어

$$v_1(\sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi) = u\sin\phi, \qquad \text{따라서} \qquad v_1 = \frac{u\sin\phi}{\sin(\theta+\phi)}.$$

마찬가지로 첫째 식에 $\sin\theta$를, 둘째 식에 $\cos\theta$를 곱하여 빼면

$$kv_2 = \frac{u\sin\theta}{\sin(\theta+\phi)}.$$

? 생각해 보기 $\sin(\theta+\phi)$로 나누어도 될까?

$\theta + \phi \neq \pi$이어야 한다(이 값은 0과 2π 사이에 엄격히 놓인다). 만약 $\theta+\phi = \pi$이면 $\sin\phi = \sin\theta$이고 $\cos\phi = -\cos\theta$이다. 그러면 둘째 운동량 방정식은 $(v_1 - kv_2)\sin\theta = 0$이 되고, $\sin\theta \neq 0$이므로 $v_1 = kv_2$이다. 이때 첫째 식은 $(v_1 - kv_2)\cos\theta = u$가 되어 $0 = u$를 얻는데, 이는 불가능하다. 따라서 $\sin(\theta+\phi) \neq 0$이고 나눗셈에는 문제가 없다.

이제 kv_2^2를 $(kv_2)^2/k$로 쓰고 $(*)$에 대입하면

$$\frac{u^2\sin^2\phi}{\sin^2(\theta+\phi)} + \frac{u^2\sin^2\theta}{k\sin^2(\theta+\phi)} = u^2.$$

양변에 $k\sin^2(\theta+\phi)/u^2$(0이 아니다)를 곱하면

$$\sin^2\theta + k\sin^2\phi = k\sin^2(\theta+\phi),$$

이므로 증명이 끝난다.

(기하학적으로 보면, 운동량 방정식은 운동량 mv_1, kmv_2, mu가 세 각이 ϕ, θ, $\pi-(\theta+\phi)$인 삼각형을 이룬다는 뜻이고, 위의 두 식은 바로 그 삼각형에서의 사인 법칙(sine rule)이다.)

두 경로가 직각을 이룰 때

두 경로가 직각을 이루면 $\theta + \phi = \frac{\pi}{2}$이므로 $\sin^2(\theta+\phi) = 1$이고 $\sin\theta = \cos\phi$이다. 그러면 항등식은

$$\cos^2\phi + k\sin^2\phi = k, \qquad \text{즉,} \qquad \cos^2\phi = k(1-\sin^2\phi) = k\cos^2\phi.$$

이 된다. 여기서 $\cos\phi \neq 0$이다. 그렇지 않으면 $\phi = \frac{\pi}{2}$이고 따라서 $\theta = 0$인데, 문제에서 θ는 0이 아니라고 했기 때문이다. $\cos^2\phi$로 나누면 $k = 1$을 얻으므로 증명이 끝난다.

검산

- 당구에서 익숙한 사실이 있다. 질량이 같은 두 공 가운데 하나가 정지해 있을 때 탄성 충돌(elastic collision)이 일어나면, 두 공은 직각으로 갈라져 움직인다. 우리의 결과는 그 역(converse)이다.
- 수치 예: $k = 2, \phi = 30°$로 잡자. 그 방향을 따라 매끄러운 탄성 충돌이 일어나면 P_2는 속력 $\frac{2}{3}u\cos 30°$로 튕겨 나가고, P_1은 $\theta = 90°$로 움직인다. 항등식의 양변은 모두 $\frac{3}{2}$이다.
- 또한 무작위 탄성 충돌 2×10^5회(무작위 k, u, 충돌 방향)를 시뮬레이션하였다. 항등식과 v_1, kv_2에 대한 두 공식이 모두 10^{-12} 이내의 오차로 성립하였다.

흔한 실수

- 수직 방향 운동량 방정식을 $v_1\sin\theta + kv_2\sin\phi = 0$으로 쓰는 것: 두 입자는 서로 반대편으로 움직이므로 성분의 부호가 반대이다.
- 에너지 방정식에서 k를 빠뜨리거나, 마지막 단계에서 왜 $\cos\phi \neq 0$인지 밝히지 않는 것.

STEP 너머

질량중심(centre of mass)과 함께 움직이는 좌표계에서 보면, 탄성 충돌은 두 속도의 크기는 그대로 둔 채 방향만 회전시킨다. 이러한 각 관계식들은 모두 가능한 결과들이 이루는 그 원을 실험실 좌표계(laboratory frame)로 되돌려 옮긴 데서 나온다. 이 관점은 당구공에서 입자물리학에 이르기까지 산란(scattering)을 다루는 표준적인 방법이다. 입자물리학에서는 측정한 산란각을 이용해 충돌하는 입자들의 질량비를 알아낸다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 충돌을 질량중심의 관점에서 다루는 방법을 꼼꼼하게 전개한다.

풀이

STEP I 2002, 문제 12

확률과 통계 • 기하학적 확률

STEP I 2002, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/02-s1-q12

핵심 아이디어

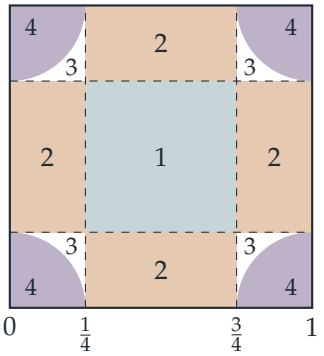
격자는 같은 모양이 반복되므로, "발굽을 무작위로 놓는다"는 것은 곧 발굽의 중심이 한 단위 정사각형 위에 균등하게 분포(uniformly distributed)한다는 뜻이다. 발굽이 몇 개의 칸에 닿는지는 중심이 그 정사각형의 변과 꼭짓점에 얼마나 가까운지에만 달려 있으므로, 각 답은 정사각형 안의 한 영역에 대응하고 그 확률(probability)은 그 영역의 넓이이다. 네 확률을 구하고 나면, 나머지는 그 확률들과 평균을 Harry가 실제로 한 결과와 비교하는 일이다.

풀이

Harry의 답의 분포

발굽의 중심 C가 단위 정사각형 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ 안에 있다고 하자. Harry가 발굽을 무작위로 놓는다면, 격자의 주기성(periodicity)에 의해 C는 이 정사각형 위에 균등하게 분포하므로, C가 어떤 영역에 있을 확률은 그 영역의 넓이이다. 일부라도 덮인 칸의 개수를 N이라 하자.

발굽의 반지름은 $\frac{1}{4}$이고 이는 $\frac{1}{2}$보다 작으므로, 발굽은 세로 격자선을 많아야 하나, 가로 격자선을 많아야 하나 가로지를 수 있다. 발굽이 세로선을 가로지르는 것은 정확히 $x < \frac{1}{4}$ 또는 $x > \frac{3}{4}$일 때이고, 가로선을 가로지르는 것은 정확히 $y < \frac{1}{4}$ 또는 $y > \frac{3}{4}$일 때이다. (선으로부터 거리가 정확히 $\frac{1}{4}$인 위치들은 넓이가 0이므로 무시한다.)



사건 "세로선을 가로지른다"와 "가로선을 가로지른다"의 확률은 각각 $\frac{1}{2}$이고, x와 y가 서로 독립인 균등분포 좌표이므로 두 사건은 독립(independent)이다. 따라서 다음이 성립한다.

- 발굽이 어떤 선도 가로지르지 않으면 $N = 1$이다. 이때 C는 한 변의 길이가 $\frac{1}{2}$인 가운데 정사각형 안에 있으므로 $\mathrm{P}(N = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$이다.
- 정확히 한 선을 가로지르면 $N = 2$이다. $\mathrm{P}(N = 2) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$이다.
- 두 종류의 선을 하나씩 가로지르면, C는 한 변의 길이가 $\frac{1}{4}$인 네 귀퉁이 정사각형 중 하나에 있고, 그 확률은 모두 합해 $\frac{1}{4}$이다. 두 선은 격자의 한 꼭짓점에서 만나며, 발굽이 그 꼭짓점 둘레의 네 칸 모두를 일부라도 덮을 필요충분조건은 발굽이 그 꼭짓점 자체를 덮는 것이다.

생각해 보기 귀퉁이 정사각형 안에서는 왜 답이 격자 꼭짓점까지의 거리에 따라 달라질까?

원점에 가장 가까운 귀퉁이 정사각형, 즉 $0 < x < \frac{1}{4}, 0 < y < \frac{1}{4}$인 부분을 생각하자. 발굽은 C를 포함하는 칸, 그 왼쪽 칸, 그 아래쪽 칸에는 분명히 닿는다. 대각선 방향의 칸 $x < 0$, $y < 0$에서 C에 가장 가까운 점은 원점이고, 그 거리는 $\sqrt{x^2 + y^2}$이므로, 발굽이 이 칸에 들어가는 것은 정확히 $\sqrt{x^2 + y^2} < \frac{1}{4}$일 때이다. 따라서 C가 격자 꼭짓점으로부터 $\frac{1}{4}$ 이내에 있으면 $N = 4$이고, 그렇지 않으면 $N = 3$이다.

단위 정사각형에서 네 꼭짓점 중 하나로부터 $\frac{1}{4}$ 이내에 있는 점들은 반지름 $\frac{1}{4}$인 사분원 네 개를 이루고, 그 넓이의 합은 $\pi\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{\pi}{16}$이다. 그러므로

$$\mathrm{P}(N = 1) = \tfrac{1}{4}, \qquad \mathrm{P}(N = 2) = \tfrac{1}{2}, \qquad \mathrm{P}(N = 3) = \tfrac{1}{4} - \tfrac{\pi}{16}, \qquad \mathrm{P}(N = 4) = \tfrac{\pi}{16}.$$

지금까지의 증거는 무작위로 답하는 말과 들어맞는가?

정답이 $4 \div 4 = 1$일 때, 무작위로 답하는 말이 맞힐 확률은 $\mathrm{P}(N = 1) = \frac{1}{4}$이다. 정답이 $2 + 2 = 4$일 때 맞힐 확률은 $\mathrm{P}(N = 4) = \frac{\pi}{16} \approx 0.196$이다. 이는 관찰된 성공률과 정확히 같

으므로, 그렇다. 증거는 Harry가 그저 발굽을 무작위로 놓고 있을 뿐이라는 내 의심과 완전히 들어맞는다.

답의 기댓값, 그리고 새 말

Harry가 발굽을 무작위로 놓는다면 그의 답은 문제와 무관하므로, 그의 답의 기댓값(expected value)은 그냥 $\mathrm{E}(N)$이다(정답들이 같은 빈도로 나온다는 사실은 아무 역할도 하지 않는다).

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(N) &= 1\cdot\tfrac{1}{4} + 2\cdot\tfrac{1}{2} + 3\left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{\pi}{16}\right) + 4\cdot\tfrac{\pi}{16} \\ &= \tfrac{1}{4} + 1 + \tfrac{3}{4} + \tfrac{\pi}{16} \\ &= 2 + \tfrac{\pi}{16} \approx 2.20.\end{aligned}$$

관찰된 평균 2를 두 가설과 비교해 보자.

- *Harry*가 **올바르게 계산한다**. 정답 $1, 2, 3, 4$가 같은 빈도로 나오므로 평균은 $\frac{5}{2}$여야 한다. 평균 2는 이보다 한참 낮으므로, Harry는 분명히 많은 답을 틀리고 있다. 실제로 틀린 답 하나는 정답보다 많아야 3만큼 작고 평균 부족분이 $\frac{1}{2}$이므로, 그의 답 가운데 적어도 $\frac{1}{6}$은 틀려야 한다.
- *Harry*가 **무작위로 답한다**. 평균은 $2 + \frac{\pi}{16} \approx 2.20$에 가까워야 한다. 답 하나의 분산(variance)은 $\mathrm{E}(N^2) - \mathrm{E}(N)^2 = \frac{9}{2} + \frac{7\pi}{16} - \left(2 + \frac{\pi}{16}\right)^2 \approx 1.05$이므로, 문제 n개에 대한 평균의 표준편차(standard deviation)는 약 $1.02/\sqrt{n}$이다. "많은" 문제(예를 들어 $n = 400$이면 표준편차는 약 0.05)에서 평균 2는 표준편차의 약 네 배만큼 너무 낮으며, 이는 우연히 일어나기 매우 어렵다.

따라서 문제가 많을 때 평균 2는 발굽을 무작위로 놓는 말에게조차 너무 낮다. Harry는 마치 발굽을 살짝 누르거나 칸의 한가운데를 노리는 것처럼 작은 답을 선호하는 듯하다. 어느 쪽이든 Harry는 계산을 하고 있지 않으며, 무작위로 답하는 말보다도 못하다. 그렇다. 새 말을 들일 때가 되었다(이왕이면 산수를 할 줄 아는 말로).

검산

- 네 확률의 합이 맞는다. $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{16} = 1$이고, $\mathrm{P}(N = 3) = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{16} \approx 0.054$는 마땅히 그래야 하듯 양수이다.
- 발굽을 무작위로 400 000번 놓고 중심으로부터 거리 $\frac{1}{4}$ 이내에 있는 칸을 세는 시뮬레이션을 했더니, 상대도수는 0.2495, 0.4990, 0.0547, 0.1968이고 평균은 2.199로, $2 + \frac{\pi}{16} \approx 2.196$과 비교된다.
- 타당성 점검: 발굽이 아주 작다면 답은 거의 언제나 1이고 평균은 1에 가까워질 것이다.

발굽이 더 크면 답이 더 커지며, 우리의 경우는 그 중간에 놓인다.

흔한 실수

- 발굽이 격자선 두 개를 가로지르면 언제나 네 칸을 덮는다고 가정하는 것. 발굽은 두 선이 만나는 꼭짓점에도 닿아야 하며, 바로 이 때문에 π가 나타난다.
- 평균 2가 "2.5보다 낮다"는 이유로 무작위성의 증거로 여기는 것. 무작위성이 예측하는 값은 약 2.2이므로, 평균의 퍼짐을 고려하여 그 값과 비교해야 한다.

STEP 너머

이것은 **기하학적 확률**(*geometric probability*)이다. 한 점이 어떤 영역 위에 균등하게 분포하면 확률은 넓이가 되며, 같은 아이디어로 뷔퐁의 바늘(Buffon's needle) 문제를 풀 수 있는데, 그 답에도 π가 들어 있는 것으로 유명하다. 마지막 부분은 가설검정(hypothesis testing)의 첫 맛보기로, 중심극한정리(central limit theorem)를 이용해 관찰된 평균이 어떤 모형 아래에서 그럴듯한지 판단한다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문서)은 연속 균등분포와, 이런 종류의 논증 뒤에 있는 극한 정리들을 모두 다룬다.

풀이

STEP I 2002, 문제 13

확률과 통계 • 조건부 기댓값

STEP I 2002, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/02-s1-q13

핵심 아이디어

가능한 순서쌍 (U, V)는 여섯 개뿐이므로, 모든 것은 결합 확률(joint probability)을 담은 작은 표 하나와 각 경우에 대한 약간의 계산으로 귀결된다. 이차방정식에서는 U^2이 많아야 1이므로 V의 부호가 모든 것을 결정한다. 삼차방정식에서는 계수들이 U, V와 수상할 정도로 얽혀 있다. 이는 인수분해(factorise)가 된다는 강력한 힌트이며, 일단 인수분해하면 근을 바로 읽어 낼 수 있다.

풀이

먼저 결합 분포(joint distribution)를 구한다. $\mathrm{P}(U = u, V = v) = \mathrm{P}(U = u)\,\mathrm{P}(V = v \mid U = u)$이고 각 u에 대하여 $\mathrm{P}(U = u) = \frac{1}{3}$이므로

	$U = 1$	$U = 0$	$U = -1$
$V = 1$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{9}$
$V = -1$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$

여섯 개의 값을 더하면 마땅히 그래야 하듯 1이 된다.

소문항 (i)

$x^2 + Ux + V = 0$의 두 근이 모두 실수일 필요충분조건은 판별식(discriminant)이 음이 아닌 것, 즉 $U^2 - 4V \geq 0$이다.

- $V = -1$이면 판별식은 $U^2 + 4 > 0$이므로, U의 값에 관계없이 근은 실수이다(그리고 서로 다르다).

- $V=1$이면 $U^2 \le 1$이므로 판별식은 $U^2-4 \le 1-4<0$이다. 따라서 근은 결코 실수가 아니다.

그러므로 두 근이 모두 실수일 필요충분조건은 $V=-1$이고,

$$\mathrm{P}(\text{두 근이 모두 실수}) = \mathrm{P}(V=-1) = \tfrac{2}{9}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{9} = \tfrac{4+3+2}{18} = \tfrac{1}{2},$$

이므로 증명이 끝난다.

소문항 (ii)

소문항 (i)에 의해 "두 근이 모두 실수"라는 조건을 거는 것은 $V=-1$이라는 조건을 거는 것과 같다. 표의 아랫줄을 $\mathrm{P}(V=-1)=\frac{1}{2}$로 나누면 다음을 얻는다.

$$\mathrm{P}(U=1 \mid V=-1)=\tfrac{4}{9}, \qquad \mathrm{P}(U=0 \mid V=-1)=\tfrac{1}{3}, \qquad \mathrm{P}(U=-1 \mid V=-1)=\tfrac{2}{9}.$$

생각해 보기 여기서 왜 그냥 $\mathrm{P}(U=u)=\frac{1}{3}$을 쓸 수 없을까?

U와 V가 독립(independent)이 아니기 때문이다. $V=-1$임을 알면 $U=1$일 가능성이 더 커진다($U=1$일 때 $V=-1$일 확률이 $\frac{2}{3}$이므로). 우리가 구하려는 기댓값(expectation)은 조건부이므로, 가중치도 조건부 확률(conditional probability)이어야 한다.

$V=-1$일 때 방정식은 $x^2+Ux-1=0$이고, 그 큰 근은

$$R=\frac{-U+\sqrt{U^2+4}}{2}.$$

이다. 따라서 $U=1$이면 $R=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$, $U=0$이면 $R=1$, $U=-1$이면 $R=\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$이다. 그러므로

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(R \mid \text{근이 실수}) &= \tfrac{4}{9}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\tfrac{1}{3}\cdot 1+\tfrac{2}{9}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{2}\\ &= \frac{4\sqrt{5}-4+6+2\sqrt{5}+2}{18}\\ &= \frac{6\sqrt{5}+4}{18}=\frac{3\sqrt{5}+2}{9}.\end{aligned}$$

소문항 (iii)

상수항이 U이므로 $(x+U)$라는 인수를 짐작할 수 있다. 실제로

$$\begin{aligned}(x+U)(x^2-2Vx+1) &= x^3-2Vx^2+x+Ux^2-2UVx+U\\ &= x^3+(U-2V)x^2+(1-2UV)x+U,\end{aligned}$$

이고, 이는 주어진 삼차식과 정확히 같다. 따라서 근은 $x = -U$와 $x^2 - 2Vx + 1 = 0$의 근들이다. $V = \pm 1$이면 $V^2 = 1$이므로 이 이차방정식의 판별식은 $4V^2 - 4 = 0$이다. 따라서 이 이차방정식은 중근(repeated root) $x = V$를 가지고, 삼차방정식은

$$(x + U)(x - V)^2 = 0,$$

이 되어 근은 $-U, V, V$이다.

세 근이 모두 양수일 필요충분조건은 $-U > 0$이고 $V > 0$, 즉 $U = -1$이고 $V = 1$인 것이다. ($U = 0$이면 한 근이 0이 되는데, 이는 양수가 아니다.) 표로부터

$$\mathrm{P}(\text{모든 근이 양수}) = \mathrm{P}(U = -1,\, V = 1) = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{2}{3} = \tfrac{2}{9}.$$

검산

- 조건부 확률 $\frac{4}{9}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}$를 더하면 1이다.
- (ii)의 답은 약 0.967이다. 이 값은 큰 근이 가질 수 있는 가장 작은 값 $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \approx 0.618$과 가장 큰 값 $\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) \approx 1.618$ 사이에 있어야 하고, 가장 작은 근에 가장 큰 가중치가 걸리므로 가운데 값 1보다 작아야 한다. 실제로 그렇다.
- (iii)에서 $U = -1$, $V = 1$을 대입해 보면 삼차식은 $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3$이 되어 근은 1, 1, 1로 모두 양수이다. $U = 1$, $V = 1$을 대입해 보면 $x^3 - x^2 - x + 1 = (x + 1)(x - 1)^2$이 되어 음수인 근 -1을 가진다.
- 세 답 모두 여섯 가지 경우를 분수로 정확히 나열하여 확인하였고, 각 경우에 삼차방정식의 근을 수치적으로 구하여서도 확인하였다.

흔한 실수

- (ii)에서 조건 없는 가중치 $\frac{1}{3}$을 사용하면, 그 대신 $\frac{1}{3}(\sqrt{5} + 1) \approx 1.079$를 얻게 된다.
- (iii)에서 $U = 0$인 경우를 포함하는 것: 근 0은 양수가 아니다.
- 인수분해를 찾지 않고 판별식이나 부호 변화로 삼차방정식을 분석하려는 것.

STEP 너머

이 문제의 핵심은 조건부 확률로 가중치를 다시 매겨 계산하는 조건부 기댓값(conditional expectation) $\mathrm{E}(X \mid A)$이다. 대학에서는 이 개념이 그 자체로 하나의 확률변수(random variable)인 조건부 기댓값 $\mathrm{E}(X \mid Y)$와, 어려운 기댓값을 쉽게 구하게 해 주는 탑 법

칙(tower law) $\mathrm{E}\big(\mathrm{E}(X \mid Y)\big) = \mathrm{E}(X)$로 발전한다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)이 이를 명료하게 전개한다.

풀이

STEP I 2002, 문제 14

확률과 통계 • 확률에서의 등비급수

STEP I 2002, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/02-s1-q14

핵심 아이디어

내가 모두 몇 개의 번호를 입력하는지를 조건(conditioning)으로 삼는다. 그 개수가 정해지면 경보가 울린 순간부터 내가 돈을 손에 넣는 순간까지의 시간도 정해지므로, 경찰이 먼저 도착할 확률은 그 시간 t에 대하여 $1-\mathrm{e}^{-\lambda t}$일 뿐이다. 이것을 시도 횟수에 대하여 평균하면 답이 나온다. 두 방법 모두에서 이 평균은 $q=\mathrm{e}^{-\lambda/r}$에 대한 등비급수(geometric series)가 되므로, q에 미리 이름을 붙여 두는 것이 좋다.

풀이

순서대로 입력하는 경우

목록 $1,2,\ldots,n$에서 내 번호의 위치를 K라 하자. 그러면 K는 내가 시도하는 횟수이고, $k=1,\ldots,n$에 대하여 $P(K=k)=\frac{1}{n}$이다.

$K=k$라 하자. 나는 1분에 r개의 속도로 번호를 입력하므로, 연속한 두 번호 사이의 간격은 $1/r$분이다. 시간은 내가 첫 번호를 입력한 순간부터 잰다.

- $k=1$이면 첫 번호가 맞으므로, 틀린 번호는 한 번도 입력되지 않고 경찰도 결코 호출되지 않는다. 경찰이 먼저 도착할 확률은 $0=1-\mathrm{e}^{0}$이다.
- $k\geq 2$이면 첫 번호가 틀리므로 시각 0에 경보가 울리고, 맞는 번호는 k번째로 시각 $(k-1)/r$에 입력된다. 경찰이 $t=(k-1)/r$분 이내에 도착하면 내가 돈을 손에 넣기 전에 도착하는 것이고, 그 확률은 $1-\mathrm{e}^{-\lambda(k-1)/r}$이다.

따라서 식 $1-\mathrm{e}^{-\lambda(k-1)/r}$은 $k=1$을 포함한 모든 k에 대하여 성립한다. 내가 돈을 손에 넣기

전에 경찰이 도착하는 사건을 A라 하자. 전확률 법칙(law of total probability)에 의하여

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(K=k)\,P(A \mid K=k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda(k-1)/r}}{n},$$

이고, 이것이 구하려던 식이다.

간단히 하기 위해 $q = \mathrm{e}^{-\lambda/r}$로 놓는다. $\lambda, r > 0$이므로 $0 < q < 1$이고, $\mathrm{e}^{-\lambda(k-1)/r} = q^{k-1}$이다. 따라서

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = 1 - \frac{1-q^n}{n(1-q)} \\ &= 1 - \frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda n/r}}{n\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda/r}\right)}, \end{aligned}$$

이다. 여기서 등비급수의 합을 구했는데, $q \neq 1$이므로 이는 타당하다.

무작위로 입력하는 경우

이제 각 시도는 이전 시도와 독립적으로 $1, \ldots, n$에서 균등하게 새로 고른 번호이다(나는 무엇을 시도했는지 기억하지 못한다). 따라서 각 시도는 서로 독립적으로 확률 $\frac{1}{n}$로 맞는다. 맞는 번호를 포함하여 그때까지의 시도 횟수를 N이라 하면, N은 기하분포(geometric distribution)를 따른다.

$$P(N=k) = \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

> **생각해 보기** 번호가 반복될 수 있을 때에도 시간에 대한 논증이 여전히 성립하는가?

그렇다. 경찰은 첫 번째 틀린 번호에서 호출되며, $N = k \geq 2$이면 그것은 바로 첫 시도, 즉 시각 0이다. 돈은 k번째 시도, 즉 시각 $(k-1)/r$에 나온다. 반복은 N의 분포만 바꿀 뿐 시간 관계는 바꾸지 않는다. 그러므로 앞에서와 똑같이 $P(A \mid N=k) = 1 - q^{k-1}$이고, 이 식은 $k = 1$일 때에도 맞다.

$p = \frac{n-1}{n}$이라 쓰자. 그러면

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n}\,p^{k-1}\left(1-q^{k-1}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty} p^{k-1} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}(pq)^{k-1} \\ &= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1-p} - \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1-pq}. \end{aligned}$$

이다. $0 \leq p < 1$이고 $0 < pq < 1$이므로 두 급수가 모두 수렴(converge)하고, 따라서 합을 둘로 나누어도 된다. 첫째 항은 $\frac{1}{n}\cdot n = 1$인데, 이는 N이 확실히 유한하다는 사실을 말해 줄 뿐이다. 둘째 항에 대해서는

$$n(1-pq) = n - (n-1)q,$$

이므로

$$P(A) = 1 - \frac{1}{n - (n-1)\mathrm{e}^{-\lambda/r}},$$

이고, 이것이 구하려던 식이다.

검산

- $n = 1$이면 틀린 번호가 결코 없으며, 두 식 모두 0을 준다. 첫째 식은 $1 - q^1 = 1 - q$이기 때문이고, 둘째 식은 분모가 1이기 때문이다.
- $\lambda \to \infty$일 때(경찰이 즉시 도착할 때) $q \to 0$이고, 두 답 모두 $1 - \frac{1}{n}$에 가까워진다. 이는 첫 시도가 틀릴 확률이므로, 마땅히 그래야 한다.
- 무작위로 입력하는 쪽이 더 불리해야 한다. $n = 5$, $\lambda = 0.7$, $r = 3$이면 순서대로 입력할 때 0.3382, 무작위로 입력할 때 0.4543을 얻는다. 각각 2×10^5번 시행한 시뮬레이션에서는 0.339와 0.456이 나왔다.

흔한 실수

- $(k-1)/r$ 대신 시각 k/r을 쓰는 것. 시계는 첫 번째 (틀린) 번호에서 시작하므로, k번째 번호는 간격 $k-1$개만큼 뒤에 온다.
- 무작위인 경우에 각 k에 확률 $\frac{1}{n}$을 주거나, 합을 n에서 멈추는 것. 반복이 허용되면 N은 기하분포를 따르며 상한이 없다.

STEP 너머

여기서 경찰의 도착 시간은 지수분포(exponential distribution)를 따르는 확률변수(random variable)이고, 계산하는 것은 확률변수 X에 대한 $P(T < X)$로, X를 조건으로 삼아 구한다. X가 기하분포를 따르면 $E\left(q^X\right)$가 X의 확률생성함수(probability generating function)의 q에서의 값이므로 답이 깔끔한 닫힌 꼴을 갖는다. 실제로 두 답은 모두 $1 - E\left(q^{N-1}\right)$이다. 생성함수와 지수분포는 대학 1학년 확률론의 핵심 내용이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 두 주제를 모두 잘 다룬다.

풀이

STEP II 2002, 문제 1

순수수학 • 치환적분

> **STEP II 2002, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/02-s2-q1

핵심 아이디어

배각 공식(double-angle formula)을 쓰면 $1-\cos 2\theta$가 $2\sin^2\theta$로 바뀌고, $\operatorname{cosec}^2\theta$는 보자마자 적분할 수 있는 함수이다. 제시된 치환(substitution) $x=\sin 2\theta$는 $\sqrt{1-x^2}$가 $\cos 2\theta$가 되도록 고안된 것으로, 이 치환을 하면 두 번째 적분이 첫 번째 적분으로 되돌아온다. 마지막 적분에서는 적분 구간의 끝값 1과 $2/\sqrt{3}$이 끝값 1과 $\sqrt{3}/2$의 역수이므로, $y=1/x$를 시도해 보라는 강한 암시가 된다.

풀이

첫 번째 적분

$\cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta$이므로 $1-\cos 2\theta = 2\sin^2\theta$이고, 이 값은 $[\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{4}\pi]$에서 양수이므로 피적분함수(integrand)는 이 구간에서 문제없이 정의된다. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\cot\theta) = -\operatorname{cosec}^2\theta$를 이용하면

$$\begin{aligned}\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1}{1-\cos 2\theta}\,\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/4} \operatorname{cosec}^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\Big[-\cot\theta\Big]_{\pi/6}^{\pi/4} \\ &= \frac{1}{2}\left(\cot\tfrac{\pi}{6} - \cot\tfrac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2},\end{aligned}$$

이므로 요구된 결과를 얻는다.

두 번째 적분

$x=\sin 2\theta$로 놓으면 $\mathrm{d}x = 2\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta$이다. $\theta=\frac{1}{6}\pi$일 때 $x=\sin\frac{1}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}$이고, $\theta=\frac{1}{4}\pi$일 때 $x=\sin\frac{1}{2}\pi=1$이다. θ가 $[\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{4}\pi]$를 움직이는 동안 x는 $\frac{\sqrt{3}}{2}$에서 1까지 계속 증가한다.

생각해 보기 $\sqrt{1-x^2}$는 $\cos 2\theta$와 같은가, 아니면 $-\cos 2\theta$와 같은가?

$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{\cos^2 2\theta} = |\cos 2\theta|$이다. 우리가 다루는 범위에서는 $2\theta \in [\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi]$이고 여기서 $\cos 2\theta \geq 0$이므로 $\sqrt{1-x^2} = \cos 2\theta$이다. 따라서

$$\int_{\sqrt{3}/2}^{1} \frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{2\cos 2\theta}{1-\cos 2\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

첫 번째 적분을 끌어들이기 위해 분자를 분모로 나타내면

$$\frac{\cos 2\theta}{1-\cos 2\theta} = \frac{1-(1-\cos 2\theta)}{1-\cos 2\theta} = \frac{1}{1-\cos 2\theta} - 1.$$

그러므로 첫 번째 결과를 이용하면

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{3}/2}^{1} \frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x &= 2\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1}{1-\cos 2\theta}\,\mathrm{d}\theta - 2\int_{\pi/6}^{\pi/4} 1\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) - 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{6},\end{aligned}$$

이므로 요구된 결과를 얻는다.

마지막 적분

$y = 1/x$로 놓으면 $\mathrm{d}y = -\mathrm{d}x/x^2$이다. $y = 1$일 때 $x = 1$이고, $y = 2/\sqrt{3}$일 때 $x = \sqrt{3}/2$이다. 이 범위에서 $x > 0$이므로

$$\sqrt{y^2-1} = \sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x},$$

$$y\left(y - \sqrt{y^2-1}\right) = \frac{1}{x}\cdot\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}.$$

생각해 보기 $\mathrm{d}y = -\mathrm{d}x/x^2$에서 나온 음의 부호는 어디로 가는가?

치환을 하면 적분 구간의 끝값 순서가 뒤바뀌고, 이를 다시 바꾸어 놓으면 음의 부호가 흡수된다.

$$\begin{aligned}\int_{1}^{2/\sqrt{3}} \frac{1}{y\left(y-\sqrt{y^2-1}\right)}\,\mathrm{d}y &= \int_{1}^{\sqrt{3}/2} \frac{x^2}{1-\sqrt{1-x^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_{\sqrt{3}/2}^{1} \frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

x^2인 인수들이 정확히 약분되는데, 바로 이 때문에 분모에 y라는 인수가 추가로 들어가 있었던 것이다.

검산

- 두 번째와 세 번째 적분의 피적분함수는 모두 양수이므로 답도 양수여야 한다. 실제로 $\sqrt{3}-1-\frac{\pi}{6} \approx 0.73205 - 0.52360 = 0.20845$이다.
- 세 적분 각각에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면 첫 번째 적분은 $0.366025\ldots$($\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}$와 일치)이고, 두 번째와 세 번째 적분은 $0.208452\ldots$($\sqrt{3}-1-\frac{\pi}{6}$와 일치)이다.
- 대략적인 어림: 두 번째 적분에서 구간의 길이는 $1-\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.134$이고 피적분함수는 2($x=\frac{\sqrt{3}}{2}$에서)부터 1($x=1$에서)까지 줄어들므로, 적분값은 0.134와 0.268 사이에 있어야 한다. 실제로 그렇다.

흔한 실수

- 범위에서 $\cos 2\theta$의 부호를 확인하지 않고 $\sqrt{1-\sin^2 2\theta} = \cos 2\theta$라고 쓰는 것.
- 적분 구간의 끝값을 바꾸는 것을 잊거나, $y=1/x$로 끝값의 순서가 뒤바뀔 때 음의 부호를 놓치는 것.
- $\left[-\cot\theta\right]$를 $\cot\frac{\pi}{4}-\cot\frac{\pi}{6}$로 계산하는 것. 이렇게 하면 크기는 맞지만 부호가 틀린다.

STEP 너머

마지막 부분은 일반적인 원리의 작은 예이다. 치환은 변수 변환(change of variables)으로, 한 적분을 다른 적분으로 정확히 옮겨 놓을 수 있으며, 적분 구간의 끝값이 서로 역수임을 알아차리면 $y=1/x$가 그 역할을 해 줄 것이라는 믿을 만한 단서가 된다. 대학의 첫 해석학(analysis) 강좌에서는 치환적분을 연쇄 법칙(chain rule)과 미적분학의 기본정리(fundamental theorem of calculus)로부터 엄밀하게 정당화하며, 이때 치환이 단조(monotonic)인 범위와 피적분함수가 연속(continuous)인 범위에 주의를 기울이는데, 이는 바로 여기서 우리가 확인한 조건들이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 이러한 계산 뒤에 있는 이론을 명료하게 설명한다.

풀이

STEP II 2002, 문제 2

순수수학 • 상반방정식

> **STEP II 2002, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/02-s2-q2

핵심 아이디어

계수(coefficient)를 바깥쪽에서 안쪽으로 차례로 살펴보자. 1과 1, 그다음 5와 -5, 그리고 가운데에 4가 있다. 계수가 짝을 이루어 같거나 부호만 반대이면, 가운데 차수의 z 거듭제곱으로 나누었을 때 $z^k + z^{-k}$와 $z^k - z^{-k}$의 결합만 남고, 이들은 각각 $w = z - z^{-1}$에 대한 다항식(polynomial)이다. 그러면 차수가 절반으로 줄어든다. 8차방정식도 같은 구조를 가지며, 한 번 차수를 줄이고 나면 다시 같은 구조가 나타나므로 이 방법을 두 번 쓰게 된다.

풀이

사차방정식

상수항이 1이므로 $z = 0$은 근(root)이 아니다. 따라서 z^2으로 나눌 수 있다.

$$z^2 + 5z + 4 - 5z^{-1} + z^{-2} = 0, \qquad \text{즉,} \qquad \left(z^2 + z^{-2}\right) + 5\left(z - z^{-1}\right) + 4 = 0.$$

$w = z - z^{-1}$로 두면 $w^2 = z^2 - 2 + z^{-2}$이므로 $z^2 + z^{-2} = w^2 + 2$이다. 이를 대입하면

$$(w^2 + 2) + 5w + 4 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad w^2 + 5w + 6 = 0,$$

이 되어 요구된 식을 얻는다. 이 식은 $(w + 2)(w + 3) = 0$으로 인수분해(factorise)되므로 $w = -2$ 또는 $w = -3$이다.

z로 되돌아가기 위해 $z - z^{-1} = w$의 양변에 z를 곱하면

$$z^2 - wz - 1 = 0.$$

▶ $w = -2$: $z^2 + 2z - 1 = 0$이므로 $z = -1 \pm \sqrt{2}$이다.

▶ $w=-3$: $z^2+3z-1=0$이므로 $z=\frac{1}{2}\left(-3\pm\sqrt{13}\right)$이다.

이 서로 다른 네 값이 사차방정식(quartic)의 근이다.

$$z=-1\pm\sqrt{2},\qquad z=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}.$$

8차방정식

이번에도 $z=0$은 근이 아니므로 z^4으로 나누고, 가운데를 중심으로 대칭인 계수끼리 짝을 짓는다.

$$2\left(z^4+z^{-4}\right)-3\left(z^3-z^{-3}\right)-12\left(z^2+z^{-2}\right)+12\left(z-z^{-1}\right)+22=0.$$

(짝을 확인해 보자. z^8과 z^0은 모두 계수가 2이고, z^7은 -3, z^1은 $+3$이며, z^6과 z^2는 모두 -12이고, z^5는 12, z^3은 -12이다.)

각 괄호를 $w=z-z^{-1}$로 나타내야 한다. $z^2+z^{-2}=w^2+2$는 이미 알고 있다. 세제곱하면

$$w^3=z^3-3z+3z^{-1}-z^{-3}\quad\Longrightarrow\quad z^3-z^{-3}=w^3+3w,$$

이고, z^2+z^{-2}를 제곱하면

$$z^4+z^{-4}=\left(z^2+z^{-2}\right)^2-2=(w^2+2)^2-2=w^4+4w^2+2.$$

이를 대입하면

$$\begin{aligned}0&=2(w^4+4w^2+2)-3(w^3+3w)-12(w^2+2)+12w+22\\&=2w^4-3w^3-4w^2+3w+2.\end{aligned}$$

? 생각해 보기 w에 대한 사차방정식이 남았다. 무언가 얻은 것이 있는가?

그렇다. 계수 2, -3, -4, 3, 2를 보자. 앞에서와 정확히 같은 패턴(바깥쪽 짝은 같고, 그다음 짝은 부호가 반대)이므로 한 단계 아래에서 같은 방법을 쓸 수 있다. $w=0$은 근이 아니므로 w^2으로 나누면

$$2\left(w^2+w^{-2}\right)-3\left(w-w^{-1}\right)-4=0.$$

$v=w-w^{-1}$로 두면 $w^2+w^{-2}=v^2+2$이므로

$$2(v^2+2)-3v-4=0\quad\Longleftrightarrow\quad 2v^2-3v=0\quad\Longleftrightarrow\quad v(2v-3)=0.$$

따라서 $v=0$ 또는 $v=\frac{3}{2}$이다. 이제 $w^2-vw-1=0$을 이용해 거꾸로 풀어 나간다.

▶ $v=0$: $w^2=1$이므로 $w=\pm1$이다.

- $v = \frac{3}{2}$: $2w^2 - 3w - 2 = 0$, 즉 $(2w+1)(w-2) = 0$이므로 $w = 2$ 또는 $w = -\frac{1}{2}$이다.

마지막으로 $z^2 - wz - 1 = 0$을 이용해 한 번 더 되돌아간다.

- $w = 1$: $z^2 - z - 1 = 0$이므로 $z = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{5}\right)$이다.
- $w = -1$: $z^2 + z - 1 = 0$이므로 $z = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{5}\right)$이다.
- $w = 2$: $z^2 - 2z - 1 = 0$이므로 $z = 1 \pm \sqrt{2}$이다.
- $w = -\frac{1}{2}$: $2z^2 + z - 2 = 0$이므로 $z = \frac{1}{4}\left(-1 \pm \sqrt{17}\right)$이다.

각 이차방정식 $z^2 - wz - 1 = 0$의 판별식(discriminant)은 $w^2 + 4 > 0$이므로 이 근들은 모두 실수이며, 여덟 개의 값은 서로 다르다. 8차 다항식은 근을 많아야 여덟 개 가지므로, 이것이 근 전부이다.

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \qquad z = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, \qquad z = 1 \pm \sqrt{2}, \qquad z = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}.$$

검산

- $z^2 - wz - 1 = 0$에서 나온 각 근의 쌍은 곱이 -1이므로 계산을 빠르게 확인할 수 있다. 예를 들어 $(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) = -1$이다.
- 8차방정식에서 근의 합은 $\frac{3}{2}$(즉 z^7의 계수를 z^8의 계수로 나눈 값에 음의 부호를 붙인 것)이어야 한다. 네 쌍의 기여는 $1 - 1 + 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$이다. 맞다.
- 수치적으로 $z = \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{17}) \approx 0.7808$을 대입하면 8차 다항식의 값이 10^{-9} 이내로 0이 되며, 나머지 일곱 근과 사차방정식의 네 근도 마찬가지이다.

흔한 실수

- $z^3 - z^{-3} = w^3$이라고 쓰는 것. 교차항에서 $3w$가 추가로 나온다.
- w에 대한 사차방정식에서 멈추고, 그 계수가 같은 대칭성을 가진다는 것을 알아차리지 못한 채 시행착오로 인수분해하려 하는 것.
- w(또는 v)의 값만 구하고 z로 되돌아가는 것을 잊는 것.

STEP 너머

계수를 거꾸로 읽어도 같은(또는 부호가 번갈아 바뀌는 것을 제외하면 같은) 다항식을 **상반**(reciprocal) 다항식 또는 **회문**(palindromic) 다항식이라고 한다. 이러한 다항식의 근은

$z \mapsto 1/z$ 또는 $z \mapsto -1/z$로 연결되는 쌍으로 나타나며, 여기서 쓴 치환(substitution)은 바로 이 대칭성이 허락하는 차수 줄이기이다. 갈루아(Galois) 이론에서는 이를 방정식이 근들의 어떤 변환군에 대해 불변이라는 관찰로 이해하며, 따라서 방정식을 더 작은 방정식들의 탑을 거쳐 단계적으로 풀 수 있다. 여기서 일어난 일이 바로 그것이다. 8차에서 4차로, 다시 2차로 내려갔다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 이러한 아이디어가 발전해 가는 모습을 보기에 좋은 책이다.

풀이

STEP II 2002, 문제 3

순수수학 • 페르마 수와 소수

STEP II 2002, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/02-s2-q3

이 문제는 *Beyond STEP*의 1.1 절 **소수 공장**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch01/fermat-numbers.html

핵심 아이디어

$F_k - 2 = 2^{2^k} - 1$로 쓴다. 이것에 $F_k = 2^{2^k} + 1$을 곱하면 제곱의 차(difference of two squares)가 되는데, 바로 이것이 귀납법(induction)에 필요한 단계이다. 곱셈 공식이 성립하고 나면, 두 페르마 수(Fermat number)의 공약수는 모두 2의 약수여야 한다. 모든 페르마 수는 홀수이므로 그 공약수는 1일 수밖에 없다.

풀이

처음 네 개의 페르마 수

$2^0 = 1, 2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8$이므로

$$F_0 = 2^1 + 1 = 3, \qquad F_1 = 2^2 + 1 = 5, \qquad F_2 = 2^4 + 1 = 17, \qquad F_3 = 2^8 + 1 = 257.$$

이제 k의 처음 세 값에 대하여 $(*)$을 확인한다.

$$\begin{aligned} k = 1: &\quad F_0 = 3 = 5 - 2 = F_1 - 2, \\ k = 2: &\quad F_0 F_1 = 15 = 17 - 2 = F_2 - 2, \\ k = 3: &\quad F_0 F_1 F_2 = 15 \times 17 = 255 = 257 - 2 = F_3 - 2. \end{aligned}$$

모든 $k \geq 1$에 대한 $(*)$의 증명

k에 대한 귀납법을 쓴다. $k = 1$인 경우는 위에서 확인하였다.

어떤 $k \geq 1$에 대하여 $(*)$이 성립한다고 가정하자. 즉 $F_0F_1 \cdots F_{k-1} = F_k - 2$이다. 그러면

$$\begin{aligned} F_0F_1 \cdots F_{k-1}F_k &= (F_k - 2)\,F_k \\ &= \left(2^{2^k} - 1\right)\left(2^{2^k} + 1\right) \\ &= \left(2^{2^k}\right)^2 - 1 \\ &= 2^{2\cdot 2^k} - 1 = 2^{2^{k+1}} - 1 \\ &= F_{k+1} - 2. \end{aligned}$$

따라서 $(*)$은 $k+1$에 대해서도 성립하고, 귀납법에 의하여 모든 $k \geq 1$에 대하여 성립한다.

? **생각해 보기** $\left(2^{2^k}\right)^2$이 $2^{2^{2k}}$나 다른 무엇이 아니라 $2^{2^{k+1}}$과 같은 이유는 무엇인가?

거듭제곱을 제곱하면 지수(exponent)가 두 배가 된다. 즉 $\left(2^a\right)^2 = 2^{2a}$이다. 여기서 $a = 2^k$이고 $2a = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$이다. 귀납 단계에서 하는 일의 대부분은 이처럼 지수가 겹겹이 쌓인 식을 조심스럽게 다루는 것이다.

어떤 두 페르마 수도 공약수를 갖지 않는다

서로 다른 두 페르마 수 F_m과 F_n을 잡고 $m < n$이라 하자. 그러면 $n \geq 1$이고, F_m은 $k = n$일 때 $(*)$의 인수 $F_0, \ldots, F_{n-1}$ 중 하나이다. 따라서

$$F_n - 2 = F_m \times (\text{정수}),$$

즉 F_m은 $F_n - 2$를 나눈다.

이제 양의 정수 d가 F_m과 F_n을 모두 나눈다고 가정하자. $d \mid F_m$이고 $F_m \mid F_n - 2$이므로 $d \mid F_n - 2$이다. d는 F_n도 나누므로 그 차도 나눈다.

$$d \mid F_n - (F_n - 2) = 2,$$

따라서 $d = 1$ 또는 $d = 2$이다. 그런데 $F_m = 2^{2^m} + 1$은 짝수에 1을 더한 수이므로 홀수이다($2^m \geq 1$임에 주의한다). 그러므로 $d \neq 2$이고, 따라서 $d = 1$이다. 결국 어떤 두 페르마 수도 1보다 큰 공약수를 갖지 않는다.

무한히 많은 소수

각 F_n은 3 이상이므로 적어도 하나의 소인수(prime factor)를 갖는다. 그중 하나를 골라 p_n이라 하자. 그러면 각 $n = 0, 1, 2, \ldots$에 대하여 소수가 하나씩 생긴다.

생각해 보기 서로 다른 두 페르마 수가 같은 소수를 줄 수도 있지 않을까?

그렇지 않다. $m \neq n$인데 $p_m = p_n$이라면, 그 소수는 F_m과 F_n을 모두 나눈다. 그러면 그것은 1보다 큰 공약수가 되는데, 이는 앞 부분에서 배제하였다. 따라서 소수 $p_0, p_1, p_2, \ldots$은 모두 다르다. 페르마 수는 무한히 많으므로 서로 다른 소수도 무한히 많다.

F_n 자체가 소수일 필요는 전혀 없었다는 점에 주목하자. 필요한 것은 각 페르마 수가 다른 어떤 페르마 수와도 공유하지 않는 **어떤** 소인수를 갖는다는 사실뿐이다.

검산

- $k = 4$일 때의 $(*)$: $255 \times 257 = 65535 = 65537 - 2 = F_4 - 2$. 또한 12 이하의 모든 k에 대하여 컴퓨터로 $(*)$을 정확히 확인하였다.
- $F_0, \ldots, F_5$의 가장 작은 소인수는 $3, 5, 17, 257, 65537, 641$로, 논증이 예측한 대로 모두 다르다. $F_5 = 4294967297 = 641 \times 6700417$은 소수가 아닌 최초의 페르마 수이다.
- $0 \leq m < n \leq 10$인 모든 경우에 $\gcd(F_m, F_n) = 1$임을 수치적으로 확인하였다.

흔한 실수

- 2^{2^n}을 $(2^2)^n = 4^n$으로 읽는 것. 지수는 2^n이므로 $F_3 = 2^8 + 1$이지 $4^3 + 1$이 아니다.
- $d \mid 2$를 얻은 뒤 $d = 2$를 배제하는 것을 잊는 것. 논증을 마무리하는 것은 페르마 수가 홀수라는 사실이다.
- 모든 페르마 수가 소수라고 가정하는 것. 마지막 부분은 이 가정 없이도 성립하며, 어차피 이 가정은 거짓이다$(641 \mid F_5)$.

STEP 너머

이 증명은 폴리아(Pólya)가 제시한 것이다. 이는 소수가 무한히 많음을 보이는 증명들의 한 갈래에 속한다. 이 증명들은 모두 쌍마다 서로소(pairwise coprime)인 정수들의 무한수열을 만들고, 그러면 각 항이 저마다 새로운 소수를 하나씩 내놓는다. 유클리드(Euclid)의 증명도 같은 방식으로 읽을 수 있다. 페르마 수는 정수론 강의에서 다시 등장한다. 가우스(Gauss)는 정n각형을 자와 컴퍼스로 작도할 수 있는 것은 n이 2의 거듭제곱과 서로 다른 페르마 소수들의 곱을 곱한 꼴일 때, 그리고 그때뿐임을 보였다. 그리고 F_4보다 큰 페르마 소수는 알려져 있지 않다. 더 알고 싶다면 Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)을 읽어 보라.

풀이

STEP II 2002, 문제 4

순수수학 • 적분에서 얻는 부등식

> **STEP II 2002, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/02-s2-q4

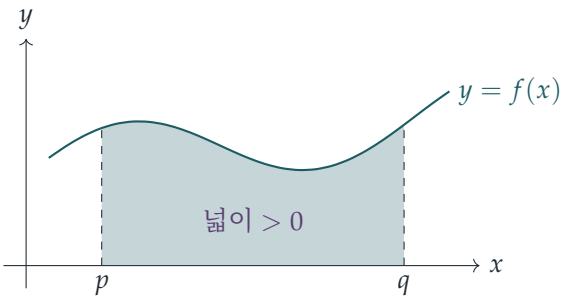
핵심 아이디어

$a > 0$이고 $b^2 < 4ac$인 이차식(quadratic) $as^2 - bs + c$는 실근(real root)이 없고 최고차항 계수(leading coefficient)가 양수이므로, **모든** 실수 s에 대하여 양수이다. s 자리에 무엇을 대입하든(x, $\sin x$ 또는 $1/x$), 그 결과로 얻는 함수는 양수이므로 어떤 구간에서 적분(integral)하더라도 그 값은 양수이다. 따라서 각 문항에서는 적분값이 요구하는 부등식(inequality)에 나오는 수와 정확히 같아지도록 치환(substitution)과 구간을 고르기만 하면 된다.

풀이

먼저 그려 보기

적분 $\int_p^q f(x)\,\mathrm{d}x$는 $x = p$부터 $x = q$까지 곡선 $y = f(x)$와 x축 사이의 부호 있는 넓이(signed area)이다. 축 위쪽의 넓이는 양수로, 아래쪽의 넓이는 음수로 센다. $p < x < q$ 전체에서 $f(x) > 0$이면 그 구간에서 곡선 전체가 축 위에 있으므로, 영역에는 음수 부분이 없고 실제로 (0이 아닌) 넓이를 가진다. 따라서 적분값은 엄밀히 양수이다. (이 문제에 나오는 함수는 모두 연속(continuous)이므로 넓이가 잘 정의된다.)



모든 문항에서 쓰는 사실

$a > 0$이고 $b^2 < 4ac$일 때 $g(s) = as^2 - bs + c$라 하자. 완전제곱식(completing the square)으로 고치면

$$g(s) = a\left(s - \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

$a > 0$이므로 첫째 항은 0 이상이고, $4ac - b^2 > 0$이고 $a > 0$이므로 둘째 항은 엄밀히 양수이다. 따라서 모든 실수 s에 대하여 $g(s) > 0$이다.

소문항 (i)

$f(x) = ax^2 - bx + c = g(x)$로 놓으면, 이 함수는 모든 x에 대하여 양수이다. 원하는 어떤 구간에서 적분해도 되는데, $[0, 1]$을 택하면 가장 간단한 수가 나온다.

$$0 < \int_0^1 (ax^2 - bx + c)\,\mathrm{d}x = \frac{a}{3} - \frac{b}{2} + c.$$

양변에 6을 곱하면 $2a - 3b + 6c > 0$, 즉 $3b < 2a + 6c$이므로 증명이 끝난다.

소문항 (ii)

이번에는 $f(x) = a\sin^2 x - b\sin x + c = g(\sin x)$이다. g는 모든 실수에서 양수이므로 당연히 $\sin x$에서도 양수이고, 따라서 모든 x에 대하여 $f(x) > 0$이다.

> **생각해 보기** 어떤 구간에서 적분해야 할까?

목표 부등식에서 π는 a와 c에는 곱해져 있지만 b에는 곱해져 있지 않다. $[0, \frac{\pi}{2}]$에서 $\int \sin x\,\mathrm{d}x = 1$에는 π가 없지만, $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$와 $\int 1\,\mathrm{d}x$에는 있다. $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$를 이용하면

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}, \qquad \int_0^{\pi/2} \sin x\,\mathrm{d}x = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi/2} = 1.$$

따라서

$$0 < \int_0^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a\pi}{4} - b + \frac{c\pi}{2}.$$

양변에 4를 곱하면 $a\pi + 2c\pi - 4b > 0$, 즉 $4b < (a+2c)\pi$이므로 증명이 끝난다.

소문항 (iii)

? **생각해 보기** 어떤 함수를 적분해야 $\ln(q/p)$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, $q-p$가 나올까?

이 값들은 각각 $\int_p^q \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$, $\int_p^q \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$, $\int_p^q 1\,\mathrm{d}x$이다. 그러므로

$$f(x) = \frac{a}{x^2} - \frac{b}{x} + c = g\left(\frac{1}{x}\right),$$

로 놓는다. 이 함수는 $x > 0$에서 정의되고 연속이며, g가 모든 곳에서 양수이므로 그 범위에서 양수이다. $q > p > 0$이므로 구간 $[p, q]$는 $x = 0$을 포함하지 않고, 따라서

$$\begin{aligned} 0 < \int_p^q \left(\frac{a}{x^2} - \frac{b}{x} + c\right)\mathrm{d}x &= \left[-\frac{a}{x} - b\ln x + cx\right]_p^q \\ &= a\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) - b\ln\frac{q}{p} + c(q-p). \end{aligned}$$

이항하여 정리하면 $b\ln(q/p) < a\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) + c(q-p)$이므로 증명이 끝난다. (조건 $p > 0$ 덕분에 두 로그가 모두 정의되어 $\ln q - \ln p = \ln(q/p)$로 쓸 수도 있다.)

검산

$a = b = c = 1$로 놓으면 $b^2 = 1 < 4 = 4ac$이다. 이때 (i)은 $3 < 8$, (ii)는 $4 < 3\pi \approx 9.42$가 되고, (iii)은 $p = 1$, $q = 2$일 때 $\ln 2 \approx 0.693 < \frac{1}{2} + 1 = 1.5$가 된다. 모두 성립한다. 또한 조건을 만족하는 20 000개의 무작위 순서쌍 (a, b, c)에 대하여, b^2이 $4ac$보다 아주 조금 작은 경우까지 포함해 세 부등식을 모두 시험해 보았고, 각 적분값을 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 확인하였다. 조건이 없으면 부등식이 성립하지 않을 수 있다는 점에 주의하자. 예를 들어 $a = 1$, $b = 10$, $c = 1$이면 $30 > 8$이므로 (i)이 성립하지 않는다.

흔한 실수

- $f > 0$임을 정당화하지 않는 것. 조건 $a > 0$과 $b^2 < 4ac$가 바로 이차식을 양수로 만드는 조건이며, 이 점을 반드시 밝혀야 한다.
- (ii)에서 $\frac{\pi}{4}$ 대신 $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$로 계산하는 것.
- (iii)에서 $p > 0$이므로 (f가 정의되지 않는) $x = 0$이 구간에 들어가지 않는다는 점을 언급하지 않는 것.

STEP 너머

"양의 연속함수의 적분은 양수이다"라는 원리는 대학 첫 해석학(analysis) 강의에서 리만 적분(Riemann integral)에 대하여 증명하는 기본 성질 가운데 하나이다. 이 성질은 선형성(linearity)과 함께 여러 고전적인 부등식의 원천이 된다. 그 가운데 하나가 적분 형태의 코시-슈바르츠(Cauchy–Schwarz) 부등식인데, 이는 제곱 $(f + tg)^2 \geq 0$을 적분한 뒤 여기서와 같은 판별식(discriminant) 논법을 쓰면 얻어진다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)는 바로 이런 관점에서 적분을 꼼꼼하게 전개한다.

풀이

STEP II 2002, 문제 5

순수수학 • 로지스틱 사상의 반복

> **STEP II 2002, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/02-s2-q5

핵심 아이디어

모든 것은 포물선(parabola) $y = kx(1-x)$에 달려 있다. 이 포물선은 $[0,1]$에서 $x = \frac{1}{2}$일 때 최댓값 $\frac{k}{4}$를 가진다. 이 사실 하나만으로 수학적 귀납법(induction)을 써서 소문항 (i)이 해결된다. 소문항 (ii)와 (iii)은 각각 고정점(fixed point)과 주기(period)가 2인 점을 묻는다. (iii)의 요령은 x_1을 b로 나타내는 것이다: $x_1 = ka(1-a) = ab$. 그러면 $x_2 = a$는 b에 대한 삼차방정식(cubic)이 되고, 이 삼차방정식에는 눈에 띄는 근(root)이 하나 있는데, 그것이 바로 (ii)의 고정점이다.

풀이

소문항 (i)

n에 대한 수학적 귀납법을 쓴다. $n = 0$인 경우는 주어져 있다. $0 < x_n < 1$이라고 가정하자. 그러면 $x_n > 0$이고 $1 - x_n > 0$이므로 $x_n(1-x_n) > 0$이다. 완전제곱식을 만들면

$$x_n(1-x_n) = \frac{1}{4} - \left(x_n - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}.$$

$0 < k < 4$이므로 양변에 k를 곱해도 부등호의 방향은 그대로이고,

$$0 < x_{n+1} = kx_n(1-x_n) \leq \frac{k}{4} < 1.$$

따라서 $0 < x_{n+1} < 1$이고, 수학적 귀납법에 의해 모든 n에 대해 $0 < x_n < 1$이다. 각 가정이 어디에 쓰였는지 눈여겨보자. 아래쪽 경계에는 $k > 0$이, 위쪽 경계에는 $k < 4$가 쓰였다.

소문항 (ii)

수열이 상수수열이 되려면 $x_1 = x_0$, 즉 $a = ka(1-a)$이기만 하면 된다. $a \neq 0$이므로 양변을 a로 나누어 $1 = k(1-a)$를 얻고, $a \neq 1$이므로 $1-a$로 나눌 수 있다:

$$k = \frac{1}{1-a}.$$

역으로, 이 k에 대해 $x_1 = a$이므로 그 뒤의 모든 항도 a이다.

소문항 (iii)

$b = k(1-a)$로 두면

$$x_1 = ka(1-a) = ab.$$

$x_2 = a$이면 수열은 주기 2로 반복되므로, 조건 전체는 결국 $x_2 = a$일 뿐이다:

$$k\,(ab)(1-ab) = a.$$

$a \neq 0$으로 나누면 $kb(1-ab) = 1$이다. $a \neq 1$이므로 $k = \dfrac{b}{1-a}$로 쓸 수 있고, 따라서

$$\frac{b^2(1-ab)}{1-a} = 1 \quad\Longrightarrow\quad b^2 - ab^3 = 1-a \quad\Longrightarrow\quad ab^3 - b^2 + (1-a) = 0,$$

이것이 구하는 결과이다.

생각해 보기 이 삼차방정식의 근 가운데 바로 알아볼 수 있는 것은 무엇이며, 그것은 무엇을 뜻하는가?

$b = 1$을 대입하면 $a - 1 + 1 - a = 0$이므로 $b = 1$은 근이다. 그런데 $b = 1$은 $k(1-a) = 1$을 뜻하고, 이는 소문항 (ii)의 고정점이다: 이때 $x_1 = ab = a$이다. 따라서 추가 조건 $x_1 \neq a$, 즉 $ab \neq a$는 정확히 $b \neq 1$과 같다. 인수 $b-1$로 나누면

$$ab^3 - b^2 + (1-a) = (b-1)\big(ab^2 + (a-1)b + (a-1)\big),$$

이며, 이는 전개해 보면 확인할 수 있다. 따라서 b는

$$ab^2 - (1-a)b - (1-a) = 0$$

의 근 가운데 1이 아닌 것이어야 한다. $a \neq 0$이므로 이것은 실제로 이차방정식(quadratic)이고,

$$b = \frac{(1-a) \pm \sqrt{(1-a)^2 + 4a(1-a)}}{2a} = \frac{(1-a) \pm \sqrt{(1-a)(1+3a)}}{2a}.$$

실근을 가지려면 $(1-a)(1+3a) \geq 0$이어야 하고, 이는 $-\frac{1}{3} \leq a \leq 1$을 뜻한다. $a \neq 0, 1$이므로 $-\frac{1}{3} \leq a < 1, a \neq 0$이 남는다. 그 밖의 a에 대해서는 조건을 만족하는 실수 k가 없다.

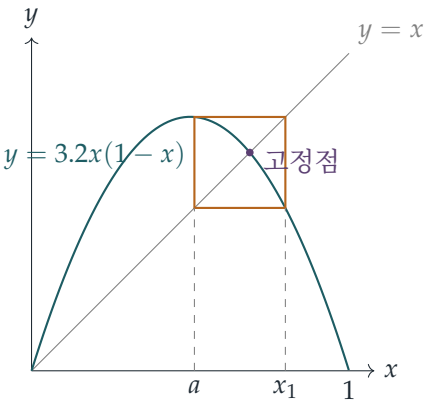
이 범위에서는 $1-a>0$이므로, $\sqrt{(1-a)(1+3a)}/(1-a)=\sqrt{(1+3a)/(1-a)}$를 이용해 $1-a$로 나누면 $k=b/(1-a)$를 깔끔한 꼴로 얻는다:

$$\boxed{k=\frac{1}{2a}\left(1\pm\sqrt{\frac{1+3a}{1-a}}\right),\qquad -\tfrac{1}{3}\le a<1,\ a\neq 0.}$$

마지막으로 할 일이 하나 있다. 두 값 가운데 어느 것도 제외된 근 $b=1$이 아님을 확인해야 한다. 이 이차방정식이 $b=1$을 근으로 갖는 것은 $a+(a-1)+(a-1)=0$, 즉 $a=\frac{2}{3}$일 때뿐이다. 이때 $\sqrt{(1+3a)/(1-a)}=3$이고 두 값은 $k=3$($b=1$, 곧 고정점이므로 제외된다)과 $k=-\frac{3}{2}$이다. 따라서:

- $a=\frac{2}{3}$이면 가능한 값은 $k=-\frac{3}{2}$뿐이다;
- $a=-\frac{1}{3}$이면 두 부호가 일치하여 $k=-\frac{3}{2}$이다;
- 그 밖의 허용된 모든 a에 대해서는 두 부호 모두 진짜 2-주기를 준다.

아래 그림은 $k=3.2$일 때 그러한 주기 하나를 보여 준다. 궤도는 $a\approx 0.513$과 $x_1\approx 0.800$ 사이를 오가며, 포물선과 직선 $y=x$ 사이에 정사각형을 그린다.



검산

- $a=0.7$로 두자. 공식에 따르면 $k\approx 3.0104$ 또는 $k\approx -1.5818$이다. $k\approx 3.0104$이면 $x_1\approx 0.6322$이고 이어서 $x_2\approx 0.7000$이므로, 궤도는 실제로 주기 2를 가진다.
- $a=\frac{2}{3}$일 때 $k=3$이면 $x_1=3\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$으로, 예측대로 고정점이다. $k=-\frac{3}{2}$이면 $x_1=-\frac{1}{3}$이고 $x_2=-\frac{3}{2}\cdot(-\frac{1}{3})\cdot\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$이므로 진짜 2-주기이다.
- 수치적으로, 무작위로 고른 수천 개의 $a\in[-\frac{1}{3},1)$에 대해 두 부호 모두에서 $x_2=a$가 성립했다. 이 구간 밖의 a에 대해서는 k를 훑어보아도 고정점 $k=1/(1-a)$ 외에는 해가 없었다.

흔한 실수

- 삼차방정식이 고정점 해를 반드시 포함한다는 사실을 잊는 것. 근 $b = 1$을 알아보는 것이 삼차방정식을 쉽게 만드는 열쇠이다.
- 실근 조건 $-\frac{1}{3} \leq a < 1$을 빠뜨리거나, $a = \frac{2}{3}$에서 두 k 값 중 하나가 고정점이므로 버려야 한다는 점을 놓치는 것.
- (i)에서 $x_{n+1} \leq \frac{1}{4}k$만 증명하고, $k < 4$이므로 이것이 1보다 엄격히 작다는 점을 밝히지 않는 것.

STEP 너머

이것은 로지스틱 사상(logistic map)으로, 단순한 규칙이 매우 풍부한 거동을 낳는 고전적인 예이다. 일반적인 범위 $0 < k \leq 4$의 k에 대해, 여기서 찾은 2-주기는 정확히 $k > 3$일 때 존재한다. $k = 3$에서 고정점은 안정성을 잃고 두 점으로 갈라진다. 이것이 첫 번째 **주기 배가 분기**(*period-doubling bifurcation*)이다. 이어서 배가가 계속 일어나는데, 그 k 값들은 등비적으로 촘촘해지며(그 비율은 파이겐바움(Feigenbaum) 상수가 정한다) 마침내 사상은 혼돈(chaos) 상태가 된다. Strogatz의 *Nonlinear Dynamics and Chaos*(비선형 동역학과 혼돈)는 이 이야기 전체를 대학 1학년 수준에서 들려준다.

풀이

STEP II 2002, 문제 6

순수수학 • 경사면 위의 직선

> **STEP II 2002, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/02-s2-q6

핵심 아이디어

모든 것은 경사면(inclined plane)에 관한 한 가지 사실에 기초한다. 평면 위의 한 직선이 최대 경사선(line of greatest slope)과 이루는 각이 ψ이면, 이 직선이 수평면(horizontal)과 이루는 각 γ는

$$\sin\gamma = \cos\psi \, \sin\beta,$$

를 만족한다. 여기서 β는 최대 경사선의 경사각이다. 이 사실을 알고 나면 문제에 나오는 각 직선마다 삼각방정식이 하나씩 생기고, l_1과 l_3이 수직이라는 사실이 코사인을 사인으로 바꾸어 준다. 그 뒤로는 대수 계산일 뿐이다.

풀이

경사면 위 직선의 기울기

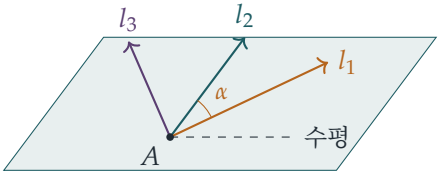
A에 원점을 두고 z축이 연직 방향이 되도록 좌표축을 잡는다. $\mathbf{h}$를 P 위에 놓인 수평 단위벡터(unit vector)라 하고, $\mathbf{u}$를 최대 경사선 l_2를 따라 위쪽을 향하는 단위벡터라 하자. $\mathbf{u}$는 P 안에서 $\mathbf{h}$에 수직이다. l_2가 수평면과 이루는 각이 β이므로

$$\mathbf{h} = (1, 0, 0), \qquad \mathbf{u} = (0, \cos\beta, \sin\beta).$$

로 잡을 수 있다. $\mathbf{u}$와 $\mathbf{h}$는 정규직교(orthonormal)이고 P를 생성(span)하므로, P 위에서 $\mathbf{u}$와 각 ψ를 이루는 단위벡터는 $\mathbf{d} = \cos\psi\,\mathbf{u} + \sin\psi\,\mathbf{h}$이다. 이 벡터의 연직 성분은 $\cos\psi\sin\beta$이다. 단위 방향벡터가 $\mathbf{d}$인 직선이 수평면과 이루는 각 γ는 $\sin\gamma = |$연직 성분: $\mathbf{d}|$를 만족하므로

$$\sin\gamma = |\cos\psi| \, \sin\beta. \qquad (*)$$

이다.



첫 번째 배치

P 위에서 직선 l_1은 l_2와 예각(acute angle) α를 이루고, 수평면과 이루는 각은 $\pi/6$이다. $(*)$에 의해

$$\cos\alpha \sin\beta = \sin\tfrac{\pi}{6} = \tfrac{1}{2},$$

이므로 원하는 결과를 얻는다(여기서 α가 예각이므로 $\cos\alpha > 0$이다).

? **생각해 보기** l_3이 l_2와 이루는 각은 얼마인가?

세 직선은 모두 같은 평면 P 위에 있고 A를 지난다. $l_3 \perp l_1$이므로 l_3의 방향은 l_1의 방향을 P 안에서 직각만큼 돌린 것이고, 따라서 l_3은 l_2와 각 $\alpha \pm \frac{\pi}{2}$를 이룬다(부호는 어느 쪽으로 돌리느냐에 따라 달라지지만 상관없다). 어느 경우든 α가 예각이므로 $|\cos(\alpha \pm \frac{\pi}{2})| = \sin\alpha$이다. 따라서 l_3에 대해 $(*)$를 적용하면

$$\sin\alpha \sin\beta = \sin\tfrac{\pi}{4} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}.$$

을 얻는다.

두 결과를 각각 제곱하여 더하면

$$\sin^2\beta\,(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}, \qquad \text{따라서} \qquad \sin^2\beta = \tfrac{3}{4}.$$

이다. 직선이 수평면과 이루는 각 β는 $[0, \frac{\pi}{2}]$에 속하므로 $\sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$이고 $\beta = \pi/3$이다. 이로써 원하는 결과를 얻는다. (덧붙이자면, 두 식을 나누면 $\tan\alpha = \sqrt{2}$를 얻는데, 이는 실제로 예각에 해당하므로 이러한 배치가 존재한다.)

회전한 배치

평면은 바뀌지 않으므로 l_2와 $\beta = \pi/3$도 그대로이다. 이제 l_1은 l_2와 예각 θ를 이루고, l_3은 앞에서와 똑같이 각 $\theta \pm \frac{\pi}{2}$를 이룬다. $\sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$을 이용하여 각 직선에 $(*)$를 적용하면 다음을 얻는다.

$$\sin\phi = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta,$$
$$\sin 2\phi = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta.$$

2ϕ는 수평면과 이루는 각이므로 $0 \le 2\phi \le \frac{\pi}{2}$이고, $\cos\theta > 0$이므로 $\phi \neq 0$이다. 따라서 $\sin\phi > 0$이므로 두 번째 식을 첫 번째 식으로 나눌 수 있다.

$$\tan\theta = \frac{\sin 2\phi}{\sin\phi} = \frac{2\sin\phi\cos\phi}{\sin\phi} = 2\cos\phi.$$

$t = \tan^2\theta$라 하면 $\cos^2\phi = t/4$이고 $\sin^2\phi = 1 - t/4$이다. θ를 소거하기 위해 첫 번째 식을 제곱한 식에 $\cos^2\theta = 1/(1+\tan^2\theta)$를 대입하면

$$1 - \frac{t}{4} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{1+t} \quad\Longrightarrow\quad (4-t)(1+t) = 3 \quad\Longrightarrow\quad t^2 - 3t - 1 = 0.$$

이다. 따라서 $t = \frac{1}{2}\left(3 \pm \sqrt{13}\right)$이다. $t = \tan^2\theta \ge 0$이고 $\sqrt{13} > 3$이므로 양의 부호를 택해야 한다.

$$\tan^2\theta = \frac{3+\sqrt{13}}{2},$$

이로써 원하는 결과를 얻는다.

이 근(root)은 실제로 가능한 값이다. 이 근으로부터 $\cos^2\phi = t/4 \approx 0.826$이므로 $\phi \approx 24.7^\circ$, $2\phi \approx 49.4^\circ < 90^\circ$이고, $\theta \approx 61.2^\circ$는 예각이다.

검산

- 첫 번째 배치에서 $\tan\alpha = \sqrt{2}$이면 $\cos\alpha = 1/\sqrt{3}$, $\sin\alpha = \sqrt{2/3}$이고, $\sin\beta = \sqrt{3}/2$와 곱한 두 값은 $\frac{1}{2}$와 $1/\sqrt{2}$로, 마땅히 그래야 할 값이 나온다.
- 수치로 확인하면 $\tan^2\theta \approx 3.3028$이므로 $\tan\theta \approx 1.8174$, $\theta \approx 61.18^\circ$이다. 그러면 $\sin\phi = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta \approx 0.4175$에서 $\phi \approx 24.68^\circ$를 얻고, $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta \approx 0.7589 \approx \sin(49.35^\circ) = \sin 2\phi$이다.
- $(*)$의 극한 경우: $\psi = 0$이면 l_2 자신(각 β)이 되고, $\psi = \frac{\pi}{2}$이면 수평인 직선(각 0)이 된다.

흔한 실수

- $\sin\gamma = \cos\psi\sin\beta$ 대신 $\tan\gamma = \cos\psi\tan\beta$를 쓰는 실수. 탄젠트로 된 식은 ψ를 위에서 내려다본 수평 평면도에서 잴 때만 옳은데, 여기서 α와 θ는 P 안에서 잰 각이다.
- 음의 근 $\frac{1}{2}(3-\sqrt{13})$을 버리는 것을 잊는 실수. 제곱은 음수가 될 수 없다.

STEP 너머

공식 $(*)$는 사실 내적(dot product)이다. 직선이 수평면과 이루는 각의 사인은 그 직선의 단위벡터의 연직 방향 성분이며, 그 벡터를 평면의 정규직교 기저(orthonormal basis)로 나

타내면 모든 일이 해결된다. 평면을 정규직교 벡터들이 생성하는 공간으로, 각을 내적으로 생각하는 것은 대학 1학년 선형대수학(linear algebra)과 회전(rotation)의 기하학의 출발점이다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 이러한 개념들을 꼼꼼하게 전개한다.

풀이

STEP II 2002, 문제 7

순수수학 • 직선의 벡터 기하

> **STEP II 2002, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/02-s2-q7

핵심 아이디어

여기서 모든 것은 내적(dot product)이다. 단위 방향벡터가 $\mathbf{u}$인, 원점을 지나는 직선이 m_1과 $\pi/4$의 각을 이루는 것은 정확히 $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{d}_1| = |\mathbf{d}_1|\cos\frac{\pi}{4}$일 때이며, 이로써 첫 부분은 연립방정식 문제가 된다. 후반부에서 "수직"은 내적이 0이라는 뜻이고, 공간의 두 직선은 한 평면 위에 있으면서(coplanar) 평행하지 않을 때에만 만난다. 한 평면 위에 있다는 것은 스칼라 삼중곱(scalar triple product)이 0이라는 것이다. 반전은 한 평면 위에 있는 경우가 알고 보니 평행한 경우라는 점이다.

풀이

직선 m_3과 m_4

$\mathbf{d}_1 = \mathbf{i}+\mathbf{j}$, $\mathbf{d}_2 = \mathbf{i}+\mathbf{k}$라 하자. 둘 다 길이가 $\sqrt{2}$이다. $\mathbf{u} = a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$를 O를 지나는 직선 방향의 단위벡터(unit vector)라 하자. 두 직선 사이의 각은 두 직선이 이루는 예각이므로 조건은

$$|\mathbf{u}\cdot\mathbf{d}_1| = \sqrt{2}\cos\tfrac{\pi}{4} = 1, \qquad |\mathbf{u}\cdot\mathbf{d}_2| = 1,$$

즉 $a+b = \pm 1$이고 $a+c = \pm 1$이다. $\mathbf{u}$를 $-\mathbf{u}$로 바꾸어도 같은 직선이 되고 두 부호가 모두 뒤집히므로, 경우는 두 가지뿐이다.

부호가 같은 경우: $a+b=1, a+c=1$. 그러면 $b=c=1-a$이고, $a^2+b^2+c^2=1$에서

$$a^2+2(1-a)^2 = 1 \iff 3a^2-4a+1=0 \iff (3a-1)(a-1)=0.$$

따라서 $a=1$이면 $\mathbf{u}=\mathbf{i}$이고, $a=\frac{1}{3}$이면 $\mathbf{u}=\frac{1}{3}(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k})$이다.

부호가 반대인 경우: $a+b=1, a+c=-1$. 그러면 $b=1-a, c=-1-a$이고, $a^2+(1-$

$a)^2 + (1+a)^2 = 1$에서 $3a^2 + 2 = 1$을 얻는데, 이는 실근이 없다.

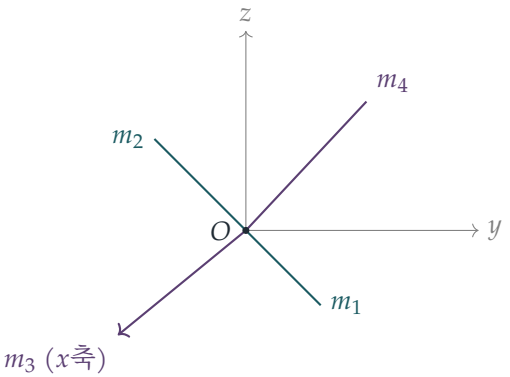
따라서 두 직선의 방향은

$$m_3 : \ \mathbf{i}, \qquad m_4 : \ \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

이다(이름은 서로 바꾸어 붙여도 된다). 단위벡터 $\mathbf{e}_3 = \mathbf{i}$와 $\mathbf{e}_4 = \frac{1}{3}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$에 대하여

$$\cos\theta = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_4 = \tfrac{1}{3},$$

이고 이 값은 양수이므로 이것이 예각이다. 즉 그 코사인 값은 $\frac{1}{3}$이다.



점 잡기

A는 m_1 위에서 O로부터 거리 $\lambda\sqrt{2}$인 점이므로 $\pm\lambda(1,1,0)$이다. 좌표가 음이 아니어야 하므로 $\lambda \geq 0$으로 하여 $A = \lambda(1,1,0)$으로 잡아야 한다($\lambda\sqrt{2}$는 거리이므로 처음부터 끝까지 $\lambda \geq 0$으로 둘 수 있다). 마찬가지로 $B = \lambda(1,0,1)$이다. m_3, m_4 위에서 좌표가 음이 아닌 단위점은 $(1,0,0)$과 $\frac{1}{3}(1,2,2)$이다.

이 중 어느 것이 P이고 어느 것이 Q인지는 m_3과 m_4의 이름 붙이기에 따라 달라진다. 그러나 이는 상관없다. 대칭변환(reflection) $(x,y,z) \mapsto (x,z,y)$는 A와 B를 맞바꾸고 $(1,0,0)$과 $\frac{1}{3}(1,2,2)$를 모두 고정하므로, 한 가지 이름 붙이기의 배치를 다른 배치로 옮긴다(이때 직선 AQ와 BP의 역할이 서로 바뀐다). 수직 관계와 교차 여부는 대칭변환으로 보존되므로

$$A = (\lambda,\lambda,0), \quad B = (\lambda,0,\lambda), \quad P = (1,0,0), \quad Q = \left(\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3},\tfrac{2}{3}\right).$$

로 잡는 것으로 충분하다. 그러면

$$\overrightarrow{AQ} = \left(\tfrac{1}{3} - \lambda,\ \tfrac{2}{3} - \lambda,\ \tfrac{2}{3}\right), \qquad \overrightarrow{BP} = (1-\lambda,\ 0,\ -\lambda).$$

소문항 (i)

AQ가 BP에 수직인 것은 정확히 $\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{BP}=0$일 때이다.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{BP} &= \left(\tfrac{1}{3}-\lambda\right)(1-\lambda)+0-\tfrac{2}{3}\lambda \\ &= \lambda^2-\tfrac{4}{3}\lambda+\tfrac{1}{3}-\tfrac{2}{3}\lambda = \lambda^2-2\lambda+\tfrac{1}{3}.\end{aligned}$$

이 값은 $(\lambda-1)^2=\frac{2}{3}$일 때, 즉

$$\lambda = 1\pm\sqrt{\tfrac{2}{3}} = 1\pm\tfrac{\sqrt{6}}{3}.$$

일 때 0이 된다. 두 값 모두 양수이므로($\sqrt{6}<3$이기 때문) 음이 아니라는 조건을 만족하며, 이차식은 다른 근을 갖지 않는다. 따라서 $AQ\perp BP$가 되는 λ의 값은 정확히 두 개이다.

소문항 (ii)

> **생각해 보기** 3차원에서 두 직선이 만나는지는 어떻게 판정하는가?

서로 다른 두 직선은 한 평면 위에 있고 평행하지 않을 때, 그리고 그때에만 만난다. 직선 AQ와 BP가 한 평면 위에 있는 것은 정확히 네 점 A, B, P, Q가 한 평면 위에 있을 때이며, 이는 정확히 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ}$의 스칼라 삼중곱이 0일 때이다.

여기서 $\overrightarrow{AB}=(0,-\lambda,\lambda)$, $\overrightarrow{AP}=(1-\lambda,-\lambda,0)$이므로, 첫째 행을 따라 전개하면

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 0 & -\lambda & \lambda \\ 1-\lambda & -\lambda & 0 \\ \frac{1}{3}-\lambda & \frac{2}{3}-\lambda & \frac{2}{3}\end{vmatrix} &= \lambda\cdot\tfrac{2}{3}(1-\lambda)+\lambda\left[(1-\lambda)\left(\tfrac{2}{3}-\lambda\right)+\lambda\left(\tfrac{1}{3}-\lambda\right)\right] \\ &= \lambda\left[\tfrac{2}{3}-\tfrac{2}{3}\lambda+\tfrac{2}{3}-\tfrac{4}{3}\lambda\right] = 2\lambda\left(\tfrac{2}{3}-\lambda\right),\end{aligned}$$

이다. 따라서 $\lambda\neq 0$이면 두 직선은 $\lambda=\frac{2}{3}$일 때에만 만날 수 있다.

그런데 $\lambda=\frac{2}{3}$이면

$$\overrightarrow{AQ}=\left(-\tfrac{1}{3},\,0,\,\tfrac{2}{3}\right),\qquad \overrightarrow{BP}=\left(\tfrac{1}{3},\,0,\,-\tfrac{2}{3}\right)=-\overrightarrow{AQ},$$

이므로 두 직선은 평행하다. $\overrightarrow{BA}=(0,\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$는 $\overrightarrow{BP}$의 상수배가 아니어서 A가 BP 위에 있지 않으므로, 두 직선은 같은 직선이 아니다. 서로 다른 두 평행선은 결코 만나지 않는다.

따라서 0이 아닌 모든 λ에 대하여 직선 AQ와 BP는 만나지 않는다. ($\lambda=0$이면 $A=B=O$이고 두 직선은 O에서 만나는데, 이것이 문제에서 이 경우를 제외한 이유이다.)

검산

- $\mathbf{i}$가 $\mathbf{i}+\mathbf{j}$와 각 $\pi/4$를 이룬다는 것은 바로 보이므로, 이차방정식의 첫째 근으로서 안심할 수 있다.
- $\lambda = 1+\sqrt{2/3} \approx 1.8165$에서 내적 $\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{BP}$를 수치 계산하면 $0(10^{-16}$ 이내$)$이 되고, $\lambda \approx 0.1835$에서도 마찬가지이다.
- $\lambda = 0.001, 0.002, \ldots, 5$에 대하여(그리고 P와 Q의 다른 이름 붙이기에 대해서도) 직선 AQ와 BP 사이의 최단 거리를 계산해 보면 결코 0이 되지 않으며, $\lambda \to 0$일 때에만 0으로 다가간다.

흔한 실수

- $a+b=1, a+c=-1$인 경우를 빠뜨리는 것: 이 경우에서는 해가 나오지 않지만, 반드시 배제해 보여야 한다.
- "$\lambda = \frac{2}{3}$일 때 삼중곱이 0이 되므로 두 직선은 만난다"에서 멈추는 것. 한 평면 위의 직선은 평행할 수 있으며, 여기서 바로 그렇다.

STEP 너머

스칼라 삼중곱은 3×3 행렬식(determinant)이며, 이것이 0이라는 것은 세 벡터가 일차종속(linearly dependent)이라는 뜻이다. 꼬인 위치에 있는 두 직선(skew lines) 사이의 최단 거리 $|\overrightarrow{AB}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})|/|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|$도 같은 재료로 만들어진다. 대학 1학년 선형대수학(linear algebra) 강의에서는 이러한 아이디어들이 행렬식, 계수(rank), 부분공간의 기하를 통해 하나로 묶인다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 3차원 그림을 풍부하게 곁들여 이 내용을 전개한다.

풀이

STEP II 2002, 문제 8

순수수학 • 일계 미분방정식

> **STEP II 2002, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/02-s2-q8

핵심 아이디어

각 방정식은 가장 단순한 일계 선형 미분방정식(first-order linear equation)인 $y' = p(x)\,y$ 꼴이므로, p가 하나의 식으로 주어지는 구간에서는 해가 상수 곱하기 $\exp\left(\int p\,\mathrm{d}x\right)$이다. 문제는 $x = 0$에서 식이 나뉜다는 점이다. 양쪽에서 각각 따로 임의상수(arbitrary constant)가 생기는데, 한쪽은 주어진 y의 값으로 정해지고, 다른 쪽은 두 조각이 $x = 0$에서 만나야 한다는 조건으로만 정해진다. 첫 번째 부분은 바로 이 과정을 미리 연습하는 것이고, 두 번째 부분에는 절댓값(absolute value)이 숨어 있다.

풀이

첫 번째 방정식 쌍

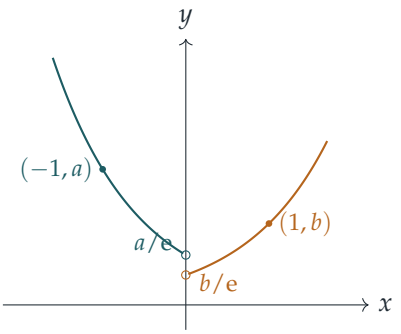
$x < 0$일 때 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y$에서 어떤 상수 A에 대하여 $y = A\mathrm{e}^{-x}$이다. (다른 해가 없음을 보이려면 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y\mathrm{e}^{x}\right) = \mathrm{e}^{x}(y' + y) = 0$이므로 $y\mathrm{e}^{x}$가 구간 $x < 0$에서 상수임에 주목하면 된다.) $x = -1$에서 $y = a$라는 조건으로부터 $A\mathrm{e} = a$이므로

$$y = a\,\mathrm{e}^{-x-1} \qquad (x < 0).$$

마찬가지로 $x > 0$일 때 $y = B\mathrm{e}^{x}$이고, $x = 1$에서 $y = b$이므로 $B = b/\mathrm{e}$이다. 따라서

$$y = b\,\mathrm{e}^{x-1} \qquad (x > 0).$$

$x \to 0^{-}$일 때 $y \to a/\mathrm{e}$이고, $x \to 0^{+}$일 때 $y \to b/\mathrm{e}$이다. 일반적으로 두 값은 다르며, 곡선은 y축에서 끊어져 뛴다. 아래 그림은 $a, b > 0$이고 $a > b$인 전형적인 경우를 나타낸다. 왼쪽은 축에 다가갈수록 내려가는 감소하는 지수함수이고, 오른쪽은 증가하는 지수함수이며, 빈 원은 서로 다른 두 극한값을 표시한다.



끊김이 없는 것은 두 극한이 일치할 때, 즉 $a/\mathrm{e} = b/\mathrm{e}$일 때, 다시 말해 다음이 성립할 때이고 그때뿐이다.

$$a = b.$$

이 경우 곡선은 $y = a\,\mathrm{e}^{|x|-1}$이며, $x = 0$에서 꺾이는 점을 가진 좌우 대칭의 "V" 모양 곡선이다.

$|\mathrm{e}^x - 1|$이 들어 있는 방정식

$\mathrm{e}^x > 1$인 것은 정확히 $x > 0$일 때이므로

$$|\mathrm{e}^x - 1| = \begin{cases} \mathrm{e}^x - 1, & x \geq 0, \\ 1 - \mathrm{e}^x, & x < 0. \end{cases}$$

따라서 앞에서와 똑같이 방정식은 두 개의 보통의 선형 방정식으로 나뉜다.

$x > 0$일 때: $y' = (\mathrm{e}^x - 1)y$이다. $\mathrm{e}^x - 1$의 원시함수(antiderivative) 하나는 $\mathrm{e}^x - x$이므로 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y\,\mathrm{e}^{-(\mathrm{e}^x - x)}\right) = 0$이고

$$y = C\exp(\mathrm{e}^x - x).$$

$x = 1$에서 $y = \mathrm{e}^{\mathrm{e}}$이므로 $C\,\mathrm{e}^{\mathrm{e}-1} = \mathrm{e}^{\mathrm{e}}$이고, 따라서 $C = \mathrm{e}$이다. 그러므로

$$y = \exp(\mathrm{e}^x - x + 1) \qquad (x \geq 0).$$

$x < 0$일 때: $y' = (1 - \mathrm{e}^x)y$이다. $1 - \mathrm{e}^x$의 원시함수 하나는 $x - \mathrm{e}^x$이므로

$$y = D\exp(x - \mathrm{e}^x).$$

> ? **생각해 보기** $x < 0$인 곳에서는 주어진 값이 하나도 없다. 그렇다면 D는 무엇으로 정해지는가?

$x = 0$에서의 연속성(continuity)으로 정해진다. 오른쪽에서 다가가면 $y \to \exp(1 - 0 + 1) = \mathrm{e}^2$이다. 왼쪽에서 다가가면 $y \to D\exp(0 - 1) = D/\mathrm{e}$이다. 두 값을 같게 놓으면

$D = \mathrm{e}^3$이므로

$$y = \exp(x - \mathrm{e}^x + 3) \qquad (x < 0).$$

두 결과를 합치면

$$y = \begin{cases} \exp(\mathrm{e}^x - x + 1), & x \geq 0, \\ \exp(x - \mathrm{e}^x + 3), & x < 0. \end{cases}$$

이번에는 $x = 0$에서 꺾이는 점조차 없다는 데 주목하자. 두 식 모두 $y'(0) = 0$을 주며, 이는 $|\mathrm{e}^0 - 1|\, y = 0$과 일치한다. $y > 0$이고 $|\mathrm{e}^x - 1| \geq 0$이므로 해는 모든 곳에서 증가하며, $x = 0$에서 $y = \mathrm{e}^2$인 정상 변곡점(stationary point of inflection)을 가진다.

극한

(i) $x > 0$일 때

$$y \exp(-\mathrm{e}^x) = \exp(\mathrm{e}^x - x + 1 - \mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^{1-x} \to 0 \quad \text{극한: } x \to +\infty.$$

따라서 극한은 0이다. 인수 $\exp(-\mathrm{e}^x)$가 이중 지수적(double-exponential) 증가를 정확히 상쇄하고, 감소하는 e^{1-x}만 남는다.

(ii) $x < 0$일 때

$$y\,\mathrm{e}^{-x} = \exp(x - \mathrm{e}^x + 3 - x) = \exp(3 - \mathrm{e}^x) \to \mathrm{e}^3 \quad \text{극한: } x \to -\infty,$$

이는 $\mathrm{e}^x \to 0$이기 때문이다. 따라서 극한은 e^3이다. 다시 말해, 절댓값이 큰 음수 x에서 해는 $\mathrm{e}^3\mathrm{e}^x$처럼 행동하는데, 이는 예상대로이다. 그 영역에서는 $|\mathrm{e}^x - 1| \approx 1$이어서 방정식이 거의 $y' = y$이기 때문이다.

검산

- 답을 미분해 본다. $x > 0$에서 $y' = (\mathrm{e}^x - 1)y$이고, $x < 0$에서 $y' = (1 - \mathrm{e}^x)y$이다. $x = 1$에서 $\exp(\mathrm{e} - 1 + 1) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}}$이다.
- 수치적으로, 룽게–쿠타 방법(Runge–Kutta method)으로 $y(1) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}} \approx 15.154$에서 시작하여 $x = 0$까지 거꾸로 방정식을 따라가면 $y(0) \approx 7.38906 = \mathrm{e}^2$을 얻고, $x = -5$까지 계속하면 유효숫자 여섯 자리까지 $\exp(x - \mathrm{e}^x + 3)$과 일치한다.
- 극한 (ii)의 경우 $x = -10$에서 $y\mathrm{e}^{-x} \approx 20.0846$으로 $\mathrm{e}^3 \approx 20.0855$에 가깝다. (i)의 경우 $x = 10$에서 $\mathrm{e}^{1-x} \approx 1.2 \times 10^{-4}$이다.

흔한 실수

- $x = 1$에서의 조건을 $x = 0$의 **양쪽** 모두의 상수를 정하는 데 사용하는 것. 두 구간은 별개의 문제이며, 왼쪽의 상수는 오직 연속성으로부터만 나온다.
- 절댓값을 빼먹고 모든 x에 대해 $y' = (\mathrm{e}^x - 1)y$를 푸는 것. 이렇게 하면 $x < 0$에서 틀린 곡선을, (ii)에서 틀린 극한을 얻는다.
- $\int (\mathrm{e}^x - 1)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x - x$라고 써 놓고는 $\exp(\mathrm{e}^x - x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}/x$라고 쓰는 것(올바른 값은 $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}\mathrm{e}^{-x}$이다).

STEP 너머

방정식 $y' = |\mathrm{e}^x - 1|\,y$의 계수(coefficient)는 $x = 0$에서 연속이지만 미분가능(differentiable)하지 않다. $y' = f(x, y)$에 대한 존재성과 유일성 정리(existence and uniqueness theorem, 피카르–린델뢰프(Picard–Lindelöf) 정리)는 f가 x에 대해 연속이고 y에 대해 립시츠(Lipschitz) 조건을 만족하기만 하면 되므로, 여기서는 하나의 조건만으로 실수 전체에서 해가 정해지고 0에서의 연속성은 저절로 성립한다. 첫 번째 부분에서는 우변 자체가 $x = 0$에서 끊어져 뛰기 때문에 조각들을 잇기 위해 추가 조건이 필요했던 것이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에서 일계 방정식에 대한 이러한 존재성과 유일성 문제를 다룬다.

풀이

STEP II 2002, 문제 9

역학 • 포물체 운동

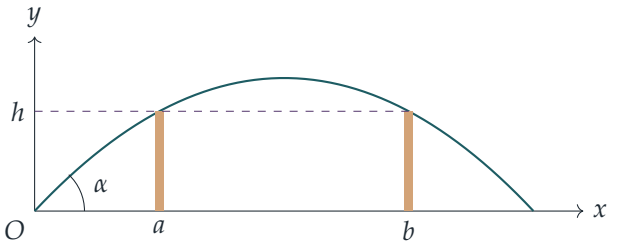
> **STEP II 2002, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/02-s2-q9

핵심 아이디어

경로(path)의 방정식을 x에 대한 y의 함수로 써 보자. "두 벽을 아슬아슬하게 넘는다"는 말은 경로가 두 벽의 꼭대기를 지난다는 뜻이므로, 방정식 $y = h$의 근은 정확히 $x = a$와 $x = b$이다. 이것은 근을 알고 있는 이차방정식(quadratic equation)이고, 이를 근의 합과 곱(sum and product of roots)과 비교하면 모든 것을 한꺼번에 얻는다. 그러면 둘째 부분은 두 공식을 h에 대하여 미분(differentiate)하는 문제가 된다.

풀이

입자를 중력만 받아 움직이는(공기 저항(air resistance)이 없는) 점으로 모형화하고, O를 원점으로 하여 x축을 수평 방향, y축을 연직 위 방향으로 잡는다. 그림이 의도하는 대로 $0 < a < b, h > 0, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$라고 가정한다.



$\tan\alpha$와 V 구하기

처음 속도의 성분이 $V\cos\alpha$와 $V\sin\alpha$이므로, 시간 t가 지난 뒤

$$x = Vt\cos\alpha, \qquad y = Vt\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

$t = x/(V\cos\alpha)$를 대입하여 t를 소거하면 경로는

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2V^2\cos^2\alpha} = x\tan\alpha - kx^2, \qquad \text{여기서} k = \frac{g\sec^2\alpha}{2V^2} = \frac{g(1+\tan^2\alpha)}{2V^2} > 0.$$

입자는 각 벽을 아슬아슬하게 넘으므로, 경로는 꼭대기 (a,h)와 (b,h)를 지난다. 따라서 a와 b는

$$x\tan\alpha - kx^2 = h, \qquad \text{즉,} \qquad kx^2 - x\tan\alpha + h = 0.$$

의 근이다. 이것은 x에 대한 이차방정식이므로($k \neq 0$이므로) 근은 많아야 두 개이고, 따라서 그 근은 정확히 a와 b이다. 근의 합과 곱과 비교하면

$$a + b = \frac{\tan\alpha}{k}, \qquad ab = \frac{h}{k}.$$

둘째 식에서 $k = h/(ab)$이고, 이를 첫째 식에 넣으면

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{h(a+b)}{ab}.}$$

마지막으로 k의 정의로부터

$$\begin{aligned}\frac{2V^2}{g} = \frac{1+\tan^2\alpha}{k} &= \frac{ab}{h}\left(1 + \frac{h^2(a+b)^2}{a^2b^2}\right)\\ &= \frac{ab}{h} + \frac{(a+b)^2h}{ab},\end{aligned}$$

이므로 요구한 결과가 성립한다.

(이 값들을 쓰면 경로가 $y = \dfrac{h}{ab}x(a+b-x)$가 되어, $x = a$와 $x = b$에서 h와 같다는 것이 한눈에 보인다는 점도 눈여겨볼 만하다.)

벽을 높이기

두 번째 입자도 같은 거리 a와 b에 있는, 이제 높이가 $h + \delta h$인 두 벽을 아슬아슬하게 넘는다. 따라서 위의 공식은 h, α, V를 $h + \delta h$, $\alpha + \delta\alpha$, $V + \delta V$로 바꾸어도 성립한다.

$$\tan\alpha = \frac{a+b}{ab}h, \qquad \frac{2V^2}{g} = \frac{ab}{h} + \frac{(a+b)^2}{ab}h.$$

각 식은 (a, b를 고정하면) h만의 함수이므로, 작은 변화에 대해서는 $\delta(\text{양}) \approx \dfrac{\mathrm{d}(\text{양})}{\mathrm{d}h}\delta h$를 쓸 수 있다.

각도. $\tan\alpha = \frac{a+b}{ab}h$를 h에 대하여 미분하면 $\sec^2\alpha\,\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}h} = \dfrac{a+b}{ab}$이므로

$$\sec^2\alpha\,\delta\alpha \approx \frac{a+b}{ab}\delta h.$$

$\sec^2\alpha > 0$, $a, b > 0$, $\delta h > 0$이므로 우변은 양수이고, 따라서 $\delta\alpha > 0$이다. 즉 입자를 더 가파르게 던져야 한다.

생각해 보기 "≈"는 일차(first-order) 근사일 뿐이다. 이것으로 정말 $\delta\alpha$의 부호를 결론 내릴 수 있을까?

그렇다. 사실 근사를 전혀 쓰지 않고도 된다. $\tan\alpha$의 공식은 h에 대하여 일차식이므로 정확히 $\tan(\alpha+\delta\alpha)-\tan\alpha = \frac{a+b}{ab}\,\delta h > 0$이다. tan는 $(0, \frac{\pi}{2})$에서 순증가(strictly increasing)하므로 $\alpha+\delta\alpha > \alpha$일 수밖에 없고, 따라서 $\delta\alpha > 0$이다.

속력. $\dfrac{2V^2}{g}$를 h에 대하여 미분하면

$$\frac{4V}{g}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}h} = -\frac{ab}{h^2} + \frac{(a+b)^2}{ab} = \frac{(a+b)^2}{abh^2}\left(h^2 - \frac{a^2b^2}{(a+b)^2}\right),$$

이므로

$$\delta V \approx \frac{g(a+b)^2}{4Vabh^2}\left(h - \frac{ab}{a+b}\right)\left(h + \frac{ab}{a+b}\right)\delta h.$$

$h - \frac{ab}{a+b}$를 제외한 모든 인수는 $(V, a, b, h, \delta h > 0$이므로$)$ 양수이다. 따라서 δV의 부호는 $h - \frac{ab}{a+b}$의 부호와 같다. 즉 $h > ab/(a+b)$이면 양수이고 $h < ab/(a+b)$이면 음수이므로, 요구한 결과가 성립한다. (이 도함수는 $h = ab/(a+b)$가 아닌 곳에서 0이 아니므로, δh가 충분히 작으면 일차 항이 실제로 부호를 결정한다.)

해석. $\tan\alpha = h(a+b)/(ab)$와 비교하면, 조건 $h > ab/(a+b)$는 정확히 $\tan\alpha > 1$, 즉 $\alpha > 45°$이다. h의 함수로 보면 $2V^2/g$는 $p/h + qh$ 꼴이고, 이것은 $h = \sqrt{p/q} = ab/(a+b)$에서 최소가 되며, 이때 $\alpha = 45°$이고 $2V^2/g = 2(a+b)$이다. 그러므로 이미 45°보다 가파르게 던지고 있다면 벽을 높이는 데 더 큰 속력이 필요하고, 그보다 완만하게 던지고 있다면 벽을 높이는 것(그리고 던지는 각을 45° 쪽으로 가파르게 하는 것)에 오히려 더 작은 속력이 필요하다.

검산

- $a = 3\,\mathrm{m}$, $b = 7\,\mathrm{m}$, $h = 2.5\,\mathrm{m}$로 잡자. 그러면 $\tan\alpha = 25/21$이고 $2V^2/g = 8.4 + 11.90\ldots = 20.30\ldots\,\mathrm{m}$이다. 이 값들로 운동을 수치적으로 한 단계씩 계산하면, 입자는 $x = 3$과 $x = 7$ 모두에서 $(10^{-11}$까지$)$ 높이 2.5 m에 있다.
- 대칭성(symmetry): 답은 a와 b에 대하여 대칭인데, 경로가 $x = \frac{1}{2}(a+b)$에 대하여 대칭인 포물선이므로 당연히 그래야 한다.
- 단위: ab/h와 $(a+b)^2h/(ab)$는 길이이므로 $2V^2/g$와 맞고, $\tan\alpha$는 무차원(dimensionless)이다.

- $h = ab/(a+b)$일 때 $\alpha = 45°$이고 $2V^2/g = 2(a+b)$이다. $a = 3$, $b = 7$이면 이 값은 20 m로, 위의 20.30 m보다 약간 작으므로 이것이 최솟값이라는 사실과 들어맞는다.

흔한 실수

- 두 벽에 대한 방정식을 따로 세운 뒤 억지로 연립하여 푸는 것: 그렇게 해도 되지만, 근의 합과 곱을 쓰면 두 줄로 끝난다.
- k를 다시 V로 바꿀 때 $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$임을 잊는 것.
- $2V^2/g$의 도함수를 인수분해(factorise)하지 않고 δV의 부호를 말하는 것: 깔끔한 조건은 $h > 0$일 때 $h^2 > a^2b^2/(a+b)^2$에서 나온다.

STEP 너머

둘째 부분은 작은 민감도 분석(sensitivity analysis)이다. 사상 $h \mapsto (\alpha, V)$를 한 해 근처에서 선형화(linearise)하여, 출력이 어떻게 반응하는지 읽어 낸 것이다. 선형화, 그리고 이와 관련된 궤적족의 포락선(envelope)이라는 개념(주어진 속력으로 도달할 수 있는 모든 곳을 둘러싸는 "안전 포물선(parabola of safety)")은 대학 1학년 역학과 미적분학 강의에서 흔히 다루는 내용이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 포물체 운동과 이러한 근사 기법을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP II 2002, 문제 10

역학 • 운동학과 최적화

> **STEP II 2002, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/02-s2-q10

핵심 아이디어

전체 거리가 고정되어 있으므로 경주 시간 T와 속력을 바꾸는 시각 t는 하나의 방정식으로 묶여 있다. 분모를 없애면 이 방정식은 t에 대한 이차방정식(quadratic equation)이 되고, 시간 T가 실제로 가능하려면 이 이차방정식이 실근을 가져야 한다. 판별식(discriminant) 조건에서 미적분 없이 곧바로 T의 최솟값을 얻는다. 둘째 부분에서는 두 선수의 위치를 시간의 함수로 알고 나면 둘 사이의 거리가 구간별 이차함수(piecewise quadratic)가 되므로, 늘 하던 방식대로 최댓값을 구하면 된다.

풀이

이 풀이 전체에서 거리의 단위는 km, 시간의 단위는 시간이며, $42\frac{3}{8} = \frac{339}{8}$이다.

최소 경주 시간

첫째 선수는 처음 t시간 동안 $13t$를 달리고, 나머지 $T-t$시간 동안 $\left(14+\frac{2t}{T}\right)(T-t)$를 달린다. 따라서

$$13t + \left(14 + \frac{2t}{T}\right)(T-t) = \frac{339}{8}.$$

전개하면 $13t + 14T - 14t + 2t - \dfrac{2t^2}{T} = \dfrac{339}{8}$, 즉

$$t + 14T - \frac{2t^2}{T} = \frac{339}{8}.$$

양변에 $T > 0$을 곱하고 t의 거듭제곱별로 정리하면

$$2t^2 - Tt + \left(\frac{339}{8}T - 14T^2\right) = 0. \qquad (*)$$

생각해 보기 가장 작은 T를 구하고 싶지만, T가 t의 함수로 주어져 있지 않다. 애초에 어떤 T 값이 가능한지 어떻게 알 수 있을까?

어떤 T 값이 나타나려면 $(*)$가 실수해 t를 가져야 하므로, 판별식이 음이 아니어야 한다.

$$T^2 - 8\left(\frac{339}{8}T - 14T^2\right) \geq 0 \iff 113T^2 - 339T \geq 0 \iff 113T(T-3) \geq 0.$$

$T > 0$이므로 $T \geq 3$이어야 한다.

이 하한은 실제로 달성된다. $T = 3$이면 판별식이 0이고 $(*)$는

$$2t^2 - 3t + \left(\frac{1017}{8} - 126\right) = 2t^2 - 3t + \frac{9}{8} = 2\left(t - \frac{3}{4}\right)^2 = 0,$$

이 되어 $t = \frac{3}{4}$이다. 이 값은 0과 T 사이에 있으므로 실제로 가능한 경주 계획이다. 곧 45분 동안 13의 속력으로 달린 다음, 나머지 $2\frac{1}{4}$시간 동안 $14 + \frac{2(3/4)}{3} = 14.5$의 속력으로 달린다. 실제로 $13 \cdot \frac{3}{4} + 14.5 \cdot \frac{9}{4} = 9.75 + 32.625 = 42.375$이다. 따라서 요구한 대로 T의 가능한 최솟값은 3이다.

(같은 결과를 다르게 얻을 수도 있다. $(*)$를 음함수 미분(implicit differentiation)하고 $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = 0$으로 놓으면 $T = 4t$를 얻고, 이를 다시 대입하면 $T = 3$이 나온다. 판별식을 이용한 논증은 3이 단지 정류값(stationary value)이 아니라 전역 최솟값(global minimum)임까지 증명해 준다는 장점이 있다.)

최대 간격

출발한 뒤 지난 시간을 τ라 하자. 둘째 선수의 속력은 어떤 상수 k에 대하여 $16 - k\tau$이므로, 달린 거리는

$$s_2(\tau) = 16\tau - \tfrac{1}{2}k\tau^2.$$

이다. 3시간 만에 완주하므로 $48 - \frac{9}{2}k = \frac{339}{8}$이고, 따라서 $\frac{9}{2}k = \frac{45}{8}$, $k = \frac{5}{4}$이다. 그러므로 $s_2 = 16\tau - \frac{5}{8}\tau^2$이고, 속력은 16에서 12.25로 줄어들며 계속 양수이다.

첫째 선수도 3시간이 걸리므로, 첫째 부분에 따라 $t = \frac{3}{4}$이다. 이 선수가 달린 거리는

$$s_1(\tau) = \begin{cases} 13\tau, & 0 \leq \tau \leq \frac{3}{4}, \\ \frac{39}{4} + \frac{29}{2}\left(\tau - \frac{3}{4}\right), & \frac{3}{4} \leq \tau \leq 3. \end{cases}$$

이다. $d = s_2 - s_1$이라 하자. 둘째 선수가 처음에 더 빠르므로 $d \geq 0$일 것으로 예상된다.

$0 \leq \tau \leq \frac{3}{4}$일 때: $d = 3\tau - \frac{5}{8}\tau^2$이고 $\frac{\mathrm{d}d}{\mathrm{d}\tau} = 3 - \frac{5}{4}\tau > 0$이다. 따라서 이 구간에서 d는 증가하며, $d\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{4} - \frac{45}{128} = \frac{243}{128}$에 이른다.

$\frac{3}{4} \leq \tau \leq 3$일 때:

$$d = 16\tau - \tfrac{5}{8}\tau^2 - \tfrac{39}{4} - \tfrac{29}{2}\tau + \tfrac{87}{8} = \tfrac{1}{8}\left(9 + 12\tau - 5\tau^2\right) = \tfrac{1}{8}(3-\tau)(3+5\tau).$$

이것은 아래로 볼록한 포물선(parabola)이 아니라 위로 열린 모양이 아닌, 아래로 열린 포물선이고, 꼭짓점(vertex)은 $\tau = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$로서 $\left[\frac{3}{4}, 3\right]$ 안에 있다. (같은 말이지만, 간격은 두 속력이 같아질 때 더 이상 늘어나지 않는다. 곧 $16 - \frac{5}{4}\tau = 14.5$일 때이다.) 이때

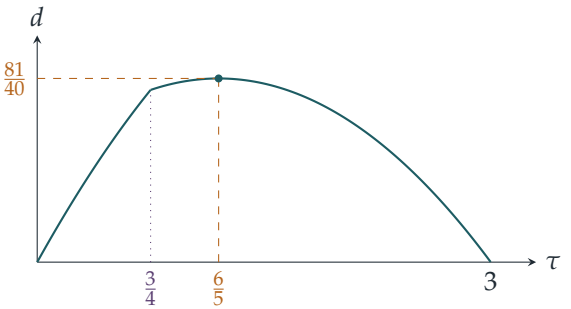
$$d\left(\tfrac{6}{5}\right) = \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{9}{5} \cdot 9 = \tfrac{81}{40}.$$

인수분해한 꼴을 보면 이 구간 전체에서 $d \geq 0$이고, 당연히 그래야 하듯 결승점에서 0으로 줄어든다.

두 구간을 비교하면 $\frac{81}{40} = 2.025 > \frac{243}{128} \approx 1.898$이다. 따라서 두 선수 사이의 최대 거리는

$$\boxed{\tfrac{81}{40}\ \text{km} = 2.025\ \text{km}},$$

이고, 경주 시작 후 1.2시간(72분)에 둘째 선수가 앞선 상태에서 이 값에 이른다.



검산

- 두 선수 모두 $\tau = 3$에 결승점에 도착하며, 공식도 당연히 그래야 하듯 $d(3) = 0$을 준다.
- 둘째 구간의 최댓값은 정확히 두 속력이 같아질 때(둘 다 14.5) 나타나는데, 이는 간격이 더 이상 늘어나지 않는 자연스러운 조건이다.
- 수치 계산: t의 촘촘한 격자에서 T에 대한 이차방정식을 풀면 가장 작은 T는 $t = 0.75$에서 3.000이고, $[0, 3]$의 300 000개 시각에서 d를 계산하면 $\tau = 1.2$에서 최댓값 2.025를 얻으며 전 구간에서 $d \geq 0$이다.

흔한 실수

- 첫째 선수의 최소 시간 계획을 쓰면서, "달린 시간이 3시간"이라는 조건이 바로 $t = \frac{3}{4}$를 정해 준다는 점을 알아차리지 못하는 것.
- 꺾이는 점 $\tau = \frac{3}{4}$에서만 최댓값을 찾는 것: 둘째 선수는 $\tau = \frac{6}{5}$까지 여전히 14.5보다 빠르므로, 속력을 바꾼 뒤에도 간격은 계속 늘어난다.

- 일차적으로 감소하는 속력을 적분할 때 생기는 $\frac{1}{2}$을 빠뜨리고 둘째 선수의 거리를 $16\tau - k\tau^2$으로 쓰는 것.

STEP 너머

첫째 부분은 $F(t, T) = 0$으로 음함수 꼴로 주어진 제약 조건 아래에서의 최적화 문제이다. "어떤 T에 대하여 해 t가 존재하는가?"라고 묻는 것은 음함수 정리(implicit function theorem), 더 일반적으로는 라그랑주 승수(Lagrange multipliers)의 바탕에 있는 생각이다. 최적점에서 제약 조건의 등위곡선(level curve)은 $\partial F/\partial t = 0$을 만족하는데, 이것이 바로 여기서의 중근(double root) 조건이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 운동학(kinematics)을 처음부터 끝까지 미적분으로 다루며, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제)에는 STEP 스타일의 최적화 문제가 더 실려 있다.

풀이

STEP II 2002, 문제 11

역학 • 마찰과 한계 평형

> **STEP II 2002, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/02-s2-q11

핵심 아이디어

첫 부분은 질량중심(centre of mass)을 구하는 적분(integral)을 그대로 계산하면 된다. 치환(substitution) $t = x/l$을 쓰면 한 줄로 끝난다. 사다리 문제에서는 "양 끝에서 모두 미끄러지기 직전"이라는 조건 덕분에 네 접촉력이 모두 하나의 미지수의 배수가 된다. 따라서 두 방향으로 힘을 분해하고 A에 대한 모멘트(moment)를 구하면 곧바로 $\tan\theta$를 얻는다. 마지막 부분에는 아이디어가 하나 더 필요하다. 보는 가파르게 세울수록 더 안전하므로, "모든 $\theta < \pi/4$에서 미끄러진다"는 말은 한계각이 $\pi/4$ 이상이라는 뜻이다.

풀이

질량중심

B로부터 거리 x인 곳에 있는 길이 δx의 작은 조각의 무게는 $\alpha W l^{-1}(x/l)^{\alpha-1}\,\delta x$이다. $t = x/l$로 두면($\mathrm{d}x = l\,\mathrm{d}t$이다) 전체 무게는

$$\int_0^l \frac{\alpha W}{l}\left(\frac{x}{l}\right)^{\alpha-1}\mathrm{d}x = \alpha W\int_0^1 t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t = W,$$

로 당연히 그래야 하는 값이 나온다($\alpha > 0$이므로 이 적분은 수렴(converge)한다). B에 대한 무게의 모멘트는

$$\int_0^l x\,\frac{\alpha W}{l}\left(\frac{x}{l}\right)^{\alpha-1}\mathrm{d}x = \alpha W l\int_0^1 t^{\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{\alpha W l}{\alpha+1}.$$

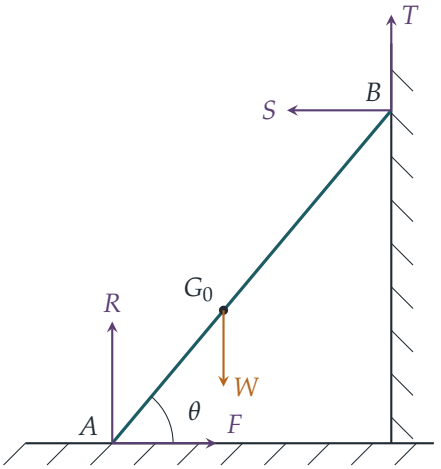
이를 W로 나누면 질량중심 G_0은 B로부터 거리 $\alpha l/(\alpha+1)$인 곳에 있으며, 이것이 보여야 할 결과이다. 따라서 G_0은 A로부터 거리

$$d = l - \frac{\alpha l}{\alpha+1} = \frac{l}{\alpha+1}$$

인 곳에 있고, A에 대한 모멘트를 구할 때 이 값을 쓴다.

양 끝에서의 한계 평형

보를 강체 막대(rigid rod)로, A와 B의 접촉을 거친 접촉으로 모형화한다. 보가 미끄러지면 A는 벽에서 멀어지고 B는 아래로 내려가므로, 마찰력(friction)은 A에서 벽 쪽으로, B에서 위쪽으로 작용한다. 바닥이 A에 작용하는 수직항력(normal reaction)을 R, 마찰력을 F라 하고, 벽이 B에 작용하는 수직항력을 S, 마찰력을 T라 하자. 무게는 A로부터 거리 $l/(\alpha+1)$인 G_0에 작용한다.



수평 방향과 수직 방향으로 힘을 분해하고, A에 대한 모멘트를 구하면 다음과 같다(무게는 A로부터 수평 거리 $d\cos\theta$에 작용하고, B는 높이 $l\sin\theta$, 수평 거리 $l\cos\theta$인 곳에 있다).

$$F = S,$$

$$R + T = W,$$

$$S\,l\sin\theta + T\,l\cos\theta = W\,\frac{l}{\alpha+1}\cos\theta.$$

양 끝에서 모두 한계 상태라는 것은 $F = \mu R$이고 $T = \mu S$라는 뜻이다. 그러면 $S = F = \mu R$, $T = \mu S = \mu^2 R$이고, 수직 방향의 식에서

$$R(1+\mu^2) = W, \qquad \text{따라서} \qquad S = \frac{\mu W}{1+\mu^2}, \quad T = \frac{\mu^2 W}{1+\mu^2}.$$

모멘트 식을 $l\cos\theta$로 나누고 대입하면

$$\frac{\mu W}{1+\mu^2}\tan\theta + \frac{\mu^2 W}{1+\mu^2} = \frac{W}{1+\alpha} \quad \Longrightarrow \quad \mu\tan\theta = \frac{1+\mu^2}{1+\alpha} - \mu^2 = \frac{1-\alpha\mu^2}{1+\alpha},$$

즉

$$\tan\theta = \frac{1-\alpha\mu^2}{(1+\alpha)\mu},$$

이며, 이것이 보여야 할 결과이다. 이 각을 θ_0이라 하고 $t_0 = \tan\theta_0$이라 쓰자.

μ의 최댓값

> **생각해 보기** "모든 $\theta < \pi/4$에서 미끄러진다"는 말이 왜 θ_0에 대한 조건으로 바뀌는가?

평형이 가능한 것은 정확히 $\tan\theta \geq t_0$일 때임을 보이자. $t = \tan\theta$, $k = 1/(1+\alpha)$라 쓰면 모멘트 식은 $St + T = kW$가 된다. 마찰 법칙은 $F \leq \mu R$과 $|T| \leq \mu S$이다.

필요성(*necessity*). $T \leq \mu S$와 $S = F \leq \mu R = \mu(W - T)$로부터 $T \leq \mu^2(W - T)$를 얻으므로 $T \leq \mu^2 W/(1+\mu^2)$이다. 또 $S \leq \mu(W - T)$이므로

$$kW = St + T \leq \mu t(W - T) + T = \mu t W + (1 - \mu t)T.$$

$\mu t < 1$이면 T에 대한 위의 부등식(inequality)을 쓰면 $kW \leq W(\mu t + \mu^2)/(1+\mu^2)$를 얻고, 이를 정리하면 $t \geq t_0$이다. $\mu t \geq 1$이면 $\mu t_0 = (1 - \alpha\mu^2)/(1+\alpha) < 1$이므로 어차피 $t \geq 1/\mu > t_0$이다. 어느 경우든 평형이면 반드시 $t \geq t_0$이다.

충분성(*sufficiency*). $t \geq t_0$이면($t > 0$이기도 하다), 벽의 마찰을 한계 상태 $T = \mu S$로 잡고, 모멘트 식에서 $S = kW/(t+\mu)$로, 그리고 $F = S$, $R = W - T$로 둔다. 남은 조건은 $S \leq \mu R$ 하나뿐인데, 이는 $S(1+\mu^2) \leq \mu W$, 즉 $k(1+\mu^2) \leq \mu(t+\mu)$이고, 이것은 정확히 $t \geq t_0$이다. ($R > 0$도 성립한다.)

따라서 보가 각 θ에서 미끄러지는 것은 정확히 $\tan\theta < t_0$일 때이다. "모든 $\theta < \pi/4$에서 미끄러진다"는 것은 $t_0 \geq 1$이라는 뜻이다. $t_0 \geq 1$이면 모든 $\theta < \pi/4$에 대해 $\tan\theta < 1 \leq t_0$이고, $t_0 < 1$이면 $\max(t_0, 0) < \tan\theta < 1$인 각은 $\pi/4$보다 작은데도 평형을 이루기 때문이다.

$\alpha = \frac{3}{2}$일 때

$$t_0 = \frac{1 - \frac{3}{2}\mu^2}{\frac{5}{2}\mu} = \frac{2 - 3\mu^2}{5\mu} \geq 1 \iff 3\mu^2 + 5\mu - 2 \leq 0 \iff (3\mu - 1)(\mu + 2) \leq 0,$$

이다(양변에 $5\mu > 0$을 곱했다). $\mu + 2 > 0$이므로 이 부등식은 정확히 $\mu \leq \frac{1}{3}$일 때 성립한다. 가능한 최댓값은

$$\mu = \tfrac{1}{3}.$$

검산

- $\alpha = 1$이면 보는 균일하고, 공식은 $\tan\theta = (1 - \mu^2)/(2\mu)$가 된다. 이는 양 끝의 마찰계수(coefficient of friction)가 같은 균일한 사다리에 대해 잘 알려진 결과이다.
- $\mu = \frac{1}{3}$, $\alpha = \frac{3}{2}$일 때 $t_0 = (2 - \frac{1}{3})/\frac{5}{3} = 1$로 정확히 맞으므로 한계각은 $\pi/4$이다. 수치로 확인하면 $\mu = 0.332$일 때 $t_0 \approx 1.004$이고, $\mu = 0.334$일 때 $t_0 \approx 0.996$이다.

- $\alpha \to \infty$이면 질량이 B에 집중되고($d \to 0$), 모든 $\mu > 0$에 대해 $\tan\theta$가 음수가 된다. 즉 보는 어떤 각으로도 서 있을 수 있는데, 이때 무게가 거의 벽에서 작용하므로 이치에 맞는다.

흔한 실수

- 모멘트 식에서 $\alpha l/(\alpha+1)$을 A로부터의 거리로 쓰는 것. 이 값은 B로부터 잰 거리이다.
- 벽의 마찰력을 아래쪽으로 두는 것. 보가 미끄러질 때 B는 아래로 내려가므로, B에서 보에 작용하는 마찰력은 위쪽이다.
- 마지막 부등식의 방향을 거꾸로 하는 것. 보는 **더 가파를수록** 안전하므로 "$\pi/4$보다 작은 각에서 미끄러진다"는 $\tan\theta_0 \geq 1$을 요구하고, μ가 최대일 때 θ_0은 정확히 $\pi/4$가 된다.

STEP 너머

위의 필요충분 논증은 사실 작은 **선형계획법**(*linear programming*) 문제이다. 마찰 법칙은 허용되는 힘들의 볼록 영역(convex region)을 정하고, 모멘트 직선이 이 영역과 만날 때 평형이 가능하다. 이 문제처럼 평형 방정식만으로는 힘이 정해지지 않는 부정정(statically indeterminate) 문제는 대학 1학년 역학과 공학에서 흔히 다루는 주제이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 마찰, 토크(torque), 강체 평형(rigid-body equilibrium)을 이와 같이 세심하게 다룬다.

풀이

STEP II 2002, 문제 12

확률과 통계 • 정규근사와 푸아송 근사

STEP II 2002, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/02-s2-q12

핵심 아이디어

이 문제에는 세 겹의 무작위성이 차례로 들어 있다. 동전 하나 안에서 나오는 앞면, 하루 안의 동전들, 그리고 한 주 안의 날들이다. 각 층은 이항(binomial) 개수이고, 그 "성공" 확률(probability)은 바로 아래 층에서 온다. 주어진 공식은 맨 아래 층을 정규분포(normal distribution)로 근사하고(연속성 수정(continuity correction)을 적용한다), 가운데 층을 푸아송 분포(Poisson distribution)로 근사한 다음 다시 정규분포로 근사하며, 맨 위 층은 정확한 이항분포로 그대로 두어서 만들어진다. 세 층이 보이고 나면, 할 일은 공식의 각 식이 어떤 근사에서 나왔는지 알아내고, 주어진 수치에서 각 근사가 쓸 만한지 따져 보는 것이다.

풀이

하루, 동전 하나

하루와 동전 하나를 고정한다. X를 그 동전을 M번 던져서 나온 앞면의 개수라 하자. 각 던지기는 독립(independent)이고 앞면이 나올 확률이 각각 p이므로

$$X \sim \mathrm{B}(M, p), \qquad \mathrm{E}(X) = Mp, \qquad \mathrm{Var}(X) = Mp(1-p).$$

M이 클 때 X를 정규확률변수 $X' \sim \mathrm{N}\big(Mp,\, Mp(1-p)\big)$로 근사한다. X는 정숫값을 가지므로 "앞면이 m개 미만"은 $X \le m-1$을 뜻하고, 연속성 수정을 하면 이는 $X' < m - \frac{1}{2}$가 된다. 따라서

$$r = \mathrm{P}(X < m) = \mathrm{P}(X \le m-1) \approx \Phi\left(\frac{m - \frac{1}{2} - Mp}{\sqrt{Mp(1-p)}}\right) = \Phi\left(\frac{2m - 1 - 2Mp}{2\sqrt{Mp(1-p)}}\right).$$

문제와 비교하면, 이는 $h \approx Lr$임을 말해 준다.

하루, 모든 동전

Y를 그날 L개의 동전 가운데 앞면이 m개 미만으로 나온 동전의 개수라 하자. 동전들은 독립적으로 던져지고 모두 똑같이 행동하므로, 각 동전은 독립적으로 확률 r로 "성공"하고

$$Y \sim \mathrm{B}(L, r), \qquad \mathrm{E}(Y) = Lr = h, \qquad \mathrm{Var}(Y) = Lr(1-r) = h(1-r).$$

생각해 보기 q의 공식에서 분모에는 $\sqrt{h}$가 있다. 왜 표준편차(standard deviation)가 $\sqrt{h(1-r)}$가 아니라 $\sqrt{h}$일까?

이 공식은 r가 작은 경우, 곧 동전 하나에서 앞면이 m개 미만으로 나오는 것은 드문 사건이고 L은 큰 경우를 위해 만들어졌다. 이 영역에서는 $1-r \approx 1$이므로 분산(variance)이 평균과 거의 같고, 이는 정확히 푸아송 근사 $Y \approx \mathrm{Po}(h)$의 상황이다. h도 어느 정도 크다면 $\mathrm{Po}(h)$는 다시 근사적으로 $\mathrm{N}(h,h)$이다. (같은 말로, $\mathrm{B}(L,r)$를 곧바로 정규분포로 근사하고 $1-r$를 1로 바꾸어도 된다.)

그러므로 $Y' \sim \mathrm{N}(h,h)$로 둔다. "동전이 l개 초과"는 $Y \geq l+1$을 뜻하고, 연속성 수정을 하면 $Y' > l + \frac{1}{2}$가 된다. 따라서

$$q = \mathrm{P}(Y > l) \approx 1 - \Phi\left(\frac{l+\frac{1}{2}-h}{\sqrt{h}}\right) = \Phi\left(\frac{h-l-\frac{1}{2}}{\sqrt{h}}\right) = \Phi\left(\frac{2h-2l-1}{2\sqrt{h}}\right),$$

여기서 표준정규분포의 대칭성(symmetry) $1-\Phi(z) = \Phi(-z)$를 썼다. 이것이 주어진 q이다.

모든 날

하루 동안 앞면이 m개 미만으로 나온 동전이 l개보다 많으면 그날을 **좋은 날**이라 부르자. 날마다 좋은 날일 확률은 똑같이 q이고, 서로 다른 날에는 서로 다른 던지기가 관련되므로 날들은 독립이다. 따라서 K일 가운데 좋은 날의 수는 $\mathrm{B}(K,q)$를 따르고

$$\mathrm{P}(\text{좋은 날이 정확히 } k\text{일}) = \binom{K}{k} q^k (1-q)^{K-k},$$

이며, q는 위와 같이 근사한다. 이것이 구하려던 결과이다.

수치 계산

여기서는 $Mp = 60$, $Mp(1-p) = 24$이므로

$$\frac{2m-1-2Mp}{2\sqrt{Mp(1-p)}} = \frac{96-1-120}{2\sqrt{24}} = \frac{-25}{9.798} \approx -2.55,$$

이고, $r \approx \Phi(-2.55) \approx 0.0054$, $h = 500r \approx 2.68$이다. 그러면

$$\frac{2h-2l-1}{2\sqrt{h}} \approx \frac{5.36-9}{3.27} \approx -1.11, \qquad q \approx \Phi(-1.11) \approx 0.133,$$

이고, 근사값은 $\binom{7}{2}q^2(1-q)^5 \approx 21 \times 0.0178 \times 0.490 \approx 0.18$이다.

> **생각해 보기** 각 근사는 모두 표준적인 것이다. 그 가운데 어느 것을 믿을 만한 조건 밖에서 쓰고 있는가?

세 층을 차례로 살펴보자.

- **맨 위 층.** $\mathrm{B}(7, q)$ 단계는 (q가 주어지면) 정확하므로 그 자체로는 오차를 만들지 않는다. 그러나 $k = 2$이므로 q의 오차를 제곱으로 키운다.
- **맨 아래 층.** $M = 100$이고 $Mp = 60$, $M(1-p) = 40$이면 이항분포의 정규근사를 흔히 쓰는 범위에 넉넉히 들어간다. 그러나 여기서는 이를 꼬리(tail) 쪽으로 표준편차의 2.55배만큼 들어간 곳에서 써서 약 0.005인 확률을 구하고 있다. 정규근사는 분포의 대부분에서 **절대**오차(absolute error)로는 좋지만, 꼬리에서는 **상대**오차(relative error)가 클 수 있고, 특히 $p \neq \frac{1}{2}$이어서 이항분포가 치우쳐(skewed) 있을 때 그렇다. r의 상대오차는 모두 그대로 $h = Lr$로 넘어가고, q는 h에 민감하다.
- **가운데 층.** $\mathrm{B}(500, r)$를 $\mathrm{Po}(h)$로 바꾸는 것은 아주 훌륭하다. r가 매우 작고 L이 크기 때문이다. 그러나 그다음에 $h \approx 2.7$인 $\mathrm{Po}(h)$를 정규분포로 근사하는 것은 정당화되지 않는다. 평균이 3보다 작은 푸아송 분포는 눈에 띄게 치우쳐 있고, 흔히 쓰는 경험 법칙은 평균이 적어도 약 10(어떤 이는 15나 20)이기를 요구한다.

그러므로 근사가 정확하리라고 기대하지는 않는다. 의심스러운 단계는 $\mathrm{B}(100, 0.6)$의 꼬리에 대한 정규근사와 평균이 작은 푸아송 분포에 대한 정규근사이다.

실제로 r의 정확한 값은 $\mathrm{P}(X \leq 47) \approx 0.00576$으로 정규근사 추정값보다 약 7% 크므로, h는 약 2.88이어야 한다. 그러면 정확한 $\mathrm{P}(Y > 4)$는 0.133이 아니라 약 0.165이다. 최종 확률은 0.18이 아니라 약 0.23이다. (이 특정한 수치에서는 $\mathrm{Po}(2.68)$의 정규근사가 우연히 푸아송 분포 자체와 거의 같은 꼬리 확률을 주므로(0.133 대 0.134), 피해의 대부분은 맨 아래 층에서 생긴다. 이런 행운을 미리 기대할 수는 없었을 것이다.)

검산

- 연속성 수정의 방향이 맞다. "m개 미만"은 $X \leq m - 1$이므로 $m - \frac{1}{2}$에서 멈추고, "l개 초과"는 $Y \geq l + 1$이므로 $l + \frac{1}{2}$에서 시작한다. 주어진 공식에도 정확히 $2m - 1$과 $2l + 1$이 들어 있다.
- 수치로는 $\Phi(-2.5516) = 0.005362$, $h = 2.681$, $q = \Phi(-1.1108) = 0.1333$이고, 결과는 0.1825이다. 정확한 이항분포 합으로 계산하면 $r = 0.005761$, $q = 0.1645$(2×10^4일에 대한 모의실험으로 0.164를 얻어 확인했다)이고 최종 답은 0.2314이다.

흔한 실수

- $m - \frac{1}{2}$ 대신 m을 쓰는 것(또는 $l + \frac{1}{2}$ 대신 l을 쓰는 것). 그러면 공식이 맞지 않는다.
- $\sqrt{h(1-r)}$를 쓴 뒤 $\sqrt{h}$에 이르지 못하는 것. 문제의 공식은 사실상 푸아송 근사를 쓰고 있기 때문에 인수 $1-r$를 버린 것이고, 이를 밝혀 써야 한다.
- "$Mp > 5$이고 $M(1-p) > 5$"만으로 정확도를 판단하는 것. 이 규칙은 분포의 중심에 관한 것이지, 0.005인 꼬리 확률에 관한 것이 아니다.

STEP 너머

이 문제는 근사를 여러 번 이어 쓸 때 오차가 어떻게 전파되는지, 그리고 꼬리에서 절대오차와 상대오차가 어떻게 다른지에 관한 것이다. 대학에서는 중심극한정리(central limit theorem)가 베리-에센 정리(Berry–Esseen theorem)로 더 정밀해지는데, 이 정리는 정규근사의 절대오차에 상한을 준다. 꼬리 확률에는 체르노프 부등식(Chernoff bounds)이나 큰 편차 이론(large-deviation theory)처럼 다른 도구가 필요하며, 이들은 꼬리 확률이 얼마나 빨리 줄어드는지를 기술한다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)는 푸아송 근사와 정규근사, 그리고 체르노프 유형의 부등식을 명료하게 다룬다. Grimmett과 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론: 입문)도 함께 보기에 좋다.

풀이

STEP II 2002, 문제 13

확률과 통계 • 변환된 분포함수

> **STEP II 2002, 13번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/02-s2-q13

핵심 아이디어

역학 단원에 들어 있지만, 이 문제는 분포함수(distribution function)의 변환을 다루는 확률 문제이다. 모든 것은 하나의 식에 달려 있다. G를 미분하면 $G'(y) = f(y) \cdot \dfrac{2}{(2-F(y))^2}$을 얻는데, 여기서 $f = F'$은 X의 확률밀도함수(density)이다. 따라서 Y의 확률밀도함수는 X의 확률밀도함수에 $\frac{1}{2}$과 2 사이에 갇힌 가중치를 곱한 것이다. 이것만 얻으면 Y의 각 기댓값(expectation)은 X의 확률밀도함수에 $[\frac{1}{2}, 2]$ 안의 가중치를 곱한 것의 적분이 되고, 피적분함수를 비교하면 부등식이 따라 나온다. 조건 $a > 0$은 피적분함수가 음이 아니도록 하기 위한 것이다.

풀이

G의 성질

문제의 의도대로 X가 $[a, b]$에서 확률밀도함수 $f(y) = F'(y) \geq 0$을 가져서, X의 확률이 모두 $[a, b]$ 안에 있다고 가정한다.

$F(a) = 0$이고 $F(b) = 1$이므로

$$G(a) = \frac{0}{2-0} = 0, \qquad G(b) = \frac{1}{2-1} = 1.$$

몫의 미분법(quotient rule)에 의해

$$G'(y) = \frac{F'(y)\big(2 - F(y)\big) - F(y)\big(-F'(y)\big)}{(2-F(y))^2} = \frac{2F'(y)}{(2-F(y))^2}.$$

분포함수는 감소하지 않으므로 $F'(y) \geq 0$이고, 따라서 분자는 음이 아니다. 분모는 $2 - F(y) \geq 1$의 제곱이므로 양수이다. 그러므로 $G'(y) \geq 0$이다.

범위를 구하자. F는 분포함수이므로 $0 \le F(y) \le 1$이다. 따라서

$$1 \le 2 - F(y) \le 2 \quad \Longrightarrow \quad 1 \le (2 - F(y))^2 \le 4 \quad \Longrightarrow \quad \tfrac{1}{2} \le \frac{2}{(2 - F(y))^2} \le 2,$$

이다. 여기서 모든 값이 양수이므로 제곱해도 부등호의 방향이 유지되고, 역수를 취하면 방향이 바뀌며, 2를 곱하면 크기만 조정된다. 이것이 구하려던 이중 부등식이다.

$G(a) = 0, G(b) = 1$이고 G가 감소하지 않으므로, G는 $[a, b]$에서 진정한 분포함수이며 확률변수(random variable) Y는 잘 정의된다. 그 확률밀도함수는

$$g(y) = G'(y) = w(y)\, f(y), \qquad \text{단, } w(y) = \frac{2}{(2 - F(y))^2} \in \left[\tfrac{1}{2}, 2\right].$$

$\mathrm{E}(Y)$의 범위

생각해 보기 부등식 $\frac{1}{2} \le w(y) \le 2$에 $yf(y)$를 곱해도 부등호의 방향이 유지되는 이유는 무엇인가?

$[a, b]$에서 $yf(y) \ge 0$이기 때문이다. $f(y) \ge 0$이고 $y \ge a > 0$이다. 바로 여기서 가정 $a > 0$이 쓰인다. 따라서

$$\tfrac{1}{2}\, yf(y) \le y\, w(y) f(y) \le 2\, yf(y) \qquad \text{단, } a \le y \le b,$$

이고, $[a, b]$에서 적분해도 부등식은 유지된다.

$$\tfrac{1}{2} \int_a^b yf(y)\, \mathrm{d}y \;\le\; \int_a^b y\, g(y)\, \mathrm{d}y \;\le\; 2 \int_a^b yf(y)\, \mathrm{d}y,$$

즉,

$$\tfrac{1}{2}\, \mathrm{E}(X) \le \mathrm{E}(Y) \le 2\, \mathrm{E}(X),$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

$\mathrm{Var}(Y)$의 범위

같은 방법으로 $y^2 f(y) \ge 0$이므로(이것은 $f \ge 0$만 있으면 된다), $w(y) \le 2$에 이것을 곱하고 적분하면

$$\mathrm{E}(Y^2) = \int_a^b y^2\, w(y) f(y)\, \mathrm{d}y \le 2 \int_a^b y^2 f(y)\, \mathrm{d}y = 2\, \mathrm{E}(X^2).$$

빼는 항에 대해서는 $(\mathrm{E}(Y))^2$의 **하계**가 필요하다. 앞 부분에서 $\mathrm{E}(Y) \ge \frac{1}{2}\mathrm{E}(X)$이고, $X \ge a > 0$이므로 $\mathrm{E}(X) > 0$이다. 양변이 모두 양수이므로 안심하고 제곱할 수 있다.

$$(\mathrm{E}(Y))^2 \ge \tfrac{1}{4}(\mathrm{E}(X))^2.$$

그러므로

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(Y) &= \mathrm{E}(Y^2) - (\mathrm{E}(Y))^2 \\ &\le 2\,\mathrm{E}(X^2) - \tfrac{1}{4}(\mathrm{E}(X))^2 \\ &= 2\big(\operatorname{Var}(X) + (\mathrm{E}(X))^2\big) - \tfrac{1}{4}(\mathrm{E}(X))^2 \\ &= 2\operatorname{Var}(X) + \tfrac{7}{4}(\mathrm{E}(X))^2,\end{aligned}$$

이다. 셋째 줄에서는 $\mathrm{E}(X^2) = \operatorname{Var}(X) + (\mathrm{E}(X))^2$을 사용하였다. 이것이 구하려던 범위이다.

검산

X가 $[1,3]$에서 균등분포(uniform distribution)를 따른다고 하면 $F(y) = \frac{1}{2}(y-1)$이고 $\mathrm{E}(X) = 2$이다. $Y \ge 1$이므로 $\mathrm{E}(Y) = 1 + \int_1^3 (1 - G(y))\,\mathrm{d}y$이고, $u = F(y)$로 치환하면

$$\mathrm{E}(Y) = 1 + 2\int_0^1 \frac{2(1-u)}{2-u}\,\mathrm{d}u = 1 + 4(1 - \ln 2) \approx 2.227,$$

이므로 1과 4 사이에 여유 있게 들어간다. 직관적으로 보면 w는 F가 작은 곳에서 작고 F가 1에 가까운 곳에서 크므로, Y는 구간의 위쪽으로 치우치고 여기서는 $\mathrm{E}(Y) > \mathrm{E}(X)$이다. 또한 임의의 구간 위의 임의의 거듭제곱 법칙 분포 300개에 대해 $\frac{1}{2}\mathrm{E}(X) \le \mathrm{E}(Y) \le 2\mathrm{E}(X)$와 분산 범위가 모두 성립함을 수치적으로 확인하였다. 관찰된 비 $\mathrm{E}(Y)/\mathrm{E}(X)$는 대략 0.92와 1.31 사이에 있었다.

흔한 실수

- $a > 0$이 왜 중요한지 잊는 것: X가 음수일 수 있다면 $yf(y)$가 음수일 수 있고, 그것을 곱하면 부등호의 방향이 바뀐다.
- $\mathrm{E}(Y) \le 2\mathrm{E}(X)$를 사용해 $\operatorname{Var}(Y)$의 범위를 구하는 것: 항 $(\mathrm{E}(Y))^2$은 빼는 항이므로 상계가 아니라 하계가 필요하다.
- $(y-\mu)^2$을 g에 대해 적분하여 $\operatorname{Var}(Y)$를 $\operatorname{Var}(X)$와 직접 비교하려는 것: 두 분산은 서로 다른 평균을 사용하므로, 대신 $\mathrm{E}(Y^2)$을 다루어야 한다.

STEP 너머

$g = wf$로 쓰는 것은 측도 변환(change of measure)의 간단한 예이다. 새 분포는 옛 분포에 대한 밀도(우도비(likelihood ratio), 또는 라돈–니코딤 도함수(Radon–Nikodym derivative))를 가지며, 그 비에 대한 범위는 기댓값에 대한 범위로 곧바로 옮겨 간다. 이 아

이디어는 통계학의 중요도 표집(importance sampling)과 금융수학에서 쓰는 확률측도 변환의 바탕이 된다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 분포함수, 확률밀도함수, 기댓값을 이 내용을 더 발전시키기에 알맞은 수준으로 다룬다.

풀이

STEP II 2002, 문제 14

확률과 통계 • 혼합분포와 베이즈 정리

STEP II 2002, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/02-s2-q14

핵심 아이디어

이것은 두 단계로 이루어진 실험이다. 먼저 한 구역이 선택되고, 그다음 그 구역에서 사고가 일어난다. 따라서 구역에 대해 조건을 건다(condition). 기댓값은 전체 기댓값의 법칙(law of total expectation)으로, 분포는 전확률 법칙(law of total probability)으로 구하고, 마지막에는 베이즈 정리(Bayes' theorem)로 질문의 방향을 뒤집는다. 한 구역의 사고 건수는 푸아송 분포(Poisson distribution)로 모형화한다. 문제가 평균만 주기 때문이며, $\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k/k!$ 꼴을 가진 목표 공식이 이 모형이 맞음을 확인해 준다.

풀이

설정

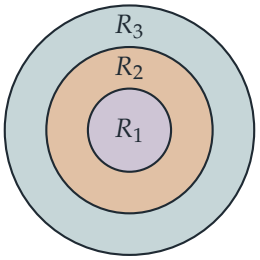
선택된 구역의 번호를 S라 하고, R_n에서의 평균 사고 건수를 $\lambda_n = 2 - \frac{n}{N}$이라 하자. 구역 R_n은 반지름이 $n-1$과 n인 원환(annulus)이므로 그 넓이는

$$\pi n^2 - \pi(n-1)^2 = \pi(2n-1).$$

이다. 섬 전체의 넓이는 πN^2이다. (검산하면 $\sum_{n=1}^{N}(2n-1) = N^2$이다.) 따라서

$$\mathrm{P}(S = n) = \frac{2n-1}{N^2}, \qquad n = 1, \ldots, N.$$

$S = n$일 때 X를 평균이 λ_n인 푸아송 분포로 모형화한다. 모든 n에 대해 $\lambda_n \geq 1 > 0$이므로 이 푸아송 분포들은 모두 의미가 있다.



넓이 $R_n = \pi(2n-1)$

장기적인 평균

큰 수의 법칙(law of large numbers)에 의해, 장기적으로 하루에 기록되는 평균 건수는 $\mathrm{E}(X)$이다. 구역에 대해 조건을 걸면

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= \sum_{n=1}^{N} \mathrm{P}(S=n)\,\mathrm{E}(X \mid S=n) = \sum_{n=1}^{N} \frac{2n-1}{N^2}\Big(2-\frac{n}{N}\Big)\\ &= 2\sum_{n=1}^{N}\frac{2n-1}{N^2} \;-\; \frac{1}{N^3}\sum_{n=1}^{N}(2n^2-n)\\ &= 2-\frac{1}{N^3}\Big(\frac{N(N+1)(2N+1)}{3}-\frac{N(N+1)}{2}\Big).\end{aligned}$$

이다. 선택 확률의 합이 1이므로 첫 번째 합은 1이다. 괄호 안에서는 주어진 $\sum n^2$ 공식과 $\sum n = \frac{1}{2}N(N+1)$을 사용하였다. $\frac{1}{6}N(N+1)$을 묶어 내면 $2(2N+1)-3 = 4N-1$이 남으므로

$$\mathrm{E}(X) = 2-\frac{(N+1)(4N-1)}{6N^2} = 2-\frac{1}{6}\Big(1+\frac{1}{N}\Big)\Big(4-\frac{1}{N}\Big),$$

이다. 여기서 N^2을 $N\cdot N$으로 나누어 두 인수에 하나씩 배분하였다. 이것이 구하려던 결과이다.

X의 분포

전확률 법칙에 의해 $k = 0, 1, 2, \ldots$에 대하여

$$\mathrm{P}(X=k) = \sum_{n=1}^{N}\mathrm{P}(S=n)\,\mathrm{P}(X=k\mid S=n) = \sum_{n=1}^{N}\frac{2n-1}{N^2}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-\lambda_n}\lambda_n^k}{k!}.$$

이제 각 부분을 N으로 나타내면

$$\lambda_n^k = \Big(\frac{2N-n}{N}\Big)^k = N^{-k}(2N-n)^k, \qquad \mathrm{e}^{-\lambda_n} = \mathrm{e}^{-2+n/N} = \mathrm{e}^{-2}\,\mathrm{e}^{n/N}.$$

이다. 인수 e^{-2}, N^{-2}, N^{-k}, $1/k!$은 n에 의존하지 않으므로 합의 밖으로 나온다.

$$\mathrm{P}(X=k) = \frac{\mathrm{e}^{-2}N^{-k-2}}{k!}\sum_{n=1}^{N}(2n-1)(2N-n)^k\,\mathrm{e}^{n/N},$$

이로써 원하는 결과를 얻는다.

$N = 3$이고 사고가 두 건인 경우

$\mathrm{P}(S = 2 \mid X = 2)$를 구하려 한다. 베이즈 정리에 의해

$$\mathrm{P}(S = 2 \mid X = 2) = \frac{\mathrm{P}(S = 2)\,\mathrm{P}(X = 2 \mid S = 2)}{\mathrm{P}(X = 2)}.$$

? **생각해 보기** $\mathrm{P}(X = 2)$를 끝까지 계산해야 할까?

그럴 필요 없다. 분자는 $\mathrm{P}(X = 2)$에 대한 합의 $n = 2$인 항일 뿐이다. 따라서 공통 인수 $\mathrm{e}^{-2}N^{-k-2}/k!$은 약분되고, 구하는 확률은 $\sum(2n-1)(2N-n)^k\mathrm{e}^{n/N}$의 $n = 2$인 항을 전체 합으로 나눈 값이다.

$N = 3, k = 2$일 때 항 $(2n-1)(6-n)^2\mathrm{e}^{n/3}$은

$$n = 1:\ 1 \cdot 25\,\mathrm{e}^{1/3}, \qquad n = 2:\ 3 \cdot 16\,\mathrm{e}^{2/3} = 48\,\mathrm{e}^{2/3}, \qquad n = 3:\ 5 \cdot 9\,\mathrm{e} = 45\,\mathrm{e}.$$

이다. 따라서 분자와 분모를 $\mathrm{e}^{2/3}$으로 나누면

$$\mathrm{P}(S = 2 \mid X = 2) = \frac{48\,\mathrm{e}^{2/3}}{25\,\mathrm{e}^{1/3} + 48\,\mathrm{e}^{2/3} + 45\,\mathrm{e}} = \frac{48}{48 + 45\,\mathrm{e}^{1/3} + 25\,\mathrm{e}^{-1/3}},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

검산

- $N = 1$이면 평균이 1인 구역 하나뿐이고, 공식도 $2 - \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 3 = 1$을 준다. $N \to \infty$이면 평균은 $2 - \frac{4}{6} = \frac{4}{3}$으로 수렴한다. 이는 $\int_0^1 2x(2-x)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}$과 일치하는데, 여기서 균일하게 고른 점이 상대 반지름 x에 있을 밀도(density)는 $2x$이다.
- $N = 3$일 때 평균은 $\frac{32}{27} \approx 1.185$이다. 4×10^5일에 대한 시뮬레이션(원판에서 균일하게 점을 고른 뒤 푸아송 건수를 추출)의 평균은 1.182였다. 또한 $\mathrm{P}(X = 2) \approx 0.209$(정확한 값 0.2094)를 얻었고, 사고가 두 건인 날 중 R_2에서 보낸 날의 비율은 0.372로 나왔다. 최종 답의 값은 0.3729이다.
- 분포 공식을 k에 대해 합하면, 시험해 본 모든 N에 대해 전체 확률이 1이 된다.

흔한 실수

- 구역을 넓이 $2n-1$에 비례하는 확률이 아니라 같은 확률 $1/N$으로 선택하는 것.
- 푸아송 분포의 **평균**들을 평균한 다음 X가 그 평균을 갖는 푸아송 분포라고 주장하는 것. 푸아송 분포들의 혼합은 푸아송 분포가 아니다. 이렇게 단순하게 평균을 거쳐 그대로 전달되는 것은 기댓값뿐이다.

STEP 너머

변수 X는 **혼합 분포**(*mixture distribution*)를 따른다. 구역은 은닉 변수(hidden variable) 역할을 하고, 마지막 문항은 이에 대한 베이즈 추론(Bayesian inference)을 수행한다. 위의 두 번째 실수는 전체 분산의 법칙(law of total variance) $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(\mathrm{Var}(X \mid S)) + \mathrm{Var}(\mathrm{E}(X \mid S))$으로 설명되는데, 이 법칙은 혼합 분포가 같은 평균을 갖는 단일 푸아송 분포보다 항상 더 넓게 퍼져 있음을 보여 준다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 조건부 기댓값(conditional expectation)과 이러한 혼합 분포를 잘 다룬다.

풀이

STEP III 2002, 문제 1

순수수학 • 이상적분과 부피

STEP III 2002, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

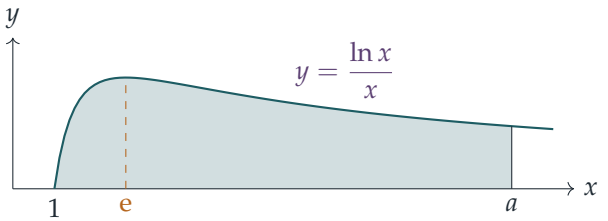
step.maths.org/questions/02-s3-q1

핵심 아이디어

$\frac{1}{x}$이 $\ln x$의 도함수(derivative)라는 사실만 알아차리면 두 적분 모두 쉬워진다. 넓이의 피적분함수(integrand)는 "어떤 함수와 그 함수의 도함수의 곱"이므로 보자마자 적분할 수 있다. 부피의 피적분함수 $(\ln x)^2/x^2$에는 x의 거듭제곱이 남아 있으므로 부분적분(integration by parts)을 두 번 하는데, 매번 $\ln x$의 거듭제곱을 미분하여 차수를 낮춘다. 흥미로운 부분은 두 극한(limit)의 대비이다. 곡선은 넓이가 한없이 커질 만큼 천천히 감소하지만, 이를 제곱하면 부피가 일정한 값에 머물 만큼 빠르게 감소한다.

풀이

$x \geq 1$이면 $\ln x \geq 0$이므로 곡선은 x축 위 또는 그 위쪽에 있고, 넓이는 단순히 적분값이다. 곡선은 $(1,0)$에서 출발하여 $x = \mathrm{e}$에서 최댓값에 이르고 (이때 $y' = (1 - \ln x)/x^2 = 0$), 그 뒤로는 축을 향해 천천히 감소한다.



넓이

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}(\ln x)^2\right) = \frac{\ln x}{x}$이므로

$$A(a) = \int_1^a \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^a = \tfrac{1}{2}(\ln a)^2,$$

이다. $\ln 1 = 0$이기 때문이다. (같은 방법으로, $u = \ln x$, $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x/x$로 치환하면 $\int_0^{\ln a} u\,\mathrm{d}u$를 얻는다.)

$a \to \infty$일 때 $\ln a \to \infty$이므로 $A(a) \to \infty$이다. 즉 넓이는 매우 느리게 커지기는 하지만 유계가 아니다.

부피

x축을 중심으로 회전시키면 부피는 $V(a) = \pi\int_1^a y^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_1^a \frac{(\ln x)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x$이다.

$u = (\ln x)^2$, $\mathrm{d}v = x^{-2}\,\mathrm{d}x$로 놓고 부분적분하면 $\mathrm{d}u = \frac{2\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$, $v = -\frac{1}{x}$이므로

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{(\ln x)^2}{x} + 2\int \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

$u = \ln x$, $\mathrm{d}v = x^{-2}\,\mathrm{d}x$로 같은 과정을 한 번 더 하면

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}.$$

이 둘을 합치면

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{(\ln x)^2 + 2\ln x + 2}{x} + C.$$

$x = 1$에서 괄호 안의 값은 $0 + 0 + 2$이므로 아래끝은 $-(-2) = +2$만큼 기여하고,

$$V(a) = \pi\left(2 - \frac{(\ln a)^2 + 2\ln a + 2}{a}\right).$$

생각해 보기 $(\ln a)^2/a$의 분자와 분모가 모두 무한대로 가는데, 이 값이 0으로 간다는 것을 어떻게 알 수 있을까?

로그는 어떤 양의 거듭제곱보다도 느리게 증가한다. 이를 엄밀하게 보이기 위해, 모든 $t > 0$에 대해 $\ln t < t$에서 출발하자 (직선 $y = t$는 $y = \ln t$보다 위에 있다. 차 $t - \ln t$는 $t = 1$에서 최솟값 1을 가진다). $t = a^{1/4}$로 놓으면 $\frac{1}{4}\ln a < a^{1/4}$, 즉 $\ln a < 4a^{1/4}$이다. 따라서 $a > 1$일 때

$$0 < \frac{(\ln a)^2}{a} < \frac{16\,a^{1/2}}{a} = \frac{16}{\sqrt{a}} \to 0, \qquad 0 < \frac{\ln a}{a} < \frac{4}{a^{3/4}} \to 0,$$

이고, 물론 $2/a \to 0$이다. 그러므로 $V(a)$ 안의 분수는 0으로 가고,

$$V(a) \to 2\pi \quad \text{단, } a \to \infty.$$

피적분함수가 양수이므로 $V(a)$는 a에 대해 증가한다. 따라서 부피는 2π를 향해 꾸준히 커지지만 결코 그 값에 도달하지는 않는다. 회전시키는 영역의 넓이는 무한하지만 입체의 부피는 유한한 것이다.

검산

- $a = 1$이면 두 공식 모두 당연히 0을 준다. $A(1) = 0$이고 $V(1) = \pi(2-2) = 0$이다.
- $-\big((\ln x)^2 + 2\ln x + 2\big)/x$를 미분하면 다시 $(\ln x)^2/x^2$가 나온다 ($2\ln x$ 항과 2 항은 괄호의 도함수와 상쇄된다).
- 수치적으로, $\pi \int_1^{10} (\ln x)^2/x^2 \, \mathrm{d}x$에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면 2.54247이 나와 공식과 일치한다. 또 $x = \mathrm{e}^t$로 놓으면 무한 구간에서의 부피는 $\pi \int_0^{\infty} t^2 \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$이고, 이를 수치 계산하면 $6.283185\ldots = 2\pi$이다.

흔한 실수

- 아래끝을 빠뜨리는 것. $\ln 1 = 0$ 때문에 $x = 1$에서 대부분의 항이 사라지지만, 상수 항 $-2/x$는 사라지지 않으며 바로 이 항이 극한값 2π 전체를 만들어 낸다.
- 아무 근거 없이 $(\ln a)^2/a \to 0$이라고 주장하는 것. $\ln a < 4a^{1/4}$와 같은 한 줄짜리 비교면 충분하다.

STEP 너머

이 문제는 유한한 부피와 무한한 겉넓이를 가진 입체인 "가브리엘의 나팔(Gabriel's horn)" ($y = 1/x$의 회전체)의 사촌 격이다. 여기서는 평면 영역조차 넓이가 무한하다. 치환 $x = \mathrm{e}^t$를 하면 부피는 $\pi \int_0^{\infty} t^2 \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t = \pi\,\Gamma(3) = 2!\,\pi$가 되는데, 이것이 감마 함수(gamma function) $\Gamma(n+1) = n!$를 처음 엿보는 장면이다. 이상적분(improper integral)과 "로그는 거듭제곱에 진다" 같은 비교를 엄밀하게 이해하는 것은 대학 1학년 해석학의 핵심 주제이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 이에 대해 읽어 보기 좋은 책이다.

풀이

STEP III 2002, 문제 2

순수수학 • 역탄젠트 급수

> **STEP III 2002, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/02-s3-q2

핵심 아이디어

첫 번째 결과는 탄젠트 덧셈정리(tangent addition formula)를 모양만 바꾼 것이다. 실제로 해야 할 일은 양변이 tan가 일대일(one-to-one)인 같은 구간 안의 각이라는 것을 확인하는 것뿐이다. 이 공식을 얻고 나면, 귀납법(induction)은 공식을 한 번 적용하고 인수분해를 조금 하는 것으로 끝난다. 마지막 합에서는 $r^2 - r + 1$이 $r^2 + r + 1$에서 r을 하나 옮긴 것에 지나지 않는다는 점을 알아차리는 것이 요령이다. 따라서 새 급수(series)는 기존 급수의 맨 앞에 항이 하나 더 붙은 것이다.

풀이

덧셈정리

$A = \arctan a$, $B = \arctan b$라 하자. 그러면 $\tan A = a$, $\tan B = b$이고

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \frac{a + b}{1 - ab},$$

이며, $ab < 1$이므로 이 식은 의미가 있다. 이로써 $A + B$와 $\arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$의 탄젠트 값이 같음을 알 수 있다. 그러나 tan는 주기가 π이므로, 이것만으로 두 값이 같다고 할 수는 없다. 따라서 두 각이 모두 tan가 일대일인 한 구간 안에 있어야 한다.

> ? **생각해 보기** 왜 $\tan(A + B) = \frac{a+b}{1-ab}$만으로 증명이 끝나지 않는가?

증명이 끝나지 않는 까닭은 arctan의 값이 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 안에서만 나오기 때문이다. $A + B$도 이 구간 안에 있음을 확인해야 한다.

▶ $0 < a < 1$이고 arctan는 증가함수이므로 $0 < A < \frac{\pi}{4}$이다. 마찬가지로 $0 < B < \frac{\pi}{4}$이므

로 $0 < A + B < \frac{\pi}{2}$이다.

- $a + b > 0$이고 $1 - ab > 0$이므로 분수 $\frac{a+b}{1-ab}$는 양수이다. 따라서 그 arctan 값도 $(0, \frac{\pi}{2})$ 안에 있다.

함수 tan는 $(0, \frac{\pi}{2})$에서 순증가(strictly increasing)하므로 일대일이다. 따라서 이 구간에서 탄젠트 값이 같은 두 각은 서로 같고, 다음을 얻는다.

$$\arctan a + \arctan b = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right). \qquad \checkmark$$

귀납법

$S_n = \sum_{r=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{r^2+r+1}\right)$이라 하자. 보여야 할 것은 $S_n = \arctan\left(\frac{n}{n+2}\right)$이다.

기저 단계(*base case*). $n = 1$일 때 양변은 모두 $\arctan\frac{1}{3}$이다.

귀납 단계(*inductive step*). 어떤 $n \geq 1$에 대하여 $S_n = \arctan\left(\frac{n}{n+2}\right)$이라 가정하자. 다음 항에서는

$$(n+1)^2 + (n+1) + 1 = n^2 + 3n + 3,$$

이므로

$$S_{n+1} = \arctan\left(\frac{n}{n+2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{n^2+3n+3}\right).$$

두 인수 모두 0보다 크고 1보다 작으므로, $a = \frac{n}{n+2}$, $b = \frac{1}{n^2+3n+3}$으로 두고 덧셈정리를 적용할 수 있다. $\frac{a+b}{1-ab}$의 분자와 분모에 $(n+2)(n^2+3n+3)$을 곱하면

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{1-ab} &= \frac{n(n^2+3n+3)+(n+2)}{(n+2)(n^2+3n+3)-n} \\ &= \frac{n^3+3n^2+4n+2}{n^3+5n^2+8n+6}.\end{aligned}$$

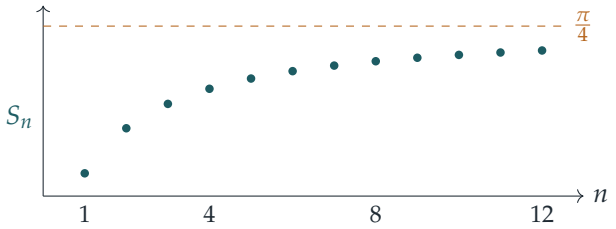
두 삼차식은 모두 음의 정수에서 0이 된다. 분자는 $n = -1$에서, 분모는 $n = -3$에서 0이다. 인수분해하면

$$\frac{a+b}{1-ab} = \frac{(n+1)(n^2+2n+2)}{(n+3)(n^2+2n+2)} = \frac{n+1}{n+3},$$

이며, $n^2 + 2n + 2 = (n+1)^2 + 1 > 0$이므로 약분할 수 있다. 따라서 $S_{n+1} = \arctan\left(\frac{n+1}{(n+1)+2}\right)$이고, 이는 $n+1$에 대한 명제이다. 수학적 귀납법에 의하여 모든 $n \geq 1$에 대하여 결과가 성립한다. ✓

무한급수의 합. $n \to \infty$일 때 $\frac{n}{n+2} \to 1$이다. arctan는 연속(continuous)이므로

$$\sum_{r=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{r^2+r+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \arctan\left(\frac{n}{n+2}\right) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$



마지막 합

$s = r - 1$로 놓자. 그러면

$$r^2 - r + 1 = (s+1)^2 - (s+1) + 1 = s^2 + s + 1.$$

r이 $1, 2, 3, \ldots$을 지나갈 때 s는 $0, 1, 2, \ldots$을 지나간다. $s = 0$인 항은 $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$이고, 나머지 항들($s \geq 1$)은 정확히 방금 합을 구한 급수를 이룬다. 따라서

$$\sum_{r=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{r^2 - r + 1}\right) = \arctan 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{s^2 + s + 1}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}. \qquad \checkmark$$

첫 번째 급수가 수렴(converge)하므로 두 번째 급수도 수렴하고, 따라서 첫 항을 따로 떼어내는 것은 정당하다.

검산

- $n = 2$일 때: $\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{7}$의 탄젠트 값은 $\frac{10/21}{20/21} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$로, 공식이 예측하는 값과 같다.
- 수치적으로 $S_{2000} \approx 0.784898$이고, $\arctan\frac{2000}{2002}$는 이 값과 10^{-12} 이내로 일치하며, $\frac{\pi}{4} \approx 0.785398$이다.
- 두 번째 급수를 $r = 10^6$까지 더하면 $1.5707953\ldots$이 되어 $\frac{\pi}{2}$와의 차이가 10^{-6} 이내이다. 이는 n개 항까지 더한 뒤의 차이 $\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{n-1}{n+1} = \arctan\frac{1}{n} \approx \frac{1}{n}$과 들어맞는다.

흔한 실수

- "양변의 tan 값이 같다"에서 멈추는 것. 범위에 대한 논증이 없으면 증명은 불완전하다. (예를 들어 $a = b = 2$이면 공식이 성립하지 않는다. 좌변은 양수이지만 $\arctan(-\frac{4}{3})$은 음수이다.)
- 귀납 단계에서 공식을 쓰기 전에 두 인수가 모두 $(0, 1)$ 안에 있는지 확인하는 것을 잊는 것.

- 마지막 합을 또다시 $\frac{\pi}{4}$로 쓰는 것. $r \mapsto r-1$로 옮기면 맨 앞에 $\arctan 1$이라는 항이 하나 더 붙는다.

STEP 너머

귀납법보다 더 깔끔한 방법이 있다. $\frac{1}{r^2+r+1} = \frac{(r+1)-r}{1+r(r+1)}$이므로 각 항은 $\arctan(r+1) - \arctan r$이다. 따라서 합은 **망원급수**(*telescoping*)처럼 소거되어 $\arctan(n+1) - \frac{\pi}{4}$가 되고, 이는 뺄셈정리에 의하여 $\arctan \frac{n}{n+2}$이다. 망원급수 구조를 알아보는 것과 부분합의 극한을 연속성으로 정당화하는 것은 대학 첫 해석학(analysis) 강의에서 늘 쓰는 도구이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)는 급수와 연속성을 꼼꼼하게 다루며, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에는 이런 종류의 STEP 스타일 연습 문제가 더 많이 실려 있다.

풀이

STEP III 2002, 문제 3

순수수학 • 곡선 그리기

STEP III 2002, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/02-s3-q3

핵심 아이디어

모든 것은 그래프의 모양에서 나온다. 그래프는 $x = b$에서 아래로 향하는 연직 접선(vertical tangent)을 가지고 출발하여, 하나뿐인 최솟값(minimum)까지 내려간 다음, 한없이 올라간다. 출발점의 높이와 최솟값의 높이를 알고 나면, $\mathrm{f}(x) = c$의 해의 개수를 세는 일은 높이 c에 수평선을 긋고 그것이 곡선과 몇 번 만나는지 보는 것에 지나지 않는다. 두 개의 수치 방정식은 c^2의 값이 이 범위들의 경계와 내부에 놓이는 특수한 경우이다.

풀이

그래프

왼쪽 끝에서 $\mathrm{f}(b) = a\sqrt{b}$이다. $x > b$에 대하여 미분(differentiation)하면

$$\mathrm{f}'(x) = \frac{a}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x-b}}.$$

$x \to b^+$일 때 둘째 항이 $-\infty$로 가므로, 곡선은 점 $(b, a\sqrt{b})$에서 곧장 아래로 향하며 출발한다(연직 접선).

두 제곱근이 모두 양수이므로

$$\mathrm{f}'(x) < 0 \iff a\sqrt{x-b} < \sqrt{x} \iff a^2(x-b) < x \iff x < \frac{a^2 b}{a^2-1},$$

이며, 마지막 단계에서는 $a^2 - 1 > 0$을 이용하였다. 따라서 f는 $[b, x_0]$에서 순감소(strictly decreasing)하고 $[x_0, \infty)$에서 순증가(strictly increasing)한다. 여기서

$$x_0 = \frac{a^2 b}{a^2-1}.$$

최솟점에서 $x_0 - b = \dfrac{b}{a^2-1}$이므로

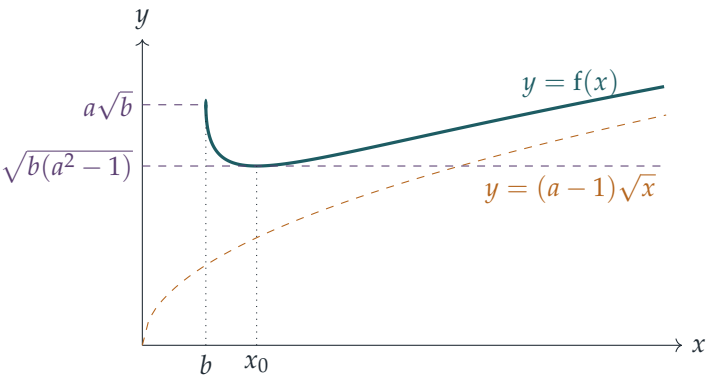
$$\mathrm{f}(x_0) = a\cdot\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a^2-1}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a^2-1}} = \frac{(a^2-1)\sqrt{b}}{\sqrt{a^2-1}} = \sqrt{b(a^2-1)}.$$

x가 클 때, 유리화(rationalising)하면

$$\mathrm{f}(x) = (a-1)\sqrt{x} + \left(\sqrt{x}-\sqrt{x-b}\right) = (a-1)\sqrt{x} + \frac{b}{\sqrt{x}+\sqrt{x-b}},$$

이므로, $a > 1$이기 때문에 $\mathrm{f}(x) \to \infty$이고, 곡선은 $y = (a-1)\sqrt{x}$의 바로 위에 놓이며 $x \to \infty$일 때 이 곡선에 다가간다.

마지막으로, 출발점의 높이는 최솟값보다 크다. $a^2b > (a^2-1)b$이므로 $a\sqrt{b} > \sqrt{b(a^2-1)}$이다.



해의 개수 세기

최솟값을 $m = \sqrt{b(a^2-1)}$, 출발값을 $M = a\sqrt{b}$라 하면 $0 < m < M$이다. 두 단조(monotonic) 구간 각각에서 f는 연속(continuous)이고 순단조이므로, 치역의 각 값을 정확히 한 번씩 갖는다.

- $[b, x_0]$에서 f는 $[m, M]$의 각 값을 정확히 한 번씩 갖는다.
- $[x_0, \infty)$에서 f는 $[m, \infty)$의 각 값을 정확히 한 번씩 갖는다.

두 구간의 공통점은 x_0뿐이며, 이 점에서의 값은 m이다.

모든 $x \geq b$에 대하여 $\mathrm{f}(x) \geq m$이므로, $c < m$이면 방정식 $\mathrm{f}(x) = c$는 해를 갖지 않는다. $c > 0$일 때 이는 $c^2 < m^2$과 같으므로

$$c^2 < b(a^2-1) \quad\Longrightarrow\quad \text{해 없음},$$

이고, 이것이 보여야 할 내용이었다. 나머지 경우는 다음과 같다.

생각해 보기 왜 $c^2 = a^2 b$일 때 해가 하나가 아니라 두 개인가?

$c = M$일 때 왼쪽 구간은 끝점 $x = b$ 자체를 해로 내놓는데, 정의역(domain)이 $x = b$를 포함하므로 이것은 엄연한 해이다. 오른쪽 구간은 더 멀리에서 또 하나의 해를 내놓는다. $c > M$일 때에만 왼쪽 구간에서 해가 나오지 않는다. 따라서 $c > 0$에 대하여

- $c^2 = b(a^2 - 1)$일 때(수평선이 최솟점에 접하므로 $x = x_0$뿐이다) 또는 $c^2 > a^2 b$일 때(증가하는 가지만 그만큼 높이 올라간다) **해는 정확히 하나**이다.
- $b(a^2 - 1) < c^2 \le a^2 b$일 때(각 가지에 하나씩) **해는 정확히 두 개**이다.

소문항 (i)

여기서는 $a = 3$, $b = 2$, $c = 4$이므로 $b(a^2 - 1) = 16 = c^2$이다. 수평선이 최솟점에 접하므로 해는 정확히 하나이고,

$$x = x_0 = \frac{9 \cdot 2}{8} = \frac{9}{4}.$$

실제로 $3 \cdot \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$이다. 직접 풀어 보면, $3\sqrt{x} - 4 = \sqrt{x - 2}$로 정리하고 제곱하여 $8x - 24\sqrt{x} + 18 = 0$, 즉 $(2\sqrt{x} - 3)^2 = 0$을 얻는다. 중근(repeated root)은 접함(tangency)의 대수적 표시이다.

소문항 (ii)

여기서는 $a = 3$, $b = 3$, $c = 5$이므로 $b(a^2 - 1) = 24 < 25 = c^2 < 27 = a^2 b$이고, 해는 정확히 두 개이다. 해를 구하기 위해 방정식을 $3\sqrt{x} - 5 = \sqrt{x - 3}$으로 쓰고 제곱하면

$$9x - 30\sqrt{x} + 25 = x - 3 \quad \Longrightarrow \quad 4x - 15\sqrt{x} + 14 = 0.$$

$\sqrt{x}$에 대한 이차방정식으로 보면 $(\sqrt{x} - 2)(4\sqrt{x} - 7) = 0$이므로 $\sqrt{x} = 2$ 또는 $\sqrt{x} = \frac{7}{4}$이고,

$$x = 4 \qquad \text{또는} \qquad x = \frac{49}{16}.$$

제곱하면 무연근(spurious roots)이 생길 수 있으므로 두 값을 원래 방정식에 대입하여 확인한다. 두 값 모두 $x \ge 3$을 만족하고($\frac{49}{16} = 3.0625$이므로),

$$3 \cdot 2 - \sqrt{1} = 5, \qquad 3 \cdot \frac{7}{4} - \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{21}{4} - \frac{1}{4} = 5.$$

따라서 둘 다 실제 해이며, 해가 두 개라는 결과와 일치한다. 예상대로 $x_0 = \frac{27}{8} = 3.375$의 양쪽에 하나씩 놓인다.

검산

- $a = \frac{3}{2}, b = 2$(그림의 경우)일 때 $x_0 = \frac{18}{5}$이고 $f(\frac{18}{5}) = \frac{3}{2}\sqrt{3.6} - \sqrt{1.6} = \sqrt{2.5} \approx 1.581$로, $f(2) = \frac{3}{2}\sqrt{2} \approx 2.121$보다 작다.
- 무작위로 고른 200개의 순서쌍 (a, b)에 대해 촘촘한 격자 위에서 f를 수치적으로 조사한 결과, x_0에서 최솟값이 $\sqrt{b(a^2-1)}$임이 확인되었고, $y = c$와의 교차 횟수를 세어 c^2의 세 범위에서 각각 0, 2, 1개의 해를 얻었다.
- (i)에서 중근이 나온 것은 c^2이 정확히 $b(a^2-1)$에 놓인다는 사실과 맞아떨어진다. (ii)에서 $c^2 = 25$는 24와 27 사이에 엄격히 놓이며, 실제로 두 근을 찾았다.

흔한 실수

- $c^2 = a^2b$를 "해가 하나" 경우에 넣는 것. $x = b$는 정의역에 속하므로 해로 센다.
- 제곱한 뒤 확인하지 않는 것. 여기서는 두 근이 모두 살아남지만, 각각에 대해 $3\sqrt{x} - 5 \geq 0$과 $x \geq 3$을 반드시 확인해야 한다.
- $f \to \infty$가 되게 하는 것이 $a > 1$이라는 조건임을 잊는 것. $a \leq 1$이면 최솟값이 없고 그림이 완전히 달라진다.

STEP 너머

해의 개수를 세는 논증은 해석학의 두 가지 사실에 기대고 있다. 구간에서 연속인 함수는 양 끝값 사이의 모든 값을 갖는다는 것(중간값 정리(intermediate value theorem))과, 순단조함수는 각 값을 많아야 한 번 갖는다는 것이다. 이 둘을 합치면 그림이 증명으로 바뀐다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해)는 두 사실을 꼼꼼하게 전개하고, 왜 연속성이 바로 필요한 가정인지를 보여 준다.

풀이

STEP III 2002, 문제 4

순수수학 • 디오판토스 부등식

STEP III 2002, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/02-s3-q4

핵심 아이디어

방정식 $x^3 + x^2 = y^3 - y^2$는 빠르게 커지는 양과 $-y^2$ 때문에 억눌리는 양을 맞붙인다. 그래서 y는 x를 "앞질러야" 하지만, 그 차이는 1보다 작다. 이 두 부등식(inequality)이 y를 x와 $x+1$ 사이에 엄격하게 가두는데, 그 틈에 들어가는 정수(integer)는 없다. 마지막 부분에서는 추가로 생기는 해가 0이나 음수에서만 나올 수 있으며, (m, n)을 $(-n, -m)$으로 바꾸는 깔끔한 대칭(symmetry)이 경우 나누기(casework)를 절반으로 줄여 준다.

풀이

첫 번째 결과

$x, y > 0$이고 $x^3 + x^2 = y^3 - y^2$라 하자. 귀류법(proof by contradiction)으로 $x \geq y$라고 가정한다. 양의 실수에서 세제곱과 제곱은 증가하므로(increasing)

$$x^3 + x^2 \geq y^3 + y^2 > y^3 - y^2,$$

이고, 여기서 엄격한 부등호는 $y^2 > 0$을 이용한 것이다. 이는 주어진 방정식에 모순이므로 $x < y$이다.

두 번째 결과

이제 $0 < x \leq y - 1$이라 하자. 그러면 $y \geq x + 1 > 1$이다. $f(t) = t^3 - t^2$라 두면 $t > \frac{2}{3}$에서 $f'(t) = 3t^2 - 2t = t(3t - 2) > 0$이므로, f는 $[1, \infty)$에서 증가한다. $y \geq x + 1$이고 두 값 모

두 이 구간에 속하므로

$$\begin{aligned} y^3 - y^2 = f(y) \geq f(x+1) &= (x+1)^2\big((x+1)-1\big) \\ &= x(x+1)^2 = x^3 + 2x^2 + x \\ &= (x^3 + x^2) + (x^2 + x) \\ &> x^3 + x^2, \end{aligned}$$

이다. $x > 0$이면 $x^2 + x > 0$이기 때문이다. 따라서 요구한 대로 $x^3 + x^2 < y^3 - y^2$이다.

두 결과를 합치면, 양수 x에 대하여 $x^3 + x^2 = y^3 - y^2$를 만족하는 양수 y는 모두

$$x < y < x + 1.$$

을 만족한다.

양의 정수 쌍은 없다

양의 정수 a와 b가 $a^3 - b^3 = a^2 + b^2$를 만족한다고 하자. 우변이 양수이므로 $a^3 > b^3$이고 $a > b$이다. 식을 정리하면

$$b^3 + b^2 = a^3 - a^2,$$

이고, 이는 위의 방정식에서 $x = b, y = a$로 둔 것이며 둘 다 양수이다. 따라서 $b < a < b + 1$이다.

? 생각해 보기 정수라는 조건은 실제로 어디에서 쓰이는가?

바로 여기에서만 쓰인다. b와 $b+1$ 사이에 엄격하게 들어가는 정수는 없다. 달리 말하면, a, b가 정수일 때 $a > b$이면 $a \geq b + 1$, 즉 $0 < b \leq a - 1$이 되고, 그러면 두 번째 결과에 의해 $b^3 + b^2 < a^3 - a^2$가 되어 방정식에 모순이다. 따라서 그러한 양의 정수 쌍은 존재하지 않는다. (실수에서는 해가 얼마든지 있다. 각 $x > 0$마다 $y \in (x, x+1)$인 해가 하나씩 있는데, 정수는 그저 이를 비껴갈 뿐이다.)

모든 정수 쌍

이제

$$m^3 - n^3 = m^2 + n^2. \qquad (*)$$

을 만족하는 모든 정수 m, n을 구하려 한다. 두 가지 관찰이 수고를 덜어 준다.

- (m, n)이 해이면 $(-n, -m)$도 해이다. 실제로 $(-n)^3 - (-m)^3 = m^3 - n^3$이고, 제곱의 합은 변하지 않는다.
- $(*)$의 우변은 음이 아니므로 $m^3 \geq n^3$, 즉 $m \geq n$이며, 등호는 $m^2 + n^2 = 0$, 즉 $m = n = 0$일 때만 성립한다.

둘 중 하나가 0인 경우. $n = 0$이면 $m^3 = m^2$이므로 $m = 0$ 또는 $m = 1$이다. $m = 0$이면 $-n^3 = n^2$이므로 $n = 0$ 또는 $n = -1$이다. 이로부터 $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,-1)$을 얻는다(마지막 것은 대칭에 의한 $(1,0)$의 상이다).

둘 다 양수인 경우. 앞 부분에 의해 불가능하다.

둘 다 음수인 경우. 이때 $-n$과 $-m$은 둘 다 양수이고, $(-n,-m)$은 두 성분이 모두 양수인 해가 되므로 불가능하다.

부호가 서로 다른 경우. $m > n$이므로 $m > 0 > n$이다. $p \geq 1$로 $n = -p$라 두면 $(*)$는

$$m^3 + p^3 = m^2 + p^2, \qquad \text{즉} \qquad m^2(m-1) + p^2(p-1) = 0.$$

이 된다. 양의 정수에 대해서는 두 항이 모두 ≥ 0이므로 둘 다 0이어야 하고, 따라서 $m = p = 1$이다. 이로부터 $(1,-1)$을 얻으며, 실제로 $1-(-1) = 2 = 1+1$이다.

따라서 $m^3 - n^3 = m^2 + n^2$의 정수해 (m,n)은 정확히

$$(m,n) = (0,0), \quad (1,0), \quad (0,-1), \quad (1,-1).$$

이다. "쌍"이 자명한 쌍을 제외하는 뜻이라면 $(0,0)$을 뺀다.

검산

각 쌍은 손으로 확인할 수 있다. $(1,0)$이면 $1-0 = 1 = 1+0$, $(0,-1)$이면 $0-(-1) = 1 = 0+1$, $(1,-1)$이면 $2 = 2$이다. $|m|, |n| \leq 300$인 모든 경우를 컴퓨터로 탐색하면 정확히 이 네 해만 나온다. 첫 두 결과를 확인하기 위해 임의의 $x > 0$에 대해 $y^3 - y^2 = x^3 + x^2$를 수치적으로 풀어 보면 언제나 $x < y < x+1$이 나왔다. 예를 들어 $x = 1$이면 $y \approx 1.696$이다.

흔한 실수

- 마지막 부분에서 0과 음의 정수를 빠뜨리는 것. 해는 모두 바로 그곳에 있다.
- 두 정수 중 어느 것이 "앞"에 오는지 멋대로 가정하는 것. 여기서는 세제곱의 차가 양수이므로 더 큰 수가 앞에 와야 한다. 이 점을 밝혀 두어야 한다.
- $t \geq 1$에서 $t^3 - t^2$가 증가한다는 사실을 언급하지 않고 그저 "전개"만으로 두 번째 결과를 증명하는 것. $f(y) \geq f(x+1)$ 단계에는 이 사실이 필요하다.

STEP 너머

"실수해가 연속한 두 정수 사이에 엄격하게 갇혀 있으므로 정수해는 없다"는 논법은 디오판토스 방정식(Diophantine equation) 연구의 표준적인 도구이며, 정수에 대한 다항방정식

을 만나면 흔히 가장 먼저 시도해 볼 방법이다. 이렇게 해의 범위를 제한하는 것은 이러한 방정식 상당수가 유한 개의 해만 가진다는 것을 증명하는 방법이기도 하며, 그 해들은 유한한 탐색으로 찾을 수 있다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 이런 종류의 정수론에 대한 훌륭한 입문서이다.

풀이

STEP III 2002, 문제 5

순수수학 • 사차방정식의 인수분해

STEP III 2002, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/02-s3-q5

핵심 아이디어

이차식이 완전제곱식(perfect square)의 상수배가 되는 것은 정확히 그 판별식(discriminant)이 0일 때이다. 첫 부분은 이것이 전부이며, 이것은 나머지 부분을 움직이는 원동력이기도 하다. 이차식의 제곱에서 사차식(quartic)을 뺀 것이 완전제곱식의 상수배가 되도록 t를 고를 수 있다면, 사차식은 **두 제곱의 차**(difference of two squares)가 되고 곧바로 인수분해된다. 이것이 사차식에 대한 페라리(Ferrari)의 고전적인 방법이며, 이 방법은 사차식 문제를 t에 대한 삼차방정식(cubic) 문제로 바꾸어 준다.

풀이

이차식에 대한 조건

$p \neq 0$이라고 하자. 완전제곱식으로 고치면

$$px^2 + qx + r = p\left(x + \frac{q}{2p}\right)^2 + r - \frac{q^2}{4p}.$$

이 식이 어떤 h에 대하여 $p(x+h)^2$ 꼴이 되는 것은 정확히 상수 $r - \frac{q^2}{4p}$가 0일 때, 즉

$$q^2 = 4pr,$$

일 때이며, 이때 $h = \frac{q}{2p}$이다. (거꾸로, $p(x+h)^2 = px^2 + 2phx + ph^2$를 전개하면 $q^2 = 4p^2h^2 = 4pr$이므로, 이 조건은 충분조건일 뿐 아니라 필요조건이기도 하다.) $p = 0$이면 가능한 경우는 $q = r = 0$뿐이다. 이때 조건 $q^2 = 4pr$에서 여전히 $q = 0$이 나오지만, $r = 0$도 따로 필요하다.

t에 대한 방정식

전개하면

$$\left(x^2+\tfrac{1}{2}bx+t\right)^2 = x^4+bx^3+\left(\tfrac{1}{4}b^2+2t\right)x^2+btx+t^2.$$

$\frac{1}{2}b$를 고른 것은 바로 사차식을 뺄 때 x^3 항이 소거되도록(x^4 항도 소거된다) 하기 위해서이다.

$$\left(x^2+\tfrac{1}{2}bx+t\right)^2-\left(x^4+bx^3+cx^2+dx+e\right) = \left(\tfrac{1}{4}b^2+2t-c\right)x^2+(bt-d)x+\left(t^2-e\right).$$

이것은 $p=\frac{1}{4}b^2+2t-c$, $q=bt-d$, $r=t^2-e$인 이차식이고, 우리는 이것이 완전제곱식의 상수배($k=p$배)인 $k(x+h)^2$과 같기를 원한다. 첫 부분에 의하여 t는

$$(bt-d)^2 = 4\left(\tfrac{1}{4}b^2+2t-c\right)\left(t^2-e\right).$$

을 만족해야 한다. 이것은 t에 대한 삼차방정식이므로(우변의 t^3 항의 계수는 8이고, 좌변은 t에 대한 이차식일 뿐이다), 언제나 적어도 하나의 실근을 가진다.

사차식의 인수분해

여기서 $b=6, c=9, d=-2, e=-7$이므로

$$\tfrac{1}{4}b^2+2t-c = 2t, \qquad bt-d = 6t+2, \qquad t^2-e = t^2+7.$$

t에 대한 방정식은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}(6t+2)^2 &= 8t\left(t^2+7\right)\\ 36t^2+24t+4 &= 8t^3+56t\\ 0 &= 2t^3-9t^2+8t-1.\end{aligned}$$

생각해 보기 이 삼차방정식의 근을 어떻게 빨리 찾을 수 있을까?

먼저 작은 값을 넣어 본다. 계수의 합이 $2-9+8-1=0$이므로 $t=1$이 근이다. 각 근이 모두 올바른 인수분해를 주므로 어느 근을 써도 된다. 가장 간단한 근이 가장 간단한 인수분해를 준다.

$t=1$이면 차는

$$2x^2+8x+8 = 2(x+2)^2,$$

이므로 $k=2, h=2$이고, 실제로 $8^2=4\cdot 2\cdot 8$이다. 따라서

$$\left(x^2+3x+1\right)^2-\left(x^4+6x^3+9x^2-2x-7\right) = 2(x+2)^2,$$

즉

$$x^4+6x^3+9x^2-2x-7 = \left(x^2+3x+1\right)^2-\left(\sqrt{2}\,(x+2)\right)^2.$$

이것은 두 제곱의 차이므로

$$\begin{aligned} x^4+6x^3+9x^2-2x-7 &= \left(x^2+3x+1-\sqrt{2}(x+2)\right)\left(x^2+3x+1+\sqrt{2}(x+2)\right) \\ &= \left(x^2+(3-\sqrt{2})x+1-2\sqrt{2}\right)\left(x^2+(3+\sqrt{2})x+1+2\sqrt{2}\right). \end{aligned}$$

$k=2>0$이므로 그 제곱근은 실수이고, 따라서 이들은 요구한 대로 실수 계수를 가진 두 이차 인수이다.

삼차방정식의 나머지 두 근은 $2t^2-7t+1=0$에서 나오는 $t=\frac{1}{4}\left(7\pm\sqrt{41}\right)$이며, 이들도 $k=2t>0$을 만족한다. 이 근들은 사차식의 네 (실)근을 짝지어 실수 계수 이차 인수로 묶는 나머지 두 가지 방법을 준다. 이 경우 계수가 훨씬 복잡하므로 $t=1$을 쓰는 것이다.

검산

- 전개해 본다. 두 인수의 곱에서 x^3의 계수는 $(3-\sqrt{2})+(3+\sqrt{2})=6$이고 상수항은 $(1-2\sqrt{2})(1+2\sqrt{2})=1-8=-7$이므로 둘 다 맞다.
- $x=1$에서 사차식의 값은 $1+6+9-2-7=7$이고, 인수분해한 식은 $(5-\sqrt{2}-2\sqrt{2})(5+\sqrt{2}+2\sqrt{2})=25-18=7$을 준다.
- 두 인수의 판별식은 $7+2\sqrt{2}\approx 9.83$과 $7-2\sqrt{2}\approx 4.17$로 모두 양수이므로, 사차식은 네 실근을 가진다. 이는 삼차방정식의 세 근이 모두 실수 범위의 인수분해를 준다는 사실과 일치한다. 또한 무작위로 고른 200개의 점에서 인수분해를 수치적으로 확인하였다.

흔한 실수

- $(x^2+\frac{1}{2}bx+t)^2$의 x^2 계수를 잘못 구하는 것: $(\frac{1}{2}bx)^2$뿐 아니라 교차항 $2\cdot x^2\cdot t$도 기여하므로 계수는 $\frac{1}{4}b^2+2t$이다.
- 판별식 조건을 $q^2=pr$로 쓰거나, k가 최고차항의 계수 $\frac{1}{4}b^2+2t-c$이며 실수 범위에서 인수분해하려면 이것이 양수여야 한다는 사실을 잊는 것.

STEP 너머

t에 대한 삼차방정식을 **분해 삼차방정식**(resolvent cubic)이라 하며, 이것이 16세기 페라리의 방법이다. 모든 사차방정식은 삼차방정식으로 환원되고, 그 삼차방정식은 카르다노(Cardano)의 공식으로 풀린다. 이 방법이 통하는 더 깊은 이유, 그리고 일반적인 오차방정식에 대해서는 이런 공식이 없는 이유는 다항식의 근들을 어떻게 치환할 수 있는지를 연구하는 갈루아 이론(Galois theory)에 속한다. 체와 다항식의 대수학을 처음 접해 보려면 Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)를 읽어 보라.

풀이

STEP III 2002, 문제 6

순수수학 • 비선형 미분방정식

STEP III 2002, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/02-s3-q6

핵심 아이디어

네제곱 때문에 방정식이 무시무시해 보이지만, $y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$는 정확히 y^2의 도함수(derivative)의 절반이다. 따라서 $u = y^2 - 1$로 치환(substitution)하면 방정식은 u와 u'만으로 이루어진 식으로 단순해지고, 제곱근을 취하면 변수분리(separation of variables)가 가능해진다. 주의할 점은 부호뿐이다. u의 부호에 따라 평면이 띠 영역 $|y| < 1$과 영역 $|y| > 1$로 나뉘고, 각 영역에서 서로 다른 곡선족(family of curves)이 나온다.

풀이

$u = y^2 - 1$로 놓으면 $u' = 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$이고 $y^4\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}u'\right)^4$이다. 방정식은 다음과 같이 된다.

$$\tfrac{1}{16}(u')^4 = u^2 \quad \Longleftrightarrow \quad (u')^2 = 4|u|,$$

이는 양변의 음이 아닌 제곱근(non-negative square root)을 취한 것이다($(u')^2$과 $4|u|$ 모두 음이 아니므로 잃는 것이 없다).

먼저 해곡선(solution curve)은 결코 $y = 0$과 만날 수 없다는 점에 주목하자. 그곳에서는 원래 방정식의 좌변이 0이지만 우변은 1이기 때문이다. 따라서 주어진 두 점 중 어느 하나를 지나는 해에서는 언제나 $y > 0$이다.

? **생각해 보기** 어느 부호의 u'를 취할지 고민하지 않고 $(u')^2 = 4u$를 어떻게 풀 수 있을까?

$u > 0$인 곳에서는 $v = \sqrt{u} > 0$으로 두어 $u = v^2$으로 쓸 수 있다. 그러면 $u' = 2vv'$이므로 $(u')^2 = 4u$는 $4v^2(v')^2 = 4v^2$, 즉 $(v')^2 = 1$이 된다. v'은 연속(continuous)이고 결코 0이 되지 않으므로 부호가 일정하다. 따라서 $v' = \pm 1$이고, 어떤 상수 a에 대해 $v = \pm(x - a)$이

다. 어느 경우든

$$u = v^2 = (x-a)^2.$$

이다. 제곱하면 부호의 모호함은 그냥 사라진다. $u < 0$인 경우는 $u = -v^2$으로 두고 같은 논증을 하면 된다.

소문항 (i): $(0, \frac{1}{2}\sqrt{3})$을 지나는 해

여기서는 $y^2 = \frac{3}{4} < 1$이므로 이 점 근처에서 $u < 0$, 즉 $|y| < 1$이다. $v > 0$으로 $1 - y^2 = -u = v^2$이라 쓰면, $(u')^2 = -4u$로부터 위와 똑같이 $(v')^2 = 1$을 얻는다. 따라서 $1 - y^2 = (x-a)^2$, 즉

$$(x-a)^2 + y^2 = 1 :$$

이므로, 해곡선은 x축 위에 중심이 있고 반지름이 1인 원이다. $x = 0$에서 $a^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$이어야 하므로 $a = \pm\frac{1}{2}$이다. $y > 0$이므로 $(0, \frac{1}{2}\sqrt{3})$을 지나는 해곡선은 다음 두 위쪽 반원이다.

$$y = \sqrt{1 - \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2} \qquad \text{그리고} \qquad y = \sqrt{1 - \left(x + \tfrac{1}{2}\right)^2}.$$

직접 확인해 보자. $(x-a)^2 + y^2 = 1$ 위에서 음함수 미분(implicit differentiation)을 하면 $y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -(x-a)$이므로 $y^4\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^4 = (x-a)^4 = (1-y^2)^2 = (y^2-1)^2$이다. ✓

소문항 (ii): $(0, \frac{1}{2}\sqrt{5})$를 지나는 해

이번에는 $y^2 = \frac{5}{4} > 1$이므로 $u > 0$이고, 위의 논증으로 $y^2 - 1 = (x-a)^2$, 즉

$$y^2 - (x-a)^2 = 1 :$$

을 얻는다. 이는 중심이 $(a, 0)$인 직각쌍곡선(rectangular hyperbola)이다. $x = 0$에서 $a^2 = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$이므로 이번에도 $a = \pm\frac{1}{2}$이고, $y > 0$이므로 해곡선은 다음 두 위쪽 가지(branch)이며

$$y = \sqrt{1 + \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2} \qquad \text{그리고} \qquad y = \sqrt{1 + \left(x + \tfrac{1}{2}\right)^2},$$

모든 x에서 정의된다. 직접 확인하면 $y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x - a$이므로 좌변은 $(x-a)^4 = (y^2-1)^2$이다. ✓

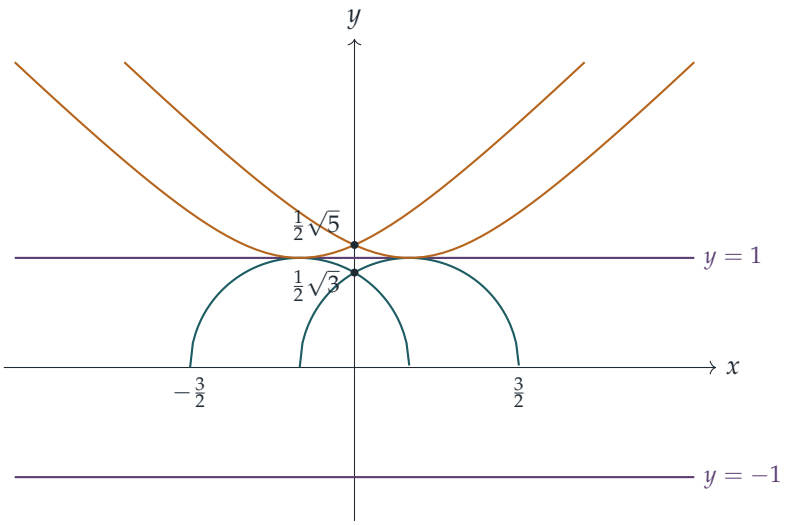
직선 $y = \pm 1$

모든 x에 대해 $y = 1$ 또는 $y = -1$이면 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$이므로 좌변은 0이다. 또 $y^2 - 1 = 0$이므로 우변도 0이다. 두 직선 모두 해이다.

? **생각해 보기** 이 직선들은 원 및 쌍곡선과 어떤 관계가 있을까?

각 원 $(x-a)^2+y^2=1$과 각 쌍곡선 $y^2-(x-a)^2=1$은 $y=1$에 점 $(a,1)$에서 기울기(gradient) 0으로 접한다(마찬가지로 $y=-1$에는 $(a,-1)$에서 접한다). 따라서 $y=\pm1$은 두 곡선족 모두의 **포락선**(envelope)이며, 어느 곡선족에도 속하지 않는다. 이 직선들은 $u=0$에서 나오는데, 이 경우는 v로 나눌 때 제외되었다. 그 결과 $y=1$ 위의 점을 지나는 해는 유일(unique)하지 않다. 예를 들어 $a=\frac{1}{2}$인 원을 따라 $(0,\frac{1}{2}\sqrt{3})$에서 꼭대기 $(\frac{1}{2},1)$까지 간 다음, $y=1$을 따라가다가, 쌍곡선 $y=\sqrt{1+(x-b)^2}$을 따라 $x\geq b$ 구간에서 올라가면(임의의 $b\geq\frac{1}{2}$), 충분히 매끄럽고(기울기가 연속) 모든 곳에서 방정식을 만족하는 곡선을 얻는다. 위의 네 곡선은 주어진 점을 지나는 "기본" 해이고, 그 점들을 지나는 다른 모든 해는 이 곡선들, $y=1$, 그리고 $y=1$에 접하는 또 다른 원과 쌍곡선의 조각들을 이어 붙여 만들어진다.

개형



반원(청록색)은 중심이 $(\pm\frac{1}{2},0)$이고 반지름이 1이며, x축과 $x=\pm\frac{1}{2}\pm1$에서 수직으로 만나고 $x=\pm\frac{1}{2}$에서 $y=1$에 접한다. 쌍곡선의 가지(호박색)는 같은 두 점에서 $y=1$에 접하고 점근선(asymptote)은 $y=\pm(x\mp\frac{1}{2})$이다. 즉 $|x|$처럼 증가한다. 각 쌍은 y축에 대해 대칭이며, 각 쌍의 두 곡선은 그 축 위의 주어진 점에서 교차한다.

검산

- $a=\frac{1}{2}$인 원 위의 점 $(0,\frac{1}{2}\sqrt{3})$에서 $y'=-(x-a)/y=1/\sqrt{3}$이므로 좌변은 $\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{16}$이고 우변은 $(\frac{3}{4}-1)^2=\frac{1}{16}$이다.
- $y'=\pm\sqrt{|y^2-1|}/y$를 $(0,\frac{1}{2}\sqrt{5})$에서 출발하여 더하기 부호를 택해 수치적으로 적분(numerical integration)하면 $y(1.5)=2.2360680$을 얻는데, 이는 $\sqrt{1+2^2}=\sqrt{5}$와

일치한다. 이것은 $a = -\frac{1}{2}$인 쌍곡선 위의 값이다.

흔한 실수

- 두 영역 모두에서 제곱근을 $(u')^2 = 4u$로 취하는 것. $|y| < 1$에서는 이 식이 실수해를 갖지 않으므로 원을 놓치게 된다.
- 각 단계에서 제곱근의 한쪽 부호만 택하여, 각 점을 지나는 곡선을 두 개가 아니라 하나만 찾는 것.
- $y = \pm 1$이 모든 곡선에 접하지만 어느 곡선족에도 속하지 않는다는 사실을 잊는 것.

STEP 너머

직선 $y = \pm 1$은 **특이해**(singular solution)이다. 즉 일반해(general solution)의 포락선이면서 상수 a를 어떻게 택해도 얻어지지 않는 해이다. 특이해는 정확히 일계 방정식(first-order equation)에 대한 유일성 정리(피카르–린델뢰프(Picard–Lindelöf) 정리)가 성립하지 않는 곳에서 나타난다. $\sqrt{|y^2 - 1|}$이 $y = \pm 1$에서 립시츠(Lipschitz) 조건을 만족하지 않기 때문이며, 바로 그 때문에 해가 그곳에서 갈라질 수 있다. 이런 종류의 포락선은 y'에 대해 선형이 아닌 일계 방정식의 전형적인 특징이다 (클레로(Clairaut) 방정식이 고전적인 예이다). Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 존재성과 유일성, 그리고 그것이 언제 깨지는지를 다룬다.

풀이

STEP III 2002, 문제 7

순수수학 • 좌표기하의 항등식

STEP III 2002, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/02-s3-q7

핵심 아이디어

식 $s^2 + b^2 - a^2$는 낯익어 보여야 한다. $OA = s$, $OB = b$인 삼각형 OAB에서 코사인 법칙(cosine rule)을 쓰면 바로 이 식이 나온다. 따라서 첫 번째 항등식(identity)은 사실 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta$에 관한 처음 결과를 OB가 두 좌표축과 이루는 두 각에 적용한 것이다. 그다음 두 번째 항등식은 첫 번째 항등식 위에 세운 순수한 대수 계산이고, 부등식(inequality)은 두 제곱의 합이 각 제곱보다 크거나 같다는 사실에서 저절로 나온다.

풀이

각에 관한 결과

먼저 $\alpha + \beta = \frac{1}{2}\pi$라고 하자. 그러면 $\cos\beta = \cos(\frac{1}{2}\pi - \alpha) = \sin\alpha$이므로

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

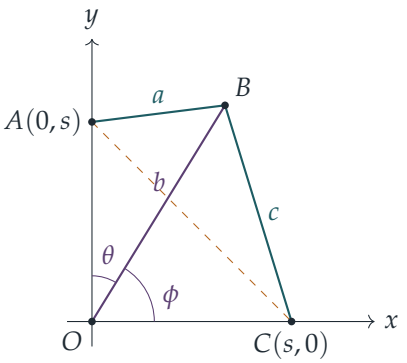
역으로 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$이라고 하자. 그러면 $\cos^2\beta = 1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$이다. α와 β가 모두 예각(acute angle)이므로 $\cos\beta > 0$, $\sin\alpha > 0$이고, 양의 제곱근을 취하면

$$\cos\beta = \sin\alpha = \cos(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha).$$

이제 β와 $\frac{1}{2}\pi - \alpha$는 모두 $(0, \frac{1}{2}\pi)$에 속하는데, 이 구간에서 코사인은 순감소(strictly decreasing)하므로 각 값을 한 번씩만 취한다. 따라서 $\beta = \frac{1}{2}\pi - \alpha$, 즉 $\alpha + \beta = \frac{1}{2}\pi$이다. 이로써 "필요충분조건(if and only if)"이 증명되었다.

첫 번째 항등식

$\theta = \angle AOB$, $\phi = \angle BOC$라고 하자.



삼각형 OAB(변 $OA = s, OB = b, AB = a$)와 삼각형 OCB(변 $OC = s, OB = b, CB = c$)에 코사인 법칙을 쓰면

$$\cos\theta = \frac{s^2 + b^2 - a^2}{2sb}, \qquad \cos\phi = \frac{s^2 + b^2 - c^2}{2sb}.$$

B가 열린 제1사분면(first quadrant)에 있으므로, 반직선 OB는 (OA 방향의) 양의 y축과 (OC 방향의) 양의 x축 사이에 엄격하게 놓인다. 따라서 θ와 ϕ는 모두 예각이고 $\theta + \phi = \frac{1}{2}\pi$이다. 위에서 보인 "only if" 방향에 의해 $\cos^2\theta + \cos^2\phi = 1$, 즉

$$\frac{(s^2 + b^2 - a^2)^2}{4s^2b^2} + \frac{(s^2 + b^2 - c^2)^2}{4s^2b^2} = 1.$$

양변에 $4s^2b^2$를 곱하면 첫 번째 항등식을 얻는다.

$$(s^2 + b^2 - a^2)^2 + (s^2 + b^2 - c^2)^2 = 4s^2b^2.$$

(직접 확인하려면 $B = (x, y)$라고 놓는다. 그러면 $a^2 = x^2 + (y - s)^2$, $b^2 = x^2 + y^2$, $c^2 = (x - s)^2 + y^2$이므로 $s^2 + b^2 - a^2 = 2sy$, $s^2 + b^2 - c^2 = 2sx$이고, 좌변은 $4s^2(x^2 + y^2) = 4s^2b^2$이다.)

두 번째 항등식

계산을 깔끔하게 하기 위해

$$P = s^2 + b^2 - a^2, \qquad Q = s^2 + b^2 - c^2, \qquad S = s^2 + b^2, \qquad D = s^2 - b^2,$$

로 놓으면 $a^2 = S - P$, $c^2 = S - Q$이다. 첫 번째 항등식은 $P^2 + Q^2 = 4s^2b^2$라는 뜻이다. $4s^2b^2 = (s^2 + b^2)^2 - (s^2 - b^2)^2 = S^2 - D^2$이므로 이를

$$D^2 = S^2 - P^2 - Q^2. \qquad (\dagger)$$

로 다시 쓸 수 있다. 이제 $a^2 + c^2 = 2S - P - Q$이고 $2s^2 = S + D$, $2b^2 = S - D$이므로

$$2s^2 - a^2 - c^2 = (P + Q - S) + D, \qquad 2b^2 - a^2 - c^2 = (P + Q - S) - D.$$

? 생각해 보기 왜 $(P+Q-S)\pm D$로 나누는 것이 가치가 있을까?

$(u+D)^2+(u-D)^2=2u^2+2D^2$이기 때문이다. 교차항이 소거되어 D는 D^2의 꼴로만 나타나고, (†)를 이용하면 이를 P, Q, S만으로 이루어진 식으로 바꿀 수 있다. $u=P+Q-S$로 놓으면

$$\begin{aligned}&(2s^2-a^2-c^2)^2+(2b^2-a^2-c^2)^2\\&\quad=2(P+Q-S)^2+2D^2\\&\quad=2(P^2+Q^2+S^2+2PQ-2PS-2QS)+2(S^2-P^2-Q^2)\\&\quad=4S^2-4PS-4QS+4PQ\\&\quad=4(S-P)(S-Q)\\&\quad=4a^2c^2,\end{aligned}$$

이고, 둘째 줄에서 (†)를 사용하였다. 이것이 두 번째 항등식이다.

부등식

두 번째 항등식 좌변의 두 제곱은 모두 음이 아니므로

$$(2b^2-a^2-c^2)^2\le 4a^2c^2,\qquad \text{따라서}\qquad |2b^2-a^2-c^2|\le 2ac,$$

이다. 여기서 음이 아닌 제곱근을 취하였다($a,c>0$에 주의한다). 이는

$$-2ac\le 2b^2-a^2-c^2\le 2ac,$$

즉

$$a^2-2ac+c^2\le 2b^2\le a^2+2ac+c^2,$$

을 뜻하며, 이것이 곧 $(a-c)^2\le 2b^2\le(a+c)^2$이므로 증명이 끝난다.

등호는 정확히 $2s^2=a^2+c^2$일 때 성립한다. $AC^2=2s^2$이므로 피타고라스(Pythagoras) 정리의 역에 의해 이는 $\angle ABC$가 직각이라는 뜻이다. 즉 B는 AC를 지름으로 하는 원 위에 있다.

검산

- $s=2$, $B=(1,3)$으로 놓자. 그러면 $a^2=2$, $b^2=c^2=10$이다. 첫 번째 항등식은 $12^2+4^2=160=4\cdot 4\cdot 10$, 두 번째 항등식은 $(-4)^2+8^2=80=4\cdot 2\cdot 10$이 되고, 부등식은 $3.06\le 20\le 20.94$가 된다.
- 점 $B=(s,s)$는 정사각형의 네 번째 꼭짓점이므로 $\angle ABC$는 직각이고 $a=c=s$, $b=s\sqrt{2}$이다. 이때 $2b^2=4s^2=(a+c)^2$로 등호가 성립하는 경우이다.

- 2×10^5개의 점 B에서 세 결과를 무작위로 시험한 결과 성립하지 않는 경우는 없었다.

흔한 실수

- 역을 증명할 때 예각 조건을 빠뜨리는 것. 이 조건이 없으면 $\cos^2\beta = \sin^2\alpha$로부터 $\beta = \frac{1}{2}\pi - \alpha$가 반드시 나오지는 않는다(예를 들어 $\beta = \frac{1}{2}\pi + \alpha$도 성립한다).
- 첫 번째 항등식을 쓰지 않고 두 번째 항등식을 a, b, c, s에 대해 무작정 전개하는 것. 할 수는 있지만 항을 빠뜨리기 쉽다. S, D로 치환하면 계산을 통제할 수 있다.
- $(2b^2 - a^2 - c^2)^2 \leq 4a^2c^2$의 제곱근을 취할 때 절댓값(modulus)을 붙이지 않아 부등식의 절반만 얻는 것.

STEP 너머

양 $2b^2 - a^2 - c^2$는 $2s(x + y - s)$와 같고, 이는 삼각형 ABC의 넓이의 ± 4배이다. 따라서 두 번째 항등식은 코사인 법칙과 넓이 공식 $\frac{1}{2}ac\sin B$를 $\cos^2 B + \sin^2 B = 1$로 결합한 것이다. 상한은 프톨레마이오스(Ptolemy) 부등식의 한 경우이기도 하다. 임의의 네 점에 대하여 $OB \cdot AC \leq OA \cdot BC + OC \cdot AB$이고, 등호는 원에 내접하는 사각형(cyclic quadrilateral)일 때 성립하는데, 여기서는 이것이 $bs\sqrt{2} \leq s(a + c)$가 된다. 이와 같은 거리 사이의 관계는 거리 공간(metric space)과 거리 기하학(distance geometry)의 연구로 이어진다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)에 이런 성격의 문제가 더 실려 있다.

풀이

STEP III 2002, 문제 8

순수수학 • 프톨레마이오스 정리

> **STEP III 2002, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/02-s3-q8

핵심 아이디어

단위원(unit circle) 위의 두 점의 차는 "평균" 각을 밖으로 빼내면 아름답게 인수분해된다: $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)/2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha-\beta)/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\alpha-\beta)/2}\right)$이고, 괄호 안은 사인의 2i배이다. 이것으로 모든 현(chord)의 절댓값(modulus)과 편각(argument)을 한꺼번에 얻는다. 마지막 부분에서는, 편각이 같은 두 복소수는 같은 방향을 가리키므로 그 절댓값이 그대로 더해진다. 그러면 남은 일은 세 곱을 잇는 대수적 항등식을 찾는 것뿐이다.

풀이

$u_1 - u_2$의 편각

$u_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}$라 하자. 인수 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)/2}$를 묶어 내면

$$\begin{aligned} u_1 - u_2 &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)/2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)/2}\right) \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)/2} \cdot 2\mathrm{i}\sin\tfrac{1}{2}(\theta_1-\theta_2) \\ &= 2\sin\tfrac{1}{2}(\theta_2-\theta_1)\cdot(-\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)/2} \\ &= 2\sin\tfrac{1}{2}(\theta_2-\theta_1)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2-\pi)/2}, \end{aligned}$$

이다. 마지막 줄에서는 $-\mathrm{i} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}$를 이용했다.

> ? **생각해 보기** 왜 이 식에서 편각을 곧바로 읽어 낼 수 있을까? 그리고 왜 사인을 $\sin\frac{1}{2}(\theta_1-\theta_2)$가 아니라 $\sin\frac{1}{2}(\theta_2-\theta_1)$의 꼴로 써야 할까?

$r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ 꼴의 수가 (2π의 배수 차이를 무시하고) 편각 ϕ를 갖는 것은 $r > 0$일 때뿐이다. 여기서는 $0 < \theta_2 - \theta_1 < 2\pi$이므로 $0 < \frac{1}{2}(\theta_2-\theta_1) < \pi$이고, 사인은 순양수이다. 거꾸로 쓰면 사

인이 음수가 되어 편각이 π만큼 어긋난다.

따라서 $|u_1 - u_2| = 2\sin\frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1)$이고, $\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2 - \pi)$는 $u_1 - u_2$의 한 편각이다. arg를 $(-\pi, \pi]$에 속하는 주치(principal value)로 잡자. $-\pi < \theta_1 < \theta_2 < \pi$이므로

$$-\tfrac{3\pi}{2} < \tfrac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2 - \pi) < \tfrac{\pi}{2}.$$

이 값이 $-\pi$보다 크면 이미 주편각이다($n = 0$). 그렇지 않으면 $(-\frac{3\pi}{2}, -\pi]$에 속하므로 2π를 더하면 범위 안으로 들어온다($n = 1$). 그러므로

$$\arg(u_1 - u_2) = \tfrac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2 - \pi) + 2n\pi, \qquad n = 0 \text{ 또는} 1,$$

이고, 이것이 보이려던 것이다.

두 곱의 편각이 같다

위의 논증에서 u_1, u_2에 대해 쓴 것은 $\theta_1 < \theta_2$이고 둘 다 $(-\pi, \pi)$에 속한다는 사실뿐이다. 따라서 임의의 $j < k$에 대하여

$$\begin{aligned} u_j - u_k &= 2\sin\tfrac{1}{2}(\theta_k - \theta_j)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_j + \theta_k - \pi)/2}, \\ u_k - u_j = -(u_j - u_k) &= 2\sin\tfrac{1}{2}(\theta_k - \theta_j)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_j + \theta_k + \pi)/2}, \end{aligned}$$

이다. 여기서 $-1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$를 이용했고, 두 경우 모두 앞에 붙은 실수 인수는 양수이다. $j < k$에 대하여 $s_{jk} = \sin\frac{1}{2}(\theta_k - \theta_j) > 0$이라 쓰고, $\Sigma = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4$라 하자. 곱하면 (편각은 더해진다)

$$\begin{aligned} (u_1 - u_2)(u_4 - u_3) &= 4s_{12}s_{34}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\theta_1 + \theta_2 - \pi) + (\theta_3 + \theta_4 + \pi)]/2} = 4s_{12}s_{34}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Sigma/2}, \\ (u_1 - u_4)(u_3 - u_2) &= 4s_{14}s_{23}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\theta_1 + \theta_4 - \pi) + (\theta_2 + \theta_3 + \pi)]/2} = 4s_{14}s_{23}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Sigma/2}. \end{aligned}$$

둘 다 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Sigma/2}$의 양수배이므로, 각각 2π의 배수 차이를 무시하면 편각이 $\frac{1}{2}\Sigma$이다. 따라서 두 주편각은 2π의 배수만큼만 다를 수 있다:

$$\arg\big((u_1 - u_2)(u_4 - u_3)\big) = \arg\big((u_1 - u_4)(u_3 - u_2)\big) + 2n\pi$$

를 만족하는 정수 n이 존재한다. (사실 2π의 배수만큼 차이 나는 두 주편각은 같아야 하므로 $n = 0$이지만, 문제에서 요구한 것은 이보다 약한 명제뿐이다.)

마지막 부분

세 곱을

$$A = (u_1 - u_2)(u_4 - u_3), \qquad B = (u_1 - u_4)(u_3 - u_2), \qquad C = (u_1 - u_3)(u_4 - u_2).$$

라 하자. 전개하면

$$\begin{aligned} A+B &= (u_1u_4 - u_1u_3 - u_2u_4 + u_2u_3) + (u_1u_3 - u_1u_2 - u_3u_4 + u_2u_4) \\ &= u_1u_4 + u_2u_3 - u_1u_2 - u_3u_4, \\ C &= u_1u_4 - u_1u_2 - u_3u_4 + u_2u_3, \end{aligned}$$

이므로 $A+B=C$이다. 이것은 순수한 대수이며 임의의 네 복소수에 대해 성립한다.

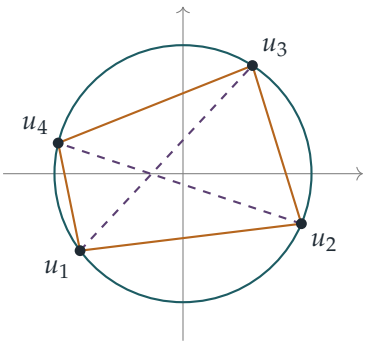
이제 앞 부분의 결과를 쓰자: $a = 4s_{12}s_{34} > 0$, $b = 4s_{14}s_{23} > 0$에 대하여 $A = a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Sigma/2}$, $B = b\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Sigma/2}$이다. 그러면 $|A| = a$, $|B| = b$이고,

$$|C| = |A+B| = \left|(a+b)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Sigma/2}\right| = a+b = |A| + |B|,$$

이다. $a+b>0$이고 $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Sigma/2}| = 1$이기 때문이다. 즉,

$$|(u_1-u_2)(u_4-u_3)| + |(u_1-u_4)(u_3-u_2)| = |(u_1-u_3)(u_4-u_2)|.$$

요점은, 삼각부등식(triangle inequality) $|A+B| \le |A| + |B|$가 등식이 되는 것은 정확히 A와 B가 같은 방향을 가리킬 때이며, 바로 그것을 가운데 부분에서 확립했다는 것이다.



기하학적으로 $|u_j - u_k|$는 현의 길이이고, 편각이 증가하므로 $u_1u_2u_3u_4$는 꼭짓점이 차례로 놓인, 원에 내접하는 사각형(inscribed quadrilateral)이다. 이 항등식은 마주 보는 변끼리의 곱의 합이 두 대각선(점선)의 곱과 같다는 것을 말한다. 이것이 바로 프톨레마이오스(Ptolemy)의 정리이다.

검산

- 정사각형: $\theta_k = -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$. 각 변은 $\sqrt{2}$, 각 대각선은 2이고, 실제로 $2+2=4$이다.
- $\theta = (-2.5, -0.4, 1.0, 2.9)$로 두면 $|A| \approx 2.8223$, $|B| \approx 1.1013$, $|C| \approx 3.9236 = |A| + |B|$를 얻는다.

- 크기 순으로 정렬된 θ_k를 무작위로 2×10^5번 골랐을 때, $\arg(u_1 - u_2)$에 대한 공식은 매번 $n = 0$ 또는 1로 성립했고(두 값 모두 나타난다), 항등식은 2×10^{-15} 이내의 오차로 성립했다.

흔한 실수

- $u_1 - u_2 = 2\mathrm{i} \sin \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)/2}$로 쓰고, 사인이 음수라는 것을 잊은 채 편각을 $\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2 + \pi)$로 읽는 것.
- $u_4 - u_3$의 편각이 $u_3 - u_4$의 편각과 같다고 취급하는 것: 차의 순서를 뒤집으면 편각에 π가 더해진다.
- 이유를 밝히지 않고 $|A| + |B| = |A + B|$라고 단정하는 것. 이것이 성립하려면 A와 B의 편각이 같아야 한다.

STEP 너머

프톨레마이오스의 정리에는 역(converse)과 더 일반적인 형태가 있다: 평면 위의 임의의 네 점에 대하여 $|A| + |B| \geq |C|$이고(이는 $A + B = C$에 삼각부등식을 적용한 것일 뿐이다), 등호는 정확히 네 점이 원이나 직선 위에 차례로 놓일 때 성립한다. 그 배후에는 **복비**(*cross-ratio*) $\frac{(u_1-u_2)(u_3-u_4)}{(u_1-u_4)(u_3-u_2)}$가 있다. 이것은 네 점이 한 원 위에 있을(concyclic) 때 정확히 실수가 되고, 뫼비우스 변환(Möbius transformation)에 의해 보존되며, 대학 1학년 복소해석학(complex analysis)과 기하학의 핵심 대상이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이러한 아이디어를 멋진 그림과 함께 전개한다.

풀이

STEP III 2002, 문제 9

역학 • 질량중심과 넘어짐

> **STEP III 2002, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/02-s3-q9

핵심 아이디어

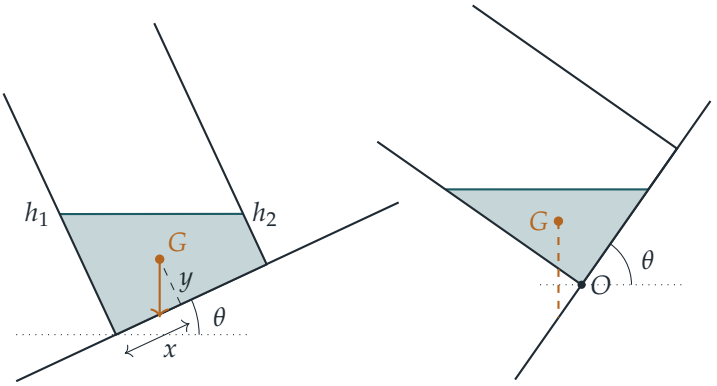
유체의 자유 표면(free surface)은 수평이므로, (θ만큼 기울어진) 용기의 기준틀에서 보면 밑면에 대하여 각 θ로 기울어진 직선이다. 따라서 유체의 단면은 표면이 양쪽 옆벽과 모두 만나면 사다리꼴(trapezium)이 되고, 표면이 위쪽 벽에 닿기 전에 밑면에 이르면 직각삼각형(right-angled triangle)이 된다. 그러면 질량중심(centre of mass)을 구하는 일은 2차원 도심(centroid) 계산이 된다. 넘어짐(toppling)에 대해서는, 용기가 가벼우므로 모든 것은 유체의 질량중심을 지나는 연직선이 평면과 어디에서 만나는지에 달려 있다.

풀이

설정

용기는 벽의 두께를 무시할 수 있는 가벼운 각기둥(prism)으로, 유체는 용기에 대하여 정지해 있는 균일한 연속체로, 평면은 미끄러짐을 막을 만큼 충분히 거친 것으로 모형화한다. 밑면의 수평한 모서리에 수직인 연직 단면은 모두 같고 유체가 균일하므로, 유체의 질량중심은 한 단면의 도심이다. 그 단면의 폭은 a이고 넓이는 $ka^3/a = ka^2$이다.

X는 아래쪽 옆벽에서부터 밑면을 따라 (비탈 위쪽으로) 재고, Y는 밑면에 수직으로 잰다. X가 커짐에 따라 밑면은 수평에 대하여 각 θ로 올라가므로, 수평한 표면은 밑면에 대하여 각 θ로 내려간다. 즉 X가 한 단위 늘 때마다 밑면 위 표면의 높이는 $\tan\theta$만큼 줄어든다. 폭 전체에 걸친 총 감소량을 $d = a\tan\theta$라 하자.



왼쪽 그림은 $k > \frac{1}{2}\tan\theta$인 경우(유체가 양쪽 벽에 모두 닿는 경우)이고, 오른쪽 그림은 $\theta > 45°$이면서 $k < \frac{1}{2}\tan\theta$인 경우로, G를 지나는 연직선이 밑면을 벗어난다.

$k > \frac{1}{2}\tan\theta$인 경우

아래쪽 벽과 위쪽 벽에서의 깊이를 각각 h_1, h_2라 하자. 그러면 $h_1 - h_2 = d$이고, 사다리꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}a(h_1 + h_2) = ka^2$이므로 $h_1 + h_2 = 2ka$이다. 따라서

$$h_2 = ka - \tfrac{1}{2}d = a\big(k - \tfrac{1}{2}\tan\theta\big),$$

이고, 이 값은 정확히 $k > \frac{1}{2}\tan\theta$일 때 양수이다. 그러므로 이것이 표면이 양쪽 벽과 모두 만나는 경우이다.

사다리꼴을 $a \times h_2$ 직사각형과, 그 위에 놓인, 두 직각변이 $a(Y = h_2$를 따라)와 d(아래쪽 벽을 따라 위로)인 직각삼각형으로 나눈다.

- 직사각형: 넓이 ah_2, 도심 $\big(\frac{1}{2}a,\ \frac{1}{2}h_2\big)$.
- 삼각형: 꼭짓점이 $(0, h_2)$, (a, h_2), $(0, h_2 + d)$이므로 넓이는 $\frac{1}{2}ad$이고, 도심(꼭짓점들의 평균)은 $\big(\frac{1}{3}a,\ h_2 + \frac{1}{3}d\big)$이다.

전체 넓이가 ka^2이므로, 아래쪽 벽에 대한 모멘트(moment)를 취하면

$$ka^2\,x = ah_2 \cdot \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}ad \cdot \tfrac{1}{3}a \quad\Longrightarrow\quad kx = \tfrac{1}{2}h_2 + \tfrac{1}{6}d = \tfrac{1}{2}ka - \tfrac{1}{4}d + \tfrac{1}{6}d = \tfrac{1}{2}ka - \tfrac{1}{12}d.$$

ka로 나누고 $d = a\tan\theta$를 이용하면

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{2} - \frac{\tan\theta}{12k}.$$

밑면에 대한 모멘트를 취하면

$$ka^2\,y = ah_2 \cdot \tfrac{1}{2}h_2 + \tfrac{1}{2}ad\big(h_2 + \tfrac{1}{3}d\big),$$
$$ka\,y = \tfrac{1}{2}h_2^2 + \tfrac{1}{2}dh_2 + \tfrac{1}{6}d^2 = \tfrac{1}{2}h_2(h_2 + d) + \tfrac{1}{6}d^2.$$

이제 $h_2 = ka - \frac{1}{2}d$이고 $h_2 + d = ka + \frac{1}{2}d$이므로 $h_2(h_2 + d) = k^2a^2 - \frac{1}{4}d^2$이고

$$ka\,y = \tfrac{1}{2}k^2a^2 - \tfrac{1}{8}d^2 + \tfrac{1}{6}d^2 = \tfrac{1}{2}k^2a^2 + \tfrac{1}{24}d^2.$$

ka^2으로 나누면

$$\frac{y}{a} = \frac{k}{2} + \frac{\tan^2\theta}{24k},$$

이므로 요구한 결과를 얻는다.

$k < \frac{1}{2}\tan\theta$인 경우

이제 h_2가 음수가 되어야 하므로, 표면은 아래쪽 벽에서 어떤 거리 $b < a$인 곳에서 밑면과 만나고, 유체의 단면은 두 직각변이 밑면을 따라 b, 아래쪽 벽을 따라 위로 h인 직각삼각형이다. 표면의 기울기로부터 $h = b\tan\theta$이고, 넓이로부터 $\frac{1}{2}bh = ka^2$이다. 따라서 $b^2\tan\theta = 2ka^2$이고

$$b = a\sqrt{\frac{2k}{\tan\theta}}, \qquad h = a\sqrt{2k\tan\theta}.$$

(실제로 $b < a$인 것은 바로 $2k < \tan\theta$이기 때문이다. 용기는 충분히 높으므로 h는 문제가 되지 않는다.) 삼각형의 도심은 각 직각변을 따라 3분의 1 지점에 있으므로

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2k}{\tan\theta}} = \frac{1}{3}\sqrt{2k\cot\theta}, \qquad \frac{y}{a} = \frac{1}{3}\sqrt{2k\tan\theta}.$$

$k = \frac{1}{2}\tan\theta$에서 두 쌍의 공식은 모두 $x/a = \frac{1}{3}$, $y/a = \frac{1}{3}\tan\theta$를 주므로, 두 경우는 매끄럽게 이어진다.

넘어짐

생각해 보기 놓는 순간 용기가 넘어지는지 아닌지는 무엇이 결정하는가?

용기가 가벼우므로 무게는 유체의 무게뿐이고, 이는 질량중심 G를 지나 연직 방향으로 작용한다. 평면은 밑면만을 밀 수 있으므로, 수직항력(normal reaction)은 아래쪽 모서리 O와 위쪽 모서리 사이의 밑면 어딘가에 작용한다. G를 지나는 연직선이 O보다 비탈 아래쪽에서 평면과 만나면, 무게는 O에 대하여 그러한 항력으로는 상쇄할 수 없는 모멘트를 가지며, 용기는 O를 중심으로 회전한다. 즉 넘어진다.

O를 원점으로 하고, x는 비탈 위쪽으로, y는 비탈에 수직으로 잡자. 연직 아래 방향은 이 축에서 성분 $(-\sin\theta, -\cos\theta)$를 가지므로, $G = (x, y)$에서 연직선을 따라 거리 $y\sec\theta$만큼 내려가면 평면의 다음 위치에 이른다.

$$x - y\tan\theta.$$

따라서 $x < y\tan\theta$이면 용기는 넘어진다.

$k < \frac{1}{2}$이고 $\theta > 45°$라 하자. 그러면 $\tan\theta > 1 > 2k$이므로 $k < \frac{1}{2}\tan\theta$이고, 삼각형인 경우에 해당한다. 이때

$$y\tan\theta - x = \frac{a}{3}\left(\sqrt{2k\tan\theta}\,\tan\theta - \sqrt{\frac{2k}{\tan\theta}}\right) = \frac{a}{3}\sqrt{\frac{2k}{\tan\theta}}\left(\tan^2\theta - 1\right) > 0,$$

인데, 이는 $\tan\theta > 1$이기 때문이다. 따라서 $x < y\tan\theta$이다. 즉 G를 지나는 연직선은 아래쪽 모서리보다 아래를 지나고, $k < \frac{1}{2}$의 값이 무엇이든 용기는 넘어진다. (삼각형인 경우, 같은 계산으로 $\theta < 45°$이면 용기가 안정함을 알 수 있으므로, 이 경우에는 $45°$가 정확히 경계값이다.) 이것이 구하는 결과이다. 조건 $k < \frac{1}{2}$는 $\theta > 45°$일 때 삼각형인 경우가 됨을 보장하는 역할을 한다.

검산

- $\theta = 0$이면 첫 번째 경우에서 $x = \frac{1}{2}a$, $y = \frac{1}{2}ka$를 얻는데, 이는 깊이가 ka인 유체 덩어리의 중심이다.
- 두 경우는 사다리꼴이 삼각형으로 퇴화하는 $k = \frac{1}{2}\tan\theta$에서 일치한다.
- 수치 검산: 무작위로 고른 300개의 쌍 (k, θ)에 대하여 유체 영역을 직접 적분한 결과, ($a = 1$일 때) 두 쌍의 공식과 1.4×10^{-6} 이내로 일치하였다. 예를 들어 $\theta = 55°$, $k = 0.3$이면 $x \approx 0.216a$, $y \approx 0.309a$이고 $y\tan\theta \approx 0.441a > x$이므로 넘어진다.

흔한 실수

- 표면을 밑면과 평행하게 그리거나 반대 방향으로 기울게 그리는 것. 유체는 **아래쪽** 벽 쪽에 쌓인다.
- 용기가 가볍다는 것을 잊고 용기의 무게를 더하는 것. 용기의 질량중심은 유체의 질량중심과 같다.
- G를 지나는 연직선을 아래쪽 모서리 O가 아니라 밑면의 중심과 비교하는 것.

STEP 너머

"질량중심을 지나는 연직선이 밑면과 만나는가?"라는 판정은 안정성 분석(stability analysis)의 가장 간단한 경우이다. 물에 뜬 배도 같은 방식으로 다루지만, 그때는 부력(buoyancy)이 배가 밀어낸 물의 질량중심을 지나 작용하며, 이 점은 배가 기울어짐에 따라 움직인다. 이로부터 경심(metacentre)이라는 개념이 나온다. (놓은 뒤 출렁이는) 움직이는 유체는 유체역학(fluid dynamics)에서 훨씬 더 어려운 문제이다. Kleppner와

Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 강체(rigid body)의 평형과 축에 대한 회전을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP III 2002, 문제 10

역학 • 마찰이 있는 회전

STEP III 2002, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/02-s3-q10

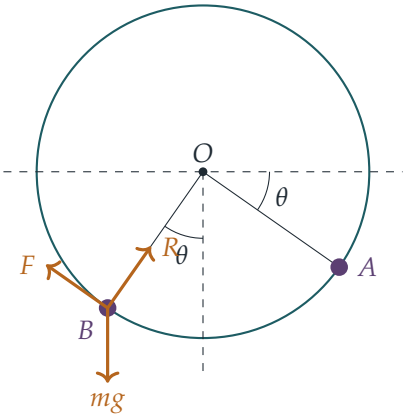
핵심 아이디어

두 번째 입자가 미끄러지지 않는 동안에는 원기둥과 함께 움직이므로, 전체 계는 고정 축(fixed axis)을 중심으로 회전하는 하나의 강체(rigid body)이다. 즉 반지름 a인 곳에 같은 질량 두 개가 4분의 1바퀴 떨어져 붙어 있는 것이다. 그러면 에너지(또는 축에 대한 모멘트(moment))로 운동을 한 줄에 구할 수 있다. 미끄러짐(slipping)이 언제 시작되는지 알아내려면, 고정되지 않은 입자만 따로 보고 면을 따르는 방향과 면에 수직인 방향으로 뉴턴 제2법칙(Newton's second law)을 써서 그 입자에 필요한 마찰력(friction) F와 수직항력(normal reaction) R을 구한다. 입자는 F가 처음으로 μR에 이를 때 미끄러진다.

풀이

상황 설정

두 입자를 가벼운 원기둥 위의 질점(point mass)으로 모형화하고, 축은 매끄럽다고 하자. 축을 O, 고정된 입자를 A, 고정되지 않은 입자를 B라 하자. 정지 상태에서 놓으면 A가 떨어지므로, 원기둥이 (그림에서 시계 방향으로) 돌면서 B를 A의 반대쪽 옆면을 따라 위로 들어올린다. θ만큼 회전한 뒤 OA는 수평선 아래로 각 θ를 이루고, OB는 반대쪽에서 연직 아래 방향과 각 θ를 이룬다.



운동 방정식

B가 미끄러지지 않는 동안 두 입자는 모두 각속도(angular speed) $\dot\theta$로 반지름 a인 원 위를 움직이고, 원기둥 자체는 질량이 없다. O의 높이를 위치 에너지(potential energy)의 기준 0으로 잡으면 A의 높이는 $-a\sin\theta$, B의 높이는 $-a\cos\theta$이다. 계는 $\theta = 0$에서 정지 상태로 출발하고, 매끄러운 축은 일을 하지 않으며, B와 원기둥 사이의 마찰력은 상대 운동이 없으므로 알짜 일을 하지 않는다. 따라서 에너지가 보존된다.

$$2\cdot\tfrac{1}{2}ma^2\dot\theta^2 - mga\sin\theta - mga\cos\theta = -mga,$$

즉

$$\dot\theta^2 = \frac{g}{a}(\sin\theta + \cos\theta - 1). \qquad (*)$$

이것을 시간에 대해 미분하고 $2\dot\theta$(운동이 시작된 뒤에는 0이 아니다)로 나누면

$$\ddot\theta = \frac{g}{2a}(\cos\theta - \sin\theta),$$

을 얻으며, 이것이 구하려던 식이다. O에 대한 모멘트를 써도 같은 결과를 얻는다. A의 무게는 회전 방향으로 $mga\cos\theta$의 모멘트를, B의 무게는 그 반대 방향으로 $mga\sin\theta$의 모멘트를 가지며, 관성 모멘트(moment of inertia)는 $2ma^2$이다.

B는 언제 미끄러지는가?

이제 B만 따로 보자. B에 작용하는 힘은 무게 mg, O를 향하는 수직항력 R, 그리고 면을 따르는 마찰력 F이다. 마찰력은 B의 운동 방향(옆면을 따라 위쪽)을 양으로 잡는다. B는 반지름 a인 원 위를 움직이므로 O를 향하는 가속도 $a\dot\theta^2$와 운동 방향의 가속도 $a\ddot\theta$를 가진다. 무게는 O에서 곧바로 멀어지는 방향으로 성분 $mg\cos\theta$를, 운동 반대 방향으로 성분 $mg\sin\theta$를 가진다. 따라서

$$\text{중심 방향}O: \quad R - mg\cos\theta = ma\dot\theta^2,$$
$$\text{운동 방향}: \quad F - mg\sin\theta = ma\ddot\theta.$$

$(*)$와 운동 방정식을 이용하면

$$R = mg\cos\theta + mg(\sin\theta + \cos\theta - 1) = mg\,(2\cos\theta + \sin\theta - 1),$$
$$F = mg\sin\theta + \tfrac{1}{2}mg(\cos\theta - \sin\theta) = \tfrac{1}{2}mg\,(\sin\theta + \cos\theta).$$

$0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}$에서 둘 다 양수이다. ($2\cos\theta \ge 1$을 이용하면 $0 < \theta \le \frac{\pi}{3}$에서 $2\cos\theta + \sin\theta - 1 \ge \sin\theta > 0$이므로 $R > 0$이고, $\theta = 0$에서는 $R = mg$이다.) 그러므로 B는 접촉을 유지하고, 마찰력은 입자를 옆면을 따라 위로 민다. 입자는 $F \le \mu R$인 동안, 즉

$$\rho(\theta) = \frac{F}{R} = \frac{\sin\theta + \cos\theta}{2(2\cos\theta + \sin\theta - 1)} \le \mu.$$

인 동안 미끄러지지 않는다. $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta = \frac{1}{2}$인 $\theta = \frac{\pi}{3}$에서

$$\rho\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{6} = \mu.$$

생각해 보기 입자가 이보다 먼저 미끄러지기 시작할 수 없는 이유는 무엇인가?

모든 $0 \le \theta < \frac{\pi}{3}$에 대해 $\rho(\theta) < \mu$임을 보여야 한다. $N = \sin\theta + \cos\theta$, $D = 2\cos\theta + \sin\theta - 1$이라 하면

$$\begin{aligned} N'D - ND' &= (\cos\theta - \sin\theta)(2\cos\theta + \sin\theta - 1) - (\sin\theta + \cos\theta)(\cos\theta - 2\sin\theta) \\ &= \cos^2\theta + \sin^2\theta + \sin\theta - \cos\theta = 1 + \sin\theta - \cos\theta, \end{aligned}$$

이고, 이는 $0 < \theta < \pi$에서 양수이다. $[0, \frac{\pi}{3}]$에서 $D > 0$이므로 그 구간에서 $\rho' = (N'D - ND')/(2D^2) > 0$이고, 따라서 ρ는 $\rho(0) = \frac{1}{2}$에서부터 순증가한다. 그러므로 ρ는 $\theta = \frac{\pi}{3}$에서 정확히 μ에 이를 때까지 μ보다 작다. 또한 $(*)$에 의해 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$에서 $\dot\theta^2 > 0$이므로, 원기둥은 실제로 계속 회전하여 이 각도에 도달한다.

따라서서 두 번째 입자는 원기둥이 60°만큼 회전했을 때 미끄러지기 시작하며, 이것이 증명하려던 것이다.

검산

- $\theta = 0$에서: B는 맨 아래에 정지해 있는데도 $F = \frac{1}{2}mg \ne 0$이다. 이는 옳다. A의 무게가 원기둥을 돌리려 하므로, 마찰력이 B를 함께 가속시켜야 하기 때문이다. 실제로 그 순간 $F = ma\ddot\theta = \frac{1}{2}mg$이고, B가 아직 속력이 없으므로 $R = mg$이다.
- $\theta = \frac{\pi}{4}$에서 $\ddot\theta = 0$이고 각속도는 최대이다. 두 무게가 O에 대해 균형을 이룰 때 기대되는 결과이다.

- 수치적으로 운동 방정식을 적분하고 B의 가속도로부터 접촉력을 직접 계산하면 R와 F의 공식이 그대로 재현되며, F/R는 60.00°에서 처음으로 $(3+\sqrt{3})/6 \approx 0.7887$에 이른다.

흔한 실수

- 원기둥의 관성 모멘트를 포함하는 것: 원기둥은 가벼우므로 두 입자만이 $2ma^2$를 기여한다.
- B의 접선 가속도(tangential acceleration) $a\ddot{\theta}$를 빠뜨리는 것: 그러면 $F = mg\sin\theta$가 되어 틀린 각도를 얻는다.
- 60°에서 $F = \mu R$임만 확인하고, 그 전에는 F/R가 더 작았음을 보이지 않는 것.

STEP 너머

이것은 자유도(degree of freedom)가 1인 계이다. 구속 조건(constraint)(미끄러지지 않음)을 부과하고 나면 좌표 하나 θ가 모든 것을 기술하고, 에너지로 운동을 바로 구할 수 있다. 구속력(constraint force)은 그다음에 구하며, 구속 조건에 필요한 힘이 면이 제공할 수 있는 힘을 넘어설 때 구속 조건이 깨진다. 이는 입자가 구면에서 떨어져 나가는 문제와 같은 논리이며, 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)에서는 라그랑주 승수(Lagrange multiplier)를 써서 이를 체계화한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 관점에서 강체의 회전과 구속력을 전개한다.

풀이

STEP III 2002, 문제 11

역학 • 벽과의 비스듬한 충돌

STEP III 2002, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/02-s3-q11

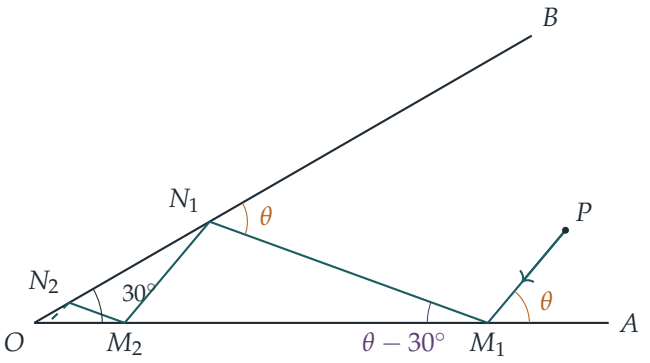
이 문제는 *Beyond STEP*의 10.5 절 **유한한 시간 동안 무한 번 튀어 오르기**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch10/zeno-wedge.html

핵심 아이디어

매끄러운 벽에서 충격량(impulse)은 벽에 수직이다. 따라서 벽을 따르는 속도 성분은 그대로 남고, 수직 성분만 e배가 된다. 이 사실을 삼각형 OM_1N_1의 각과 결합하면 첫 번째 부분은 하나의 삼각방정식으로 정리된다. 두 번째 부분에서는 매번 튕길 때마다 운동이 더 작은 규모로 되풀이된다. 각 구간의 길이는 짧아지지만 입자의 속력도 줄어들므로, 거리가 아니라 시간을 더해야 한다. 그 합은 등비급수(geometric series)이다.

풀이

입자를 매끄러운 수평면 위에서 움직이는 점으로 모형화한다. 따라서 충돌과 충돌 사이에는 일정한 속력으로 직선 운동을 한다. 벽은 매끄럽고, 각 충돌은 반발계수(coefficient of restitution) e인 뉴턴(Newton)의 실험 법칙(Newton's experimental law)을 따른다.



e와 v_1/u_1 구하기

각 $PM_1A = \theta$이므로, 입자는 벽과 각 θ를 이루며 O 쪽으로 움직이면서 M_1에 도달한다. 충돌 직전의 속도 성분은

$$u_1\cos\theta \text{ 벽을 따라 } (O \text{ 쪽으로}), \qquad u_1\sin\theta \text{ 벽에 수직 (벽 쪽으로)}.$$

이다. 벽이 매끄러우므로 입자가 받는 충격량은 OA에 수직이다. 따라서

$$\text{벽 방향: } u_1\cos\theta \text{ (변하지 않음)},$$
$$\text{수직 방향: } e\,u_1\sin\theta \text{ (방향이 반대가 되고 } e\text{배가 됨)}.$$

그러므로 입자는 여전히 O 쪽으로 움직이며, 벽과 각 φ를 이루고 M_1을 떠난다. 여기서

$$\tan\varphi = \frac{e\,u_1\sin\theta}{u_1\cos\theta} = e\tan\theta, \qquad v_1\cos\varphi = u_1\cos\theta. \tag{$*$}$$

이다.

다음으로 삼각형 OM_1N_1의 기하로부터 φ를 구한다. 점 O, N_1, B는 한 직선 위에 있고 각 $M_1N_1B = \theta$이므로, 각 $ON_1M_1 = 180° - \theta$이다. O에서의 각은 $30°$이므로

$$\varphi = \angle OM_1N_1 = 180° - 30° - (180° - \theta) = \theta - 30°.$$

이다. φ가 양수이려면 $\theta > 30°$이어야 하며, 이 배치는 이를 암묵적으로 가정한다. 그러면 $(*)$에서

$$\boxed{e = \frac{\tan(\theta - 30°)}{\tan\theta}}$$

이고

$$\boxed{\frac{v_1}{u_1} = \frac{\cos\theta}{\cos(\theta - 30°)} = \frac{2}{\sqrt{3} + \tan\theta}},$$

이다. 마지막 꼴은 $\cos(\theta - 30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta$로 전개하여 얻는다. 원한다면 $e = \dfrac{\sqrt{3}\tan\theta - 1}{\tan\theta\,(\sqrt{3} + \tan\theta)}$로 써도 된다. $0 < \theta - 30° < \theta < 90°$이므로 문제에서 요구하는 대로 $0 < e < 1$을 얻는다.

유한한 시간 안에 O에 도달하기

N_1에서 입자는 벽 OB와 각 θ를 이루며 O 쪽으로 움직이면서 도달한다(각 $M_1N_1B = \theta$이므로). 이는 두 벽의 역할만 바뀌었을 뿐 M_1에서의 상황과 정확히 같다. 따라서 같은 계산이 적용된다. 입자는 N_1O와 각 $\theta - 30^\circ$를 이루며 튕겨 나가고, 속력은

$$r = \frac{\cos\theta}{\cos(\theta - 30^\circ)}.$$

배가 된다.

생각해 보기 입자가 M_2에 다시 각 θ로 도달하여 이 패턴이 정말로 되풀이되는가?

그렇다. 삼각형 ON_1M_2에서 O에서의 각은 30°이고 N_1에서의 각은 $\theta - 30^\circ$이다. 따라서 각 $OM_2N_1 = 180^\circ - \theta$이고, 이는 각 $N_1M_2A = \theta$임을 뜻한다. 수학적 귀납법(induction)에 의해 모든 충돌은 벽과 각 θ를 이루며 일어난다. 모든 구간은 벽과 각 $\theta - 30^\circ$를 이루며 벽을 떠난다. 그리고 모든 삼각형 OM_nN_n, ON_nM_{n+1}은 각이 30°, $\theta - 30^\circ$, $180^\circ - \theta$이므로 모두 닮음(similar)이다.

길이. 삼각형 OM_1N_1에서 사인법칙(sine rule)에 의해

$$\frac{ON_1}{\sin(\theta - 30^\circ)} = \frac{OM_1}{\sin(180^\circ - \theta)} = \frac{M_1N_1}{\sin 30^\circ}.$$

이다. 따라서 새 삼각형은 각각 이전 삼각형을

$$k = \frac{ON_1}{OM_1} = \frac{\sin(\theta - 30^\circ)}{\sin\theta}.$$

배로 축소한 것이다. 구간 M_1N_1, N_1M_2, $M_2N_2, \ldots$을 차례로 구간 $1, 2, 3, \ldots$이라 하자. 구간 n의 길이는 $\ell_1 k^{n-1}$이며, 여기서 $\ell_1 = M_1N_1 = \dfrac{OM_1}{2\sin\theta}$이다.

속력. 구간 n은 일정한 속력 $v_1 r^{n-1}$로 움직인다.

시간. 따라서 구간 n에 걸리는 시간은

$$\tau_n = \frac{\ell_1 k^{n-1}}{v_1 r^{n-1}} = \frac{\ell_1}{v_1} q^{n-1}, \qquad q = \frac{k}{r} = \frac{\sin(\theta - 30^\circ)\cos(\theta - 30^\circ)}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{\sin(2\theta - 60^\circ)}{\sin 2\theta}.$$

이다.

생각해 보기 구간의 길이는 등비적으로 줄어들지만 입자의 속력도 줄어든다. 왜 길이만으로는 문제가 해결되지 않는가?

더해야 하는 것은 시간이며, 시간의 비 q는 구간이 줄어드는 정도(k)와 입자가 느려지는 정도(r)를 비교한다. 우리에게는 $q < 1$이 필요하다. 이제 $30^\circ < \theta < 60^\circ$라 하자. 그러면

$$0^\circ < 2\theta - 60^\circ < 60^\circ \;\Rightarrow\; \sin(2\theta - 60^\circ) < \tfrac{\sqrt{3}}{2}, \qquad 60^\circ < 2\theta < 120^\circ \;\Rightarrow\; \sin 2\theta > \tfrac{\sqrt{3}}{2},$$

이므로 $0 < q < 1$이다. 그러면 전체 시간은 수렴(convergent)하는 등비급수이다.

$$T = \frac{PM_1}{u_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ell_1}{v_1} q^{n-1} = \frac{PM_1}{u_1} + \frac{\ell_1}{v_1(1-q)}.$$

이 값은 유한하다. 간단히 하기 위해 $\sin 2\theta - \sin(2\theta - 60^\circ) = 2\cos(2\theta - 30^\circ)\sin 30^\circ$를 이용하면 $1 - q = \dfrac{\cos(2\theta - 30^\circ)}{\sin 2\theta}$를 얻는다. 그러면 M_1 이후의 시간은

$$\frac{\ell_1}{v_1(1-q)} = \frac{OM_1 \cos(\theta - 30^\circ)}{u_1 \cos(2\theta - 30^\circ)},$$

이고, 이는 $30^\circ < \theta < 60^\circ$에서 양수이며 유한하다.

마지막으로, 입자는 실제로 O에 도달한다. n번째 충돌 후 O로부터의 거리는 $OM_1 k^n \to 0$이다. $0 < k < 1$이기 때문이다. 한 구간 동안 O로부터의 거리는 그 구간의 두 끝점의 거리 중 큰 값 이하이다. 따라서 $t \to T$일 때 입자와 O 사이의 거리는 0으로 수렴한다. 즉 입자는 무한히 많은 충돌을 거친 뒤 유한한 시간 T에 O에 도달한다. ■

검산

- $\theta = 45^\circ$일 때: $e = \tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3} \approx 0.268$, $v_1/u_1 = \sqrt{3} - 1 \approx 0.732$이고 $q = \sin 30^\circ / \sin 90^\circ = \frac{1}{2}$이므로, 각 구간은 이전 구간의 절반만큼 시간이 걸린다. $OM_1 = u_1 = 1$로 두면 M_1에서 O까지의 시간은 $\cos 15^\circ / \cos 60^\circ = 2\cos 15^\circ \approx 1.932$이다. 충돌을 한 단계씩 시뮬레이션하면(60번 튕김) 1.931852를 얻어 일치한다.
- $\theta = 60^\circ$일 때: $q = 1$이므로 모든 구간에 같은 시간이 걸리고 전체 시간은 무한하다. $\theta > 60^\circ$이면 $q > 1$이다. 따라서 60°가 정확히 경계이며, T에 대한 식은 그곳에서 $\cos(2\theta - 30^\circ) = \cos 90^\circ = 0$ 때문에 발산한다.
- $\theta \to 30^{\circ+}$일 때 $e \to 0$이다. 예상대로 입자는 거의 튕기지 않고 거의 곧장 O로 미끄러진다.

흔한 실수

- 삼각형을 잘못 보는 것: 각 M_1N_1B는 N_1에서의 **외각**이므로 내각은 $180^\circ - \theta$이고, M_1에서 튕겨 나가는 각은 $\theta + 30^\circ$가 아니라 $\theta - 30^\circ$이다.
- 거리 $OM_n \to 0$이라는 이유만으로 입자가 O에 도달한다고 주장하는 것. 무한히 많은 구간에 대해서는 **시간**의 급수가 수렴해야 하며, 입자는 충돌할 때마다 느려진다.
- 충돌 시 접선 성분의 방향을 뒤집는 것. 매끄러운 벽에서는 법선 성분만 바뀐다.

STEP 너머

유한한 시간 안에 무한히 많은 충돌이 일어나는 것을 **제논 현상**(Zeno behaviour)이라 한다. 익숙한 예는 $e < 1$로 바닥에서 튀는 공이며, 여기서는 쐐기가 바닥의 역할을 한다. 매끄러운 운동과 갑작스러운 도약이 섞인 "하이브리드" 시스템을 연구하는 수학자들은 제논 시간 이후에 무슨 일이 일어나는지 정해야 한다. 입자성 물질(granular materials)에서는 **비탄성 붕괴**(inelastic collapse)라 불리는 같은 현상이 시뮬레이션에서 실제로 큰 골칫거리가 된다. 대학 1학년 수준에서 충돌과 충격량을 꼼꼼히 다룬 책으로는 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 보라.

풀이

STEP III 2002, 문제 12

확률과 통계 • 조건부를 이용한 기댓값

STEP III 2002, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/02-s3-q12

핵심 아이디어

게임이 어떻게 **시작하는지**에 따라 조건을 나눈다(condition). 모든 게임은 H, TH, TT 중 하나로 시작한다. 앞의 두 경우에는 쓸모 있는 진전이 전혀 없으므로(뒷면의 연속이 끊겼으므로) 게임은 그냥 처음부터 다시 시작하고, 남은 길이의 기댓값(expectation)은 다시 E이다. 이러한 "재생(renewal)"으로부터 E에 대한 일차방정식을 얻고, 이를 풀 수 있다. 같은 아이디어, 즉 첫 앞면이 언제 나오는지로 경우를 나누는 방법으로 뒷면 r번의 경우도 다룰 수 있다.

풀이

이 풀이 전체에서 p는 앞면이 나올 확률, $q = 1 - p$는 뒷면이 나올 확률이며, 각 던지기는 독립(independent)이다. $0 < p < 1$이라 가정하므로 게임은 확률 1로 끝나고, 아래의 모든 기댓값은 유한하다.

E에 대한 방정식의 설명

처음 한두 번의 던지기를 살펴보자. 다음 중 정확히 하나가 일어난다.

- **처음에 H** (확률 p). 한 번 던졌고, 진행 중인 뒷면의 연속은 없다. 각 던지기가 독립이므로 게임의 나머지 부분은 전체 게임의 새로운 복사본이며, 그 길이의 기댓값은 E이다. 전체 길이의 기댓값: $1 + E$.
- **T 다음 H** (확률 qp). 두 번 던졌고, 이번에도 앞면이 뒷면의 연속을 지워 버렸으므로 게임은 다시 시작한다. 전체 길이의 기댓값: $2 + E$.
- **T 다음 T** (확률 q^2). 게임은 정확히 2번 던진 뒤 끝난다.

이 세 경우는 서로 배반이고 모든 경우를 망라한다(확률의 합이 $p+qp+q^2=p+q=1$이다). 전체 기댓값의 법칙(law of total expectation)에 의해

$$E = p(1+E) + (1-p)p(2+E) + 2(1-p)^2,$$

이고, 이것이 주어진 방정식이다.

E 구하기

E가 들어 있는 항을 모으면

$$E\,(1-p-qp) = p + 2qp + 2q^2.$$

좌변에서 $1-p-qp = q-qp = q(1-p) = q^2$이다. 우변에서 $p+2q(p+q) = p+2q = 1+q$이다. $q \neq 0$이므로

$$E = \frac{1+q}{q^2} = \frac{2-p}{(1-p)^2}.$$

상금의 기댓값

W를 앞면이 나오는 횟수의 기댓값, 즉 파운드 단위 상금의 기댓값이라 하자. 같은 세 경우를 이용한다. H 다음에는 £1을 얻고 게임이 다시 시작한다. TH 다음에도 £1을 얻고 게임이 다시 시작한다. TT 다음에는 아무것도 얻지 못하고 게임이 끝난다. 따라서

$$W = p(1+W) + qp(1+W) + q^2 \cdot 0.$$

? **생각해 보기** TH의 경우에 왜 W가 아니라 $1+W$인가?

그 경우 두 번째 던지기는 앞면**이므로**, 게임이 다시 시작하기 전에 £1을 번다. 이것을 빠뜨리는 것이 여기서 가장 틀리기 쉬운 부분이다.

항을 정리하면 $W(1-p-qp) = p(1+q)$이므로 $Wq^2 = p(1+q)$이고

$$W = \frac{p(1+q)}{q^2} = \frac{p(2-p)}{(1-p)^2} \text{ 파운드.}$$

$W = pE$임에 주목하자. 게임이 멈추는 시점이 던지기 결과에 따라 달라지는데도, 평균적으로 던지기 중 비율 p만큼이 앞면이다.

뒷면이 r번 연속으로 나오는 게임

이제 E를 뒷면이 r번 연속으로 나오면 멈추는 게임에서 던지는 횟수의 기댓값이라 하자. 첫 앞면에 따라 조건을 나눈다. 처음 r번이 모두 뒷면이거나, 또는 $0 \le j \le r-1$인 어떤 j에 대하여 첫 앞면이 $j+1$번째 던지기에서 나온다.

- **뒷면 j번 다음 앞면** (확률 $q^j p$). $j+1$번 던졌고, 뒷면의 연속이 끊겼으므로 게임은 다시 시작한다. 전체 길이의 기댓값: $j+1+E$.
- **뒷면 r번** (확률 q^r). 게임은 정확히 r번 던진 뒤 끝난다.

따라서

$$E = \sum_{j=0}^{r-1} q^j p\,(j+1+E) + rq^r.$$

$1-q=p$이므로 우변에서 E의 계수는 $p\sum_{j=0}^{r-1} q^j = p\cdot\dfrac{1-q^r}{1-q} = 1-q^r$이다. 이것을 좌변으로 옮기면

$$q^r E = p\sum_{j=0}^{r-1}(j+1)q^j + rq^r. \qquad (*)$$

생각해 보기 공식집 없이 $\sum(j+1)q^j$를 어떻게 계산할까?

$S=\sum_{j=0}^{r-1}(j+1)q^j = 1+2q+3q^2+\cdots+rq^{r-1}$이라 쓰고, 여기서 $qS = q+2q^2+\cdots+(r-1)q^{r-1}+rq^r$를 빼면

$$(1-q)S = 1+q+q^2+\cdots+q^{r-1}-rq^r = \frac{1-q^r}{p} - rq^r.$$

그러므로 $pS = \dfrac{1-q^r}{p} - rq^r$이고, 이를 $(*)$에 대입하면 rq^r 항들이 소거된다.

$$q^r E = \frac{1-q^r}{p} - rq^r + rq^r = \frac{1-q^r}{p}.$$

따라서

$$E = \frac{1-q^r}{pq^r},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. $r=2$이면 이 값은 $\dfrac{(1-q)(1+q)}{pq^2} = \dfrac{1+q}{q^2}$이 되어 첫 번째 게임의 결과와 일치한다.

검산

- 공정한 동전, 즉 $p=q=\frac{1}{2}$인 경우: 첫 번째 게임은 평균 $E=\frac{3/2}{1/4}=6$번 계속되고 상금은 $W=$£3으로, 당연히 그래야 하듯 E의 절반이다.
- $r=1$: 게임은 첫 뒷면에서 멈추므로 길이는 평균이 $1/q$인 기하분포(geometric distribution)를 따른다. 공식은 $\dfrac{1-q}{pq} = \dfrac{1}{q}$을 준다.

- $q \to 0$일 때(거의 모든 던지기가 앞면일 때) E와 W는 모두 한없이 커지며, 당연히 그래야 한다.
- $r = 1, \ldots, 7$과 여러 p 값에 대하여 "현재 뒷면이 k번 연속된 상태"들로 이루어진 연쇄를 풀어, 이 공식들을 분수로 정확히 확인하였다. $p = 0.4$로 2×10^5번의 게임을 시뮬레이션한 결과, $r = 2$일 때 평균 4.438번 던지기(이론값 4.444)와 상금 £1.772(이론값 £1.778)를, $r = 3$일 때 9.076번 던지기(이론값 9.074)를 얻었다.

흔한 실수

- 상금에 대한 방정식에서 $qp(1 + W)$ 대신 $qp\,W$로 쓰는 것. 이렇게 하면 틀린 답 p/q^2을 얻는다.
- 첫 번째 던지기만으로 조건을 나누는 것. T 한 번 다음에는 연속의 뒷면 하나가 이미 쌓여 있으므로 게임이 다시 시작하지 **않는다**. 주어진 방정식이 두 번의 던지기를 내다보는 이유가 이것이다.

STEP 너머

"앞면이 한 번 나오면 그 이후는 처음과 정확히 같아 보인다"는 논증은 마르코프 연쇄(Markov chain)에 대한 **재생** 방법 또는 **첫 단계 분석**(*first-step analysis*)이며, 일반적으로 도달 시간(hitting time)의 기댓값은 이 방법으로 계산한다. $W = pE$라는 깔끔한 사실은 왈드 항등식(Wald's identity)의 한 예이다. 서로 독립이고 동일한 분포를 따르는(independent, identically distributed) 항들을 무작위 개수 N개 더한 합의 기댓값은, N이 정지 시간(stopping time)이라면 $\mathbb{E}[N]$에 한 항의 평균을 곱한 값과 같다. 두 가지 모두 Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문서), 또는 Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문서)에서 읽어 볼 수 있다.

풀이

STEP III 2002, 문제 13

확률과 통계 • 지수분포 확률변수의 최솟값

STEP III 2002, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/02-s3-q13

핵심 아이디어

"둘 중 적어도 하나가 x보다 작다"는 "둘 다 x 이상이다"의 여사건(complement)이고, 두 번째 사건의 확률은 독립성(independence)에 의해 곱으로 분해된다. 지수분포(exponential distribution)의 꼬리 확률은 $\mathrm{P}(X_i \geq x) = \mathrm{e}^{-\lambda_i x}$로 아주 간단하므로, 그 곱도 다시 지수분포의 꼬리 확률이 되며, 최솟값에 관한 증명은 이것이 전부이다. 버스 문제는 이 결과를 바로 적용한 것이다. 다음 버스까지 기다리는 시간은 지수분포를 따르는 두 배차 간격 중 작은 쪽이다.

풀이

둘 중 하나 또는 둘 다 x보다 작을 확률

먼저 지수분포를 따르는 확률변수 하나의 꼬리 확률을 구한다. $x \geq 0$일 때

$$\mathrm{P}(X_i \geq x) = \int_x^\infty \lambda_i \mathrm{e}^{-\lambda_i t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda_i t}\right]_x^\infty = \mathrm{e}^{-\lambda_i x}.$$

$X_1 < x$ 또는 $X_2 < x$(또는 둘 다)인 사건을 E라 하자. 그 여사건은 $X_1 \geq x$와 $X_2 \geq x$가 둘 다 성립하는 사건이다. X_1과 X_2는 독립이므로

$$\mathrm{P}(X_1 \geq x \text{ 이고} X_2 \geq x) = \mathrm{P}(X_1 \geq x)\,\mathrm{P}(X_2 \geq x) = \mathrm{e}^{-\lambda_1 x}\mathrm{e}^{-\lambda_2 x},$$

따라서 $x \geq 0$일 때

$$\boxed{\mathrm{P}(E) = 1 - \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}.}$$

이다. ($x < 0$이면 두 확률변수 모두 음수가 될 수 없으므로 확률은 0이다.)

? **생각해 보기** 그냥 $\mathrm{P}(X_1 < x)$와 $\mathrm{P}(X_2 < x)$를 더하면 왜 안 될까?

두 사건이 겹치기 때문이다. 둘이 동시에 x보다 작을 수 있으므로, 더하면 그 경우를 두 번 세게 된다. 포함배제의 원리(inclusion–exclusion)를 쓰면 $(1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 x})+(1-\mathrm{e}^{-\lambda_2 x})-(1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 x})(1-\mathrm{e}^{-\lambda_2 x})$가 되고, 이를 정리하면 같은 답이 나오지만 여사건을 이용하는 편이 더 빠르다.

최솟값은 지수분포를 따른다

$X=\min(X_1, X_2)$라 하자. 두 수 중 작은 쪽이 x보다 작은 것은 둘 중 적어도 하나가 x보다 작을 때와 정확히 같으므로, $\{X<x\}$는 위의 사건 E이다. 따라서 X의 분포함수(distribution function)는

$$F(x)=\mathrm{P}(X\le x)=1-\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)x} \qquad (x\ge 0),$$

이고, $x<0$일 때 $F(x)=0$이다. (연속확률변수에서는 $\mathrm{P}(X<x)=\mathrm{P}(X\le x)$이다.) 미분하면 X의 확률밀도함수(density)는

$$f(x)=F'(x)=(\lambda_1+\lambda_2)\,\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)x} \qquad (0\le x<\infty),$$

이고, 이는 모수(parameter)가 $\lambda_1+\lambda_2$인 지수분포의 확률밀도함수이다. 따라서 요구한 대로 X는 지수분포를 따른다.

버스

모수가 λ인 지수분포의 평균(mean)은 (부분적분으로) $\int_0^\infty t\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = 1/\lambda$이다. 시간을 분 단위로 재면, 평균 배차 간격 15분과 30분에서 모수는

$$\lambda_A=\tfrac{1}{15}, \qquad \lambda_B=\tfrac{1}{30}.$$

이다. 각 노선의 버스가 방금 떠났으므로, 다음 A 노선 버스까지의 시간은 A 노선 버스 사이의 온전한 배차 간격 T_A이고, B 노선도 마찬가지로 T_B이다. 이 둘은 서로 독립이며 각각 모수가 λ_A, λ_B인 지수분포를 따른다. 어느 노선을 타도 대학에 갈 수 있으므로 내가 기다리는 시간은 $W=\min(T_A, T_B)$이고, 방금 증명한 결과에 의해 W는 모수가

$$\lambda_A+\lambda_B=\tfrac{1}{15}+\tfrac{1}{30}=\tfrac{1}{10}.$$

인 지수분포를 따른다. 중앙값(median) m은 $\mathrm{P}(W\le m)=\frac{1}{2}$를 만족한다.

$$1-\mathrm{e}^{-m/10}=\tfrac{1}{2} \iff \mathrm{e}^{-m/10}=\tfrac{1}{2} \iff m=10\ln 2.$$

$\ln 2\approx 0.693$이므로 기다리는 시간의 중앙값은 $m\approx 6.93$분이고, 요구한 대로 약 7분이다.

검산

- $\lambda_2 \to 0$이면(B 노선 버스가 거의 오지 않으면) 답은 $1 - \mathrm{e}^{-\lambda_1 x}$가 되어, 마땅히 그래야 하듯 X_1의 분포와 같아진다.
- 기다리는 시간의 평균은 10분으로 두 노선의 평균 15분, 30분보다 짧고, 중앙값 $10\ln 2$는 오른쪽으로 치우친 분포에서 흔히 그렇듯 평균보다 작다.
- 평균이 15와 30인 독립 지수분포 배차 간격 2×10^5쌍을 모의실험하였더니, 최솟값의 중앙값은 약 6.91분으로 $10\ln 2 = 6.931\ldots$와 비슷하게 나왔다.

흔한 실수

- 평균을 모수로 쓰는 실수: 평균이 15인 지수분포의 모수는 15가 아니라 $\lambda = \frac{1}{15}$이다.
- 두 확률을 $\mathrm{P}(X_1 < x) + \mathrm{P}(X_2 < x)$처럼 더하는 실수: 이렇게 하면 중복해서 세게 되고 값이 1을 넘을 수도 있다.
- 두 노선의 중앙값을 평균하거나, A 노선만의 중앙값($15\ln 2 \approx 10.4$)을 택하는 실수: 노선이 두 개이면 기다리는 시간이 줄어든다.

STEP 너머

버스 사이의 배차 간격이 지수분포를 따른다는 것은 버스가 **푸아송 과정**(Poisson process)으로 도착한다는 뜻이며, 여기서 얻은 결과는 서로 독립인 두 푸아송 과정을 합치면 비율이 두 비율의 합인 또 다른 푸아송 과정이 된다는 것을 말해 준다. 무기억성(memoryless property) $\mathrm{P}(X > s + t \mid X > s) = \mathrm{P}(X > t)$와 함께, 이것은 대학 1학년 확률론 강의에서 만나는 대기행렬 이론(queueing theory)과 연속시간 마르코프 연쇄(continuous-time Markov chain)의 토대가 된다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)이 지수분포를 따르는 확률변수와 푸아송 과정을 다룬다.

풀이

STEP III 2002, 문제 14

확률과 통계 • 분산과 공분산

STEP III 2002, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/02-s3-q14

핵심 아이디어

분산 항등식은 분산(variance)의 정의를 기댓값의 선형성(linearity of expectation)으로 전개한 것일 뿐이다. 체스 부분은 보기보다 영리하다. 우리는 $\mathrm{E}(WL)$을 직접 계산하지 않는다. 그 대신 이항분포(binomial distribution)로부터 $W+L$의 분산을 알고, 역시 이항분포로부터 $\mathrm{Var}(W)$와 $\mathrm{Var}(L)$을 알며, 방금 증명한 항등식이 공분산(covariance)을 공짜로 건네준다.

풀이

분산 항등식

$\mu_X = \mathrm{E}(X)$, $\mu_Y = \mathrm{E}(Y)$라 하자. 다음 정의

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\big[(X-\mu_X)^2\big], \qquad \mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}\big[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\big],$$

와 기댓값의 선형성 $\mathrm{E}(aU+bV) = a\,\mathrm{E}(U) + b\,\mathrm{E}(V)$를 사용한다. 이산 확률변수(discrete random variable)의 경우 이 선형성은 합 $\sum(au+bv)\,\mathrm{P}(U=u, V=v)$를 두 개의 합으로 나누고 각 합에서 다른 변수에 대해 합하여 없애면 얻어진다.

선형성에 의해 $\mathrm{E}(X+Y) = \mu_X + \mu_Y$이므로

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X+Y) &= \mathrm{E}\big[\big((X-\mu_X)+(Y-\mu_Y)\big)^2\big] \\
&= \mathrm{E}\big[(X-\mu_X)^2 + (Y-\mu_Y)^2 + 2(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\big] \\
&= \mathrm{E}\big[(X-\mu_X)^2\big] + \mathrm{E}\big[(Y-\mu_Y)^2\big] + 2\,\mathrm{E}\big[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\big] \\
&= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y),
\end{aligned}$$

이다. 셋째 줄에서 선형성을 다시 사용하였다. 이것이 구하려는 결과이다. 독립성(independence)이 전혀 필요하지 않았다는 점에 주목하라. 이 항등식은 임의의 X와 Y에 대해 성립한다.

소문항 (i)

모든 경기는 승, 패, 무승부 중 하나이므로 어떤 일이 일어나든 $W + L + D = m$이다. 항상 같은 값을 갖는 확률변수는 그 평균과 같으므로, 분산은 $\mathrm{E}\big[(m-m)^2\big] = 0$이다.

소문항 (ii)

승부가 난 경기, 즉 이기거나 진 경기를 **결판난** 경기라 부르자. 각 경기가 결판날 확률은 $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$이고, 경기들은 서로 독립이며, 경기 수는 m으로 고정되어 있다. 따라서 결판난 경기의 수 $W + L$은 성공 확률이 같은 m번의 독립 시행에서 성공 횟수를 센 것이다.

$$W + L \sim \mathrm{B}\big(m, \tfrac{2}{3}\big).$$

상관계수

정확히 같은 방식으로, W는 각각 확률 $\frac{1}{3}$로 이기는 m번의 독립 시행에서 승리 횟수를 센 것이므로 $W \sim \mathrm{B}(m, \frac{1}{3})$이고, 마찬가지로 $L \sim \mathrm{B}(m, \frac{1}{3})$이다. 이항분포의 분산 $\mathrm{Var} = np(1-p)$를 사용하면

$$\mathrm{Var}(W) = \mathrm{Var}(L) = m \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{2}{3} = \frac{2m}{9}, \qquad \mathrm{Var}(W+L) = m \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{3} = \frac{2m}{9}.$$

? **생각해 보기** $\mathrm{E}(WL)$을 계산하지 않고 어떻게 $\mathrm{Cov}(W, L)$을 구할 수 있을까?

항등식을 거꾸로 사용한다. $X = W, Y = L$로 두면

$$\frac{2m}{9} = \frac{2m}{9} + \frac{2m}{9} + 2\,\mathrm{Cov}(W, L), \qquad \text{따라서} \qquad \mathrm{Cov}(W, L) = -\frac{m}{9}.$$

그러므로 $m \geq 1$일 때(분산이 0이 아니도록),

$$\frac{\mathrm{Cov}(W, L)}{\sqrt{\mathrm{Var}(W)\,\mathrm{Var}(L)}} = \frac{-m/9}{2m/9} = -\frac{1}{2}.$$

이 답은 m에 의존하지 않는다. 그리고 당연히 음수이다. 경기 수가 고정되어 있으므로 승리가 많을수록 패배가 들어갈 자리가 줄어든다.

소문항 (i)은 두 번째 경로를 제공한다. 항등식을 두 번 적용하면 $\mathrm{Var}(W + L + D)$는 세 분산의 합에 세 쌍별 공분산의 합의 두 배를 더한 것이다. 대칭성에 의해 세 공분산은 모두 어떤 값 c로 같으므로 $0 = 3 \cdot \frac{2m}{9} + 6c$이고, 다시 $c = -\frac{m}{9}$를 얻는다.

검산

- $m = 1$로 두자. 그러면 W와 L은 $\mathrm{E}(W) = \mathrm{E}(L) = \frac{1}{3}$인 지시변수(indicator)이고 항상 $WL = 0$이므로 $\mathrm{Cov}(W, L) = 0 - \frac{1}{9} = -\frac{1}{9}$이며, 이는 $-m/9$와 일치한다.
- 두 경로(소문항 (ii)를 통한 것과 소문항 (i)을 통한 것)의 결과가 일치한다.
- $m = 1, \ldots, 7$에 대해 3^m가지 결과를 모두 정확히 나열하여 계산하면 매번 $\mathrm{Var}(W) = 2m/9$, $\mathrm{Cov}(W, L) = -m/9$이고 상관계수(correlation)는 정확히 $-\frac{1}{2}$이다.

흔한 실수

- **경기들**이 독립이므로 W와 L도 독립이라고 가정하는 것. 그렇지 않다. 이들은 D와 함께 고정된 합을 공유한다.
- $\mathrm{Var}(W + L) = \mathrm{Var}(W) + \mathrm{Var}(L) = 4m/9$로 두는 것. 이는 공분산 항을 빠뜨린 것이며 이항분포로 얻은 답 $2m/9$와 모순된다.

STEP 너머

(W, L, D)는 **다항분포**(multinomial distribution)를 따르는데, 이는 시행마다 결과가 두 가지보다 많은 경우로 이항분포를 자연스럽게 일반화한 것이다. 일반적으로 각 결과의 확률이 $p_1, \ldots, p_k$이면, 횟수 N_i와 N_j의 공분산은 $-mp_ip_j$이고 상관계수는 $-\sqrt{p_ip_j/\left((1-p_i)(1-p_j)\right)}$이며, 여기서는 $-\frac{1}{2}$가 된다. 공분산 행렬(covariance matrix)과 공분산의 쌍선형성(bilinearity)은 Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문), 그리고 Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률 입문)에서 다룬다.

Beyond STEP

STEP은 대부분의 학생이 학창 시절에 치르는 수학 시험 가운데 가장 어려운 시험이다. 또한 가장 훌륭한 시험 가운데 하나이기도 하다. 문제는 짧고 낯설며 깊이가 있고, 그중 가장 뛰어난 문제들은 대학 수학의 작은 조각이 모습을 감추고 있는 것이다.

이 책은 1987년 첫 시험에 앞서 나온 예시 시험지(specimen papers)부터 2025년 시험지까지 가운데 가장 흥미로운 STEP 문제들을 골라, 각 문제를 하나의 문으로 삼는다. 모든 문제는 뛰어난 학생이 풀어 가면서 던질 법한 질문들과 함께 꼼꼼하게 풀이하고, 그런 다음 책은 그 문을 지나 한 걸음 더 나아간다. 그 아이디어가 어디에서 왔는지, 대학에서는 무엇으로 발전하는지, 그리고 다음에는 무엇을 읽으면 좋은지를 살펴본다.

이 책은 STEP을 준비하면서 기출 문제 연습 이상의 것을 원하는 재능 있는 예비 수학자를 위해 쓰였다. 수학과 학부생처럼 생각하기 시작하고, 앞으로 무엇이 자신을 기다리고 있는지 알아보고 싶은 학생들을 위한 책이다.

- 순수수학(pure mathematics), 역학(mechanics), 확률(probability)과 통계(statistics)를 아우르는 13개의 장
- 이 36개의 STEP 기출 문제와 각 문제의 안내식 풀이
- 모든 문제 뒤에 숨은 대학 수학
- 답이 실린 후속 연습 문제와 더 읽을거리

2002년 풀이. 책 전체와 모든 장,
모든 풀이를 다음 주소에서 무료로 읽고, 내려받고, 공유할 수 있다.

beyondstep.keithmcnulty.org

본문은 퍼블릭 도메인(CC0 1.0)으로 공개한다. STEP 문제 © Cambridge University Press & Assessment.

