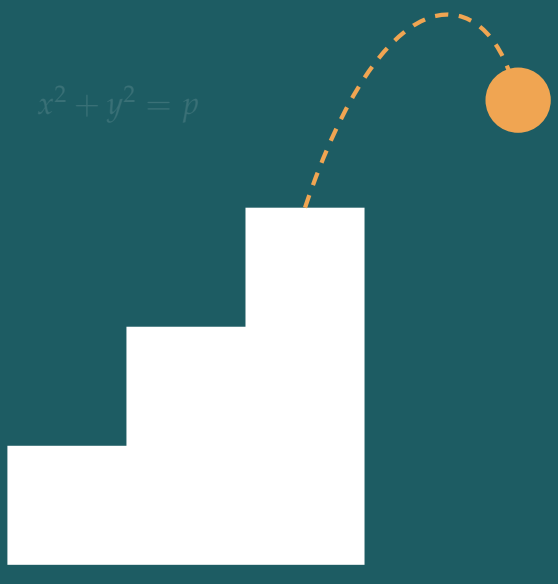
STEP 대비 · 대학 수학

Beyond STEP

STEP I, II 및 III

2001년 풀이



KEITH McNULTY

Beyond STEP

STEP 기출문제로 여는
대학 수학의 세계

STEP I, II 및 III

2001년 풀이

Keith McNulty

Beyond STEP: STEP 기출문제로 여는 대학 수학의 세계

2001년 풀이

2001년 STEP 문제지(STEP I, II 및 III)의 42개 문제 전체에 대한 풀이. 견본 문제지 이후 모든 STEP 문제의 풀이와 *Beyond STEP* 책 전체, 그리고 각 장을 `beyondstep.keithmcnulty.org`에서 무료로 읽고 내려받을 수 있다.

풀이를 읽기 전에 먼저 문제를 제대로 풀어 보자. 모든 답은 수치적으로 검증하였지만, 풀이가 이렇게 많으면 실수가 어느 정도 있을 수밖에 없다. 무언가 잘못된 것처럼 보이면 자신의 풀이를 믿고 꼼꼼히 확인해 보자.

영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.

2026년 11월 온라인 초판 발행.

이 PDF에서 지은이가 직접 만든 모든 것, 곧 본문, 풀이, 그림, 연습문제와 해답은 크리에이티브 커먼즈 CC0 1.0 Universal 라이선스에 따라 퍼블릭 도메인(public domain)으로 공개한다. 누구든 허락을 구하지 않고 어떤 목적으로든 복사하고, 고쳐 쓰고, 공유할 수 있다. 자세한 내용은 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`을 보라.

여기에서 다루는 STEP 문제의 저작권은 Cambridge University Press & Assessment에 있다. 문제는 이 책에 싣지 않았으며, 각 문제마다 공식 출처인 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스나 OCR의 기출 시험지로 가는 링크를 달았다.

오류 제보는 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty에 이슈로 남겨 주기 바란다.

차례

STEP I

Q1 기하 부등식 순수수학 . . . 3

Q2 대수적 부등식 순수수학 . . . 7

Q3 삼차식과 판별식 순수수학 . . . 10

Q4 역삼각함수 방정식 순수수학 . . . 14

Q5 적분 기호 아래에서의 미분 순수수학 . . . 18

Q6 회전면 순수수학 . . . 21

Q7 오목성과 미분방정식 순수수학 . . . 25

Q8 2계 선형 방정식 순수수학 . . . 29

Q9 요격과 상대 속도 역학 . . . 33

Q10 포물체의 비행 시간 역학 . . . 36

Q11 탄성 끈과 에너지 역학 . . . 40

Q12 수형도 확률과 통계 . . . 44

Q13 조건부 푸아송 분포 확률과 통계 . . . 48

Q14 무작위 순서 확률과 통계 . . . 51

STEP II

Q1 이항 근사 순수수학 . . . 55

Q2 정수 부분의 합 순수수학 . . . 58

Q3 유클리드 기하학 순수수학 . . . 62

Q4 배각 방정식 순수수학 . . . 66

Q5 정류점과 적분 순수수학 . . . 70

Q6 치환적분 순수수학 . . . 74

Q7 복소수와 회전 순수수학 . . . 77

Q8 주기함수와 상미분방정식 순수수학 . . . 81

Q9 속도의 제곱에 비례하는 공기 저항 역학 85
Q10 충돌과 반발계수 역학 89
Q11 포물체 운동 역학 93
Q12 푸아송 근사 확률과 통계 97
Q13 연속 분포와 추정 확률과 통계 100
Q14 최소분산 추정량 확률과 통계 104

STEP III

Q1 매클로린 급수 순수수학 107
Q2 쌍곡선 함수 치환과 넓이 순수수학 112
Q3 이차식의 근 순수수학 116
Q4 역삼각함수 순수수학 120
Q5 포물선의 법선 순수수학 125
Q6 벡터와 삼각형의 중심 순수수학 129
Q7 직교 궤적 순수수학 133
Q8 복소평면 위의 자취 순수수학 138
Q9 마찰과 단진동 역학 142
Q10 상대 속도 역학 146
Q11 회전 에너지 보존 역학 150
Q12 지시변수를 이용한 기댓값 확률과 통계 154
Q13 동전 수열 게임 확률과 통계 157
Q14 분산의 불편추정량 확률과 통계 162

풀이

STEP I 2001, 문제 1

순수수학 • 기하 부등식

> **STEP I 2001, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/01-s1-q1

핵심 아이디어

정사각형의 서로 다른 세 변 위에 있는 세 점은 반드시 마주 보는 한 쌍의 변을 사용하고, 세 번째 변은 그 두 변을 잇는다. 각 점이 0과 1 사이의 매개변수(parameter) 하나만 가지도록 정사각형에 좌표를 놓는다. 그런 다음 귀류법(proof by contradiction)으로 논증한다. 삼각형의 세 변이 모두 주어진 한계보다 길다면 각 길이 조건이 매개변수 하나씩을 조이고, 이 조임이 합쳐지면 한 점이 정사각형 밖으로 밀려나게 된다.

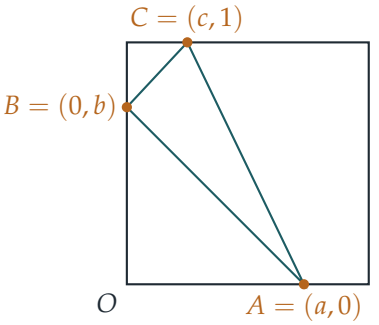
풀이

단위는 센티미터로 한다. 변은 네 개이고 세 점은 서로 다른 변 위에 있으므로, 세 점이 놓이지 않은 변은 정확히 하나이다. 따라서 두 점은 마주 보는 한 쌍의 변 위에 있고, 세 번째 점은 그 두 변 모두와 이웃한 변 위에 있다. 정사각형이 $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$이 되도록 좌표축을 잡으면

$$A = (a, 0) \text{ 아래 변 위}, \qquad B = (0, b) \text{ 왼쪽 변 위}, \qquad C = (c, 1) \text{ 위 변 위},$$

이고 $a, b, c \in [0, 1]$이다. (정사각형을 회전하거나 대칭이동해도 길이는 변하지 않으므로, 이렇게 해도 일반성을 잃지 않는다(without loss of generality).) 그러면

$$AB^2 = a^2 + b^2, \qquad BC^2 = c^2 + (1-b)^2, \qquad CA^2 = (c-a)^2 + 1.$$



$k = \sqrt{6} - \sqrt{2}$, $t = 2 - \sqrt{3}$이라 하자. 다음 두 가지 간단한 사실 덕분에 수치가 깔끔하게 정리된다.

$$k^2 = 8 - 2\sqrt{12} = 8 - 4\sqrt{3}, \qquad t^2 = 7 - 4\sqrt{3}, \qquad \text{따라서} \qquad k^2 - 1 = t^2.$$

또한 $2t = 4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2$이므로 $\sqrt{2t} = \sqrt{3} - 1$이고, 따라서

$$\sqrt{2t} + t = (\sqrt{3} - 1) + (2 - \sqrt{3}) = 1.$$

귀류법을 위해 삼각형의 세 변이 모두 k보다 길다고 가정하자. 정사각형을 직선 $y = \frac{1}{2}$에 대해 대칭이동하는 대칭성(A와 C의 역할, 그리고 a와 c의 역할을 서로 바꾼다)에 의해 $c \geq a$라고 가정해도 된다.

$BC > k$로부터. $c \leq 1$이므로

$$k^2 < BC^2 = c^2 + (1 - b)^2 \leq 1 + (1 - b)^2,$$

이고, 따라서 $(1 - b)^2 > k^2 - 1 = t^2$이다. $1 - b \geq 0$이고 $t > 0$이므로 $1 - b > t$, 즉 $0 \leq b < 1 - t$이다.

$AB > k$로부터. $0 \leq b < 1 - t$이므로 $b^2 < (1 - t)^2$이고, 따라서

$$a^2 > k^2 - b^2 > k^2 - (1 - t)^2 = (1 + t^2) - (1 - 2t + t^2) = 2t.$$

$a \geq 0$이므로 $a > \sqrt{2t} = \sqrt{3} - 1$이다.

? 생각해 보기 a의 범위를 좁혔다. 세 번째 변 CA는 무엇을 더해 주는가?

변 CA는 정사각형을 아래에서 위로 가로지르므로 세로 방향의 길이가 1이고, 나머지 길이는 가로 방향으로 채워야 한다.

$CA > k$로부터. $(c - a)^2 + 1 > k^2$이므로 $(c - a)^2 > t^2$이고, $c \geq a$이므로 $c - a > t$이다. 따라서

$$c > a + t > \sqrt{2t} + t = 1.$$

그런데 C는 위 변 위에 있으므로 $c \le 1$이다. 이 모순은 세 변이 모두 k보다 길 수는 없음을 보여 준다. 즉 삼각형 ABC의 변 가운데 적어도 하나의 길이는 $(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ cm 이하이며, 이로써 증명이 끝난다.

한계는 실제로 달성된다

$c = 1$이고 $a = b = \sqrt{3}-1$일 때, 즉 $A = (\sqrt{3}-1, 0)$, $B = (0, \sqrt{3}-1)$, $C = (1,1)$일 때 위의 모든 부등식(inequality)에서 등호가 성립한다. 이때

$$AB^2 = 2(\sqrt{3}-1)^2 = 8-4\sqrt{3}, \qquad BC^2 = CA^2 = 1+(2-\sqrt{3})^2 = 8-4\sqrt{3},$$

이므로 ABC는 한 변의 길이가 정확히 k인 정삼각형(equilateral triangle)이다(C는 꼭짓점에 있지만 위 변 위에 있는 것으로 센다). 따라서 $\sqrt{6}-\sqrt{2}$는 가능한 최선의 상수이다. 삼각함수로 나타내면 $k = \sec 15^\circ$이다. 이것은 단위 정사각형 안에 들어가는 가장 큰 정삼각형으로, 정사각형의 변에 대해 15° 기울어져 있다.

검산

- $k = \sqrt{6}-\sqrt{2} \approx 1.0353$은 정사각형의 한 변보다 조금 크다. 이는 타당하다. 세 변 위에 꼭짓점을 하나씩 가진 삼각형은 모든 변이 1보다 길 수 있지만, 아주 조금만 길 수 있다.
- 2×10^6개의 순서쌍 $(a,b,c) \in [0,1]^3$에 대해 무작위 탐색을 해 보면 가장 짧은 변은 한 번도 1.0337을 넘지 않았으며, 이는 k보다 작다. 위의 정삼각형 예에서는 세 변이 모두 기계 정밀도 내에서 1.03528과 같다.
- $\sec 15^\circ = 4/(\sqrt{6}+\sqrt{2}) = \sqrt{6}-\sqrt{2}$이므로 정삼각형 그림과 일치한다.

흔한 실수

- 증명 없이 삼각형이 정삼각형이라거나 한 꼭짓점이 정사각형의 꼭짓점에 있다고 가정하는 것. 극단적인 경우는 답을 암시하지만, 모든 배치에 대해 부등식을 증명해 주지는 않는다.
- 설정의 정당성을 밝히지 않는 것. 핵심이 되는 구조적 사실은 서로 다른 세 변에는 반드시 마주 보는 한 쌍이 포함된다는 것이다.
- $(1-b)^2 > t^2$나 $(c-a)^2 > t^2$에서 어느 부호인지 밝히지 않고 제곱근을 취하는 것.

STEP 너머

이것은 작은 **최대–최소**(*max–min*) 문제이다. 우리는 배치들로 이루어진 콤팩트(compact) 집합 위에서 가장 짧은 변의 길이를 최대화하고 있으며, 극단적인 배치에서는 모든 제약 조건이 한꺼번에 같아진다. 이는 최적화(optimisation)와 게임 이론(game theory) 전반에 걸쳐 나타나는 패턴이다. $[0,1]^3$은 닫혀 있고 유계(closed and bounded)이며 가장 짧은 변의 길이는 연속함수(continuous function)이므로 최댓값이 반드시 존재한다. 이 사실은 해석학(analysis) 첫 강의에서 증명된다(최대·최소 정리(extreme value theorem)). Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)가 이 내용을 잘 다루고 있으며, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제집)에는 같은 맥락의 STEP 기하 문제가 더 실려 있다.

풀이

STEP I 2001, 문제 2

순수수학 • 대수적 부등식

> **STEP I 2001, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/01-s1-q2

핵심 아이디어

부등식(inequality)에서는 부호를 모르는 식을 양변에 곱할 수 없으므로, (i)에서 안전한 방법은 모든 항을 한쪽으로 모은 뒤 인수분해하는 것이다. 그러면 답은 부호표(sign diagram)에서 바로 읽을 수 있다. (ii)에서는 제곱근 때문에 양변을 제곱하고 싶어지지만, 이는 양변이 모두 음이 아님을 알 때에만 정당하다. 이 조건을 끝까지 놓치지 않는 것이 이 문제의 전부이다.

풀이

소문항 (i)

x는 음수일 수 있으므로 양변에 x를 곱할 수는 없다. 대신 x^2을 곱한다. $x \neq 0$이므로 x^2은 양수이고, 따라서 부등호의 방향이 유지된다.

$$\begin{aligned} 1 + 2x - x^2 > \frac{2}{x} &\iff x^2 + 2x^3 - x^4 > 2x \\ &\iff 0 > x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x \\ &\iff x\left(x^3 - 2x^2 - x + 2\right) < 0. \end{aligned}$$

삼차식은 항을 묶어서 인수분해할 수 있다.

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = x^2(x-2) - (x-2) = (x-2)(x^2-1) = (x-2)(x-1)(x+1).$$

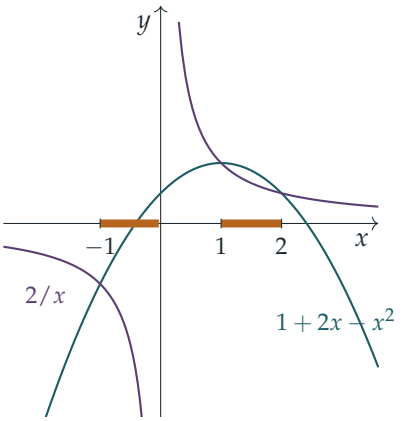
따라서 다음이 성립해야 한다.

$$(x+1)\,x\,(x-1)(x-2) < 0.$$

이 식은 최고차항의 계수가 양수이고 네 개의 단순근 $-1, 0, 1, 2$를 갖는 사차식이므로, x가 각 근을 지날 때마다 부호가 바뀐다. 즉 $x > 2$에서 양수, $(1, 2)$에서 음수, $(0, 1)$에서 양수, $(-1, 0)$에서 음수, $x < -1$에서 양수이다. 근 자체에서는 값이 0이 되어 < 0을 만족하지 않는다(그리고 $x = 0$은 어차피 제외된다). 그러므로

$$\boxed{-1 < x < 0 \quad \text{또는} \quad 1 < x < 2.}$$

그림도 이와 일치한다. 포물선 $y = 1 + 2x - x^2$은 두 곡선이 만나는 $x = -1, 1, 2$ 사이에서 정확히 쌍곡선 $y = 2/x$보다 위에 있고, 음의 쪽에서는 쌍곡선이 $x = 0$에서 $-\infty$로 곤두박질치기 전까지만 위에 있다.



소문항 (ii)

먼저 $x \geq -\frac{10}{3}$이면 $3x + 10 \geq 0$일 뿐 아니라 $x + 4 \geq \frac{2}{3} > 0$이므로, 두 제곱근은 전 범위에서 정의된다.

양변은 모두 음이 아니고, $a, b \geq 0$일 때 $a > b \iff a^2 > b^2$이다. 따라서 해를 새로 만들거나 잃지 않고 양변을 제곱할 수 있다.

$$\begin{aligned}\sqrt{3x+10} > 2 + \sqrt{x+4} &\iff 3x + 10 > 4 + 4\sqrt{x+4} + (x+4) \\ &\iff 2x + 2 > 4\sqrt{x+4} \\ &\iff x + 1 > 2\sqrt{x+4}.\end{aligned}$$

? 생각해 보기 그냥 한 번 더 제곱해도 될까?

곧바로는 안 된다. 우변 $2\sqrt{x+4}$는 양수이지만 $x+1$은 음수일 수 있고, 그러면 제곱하는 과정에서 거짓인 부등식이 참인 부등식으로 바뀔 수 있다. 그래서 경우를 나눈다.

▶ $x + 1 \leq 0$이면 좌변은 0 이하이고 우변은 양수이다. 따라서 부등식이 성립하지 않는다.

- $x+1>0$이면 양변이 모두 양수이므로, 이번에도 제곱은 동치 변형이다.

$$\begin{aligned} x+1>2\sqrt{x+4} &\iff x^2+2x+1>4x+16 \\ &\iff x^2-2x-15>0 \\ &\iff (x-5)(x+3)>0, \end{aligned}$$

  이 부등식은 $x>5$ 또는 $x<-3$일 때 성립한다. $x>-1$과 합치면 $x>5$만 남는다.

그러므로

$$\boxed{x>5.}$$

검산

- $x=5$에서는 $\sqrt{25}=5, 2+\sqrt{9}=5$이므로 등호가 성립하며, 경계에서는 마땅히 그래야 한다. $x=12$에서는 $\sqrt{46}\approx 6.78>2+4=6$이다. $x=0$에서는 $\sqrt{10}\approx 3.16<4$이다.
- (i)에서 $x=1.5$이면 $1.75>1.33$, $x=-0.5$이면 $-0.25>-4$로 둘 다 참이다. $x=0.5$이면 $1.75<4$로 거짓이다.
- 컴퓨터로 두 부등식을 각각 2×10^5개의 무작위 점과 모든 경계에서 10^{-6} 이내에 있는 점들에서 검사한 결과, 위의 답과 어긋나는 경우는 없었다.

흔한 실수

- (i)에서 $x>0$과 $x<0$으로 나누지 않고 x를 곱하는 것. 이렇게 하면 구간 $(-1,0)$을 잃거나 그 구간에서 답이 뒤집힌다.
- $x+1>0$이라는 조건 없이 $x+1>2\sqrt{x+4}$를 제곱하는 것. 그러면 가짜 구간 $-\frac{10}{3}\le x<-3$이 생긴다. 원래 부등식에 $x=-3.2$를 대입해 보면 성립하지 않음을 알 수 있다($\sqrt{0.4}\approx 0.63<2+\sqrt{0.8}$).

STEP 너머

(ii)에 쓰인 원리, 즉 어떤 연산이 부등식을 보존하는 것은 그 연산이 관련된 값들에서 증가함수(increasing function)일 때뿐이라는 원리는 해석학자들이 부등식을 다루는 방식의 출발점이다. $t\mapsto t^2$은 $[0,\infty)$에서는 증가하지만 $\mathbb{R}$에서는 그렇지 않다. 곱의 부호표는 연속함수(continuous function)가 영을 지나지 않고서는 부호를 바꿀 수 없다는 사실, 곧 중간값 정리(intermediate value theorem)로 일반화된다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)가 두 가지를 모두 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP I 2001, 문제 3

순수수학 • 삼차식과 판별식

STEP I 2001, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/01-s1-q3

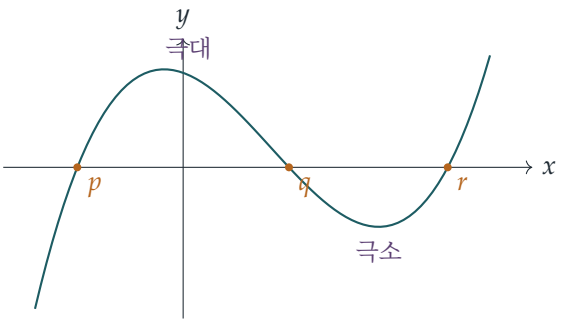
핵심 아이디어

서로 다른 세 실근을 가지는 삼차함수(cubic)의 그래프는 이웃한 두 근 사이마다 방향을 바꾸어야 하므로, 그 도함수(derivative)인 이차식(quadratic)은 서로 다른 두 실근을 가진다. "서로 다른 두 실근"을 "판별식(discriminant)이 양수"로 바꿔 쓰면 첫 번째 부등식을 얻는다. 두 번째 부분에서는 주어진 곱이 삼차식이고 그 계수가 바로 목표 부등식에 나오는 양들이므로, 첫 번째 부분(또는 완전제곱식(completed square))이 문제를 해결해 준다.

풀이

그래프 그리기

전개하면 $f(x) = x^3 - (p+q+r)x^2 + \ldots$ 이므로 $x \to \infty$일 때 $f(x) \to +\infty$이고 $x \to -\infty$일 때 $f(x) \to -\infty$이다. 그래프는 p, q, r에서만 x축과 만나고, 각 근이 단순근(simple root)이므로 f는 각 근에서 부호가 바뀐다. 즉 $x < p$에서 $f < 0$, (p, q)에서 $f > 0$, (q, r)에서 $f < 0$, $x > r$에서 $f > 0$이다. 따라서 p와 q 사이 어딘가에 극대(local maximum)가 있고, q와 r 사이 어딘가에 극소(local minimum)가 있다. y절편은 $f(0) = -pqr$이다.



(그림은 $p < 0 < q < r$인 경우로 그렸다. 근이 어디에 있든 모양은 같고, y축의 위치만 달라진다.)

첫 번째 부등식

완전히 전개하면

$$f(x) = x^3 - (p+q+r)x^2 + (qr+rp+pq)x - pqr,$$

이므로

$$f'(x) = 3x^2 - 2(p+q+r)x + (qr+rp+pq).$$

$f(p) = f(q) = 0$이므로 롤의 정리(Rolle's theorem)에 의해 p와 q 사이(양 끝 제외)에 f'의 근이 존재한다. 마찬가지로 q와 r 사이에도 근이 존재한다. 이 두 구간은 겹치지 않으므로 이차방정식 $f'(x) = 0$은 **서로 다른** 두 실근을 가진다. (롤의 정리를 쓰지 않는다면: $f'(p) = (p-q)(p-r) > 0$, $f'(q) = (q-p)(q-r) < 0$, $f'(r) = (r-p)(r-q) > 0$이므로 f'은 각 구간에서 부호가 바뀐다.)

이차식이 서로 다른 두 실근을 가지는 것은 판별식이 양수일 때와 정확히 같으므로

$$4(p+q+r)^2 - 12(qr+rp+pq) > 0, \qquad \text{즉,} \qquad (p+q+r)^2 > 3(qr+rp+pq),$$

이고, 이것이 증명하려던 것이다.

두 번째 부등식

전개하면

$$(x^2+gx+h)(x-k) = x^3 + (g-k)x^2 + (h-gk)x - hk.$$

이것을 f의 전개식과 비교하자. 이 삼차식의 근이 p, q, r이라면

$$p+q+r = -(g-k), \qquad qr+rp+pq = h-gk,$$

이므로 목표 부등식 $(g-k)^2 > 3(h-gk)$는 이 삼차식의 근에 대한 첫 번째 부등식과 정확히 같다.

충분조건(*sufficient*)임. $g^2 > 4h$라 하자. 그러면 $x^2 + gx + h$는 서로 다른 두 실근 $\alpha < \beta$를 가지고, 삼차식은 실근 α, β, k를 가진다. k가 두 근 모두와 다르면 세 근은 서로 다르므로 첫 번째 부분에 의해 곧바로 $(g-k)^2 > 3(h-gk)$를 얻는다.

생각해 보기 k가 마침 α나 β와 같아서 근들이 서로 다르지 않다면 어떻게 될까?

첫 번째 부분은 $p < q < r$을 가정했으므로 조금 더 따져 보아야 한다. 항등식(identity)

$$(p+q+r)^2 - 3(qr+rp+pq) = \tfrac{1}{2}\left[(p-q)^2 + (q-r)^2 + (r-p)^2\right]$$

은 $p = q = r$인 경우를 제외하면 좌변이 양수임을 보여 준다. $\alpha \neq \beta$이므로 세 근이 모두 같아지는 일은 없고, 따라서 이 경우에도 부등식이 성립한다.

근을 전혀 쓰지 않는 직접적인 방법도 있다. 전개하면

$$(g-k)^2 - 3(h-gk) = g^2 + gk + k^2 - 3h = \left(k + \tfrac{1}{2}g\right)^2 + \tfrac{3}{4}\left(g^2 - 4h\right),$$

이고, $g^2 > 4h$이면 이것은 제곱식에 양수를 더한 것이므로 양수이다. 어느 방법으로든 $g^2 > 4h$는 충분조건이다.

필요조건(*necessary*)은 **아님**. $g^2 \leq 4h$이면서도 부등식이 성립하는 값을 찾으면 된다. $g = 0$, $h = 1, k = 2$로 두자. 그러면 $g^2 = 0 \leq 4 = 4h$이지만

$$(g-k)^2 = 4 > 3 = 3(h-gk).$$

따라서 $g^2 > 4h$가 아니어도 부등식이 성립할 수 있으므로, 이 조건은 필요조건이 아니다.

생각해 보기 첫 번째 부분에서는 세 실근이 필요했는데, 어떻게 이럴 수 있을까?

첫 번째 부분에서 실제로 필요했던 것은 $f'(x) = 0$이 서로 다른 두 실근을 가진다는 사실뿐이었고, 이는 더 약한 조건이다. 여기서 삼차식 $(x^2+1)(x-2) = x^3 - 2x^2 + x - 2$는 실근을 하나만 가지지만, $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = (3x-1)(x-1)$이므로 여전히 정류점(stationary point)이 두 개 있다. 부등식 $(g-k)^2 > 3(h-gk)$는 삼차함수가 축과 세 번 만나든 그렇지 않든, 서로 다른 극대와 극소를 가진다는 것을 정확히 말해 준다.

검산

- $p, q, r = 0, 1, 2$이면 $(p+q+r)^2 = 9 > 6 = 3(qr+rp+pq)$이고, $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$의 근은 $1 \pm 1/\sqrt{3}$으로 하나는 $(0,1)$에, 하나는 $(1,2)$에 있다.
- 완전제곱식 공식은 부등식의 경계가 정확함을 보여 준다. $g = 2, h = 1$(따라서 $g^2 = 4h$), $k = -1$이면 $(g-k)^2 = 9 = 3(h-gk)$로, 엄격한 부등식이 아니라 등식이 된다. 이것은 세 근이 모두 같은 삼차식 $(x+1)^3$이다.

- 컴퓨터로 두 항등식과 두 부등식을 각각 20 000개의 무작위 유리수 경우에 대해 정확히 확인했고, 예 $g = 0, h = 1, k = 2$도 확인했다($4 > 3$이 된다).

흔한 실수

- 삼차함수의 그래프를 위아래 거꾸로 그리는 것: x^3의 계수가 $+1$이므로 그래프는 오른쪽으로 갈수록 올라간다.
- k가 $x^2 + gx + h$의 근인 경우를 빠뜨리는 것: 이 경우에는 첫 번째 부분을 주어진 그대로 적용할 수 없다.
- $g^2 \leq 4h$인 예 하나에서 부등식이 성립함을 보이고 그것을 "충분조건"이라고 부르는 것: 예 하나로 증명되는 것은 **필요조건이 아님**이다. 충분조건임을 보이려면 모든 g, h, k에 대한 증명이 필요하다.

STEP 너머

양 $(p + q + r)^2 - 3(qr + rp + pq)$는 상수배를 제외하면 도함수의 판별식이며, 근에 대한 **대칭함수**(*symmetric function*)이다. 이런 함수는 모두 계수로 나타낼 수 있는데, 바로 그 때문에 부등식을 근에 관한 것에서 g, h, k에 관한 것으로 옮길 수 있었다. 삼차식의 완전한 판별식 $\prod(p - q)^2$는 세 근이 모두 실수인지를 판정한다. 이 문제는 그보다 약한 사촌을 사용한 셈이다. 대칭함수와 판별식은 갈루아 이론(Galois theory)으로 이어진다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)가 시작하기에 좋은 책이다.

풀이

STEP I 2001, 문제 4

순수수학 • 역삼각함수 방정식

> **STEP I 2001, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/01-s1-q4

핵심 아이디어

삼배각 공식(triple-angle formula)은 tan의 덧셈정리(addition formula)에서 곧바로 나온다. 그다음부터는 모든 것이 한 가지 사실에 달려 있다. tan는 주기(period) π로 반복되므로, $\tan 3\varphi = \tan 3\theta$이면 φ는 θ와 $\pi/3$의 임의의 정수배만큼 차이 날 수 있다. (i)과 (ii)에서 실제로 해야 할 일은 $\cos^{-1}$과 $\tan^{-1}$의 치역(range)을 꼼꼼히 따지는 것이며, 이것이 무수히 많은 각 가운데 어느 것이 허용되는지를 결정한다.

풀이

삼배각 공식

$t = \tan\theta$라 하자. 덧셈정리에 의해 $\tan 2\theta = \dfrac{2t}{1-t^2}$이고, 따라서

$$\tan 3\theta = \tan(2\theta+\theta) = \frac{\tan 2\theta + t}{1 - t\tan 2\theta} = \frac{\dfrac{2t}{1-t^2} + t}{1 - \dfrac{2t^2}{1-t^2}}$$

$$= \frac{2t + t(1-t^2)}{(1-t^2) - 2t^2} = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2}$$

이다. 여기서 분자와 분모에 $1 - t^2$을 곱했다. 이것이 구하는 공식이다. (이 식은 양변이 모두 정의될 때마다 성립한다.)

$\tan 3\theta$의 값

$\cos\theta = 2/\sqrt{5}$이고 $0 < \theta < \pi/2$이므로 $\sin\theta > 0$이고, 따라서

$$\sin\theta = \sqrt{1-\tfrac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{2}.$$

이다. (세 변의 길이가 $1, 2, \sqrt{5}$인 직각삼각형을 떠올려 보자.) $t = \frac{1}{2}$을 대입하면

$$\tan 3\theta = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{8}}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{11/8}{1/4} = \frac{11}{2},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

나중에 θ가 꽤 작다는 사실이 중요해진다. $\tan\theta = \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\frac{\pi}{6}$이므로 $0 < \theta < \pi/6$이고, 따라서 $0 < 3\theta < \pi/2$이다.

소문항 (i)

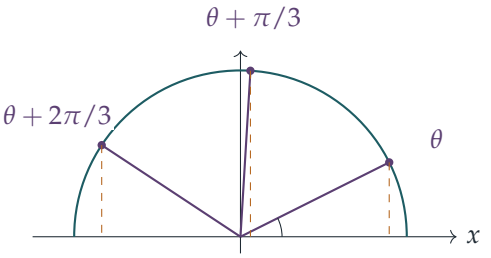
$\varphi = \cos^{-1} x$라 하면 $0 \le \varphi \le \pi$이고 $x = \cos\varphi$이다. 주어진 방정식은 $\tan 3\varphi = \frac{11}{2} = \tan 3\theta$라는 뜻이다. tan는 주기가 π이고 길이가 π인 각 구간에서 모든 값을 정확히 한 번씩 취하므로

$$3\varphi = 3\theta + k\pi \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi = \theta + \frac{k\pi}{3}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

이다.

> **생각해 보기** 이 각들 가운데 실제로 허용되는 것은 몇 개인가?

$0 \le \varphi \le \pi$이어야 한다. $0 < \theta < \pi/6$이므로 $k = 0, 1, 2$일 때 $\varphi = \theta,\ \theta + \frac{\pi}{3},\ \theta + \frac{2\pi}{3}$이고, 이들은 모두 $(0, \pi)$의 내부에 있다. $k = 3$이면 $\varphi > \pi$이고 $k = -1$이면 $\varphi < 0$이다. 따라서 해는 정확히 세 개이다.



x의 세 값은 이 각들의 코사인(점선의 발)이다. $\cos\theta = 2/\sqrt{5}$, $\sin\theta = 1/\sqrt{5}$와 덧셈정리를

이용하면

$$x_1 = \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}},$$
$$x_2 = \cos\theta\cos\tfrac{\pi}{3} - \sin\theta\sin\tfrac{\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{5}},$$
$$x_3 = \cos\theta\cos\tfrac{2\pi}{3} - \sin\theta\sin\tfrac{2\pi}{3} = -\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}.$$

이다. 이 각들 가운데 어느 것도 3φ를 $\pi/2$의 홀수배로 만들지 않으므로(각 3φ는 $0 < 3\theta < \pi/2$인 $3\theta + k\pi$이다), 모든 경우에 $\tan 3\varphi$가 정의된다. (i)의 해는

$$x = \frac{2}{\sqrt{5}}, \qquad x = \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}, \qquad x = -\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}.$$

이다. (분모를 유리화(rationalising)하면 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\frac{(2-\sqrt{3})\sqrt{5}}{10}$, $-\frac{(2+\sqrt{3})\sqrt{5}}{10}$이다.)

다른 풀이. 삼배각 공식에 $T = \tan\varphi$를 넣으면 $2(3T - T^3) = 11(1 - 3T^2)$, 즉

$$2T^3 - 33T^2 - 6T + 11 = 0.$$

을 얻는다. $T = \frac{1}{2}$이 근(root)임을 알고 있으므로 인수분해(factorising)하면 $(2T-1)(T^2 - 16T - 11) = 0$이고, 따라서 $T = \frac{1}{2}$ 또는 $T = 8 \pm 5\sqrt{3}$이다. 그러면 $x = \cos\varphi = \pm 1/\sqrt{1+T^2}$이며, 부호는 T의 부호를 따른다(T가 양수이면 φ는 예각이고, 음수이면 둔각이다). 이렇게 해도 같은 세 답을 얻으며, $1 + (8+5\sqrt{3})^2 = 140 + 80\sqrt{3} = 1/x_2^2$임을 확인해 보는 것도 좋은 검산이 된다.

소문항 (ii)

$\psi = \frac{1}{3}\tan^{-1} y$라 하자. $-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1} y < \frac{\pi}{2}$이므로 $-\frac{\pi}{6} < \psi < \frac{\pi}{6}$이다.

> **?** **생각해 보기** 조건 $\cos\psi = 2/\sqrt{5}$는 각을 하나 주는가, 둘 주는가?

$(-\pi/6, \pi/6)$에서 cos는 우함수(even function)이므로 $\cos\psi = 2/\sqrt{5} = \cos\theta$에서 $\psi = \theta$ 또는 $\psi = -\theta$이고, $0 < \theta < \pi/6$이므로 둘 다 허용 범위 안에 있다. (다른 해는 없다. $[0, \pi/6)$에서 함수 cos는 순감소(strictly decreasing)하므로 그 구간에서 값 $2/\sqrt{5}$를 한 번만 취하고, $(-\pi/6, 0]$에서도 마찬가지이다.)

따라서 $\tan^{-1} y = \pm 3\theta$이다. $0 < 3\theta < \pi/2$이므로 $\pm 3\theta$는 둘 다 실제로 $\tan^{-1}$의 값이 될 수 있고,

$$y = \tan(\pm 3\theta) = \pm\frac{11}{2}.$$

이다. (ii)의 해는 $y = \frac{11}{2}$과 $y = -\frac{11}{2}$이다.

검산

- $\theta = \cos^{-1}(2/\sqrt{5}) \approx 0.4636$이므로 $3\theta \approx 1.3909$이고 $\tan 3\theta \approx 5.5000$이다.
- $x_2 = \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} \approx 0.05992$이고 $x_3 \approx -0.83451$이다. 계산기로 확인하면 각각에 대해 $\tan(3\cos^{-1} x) \approx 5.5$이고, $[-1, 1]$을 촘촘하게 수치적으로 훑어보면 해가 정확히 세 개 나온다.
- $\cos\left(\frac{1}{3}\tan^{-1}(\pm 5.5)\right) = \cos(\pm 0.4636) \approx 0.8944 = 2/\sqrt{5}$이다.

흔한 실수

- (i)에서 $x = 2/\sqrt{5}$만 답하는 것. tan가 π마다 반복되므로 3φ는 $[0, 3\pi]$에서 세 가지 값을 가질 수 있다는 점을 잊은 것이다.
- (ii)에서 $y = 11/2$만 답하는 것. cos는 우함수이므로 $\psi = -\theta$도 성립한다.
- 범위를 확인하지 않는 것. 답은 $\theta < \pi/6$에 달려 있으며, 바로 이 때문에 (i)에서 $\theta + 2\pi/3$이 허용되고 (ii)에서 3θ가 $\tan^{-1}$의 치역 안에 놓인다.

STEP 너머

역삼각함수(inverse trigonometric functions)는 일대일(one-to-one)이 아닌 함수의 역함수를 구하는 문제를 처음 맛보게 해 준다. 우리는 **주가지**(*principal branch*)를 택하며, 이런 방정식은 사실 우리가 어느 가지(branch) 위에 있는지에 관한 문제이다. 복소해석학(complex analysis)에서는 같은 문제가 $\log z$와 $z^{1/3}$에서 나타나는데, 원점 둘레를 한 바퀴 돌면 한 가지에서 다음 가지로 넘어가게 되며, 이는 여기서 θ에 $2\pi/3$을 더하는 것과 똑같다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 그림을 통해 가지를 아름답게 설명한다.

풀이

STEP I 2001, 문제 5

순수수학 • 적분 기호 아래에서의 미분

STEP I 2001, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/01-s1-q5

핵심 아이디어

(i)과 (ii)의 두 적분은 모두 직접 적분으로 계산할 수 있으며, 두 번째 적분은 $u = 1 + tx$로 치환(substitution)한 뒤에 계산된다. 진짜 요점은 끝에 붙은 언급에 있다. (ii)의 피적분함수(integrand)는 (i)의 피적분함수를 t에 대해 미분한 것이고, 두 답 사이에도 같은 관계가 성립한다. 따라서 적분 안에서 매개변수(parameter) t에 대해 미분하는 것과 x에 대해 적분하는 것은 순서를 바꿀 수 있는 것처럼 보인다. 이것을 한 번 더 하고 $t = 1$을 대입하면 추측(conjecture)을 얻는다.

풀이

전체에 걸쳐 $t > 0$이고 $0 \leq x \leq 1$이므로 $1 + tx \geq 1 > 0$이며, 어느 피적분함수도 발산하지 않는다.

소문항 (i)

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1 + tx)^{-1} = -t(1 + tx)^{-2}$이므로 $(1 + tx)^{-2}$의 원시함수(antiderivative)는 $-\frac{1}{t(1+tx)}$이다(여기서 $t \neq 0$을 사용한다). 따라서

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+tx)^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{t(1+tx)}\right]_0^1 = \frac{1}{t}\left(1 - \frac{1}{1+t}\right) = \frac{1}{t}\cdot\frac{t}{1+t} = \frac{1}{1+t},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

소문항 (ii)

분자에 있는 x 때문에 직접 적분하기가 번거로우므로 $u = 1 + tx$로 놓는다. 그러면 $x = \dfrac{u-1}{t}$, $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}u}{t}$이고, 적분 구간의 끝 $x = 0, 1$은 $u = 1, 1+t$가 된다.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{-2x}{(1+tx)^3}\,\mathrm{d}x &= -\frac{2}{t^2}\int_1^{1+t}\frac{u-1}{u^3}\,\mathrm{d}u = -\frac{2}{t^2}\int_1^{1+t}\left(u^{-2}-u^{-3}\right)\mathrm{d}u \\ &= -\frac{2}{t^2}\left[-\frac{1}{u}+\frac{1}{2u^2}\right]_1^{1+t} = -\frac{2}{t^2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1+t}+\frac{1}{2(1+t)^2}\right).\end{aligned}$$

> **생각해 보기** 모든 항을 공통분모로 통분해 전개하지 않고 괄호 안을 어떻게 정리할 수 있을까?

$w = \dfrac{1}{1+t}$로 쓰면 괄호 안은 $\frac{1}{2} - w + \frac{1}{2}w^2 = \frac{1}{2}(1-w)^2$으로 완전제곱식(perfect square)이 된다. 또한 $1 - w = \dfrac{t}{1+t}$이므로

$$\int_0^1 \frac{-2x}{(1+tx)^3}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{t^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{(1+t)^2} = -\frac{1}{(1+t)^2},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

추측

x를 고정하고 피적분함수를 t의 함수로 보자.

$$\frac{\partial}{\partial t}(1+tx)^{-2} = -2x(1+tx)^{-3}.$$

즉 (ii)의 피적분함수는 (i)의 피적분함수를 t에 대해 미분한 것이며, 이는 (ii)의 답이 (i)의 답의 도함수인 것과 똑같다. 이로부터 다음 규칙을 짐작할 수 있다.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 f(x,t)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}\,\mathrm{d}x.$$

이 규칙을 한 번 더 적용하면

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-2x(1+tx)^{-3}\right) = 6x^2(1+tx)^{-4}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-(1+t)^{-2}\right) = 2(1+t)^{-3},$$

이므로, $t > 0$에 대하여 다음과 같이 추측한다.

$$\int_0^1 \frac{6x^2}{(1+tx)^4}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{(1+t)^3}.$$

$t = 1$을 대입하면 추측되는 값은

$$\int_0^1 \frac{6x^2}{(1+x)^4}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

이다.

검산

- $t \to 0$일 때 (i)의 피적분함수는 1로 가고 답 $\frac{1}{1+t}$도 1로 간다. (ii)에서는 피적분함수가 $-2x$로 가고 그 적분은 -1이므로, $-\frac{1}{(1+t)^2} \to -1$과 일치한다.
- 추측을 확인하라는 요구는 없었지만 확인하는 것은 금방이다. $u = 1 + x$로 치환하면 적분은 $6\int_1^2 (u^{-2} - 2u^{-3} + u^{-4})\,\mathrm{d}u = 6\left[-\frac{1}{u} + \frac{1}{u^2} - \frac{1}{3u^3}\right]_1^2 = 6\left(-\frac{7}{24} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4}$이 된다.
- 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 마지막 적분을 계산하면 0.250000이 나오고, 서로 다른 25개의 t 값에 대해 $\frac{2}{(1+t)^3}$과 소수점 아래 아홉째 자리까지 일치한다.

흔한 실수

- (ii)에서 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/t$로부터 나오는 인수 $\frac{1}{t}$을 빠뜨리는 것. $\frac{1}{t}$은 **두** 번 나오는데, 하나는 x에서, 다른 하나는 $\mathrm{d}x$에서 나온다.
- 치환한 뒤 적분 구간을 $u = 1$과 $u = 1 + t$로 바꾸지 않는 것.
- $-(1+t)^{-2}$을 미분하여 $-2(1+t)^{-3}$을 얻는 것. 두 음의 부호는 서로 상쇄되므로 추측되는 값은 양수이다(피적분함수가 양수이므로 당연히 그래야 한다).

STEP 너머

우리가 추측한 규칙은 **적분 기호 아래에서의 미분**(differentiation under the integral sign), 즉 라이프니츠(Leibniz) 규칙(Leibniz's rule)이다. f와 $\partial f/\partial t$가 닫힌 직사각형(closed rectangle) 위에서 연속(continuous)이면 이 규칙이 성립한다는 것은 실해석학(real analysis)의 정리이며, 여기서는 $0 \le x \le 1$이고 t가 $a > 0$인 임의의 구간 $[a, b]$에 속할 때 이 조건이 성립한다. 같은 논증을 반복하면 모든 n에 대하여 $\int_0^1 \frac{x^n}{(1+tx)^{n+2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)(1+t)^{n+1}}$을 얻는다. 리처드 파인만(Richard Feynman)은 다른 방법으로는 잘 풀리지 않던 적분을 이 기법으로 계산한 것으로 유명하다. 극한, 도함수, 적분의 순서를 바꾸는 것에 관한 이론은 Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)를 보라.

풀이

STEP I 2001, 문제 6

순수수학 • 회전면

> **STEP I 2001, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/01-s1-q6

이 문제는 *Beyond STEP*의 4.8 절 **공 모양 빵 자르기**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch04/spherical-loaf.html

핵심 아이디어

반원 $y = \sqrt{a^2 - x^2}$를 x축 둘레로 회전시켜 구를 만든다. 겉넓이(surface area) 공식의 피적분함수(integrand) $y\sqrt{1 + (\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)^2}$가 **상수**가 되므로, 어떤 조각이든 그 껍질의 넓이는 조각의 두께에만 의존하고 조각의 위치와는 무관하다. 두 번째 부분에서는 (힌트의 적분 구간 $-a$부터 $-a + t$까지가 암시하듯) 한쪽 끝에서부터 조각을 먹으므로, 남는 부분은 구관(spherical cap)이다. 이때 비 V/A는 구관 두께에 대한 이차식이 되고, 그 최댓값을 구하면 된다.

풀이

껍질의 넓이는 조각의 개수에 비례한다

빵의 반지름을 a, 중심을 원점이라 하자. 그러면 빵의 표면은

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \qquad -a \le x \le a,$$

를 x축 둘레로 회전시켜 얻어진다. 미분하면 $|x| < a$일 때 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\dfrac{x}{y}$이므로,

$$y\left(1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = y\left(\frac{y^2 + x^2}{y^2}\right)^{\frac{1}{2}} = y \cdot \frac{a}{y} = a,$$

이다. 여기서 $x^2 + y^2 = a^2$와 $y > 0$을 이용하였다. 따라서 두 평면 $x = x_1$과 $x = x_2$ $(-a \le x_1 < x_2 \le a)$ 사이에 있는 구의 곡면 넓이는

$$2\pi \int_{x_1}^{x_2} a \, \mathrm{d}x = 2\pi a \, (x_2 - x_1).$$

이다. (피적분함수는 끝점 $x = \pm a$에서만 정의되지 않는데, 그곳에서도 유계이므로 적분에는 문제가 없다.)

이제 빵을 각각 두께가 $h = 2a/N$인 N개의 조각으로 자른다고 하자. 모든 조각은 어디에 있든 정확히 $2\pi ah$의 넓이의 껍질을 가진다. 따라서 n개의 조각이 남아 있으면, 그 위치가 어떠하든 남은 껍질의 넓이는

$$A = n \cdot 2\pi ah,$$

이고, 이는 남은 조각의 개수 n에 비례한다. 이것이 보여야 할 내용이다. (이는 아르키메데스(Archimedes)의 오래된 결과이다. 구와 그 외접 원기둥은 임의의 두 평행한 평면 사이에서 같은 넓이를 가진다.)

껍질 조건

조각은 한쪽 끝에서부터 먹으므로, 몇 조각을 먹고 나면 남은 빵은 $0 < t \le 2a$인 어떤 t에 대하여 $x = -a$부터 $x = -a + t$까지의 구관이다. 첫 번째 부분에 의해 $A = 2\pi at$이다. 부피를 구하기 위해 $u = x + a$로 치환하면 $y^2 = a^2 - x^2 = (a - x)(a + x) = (2a - u)u$이므로

$$V = \pi \int_{-a}^{-a+t} (a^2 - x^2) \, \mathrm{d}x = \pi \int_0^t (2au - u^2) \, \mathrm{d}u = \pi\left(at^2 - \frac{t^3}{3}\right).$$

이다. 따라서

$$\frac{V}{A} = \frac{\pi t^2 \left(a - \frac{t}{3}\right)}{2\pi at} = \frac{t}{2} - \frac{t^2}{6a} =: f(t).$$

이다.

> **생각해 보기** 이 비는 얼마나 먹었는지에 따라 달라진다. 어떤 t의 값을 신경 써야 하는가?

조건은 **몇** 조각을 먹은 뒤에도 성립해야 하므로, f의 최댓값이 필요하다. 완전제곱식으로 고치면

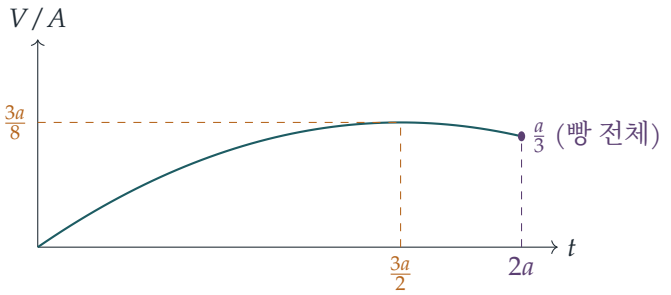
$$f(t) = \frac{3a}{8} - \frac{1}{6a}\left(t - \frac{3a}{2}\right)^2,$$

이므로 f는 $t = \frac{3a}{2}$ (이는 $(0, 2a]$에 속한다)일 때 최대이고, 최댓값은 $\frac{3a}{8}$이다.

$t = \frac{3}{2}a$는 실제로 나타나는가? 예를 들어 빵을 4조각으로 잘라 한 조각을 먹으면(또는 $4m$조각으로 잘라 m조각을 먹으면) 나타난다. 평행하게 자른 빵으로서 껍질 빵이라 불리려면 이러한 자르기에 대해서도 규정을 만족해야 하므로,

$$\frac{3a}{8} < 1, \qquad \text{즉} \qquad a < \frac{8}{3} = 2\tfrac{2}{3} \text{ 미터},$$

이어야 하고, 이것이 구하는 결과이다. 역으로 $a < \frac{8}{3}$이면 모든 t에 대하여 $f(t) \le \frac{3a}{8} < 1$이므로, 빵을 어떻게 자르든 껍질 빵이다.



위 그림은 $a = 2$일 때의 $f(t)$를 나타낸다. 빵의 가운데 쪽으로 갈수록 비가 증가하다가 이후 감소하는데, 반대쪽 끝 근처에서는 빵은 조금 늘어나는 반면 껍질은 많이 늘어나기 때문이다.

검산

- 빵 전체에 대해서는 $t = 2a$이므로 $f(2a) = a - \frac{2a}{3} = \frac{a}{3}$이고, 이는 $\frac{4}{3}\pi a^3/(4\pi a^2)$과 일치한다.
- $a = \frac{8}{3}$인 빵을 4조각으로 자른다고 하자. 남은 조각이 $1, 2, 3, 4$개일 때 비는 각각 $\frac{5}{9}, \frac{8}{9}, 1, \frac{8}{9}$이므로, 한 조각을 먹은 뒤의 비는 정확히 1이 되어 엄격한 부등식을 아슬아슬하게 만족하지 못한다.
- 수치적으로, 무작위 조각에 대해 넓이 공식을 수치 적분하면 $2\pi a(x_2 - x_1)$이 재현되었고, $a = 2.66$일 때 200조각 이하로 자르는 모든 경우에 비가 1보다 작게 유지되었다.

흔한 실수

- 빵 전체만 고려하는 것: $a/3 < 1$에서 $a < 3$을 얻는데, 이는 필요조건이지만 훨씬 약한 조건이다. 가장 나쁜 순간은 빵 **폭**의 4분의 1을 먹었을 때이다.
- 평평한 자른 면을 껍질에 포함하는 것. 껍질은 원래의 곡면뿐이며, 주어진 공식이 측정하는 것도 바로 그것이다.

STEP 너머

피적분함수가 상수라는 사실은 아르키메데스의 모자 상자 정리(hat-box theorem)이다. 구를 외접 원기둥에 옆으로 사영하면 넓이가 보존된다. 구 위에서 균등하게 선택한 점의 높이

가 균등분포를 따르는 것도 이 때문이며, 이 사실은 확률론과 물리학에서 끊임없이 사용된다. 이와 같은 면적분(surface integral), 그리고 사상이 언제 넓이를 보존하는지는 벡터 미적분학(vector calculus) 첫 강좌에서 다룬다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)에는 구의 관련 사상에 대한 아름다운 기하학적 논의가 실려 있다.

풀이

STEP I 2001, 문제 7

순수수학 • 오목성과 미분방정식

> **STEP I 2001, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/01-s1-q7

핵심 아이디어

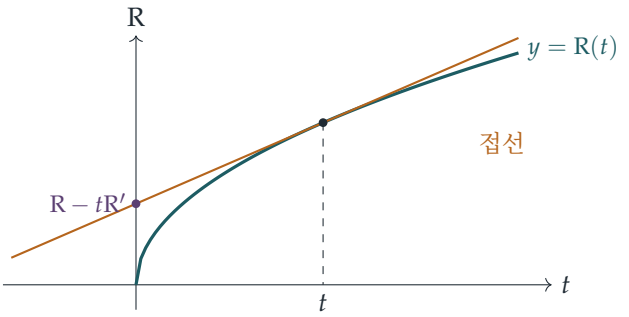
세 조건은 R이 원점에서 출발하여 증가하면서 아래쪽으로 휘어진다는 것, 즉 그 그래프가 **오목**(concave)하다는 뜻이다. 오목한 그래프는 자신의 모든 접선(tangent)보다 아래에 놓이며, 이 하나의 기하학적 사실이 (i)의 부등식(inequality)을 준다. $\mathrm{H} = \mathrm{R}'/\mathrm{R}$는 $\ln \mathrm{R}$의 도함수(derivative)이므로, (ii)와 (iii)은 변수분리형 미분방정식(separable differential equation)이 된다. R을 명시적으로 구하고 나면 이를 조건들에 대입하여 확인하며, (i)의 부등식은 어떤 모형을 빠르게 배제하는 방법을 제공한다.

풀이

먼저 풀이 전체에서 쓰는 사실이 하나 있다. $\mathrm{R}(0) = 0$이고 $t > 0$에서 R이 순증가하므로, $t > 0$일 때 $\mathrm{R}(t) > 0$이다. 따라서 $t > 0$에서 $\mathrm{H}(t)$가 정의되고 $\mathrm{H}(t) > 0$이다.

소문항 (i)

그래프는 원점을 지나고, 기울기가 양수이며, t가 증가함에 따라 기울기가 감소한다.



$t > 0$을 하나 고정하자. 시각 t에서 그래프에 그은 접선의 기울기는 $\mathrm{R}'(t)$이므로, 이 접선은 세로축과 다음 높이에서 만난다.

$$\mathrm{R}(t) - t\,\mathrm{R}'(t).$$

그림을 보면 원점을 지나는 곡선이 접선보다 아래에 있으므로 이 절편은 양수이다. 이를 엄밀하게 보이기 위해 $[0, t]$에서 R에 평균값 정리(mean value theorem)를 적용하자. 그러면 $0 < c < t$인 어떤 c가 존재하여

$$\mathrm{R}(t) - \mathrm{R}(0) = t\,\mathrm{R}'(c), \qquad \text{이므로} \qquad \mathrm{R}(t) = t\,\mathrm{R}'(c).$$

$\mathrm{R}'' < 0$이므로 함수 R'은 순감소하고, $c < t$에서 $\mathrm{R}'(c) > \mathrm{R}'(t)$를 얻는다. 따라서

$$\mathrm{R}(t) > t\,\mathrm{R}'(t),$$

이고, 이것이 바로 접선의 절편이 원점보다 위에 있다는 명제이다. 양변을 $\mathrm{R}'(t) > 0$으로 나누면

$$t < \frac{\mathrm{R}(t)}{\mathrm{R}'(t)} = \frac{1}{\mathrm{H}(t)},$$

이 되어 증명이 끝난다.

(같은 내용을 달리 말하면, 접선은 t축과 $t - 1/\mathrm{H}(t)$에서 만나며 이 값은 음수이다. 우주론(cosmology)에서 $1/\mathrm{H}$는 "허블 시간(Hubble time)"이며, 이 결과는 감속하는 모든 모형에서 우주의 나이가 허블 시간보다 짧다는 것을 말해 준다.)

소문항 (ii)

$t > 0$에서 $\mathrm{R} > 0$이므로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \mathrm{R}(t) = \frac{\mathrm{R}'(t)}{\mathrm{R}(t)} = \frac{a}{t}.$$

적분하면 $\ln \mathrm{R} = a \ln t + C$이므로

$$\mathrm{R}(t) = k\,t^a \qquad (t > 0),$$

이다. 여기서 $k = \mathrm{e}^C > 0$이다.

이제 $k > 0$과 $t^a > 0$을 이용하여 조건들을 확인하자.

- $\mathrm{R}'(t) = ka\,t^{a-1}$이고, 이는 $a > 0$일 때 그리고 그때에만 $t > 0$에서 양수이다.
- $\mathrm{R}''(t) = ka(a-1)\,t^{a-2}$이다. $a > 0$일 때, 이는 $a < 1$일 때 그리고 그때에만 음수이다.
- $a > 0$이면 $t \to 0^+$일 때 $kt^a \to 0$이므로 $\mathrm{R}(0) = 0$과 모순이 없다. ($a \le 0$이면 어차피 성립하지 않는다. kt^a가 $k \neq 0$으로 가거나 발산하기 때문이다.)

따라서 조건 $(*)$가 성립할 필요충분조건은

$$0 < a < 1.$$

이다. 이는 소문항 (i)과도 일치한다. (i)에 따르면 $t < 1/\mathrm{H} = t/a$이고, 여기서 $a < 1$이어야 한다.

소문항 (iii)

이번에는 $\mathrm{H}(t) = b/t^2$이다. 먼저 (앞의 첫 관찰에서) $t > 0$일 때 $\mathrm{H}(t) > 0$이므로 $b > 0$이어야 한다. $b \le 0$이면 이미 끝난 것이다.

그러므로 $b > 0$이라 하자. 소문항 (i)에 의해 모든 $t > 0$이

$$t < \frac{1}{\mathrm{H}(t)} = \frac{t^2}{b}, \qquad \text{즉,} \qquad t > b$$

를 만족해야 한다($t > 0$으로 나누고 $b > 0$을 곱했다). 그런데 이는 $0 < t \le b$인 모든 t에서 성립하지 않는다. 따라서 어떤 b의 값도 $(*)$와 양립할 수 없다.

? **생각해 보기** 소문항 (i)을 이렇게 사용해도 정당한가?

그렇다. 소문항 (i)은 $(*)$를 만족하는 **모든** 함수가 모든 $t > 0$에 대하여 $t < 1/\mathrm{H}(t)$를 만족함을 증명했다. 그러므로 제시된 H가 단 하나의 t에서라도 이 부등식을 어기면, 그 H를 갖는 어떤 함수도 $(*)$를 만족할 수 없다. 이것은 귀류법(proof by contradiction)이다.

직접 확인하려면 (ii)에서처럼 방정식을 풀면 된다. $\ln \mathrm{R} = -b/t + C$이므로 $k > 0$에 대하여 $\mathrm{R}(t) = k\,\mathrm{e}^{-b/t}$이다. 그러면

$$\mathrm{R}'(t) = \frac{kb}{t^2}\,\mathrm{e}^{-b/t},$$

$$\mathrm{R}''(t) = kb\,\mathrm{e}^{-b/t}\left(\frac{b}{t^4} - \frac{2}{t^3}\right) = \frac{kb\,\mathrm{e}^{-b/t}}{t^4}(b - 2t).$$

$b > 0$이면 $\mathrm{R}' > 0$이고 $t \to 0^+$일 때 $\mathrm{R}(t) \to 0$이므로 처음 두 조건은 성립한다. 그러나 $0 < t < b/2$에서 $\mathrm{R}''(t) > 0$이므로 원점 근처에서 그래프가 반대 방향으로 휘고, 따라서 $(*)$가 성립하지 않는다.

검산

- (ii)에서 $a = \frac{1}{2}$로 두면 $\mathrm{R} = k\sqrt{t}$가 되어 그림의 모양과 같다. 증가하고 오목하며, $t < 1/\mathrm{H} = 2t$이다. $a = 1$로 두면 원점을 지나는 직선이 되고, 이때는 정확히 $t = 1/\mathrm{H}$이다. 이것이 (i)의 경계 경우이다.
- (iii)에서 $b = 1, k = 1$로 두면 수치적으로 $\mathrm{R}''(0.25) \approx 2.34 > 0$이고, $1/\mathrm{H}(0.5) = 0.25 < 0.5$이므로 둘 다 $(*)$를 어긴다.

컴퓨터로 여러 오목한 시험 함수에 대해 (i)을 확인했고, (ii)와 (iii)의 해와 도함수 공식을 유한 차분(finite differences)으로 확인했으며, $t = b/2$에서 R''의 부호가 바뀌는 것도 확인했다.

흔한 실수

- (i)에서 그림만으로 논증하는 것. "곡선이 접선보다 아래에 있다"는 근거가 필요하다. 평균값 정리와 R'이 감소한다는 사실이 그 근거이다.
- (ii)에서 $\mathrm{R}' > 0$(그리고 $\mathrm{R}(0) = 0$)을 위해 $a > 0$이 필요하다는 것을 잊고 $a < 1$만 답하는 것.
- (iii)에서 t가 클 때 오목성이 깨진다고 주장하는 것. $b - 2t$의 부호를 보면 깨지는 곳은 작은 t이다.

STEP 너머

소문항 (i)은 볼록함수와 오목함수에 관한 핵심적인 사실의 특수한 경우이다. 미분가능한 함수가 오목할 필요충분조건은 그 그래프가 모든 접선보다 아래에 놓이는 것이다. 이 사실은 옌센 부등식(Jensen's inequality)과 최적화(optimisation)의 많은 부분의 바탕이 된다. 평균값 정리를 이용한 논증은 대학 1학년 해석학의 표준적인 내용이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 참고하라. 실제 우주론에서 $a = \frac{2}{3}$은 물질이 지배하는 아인슈타인–드 지터(Einstein–de Sitter) 우주에 해당하며, 이 우주의 나이는 허블 시간의 3분의 2이다.

풀이

STEP I 2001, 문제 8

순수수학 • 2계 선형 방정식

> **STEP I 2001, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/01-s1-q8

핵심 아이디어

이미 알고 있는 해를 방정식에 대입하면, 각 x의 값에서 두 미지 함수 $p(x)$와 $q(x)$ 사이의 관계식이 하나씩 얻어진다. 해가 두 개이면 연립일차방정식(simultaneous linear equations)이 두 개 생기고, 이것을 두 수에 대한 연립방정식을 풀 때와 똑같이 풀어 p와 q를 구한다. 마지막 부분에서는 가운데 부분에서 증명한 선형성(linearity) 덕분에 주어진 두 해를 그 해들의 더 간단한 결합으로 바꿀 수 있고, 삼각함수 항등식(trigonometric identities)을 쓰면 그 결합이 아주 간단해진다.

풀이

p와 q 구하기

$y = x$이면 $y' = 1, y'' = 0$이므로 $(*)$에 대입하면

$$p(x) + x\,q(x) = 0. \tag{1}$$

이다. $y = 1 - x^2$이면 $y' = -2x, y'' = -2$이므로

$$-2 - 2x\,p(x) + (1 - x^2)\,q(x) = 0. \tag{2}$$

이다. (1)에서 $p(x) = -x\,q(x)$이다. 이것을 (2)에 대입하면

$$-2 + 2x^2 q(x) + (1 - x^2)q(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad (1 + x^2)\,q(x) = 2.$$

이다. $1 + x^2 > 0$이므로 양변을 나눌 수 있고, 따라서 $q(x) = 2(1 + x^2)^{-1}$이며, 이어서 (1)에서 $p(x) = -x\,q(x) = -2x(1 + x^2)^{-1}$을 얻는다. 이것이 구하려던 결과이다. ($x$로 나눈 적이 없으므로 이 결과는 $x = 0$을 포함한 모든 실수 x에 대해 성립한다.)

임의의 결합 $ax + b(1 - x^2)$도 해이다

$L[y] = y'' + p\,y' + q\,y$라 하자. 미분(differentiation)은 선형이므로, 상수 a, b에 대해 $y = ay_1 + by_2$이면

$$\begin{aligned} L[ay_1 + by_2] &= a(y_1'' + p\,y_1' + q\,y_1) + b(y_2'' + p\,y_2' + q\,y_2) \\ &= a\,L[y_1] + b\,L[y_2]. \end{aligned}$$

이다. $y_1 = x$, $y_2 = 1 - x^2$으로 두면 $L[y_1]$과 $L[y_2]$는 모두 0이다(이것이 바로 두 함수가 $(*)$를 만족한다는 뜻이다). 따라서 모든 상수 a와 b에 대해 $L[ax + b(1 - x^2)] = 0$이다. 직접 확인하고 싶다면 다음과 같이 하면 된다. $y = ax + b(1 - x^2)$이면 $y' = a - 2bx$, $y'' = -2b$이고

$$\begin{aligned} y'' + p\,y' + q\,y &= -2b - \frac{2x(a - 2bx)}{1 + x^2} + \frac{2\left(ax + b - bx^2\right)}{1 + x^2} \\ &= \frac{-2b(1 + x^2) - 2ax + 4bx^2 + 2ax + 2b - 2bx^2}{1 + x^2} = 0. \end{aligned}$$

이다.

마지막 부분

방금 한 논증에서는 특정한 p와 q에 대한 성질을 전혀 쓰지 않았다. 즉 $(*)$ 꼴의 어떤 방정식에 대해서도 두 해의 결합 $ay_1 + by_2$는 다시 해가 된다. 따라서 $\cos^2(\frac{1}{2}x^2)$과 $\sin^2(\frac{1}{2}x^2)$이 모두 $(*)$를 만족하면 그 합과 차

$$\cos^2(\tfrac{1}{2}x^2) + \sin^2(\tfrac{1}{2}x^2) = 1, \qquad \cos^2(\tfrac{1}{2}x^2) - \sin^2(\tfrac{1}{2}x^2) = \cos(x^2),$$

도 $(*)$를 만족한다. 여기서는 $\theta = \frac{1}{2}x^2$으로 두고 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$과 $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$를 썼다.

> **생각해 보기** 주어진 함수 대신 1과 $\cos(x^2)$을 다루어도 괜찮은 이유는 무엇인가?

이 단계는 거꾸로도 갈 수 있기 때문이다. 주어진 함수는 $\frac{1}{2}(1 + \cos x^2)$과 $\frac{1}{2}(1 - \cos x^2)$이므로, p와 q가 이 두 함수를 모두 해로 만드는 것은 1과 $\cos(x^2)$을 모두 해로 만드는 것과 정확히 같다. 잃는 정보는 없고, 도함수 계산은 훨씬 쉬워진다.

해 $y = 1$. 이때 $y' = y'' = 0$이므로 $(*)$는 $q(x) \cdot 1 = 0$이 되고, 따라서

$$q(x) = 0.$$

이다.

해 $y = \cos(x^2)$. 연쇄법칙(chain rule)에 의해 $y' = -2x\sin(x^2)$이고, 곱의 미분법(product rule)에 의해

$$y'' = -2\sin(x^2) - 4x^2\cos(x^2).$$

이다. $q = 0$이므로 $(*)$는

$$-2\sin(x^2) - 4x^2\cos(x^2) - 2x\sin(x^2)\,p(x) = 0.$$

이 된다. $x\sin(x^2) \neq 0$인 곳에서는 나눌 수 있으므로

$$p(x) = -\frac{\sin(x^2) + 2x^2\cos(x^2)}{x\sin(x^2)} = -\frac{1}{x} - 2x\cot(x^2).$$

이다. 따라서 $p(x) = -\dfrac{1}{x} - 2x\cot(x^2)$, $q(x) = 0$이다.

$x\sin(x^2) = 0$인 점(즉 $x = 0$과 $x = \pm\sqrt{n\pi}$)에서는 p의 계수가 0이 되므로, 그 점에서 방정식은 p에 대해 아무것도 알려 주지 않는다. 실제로 우리가 구한 p는 이 점들에서 발산한다. 이것은 계산 실수가 아니다. 이런 점에서는 주어진 두 함수의 도함수가 모두 0이므로, 두 함수가 $(*)$ 꼴의 잘 정의된 방정식의 두 "독립인" 해가 될 수 없고, 따라서 p는 그 점에서 특이(singular)해야 한다.

검산

- 첫 부분을 독립적으로 확인하는 방법으로, 두 해의 **론스키 행렬식**(Wronskian) $W = y_1y_2' - y_2y_1'$은 $W' = -pW$를 만족한다. $y_1 = x$, $y_2 = 1 - x^2$이면 $W = -2x^2 - (1 - x^2) = -(1 + x^2)$이므로 $-p = W'/W = 2x/(1 + x^2)$이고, 이는 우리가 구한 p와 일치한다. 마지막 부분에서는 해 1과 $\cos(x^2)$으로부터 $W = -2x\sin(x^2)$을 얻고, 역시 $W'/W = 1/x + 2x\cot(x^2) = -p$이다.
- 수치적으로 확인하면, $x = 0.9$에서 주어진 두 함수를 유한 차분(finite differences)으로 계산한 도함수와 함께 $(*)$에 대입하면 $p(0.9) \approx -2.82465$, $q(0.9) \approx 0$이 나오며, 이는 $-1/0.9 - 1.8\cot(0.81) \approx -2.82465$와 일치한다.

흔한 실수

- $\cos^2(\frac{1}{2}x^2)$을 곧바로 두 번 미분하다가 식 계산에서 길을 잃는 것. 배각 공식(double-angle identities)을 먼저 쓰고 나서 미분하라.
- (1)을 x로 나누어 $q = -p/x$를 얻는 것. 이렇게 해도 되지만, 그러면 $x = 0$인 경우를 따로 다루어야 한다. 대신 p를 소거하면 이 문제를 피할 수 있다.
- 마지막 부분에서 p에 대한 식이 어디에서 성립하는지 밝히지 않는 것.

STEP 너머

이 문제는 이계 선형 미분방정식(second-order linear differential equations) 이론을 살짝 엿보게 해 준다. 해들은 이차원 벡터 공간(vector space)을 이루고, 독립인 해 두 개가 있으면 방정식이 결정되며, 론스키 행렬식(과 아벨(Abel)의 공식 $W' = -pW$)은 독립성을 재는 도구이다. 여기서의 $x = \pm\sqrt{n\pi}$처럼 론스키 행렬식이 0이 되는 점은 바로 계수가 특이해질 수밖에 없는 점이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 이 모든 내용을 꼼꼼하게 전개한다.

풀이

STEP I 2001, 문제 9

역학 • 요격과 상대 속도

STEP I 2001, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/01-s1-q9

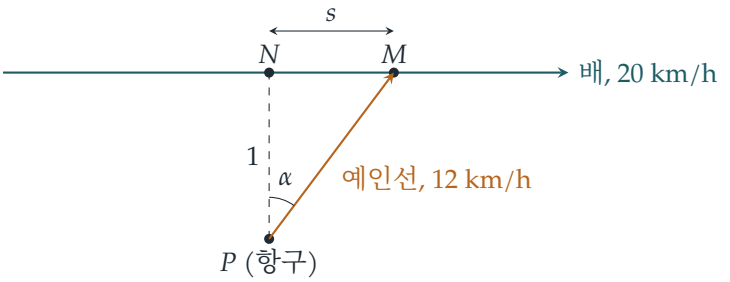
핵심 아이디어

가능한 한 늦게 출발하려면 예인선은 최고 속력으로 직선을 따라 가야 하므로, 실제로 선택할 수 있는 것은 배의 항로 위 어디에서 만나느냐뿐이다. 각각의 만남 지점에 대하여, 예인선이 제시간에 그곳에 도착할 수 있는 가장 늦은 출발 시각을 구한다. 그런 다음 만남 지점에 대하여 이 출발 시각을 최대화한다. 설정만 제대로 하면 변수가 하나인 최적화(optimisation) 문제가 된다.

풀이

설정하기

배와 예인선을 입자(particle)로 다룬다. 항구 P를 원점에 놓고, 배는 직선 $y = 1$을 따라 x축의 양의 방향으로 움직인다고 하자(거리의 단위는 km, 시간의 단위는 시간). P에서 항로에 내린 수선의 발은 $N = (0, 1)$이며, 이는 배가 항구에 가장 가까워지는 지점이다.



만남이 점 $M = (s, 1)$에서 이루어진다고 하자. 항로 위 배의 위치는 시간의 일차함수(linear

function)이므로, 배가 M에 도달하는 시각은

$$t_M = \frac{s-c}{20},$$

이다. 여기서 c는 배의 출발 위치에 따라 정해지는 상수이다. (배는 아직 다가오는 중이므로, c는 우리가 고려할 어떤 만남 위치보다도 작다.)

? 생각해 보기 예인선은 왜 최고 속력으로 직선을 따라 가야 하는가?

예인선이 시각 T에 출발하여 시각 t_M에 M에 있다면, 예인선은 시속 12 km 이하의 속력으로 적어도 직선거리 $PM = \sqrt{s^2+1}$만큼 이동한 것이므로 $t_M - T \geq \sqrt{s^2+1}/12$이다. 등호는 최고 속력으로 M을 향해 곧장 갈 때 성립한다. 더 느리거나 덜 곧게 가면 더 일찍 출발해야 한다.

따라서 M에서 만날 수 있는 가장 늦은 출발 시각은

$$T(s) = \frac{s-c}{20} - \frac{\sqrt{s^2+1}}{12},$$

이고, 모든 s에 대하여 $T(s)$의 최댓값을 구하면 된다.

출발 시각 최대화하기

미분하면

$$T'(s) = \frac{1}{20} - \frac{s}{12\sqrt{s^2+1}}.$$

$T'(s) = 0$으로 놓으면

$$\frac{s}{\sqrt{s^2+1}} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}.$$

이를 만족하려면 $s > 0$이어야 한다. 양변을 제곱하면 $25s^2 = 9(s^2+1)$이므로 $s^2 = \frac{9}{16}$이고 $s = \frac{3}{4}$이다.

이것은 극대이면서 전역 최대(global maximum)이다. $\sqrt{s^2+1}$은 볼록(convex)하므로, T(일차함수에서 볼록함수를 뺀 것)는 오목(concave)하다. 같은 말로, $\dfrac{s}{\sqrt{s^2+1}}$은 s에 대하여 증가하므로 $s < \frac{3}{4}$이면 $T'(s) > 0$이고 $s > \frac{3}{4}$이면 $T'(s) < 0$이다. 상수 c가 사라졌다는 점에 주목하자. 만남 지점은 배가 어디에서 출발했는지와 무관하다.

따라서 예인선은 N에서 $\frac{3}{4}$ km 더 나아간 곳에서 배를 만나며, 예인선이 이동하는 거리는

$$PM = \sqrt{\tfrac{9}{16}+1} = \sqrt{\tfrac{25}{16}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{PM = \tfrac{5}{4}\text{ km} = 1.25\text{ km}.}$$

이다. 예인선이 바다에 있는 시간은 $\frac{5/4}{12} = \frac{5}{48}$시간, 즉 $6\frac{1}{4}$분이다.

기하학적 해석

예인선의 진행 방향은 PN과 각 α를 이루며, $\sin\alpha = \frac{s}{\sqrt{s^2+1}} = \frac{3}{5}$이므로 $\sin\alpha$는 속력의 비 12/20과 같다. 예인선의 속도는 $(7.2, 9.6)$이고, 배에 대한 예인선의 상대 속도(relative velocity)는 $(7.2-20, 9.6) = (-12.8, 9.6)$이다. 두 벡터의 내적(dot product)은 $-92.16 + 92.16 = 0$이다. 임계 출발 시각에서 예인선의 속도는 배에 대한 상대 속도와 수직이다. 이는 더 느린 추격자가 간신히 가로채기에 성공하는 경우의 표준적인 조건이다.

검산

- 배의 출발 위치를 여러 가지로 바꾸어 가며 만남 지점을 촘촘한 격자 위에서 전수 탐색하면, $T(s)$의 최댓값은 언제나 $s = 0.75$에서 나타나므로 예인선의 이동 거리는 1.25 km이다.
- 가장 늦은 출발 시각부터 진행 방향 $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$으로 운동을 수치적으로 한 단계씩 계산하면 예인선은 배에 도달한다. 단 0.002시간만 늦게 출발해도, 어떤 방향으로 가든 배로부터 20 m 이내로 접근할 수 없다.
- 타당성 점검: 예인선이 배만큼 빠르다면 $\sin\alpha$는 1이 되고, 만남 지점은 무한히 멀어진다. 속력이 같은 예인선은 배를 한없이 쫓아갈 수 있으므로 이는 이치에 맞다.

흔한 실수

- 배가 가장 가까이 오는 지점 N에서 만나는 것(예인선의 이동 거리 1 km). 이것은 예인선의 **이동 거리**를 최소화할 뿐 출발 시각을 최대화하지 않는다. 조금 더 앞으로 나아가면 배가 그곳까지 항해해야 하므로 예인선은 시간을 번다.
- $s/20$ 항 없이 예인선의 이동 시간 $\sqrt{s^2+1}/12$만 최소화하는 것. 최대화해야 할 양은 출발 시각이며, 여기에는 두 배가 모두 관여한다.

STEP 너머

도착 시각의 차를 최대화하는 것은 최적 제어(optimal control) 문제 또는 추격 문제(pursuit problem)의 작은 예이다. 속력의 비 조건 $\sin\alpha = 12/20$은 초음속 항공기 뒤에 생기는 마하 원뿔(Mach cone)과 같은 기하학이다. 원뿔의 반각의 사인값은 항공기 속력에 대한 음속의 비이며, 여기서 느린 예인선은 빠른 음원을 쫓는 소리의 역할을 한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 상대 속도와 기준틀을 꼼꼼하게 다루며, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에는 역학에서의 STEP 스타일 최적화 문제가 더 실려 있다.

풀이

STEP I 2001, 문제 10

역학 • 포물체의 비행 시간

STEP I 2001, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/01-s1-q10

핵심 아이디어

선택을 두 부분으로 나누어 생각한다. 앙각(elevation)은 비행 시간(time of flight)과 수평 도달 거리(horizontal range)를 모두 결정하고, 방향은 포탄(shell)이 대포를 중심으로 하는 원 위의 어디에 떨어지는지만 정한다. 따라서 포탄이 선로에 명중할 수 있는 것은 도달 거리가 d 이상일 때이고, 그때뿐이다. 비행 시간은 앙각이 커질수록 길어지지만, $45°$를 넘어서면 도달 거리가 줄어든다. 그러므로 도달 거리가 정확히 d로 줄어들 때까지 앙각을 높인다.

풀이

주어진 앙각에서의 비행 시간과 도달 거리

포탄을 중력만 받아 움직이는(공기 저항(air resistance)이 없는) 질점(particle)으로 모형화하고, 지면 높이에서 발사되어 평원에 떨어진다고 하자. 앙각 α로 발사하며, $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$이다. 속도의 연직 성분은 $v\sin\alpha$이고 수평 성분은 $v\cos\alpha$이다.

연직 방향으로, 시간 t가 지난 뒤의 높이는 $vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$이고, 이 값은

$$T = \frac{2v\sin\alpha}{g}.$$

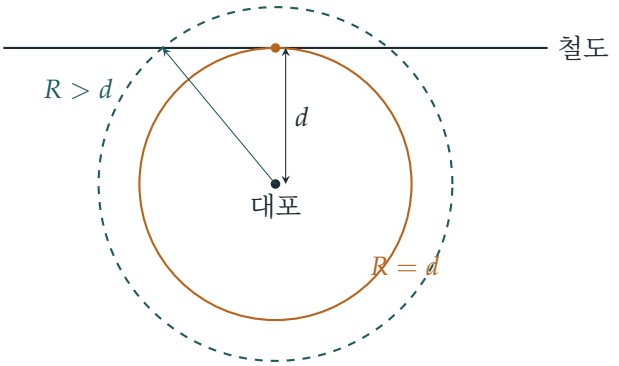
일 때 다시 0이 된다. 그동안 포탄이 이동하는 수평 거리는

$$R = v\cos\alpha \cdot \frac{2v\sin\alpha}{g} = \frac{v^2\sin 2\alpha}{g}.$$

이다.

포탄은 언제 선로에 명중할 수 있는가?

앙각을 고정하고 대포를 돌리면, 낙하 지점은 대포를 중심으로 하는 반지름 R인 원 위를 움직인다. 선로 위에서 가장 가까운 점까지의 거리는 d이고, 선로 위의 다른 모든 점은 그보다 멀리 있다. 따라서 원이 선로와 만날 필요충분조건은 $R \geq d$이다. $R = d$이면 원은 선로에 딱 접하고, 대포는 가장 가까운 점을 똑바로, 즉 선로에 수직인 방향으로 겨누어야 한다.



(위에서 내려다본 그림이다. 점선 원은 더 낮은 앙각에 해당하며, 선로와 두 점에서 만난다. 실선 원은 최적의 앙각에 해당하며, 선로에 겨우 닿는다.)

따라서 포수가 앙각 α로 선로를 맞힐 수 있는 것은 정확히

$$\sin 2\alpha \geq \frac{gd}{v^2}.$$

일 때이다. $k = gd/v^2$라 하자. $v^2 > gd$로 주어졌으므로 $0 < k < 1$이고, 가능한 앙각이 존재한다. (최대 도달 거리는 $45°$에서의 v^2/g이므로, 이 조건은 단지 선로가 사정거리 안에 있다는 뜻이다.)

비행 시간의 최대화

$T = 2v \sin\alpha / g$이고 $\sin\alpha$는 $(0, \frac{\pi}{2}]$에서 증가하므로, T를 최대로 하려면 허용되는 α 가운데 가장 큰 값을 골라야 한다.

$0 < 2\alpha \leq \pi$일 때, 조건 $\sin 2\alpha \geq k$가 성립할 필요충분조건은

$$\arcsin k \leq 2\alpha \leq \pi - \arcsin k.$$

이다. 따라서 허용되는 가장 큰 앙각은 $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin k$이고, 이는 $45°$보다 크다. 이 앙각에서 $\sin 2\alpha = k$이고, 2α가 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$에 있으므로 $\cos 2\alpha$는 음수이다.

$$\cos 2\alpha = -\sqrt{1 - k^2}.$$

생각해 보기 선로를 따라 먼 곳에 있는 점을 겨누어 포탄이 더 멀리 날아가게 하는 편이 낫지 않을까?

그렇지 않다. 더 멀리 날아가려면 **더 큰** 도달 거리가 필요하고, 45°보다 위에서는 이것이 **더 낮은** 앙각, 따라서 더 짧은 비행을 뜻한다. 비행 시간은 앙각에만 의존하므로, 최선은 선로에 여전히 닿는 가장 가파른 발사이다. 그 도달 거리는 정확히 d이므로, 포탄은 대포에서 선로에 내린 수선의 발에 떨어진다.

이제 T를 제곱하고 $2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$를 이용한다.

$$\begin{aligned} g^2T^2 &= 4v^2\sin^2\alpha \\ &= 2v^2\left(1-\cos 2\alpha\right) \\ &= 2v^2 + 2v^2\sqrt{1-\frac{g^2d^2}{v^4}} \\ &= 2v^2 + 2\left(v^4 - g^2d^2\right)^{1/2}, \end{aligned}$$

여기서 v^2을 제곱근 안으로 넣었다($v^2 > 0$이므로 가능하다). 이것이 구하는 결과이다.

검산

- $d \to 0$이면 공식에서 $g^2T^2 \to 4v^2$, 즉 $T \to 2v/g$이다. 이는 바로 위로 쏘는 경우로, 가능한 가장 긴 비행이며, 선로가 대포 바로 옆을 지날 때 옳은 결과이다.
- $v^2 = gd$이면 선로는 겨우 사정거리 안에 있다. 가능한 발사는 45°뿐이고, 공식은 $g^2T^2 = 2v^2$을 주며, 이는 $T = 2v\sin 45°/g = \sqrt{2}\,v/g$와 일치한다.
- 수치로 확인하면, $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $d = 100\,\mathrm{m}$, $v = 40\,\mathrm{m\,s^{-1}}$일 때 최적 앙각은 약 71.1°이고 공식은 $T \approx 7.72\,\mathrm{s}$를 준다. 운동을 수치적으로 단계별 계산해도 같은 시간이 나오고, 포탄은 선로에 떨어진다. 모든 앙각에 대한 전수 탐색도 수백 개의 무작위 경우에서 공식과 일치한다.

흔한 실수

- 작은 쪽의 근 $\alpha = \frac{1}{2}\arcsin k$를 택하는 것. 이 발사도 선로를 맞히지만, 가장 긴 비행 시간이 아니라 **가장 짧은** 비행 시간을 준다. 사실상 $\cos 2\alpha$의 부호를 잘못 택한 것이다.
- 처음부터 포탄이 선로에서 가장 가까운 점에 떨어져야 한다고 가정하는 것. 결과적으로는 맞지만, 위의 논증이 필요하다. 다른 점을 맞히려면 더 큰 도달 거리, 따라서 더 낮은 앙각이 필요하다.

STEP 너머

이것은 작은 제약 최적화(constrained optimisation) 문제이다. 한 양(비행 시간)을 제약 조건(선로에 닿기) 아래에서 최대화하며, 최적점은 허용되는 영역의 경계에 있다. 대학 1학년 역학과 최적화 과목에서는 이를 위한 일반적인 도구, 예를 들어 라그랑주(Lagrange) 승수(Lagrange multipliers)를 배우고, 이와 관련된 개념으로 모든 궤적의 **포락선**(envelope), 즉 "안전 포물선"(parabola of safety)을 만나게 된다. 이 포락선은 대포가 도달할 수 있는 모든 점의 경계를 이룬다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 포물체 운동과 질점 역학을 깊이 공부하기에 좋은 책이다.

풀이

STEP I 2001, 문제 11

역학 • 탄성 끈과 에너지

STEP I 2001, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

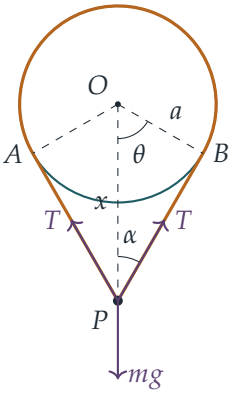
step.maths.org/questions/01-s1-q11

핵심 아이디어

입자가 밴드를 아래로 끌어당기면, 밴드는 길이의 대부분에 걸쳐 원기둥에 붙어 있다가 양쪽에서 **접선**(*tangent*) **방향으로** 원기둥을 떠나 입자까지 곧게 뻗는다. 따라서 모든 것은 원 밖의 한 점에서 원에 그은 두 접선의 기하로 귀결된다. 원기둥이 매끄러우므로(smooth) 장력(tension)은 밴드 전체에 걸쳐 같고, 따라서 **전체** 늘어난 길이(extension)에 훅의 법칙(Hooke's law)을 적용하면 장력을 구할 수 있다. 그러면 소문항 (i)은 에너지 문제이고(입자는 가장 낮은 점에서 순간적으로 정지한다), 소문항 (ii)는 힘의 문제이다(속력이 최대라는 것은 가속도가 0이라는 뜻이다).

풀이

입자는 질점(point mass)으로, 밴드는 가볍고 탄성(elastic)이 있는 것(훅의 법칙을 따르는 것)으로, 원기둥은 매끄러운 것으로 모형화한다. 단면의 중심을 O라 하고, 입자 P가 O보다 거리 x만큼 아래에 있다고 하자. 단, $x \geq a$이다. 밴드는 점 A와 B에서 원을 떠나며, PA와 PB는 접선이다.



기하와 장력

삼각형 OAP는 A에서 직각이다(접선은 반지름에 수직이다). 따라서

$$PA = PB = \sqrt{x^2 - a^2}, \qquad \cos\theta = \frac{a}{x}, \qquad \sin\alpha = \frac{a}{x},$$

이다. 여기서 $\theta = \angle AOP$이고, $\alpha = \angle APO$는 밴드의 각 직선 부분이 연직선과 이루는 각이다. 밴드는 P에 가장 가까운, 중심각이 2θ인 호 AB를 제외한 모든 곳에서 원과 접촉하고 있으므로, 밴드의 길이는

$$L = (2\pi a - 2a\theta) + 2\sqrt{x^2 - a^2}.$$

이다. 자연 길이(natural length)는 $2\pi a$이므로 늘어난 길이는

$$e(x) = 2\left(\sqrt{x^2 - a^2} - a\theta\right), \qquad \theta = \arccos\frac{a}{x}.$$

이다. 원기둥이 매끄러우므로 밴드를 따라 마찰이 없고, 따라서 장력 T는 어디서나 같으며, 훅의 법칙에 의해 $T = \dfrac{\lambda e}{2\pi a}$이다.

$x = 2a$일 때 $\cos\theta = \frac{1}{2}$이므로 $\theta = \frac{\pi}{3}$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{3}\,a$이다. 따라서

$$e(2a) = 2\left(\sqrt{3}\,a - \frac{\pi a}{3}\right) = \frac{2a}{3}\left(3\sqrt{3} - \pi\right).$$

소문항 (i)

놓는 순간 입자는 원기둥의 맨 아래, 즉 $x = a$에 있고, 밴드는 늘어나지 않은 상태이며, 입자는 정지해 있다. $x = 2a$에서 입자는 다시 정지한다(더 이상 내려가지 않는다). 따라서 두 순간 모두 운동 에너지는 0이다. 원기둥이 매끄러우므로 에너지 손실이 없고, 중력 위치 에너지(gravitational potential energy)의 감소량은 탄성 에너지(elastic energy)의 증가량과 같다. 입자가 내려간 거리는 $2a - a = a$이고, 자연 길이가 $2\pi a$이고 늘어난 길이가 e인 밴드

의 탄성 에너지는 $\dfrac{\lambda e^2}{2\cdot 2\pi a}$이다. 그러므로

$$mga = \frac{\lambda}{4\pi a}\cdot\frac{4a^2}{9}\left(3\sqrt{3}-\pi\right)^2 = \frac{\lambda a\left(3\sqrt{3}-\pi\right)^2}{9\pi},$$

이고, 이로부터

$$\lambda = \frac{9\pi mg}{\left(3\sqrt{3}-\pi\right)^2},$$

을 얻는다. 이것이 구하려던 결과이다.

생각해 보기 밴드의 일부가 원기둥에 감겨 있는데, 밴드 전체에 탄성 에너지 공식을 써도 될까?

그렇다. 원기둥이 매끄러우므로 장력, 따라서 단위 길이당 늘어난 정도는 감겨 있든 아니든 밴드 전체에 걸쳐 같다. 밴드는 자연 길이가 $2\pi a$이고 전체 늘어난 길이가 e인 하나의 탄성 줄과 정확히 똑같이 행동하며, 공식 $\lambda e^2/(2l)$이 나타내는 것이 바로 이것이다.

소문항 (ii)

속력은 가속도가 0일 때, 즉 입자에 작용하는 합력(resultant force)이 0일 때 최대이다. 수평 방향으로는 대칭성에 의해 두 장력이 상쇄된다. P에서 연직 방향으로 힘을 분해하면

$$2T\cos\alpha = mg.$$

이다. $x = 2a$에서 $\cos\alpha = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $\sqrt{3}\,T = mg$이고, 따라서 $T = \dfrac{mg}{\sqrt{3}}$이다. 앞에서 구한 늘어난 길이로 훅의 법칙을 적용하면

$$T = \frac{\lambda}{2\pi a}\cdot\frac{2a}{3}\left(3\sqrt{3}-\pi\right) = \frac{\lambda\left(3\sqrt{3}-\pi\right)}{3\pi}.$$

이다. T에 대한 두 식을 같게 놓으면

$$\lambda = \frac{3\pi mg}{\sqrt{3}\left(3\sqrt{3}-\pi\right)} = \frac{\sqrt{3}\,\pi mg}{3\sqrt{3}-\pi}.$$

생각해 보기 이것이 단지 정상점(stationary point)이 아니라 속력의 최댓값이라는 것을 어떻게 알 수 있을까?

x가 증가하면 e가 증가하고(밴드의 각 직선 부분이 길어지는 속도가 호 $a\theta$가 줄어드는 속도보다 빠르다), $\cos\alpha = \sqrt{1-a^2/x^2}$도 증가하므로, 위쪽 방향의 힘 $2T\cos\alpha$는 0에서부터 꾸준히 증가한다. 아래쪽 방향의 알짜힘은 $x = 2a$보다 위에서는 양수이고 아래에서는 음수이므로, 입자는 $x = 2a$까지는 빨라지고 그 이후에는 느려진다.

검산

- 깔끔한 일관성 검사: L을 미분하면 $\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2-a^2}} - \dfrac{2a^2}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \dfrac{2\sqrt{x^2-a^2}}{x} = 2\cos\alpha$이다. 따라서 탄성 에너지의 변화율 $T\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x}$는 위쪽 방향의 힘 $2T\cos\alpha$와 같다. (i)의 에너지 방법과 (ii)의 힘의 방법이 서로 일치한다.
- 수치로 보면 (i)에서는 $\lambda \approx 6.70\,mg$이고 (ii)에서는 $\lambda \approx 2.65\,mg$이다. (ii)의 밴드가 더 약한데, 이는 타당하다. (ii)에서는 입자가 $x = 2a$에서 여전히 움직이고 있어 그 지점을 지나쳐 계속 내려가지만, (i)에서는 더 뻣뻣한 밴드가 이미 입자를 정지시켰기 때문이다.
- 운동 방정식 $m\ddot{x} = mg - 2T\cos\alpha$를 $x = a$에서 정지 상태로부터 수치적으로 단계별 계산하면, 첫 번째 λ 값에 대해서는 가장 낮은 점이 $x = 2.0000a$로, 두 번째 값에 대해서는 최대 속력이 $x = 2.0000a$에서 나온다.

흔한 실수

- 밴드의 일부가 원기둥을 떠난다는 것을 잊는 실수: 늘어난 길이는 두 직선 부분의 길이만이 아니라, $2\sqrt{x^2-a^2}$에서 잃어버린 호 $2a\theta$를 뺀 것이다.
- 내려간 거리를 놓은 지점이 아니라 축에서부터 재는 실수: 입자가 내려간 거리는 $2a$가 아니라 a이다.
- 연직 방향으로 분해할 때 $\cos\alpha$ 대신 $\sin\alpha$를 쓰는 실수: α는 연직선으로부터 잰 각이고, $\sin\alpha = a/x$이다.

STEP 너머

d(탄성 에너지)/dx가 복원력과 같다는 검산은 가상일의 원리(principle of virtual work)의 한 예이다. 보존계(conservative system)에서 임의의 방향으로 작용하는 힘은 그 방향으로의 위치 에너지 변화율에 음의 부호를 붙인 것이다. 계를 하나의 좌표와 그 위치 에너지로 기술하는 이러한 관점은 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)의 출발점이며, 대학 역학 강좌의 1학년이나 2학년에서 만나게 될 것이다. 에너지, 힘, 퍼텐셜을 꼼꼼하게 다룬 책으로 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 읽어 보라.

풀이

STEP I 2001, 문제 12

확률과 통계 • 수형도

> **STEP I 2001, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/01-s1-q12

핵심 아이디어

모든 것은 **누가 무엇을 아는지**를 꼼꼼히 추적하는 데 달려 있다. 어떤 학생이 누군가가 소문을 들었다는 사실을 아는 것은 그 사람이 자신에게 말해 주었거나 자신이 그 사람에게 말해 주었을 때뿐이다. 누구도 소문을 어디서 들었는지는 전하지 않는다. 각 단계에서 각 학생이 아는 것을 기록해 두면 수형도(tree diagram)는 작아진다. 모든 갈림길은 두 사람 중 하나를 고르는 선택이므로 경로는 여덟 개뿐이고, 결국 이 경로들은 모두 같은 확률(probability)을 가진다는 것이 밝혀진다.

풀이

설정하기

네 학생을 A, B, C, D라 하자. 어느 단계에서든 학생 X가 소문을 들었다고 **아는** 사람은 X 자신, X에게 소문을 말해 준 사람, 그리고 X가 소문을 말해 준 사람이다. X가 소문을 들으면 X는 그 집합 밖의 사람들 가운데에서 균등하게 무작위로(uniformly at random) 한 명을 고른다. 그 집합에 이미 네 학생이 모두 들어 있으면 소문은 X에서 멈춘다.

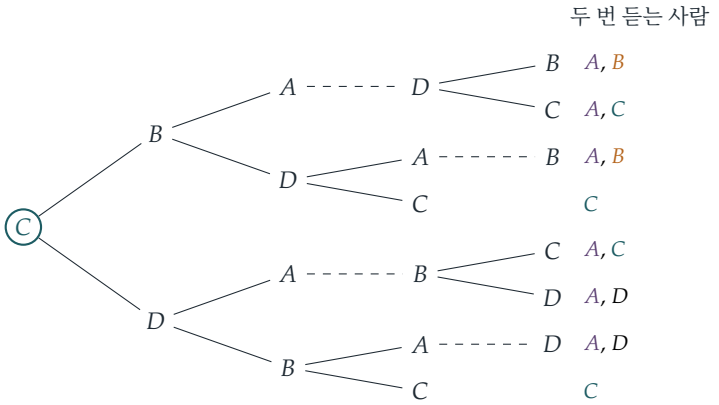
처음에 A가 C에게 말했으므로 A는 $\{A, C\}$를 알고 C도 $\{A, C\}$를 안다.

수형도

C는 A를 빼고 B 또는 D에게 각각 확률 $\frac{1}{2}$로 말한다. 먼저 $C \to B$ 갈래를 살펴보자. 이제 C는 $\{A, B, C\}$를 알고 B는 $\{B, C\}$를 안다 (C가 소문의 출처를 말하지 않았으므로 A는 모른다). 따라서 B는 A 또는 D에게 각각 확률 $\frac{1}{2}$로 말한다.

- $B \to A$. 이제 아서는 $\{A, B, C\}$를 알므로 D에게 말할 수밖에 없고, 그러면 아서는 모두가 소문을 들었음을 알게 된다. D는 $\{A, D\}$만 알므로 D는 B 또는 C에게 각각 확률 $\frac{1}{2}$로 말한다. 어느 쪽이든 듣는 사람의 집합이 완성된다. B는 이미 $\{A, B, C\}$를 알고 있었고 C도 마찬가지였으며, 이제 각자 D에 대해 알게 된다. 따라서 소문은 멈춘다.
- $B \to D$. 이제 B는 $\{B, C, D\}$를 알고 D는 $\{B, D\}$를 알므로 D는 A 또는 C에게 말한다.
  - $D \to C$: C는 이미 $\{A, B, C\}$를 알고 있었고 이제 D에 대해 알게 되므로 소문은 멈춘다. 아서는 소문을 다시 듣지 못한다.
  - $D \to A$: 아서는 $\{A, C, D\}$를 알므로 B에게 말하고, 그러면 이 학생은 네 명을 모두 알게 된다. 소문은 멈춘다.

$C \to D$ 갈래는 B와 D의 역할을 서로 바꾼 것과 같다. 전체 수형도는 다음과 같다. 강제된 이동(확률 1)은 점선으로 나타냈고, 그 밖의 모든 가지에는 확률 $\frac{1}{2}$가 붙는다.



잎에 이르는 각 경로에는 확률 $\frac{1}{2}$인 선택이 정확히 세 번 들어 있으므로 (강제된 이동은 인수 1을 곱할 뿐이다) 여덟 가지 결과 각각의 확률은 $\frac{1}{8}$이다. 오른쪽의 표시는 그 경로에서 소문을 두 번 듣는 사람을 나타낸다. (어느 경로에서든 한 학생이 소문을 듣는 횟수는 많아야 두 번이다.)

> **생각해 보기** C에게서 막 소문을 들은 B는 왜 아서가 소문을 들었다는 것을 모를까?

C가 누구에게서 들었는지 말하지 않기 때문이다. B가 추론할 수 있는 것은 C가 소문을 들었다는 사실뿐이다. 바로 이 점이 소문을 계속 이어지게 한다. $C \to B \to A$ 갈래에서 아서는 이미 알고 있던 것을 다시 듣게 된다.

아서가 다시 듣는 경우

아서는 두 개의 짧은 경로 $C \to B \to D \to C$와 $C \to D \to B \to C$를 제외한 모든 경로에서 소문을 다시 듣는다. 따라서

$$\mathrm{P}(\text{아서가 다시 들음}) = 1 - 2 \times \tfrac{1}{8} = \tfrac{3}{4},$$

이고, 이것이 보이려던 결과이다.

버사와 찬드라

버사가 소문을 두 번 듣는 것은 경로 $C \to B \to A \to D \to B$와 $C \to B \to D \to A \to B$에서뿐이므로

$$\mathrm{P}(\text{버사가 두 번 들음}) = \tfrac{2}{8} = \tfrac{1}{4}.$$

찬드라는 네 경로에서 소문을 두 번 듣는다. 수형도의 각 절반에 두 개씩이다 ($C \to B \to A \to D \to C, C \to B \to D \to C, C \to D \to A \to B \to C, C \to D \to B \to C$). 따라서

$$\mathrm{P}(\text{찬드라가 두 번 들음}) = \tfrac{4}{8} = \tfrac{1}{2}.$$

찬드라가 버사보다 소문을 다시 들을 가능성이 더 큰 것은 찬드라가 소문을 일찍 들었기 때문이다. 사슬에서 나중에 소문을 듣는 사람들은 찬드라가 소문을 들었다는 사실을 모르므로, 찬드라는 끝까지 소문을 전해 받을 수 있는 대상으로 남는다.

검산

B와 D 사이의 대칭성(symmetry)에 의해 딜라일라가 소문을 두 번 들을 확률도 $\frac{1}{4}$여야 하며, 실제로 수형도에는 그런 경로가 두 개 있다. 결과의 합도 맞는다. 같은 확률을 가진 잎이 여덟 개이고 전체 확률은 1이다. 컴퓨터로 이 과정을 정확히 열거(enumeration)하면 $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$를 얻고, 소문 200 000번을 시뮬레이션(simulation)한 결과는 0.750, 0.250, 0.501이었다.

흔한 실수

- 듣는 사람이 사슬에서 더 앞에 있는 모든 사람을 안다고 생각하는 것. 전해지는 것은 말해 준 사람이 누구인지뿐이며, 모든 것을 다 안다면 소문은 결코 아서에게 돌아오지 않을 것이다.
- **말해 준 사람**도 무언가를 알게 된다는 사실을 잊는 것. X는 Y에게 말해 준 뒤 Y가 소문을 들었음을 알게 되며, 바로 이 점이 아서의 이동을 강제한다.
- 아서가 소문을 다시 듣자마자 수형도 그리기를 멈추는 것. 버사와 찬드라를 다루려면 그 뒤의 갈래들이 필요하다.

STEP 너머

이 소문은 네 학생 위에서 움직이는 무작위 행보(random walk)인데, 그 규칙이 지금까지의 이력에 의존하며, 여기서는 그 이력을 각 학생의 지식으로 기록했다. 다음 단계가 현재 상태에만 의존하도록 상태를 충분히 풍부하게 잡으면 이 과정은 **마르코프 연쇄**(Markov chain)가 된다. 마르코프 연쇄는 확률과정(random processes) 첫 강좌의 중심 대상이며, 소문 모형과 전염병 모형은 그 고전적인 응용이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 마르코프 연쇄를 딱 알맞은 수준으로 다룬다.

풀이

STEP I 2001, 문제 13

확률과 통계 • 조건부 푸아송 분포

> **STEP I 2001, 13번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/01-s1-q13

핵심 아이디어

깨진 접시의 총 개수를 조건으로 두면(conditioning) 푸아송(Poisson) 문제가 이항(binomial) 문제로 바뀐다. 네 학생이 같은 비율로 서로 독립적으로 접시를 깬다면, 깨진 접시가 모두 몇 개인지 알고 나면 깨진 접시 하나하나는 다른 접시와 독립적으로 네 학생 중 누구에 의해서든 같은 확률로 깨졌다고 볼 수 있다. 따라서 깨진 접시 중 수학자의 몫은 이항분포를 따르고, 미지수 λ는 사라진다.

풀이

설정하기

수학자가 깬 접시의 개수를 M, 나머지 세 학생이 깬 접시의 총 개수를 R이라 하자. 문제에서 각 학생이 깨는 접시의 개수는 다른 학생과 독립적으로 $\mathrm{Po}(\lambda)$를 따른다고 하였다. 따라서 $M \sim \mathrm{Po}(\lambda)$이고, R는 서로 독립인 세 개의 $\mathrm{Po}(\lambda)$ 확률변수의 합이므로 $\mathrm{Po}(3\lambda)$를 따른다. 또한 R는 나머지 세 학생에게만 의존하므로 M과 R는 독립(independent)이다. 총합은 $T = M + R \sim \mathrm{Po}(4\lambda)$이다.

> ? **생각해 보기** 서로 독립인 푸아송 확률변수의 합은 왜 다시 푸아송분포를 따르는가?

서로 독립인 $X \sim \mathrm{Po}(\alpha)$와 $Y \sim \mathrm{Po}(\beta)$에 대하여, n을 나누는 모든 방법에 대해 합하면

$$\mathrm{P}(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha}\alpha^k}{k!} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-\beta}\beta^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k} = \frac{\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)}(\alpha+\beta)^n}{n!}$$

이다. 마지막 등호는 이항정리(binomial theorem)에 의한 것이다. 따라서 $X + Y \sim$

$\mathrm{Po}(\alpha+\beta)$이다. 이를 두 번 적용하면 $R \sim \mathrm{Po}(3\lambda)$를 얻고, 한 번 더 적용하면 $T \sim \mathrm{Po}(4\lambda)$를 얻는다.

M의 조건부 분포

$m = 0, 1, \ldots, 5$에 대하여 사건 $\{M = m,\ T = 5\}$는 $\{M = m,\ R = 5-m\}$과 같다. M과 R가 독립이므로

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(M = m \mid T = 5) &= \frac{\mathrm{P}(M=m)\,\mathrm{P}(R=5-m)}{\mathrm{P}(T=5)} \\
&= \frac{\dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^m}{m!} \cdot \dfrac{\mathrm{e}^{-3\lambda}(3\lambda)^{5-m}}{(5-m)!}}{\dfrac{\mathrm{e}^{-4\lambda}(4\lambda)^5}{5!}} \\
&= \frac{5!}{m!\,(5-m)!} \cdot \frac{3^{5-m}}{4^5} = \binom{5}{m}\left(\tfrac{1}{4}\right)^m \left(\tfrac{3}{4}\right)^{5-m}.
\end{aligned}$$

지수함수들이 약분되고, λ의 거듭제곱도 모두 약분된다(분자와 분모에 모두 λ^5이 있다). 따라서 $T = 5$라는 조건 아래에서 λ의 값에 관계없이 $M \sim \mathrm{B}(5, \frac{1}{4})$이다.

답

$m = 3, 4, 5$에 대한 이항확률을 더하면

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(M \geq 3 \mid T = 5) &= \binom{5}{3}\frac{3^2}{4^5} + \binom{5}{4}\frac{3}{4^5} + \binom{5}{5}\frac{1}{4^5} \\
&= \frac{10\times 9 + 5\times 3 + 1}{1024} = \frac{106}{1024} = \frac{53}{512}.
\end{aligned}$$

따라서 깨진 접시 다섯 개 중 수학자가 세 개 이상을 깼을 확률은 $\dfrac{53}{512} \approx 0.104$이다.

검산

- 여섯 개의 조건부 확률 $\binom{5}{m}3^{5-m}/4^5$를 모두 더하면 당연히 그래야 하듯이 $(1+3)^5/4^5 = 1$이 된다.
- 대칭성: 같은 논리로 다섯 개의 접시 중 각 학생 몫의 기댓값은 $5 \times \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$이고, 네 학생의 몫을 더하면 5가 된다.
- $\lambda = 0.3, 1, 2.7$ and 5에 대하여 네 개의 푸아송분포로부터 직접(깨진 접시 다섯 개를 네 학생에게 나누는 모든 방법에 대해 합하여) $\mathrm{P}(M \geq 3 \mid T = 5)$를 계산하였더니 매번 $0.103515625 = 53/512$를 얻었다. 설거지 4×10^5회를 모의실험(simulation)한 결과, 정확히 다섯 개가 깨진 회차들 가운데에서 약 0.105를 얻었다.

흔한 실수

- 답에 λ를 남겨 두는 것. 이것은 반드시 약분되어야 하며, 그렇지 않다면 조건부 계산이 어딘가에서 잘못된 것이다.
- $\mathrm{P}(M+R=5)$로 나누면서 R를 $\mathrm{Po}(3\lambda)$가 아니라 $\mathrm{Po}(\lambda)$로 다루는 것. 이렇게 하면 학생이 두 명뿐인 셈이 된다.
- 이항계수를 빠뜨리거나, 사건을 "세 개 이상"이 아니라 "정확히 세 개"로 다루는 것.

STEP 너머

이것은 일반적인 사실의 작은 예이다. $X_1, \ldots, X_k$가 평균이 각각 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$인 서로 독립인 푸아송 확률변수일 때, 그 합이 n이라는 조건 아래에서 벡터 $(X_1, \ldots, X_k)$는 확률이 $\lambda_i / \sum \lambda_j$인 다항분포(multinomial distribution)를 따른다. 거꾸로 말하면, 개수가 $\mathrm{Po}(\mu)$를 따르는 사건들 각각에 k가지 유형 중 하나를 독립적으로 붙이면, 각 유형의 개수는 서로 독립인 푸아송 확률변수가 된다. 이러한 "푸아송 분할(Poisson splitting)"은 푸아송 과정(Poisson process)을 연구하는 데 기본적인 도구이다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)는 두 방향을 모두 많은 예와 함께 다룬다.

풀이

STEP I 2001, 문제 14

확률과 통계 • 무작위 순서

> **STEP I 2001, 14번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/01-s1-q14

이 문제는 *Beyond STEP*의 12.12 절 **언제 그만 찾아야 하는가**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch12/secretary.html

핵심 아이디어

면접 순서 전체를 생각하지 말고, **특정 지원자들이 어느 자리에 있는지**만 생각한다. 처음 n명 중 최고가 전체 최고가 되는 것은 정확히 최고의 지원자가 처음 n명의 면접 대상 안에 있을 때이다. 또한 대칭성(symmetry)에 의해 최고의 지원자는 N개의 자리 중 어느 자리에나 같은 확률로(equally likely) 있다. 소문항 (ii)는 여기에 경우 하나를 더 고려하거나, 깔끔하게 여사건(complement)을 이용하면 된다.

풀이

지원자들에게 순위대로 번호를 붙인다. 즉 지원자 1은 전체 최고, 지원자 2는 두 번째로 좋은 지원자이고, 나머지도 이런 식이다. $N!$가지 순서가 모두 같은 확률이므로, 모든 지원자는 주어진 어느 자리에나 같은 확률로 있다. 또한 처음 n번의 면접에서 본 지원자들의 집합은 크기가 n인 $\binom{N}{n}$개의 부분집합 중 어느 것이 될 확률도 같다. 풀이 전체에서 $1 \leq n \leq N$이다.

소문항 (i)

지원자 1이 처음 n명의 면접 대상 안에 있는 사건(event)을 A라 하자. A가 일어나면 지원자 1은 확실히 처음 n명 중 최고이다. 일어나지 않으면 처음 n명 중 최고는 지원자 1보다 못한 누군가이다. 따라서 구하는 사건은 정확히 A이다.

지원자 1은 N개의 자리 각각에 같은 확률로 있고, 그중 n개가 처음 n개의 자리이므로

$$\mathrm{P}(\text{처음}n\text{명 중 최고가 전체 최고}) = \frac{n}{N}.$$

소문항 (ii)

이제 두 번째로 좋은 지원자가 존재하도록 $N \geq 2$로 둔다. 처음 n명 중 최고가 전체 1위 또는 2위일 필요충분조건(if and only if)은 다음과 같다.

- 지원자 1이 처음 n명 안에 있다(사건 A). 또는
- 지원자 1은 처음 n명 안에 **없지만**, 지원자 2는 있다.

> **생각해 보기** 두 번째 경우에 처음 n명 중 최고가 지원자 2이고, 그보다 더 나은 누군가가 아니라는 것을 어떻게 알 수 있는가?

지원자 2보다 나은 지원자는 지원자 1뿐인데, 이 경우 지원자 1은 앞쪽에서 면접을 보지 않았다. 거꾸로 1과 2가 모두 처음 n명 안에 없으면, 처음 n명 중 최고는 순위가 3 이하이다. 따라서 위의 두 경우를 합친 것이 정확히 구하는 사건이며, 두 경우는 서로 배반(mutually exclusive)이다.

첫 번째 경우의 확률은 소문항 (i)에서 $\frac{n}{N}$이다. 두 번째 경우에는 $\mathrm{P}(A') = \frac{N-n}{N}$이고, 지원자 1이 마지막 $N-n$개의 자리 중 하나에 있다는 조건 아래에서 지원자 2는 남은 $N-1$개의 자리 중 어느 곳에나 같은 확률로 있으며, 그중 n개가 처음 n개의 자리이다. 따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\text{처음}n\text{명 중 최고가 전체 1위 또는 2위}) &= \frac{n}{N} + \frac{N-n}{N} \cdot \frac{n}{N-1} \\ &= \frac{n\left[(N-1)+(N-n)\right]}{N(N-1)} \\ &= \frac{n(2N-n-1)}{N(N-1)}.\end{aligned}$$

다른 방법으로, 여사건을 이용할 수도 있다. 이 사건이 일어나지 않는 것은 정확히 앞쪽의 n명이 모두 순위 3부터 N까지인 $N-2$명 중에서 나올 때이며, 그 확률은

$$\frac{\binom{N-2}{n}}{\binom{N}{n}} = \frac{(N-n)(N-n-1)}{N(N-1)},$$

이다. 그리고 $N(N-1) - (N-n)(N-n-1) = 2Nn - n^2 - n = n(2N-n-1)$이므로 같은 답을 얻는다.

$N = 4, n = 2$인 경우

공식에 따르면 (i)의 답은 $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$이고, (ii)의 답은 $\frac{2\cdot 5}{4\cdot 3} = \frac{5}{6}$이다.

가능한 경우를 나열하기 위해, 어느 두 지원자가 먼저 면접을 보는지만 중요하다는 점에 주목한다. $\binom{4}{2} = 6$개의 쌍 각각은 24가지 순서 중 정확히 $2! \times 2! = 4$가지에서 나타나므로(처음 두 명의 순서를 정하고, 이어서 마지막 두 명의 순서를 정한다) 여섯 쌍은 모두 같은 확률이다.

먼저 면접 본 두 명	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{1,4\}$	$\{2,3\}$	$\{2,4\}$	$\{3,4\}$
이들 중 최고	1	1	1	2	2	3

처음 두 명 중 최고가 전체 최고인 경우는 6가지 중 3가지로 확률은 $\frac{1}{2}$이고, 전체 1위 또는 2위인 경우는 6가지 중 5가지로 확률은 $\frac{5}{6}$이다. 둘 다 공식과 일치한다.

검산

- $n = N$: 모든 지원자를 보므로 두 확률 모두 1이어야 한다. 실제로 $\frac{N}{N} = 1$이고 $\frac{N(N-1)}{N(N-1)} = 1$이다.
- $n = 1$: 첫 번째 지원자는 균등하게 무작위로 뽑힌 한 명이므로 (ii)의 답은 $\frac{2}{N}$이어야 한다. 공식은 $\frac{2N-2}{N(N-1)} = \frac{2}{N}$을 준다.
- $2N - n - 1 \geq N - 1$이므로 (ii)의 답은 (i)의 답 이상이다.
- $N \leq 7$과 모든 n에 대해 $N!$가지 순서를 모두 나열해 보면 두 공식과 정확히 일치한다(예를 들어 $N = 5, n = 2$이면 $\frac{2}{5}$와 $\frac{7}{10}$을 얻는다).

흔한 실수

- (ii)에서 "전체 2위"는 전체 최고가 처음 n명 안에 **없을** 때에만 해당한다는 점을 잊는 것. 단순히 $\frac{n}{N} + \frac{n}{N}$을 더하면 중복해서 세게 된다.
- 지원자 1의 자리에 대한 조건을 준(conditioning) 뒤에도 지원자 2에 대해 $\frac{n}{N}$을 쓰는 것. 지원자 1의 자리가 정해지면 남은 자리는 $N - 1$개뿐이다.

STEP 너머

이것은 유명한 **비서 문제**(*secretary problem*)의 상황이다. 각 지원자를 그 자리에서 채용하거나 거절해야 한다면, 최선의 전략은 처음 n명을 지켜본 다음 그들 모두보다 나은 첫 지원자를 채용하는 것이다. 소문항 (i)의 논증을 확장하면 최적의 n은 대략 N/e이고, 이때 성공 확률은 약 $1/e$임을 보일 수 있다. 여기서 사용한 대칭성 논증("각 지원자는 어느 자리에나 같은 확률로 있다")은 무작위 순열(random permutation) 연구의 출발점이다. Blitzstein과

Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)는 이와 같은 대칭성 논증을 훌륭하게 다룬다.

풀이

STEP II 2001, 문제 1

순수수학 • 이항 근사

> **STEP II 2001, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/01-s2-q1

핵심 아이디어

$(1-x)^{1/2}$의 이항급수(binomial series)는 x가 작을 때 빠르게 수렴(converge)하므로, 처음 몇 항만으로도 훌륭한 유리수 근삿값(rational approximation)을 얻는다. 요령은 x를 고르는 데 있다. $1-x$가 제곱수와 제곱근을 구하려는 수의 곱을 10의 거듭제곱으로 나눈 값이 되도록 해야 한다. 그러면 $1-x$의 제곱근은 구하려는 제곱근의 간단한 배수가 된다. $99 = 9 \times 11$이고 $9999 = 9 \times 1111$이므로 어떤 값을 고를지는 거의 저절로 정해진다.

풀이

이차 근사

$|x| < 1$일 때 성립하는 이항전개(binomial expansion)에 의해

$$\begin{aligned}(1-x)^{1/2} &= 1 + \tfrac{1}{2}(-x) + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}(-x)^2 + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}(-x)^3 + \cdots \\ &= 1 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{1}{16}x^3 - \cdots .\end{aligned}$$

이다. 따라서 x가 작으면

$$\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}.$$

이다. 오차(error)를 구할 때 필요한, 처음으로 버린 항 $-\frac{1}{16}x^3$도 함께 구했다. 사실 첫째 항 이후의 모든 항은 음수이다($n \geq 1$일 때 곱 $\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})\cdots(\frac{1}{2}-n+1)$에는 음수인 인수가 $n-1$개 있고, $(-x)^n$이 $(-1)^n$을 주므로 전체적으로 음의 부호가 하나 남는다). 그러므로 $0 < x < 1$일 때 이 이차식은 **과대추정**(*overestimate*)이다.

소문항 (i)

$x = \frac{1}{100}$으로 두면

$$\sqrt{1-x} = \sqrt{\frac{99}{100}} = \frac{\sqrt{9\times 11}}{10} = \frac{3\sqrt{11}}{10}, \qquad \text{따라서} \qquad \sqrt{11} = \frac{10}{3}\sqrt{1-\tfrac{1}{100}}.$$

이다. 이차 근사를 이용하면

$$\begin{aligned}\sqrt{11} &\approx \frac{10}{3}\left(1 - \frac{1}{200} - \frac{1}{80\,000}\right) = \frac{10}{3}\cdot\frac{80\,000 - 400 - 1}{80\,000}\\ &= \frac{10}{3}\cdot\frac{79\,599}{80\,000} = \frac{79\,599}{24\,000},\end{aligned}$$

이 되어 요구한 결과를 얻는다.

> ? **생각해 보기** 처음으로 버린 항은 $-\frac{1}{16}x^3$이다. 이것이 $\sqrt{11}$의 오차인가?

꼭 그렇지는 않다. 이것은 $\sqrt{1-x}$에 대한 근삿값의 오차이고, 우리는 그 뒤에 $\frac{10}{3}$을 곱했다. 따라서 $\sqrt{11}$의 오차는 대략

$$\frac{10}{3}\times\frac{1}{16}\left(\frac{1}{100}\right)^3 = \frac{10}{48\times 10^6} = \frac{1}{4\,800\,000} \approx 2.08\times 10^{-7}.$$

이다. 그러므로 유효숫자(significant figure) 1자리로 나타내면 오차는 2×10^{-7}이고, $\frac{79\,599}{24\,000}$은 $\sqrt{11}$보다 조금 크다.

소문항 (ii)

소문항 (i)의 요령을 그대로 따른다. $1111\times 9 = 9999 = 10^4 - 1$이므로 $x = \frac{1}{10\,000}$으로 두면

$$\sqrt{1-x} = \sqrt{\frac{9999}{10\,000}} = \frac{3\sqrt{1111}}{100}, \qquad \text{따라서} \qquad \sqrt{1111} = \frac{100}{3}\sqrt{1-\tfrac{1}{10\,000}}.$$

이다. 그러면

$$\begin{aligned}\sqrt{1111} &\approx \frac{100}{3}\left(1 - \frac{1}{20\,000} - \frac{1}{8\times 10^8}\right) = \frac{100}{3}\cdot\frac{800\,000\,000 - 40\,000 - 1}{8\times 10^8}\\ &= \frac{100}{3}\cdot\frac{799\,959\,999}{8\times 10^8} = \frac{799\,959\,999}{24\,000\,000} = \frac{266\,653\,333}{8\,000\,000},\end{aligned}$$

이다. 마지막 단계에서는 인수 3을 약분하였다(799 959 999의 각 자릿수의 합(digit sum)은 75이고, 이는 3으로 나누어떨어진다).

오차는 대략 처음으로 버린 항의 $\frac{100}{3}$배이다.

$$\frac{100}{3}\times\frac{1}{16}\left(\frac{1}{10^4}\right)^3 = \frac{100}{48\times 10^{12}} \approx 2.08\times 10^{-12},$$

이는 문제에서 요구한 대로 약 2×10^{-12}이다. 따라서 알맞은 유리수는

$$\sqrt{1111} \approx \frac{266\,653\,333}{8\,000\,000} \left(= \frac{799\,959\,999}{24\,000\,000}\right).$$

이다.

검산

- $79\,599/24\,000 = 3.316625$이고 $\sqrt{11} = 3.31662479\ldots$이다. 그 차는 2.096×10^{-7}으로 추정값 2.08×10^{-7}과 들어맞으며, 근삿값이 참값보다 크다는 것도 확인된다.
- $266\,653\,333/8\,000\,000 = 33.331666625$이고 $\sqrt{1111} = 33.33166662291\ldots$이다. 그 차를 높은 정밀도로 정확히 계산하면 2.0835×10^{-12}이다.
- 소문항 (ii)에서 추정이 더 정확해지는 까닭은, x가 작을수록 그다음에 버린 항 $-\frac{5}{128}x^4$이 x^3 항에 비해 상대적으로 더 작아지기 때문이다.

흔한 실수

- 버린 항에 $\frac{10}{3}$(또는 $\frac{100}{3}$)을 곱하는 것을 잊어서, 오차를 10배 또는 100배 작게 구하는 실수.
- x^2의 계수(coefficient)에서 부호를 틀리는 실수. $(-x)^2$이므로 이 항은 $+\frac{1}{8}x^2$이 아니라 $\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}x^2 = -\frac{1}{8}x^2$이다.
- $1 - x$가 1111을 10의 거듭제곱으로 나눈 값이 되도록 x를 잡는 실수. 그런 값은 작지 않으므로 급수가 너무 느리게 수렴하여 쓸모가 없다.

STEP 너머

오차가 "처음으로 버린 항과 비슷하다"는 주장은 테일러 정리(Taylor's theorem)와 라그랑주 나머지항(Lagrange form of the remainder)으로 엄밀하게 만들 수 있다. 라그랑주 나머지항은 $(0, x)$ 안의 알 수 없는 한 점을 사용하여 오차를 정확한 식으로 나타낸다. 이로부터 단순한 추정이 아니라 확실한 상계와 하계를 얻을 수 있다. 이러한 오차 한계를 엄밀하게 다루는 것은 해석학(analysis) 첫 강좌의 표준적인 내용이다. Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 참고하라.

풀이

STEP II 2001, 문제 2

순수수학 • 정수 부분의 합

STEP II 2001, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/01-s2-q2

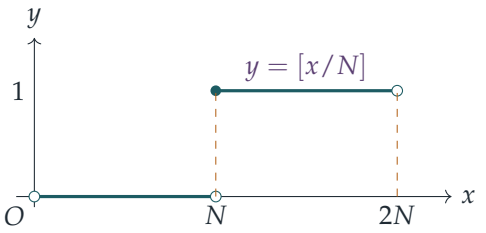
핵심 아이디어

복잡해 보이는 지수 $[k/N]$는 k가 1부터 $2N$까지 변할 때 단 세 가지 값만 가지며, 그래프를 그려 보면 그 값이 정확히 어디에서 뛰는지 알 수 있다. 이것을 알고 나면 부호 $(-1)^{[k/N]}$는 k의 세 구간 각각에서 일정하므로, 각 합은 구간마다 등차급수(arithmetic series)(소문항 (i)) 또는 등비급수(geometric series)(소문항 (ii))로 나뉜다. 주의할 점은 구간의 양 끝점뿐이다.

풀이

그래프 그리기

$0 < x < N$이면 $0 < x/N < 1$이므로 $[x/N] = 0$이다. $N \leq x < 2N$이면 $1 \leq x/N < 2$이므로 $[x/N] = 1$이다. 그래프는 계단 모양이다. 값이 뛰는 곳은 $x = N$이며, 이 점에서 함수는 이미 값 1을 가진다. 오른쪽 끝점 $x = 2N$은 포함되지 않는다(그 점에서의 값은 2가 된다).



채워진 점은 포함되는 점이고, 속이 빈 점은 제외되는 점이다.

합을 구하려면 정수 값 $k = 1, 2, \ldots, 2N$이 필요하다. 그래프에서 읽어 내고 끝점 $k = 2N$을 추가하면 다음과 같다.

$$[k/N] = \begin{cases} 0, & 1 \le k \le N-1, \\ 1, & N \le k \le 2N-1, \\ 2, & k = 2N. \end{cases}$$

따라서 $(-1)^{[k/N]}$는 $k \le N-1$일 때 $+1$, $N \le k \le 2N-1$일 때 -1이고, 하나뿐인 항 $k = 2N$에서는 다시 $+1$이다. ($N = 1$이면 첫 번째 구간은 비어 있다. 빈 합은 0이므로 아래의 모든 식은 그대로 성립한다.)

> **생각해 보기** 왜 처음 N개 항의 부호는 $+$이고 다음 N개 항의 부호는 $-$라고 간단히 말할 수 없을까?

값이 뛰는 곳이 정확히 N의 배수이기 때문이다. 항 $k = N$에서 이미 $[k/N] = 1$이고, 마지막 항 $k = 2N$에서는 $[k/N] = 2$이므로 이 항은 양수이다. 이 두 끝점을 제대로 처리하는 것이 이 문제의 전부이다.

소문항 (i)

세 구간으로 나누면

$$\sum_{k=1}^{2N} (-1)^{[k/N]} k = \sum_{k=1}^{N-1} k \; - \sum_{k=N}^{2N-1} k \; + \; 2N.$$

첫 번째 합은 $\frac{1}{2}(N-1)N$이다. 두 번째 합은 N부터 $2N-1$까지 N개의 항으로 이루어져 있으므로, 첫째 항과 마지막 항의 평균에 N을 곱한 값 $\frac{1}{2}N(3N-1)$과 같다. 따라서

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2N} (-1)^{[k/N]} k &= \tfrac{1}{2}\left(N^2 - N\right) - \tfrac{1}{2}\left(3N^2 - N\right) + 2N \\ &= -N^2 + 2N = 2N - N^2, \end{aligned}$$

이므로 요구된 결과를 얻는다.

소문항 (ii)

같은 방법으로 나누면

$$S_N = \sum_{k=1}^{N-1} 2^{-k} \; - \sum_{k=N}^{2N-1} 2^{-k} \; + \; 2^{-2N}.$$

두 합 모두 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비급수이다. $\sum_{k=a}^{b} 2^{-k} = 2^{-a}\left(1 - 2^{-(b-a+1)}\right)\big/\frac{1}{2} = 2^{1-a} - 2^{-b}$를 이용하면

$$\sum_{k=1}^{N-1} 2^{-k} = 1 - 2^{1-N},$$
$$\sum_{k=N}^{2N-1} 2^{-k} = 2^{1-N} - 2^{1-2N}.$$

그러므로

$$\begin{aligned} S_N &= 1 - 2^{1-N} - 2^{1-N} + 2^{1-2N} + 2^{-2N} \\ &= 1 - 4\cdot 2^{-N} + 3\cdot 2^{-2N}. \end{aligned}$$

$t = 2^{-N}$으로 놓으면 이 식은 $1 - 4t + 3t^2$이고, 다음과 같이 깔끔하게 인수분해된다.

$$\boxed{S_N = 1 - \frac{4}{2^N} + \frac{3}{4^N} = \left(1 - \frac{1}{2^N}\right)\left(1 - \frac{3}{2^N}\right).}$$

$N \to \infty$일 때 $2^{-N} \to 0$이고 $4^{-N} \to 0$이므로

$$\lim_{N\to\infty} S_N = 1.$$

이는 자연스러운 결과이다. N이 커지면 양수 구간 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$는 길어져 그 합이 1에 가까워지고, 음수 구간은 아주 뒤에서 시작하므로 그 합(대략 2^{1-N})은 무시할 수 있을 만큼 작아진다.

검산

- $N = 1$: 항은 $[1] = 1$인 $k = 1$과 $[2] = 2$인 $k = 2$이다. 소문항 (i)에서는 $-1 + 2 = 1 = 2 - 1$이고, 소문항 (ii)에서는 $-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$로 $(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{3}{2}) = -\frac{1}{4}$와 일치한다.
- $N = 2$: $k = 1, 2, 3, 4$에 대한 부호는 $+, -, -, +$이다. 그러면 $1 - 2 - 3 + 4 = 0 = 4 - 4$이고, $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}$이다.
- 1부터 59까지의 모든 N에 대해 두 공식을 분수로 정확히 확인하였다. 예를 들어 $S_{50} \approx 0.999\,999\,999\,999\,996$이다.

흔한 실수

- $k = N$을 양수 구간에 넣거나, 마지막 항 $k = 2N$의 지수가 2이므로 양수라는 사실을 잊는 것.
- $\sum_{k=N}^{2N-1}$의 항의 개수를 잘못 세는 것: 항은 $N - 1$개가 아니라 N개이다.

STEP 너머

정수 부분 함수, 즉 바닥 함수(floor function)는 정수론(number theory) 곳곳에 등장한다. 대표적인 예는 르장드르(Legendre)의 공식으로, 소수 p가 $n!$을 나누는 최고 거듭제곱의 지수가 $\sum_{j\geq 1}[n/p^j]$임을 말해 준다. 소문항 (ii)처럼 부호의 패턴이 구간 단위로 바뀌는 합은 급수의 항을 재배열하고 묶는 방법에 대한 부드러운 입문이기도 하며, 이는 해석학(analysis) 강의에서 엄밀하게 다룬다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 바닥 함수가 활약하는 모습을 볼 수 있는 훌륭한 책이다.

풀이

STEP II 2001, 문제 3

순수수학 • 유클리드 기하학

> **STEP II 2001, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/01-s2-q3

핵심 아이디어

직육면체(cuboid)를 한 꼭짓점이 원점에 오고 모서리가 좌표축을 따라 놓이도록 좌표 안에 놓는다. 그러면 모든 꼭짓점의 위치벡터(position vector)가 바로 보이고, 대각선(diagonal)은 이 벡터들의 차일 뿐이며, 두 대각선 사이의 각은 스칼라곱(scalar product)에서 곧바로 얻어진다. 부피(volume)와 겉넓이(surface area)의 비는 λ에 대한 간단한 유리함수(rational function)이고, 마지막 부분에서는 R에 대한 조건을 λ에 대한 조건으로 바꾸어 두 결과를 연결한다.

풀이

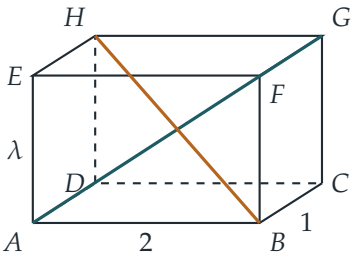
두 대각선 사이의 각

모서리 AE, BF, CG, DH가 면에 수직이므로 꼭짓점에서의 각은 모두 직각이다. 따라서 A를 원점으로 하고 AB, AD, AE 방향으로 좌표축을 잡을 수 있다.

$$A = (0,0,0), \quad B = (2,0,0), \quad C = (2,1,0), \quad D = (0,1,0),$$

윗면은 아랫면을 λ만큼 들어 올린 것이다.

$$E = (0,0,\lambda), \quad F = (2,0,\lambda), \quad G = (2,1,\lambda), \quad H = (0,1,\lambda).$$



두 대각선의 방향벡터(direction vector)는

$$\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{BH} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix},$$

이고, 길이는 각각 $\sqrt{5+\lambda^2}$이며,

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BH} = -4 + 1 + \lambda^2 = \lambda^2 - 3.$$

이다. 이 두 벡터 사이의 각을 θ라 하면

$$\cos\theta = \frac{\lambda^2 - 3}{5 + \lambda^2}.$$

이다.

? **생각해 보기** 절댓값(modulus) 기호는 어디에서 오는가?

교차하는 두 직선은 두 각 θ와 $\pi - \theta$를 이루고, 이 두 각의 코사인은 서로 부호만 반대이다. 예각(acute angle)(또는 $\lambda^2 = 3$일 때의 직각)은 코사인이 음이 아닌 쪽이므로

$$\cos\alpha = |\cos\theta| = \left|\frac{3 - \lambda^2}{5 + \lambda^2}\right|,$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

비 R

부피는 $2 \times 1 \times \lambda = 2\lambda$이다. 겉넓이는 넓이가 각각 $2 \times 1, 2 \times \lambda, 1 \times \lambda$인 면이 두 개씩으로 이루어지므로 $2(2 + 3\lambda)$이다. 따라서

$$R = \frac{2\lambda}{2(2 + 3\lambda)} = \frac{\lambda}{2 + 3\lambda}.$$

이다. $\lambda > 0$이므로 분모는 양수이고,

$$R < \tfrac{1}{3} \iff 3\lambda < 2 + 3\lambda \iff 0 < 2,$$

인데, 이는 참이다. 따라서 가능한 모든 λ에 대하여 $R < \frac{1}{3}$이다. ($\lambda \to \infty$일 때 $R \to \frac{1}{3}$이므로 이 상계는 더 개선할 수 없다.)

마지막 부분

이번에도 $2+3\lambda > 0$이므로 양변에 곱할 수 있다.

$$R \geq \tfrac{1}{4} \iff 4\lambda \geq 2+3\lambda \iff \lambda \geq 2.$$

그러므로 $\lambda \geq 2$라고 하자. 그러면 $\lambda^2 \geq 4 > 3$이므로 $\lambda^2 - 3 > 0$이고, 절댓값 기호를 없앨 수 있다.

$$\cos\alpha = \frac{\lambda^2-3}{\lambda^2+5} = 1 - \frac{8}{\lambda^2+5}.$$

이렇게 쓰면 λ^2이 커질수록 $\cos\alpha$가 증가함을 알 수 있다. $\lambda^2 \geq 4$이면 $\lambda^2+5 \geq 9$이므로

$$\cos\alpha \geq 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}.$$

이다. α와 $\arccos\frac{1}{9}$는 모두 코사인이 순감소하는 구간 $[0, \frac{\pi}{2}]$에 있으므로, $\cos\alpha \geq \frac{1}{9}$로부터

$$\alpha \leq \arccos\tfrac{1}{9},$$

를 얻고, 이것이 증명해야 할 것이었다. 등호는 정확히 $\lambda = 2$일 때, 즉 $R = \frac{1}{4}$일 때 성립한다.

검산

- $\lambda^2 = 3$이면 공식은 $\cos\alpha = 0$을 준다. 확인해 보면 $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BH} = -4+1+3 = 0$이므로 두 대각선은 실제로 수직이다.
- $\lambda \to \infty$이면 직육면체는 높고 가는 각기둥이 되고, 두 대각선은 거의 수직 방향이 되므로 $\alpha \to 0$이다. 공식도 당연히 $\cos\alpha \to 1$을 준다.
- $\lambda = 2$일 때: 부피는 4, 겉넓이는 $2(2+4+2) = 16$이므로 $R = \frac{1}{4}$이고, $\cos\alpha = \frac{1}{9}$이므로 $\alpha \approx 83.6^\circ$이다. λ의 무작위 값 10^5개에 대한 수치 검사로 각에 대한 공식, $R < \frac{1}{3}$, 그리고 $R \geq \frac{1}{4}$일 때마다 $\alpha \leq \arccos\frac{1}{9}$임을 확인하였다.

흔한 실수

- 절댓값을 잊는 것: $\lambda^2 < 3$이면 벡터 $\overrightarrow{AG}$와 $\overrightarrow{BH}$는 둔각(obtuse angle)을 이루고, 예각은 그 보각(supplement)이다.
- 마지막 부등식의 방향을 잘못 잡는 것: 코사인은 $[0, \frac{\pi}{2}]$에서 감소하므로, 코사인이 **클수록** 각은 **작다**.

STEP 너머

물체를 좌표 안에 놓고 스칼라곱으로 각을 구하는 것은 벡터 기하학의 기본 도구이며, 대학 1학년 선형대수학(linear algebra) 과정에서는 이것이 임의의 차원에서의 내적(inner product)으로 일반화된다. 즉 $\mathbb{R}^n$에서 두 벡터 사이의 각은 $\cos\theta = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}/(|\mathbf{u}||\mathbf{v}|)$로 정의되며, 코시-슈바르츠 부등식(Cauchy–Schwarz inequality)이 이 값이 $[-1,1]$에 있음을 보장한다. n차원 단위 정육면체의 긴 대각선이 각 모서리와 이루는 각의 코사인이 $1/\sqrt{n}$임을 보이는 것은 좋은 연습 문제이며, 따라서 n이 커질수록 이 각은 직각에 가까워진다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 이러한 아이디어를 명료하게 전개한다.

풀이

STEP II 2001, 문제 4

순수수학 • 배각 방정식

STEP II 2001, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/01-s2-q4

핵심 아이디어

f의 모든 항은 $\sin x$를 인수로 가진다. $\sin 2x = 2\sin x \cos x$이고, 힌트는 $\sin 3x$에 대해서도 같은 일을 해 준다. $\sin x$를 묶어 내면 $\cos x$에 대한 이차식(quadratic)이 남고, P, Q, R에 대한 조건은 정확히 "이 이차식의 판별식(discriminant)이 음수이다"라는 뜻이다. 두 번째 부분은 같은 함수에서 $P = 1$, $Q = 1$, $R = -1$로 두고 x를 $2nx$로 바꾼 것이다. 이번에는 이차식이 실제로 근을 가지며, 핵심은 허용된 범위의 위쪽 끝에 가장 가까운 근이 어느 것인지 찾는 데 있다.

풀이

첫 번째 결과

$c = \cos x$라 하자. $\sin 2x = 2\sin x \cos x$와 주어진 $\sin 3x$에 대한 항등식(identity)을 쓰면

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(x) &= P\sin x + 2Q\sin x\cos x + R\sin x\,(4\cos^2 x - 1) \\ &= \sin x\left(4Rc^2 + 2Qc + (P - R)\right). \end{aligned}$$

따라서 $\mathrm{f}(x) = 0$일 필요충분조건은 $\sin x = 0$ 또는 $4Rc^2 + 2Qc + (P - R) = 0$이다.

먼저 $R \neq 0$이다. $R = 0$이면 조건이 $Q^2 < 0$이 되어 불가능하기 때문이다. 따라서 괄호 안의 식은 c에 대한 진짜 이차식이고, 그 판별식은 가정에 의해

$$(2Q)^2 - 4\cdot 4R\,(P - R) = 4\big(Q^2 - 4R(P - R)\big) < 0$$

이다. 판별식이 음수인 실계수 이차식은 실근을 갖지 않으므로, 괄호 안의 식은 어떤 실수 c에 대해서도 0이 되지 않으며, 특히 $c = \cos x$일 때도 그렇다. 그러므로 $\mathrm{f}(x) = 0$이면 반드

시 $\sin x = 0$, 즉 정수 m에 대해 $x = m\pi$이다. 역으로 모든 $x = m\pi$는 f의 영점이므로, 이것들이 정확히 영점 전체이다. 이로써 증명이 끝난다.

g의 가장 큰 근

$y = 2nx$로 두자. 그러면 $g(x) = \sin y + \sin 2y - \sin 3y$이고, 이는 $P = 1$, $Q = 1$, $R = -1$일 때의 $f(y)$이다. 여기서 $Q^2 = 1$은 $4R(P - R) = -8$보다 작지 않으므로 첫 번째 결과는 적용되지 않고, 이차식은 실근을 가진다. $c = \cos y$라 하면 위의 인수분해(factorisation)로부터

$$g(x) = \sin y\,(-4c^2 + 2c + 2) = -2\sin y\,(2c + 1)(c - 1).$$

따라서 $g(x) = 0$일 필요충분조건은

$$\sin y = 0, \qquad \cos y = 1, \qquad \text{또는} \qquad \cos y = -\tfrac{1}{2}.$$

$\cos y = 1$인 경우는 이미 $\sin y = 0$에 포함되어 있다. 따라서 y에 대한 근은

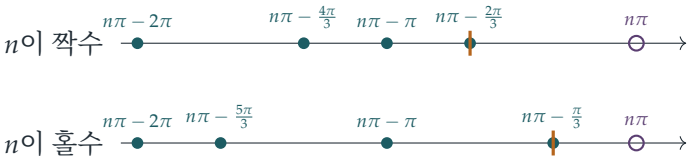
$$y = k\pi \quad \text{또는} \quad y = 2k\pi \pm \tfrac{2\pi}{3} \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

각 주기(period) $[2k\pi, 2k\pi + 2\pi)$ 안에서 근은 $2k\pi$에 0, $\frac{2\pi}{3}$, π, $\frac{4\pi}{3}$을 더한 위치에 있다.

범위 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$는 $0 < y < n\pi$가 되고, 오른쪽 끝 $y = n\pi$는 그 자체로 근이지만 범위에서 제외된다. 따라서 $n\pi$보다 엄격히 작은 가장 큰 근을 구해야 하며, 중요한 것은 $n\pi$가 자기 주기 안에서 어디에 놓이는지뿐이다.

> **?** **생각해 보기** 왜 n의 홀짝성(parity)이 중요할까?

근의 패턴은 π마다가 아니라 2π마다 반복된다. n이 짝수이면 $n\pi$는 2π의 배수이고, n이 홀수이면 $n\pi$는 π의 홀수배이다. 두 경우에 $n\pi$ 바로 아래에 있는 근들의 간격이 서로 다르다.



($n\pi$ 아래 마지막 2π 구간에서 y로 나타낸 g의 근을 축척에 맞게 그린 것이다. 빈 원은 제외된 끝점을, 호박색 눈금은 가장 큰 근을 나타낸다.)

n이 짝수인 경우. 이때 $k = \frac{n}{2} \geq 1$에 대해 $n\pi = 2k\pi$이고, 그 아래 마지막 주기에 있는 근들을 $n\pi$를 기준으로 나타내면

$$n\pi - 2\pi, \quad n\pi - \tfrac{4\pi}{3}, \quad n\pi - \pi, \quad n\pi - \tfrac{2\pi}{3}.$$

이 중 마지막 것은 $2(k-1)\pi + \frac{4\pi}{3}$이며, 코사인 값이 $-\frac{1}{2}$이므로 근이다. 구간 $\left(n\pi - \frac{2\pi}{3}, n\pi\right)$에는 근이 없다. 그 안에는 π의 배수가 없고, $\cos y = -\frac{1}{2}$이려면 $y \equiv \frac{2\pi}{3}$ 또는 $\frac{4\pi}{3} \pmod{2\pi}$여야 하는데, 여기서 y는 2π를 법으로 $\frac{4\pi}{3}$과 2π 사이에 엄격히 놓이기 때문이다. 또한 $n \geq 2$이므로 $n\pi - \frac{2\pi}{3} > 0$이다. 따라서 가장 큰 근은 $y = n\pi - \frac{2\pi}{3}$에 해당하고,

$$x = \frac{y}{2n} = \frac{(3n-2)\pi}{6n} \qquad (n\text{이 짝수}).$$

n이 홀수인 경우. 이때 $k = \frac{n-1}{2} \geq 0$에 대해 $n\pi = 2k\pi + \pi$이다. $2k\pi = n\pi - \pi$에서 시작하는 주기 안에서 보면, $n\pi$ 아래의 근은 시작점으로부터 0과 $\frac{2\pi}{3}$만큼 떨어진 곳에 있으므로, 후보는 $n\pi - \pi$와 $n\pi - \frac{\pi}{3}$이다. 구간 $\left(n\pi - \frac{\pi}{3}, n\pi\right)$은 2π를 법으로 y가 $\frac{2\pi}{3}$과 π 사이에 엄격히 놓이는 경우에 해당하며, 여기에는 근이 없다. 그리고 $n\pi - \frac{\pi}{3} \geq \frac{2\pi}{3} > 0$이다. 따라서 가장 큰 근은 $y = n\pi - \frac{\pi}{3}$에 해당하고,

$$x = \frac{(3n-1)\pi}{6n} \qquad (n\text{이 홀수}).$$

검산

$n = 1$일 때 $(0, \frac{1}{2}\pi)$에서 $g(x) = \sin 2x + \sin 4x - \sin 6x$이다. 공식은 $x = \frac{\pi}{3}$을 주고, 실제로 $\sin\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{4\pi}{3} - \sin 2\pi = 0$이다. $n = 2$일 때도 공식은 $\frac{\pi}{3}$을 준다($y = \frac{4\pi}{3}$). $n \to \infty$일 때 두 공식은 모두 $\frac{1}{2}\pi$로 수렴(converge)하는데, 근들이 점점 촘촘해지므로 당연한 결과이다. $n = 1, \ldots, 12$에 대해 촘촘한 격자 위에서 g를 수치적으로 조사해 보았다. 예측한 각 값(예를 들어 $n = 3$일 때 $x = \frac{4\pi}{9} \approx 1.3963$)은 근이었고, 그 값과 $\frac{1}{2}\pi$ 사이에서 g의 부호는 일정하게 유지되었다. 첫 번째 부분에 대해서는 $Q^2 < 4R(P-R)$을 만족하는 무작위 순서쌍 2000개 모두에서 괄호 안의 식이 $[-1, 1]$ 위에서 영점을 갖지 않았다.

흔한 실수

- $x = \frac{1}{2}\pi$ 자체를 답으로 내는 것. 이는 모든 n에 대해 g의 근이지만 열린구간(open interval) 밖에 있다.
- $\sin y = 0$에서 나오는 근을 잊고 $\cos y = -\frac{1}{2}$만 남기는 것. n이 짝수일 때 $y = n\pi - \pi$는 가장 큰 근은 아니지만 근이다.
- $\cos y = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$로만 쓰고 $\frac{4\pi}{3}$ 계열을 빠뜨리는 것. 그러면 n이 짝수일 때 틀린 답이 나온다.

STEP 너머

이 인수분해가 가능한 이유는 $\sin mx / \sin x$가 항상 $\cos x$에 대한 다항식이기 때문이다. 이것이 바로 제2종 체비쇼프 다항식(Chebyshev polynomials of the second kind) $U_{m-1}(\cos x)$이다. 따라서 유한한 사인 급수 $\sum a_m \sin mx$는 모두 $\sin x$와 $\cos x$에 대한 다항식의 곱이 되고, 그 영점의 개수를 세는 문제는 $[-1, 1]$에 있는 다항식의 근의 개수를 세는 문제로 바뀐다. 이 아이디어는 근사 이론(approximation theory)과 푸리에 해석(Fourier analysis)의 많은 부분의 바탕이 된다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 e^{ix}를 통해 배각 공식(multiple-angle formulae)을 바라보는 아름다운 관점을 제시한다.

풀이

STEP II 2001, 문제 5

순수수학 • 정류점과 적분

STEP II 2001, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/01-s2-q5

핵심 아이디어

정상점(stationary point)은 기울기(gradient)에서 곧바로 얻어진다. 정상점은 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$인 곳에 있고, 그 종류는 기울기의 부호가 어떻게 바뀌는지로 결정된다. 지수 인수는 항상 양수이므로 그 부호는 다항식 인수 $x(1-x^2)$에만 의존하며, 이 인수는 두 곡선에서 똑같다. 높이를 구할 때, 첫 번째 기울기는 정확히 적분된다($u = x^2$를 알아차리면 된다). 두 번째 기울기는 그렇지 않지만, 그 값이 필요한 것이 아니라 두 적분의 비교만 하면 된다.

풀이

곡선 C_1

모든 x에 대하여 $\mathrm{e}^{-x^2} > 0$이므로, 기울기가 0이 되는 것은 정확히 $x(1-x^2) = x(1-x)(1+x) = 0$일 때, 즉 $x = -1, 0, 1$에서이다. 또한 기울기는 $x(1-x)(1+x)$와 부호가 같다.

	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$의 부호	$+$	$-$	$+$	$-$

$x = 0$에서 기울기가 음에서 양으로 바뀌므로, (곡선 위에 있는) 원점은 극소(minimum)이다. $x = 1$에서는 양에서 음으로 바뀌므로 이 점은 극대(maximum)이다. 마찬가지로 $x = -1$도 극대이다.

높이를 구하기 위해 적분한다. 곡선이 원점을 지나므로

$$y = \int_0^x t(1-t^2)\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

생각해 보기 $t(1-t^2)\mathrm{e}^{-t^2}$을 어떻게 적분할까?

t^2의 함수 옆에 인수 t가 붙어 있으므로 $u = t^2$, $\mathrm{d}u = 2t\,\mathrm{d}t$로 치환(substitution)하는 것을 떠올릴 수 있다.

$$y = \tfrac{1}{2}\int_0^{x^2} (1-u)\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u.$$

이제 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(u\mathrm{e}^{-u}\right) = \mathrm{e}^{-u} - u\mathrm{e}^{-u} = (1-u)\mathrm{e}^{-u}$임에 주목한다(부분적분(integration by parts)으로도 같은 결과를 얻는다). 따라서

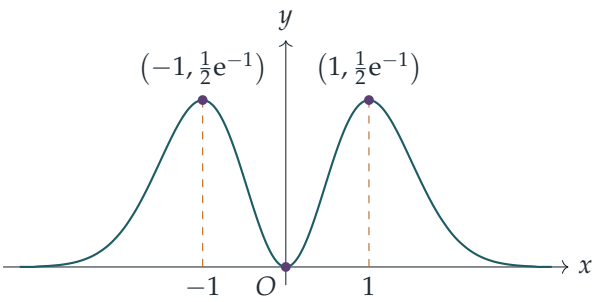
$$y = \tfrac{1}{2}\left[u\,\mathrm{e}^{-u}\right]_0^{x^2} = \tfrac{1}{2}\,x^2\mathrm{e}^{-x^2}.$$

$x = 1$에서 $y = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}$이므로, 요구한 대로 극대점은 $\left(1, \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}\right)$이다. y는 x에 대한 우함수(even function)이므로, 나머지 정상점은 극대점

$$\left(-1, \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}\right).$$

이다.

개형. $y = \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-x^2}$로부터 다음을 알 수 있다. 곡선은 y축에 대하여 대칭이고, $y \geq 0$이며 등호는 원점에서만 성립하고, 지수함수가 x^2의 증가보다 빠르게 감소하므로 $x \to \pm\infty$일 때 $y \to 0$이다. 따라서 곡선은 "두 개의 봉우리" 모양이다. 원점에서 x축에 접하고, $x = \pm 1$에서 같은 높이(높이 $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1} \approx 0.18$)의 두 극대까지 올라간 다음, 양쪽에서 x축을 향해 잦아든다. (아래 그림은 세로 방향을 과장하여 그렸다.)



곡선 C_2

이번에도 모든 x에 대하여 $\mathrm{e}^{-x^3} > 0$이므로, 기울기는 정확히 $x = -1, 0, 1$에서 0이 되고 $x(1-x)(1+x)$와 부호가 같으며, 따라서 앞과 똑같은 부호표를 얻는다. 그러므로 (가정에 의해 곡선 위에 있는) 원점은 극소이고, $x = 1$인 정상점은 극대이다. ($x = -1$인 점도 극대이지만, 문제에서 묻지는 않았다.)

그 높이는

$$k = \int_0^1 x(1-x^2)\,\mathrm{e}^{-x^3}\,\mathrm{d}x.$$

이다. 이 적분은 초등함수로 된 원시함수(antiderivative)가 없으므로, 그 대신 값이 $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}$임을 이미 아는 C_1의 적분과 비교한다.

? **생각해 보기** k의 값을 구하지 않고 어떻게 k를 $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}$과 비교할 수 있을까?

피적분함수(integrand)를 비교한다. $0 < x < 1$이면 $x^3 < x^2$이다($x < 1$의 양변에 $x^2 > 0$을 곱한다). 따라서 $-x^3 > -x^2$이고, e^t는 증가함수이므로 $\mathrm{e}^{-x^3} > \mathrm{e}^{-x^2}$이다. 또한 이 구간에서 $x(1-x^2) > 0$이므로, 곱해도 부등식의 방향은 유지된다.

$$x(1-x^2)\,\mathrm{e}^{-x^3} > x(1-x^2)\,\mathrm{e}^{-x^2} \qquad \text{단, } 0 < x < 1.$$

두 피적분함수는 모두 $[0,1]$에서 연속이고 열린구간에서 부등식이 엄격하게 성립하므로, $[0,1]$에서 적분하면 엄격한 부등식을 얻는다.

$$k = \int_0^1 x(1-x^2)\,\mathrm{e}^{-x^3}\,\mathrm{d}x > \int_0^1 x(1-x^2)\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-1},$$

여기서 마지막 등식은 앞에서 구한 $x = 1$에서의 C_1의 높이이다. 따라서 요구한 대로 극대점은 $(1,k)$이고 $k > \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}$이다.

검산

곱의 미분법(product rule)으로 $\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-x^2}$을 미분하면 $x\mathrm{e}^{-x^2} - x^3\mathrm{e}^{-x^2} = x(1-x^2)\mathrm{e}^{-x^2}$이고, $x = 0$에서 그 값이 0이므로 C_1의 식은 옳다. 이계도함수(second derivative)로도 분류를 확인할 수 있다. 두 곡선 모두 $y''(0) = 1 > 0$이고 $y''(1) = -2\mathrm{e}^{-1} < 0$이다. 수치적으로 계산하면(심프슨 공식(Simpson's rule)) $k \approx 0.2034$이고, $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1} \approx 0.1839$이다.

흔한 실수

- 적분 상수(constant of integration)를 빠뜨리는 것. "원점을 지난다"는 조건이 바로 적분 상수를 정해 주며, 이것이 높이에 영향을 준다.
- $x(1-x^2)$이 $(0,1)$에서 양수임을 언급하지 않고 $\mathrm{e}^{-x^3} > \mathrm{e}^{-x^2}$이라는 이유만으로 $k > \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}$이라고 주장하는 것. 음수인 인수를 곱하면 부등식의 방향이 바뀐다.
- $x^3 < x^2$이 "모든 x에 대하여" 성립한다고 말하는 것. 이 부등식은 $x < 1, x \neq 0$일 때만 성립하며, 그래서 구간 $[0,1]$이 바로 우리에게 필요한 구간이다.

STEP 너머

두 번째 부분은 비교 논법(comparison argument)이다. 식으로 적을 수 없는 해에 대해, 식으로 적을 수 있는 해와 비교함으로써 무언가를 알아낸다. 이 아이디어는 미분방정식(differential equations) 이론 전반에 걸쳐 나타나는데, 그곳에서는 비교 정리(comparison theorems)가 다루기 힘든 방정식의 해를 더 간단한 방정식의 해로 어림한다. 또한 해석학(analysis)에서도 마찬가지인데, 그곳에서는 적분의 단조성(monotonicity)이 기본 도구이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 공식 없이도 해에 대해 정성적으로 얼마나 많은 것을 말할 수 있는지 살펴보기에 좋은 책이다.

풀이

STEP II 2001, 문제 6

순수수학 • 치환적분

> **STEP II 2001, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/01-s2-q6

핵심 아이디어

복잡해 보이는 $\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$는 사실 $\frac{\pi}{4} - \tan^{-1} x$가 모습을 바꾼 것일 뿐이다. 이것은 탄젠트의 뺄셈 공식(tangent subtraction formula)을 거꾸로 읽은 것이다. 이 점을 알아차리면 소문항 (i)은 부분적분(integration by parts) 한 번으로 처음의 적분에 정확히 도달한다. 소문항 (ii)는 관계가 없어 보이지만, 사상 $y = \frac{1-x}{1+x}$는 0과 1을 서로 맞바꾸고 자기 자신이 역함수(inverse)이므로, 이것으로 치환(substitution)하면 (ii)가 다시 (i)로 돌아간다.

풀이

처음의 적분

x^4을 $1 + x^2$으로 나누면(또는 $x^4 = (x^4 - 1) + 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) + 1$로 쓰면)

$$\frac{x^4}{1+x^2} = x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}.$$

을 얻는다. 따라서

$$\int_0^1 \frac{x^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{3}x^3 - x + \tan^{-1} x\right]_0^1 = \frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3},$$

이므로 원하는 결과가 나온다.

소문항 (i)

$\theta = \tan^{-1} x$라 하면 $0 \le x \le 1$일 때 $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$이다. 뺄셈 공식에 의해

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\theta}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan\theta} = \frac{1-x}{1+x}.$$

이다.

생각해 보기 $\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\frac{1-x}{1+x}$라는 사실로부터 정말 $\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\frac{\pi}{4}-\theta$라고 쓸 수 있을까?

$\frac{\pi}{4}-\theta$가 $\tan^{-1}$의 치역(range) $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$에 속할 때에만 그렇다. 여기서는 $0\le\frac{\pi}{4}-\theta\le\frac{\pi}{4}$이므로 실제로 그러하며, 적분 구간 전체에서

$$\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\frac{\pi}{4}-\tan^{-1}x.$$

가 성립한다.

그러므로

$$\int_0^1 x^3\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x-\int_0^1 x^3\tan^{-1}x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{16}-J,$$

이고, 여기서 $J=\int_0^1 x^3\tan^{-1}x\,\mathrm{d}x$이다. $u=\tan^{-1}x$, $\mathrm{d}v=x^3\,\mathrm{d}x$로 두고(따라서 $v=\frac{1}{4}x^4$, $\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$) 부분적분하면

$$\begin{aligned}J&=\left[\tfrac{1}{4}x^4\tan^{-1}x\right]_0^1-\frac{1}{4}\int_0^1\frac{x^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{16}-\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{6},\end{aligned}$$

이다. 여기서 처음의 결과를 이용하였다. 따라서

$$\int_0^1 x^3\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{16}-\frac{1}{6}.$$

이다.

소문항 (ii)

생각해 보기 $\frac{(1-y)^3}{(1+y)^5}$라는 이상한 가중치는 어디서 온 것일까?

이것은 같은 변환 아래에서 $x^3\,\mathrm{d}x$가 바뀐 모습이다. $y=\frac{1-x}{1+x}$로 치환하자. 이를 풀면 $x=\frac{1-y}{1+y}$이다. 즉 이 사상은 자기 자신이 역함수이며, $x=0$을 $y=1$로, $x=1$을 $y=0$으로 보낸다. 그러면

$$1-y=\frac{2x}{1+x},\qquad 1+y=\frac{2}{1+x},\qquad \mathrm{d}y=-\frac{2}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x,$$

이므로

$$\frac{(1-y)^3}{(1+y)^5}\,\mathrm{d}y=\frac{8x^3}{(1+x)^3}\cdot\frac{(1+x)^5}{32}\cdot\left(-\frac{2}{(1+x)^2}\right)\mathrm{d}x=-\frac{x^3}{2}\,\mathrm{d}x,$$

이고 $\tan^{-1} y = \tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$이다. 음의 부호는 적분 구간의 위끝과 아래끝을 바꾸는 것으로 흡수된다(y가 0에서 1까지이면 x는 1에서 0까지이다).

$$\int_0^1 \frac{(1-y)^3}{(1+y)^5}\tan^{-1} y\,\mathrm{d}y = \int_1^0 \left(-\frac{x^3}{2}\right)\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x^3 \tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{16}-\frac{1}{6}\right) = \frac{\pi}{32}-\frac{1}{12}$$

이며, 마지막 단계에서 소문항 (i)의 결과를 이용하였다.

검산

- 두 답은 모두 양수이며, 반드시 그래야 한다(각 피적분함수(integrand)는 $[0,1]$에서 음이 아니다): $\frac{\pi}{16}-\frac{1}{6} \approx 0.02968$, $\frac{\pi}{32}-\frac{1}{12} \approx 0.01484$. 원래의 피적분함수에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면 소수점 아래 12자리까지 일치한다.
- (ii)의 답은 정확히 (i)의 답의 절반이며, 이는 대수적 계산을 하기 전에 수치적으로 먼저 확인해 볼 수 있다.
- 항등식에 $x=0$을 대입하면 $\tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$이고, $x=1$을 대입하면 $\tan^{-1} 0 = 0$이다. 둘 다 $\frac{\pi}{4} - \tan^{-1} x$와 일치한다.

흔한 실수

- (ii)에서 $\mathrm{d}y$를 빠뜨리거나 부호를 잘못 처리하는 것. 인수 $-\frac{2}{(1+x)^2}$의 음의 부호와 위끝·아래끝을 바꾼 데서 생기는 음의 부호가 서로 상쇄된다.
- 치역을 확인하지 않고 $\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{\pi}{4} - \tan^{-1} x$라고 쓰는 것. $x<-1$이면 이 식은 성립하지 않는다(π만큼 차이가 난다).

STEP 너머

치환 $y=\frac{1-x}{1+x}$는 뫼비우스 변환(Möbius transformation), 즉 $\frac{ax+b}{cx+d}$ 꼴의 사상이다. 이러한 사상들은 합성(composition)에 대하여 군(group)을 이루며, 이 사상은 위수(order)가 2이다. 같은 기법에 대칭성을 결합하면 유명한 결과 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}\ln 2$를 얻을 수 있는데, 다음에 꼭 도전해 볼 만하다. 뫼비우스 사상은 복소해석학(complex analysis)에서 핵심적인 역할을 한다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이 사상들을 아름다운 기하학적 관점으로 설명한다.

풀이

STEP II 2001, 문제 7

순수수학 • 복소수와 회전

STEP II 2001, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/01-s2-q7

핵심 아이디어

정다각형(regular polygon)의 둘레를 따라 걸으면 모든 변의 길이가 같고, 각 꼭짓점에서 똑같은 **외각**(exterior angle)만큼 방향을 튼다. 아르강 도표(Argand diagram)에서 각 θ만큼 도는 것은 $e^{i\theta}$를 곱하는 것이므로, 각 변은 바로 앞 변에 일정한 복소수를 곱한 것이다. 꼭짓점을 구하고 나면 중심은 수직이등분선(perpendicular bisector)에서 얻을 수 있고, 회전(rotation)은 $e^{i\theta}$를 한 번 더 곱하는 것일 뿐이다.

풀이

Q와 S 구하기

각 꼭짓점에서의 내각(interior angle)은 $5\pi/6$이므로, 각 꼭짓점에서 진행 방향은 외각 $\pi - 5\pi/6 = \pi/6$만큼 돈다. 다각형이 위쪽 반평면에 놓여 있고 O에서 P로 양의 실수축을 따라 출발하므로, 회전은 **반시계 방향**이어야 한다(P에서 시계 방향으로 돌면 Q가 실수축 아래로 내려간다).

$\omega = e^{i\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$라 하자. 변 $\overrightarrow{OP}$는 복소수 2이고, 그다음 각 변은 바로 앞 변에 ω를 곱한 것이다 (길이는 같고 $\pi/6$만큼 돌아간다). 따라서

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= 2\omega = \sqrt{3} + i,\\ \overrightarrow{QR} &= 2\omega^2 = 2e^{i\pi/3} = 1 + \sqrt{3}\,i,\\ \overrightarrow{RS} &= 2\omega^3 = 2e^{i\pi/2} = 2i.\end{aligned}$$

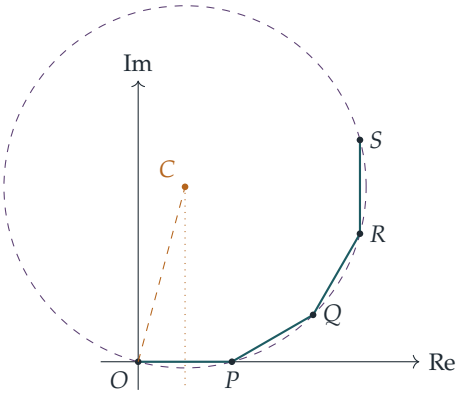
이를 차례로 더하면

$$\begin{aligned} Q &= 2 + (\sqrt{3} + \mathrm{i}) = 2 + \sqrt{3} + \mathrm{i}, \\ R &= Q + 1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i} = (3 + \sqrt{3}) + (1 + \sqrt{3})\mathrm{i}, \\ S &= R + 2\mathrm{i} = (3 + \sqrt{3}) + (3 + \sqrt{3})\mathrm{i}. \end{aligned}$$

첫째 줄이 구하는 Q의 값이고,

$$S = (3 + \sqrt{3})(1 + \mathrm{i}).$$

이다.



중심 C

O, P, Q를 지나는 원은 정십이각형 전체의 외접원(circumcircle)이므로, C는 다각형의 중심이다. C는 O와 $P = 2$에서 같은 거리에 있으므로 수직이등분선 $\mathrm{Re}\, z = 1$ 위에 있다. $C = 1 + h\mathrm{i}$라 하자. C는 O와 Q에서도 같은 거리에 있으므로

$$\begin{aligned} |C|^2 = |C - Q|^2 &\iff 1 + h^2 = (1 + \sqrt{3})^2 + (h - 1)^2 \\ &\iff 1 + h^2 = 4 + 2\sqrt{3} + h^2 - 2h + 1 \\ &\iff 2h = 4 + 2\sqrt{3}, \end{aligned}$$

이다. 따라서 $h = 2 + \sqrt{3}$이고 $C = 1 + (2 + \sqrt{3})\mathrm{i}$이며, 이는 제1사분면에 있다.

생각해 보기 C의 편각은 정확히 얼마인가?

$\tan(\arg C) = 2 + \sqrt{3}$이어야 한다. 그런데

$$\tan \tfrac{5\pi}{12} = \tan\left(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{\pi}{6}\right) = \frac{1 + 1/\sqrt{3}}{1 - 1/\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{2} = 2 + \sqrt{3},$$

이고 C는 제1사분면에 있으므로 편각(argument)은 $\arg C = 5\pi/12$이다. (기하적으로 보면, 삼각형 OCP는 C에서의 꼭지각이 $2\pi/12$인 이등변삼각형(isosceles triangle)이므로, 밑각은 $\frac{1}{2}(\pi - \pi/6) = 5\pi/12$이다.)

회전

O를 중심으로 각 θ만큼 반시계 방향으로 회전하면 모든 점에 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$가 곱해지므로, C의 편각은 $5\pi/12 + \theta$가 된다. C가 실수축 위에 놓이려면 $5\pi/12 + \theta$가 π의 배수여야 한다. 이를 만족하는 가장 작은 양수 θ는

$$\theta = \pi - \tfrac{5\pi}{12} = \tfrac{7\pi}{12},$$

이고, 이때 C는 **음의** 실수축 위에 놓인다.

이제 S를 극형식(modulus–argument form)으로 나타내자. $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$이므로 $S = (3+\sqrt{3})\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} = (3\sqrt{2}+\sqrt{6})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$이다. S의 새 위치는

$$\begin{aligned} S' = S\,\mathrm{e}^{7\mathrm{i}\pi/12} &= (3\sqrt{2}+\sqrt{6})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(3\pi/12+7\pi/12)} = (3\sqrt{2}+\sqrt{6})\,\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\pi/6} \\ &= (3\sqrt{2}+\sqrt{6})\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = -\tfrac{1}{2}(3\sqrt{2}+\sqrt{6})(\sqrt{3}-\mathrm{i}), \end{aligned}$$

이며, 이것이 보이려던 결과이다.

검산

- $|C|^2 = 1 + (2+\sqrt{3})^2 = 8 + 4\sqrt{3} = (\sqrt{6}+\sqrt{2})^2$이고 $|C-S|^2 = (2+\sqrt{3})^2 + 1$도 성립하므로, S는 실제로 같은 원 위에 있다.
- $|S'| = 3\sqrt{2} + \sqrt{6} = |S|$로, 회전이 보존해야 하는 성질을 만족한다.
- 수치로는 $S \approx 4.732 + 4.732\mathrm{i}$, $S' \approx -5.7956 + 3.3461\mathrm{i}$이다. 컴퓨터로 모든 변의 길이와 $5\pi/6$인 각들, 그리고 $7\pi/12$가 C를 실수축 위에 놓는 첫 번째 반시계 방향 각이라는 것을 확인하였다.

흔한 실수

- 외각 $\pi/6$ 대신 내각 $5\pi/6$만큼 방향을 트는 실수.
- $-5\pi/12$(시계 방향)나 $\pi/2 - 5\pi/12$만큼 회전하는 실수. 회전은 반시계 방향이고, C는 실수축의 음의 부분에서 처음으로 실수축과 만난다.

STEP 너머

$e^{i\theta}$를 곱하는 것을 회전으로 보는 것은 복소함수를 기하학적 변환으로 바라보는 출발점이다. $z \mapsto az + b$는 평면의 모든 회전, 확대(enlargement), 평행이동(translation)을 나타내며, 이들은 군(group)을 이룬다. 정다각형의 꼭짓점은 등비급수(geometric sum) $2(1 + \omega + \cdots + \omega^{k-1})$로 나타나며, 이는 1의 거듭제곱근(roots of unity)과 연결된다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이러한 기하학적 관점을 아름답게 전개한다.

풀이

STEP II 2001, 문제 8

순수수학 • 주기함수와 상미분방정식

STEP II 2001, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/01-s2-q8

핵심 아이디어

주기(period)가 1인 함수는 길이가 1인 모든 구간에서 똑같은 모양이므로, 그러한 구간 위에서의 적분(integral)은 모두 같은 값이다. 따라서 x가 1만큼 증가할 때마다 F는 같은 양 $F(1)$만큼 증가한다. 마지막 소문항의 미분방정식(differential equation)은 1계 선형(first order linear) 방정식이므로, 적분인자(integrating factor)를 이용하면 그 해가 $-F(x)$의 지수함수로 나타나고, 나머지는 $F(1)$이 양수라는 사실에서 따라 나온다.

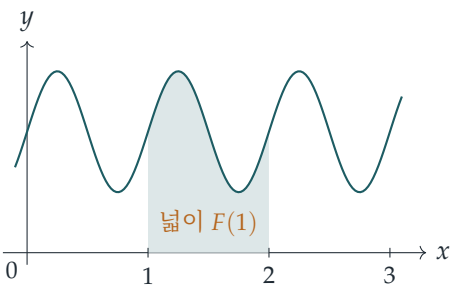
풀이

소문항 (i)

다음과 같이 잡자.

$$f(x) = 2 + \sin(2\pi x).$$

sin의 주기가 2π이므로 $\sin(2\pi(x+1)) = \sin(2\pi x + 2\pi) = \sin(2\pi x)$이고, 따라서 $f(x+1) = f(x)$이다. 또한 $\sin(2\pi x) \geq -1$이므로 모든 x에 대하여 $f(x) \geq 1 > 0$이다. ($f(x) = 1$과 같은 상수함수도 조건을 만족하지만, 덜 흥미롭다.)



그래프 아래에 있는 폭이 1인 띠는 모두 넓이가 같다. 소문항 (ii)의 내용은 이것이 전부이다.

소문항 (ii)

$G(x) = F(x+1) - F(x)$로 정의하자. 첫째 항에 연쇄법칙(chain rule)을 적용하여 미분하면, f의 주기성에 의해 모든 x에 대하여

$$G'(x) = f(x+1) - f(x) = 0$$

이다. 따라서 G는 상수이고, $F(0) = 0$이므로 그 값은 $G(0) = F(1) - F(0) = F(1)$이다. 즉,

$$F(x+1) = F(x) + F(1) \quad \text{모든} x.$$

이제 n에 대한 수학적 귀납법(induction)을 쓴다. $n = 1$일 때 $F(1) = 1 \cdot F(1)$은 자명하게 성립한다. 어떤 양의 정수 k에 대하여 $F(k) = kF(1)$이라 하면, 위 식에 $x = k$를 대입하여

$$F(k+1) = F(k) + F(1) = kF(1) + F(1) = (k+1)F(1).$$

을 얻는다. 따라서 모든 양의 정수 n에 대하여 $F(n) = nF(1)$이고, 이것이 보이려던 것이다.

(같은 내용을 다르게 말하면, f가 연속일 때 $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$이고 $F(n)$은 $[k, k+1]$ 위의 적분 n개의 합인데, 치환 $t \mapsto t+k$를 하면 각 적분은 $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$와 같다. 위의 논증은 F를 적분으로 나타낼 필요조차 없게 해 준다.)

소문항 (iii)

이 방정식은 y에 대하여 선형이고, 적분인자는 $\mathrm{e}^{\int f\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{F(x)}$이다. 바로 여기서 F가 등장한다. 실제로 곱의 미분법(product rule)과 $F' = f$에 의해

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y\,\mathrm{e}^{F(x)}\right) = \mathrm{e}^{F(x)}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + f(x)\,y\right) = 0.$$

따라서 $y\,\mathrm{e}^{F(x)}$는 상수이다. $x = 0$에서 그 값은 $1 \cdot \mathrm{e}^{F(0)} = 1$이므로

$$y = \mathrm{e}^{-F(x)}.$$

소문항 (ii)에 의해, 각 양의 정수 n에 대하여

$$y(n) = \mathrm{e}^{-F(n)} = \mathrm{e}^{-nF(1)} = \left(\mathrm{e}^{-F(1)}\right)^n.$$

생각해 보기 $F(1) > 0$임을 어떻게 알 수 있을까? $F(1)$에 대해서는 직접 주어진 정보가 전혀 없다.

모든 x에 대하여 $F'(x) = f(x) > 0$이므로 F는 순증가(strictly increasing)하고, 따라서 $F(1) > F(0) = 0$이다. (적분으로 생각하고 싶다면, $F(1)$은 0과 1 사이에서 양의 곡선 아래의 넓이이다.)

그러므로 $0 < \mathrm{e}^{-F(1)} < 1$이고, $0 < r < 1$인 고정된 수 r에 대하여 $n \to \infty$일 때 $r^n \to 0$이다. 따라서 $n \to \infty$일 때 $y(n) \to 0$이며, 이것이 보여야 할 것이었다.

여기서는 정수에서만 이 사실을 주장했다는 점에 주목하자. 정수 사이에서 y는 조여진다. F가 증가하므로 y는 감소하고, 따라서 실제로는 x가 모든 실수값을 거쳐 $x \to \infty$일 때에도 $y(x) \to 0$이다.

검산

$f(x) = 2 + \sin(2\pi x)$일 때, 사인함수는 한 주기 전체에서 적분하면 0이 되므로 $F(1) = \int_0^1 (2 + \sin 2\pi t)\,\mathrm{d}t = 2$이다. 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 $F(2), F(3), F(5), F(7)$은 10^{-12}보다 작은 오차로 각각 $4, 6, 10, 14$이다. 미분방정식을 $y(0) = 1$에서 시작하여 수치적으로(4차 룽게–쿠타(Runge–Kutta) 방법) 풀어 나가면 $y(1) \approx 0.135335 = \mathrm{e}^{-2}$이고 $y(4) \approx 3.3546 \times 10^{-4} = \mathrm{e}^{-8}$이어서 $\mathrm{e}^{-nF(1)}$과 일치한다. 또한 덜 대칭적인 예 $f(x) = \mathrm{e}^{\cos 2\pi x} + 0.1$에 대해서도 정수가 아닌 x에서 $F(x+1) - F(x) = F(1)$임을 확인하였다.

흔한 실수

- $[k, k+1]$ 위의 넓이가 $[0,1]$ 위의 넓이와 같은 이유를 보이지 않고, 주기성으로부터 $F(n) = nF(1)$이 "자명하다"고 쓰는 것. 함수 $G(x) = F(x+1) - F(x)$나 치환이 필요하다.
- $F(1) > 0$임을 정당화하는 것을 잊는 것. 이것이 없으면 $\mathrm{e}^{-nF(1)}$은 1에 머물거나 한없이 커질 수도 있다.
- 적분인자의 부호를 잘못 잡아 $y = \mathrm{e}^{F(x)}$로 끝내는 것. 이 함수는 감소하지 않고 증가한다.

STEP 너머

이것은 **플로케 이론**(*Floquet theory*)의 가장 간단한 경우이다. 주기적인 계수를 갖는 선형 미분방정식에서 한 주기가 지난 뒤의 해는 처음 값에 고정된 인수(여기서는 $\mathrm{e}^{-F(1)}$)를 곱한 것이므로, 장기적인 거동은 그 인수가 1보다 작은지 큰지에 따라 결정된다. 수 대신 행렬(matrix)을 쓰면 같은 아이디어로, 받침점이 위아래로 흔들리는 진자의 안정성을 설명

할 수 있다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 선형 방정식과 적분인자를 충실하게 다루고 있어 다음 단계로 읽기에 좋다.

풀이

STEP II 2001, 문제 9

역학 • 속도의 제곱에 비례하는 공기 저항

STEP II 2001, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

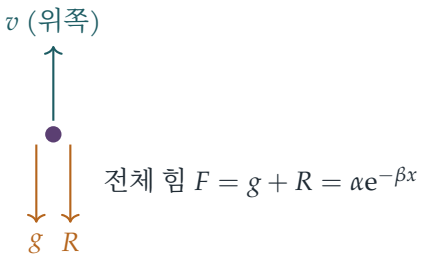
step.maths.org/questions/01-s2-q9

핵심 아이디어

힘이 시간이 아니라 **높이**의 함수로 주어져 있으므로, 자연스러운 도구는 일–에너지 원리(work–energy principle)이다. 올라가는 동안 F에 맞서 한 일은 정확히 잃어버린 운동 에너지(kinetic energy)와 같다. 이로써 $e^{-\beta x}$와 v^2가 연결되고, 그 결과 공기 저항(air resistance)이 속력에만 의존한다는 사실이 드러난다. 속력으로 표현된 저항 법칙을 알고 나면, 내려오는 운동은 v^2에 대한 표준적인 미분방정식(differential equation)이 된다.

풀이

모형. 입자의 질량은 단위 질량이고 연직선 위에서 움직인다. 올라가는 동안에는 중력과 공기 저항이 모두 운동과 반대 방향인 아래쪽으로 작용하므로, 전체 힘 F(크기 $\alpha e^{-\beta x}$)는 아래쪽으로 작용한다. 던진 점을 원점으로 하여 위쪽으로 x를 잡는다.



소모된 에너지

높이 x에 도달하는 데 소모된 에너지는 F에 맞서 한 일이다.

$$\int_0^x \alpha \mathrm{e}^{-\beta s}\,\mathrm{d}s = \frac{\alpha}{\beta}\Big(1-\mathrm{e}^{-\beta x}\Big).$$

이 에너지는 입자의 운동 에너지에서 나오므로, 일–에너지 원리에 의해 (단위 질량)

$$\tfrac{1}{2}u^2 - \tfrac{1}{2}v^2 = \frac{\alpha}{\beta}\Big(1-\mathrm{e}^{-\beta x}\Big). \qquad (*)$$

(같은 방법으로, 뉴턴의 운동 제2법칙(Newton's second law)을 $v\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\alpha \mathrm{e}^{-\beta x}$의 꼴로 쓰고 $x=0, v=u$에서부터 적분해도 같은 식을 얻는다.)

속력으로 나타낸 힘

$(*)$에 β를 곱하고 정리하면

$$\alpha - \alpha \mathrm{e}^{-\beta x} = \tfrac{1}{2}\beta u^2 - \tfrac{1}{2}\beta v^2 \quad\Longrightarrow\quad F = \alpha \mathrm{e}^{-\beta x} = \tfrac{1}{2}\beta v^2 + \alpha - \tfrac{1}{2}\beta u^2,$$

이므로 요구된 결과를 얻는다.

> **생각해 보기** 왜 $\alpha = \frac{1}{2}\beta u^2 + g$이어야 할까? 문제의 어디에도 이를 강제하는 조건은 없어 보인다.

F를 두 부분으로 나누자. $F = g + R$이고, 여기서 R는 공기 저항이다. 그러면

$$R = F - g = \tfrac{1}{2}\beta v^2 + \Big(\alpha - \tfrac{1}{2}\beta u^2 - g\Big).$$

따라서 저항은 속력만의 함수로, v^2 항에 상수를 더한 꼴이다. 공기 저항은 공기 속을 움직이기 때문에 생기는 것이므로, 입자가 순간적으로 정지하는 최고점에서는 0이 되어야 한다. 그곳에서 $v=0$으로 놓으면 $R=0$이므로 $F=g$(중력만 작용)이고

$$\alpha - \tfrac{1}{2}\beta u^2 = g, \qquad \text{즉,} \qquad \alpha = \tfrac{1}{2}\beta u^2 + g.$$

결과적으로 상수항은 0이고, 저항 법칙은 단순히

$$R = \tfrac{1}{2}\beta v^2.$$

(참고로, 최고점은 $\alpha \mathrm{e}^{-\beta x} = g$인 곳으로, 그 높이는 $\frac{1}{\beta}\ln(\alpha/g)$이다.)

내려오는 운동

운동 방향에 관계없이 같은 저항 법칙 $R = \frac{1}{2}\beta v^2$가 성립한다고 가정한다. 내려오는 동안 저항은 운동을 방해하므로 **위쪽**으로 작용하고, 중력은 여전히 아래쪽으로 작용한다. 최고점

에서 아래로 잰 거리를 y, 아래쪽 속력을 v라 하고, $y = 0$에서 $v = 0$이라 하자. 아래쪽을 양의 방향으로 하여 뉴턴의 운동 제2법칙(단위 질량)을 쓰면

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = g - \tfrac{1}{2}\beta v^2.$$

$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(v^2)$이므로 $w = v^2$로 놓으면

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y} = 2g - \beta w, \qquad w = 0 \text{ (위치) } y = 0.$$

이것은 상수 계수 선형 미분방정식이다(또는 변수분리(separation of variables)를 해도 된다). 그 해는

$$w = \frac{2g}{\beta}\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta y}\right),$$

이고, 실제로 $w(0) = 0$과 $w' = 2g\mathrm{e}^{-\beta y} = 2g - \beta w$를 만족한다. 따라서 최고점에서 아래로 거리 y인 곳에서의 공기 저항은

$$R = \tfrac{1}{2}\beta v^2 = g\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta y}\right).$$

검산

$y \to \infty$일 때 $R \to g$이다. 즉, 입자는 저항과 중력이 평형을 이루는 종단 속력(terminal speed) $\sqrt{2g/\beta}$에 가까워진다. $y = 0$에서는 $R = 0$으로, 정지 상태에서 당연히 그래야 하는 값이다. 올라가는 동안, $x = 0$에서 공식은 $F = \alpha = g + \frac{1}{2}\beta u^2$를 주는데, 이는 중력에 속력 u에서의 저항을 더한 값이다. 수치적으로, $g = 9.8$, $\beta = 0.1$, $u = 20$(따라서 $\alpha = 29.8$)으로 놓고 룽게–쿠타 방법(Runge–Kutta method)으로 운동 방정식을 단계별로 계산하면, 올라갈 때는 $F = \alpha\mathrm{e}^{-\beta x}$, 내려올 때는 $R = g(1 - \mathrm{e}^{-\beta y})$가 약 10^{-12}의 오차 이내로 재현되고, 입자의 최고 높이는 ≈ 11.12로 $\frac{1}{\beta}\ln(\alpha/g)$와 일치한다.

흔한 실수

- F를 공기 저항만으로 여기는 것. F는 **전체** 힘이므로, R를 구하려면 중력을 빼야 한다.
- 내려올 때도 저항의 부호를 그대로 두는 것. 저항은 항상 운동을 방해하므로 이제는 위쪽으로 작용하고, 방정식은 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = g - \frac{1}{2}\beta v^2$가 된다.
- 답을 v로, 또는 u와 α로 나타내는 것. 문제는 R를 y, g, β만으로 나타내기를 요구한다.

STEP 너머

이차 항력(quadratic drag) $R \propto v^2$는 공기 속에서 빠르게 움직이는 물체에 대한 현실적인 모형이며, 이 문제는 깔끔한 요령 하나를 보여 준다. 시간에 대한 v의 방정식은 선형이 아니지만, 거리에 대한 v^2의 방정식은 **선형**이라는 것이다. 대학 역학에서는 올라갔다 내려오는 문제가 비대칭적이라는 점도 다룬다. 입자는 u보다 작은 속력으로 출발점에 돌아오고, 내려오는 데 걸리는 시간이 올라가는 데 걸리는 시간보다 길다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 속도에 의존하는 힘과 종단 속도를 자세히 다룬다.

풀이

STEP II 2001, 문제 10

역학 • 충돌과 반발계수

STEP II 2001, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/01-s2-q10

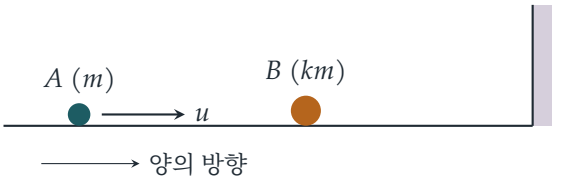
핵심 아이디어

이 문제는 두 번의 충돌과 한 번의 경주로 이루어져 있다. 첫 번째 충돌은 표준적인 두 방정식, 즉 운동량 보존(conservation of momentum)과 뉴턴(Newton)의 실험 법칙(Newton's experimental law)으로 다룬다. B가 벽에 부딪혀 튕겨 나온 뒤에 남는 질문은 단 하나, 되돌아오는 B가 A와 만날 수 있는가이다. 이는 벽을 향하는 A의 속도가 B의 속도보다 클 때, 그리고 그때에만 일어나며, 이 조건이 k에 대한 부등식이 된다. 에너지 부분에서는 운동 에너지(kinetic energy)를 k의 함수로 나타내고 $mu^2/27$과 비교한다. 이 비교는 결국 완전제곱식(perfect square)이 된다.

풀이

두 번째 충돌

A와 B를 매끄러운 면 위의 입자로 모형화하여, 수평 방향의 충격량(impulse)은 충돌에서만 생기도록 한다. A에서 벽을 향하는 방향을 양의 방향으로 잡는다. 첫 번째 충돌 직후 A와 B의 속도를 각각 v_A, v_B라 하자.



첫 번째 충돌. 운동량은 보존되고, 멀어지는 속력은 다가가는 속력의 e_1배이다.

$$mv_A + km\,v_B = mu,$$
$$v_B - v_A = e_1 u.$$

두 번째 식에 k를 곱하여 첫 번째 식에 더하면 $(1+k)v_B = (1+e_1)u$를 얻는다. 따라서

$$v_B = \frac{(1+e_1)u}{1+k}, \qquad v_A = v_B - e_1 u = \frac{(1-ke_1)u}{1+k}.$$

$v_B > 0$이므로 B는 계속 벽을 향해 움직인다. A는 $1-ke_1$의 부호에 따라 앞으로 움직이거나, 정지해 있거나, 뒤로 움직일 수 있다.

벽. B는 속력 v_B로 벽에 부딪혀 속력 $e_2 v_B$로 튕겨 나오므로, 속도는 $-e_2 v_B$가 된다. 그동안 A는 일정한 속도 v_A로 계속 움직인다. $v_A < v_B$이고(그 차이는 $e_1 u > 0$이다) A가 B보다 뒤에서 출발하므로, A가 먼저 벽에 닿을 수는 없다는 점에 유의하자.

> **생각해 보기** 튕겨 나온 뒤 A와 B는 같은 방향으로 움직이고 있을 수도 있다. 둘이 만나는지는 어떻게 판단할까?

튕겨 나온 뒤 B는 A와 벽 사이에 있고, 어느 입자에도 다른 힘은 작용하지 않는다. 따라서 둘 사이의 간격이 줄어들 필요충분조건은 A의 속도가 B의 속도보다 큰 것이다.

$$v_A > -e_2 v_B \iff v_A + e_2 v_B > 0.$$

$v_A > 0$이면 둘은 서로를 향해 움직인다. $v_A \le 0$이면 B가 A를 뒤쫓는 것이고, B가 더 빠를 때에만 A를 따라잡는다. 하나의 부등식이 두 경우를 모두 포함한다. 대입하고 양수 $(1+k)/u$를 곱하면

$$1 - ke_1 + e_2(1+e_1) > 0 \iff k < \frac{1+e_2(1+e_1)}{e_1},$$

를 얻는다. 마지막 단계에서는 $e_1 > 0$으로 나누었다. 따라서 이 부등식이 성립하면 두 번째 충돌이 일어나며, 이것이 보이려던 것이다. (등호가 성립하면 A와 B는 같은 속도로 움직여 결코 만나지 않는다.)

운동 에너지

$e_1 = \frac{1}{3}, e_2 = \frac{1}{2}$이면

$$v_A = \frac{(3-k)u}{3(1+k)}, \qquad e_2 v_B = \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{4}{3}u}{1+k} = \frac{2u}{3(1+k)}.$$

B가 튕겨 나온 직후 A의 속력은 여전히 $|v_A|$이고 B의 속력은 $e_2 v_B$이다. 따라서 전체 운동 에너지는

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2}mv_A^2 + \tfrac{1}{2}km\,(e_2 v_B)^2 \\ &= \frac{mu^2}{18(1+k)^2}\left[(3-k)^2 + 4k\right] = \frac{mu^2\,(k^2-2k+9)}{18(1+k)^2}. \end{aligned}$$

이제 공통분모 $54(1+k)^2$을 써서 $mu^2/27$과 비교한다.

$$\begin{aligned} T - \frac{mu^2}{27} &= \frac{mu^2}{54(1+k)^2}\left[3(k^2-2k+9) - 2(1+k)^2\right] \\ &= \frac{mu^2}{54(1+k)^2}\left(k^2-10k+25\right) = \frac{mu^2\,(k-5)^2}{54(1+k)^2}. \end{aligned}$$

? 생각해 보기 제곱은 결코 음수가 아닌데, $k<5$라는 조건은 무엇을 위한 것일까?

우변은 결코 음수가 아니며, $k=5$일 때에만 0이다. 따라서 $k<5$이면 $(k-5)^2>0$이고, 그러므로

$$T > \frac{mu^2}{27},$$

이며, 이것이 보이려던 것이다. 값 5는 우연이 아니다. 이 계수들로 첫 번째 부분의 경계를 계산하면 $\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\right)/\frac{1}{3}=5$이다. 즉 $k<5$는 정확히 두 번째 충돌이 일어날 조건이다. $k=5$이면 튕겨 나온 뒤 두 입자가 모두 $-u/9$로 움직이고, 에너지는 정확히 $mu^2/27$이다.

검산

- $e_1=1, k=1$로 두자(질량이 같고 완전 탄성 충돌(perfectly elastic)인 경우). 그러면 $v_A=0, v_B=u$로, 익숙한 속도의 교환이 일어난다. 경계는 $k<1+2e_2$가 되며, $e_2>0$이기만 하면 $k=1$은 이를 만족한다. 즉 되돌아오는 B는 정지한 A와 반드시 충돌한다.
- $k=5$일 때 공식은 $v_A=-\frac{u}{9}$, $-e_2 v_B=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2u}{9}=-\frac{u}{9}$를 주므로, 앞서 말한 대로 두 속도가 같다.
- 수치적으로, k를 0.001부터 4.999까지 정확한 분수로 계산하면 비 $T/(mu^2/27)$의 최솟값은 $k=5$ 근처에서 1.00000001이고, 항상 1보다 크다. (k, e_1, e_2)의 순서쌍 20 000개를 무작위로 시험했을 때, 부등식의 판정과 튕겨 나온 뒤의 속도를 직접 비교한 결과가 어긋나는 경우는 없었다.

흔한 실수

- $v_A>0$을 요구하는 것. A는 뒤로 움직이면서도 B에게 따라잡힐 수 있다. 올바른 조건은 튕겨 나온 뒤의 두 속도를 비교하는 것이다.

- 벽이 B의 방향을 뒤집는다는 것을 잊는 것. B의 속도는 $e_2 v_B$가 아니라 $-e_2 v_B$가 된다.
- 에너지 계산에 벽에 부딪히기 전 B의 속력을 쓰는 것. 문제는 튕겨 나온 직후의 에너지를 묻고 있으므로, B의 속력은 $e_2 v_B$이다.

STEP 너머

뉴턴의 실험 법칙은 충돌하는 동안 짧고 격렬하게 일어나는 변형을 설명하는 하나의 모형이다. 반발 계수(coefficient of restitution)는 상대 운동 에너지 중 얼마만큼이 손실되는지를 요약한다. 대학 1학년 역학 강의에서는 충돌을 질량 중심 좌표계(centre-of-mass frame)에서 분석하는 경우가 많다. 이 좌표계에서 충돌은 단순히 상대 속도의 방향을 뒤집고 그 크기에 e를 곱하는 것이며, 손실되는 에너지는 $\frac{1}{2}\mu(1-e^2)w^2$이다. 여기서 μ는 환산 질량(reduced mass)이고 w는 다가가는 속력이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 내용을 꼼꼼하게 전개한다.

풀이

STEP II 2001, 문제 11

역학 • 포물체 운동

STEP II 2001, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

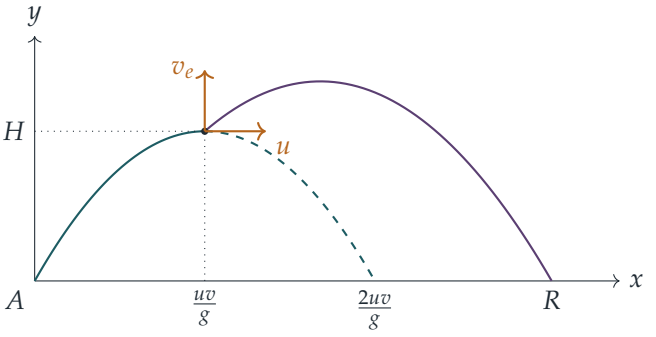
step.maths.org/questions/01-s2-q11

핵심 아이디어

비행을 폭발 시점에서 둘로 나눈다. 폭발 전에는 평범한 포물체(projectile)이고, 최고점은 연직 방향 속도가 0이 되는 곳이다. 폭발 후에는 조각 P가 그 높이에서 속도 (u, v_e)로 발사된 새로운 포물체이므로, 착지까지 걸리는 시간은 이차방정식(quadratic)에서 나온다. 두 번째 부분에서는 도달 거리(range)가 v_e의 증가함수(increasing function)이므로, "$R > D$"는 "v_e가 정확히 $R = D$가 되게 하는 값보다 크다"로 바뀐다.

풀이

미사일과 조각 P를 중력만 받아 움직이는 질점(particle)으로 모형화하고, 지면은 수평이라고 한다. A를 원점으로, x를 수평 방향, y를 연직 위쪽 방향으로 잡는다.



점선 곡선은 폭발이 없었다면 미사일이 따라갔을 경로이고, 보라색 곡선은 P의 경로이다.

P의 도달 거리

폭발까지. 연직 방향 속도는 $v - gt$이고, 이는 $t_1 = v/g$에서 0이 된다. 그 순간 미사일이 수평으로 이동한 거리는

$$x_1 = ut_1 = \frac{uv}{g},$$

이고, 높이는 나중 연직 속력이 0이라는 것과 $v^2 = 2gH$로부터

$$H = \frac{v^2}{2g}.$$

폭발 후. 조각 P는 높이 H에서 수평 속도 u, 위쪽으로 연직 속도 v_e를 가지고 출발한다. 시간 t를 폭발 순간부터 재면, 높이는

$$y = H + v_e t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

$y = 0$일 때 착지한다.

$$\tfrac{1}{2}gt^2 - v_e t - \frac{v^2}{2g} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad g^2t^2 - 2gv_e t - v^2 = 0.$$

이를 gt에 대한 이차방정식으로 보면

$$gt = v_e \pm \sqrt{v_e^2 + v^2}.$$

두 근의 곱이 $-v^2 < 0$이므로 한 근은 음수이다. 그 근은 포물선이 폭발 **이전**에 지면과 만났을 시각이므로 관계가 없다. 따라서 폭발 후의 비행 시간은

$$t_2 = \frac{v_e + \sqrt{v_e^2 + v^2}}{g}.$$

수평 속도는 내내 u로 유지되므로, 전체 수평 거리는

$$R = \frac{uv}{g} + ut_2 = \frac{u}{g}\left(v + v_e + \sqrt{v_e^2 + v^2}\right),$$

즉

$$\frac{gR}{u} = v + v_e + \sqrt{v_e^2 + v^2},$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

$R > D$가 되는 조건

다음과 같이 놓는다.

$$f(v_e) = v_e + \sqrt{v_e^2 + v^2}, \qquad k = \frac{gD}{u} - v = \frac{gD - uv}{u}.$$

그러면 $R > D$는 $f(v_e) > k$와 동치이다. $D > 2uv/g$이므로 $gD > 2uv$이고, 따라서 $k > v > 0$이다.

? 생각해 보기 왜 $R = D$가 되게 하는 v_e의 값 하나만 찾으면 충분한가?

f가 순증가(strictly increasing)하기 때문이다.

$$f'(v_e) = 1 + \frac{v_e}{\sqrt{v_e^2 + v^2}} > 0,$$

여기서 $v \neq 0$이면 $|v_e| < \sqrt{v_e^2 + v^2}$임을 썼다. (물리적으로는 위로 더 세게 밀어 줄수록 P가 공중에 더 오래 머문다.) 따라서 $f(v_e^*) = k$이면, $f(v_e) > k$인 것은 정확히 $v_e > v_e^*$일 때이다.

v_e^*를 구하기 위해 $\sqrt{v_e^2 + v^2} = k - v_e$를 푼다. 양변을 제곱하면

$$v_e^2 + v^2 = k^2 - 2kv_e + v_e^2 \quad \Longrightarrow \quad v_e^* = \frac{k^2 - v^2}{2k} = \frac{(k-v)(k+v)}{2k}.$$

제곱하면 거짓 근(false root)이 생길 수 있으므로 $k - v_e^* \geq 0$인지 확인한다. 실제로 $k - v_e^* = \dfrac{k^2 + v^2}{2k} > 0$이므로, v_e^*는 정말로 $f(v_e^*) = k$를 만족한다.

이제 k를 대입한다.

$$k - v = \frac{gD - 2uv}{u}, \qquad k + v = \frac{gD}{u}, \qquad 2k = \frac{2(gD - uv)}{u},$$

따라서

$$v_e^* = \frac{(gD - 2uv)\, gD/u^2}{2(gD - uv)/u} = \frac{gD}{2u}\left(\frac{gD - 2uv}{gD - uv}\right).$$

그러므로 f가 증가함수이므로

$$v_e > \frac{gD}{2u}\left(\frac{gD - 2uv}{gD - uv}\right),$$

이면 $R > D$이고, 이것이 구하는 조건이다. 사실 위 논증은 이 조건이 필요조건(necessary condition)이기도 함을 보여 준다. $k > v$이므로 $v_e^* > 0$이고, 따라서 실제로 위쪽으로 밀어 주는 힘이 필요하다는 점에 주목하라.

검산

- $v_e = 0$이면 공식은 $gR/u = 2v$, 즉 $R = 2uv/g$를 준다. 이는 폭발하지 않은 포물체의 일반적인 도달 거리로, 마땅히 그래야 한다. 문제에서 $D > 2uv/g$를 가정하는 이유도 이것이다. 그렇지 않으면 밀어 줄 필요가 없기 때문이다.
- $u = v = 10$, $g = 10$, $D = 30$이면 경계값은 $v_e^* = \frac{300}{20} \cdot \frac{100}{200} = 7.5$이고, 이때 $gR/u = 10 + 7.5 + 12.5 = 30$이므로 정확히 $R = 30 = D$이다.
- 두 단계 비행을 수치적으로 한 단계씩 모의 실험한 결과는 도달 거리 공식과 약 10^{-9} 이내로 일치했고, 무작위 사례 10^5개에서 $R > D$인 것이 정확히 $v_e > v_e^*$일 때임을 확인했다.

흔한 실수

- 폭발 전에 이동한 수평 거리 uv/g를 빠뜨리고, R을 A가 아니라 폭발 지점 바로 아래 점부터 재는 것.
- 최고점에서 착지까지 걸리는 시간을 다시 v/g로 잡아, 새로 생긴 위쪽 속도 v_e를 무시하는 것.
- $\sqrt{v_e^2 + v^2} = k - v_e$를 제곱하면서 우변이 음이 아닌지 확인하지 않거나, 등식이 성립하는 값 하나가 왜 부등식으로 바뀌는지 설명하지 않는 것.

STEP 너머

폭발은 계 전체의 운동량(momentum)을 보존하므로, P는 원래 포물선을 따르지 않더라도 두 조각의 질량중심(centre of mass)은 원래 포물선을 따라 계속 움직인다. 내력은 질량중심의 운동을 바꿀 수 없다는 이 원리는 대학 1학년 역학 과목에서 로켓 운동과 충돌을 다루는 출발점이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 두 주제를 모두 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP II 2001, 문제 12

확률과 통계 • 푸아송 근사

> **STEP II 2001, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/01-s2-q12

핵심 아이디어

공동 구매단(syndicate)은 당첨 복권을 정확히 한 장 갖는 것이 보장되므로, 모든 것은 다른 참가자들 가운데 몇 명이 당첨 번호를 골랐는가에 달려 있다. 이 개수는 시행 횟수가 매우 크고 성공 확률이 매우 작은 이항분포(binomial distribution)를 따르는데, 이것이 바로 푸아송 분포(Poisson distribution)가 대신 쓰이는 상황이다. 그러면 기대 배당액은 W에 $1/(1+X)$의 기댓값(expectation)을 곱한 것이 되고, 이 합은 $k+1$을 계승(factorial)에 흡수시켜 닫힌 형태로 계산할 수 있다.

풀이

설정하기

공동 구매단은 복권을 N장 샀으므로, 다른 참가자들은 복권을 $3.8N - N = 2.8N$장 샀다. 공동 구매단이 사지 않은 이 복권들 가운데 당첨 번호가 적힌 복권의 수를 X라 하자.

공동 구매단에 속하지 않은 각 참가자는 다른 참가자들과 추첨에 독립적으로 번호를 균등하게 무작위로 고르므로, 당첨 번호가 무엇이든 그들의 복권 한 장 한 장은 독립적으로 확률 $1/N$로 당첨 번호와 일치한다. 따라서

$$X \sim \mathrm{B}\left(2.8N,\ \tfrac{1}{N}\right).$$

N이 매우 크므로 $2.8N$은 크고 $1/N$은 작은 반면 평균 $2.8N \cdot \frac{1}{N} = 2.8$은 고정되어 있다. 따라서 X는 근사적으로 평균이 $\lambda = 2.8$인 푸아송 분포를 따른다.

$$\mathrm{P}(X = k) \approx \frac{\mathrm{e}^{-2.8}\,(2.8)^k}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

공동 구매단은 각 번호의 복권을 정확히 한 장씩 갖고 있으므로 언제나 당첨 복권을 정확히

한 장 가지며, 당첨 복권의 총수는 $T = 1 + X$이다.

가장 가능성 높은 당첨 복권의 수

$p_k = \mathrm{P}(X = k)$라 하자. 이웃한 확률을 비교하면

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = \frac{\lambda}{k} = \frac{2.8}{k},$$

이고, 이 값은 $k \leq 2$일 때 1보다 크고 $k \geq 3$일 때 1보다 작다. 그러므로 $p_0 < p_1 < p_2$이고 $p_2 > p_3 > p_4 > \cdots$이며, X의 가장 가능성 높은 값은 2이다. (정확한 이항분포에서도 마찬가지이다. 이 경우 $p_k / p_{k-1} = \frac{(2.8N-k+1)}{k(N-1)}$이고, 이 값은 정확히 $k < 2.8 + \frac{1}{N}$일 때 1보다 크다.)

따라서 가장 가능성 높은 당첨 복권의 수는

$$T = 1 + 2 = 3.$$

기대 순손실

당첨금은 $T = 1 + X$장의 당첨 복권에 똑같이 나뉘고 공동 구매단은 그중 한 장을 가지므로, 공동 구매단은 $\dfrac{W}{1+X}$를 받는다. 공동 구매단은 £N을 지불했으므로 순손실은

$$L = N - \frac{W}{1+X}, \qquad \text{그리고} \qquad \mathrm{E}(L) = N - W\,\mathrm{E}\left(\frac{1}{1+X}\right).$$

? **생각해 보기** $\sum \frac{1}{k+1} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$를 어떻게 더할까?

요령은 $(k+1) \cdot k! = (k+1)!$이므로 다루기 까다로운 인수 $\frac{1}{k+1}$이 계승에 합쳐진다는 것이다. λ를 곱하고 나누면 이 합은 한 항이 빠진 푸아송 급수가 된다.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(\frac{1}{1+X}\right) &\approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}\left(\mathrm{e}^{\lambda} - 1\right) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda},\end{aligned}$$

여기서 $j = k + 1$로 놓고 $\sum_{j \geq 0} \lambda^j / j! = \mathrm{e}^{\lambda}$를 이용하여, 값이 1인 $j = 0$ 항을 뺐다.

$\lambda = 2.8 = \frac{14}{5}$이면 이 값은 $\frac{5}{14}\left(1 - \mathrm{e}^{-2.8}\right)$이므로

$$\mathrm{E}(L) \approx N - \frac{5\left(1 - \mathrm{e}^{-2.8}\right)}{14} W,$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

검산

- 같은 요령이 정확한 이항분포 $X \sim \mathrm{B}(n, p)$에도 통한다. $\mathrm{E}\left(\frac{1}{1+X}\right) = \dfrac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}$이고, 이 값은 $np = \lambda$를 유지하며 $n \to \infty$일 때 $(1-\mathrm{e}^{-\lambda})/\lambda$로 수렴한다. $N = 1000$일 때 정확한 값은 0.33536이고, 푸아송 근삿값은 $\frac{5}{14}(1-\mathrm{e}^{-2.8}) \approx 0.33542$이다.
- $N = 200$으로 추첨을 10^5번 모의실험하였더니 평균 배당액은 $0.335W$였고, 당첨 복권이 3장인 경우가 가장 자주 나타났다.
- 극한의 경우: 아무도 참가하지 않았다면$(\lambda \to 0)$ $(1-\mathrm{e}^{-\lambda})/\lambda \to 1$이고, 마땅히 그래야 하듯 공동 구매단이 당첨금 전부를 가져간다.

흔한 실수

- 다른 참가자들의 복권 수로 $2.8N$ 대신 $3.8N$을 쓰는 것. 공동 구매단의 복권은 무작위가 아니며, 정확히 한 장의 당첨 복권을 보탠다.
- $\mathrm{E}\left(\frac{W}{1+X}\right) = \frac{W}{1+\mathrm{E}(X)} = \frac{W}{3.8}$로 쓰는 것. 기댓값은 비선형 함수를 그대로 통과하지 않는다. 실제로 $\frac{1}{3.8} \approx 0.263$은 0.335보다 눈에 띄게 작다. $(1/(1+x)$가 볼록(convex)하므로, 옌센 부등식(Jensen's inequality)에 따르면 이 값은 더 클 수 없다.)

STEP 너머

$\mathrm{B}(n, \lambda/n)$을 $\mathrm{Po}(\lambda)$로 근사하는 것을 "희귀 사건의 법칙(law of rare events)"이라 하며, 대학 1학년 과정에서는 확률들 또는 확률생성함수(probability generating function)가 수렴함을 보여 이를 증명한다. $\mathrm{E}\big(1/(1+X)\big)$의 계산은 사실 생성함수의 적분 $\int_0^1 G_X(s)\,\mathrm{d}s$이며, 이는 평균과 분산 계산을 넘어서는 생성함수의 멋진 활용이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)에서 두 아이디어를 모두 다룬다.

풀이

STEP II 2001, 문제 13

확률과 통계 • 연속 분포와 추정

STEP II 2001, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/01-s2-q13

핵심 아이디어

생존 함수(survival function) $\mathrm{P}(T > t)$가 직접 주어져 있으므로, 중앙값(median)은 이것을 $\frac{1}{2}$과 같게 놓아 구하고, 평균(mean)은 미분하여 확률밀도함수(probability density function)를 얻은 뒤 적분하여 구한다. 실험에서는 표본 중앙값(sample median)(크기순으로 늘어놓은 아홉 개의 수명 중 다섯 번째)과 표본평균(sample mean)이 주어지고, 이것을 공식과 맞추면 α와 k에 대한 두 방정식을 얻는다. 한 식을 다른 식으로 나누면 k가 사라지고 α만의 방정식이 남는다. 마지막 확률은 조건부 확률(conditional probability)이며, 그곳에서 반가운 놀라움이 기다리고 있다.

풀이

중앙값과 평균

$t \geq 0$에 대하여 $S(t) = \mathrm{P}(T > t) = (1+kt)^{-\alpha}$라 하자. 이 값이 1에서 0으로 감소하려면 $k > 0$이어야 한다.

중앙값. 중앙값 M은 $\mathrm{P}(T > M) = \frac{1}{2}$을 만족하므로

$$(1+kM)^{\alpha} = 2 \quad \Longrightarrow \quad 1 + kM = 2^{1/\alpha} \quad \Longrightarrow \quad M = \frac{2^{1/\alpha} - 1}{k}.$$

평균. 누적분포함수(cumulative distribution function)는 $F(t) = 1 - (1+kt)^{-\alpha}$이므로 확률밀도함수는

$$f(t) = F'(t) = \alpha k\,(1+kt)^{-\alpha-1}, \qquad t \geq 0.$$

이제 $u = t$, $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = \alpha k(1+kt)^{-\alpha-1}$로 놓고, 즉 $v = -(1+kt)^{-\alpha}$로 하여 부분적

분(integration by parts)하면

$$m = \int_0^\infty t\,\alpha k(1+kt)^{-\alpha-1}\,\mathrm{d}t = \Big[-t(1+kt)^{-\alpha}\Big]_0^\infty + \int_0^\infty (1+kt)^{-\alpha}\,\mathrm{d}t$$
$$= 0 + \left[-\frac{(1+kt)^{1-\alpha}}{k(\alpha-1)}\right]_0^\infty = \frac{1}{k(\alpha-1)}.$$

무한대에서의 두 극한은 모두 $\alpha > 1$을 사용한다. $t(1+kt)^{-\alpha}$는 $t^{1-\alpha}/k^\alpha \to 0$처럼 행동하고, $(1+kt)^{1-\alpha} \to 0$이다. ($\alpha \le 1$이면 평균이 무한대가 되며, 문제에서 $\alpha > 1$을 굳이 요구하는 것은 이 때문이다.) 따라서

$$M = \frac{2^{1/\alpha}-1}{k}, \qquad m = \frac{1}{k(\alpha-1)}.$$

α와 k의 추정

전구가 아홉 개이므로, 다섯 번째 고장은 크기순으로 늘어놓은 아홉 개의 수명 중 한가운데 값이다. 즉 이것이 **표본 중앙값**이다. 따라서 $M \approx 1000$으로 추정하고, 표본평균으로부터 $m \approx 2400$으로 추정한다.

> **생각해 보기** 방정식이 두 개, 미지수가 두 개이지만 k가 두 식 모두에 들어 있다. 어떻게 하면 α만 따로 얻을 수 있을까?

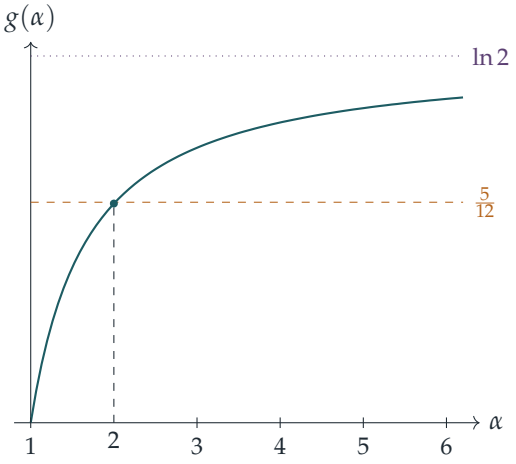
나누면 된다. M과 m이 모두 $1/k$에 비례하므로 k가 약분된다. 그러면

$$\frac{M}{m} = \left(2^{1/\alpha}-1\right)(\alpha-1) \approx \frac{1000}{2400} = \frac{5}{12} \approx 0.4167.$$

좌변을 $g(\alpha)$라 하자. $\alpha = 2$에서

$$g(2) = \left(\sqrt{2}-1\right)(2-1) = \sqrt{2}-1 \approx 0.4142,$$

이며, 이는 $5/12$과의 차이가 0.003 이내이다. 다른 값이 이보다 잘 맞지 않음을 보이기 위해 $g(1.9) \approx 0.396$, $g(2.1) \approx 0.430$임에 주목하면, 값 $5/12$은 이 둘 사이에 있다. 실제로 g는 $g(1) = 0$에서 시작하여 $\alpha \to \infty$일 때 $\ln 2 \approx 0.693$을 향해 꾸준히 증가하므로(그래프 참고), 값 $5/12$을 2보다 조금 큰 α에서 단 한 번만 가진다. 따라서 $\alpha \approx 2$이다.



이제 $\alpha = 2$를 어느 한 공식에 다시 대입한다. 평균으로부터

$$k = \frac{1}{m(\alpha - 1)} \approx \frac{1}{2400},$$

이고, 중앙값으로부터 $k = (\sqrt{2} - 1)/1000 \approx 4.14 \times 10^{-4}$이다. 두 값은 거의 일치하며,

$$k \approx 4.2 \times 10^{-4} \text{ (시간당)}.$$

조건부 확률

M시간 동안 작동한 뒤 다시 $m - M$시간 더 작동한 전구는 모두 합쳐 m시간 동안 작동한 것이다. $m > M$이므로 사건 $\{T > m\}$은 $\{T > M\}$에 포함되고, 따라서

$$\mathrm{P}(T > m \mid T > M) = \frac{\mathrm{P}(T > m)}{\mathrm{P}(T > M)} = \frac{(1 + km)^{-\alpha}}{1/2} = \frac{2}{(1 + km)^{\alpha}}.$$

(엄밀히 말하면 전구가 M시간 시점에 아직 작동하고 있음이 확인된 것이다. 연속적인 수명에서는 $T \geq M$과 $T > M$의 확률이 같다.) 이제 놀라운 점이 나온다. k가 무엇이든 정확히 $km = 1/(\alpha - 1)$이므로 $1 + km = \alpha/(\alpha - 1)$이고

$$\mathrm{P}(T > m \mid T > M) = 2\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right)^{\alpha}.$$

$\alpha = 2$이면 이 값은 $2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$이다. 따라서 추정 확률은

$$\mathrm{P}(\text{앞으로} m - M\text{시간 더 작동함}) \approx \tfrac{1}{2}.$$

이 마지막 단계에서는 k의 추정값이 전혀 필요하지 않다.

검산

- 중앙값에서 $S(M) = (2^{1/\alpha})^{-\alpha} = \frac{1}{2}$이며, 당연히 그래야 한다. 임의의 $\alpha > 1$과 $k > 0$에 대하여 $S(t)$를 $[0, \infty)$에서 수치적분하면 $m = 1/(k(\alpha - 1))$이 재현된다(음이 아닌 확률변수에 대하여 $\mathrm{E}(T) = \int_0^\infty \mathrm{P}(T > t)\,\mathrm{d}t$임을 떠올리자. 이것이 바로 풀이의 두 번째 적분이다).
- $g(\alpha) = 5/12$을 정확히 풀면 $\alpha \approx 2.015$이고, 이때 조건부 확률은 $2(1 - 1/\alpha)^\alpha \approx 0.502$이므로, $\alpha = 2$로 반올림해도 손해가 거의 없다.
- $\alpha = 2$, $k = 1/2400$으로 수명 400 000개를 시뮬레이션한 결과 ($(0,1)$에서 균등분포를 따르는 U에 대하여 $T = (U^{-1/2} - 1)/k$로 놓음) $\mathrm{P}(T > m \mid T > M) \approx 0.501$을 얻었다.

흔한 실수

- $\mathrm{P}(T > t)$를 누적분포함수로 착각하고 음의 부호 없이 미분하여 음수인 "밀도"를 얻는 것.
- 전구가 시각 M에서 새로 시작하는 것처럼 $\mathrm{P}(T > m - M)$을 답하는 것. 이 분포는 비기억성(memoryless)을 갖지 않으므로(그런 분포는 지수분포(exponential distribution)뿐이다), 조건 $T > M$이 중요하다.
- 다섯 번째 고장을 중앙값이 아니라 평균의 추정값으로 사용하는 것.

STEP 너머

이것은 파레토형(Pareto-type) 분포, 곧 로맥스(Lomax) 분포로, 수명과 소득에 대한 표준적인 모형이며 두꺼운 꼬리(heavy tail)를 가진다. $\mathrm{E}(T^r)$은 $r < \alpha$일 때에만 유한하다. 여기서 한 것은 **적률법**(method of moments)이다(엄밀히는 분위수(quantile) 하나와 적률(moment) 하나를 맞춘 것이다). 즉 모형의 요약 통계량이 표본의 요약 통계량과 같아지도록 모수를 고른다. 대학 1학년 통계학에서는 이것을 최대가능도(maximum likelihood)와 비교하고, 전구 아홉 개만으로 얻은 이런 추정값이 얼마나 정확한지를 묻는다. 비율 $\mathrm{P}(T > s + t \mid T > s)$는 신뢰성 이론(reliability theory)에서 쓰이는 생존 함수이다. 여기서는 이 값이 s에 따라 **증가**하므로, 오래된 전구가 새 전구보다 계속 작동할 가능성이 더 크다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)이 다음 단계로 좋은 책이다.

풀이

STEP II 2001, 문제 14

확률과 통계 • 최소분산 추정량

STEP II 2001, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/01-s2-q14

핵심 아이디어

T는 서로 독립인 두 베르누이(Bernoulli) 확률변수의 가중 결합이므로, 그 평균과 분산은 기댓값의 선형성(linearity of expectation)과 독립인 X, Y에 대한 규칙 $\operatorname{Var}(aX+cY) = a^2\operatorname{Var}(X) + c^2\operatorname{Var}(Y)$에서 곧바로 나온다. 가중치는 λ가 무엇이든 평균이 p가 되도록 정해져 있다. 즉 T는 p의 **불편추정량**(*unbiased estimator*)이고, 이 문제는 그중 가장 좋은 것을 구하라는 것이다. 마지막 부분에서는 중심극한정리(central limit theorem)에 의해 $\overline{T}$가 근사적으로 정규분포를 따르며, 평균이 고정된 정규 확률변수는 분산이 가장 작을 때 가장 집중되어 있다.

풀이

T의 평균과 분산

여기서 X와 Y는 다음을 만족하는 베르누이 확률변수이다.

$$\mathrm{E}(X) = p, \quad \operatorname{Var}(X) = p(1-p), \qquad \mathrm{E}(Y) = 2p, \quad \operatorname{Var}(Y) = 2p(1-2p).$$

(확률 q로 값 1을 갖고 그렇지 않으면 0을 갖는 확률변수에 대하여 $\mathrm{E} = q$이고 $\mathrm{E}(\cdot^2) = q$이므로, 분산은 $q - q^2 = q(1-q)$이다.) 기댓값의 선형성에 의해

$$\mathrm{E}(T) = \lambda p + \tfrac{1}{2}(1-\lambda)\cdot 2p = \lambda p + (1-\lambda)p = p,$$

이므로 요구된 결과를 얻는다. 동전들이 서로 독립이므로 X와 Y는 독립이고, 따라서 공분산(covariance) 항이 없으며

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(T) &= \lambda^2\operatorname{Var}(X) + \tfrac{1}{4}(1-\lambda)^2\operatorname{Var}(Y)\\ &= \lambda^2 p(1-p) + \tfrac{1}{2}(1-\lambda)^2 p(1-2p).\end{aligned}$$

분산 최소화하기

$V(\lambda) = \mathrm{Var}(T)$라 하자. 이것은 최고차항의 계수가 양수 $p(1-p) + \frac{1}{2}p(1-2p)$인 λ에 대한 이차식이므로($0 < p < \frac{1}{2}$이므로 두 항 모두 양수이다), $V'(\lambda) = 0$인 곳에서 유일한 최솟값을 갖는다.

$$V'(\lambda) = 2\lambda p(1-p) - (1-\lambda)p(1-2p) = 0.$$

$p > 0$으로 나누고 λ가 있는 항을 모으면

$$\lambda\big[2(1-p) + (1-2p)\big] = 1 - 2p \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{1-2p}{3-4p},$$

이고, 이것이 문제에 주어진 값이다. (여기서 $3 - 4p > 1 > 0$이므로 0으로 나누는 일은 없다.)

최솟값 자체도 필요하다. $a = p(1-p)$, $c = \frac{1}{2}p(1-2p)$라 하면 $V = a\lambda^2 + c(1-\lambda)^2$이고, 이는 $\lambda = c/(a+c)$(위에서 구한 값)에서 최소가 되므로

$$V_{\min} = a\Big(\frac{c}{a+c}\Big)^2 + c\Big(\frac{a}{a+c}\Big)^2 = \frac{ac(a+c)}{(a+c)^2} = \frac{ac}{a+c}.$$

이제 $a + c = \frac{1}{2}p\big[2(1-p) + (1-2p)\big] = \frac{1}{2}p(3-4p)$이고 $ac = \frac{1}{2}p^2(1-p)(1-2p)$이므로

$$V_{\min} = \frac{p(1-p)(1-2p)}{3-4p}.$$

n번 던진 결과의 평균

$T_1, \ldots, T_n$을 n번 던졌을 때의 T의 값이라 하자. 이들은 서로 독립이고, 각각 평균이 p, 분산이 $V(\lambda)$이다. 그러면

$$\mathrm{E}(\overline{T}) = p, \qquad \mathrm{Var}(\overline{T}) = \frac{V(\lambda)}{n}.$$

? **생각해 보기** T는 네 가지 값만 갖는다. 왜 $\overline{T}$를 정규분포로 다루어도 될까?

$\overline{T}$는 분산이 유한하고 서로 독립이며 같은 분포를 따르는 n개의 확률변수의 평균이고 $n > 30$은 충분히 크므로, 중심극한정리에 의해 하나의 T의 분포 모양이 어떠하든 $\overline{T}$는 근사적으로 $\mathrm{N}\big(p, V(\lambda)/n\big)$를 따른다. $\sigma_\lambda = \sqrt{V(\lambda)/n}$, $Z = (\overline{T} - p)/\sigma_\lambda \approx \mathrm{N}(0,1)$이라 하면, 대칭성 $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$를 이용하여

$$\mathrm{P}\big(|\overline{T} - p| < b\big) = \mathrm{P}\Big(|Z| < \frac{b}{\sigma_\lambda}\Big) \approx \Phi\Big(\frac{b}{\sigma_\lambda}\Big) - \Phi\Big(-\frac{b}{\sigma_\lambda}\Big) = 2\Phi\Big(\frac{b}{\sigma_\lambda}\Big) - 1,$$

을 얻는다.

$b > 0$은 고정되어 있고 Φ는 순증가하므로, 이 값은 b/σ_λ가 가장 클 때, 즉 σ_λ가 가장 작을 때 가장 크며, 이는 $V(\lambda)$가 최소일 때이다. 그것은 $\lambda = (1-2p)/(3-4p)$에서 일어나고, 이때

$$\sigma_\lambda^2 = \frac{V_{\min}}{n} = \frac{p(1-p)(1-2p)}{(3-4p)n} = s^2.$$

따라서 λ가 변할 때 $\mathrm{P}\big(|\overline{T} - p| < b\big)$의 최댓값은 근사적으로 $2\Phi(b/s) - 1$이고, 이것이 요구된 결과이다.

검산

- $\lambda = 1$이면 $T = X$이고 공식은 $\mathrm{Var}(T) = p(1-p)$를 준다. $\lambda = 0$이면 $T = \frac{1}{2}Y$이고 공식은 $\frac{1}{4} \cdot 2p(1-2p)$를 준다. 둘 다 옳다.
- $V_{\min}$은 이 두 값보다 작다. 이는 $p(1-p)$에 $\frac{1-2p}{3-4p} < 1$을 곱한 값이기 때문이다. 두 동전을 결합하는 것이 어느 하나만 쓰는 것보다 낫다.
- 수치로 확인해 보자. $p = 0.3$, $n = 100$, $b = 0.03$일 때 최적의 λ는 $\frac{2}{9}$이고, $s \approx 0.0216$, $2\Phi(b/s) - 1 \approx 0.835$이다. 100번 던지기를 40 000회 시행한 모의실험에서는 0.836이 나왔고, $\lambda = 1$(동전 A만 사용)일 때는 약 0.487에 그쳤다.

흔한 실수

- $\mathrm{Var}(\frac{1}{2}(1-\lambda)Y) = \frac{1}{2}(1-\lambda)\,\mathrm{Var}(Y)$라고 쓰는 것. 상수는 제곱되어 분산 밖으로 나온다.
- 분산을 최소화하면 확률이 최대가 되는 **이유**를 말하지 않는 것. 이를 위해서는 Φ가 증가함수라는 것과, 모든 λ에 대하여 $\overline{T}$의 평균이 p라는 것이 필요하다.

STEP 너머

이것은 추정 이론(estimation theory)의 첫 맛보기이다. p의 모든 불편추정량 $\lambda X + \frac{1}{2}(1-\lambda)Y$ 가운데 분산이 최소인 것을 찾은 것이다. 답은 각 관측값에 그 분산에 반비례하는 가중치를 주는데, 이는 통계학에서 정밀도가 서로 다른 측정값을 결합할 때 쓰는 바로 그 규칙(역분산 가중법, inverse-variance weighting)이며, 최솟값 $ac/(a+c)$는 "병렬 저항" 공식 $1/V_{\min} = 1/a + 1/c$이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 마지막 단계의 바탕이 되는 중심극한정리를 다룬다.

풀이

STEP III 2001, 문제 1

순수수학 • 매클로린 급수

> **STEP III 2001, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/01-s3-q1

핵심 아이디어

함수 $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$는 $\sinh^{-1} x$이고, 그 도함수(derivative)는 함수 자체보다 훨씬 간단하다. 이 도함수를 제곱하면 제곱근이 없는 관계식 $(x^2+1)(y')^2 = 1$을 얻고, 이를 미분하면 점화식(recurrence)의 $n = 0$인 경우가 나온다. 한 번 더 미분할 때마다 점화식이 한 단계씩 올라가는데, 이것이 바로 귀납법(induction)에 필요한 것이다. $x = 0$에서는 x 항이 사라져서 점화식이 $y^{(n+2)}(0)$을 곧바로 $y^{(n)}(0)$과 연결하므로, 매클로린(Maclaurin) 계수가 거의 공짜로 모두 얻어진다.

풀이

도함수

$s = \sqrt{x^2+1}$로 놓으면 $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x}{s}$이다. $s > \sqrt{x^2} = |x|$이므로 모든 실수 x에 대하여 $x + s > 0$이고, 따라서 로그는 어디서나 정의된다. 연쇄 법칙(chain rule)에 의하여

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x+s}\left(1 + \frac{x}{s}\right) = \frac{1}{x+s} \cdot \frac{s+x}{s} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},$$

이므로 요구한 결과를 얻는다.

귀납법

$P(n)$을 다음 명제라 하자.

$$(x^2+1)\,y^{(n+2)} + (2n+1)\,x\,y^{(n+1)} + n^2\,y^{(n)} = 0 \quad \text{모든 실수} x.$$

기저 단계(*base case*), $n = 0$. $(x^2+1)y'' + xy' = 0$을 보여야 한다. 앞부분에서 $(x^2+$

1)$(y')^2 = 1$이다. 이를 x에 대하여 미분하면

$$2x(y')^2 + (x^2+1)\cdot 2y'y'' = 0.$$

$y' = 1/\sqrt{x^2+1}$은 결코 0이 아니므로 $2y'$으로 나눌 수 있고, 그러면 $(x^2+1)y'' + xy' = 0$을 얻는다. 이것이 $P(0)$이다. (또는 $y' = (x^2+1)^{-1/2}$을 직접 미분해도 된다. $y'' = -x(x^2+1)^{-3/2}$이므로 $(x^2+1)y'' = -x(x^2+1)^{-1/2} = -xy'$이다.)

귀납 단계(*inductive step*). 어떤 $k \geq 0$에 대하여 $P(k)$가 성립한다고 가정하자.

$$(x^2+1)\,y^{(k+2)} + (2k+1)\,x\,y^{(k+1)} + k^2\,y^{(k)} = 0.$$

이 식은 모든 x에 대하여 성립하므로 미분할 수 있다. 처음 두 항에 곱의 미분법(product rule)을 쓰면

$$2x\,y^{(k+2)} + (x^2+1)\,y^{(k+3)} + (2k+1)\,y^{(k+1)} + (2k+1)\,x\,y^{(k+2)} + k^2\,y^{(k+1)} = 0.$$

항을 정리하면

$$(x^2+1)\,y^{(k+3)} + (2k+3)\,x\,y^{(k+2)} + (k^2+2k+1)\,y^{(k+1)} = 0,$$

이고, $2k+3 = 2(k+1)+1$이며 $k^2+2k+1 = (k+1)^2$이므로 이것은 정확히 $P(k+1)$이다.

> ? **생각해 보기** $y^{(k+2)}$의 계수는 왜 정확히 2만큼 커질까?

첫째 항에서 (x^2+1)을 미분하면 $2x\,y^{(k+2)}$가 나오고, 이것이 둘째 항에서 나온 $(2k+1)x\,y^{(k+2)}$와 합쳐진다. 마찬가지로 둘째 항의 x를 미분해서 나온 $(2k+1)$이 k^2과 합쳐지는데, k^2+2k+1은 완전제곱식이다. 이 점화식은 자기 자신을 재생산하도록 만들어져 있는 것이다.

$P(0)$이 성립하고 모든 $k \geq 0$에 대하여 $P(k) \Rightarrow P(k+1)$이므로, 귀납법에 의하여 모든 $n \geq 0$에 대하여 $P(n)$이 성립한다.

매클로린 급수

$P(n)$에 $x = 0$을 대입한다. 가운데 항이 사라지고 다음 식이 남는다.

$$y^{(n+2)}(0) = -n^2\,y^{(n)}(0) \qquad (n \geq 0).$$

출발값이 두 개 필요하다. $y(0) = \ln(0+1) = 0$이고 $y'(0) = 1/\sqrt{1} = 1$이다.

짝수 계 도함수. $y(0) = 0$에서 출발하면 점화식에 의하여 $y''(0) = 0$, 이어서 $y^{(4)}(0) = 0$ 등이 된다. 즉 짝수 계 도함수는 모두 0에서 값이 0이다. (이는 y가 기함수(odd function)라는 사

실에서도 나온다. $\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=1$이므로 $y(-x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=-\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$이기 때문이다.)

홀수 계 도함수. $y'(0)=1$에서 출발하면

$$\begin{aligned} y'''(0) &= -1^2\cdot y'(0) = -1,\\ y^{(5)}(0) &= -3^2\cdot y'''(0) = 9,\\ y^{(7)}(0) &= -5^2\cdot y^{(5)}(0) = -225. \end{aligned}$$

? 생각해 보기 $y'''(0)$에서 $y^{(5)}(0)$을 얻으려면 n의 값은 얼마여야 할까?

$n+2=5$인 $y^{(n+2)}$를 얻으려면 $n=3$이어야 하므로, 곱하는 수는 -5^2이 아니라 $-3^2=-9$이다. 곱하는 수에는 **낮은** 쪽 도함수의 계수가 쓰인다.

따라서 매클로린 급수 $y=\sum y^{(k)}(0)\,x^k/k!$는

$$\begin{aligned} y &= x+\frac{-1}{3!}x^3+\frac{9}{5!}x^5+\frac{-225}{7!}x^7+\cdots\\ &= x-\frac{x^3}{6}+\frac{9}{120}x^5-\frac{225}{5040}x^7+\cdots\\ &= x-\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}-\frac{5x^7}{112}+\cdots, \end{aligned}$$

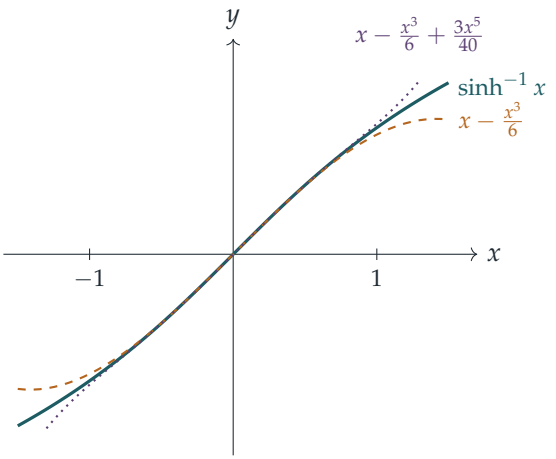
이고, 요구한 대로 시작하며, o이 아닌 그다음 항은

$$-\frac{5x^7}{112}.$$

이다.

다른 방법. 이항급수(binomial series) $(1+x^2)^{-1/2}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4-\frac{5}{16}x^6+\cdots$를 항별로 적분하고($|x|<1$에서 유효하다) $y(0)=0$을 이용하면 $x-\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5-\frac{5}{112}x^7+\cdots$를 얻으며, 결과가 일치한다.

아래 그림은 부분합(partial sum)이 원점 근처에서는 $y=\sinh^{-1}x$에 바짝 붙어 있다가, 더 멀리 가면 번갈아 위로 넘치고 아래로 처지는 모습을 보여 준다.



검산

- $x = 0.1$에 서 $\ln\left(0.1 + \sqrt{1.01}\right) = 0.0998340789$이 고, $x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} - \frac{5x^7}{112} = 0.0998340789$로 역 시 같 다. 차 이 는 약 3×10^{-11}으 로, 그 다 음 (x^9) 항 의 크 기 정 도 이 다.
- $n = 0$인 경우는 $x = 1$에서 쉽게 확인할 수 있다. $y' = 1/\sqrt{2}$이고 $y'' = -1/(2\sqrt{2})$이므로 $2y'' + y' = 0$이다.
- 0에서 홀수 계 도함수의 값은 $1, -1, 9, -225$, 즉 $(-1)^m \left(1 \cdot 3 \cdots (2m-1)\right)^2$이다. 눈여겨 볼 만한 멋진 규칙이다.

흔한 실수

- $y^{(n+2)}(0) = -n^2 y^{(n)}(0)$에 서 n을 잘 못 써 서, 곱 하 는 수 를 $-1, -9, -25$ 대 신 $-9, -25, -49$로 얻는 것.
- $k!$로 나누는 것을 잊는 것. x^7의 계수는 -225가 아니라 $-225/5040$이다.
- 귀납 단계에서 $x^2 + 1$을 미분해서 나오는 $2x\, y^{(k+2)}$를 빠뜨리는 것.

STEP 너머

테일러(Taylor) 급수는 수렴하는 곳에서만 쓸모가 있는데, 이 급수는 $\sinh^{-1} x$가 실수 전체에서 완벽하게 매끄러운 함수인데도 정확히 $|x| \leq 1$에서만 수렴(converge)한다. 그 이유는 복소평면(complex plane)에 있다. $1/\sqrt{1+z^2}$은 원점에서 거리가 1인 $z = \pm i$에서 발산하

며, 바로 이 거리가 수렴 반지름(radius of convergence)이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)가 이를 아름답게 설명한다. 테일러 정리와 그 나머지항에 관한 실변수 쪽의 이야기는 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)를 보라.

풀이

STEP III 2001, 문제 2

순수수학 • 쌍곡선 함수 치환과 넓이

STEP III 2001, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/01-s3-q2

핵심 아이디어

두 부등식(inequality)은 모두 "직각쌍곡선(rectangular hyperbola) 꼴의 곡선의 한쪽에 머문다"는 뜻이므로, 먼저 두 쌍곡선(hyperbola)을 그리고 두 곡선이 만나는 점을 찾는다. 그러면 영역은 유계이고 네 방향으로 대칭인 조각이 되며, 그 넓이는 $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,\mathrm{d}x$ 꼴의 적분(integral) 두 개로 나타난다. 이것은 바로 쌍곡선 치환(hyperbolic substitution)으로 다루기 좋은 적분이며, 앞부분은 그 결과로 나오는 $\cosh^{-1}$ (그리고 $\sinh^{-1}$)의 값을 로그(logarithm)로 바꾸기 위해 있는 것이다.

풀이

$\cosh^{-1} x$의 로그 꼴

$x \geq 1$이라 하고 $y = \cosh^{-1} x$라 하자. 정의에 따라 이는 $\cosh y = x$를 만족하는 음이 아닌 수이다. 그러면

$$x = \frac{\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y}}{2} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{e}^{2y} - 2x\,\mathrm{e}^y + 1 = 0,$$

이고, 이는 e^y에 대한 이차방정식(quadratic equation)이므로

$$\mathrm{e}^y = x \pm \sqrt{x^2 - 1}.$$

? **생각해 보기** 어느 부호를 택해야 하며, 그 이유는 무엇인가?

두 근(root)의 곱은 이차방정식의 상수항인 1이고, 플러스 부호를 택한 근은 1 이상이다. 따라서 마이너스 부호를 택한 근은 1 이하이고, 이 근은 $y \leq 0$을 준다. $y \geq 0$이므로 플러스 부호를 택해야 하며 ($x = 1$일 때는 어차피 두 근이 같다), 따라서

$$\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right),$$

이 되어 요구한 결과를 얻는다. $x = \sinh y$로 놓고 똑같이 논증하면 $e^{2y} - 2x\,e^{y} - 1 = 0$을 얻는다. 이번에는 두 근의 곱이 -1이므로 플러스 부호의 근만 양수이고, 따라서 $\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$이다. 아래에서 두 결과를 모두 사용한다.

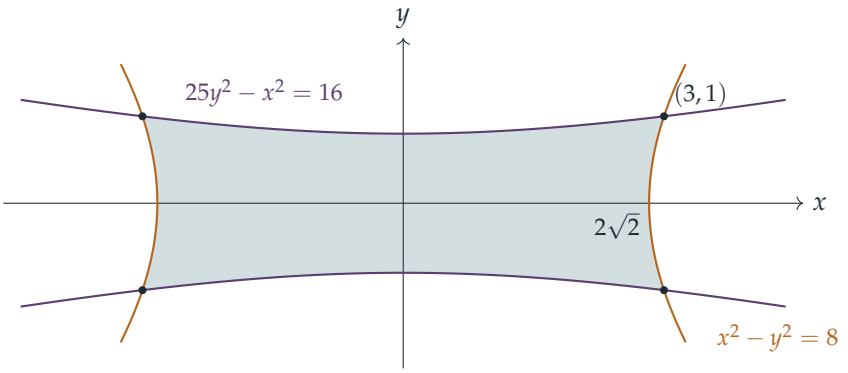
영역

부등식을 다음과 같이 다시 쓴다.

$$x^2 - y^2 \le 8 \qquad \text{그리고} \qquad 25y^2 - x^2 \le 16.$$

곡선 $x^2 - y^2 = 8$은 $(\pm 2\sqrt{2}, 0)$을 지나며 가지가 왼쪽과 오른쪽으로 열린 쌍곡선이다. 첫 번째 부등식은 점이 두 가지의 사이에 있게 한다. 즉 $|x| \le \sqrt{y^2+8}$이다. 곡선 $25y^2 - x^2 = 16$은 $(0, \pm\frac{4}{5})$를 지나며 가지가 위와 아래로 열린 쌍곡선이다. 두 번째 부등식은 점이 이 두 가지의 사이에 있게 한다. 즉 $|y| \le \frac{1}{5}\sqrt{x^2+16}$이다.

두 곡선은 $x^2 = y^2 + 8$이고 $25y^2 = x^2 + 16 = y^2 + 24$인 곳에서 만나므로 $y^2 = 1$, $x^2 = 9$이다. 즉 네 점 $(\pm 3, \pm 1)$에서 만난다.



(색칠한) 영역은 유계(bounded)이다. (x, y)가 이 영역에 속하면 $x^2 \le y^2 + 8 \le \frac{1}{25}(x^2 + 16) + 8$이므로 $x^2 \le 9$이고, 그러면 $y^2 \le \frac{25}{25} = 1$이다. 두 부등식은 모두 $x \mapsto -x$와 $y \mapsto -y$에 대해 변하지 않으므로, 영역은 두 축에 대해 대칭이고 그 넓이는 제1사분면(first quadrant)에 있는 부분의 넓이 A의 네 배이다.

제1사분면에서 영역을 세로로 자른다.

- $0 \le x \le 2\sqrt{2}$이면 $x^2 - 8 \le 0 \le y^2$이므로 첫 번째 부등식은 저절로 성립하고, y는 0부터 $\frac{1}{5}\sqrt{x^2+16}$까지 움직인다.
- $2\sqrt{2} \le x \le 3$이면 y는 $\sqrt{x^2-8}$부터 $\frac{1}{5}\sqrt{x^2+16}$까지 움직인다 (교점을 구한 계산에 따르면, 아래쪽 곡선이 위쪽 곡선보다 아래에 있는 것은 정확히 $x^2 \le 9$일 때이다).

따라서

$$A = \frac{1}{5}\int_0^3 \sqrt{x^2+16}\,\mathrm{d}x \;-\; \int_{2\sqrt{2}}^3 \sqrt{x^2-8}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{5}I_1 - I_2.$$

첫 번째 적분

$x = 4\sinh s$로 치환하면 $\mathrm{d}x = 4\cosh s\,\mathrm{d}s$이고 $\sqrt{x^2+16} = 4\cosh s$이다 ($\cosh s > 0$이므로 양수이다). 적분 구간의 끝은 $s = 0$과 $s = S = \sinh^{-1}\frac{3}{4} = \ln\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{4}\right) = \ln 2$이다. $\cosh^2 s = \frac{1}{2}(\cosh 2s + 1)$을 이용하면

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^S 16\cosh^2 s\,\mathrm{d}s = \int_0^S 8(\cosh 2s + 1)\,\mathrm{d}s = \Big[8\sinh s\cosh s + 8s\Big]_0^S \\ &= 8\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{4} + 8\ln 2 = \tfrac{15}{2} + 8\ln 2, \end{aligned}$$

이다. 여기서 $\sinh S = \frac{3}{4}$이고 $\cosh S = \sqrt{1+\frac{9}{16}} = \frac{5}{4}$이기 때문이다.

두 번째 적분

$t \geq 0$인 $x = 2\sqrt{2}\cosh t$로 치환하면 $\mathrm{d}x = 2\sqrt{2}\sinh t\,\mathrm{d}t$이고 $\sqrt{x^2-8} = 2\sqrt{2}\sinh t$이다 ($t \geq 0$이므로 양수이다). 적분 구간의 끝은 $t = 0$과, 앞부분의 결과에 따라

$$t = T = \cosh^{-1}\frac{3}{2\sqrt{2}} = \ln\left(\frac{3}{2\sqrt{2}} + \sqrt{\tfrac{9}{8}-1}\right) = \ln\frac{4}{2\sqrt{2}} = \ln\sqrt{2} = \tfrac{1}{2}\ln 2,$$

이다. $\sinh^2 t = \frac{1}{2}(\cosh 2t - 1)$을 이용하면

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^T 8\sinh^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^T 4(\cosh 2t - 1)\,\mathrm{d}t = \Big[4\sinh t\cosh t - 4t\Big]_0^T \\ &= 4\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{3}{2\sqrt{2}} - 2\ln 2 = \tfrac{3}{2} - 2\ln 2, \end{aligned}$$

이다. 여기서 $\cosh T = \frac{3}{2\sqrt{2}}$이고 $\sinh T = \sqrt{\frac{9}{8}-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$이기 때문이다.

종합하기

$$A = \tfrac{1}{5}\left(\tfrac{15}{2} + 8\ln 2\right) - \left(\tfrac{3}{2} - 2\ln 2\right) = \tfrac{3}{2} + \tfrac{8}{5}\ln 2 - \tfrac{3}{2} + 2\ln 2 = \tfrac{18}{5}\ln 2.$$

대수적인 부분은 정확히 상쇄되고, 전체 넓이는

$$4A = \frac{72}{5}\ln 2,$$

이 되어 요구한 결과를 얻는다.

검산

- ▶ $\frac{72}{5}\ln 2 \approx 9.981$이다. 두 적분에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면 $I_1 \approx 13.0452$, $I_2 \approx 0.11371$을 얻는데, 이는 각각 $\frac{15}{2} + 8\ln 2$, $\frac{3}{2} - 2\ln 2$와 일치한다. 또 촘촘한 격자점 가운데 두 부등식을 모두 만족하는 점을 세기만 해도 넓이가 약 9.98로 나온다.

- 크기에 대한 점검: 영역은 넓이가 12인 직사각형 $[-3,3]\times[-1,1]$ 안에 들어가고, 이 직사각형의 모서리 부분에서 가느다란 조각만 빠지므로, 넓이가 10보다 조금 작은 것은 타당하다.
- $\cosh^{-1}1=\ln 1=0$으로, 당연히 그래야 하는 값이 나온다.

흔한 실수

- 부등식을 쌍곡선의 "바깥쪽"으로 읽는 것: $y^2\geq x^2-8$은 $x^2-y^2=8$의 두 가지 사이의 영역이며, 이 영역은 y축을 포함한다.
- 첫 번째 부등식이 $x>2\sqrt{2}$일 때만 실제로 제약이 된다는 것을 잊고 $\int_0^3\sqrt{x^2-8}\,\mathrm{d}x$를 빼는 것. 이 적분은 실수조차 아니다.
- $\mathrm{e}^y=x\pm\sqrt{x^2-1}$에서 마이너스 부호를 택하는 것. 그러면 $-\cosh^{-1}x$가 나온다.

STEP 너머

두 부류의 적분 $\int\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$와 $\int\sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x$를 쌍곡선 치환으로 다루는 것은 $\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$를 $x=a\sin\theta$로 다루는 것과 같은 이유에서이다. 항등식(identity) $\cosh^2-\sinh^2=1$이 제곱근을 없애 주기 때문이다. 사실 쌍곡선함수(hyperbolic function)는 **넓이**를 잰다. θ가 원의 부채꼴(sector) 넓이의 두 배인 것과 마찬가지로, $(\cosh t,\sinh t)$의 매개변수 t는 단위 쌍곡선의 부채꼴 넓이의 두 배이다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제)에는 이런 성격의 문제가 훨씬 더 많이 실려 있고, Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)는 지수함수(exponential function)와 로그, 그리고 이를 바탕으로 쌍곡선함수를 어떻게 엄밀하게 정초하는지 보여 준다.

풀이

STEP III 2001, 문제 3

순수수학 • 이차식의 근

STEP III 2001, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/01-s3-q3

핵심 아이디어

근(roots)에 대한 명제를 계수(coefficients)에 대한 명제로 바꾸어 생각한다. 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=b$, $\alpha\beta=c$이고, 근이 언제 실수인지는 판별식(discriminant)이 알려 준다. (ii)에서는 $f(x)=x^2-bx+c$의 그래프로 생각하는 편이 더 쉽다. 두 근이 모두 -1과 1 사이에 (양 끝을 제외하고) 놓이는 것은 포물선(parabola)이 ±1에서 양수이고 그 꼭짓점(vertex)이 둘 사이에 있을 때, 그리고 오직 그때뿐이다.

풀이

이 풀이 전체에서 $f(x)=x^2-bx+c$로 쓰고, 근이 실수일 때 두 근을 $\alpha\le\beta$라 하자. 그러면

$$\alpha+\beta=b,\qquad \alpha\beta=c,\qquad \alpha,\beta=\tfrac{1}{2}\left(b\mp\sqrt{b^2-4c}\right).$$

중근(repeated root)은 서로 같은 두 실근으로 센다.

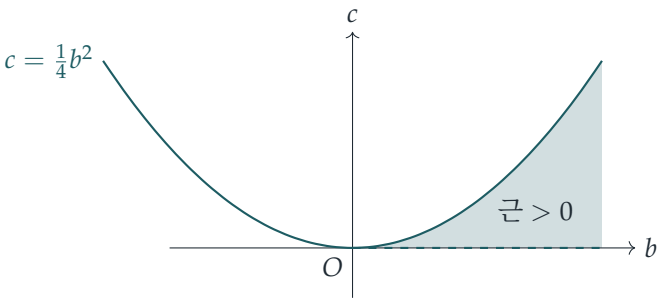
소문항 (i)

($\Rightarrow$) 두 근이 양의 실수라고 하자. 근이 실수이려면 $b^2-4c\ge0$이어야 한다. 또 두 근이 모두 양수이므로 $b=\alpha+\beta>0$이고 $c=\alpha\beta>0$이다. 이를 합치면 $b>0$이고 $b^2\ge4c>0$이다.

($\Leftarrow$) $b>0$이고 $b^2\ge4c>0$이라고 하자. $b^2-4c\ge0$이므로 두 근은 실수이다. $\alpha\beta=c>0$이므로 두 근은 0이 아니고 부호가 같다. $\alpha+\beta=b>0$이므로 그 공통 부호는 음일 수 없다. 따라서 두 근은 모두 양수이다.

이로써 동치(equivalence)가 증명되었다. b-c 평면에서 이 조건은 $b>0$이고 $0<c\le\frac{1}{4}b^2$이라는 뜻이다. 즉 제1사분면(first quadrant)에서 양의 b축과 포물선 $c=\frac{1}{4}b^2$ 사이의 영역이

다. 포물선은 포함되고(중근 $\frac{1}{2}b > 0$), b축은 제외된다(거기서는 $c = 0$이어서 한 근이 0이다).



실선 곡선($b > 0$인 부분)은 영역에 속하고, b축의 점선 부분과 원점은 속하지 않는다.

소문항 (ii)

두 근이 실수이고 $-1 < \alpha \leq \beta < 1$이어야 한다. 근이 실수일 때, 이것이 성립할 필요충분조건은

$$f(1) = 1 - b + c > 0, \qquad f(-1) = 1 + b + c > 0, \qquad -1 < \tfrac{1}{2}b < 1.$$

임을 보이자.

($\Rightarrow$) $-1 < \alpha \leq \beta < 1$이면 각 괄호가 양수이므로 $f(1) = (1-\alpha)(1-\beta) > 0$이고 $f(-1) = (1+\alpha)(1+\beta) > 0$이다. 또 $\frac{1}{2}b = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$는 $(-1,1)$에 속하는 두 수의 평균이므로 $(-1,1)$에 속한다.

($\Leftarrow$) $f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$는 정확히 $[\alpha,\beta]$에서만 ≤ 0이므로, 조건 $f(1) > 0$은 1이 $[\alpha,\beta]$에 속하지 않는다는 뜻이다. 따라서 $1 < \alpha$이거나 $1 > \beta$이다. 꼭짓점 $\frac{1}{2}b$는 $[\alpha,\beta]$에 속하고 $\frac{1}{2}b < 1$이므로 $\alpha \leq \frac{1}{2}b < 1$이다. 그러므로 $1 < \alpha$는 불가능하고 $\beta < 1$이다. 같은 방법으로 $f(-1) > 0$과 $\frac{1}{2}b > -1$로부터 $\alpha > -1$을 얻는다.

생각해 보기 왜 $f(1) > 0$과 $f(-1) > 0$만으로는 충분하지 않을까?

두 근이 구간의 같은 쪽 바깥에 함께 놓일 수 있기 때문이다. 예를 들어 $x^2 - 5x + 6 = 0$의 두 근은 2와 3이지만 $f(\pm 1) > 0$이다. 두 근이 모두 한쪽 끝 너머에 있지 않고 -1과 1 사이에 놓이도록 해 주는 것이 바로 꼭짓점 조건 $|b| < 2$이다.

이 조건들을 실근 조건 $b^2 \geq 4c$와 합치면 영역은

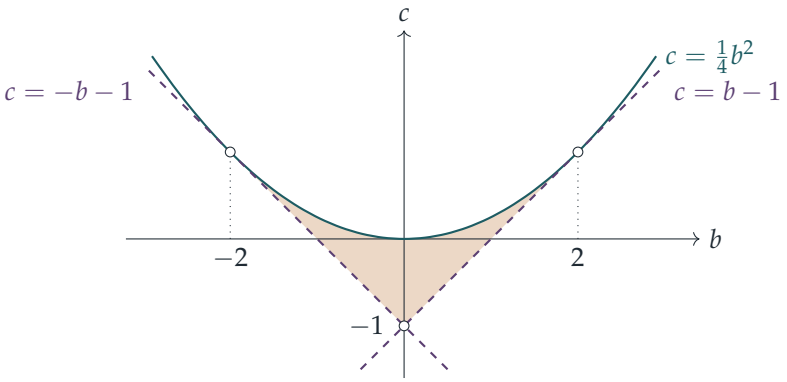
$$|b| < 2, \qquad c > b - 1, \qquad c > -b - 1, \qquad c \leq \tfrac{1}{4}b^2,$$

즉 $|b| < 2$이고 $|b| - 1 < c \leq \frac{1}{4}b^2$이다.

영역을 그리기 위해 두 직선이 포물선과 어떻게 만나는지 살펴보자.

$$\tfrac{1}{4}b^2 - (b-1) = \tfrac{1}{4}(b-2)^2 \geq 0,$$

이므로 직선 $c = b - 1$은 포물선 아래에 있고 $(2,1)$에서만 포물선과 만난다. 따라서 이 직선은 그 점에서의 접선(tangent)이다. 대칭성$(b \mapsto -b)$에 의해 $c = -b - 1$은 $(-2,1)$에서의 접선이다. 두 직선은 $(0,-1)$에서 만난다. 영역은 이 두 접선과 두 접점 사이의 포물선 호로 둘러싸인 곡선 삼각형이다.



$|b| < 2$인 포물선의 호는 포함된다($|\frac{1}{2}b| < 1$인 중근 $\frac{1}{2}b$). 점선으로 그린 두 접선 선분은 그 위에서 한 근이 ± 1이므로 제외된다. 세 꼭짓점 $(\pm 2, 1)$과 $(0,-1)$도 제외된다.

검산

- $(b,c) = (0,-\frac{1}{4})$는 (ii)의 영역 안에 있다. 두 근은 $\pm\frac{1}{2}$이다. $(b,c) = (0,-1)$은 제외되는 꼭짓점이다. 두 근이 정확히 ± 1이다.
- $(b,c) = (2.7, 1.8)$은 $c > |b| - 1$과 $c \leq \frac{1}{4}b^2$을 만족하지만 $|b| > 2$이다. 두 근은 1.2와 1.5이므로, 꼭짓점 조건에 의해 올바르게 제외된다.
- 두 영역 모두 수치적으로 검사하였다. 모든 경계 곡선 위의 점을 포함한 115 000개가 넘는 유리점 (b,c)에서 실제 근과 위의 조건을 비교하였고, 어긋나는 경우는 없었다.

흔한 실수

- (ii)에서 꼭짓점 조건 $|b| < 2$를 빠뜨리는 것. 그러면 $|b| = 2$ 너머에서 각 접선과 포물선 사이의 가느다란 띠가 잘못 추가된다.
- 경계를 잘못 처리하는 것. 포물선은 두 소문항 모두에서 포함되지만, (i)의 b축과 (ii)의 접선은 포함되지 않는다.

STEP 너머

$f(\pm 1)$과 꼭짓점에 대한 조건은 "다항식의 모든 근이 주어진 영역 안에 놓이는 것은 언제인가?"라는 일반적인 질문의 작은 사례이다. 단위원판(unit disc)에 대해서는 슈어-콘 판정법(Schur–Cohn test)이 이 질문에 답한다. 왼쪽 반평면(left half-plane)에 대해서는 라우스-후르비츠 판정법(Routh–Hurwitz criterion)이 답하는데, 제어 공학자들은 이를 이용해 시스템이 안정한지 판단한다. (ii)는 정확히 특성근(characteristic roots)이 실수인 점화식(recurrence) $u_{n+2} = bu_{n+1} - cu_n$의 안정성(stability) 영역이다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)에 이런 성격의 문제가 더 실려 있다.

풀이

STEP III 2001, 문제 4

순수수학 • 역삼각함수

> **STEP III 2001, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/01-s3-q4

핵심 아이디어

식 $\dfrac{2x}{1+x^2}$를 보면 떠오르는 것이 있어야 한다. 이것은 $x = \tan\theta$일 때 $\sin 2\theta$에 대한 "t-공식(t-formula)"이다. $x = \tan\theta$로 치환하면 이 식의 $\sin^{-1}$은 $\sin^{-1}(\sin 2\theta)$가 되고, 문제 전체는 $\sin^{-1}(\sin\phi)$가 언제 정말로 ϕ를 되돌려 주는가에 대한 질문이 된다. 그 답은 ϕ가 주치역(principal range) $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$에 속하는지에 달려 있으며, 바로 여기서 $x = \pm 1$에서의 경우 나누기가 생긴다.

풀이

소문항 (i)

먼저 $g(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$의 기본적인 성질을 살펴본다.

- 분모는 결코 0이 되지 않으므로 g는 모든 곳에서 정의되고 연속(continuous)이다.
- $g(-x) = -g(x)$이므로 g는 기함수(odd function)이고, 그 그래프는 원점에 대하여 회전 대칭이다.
- $g(0) = 0$이고, $g(x)$는 x와 부호가 같으며, 분모는 x^2처럼 커지는 반면 분자는 x처럼만 커지므로 $x \to \pm\infty$일 때 $g(x) \to 0$이다. 따라서 x축은 점근선(asymptote)이며, $x \to \infty$일 때는 위쪽에서, $x \to -\infty$일 때는 아래쪽에서 다가간다.

몫의 미분법(quotient rule)에 의하여

$$g'(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

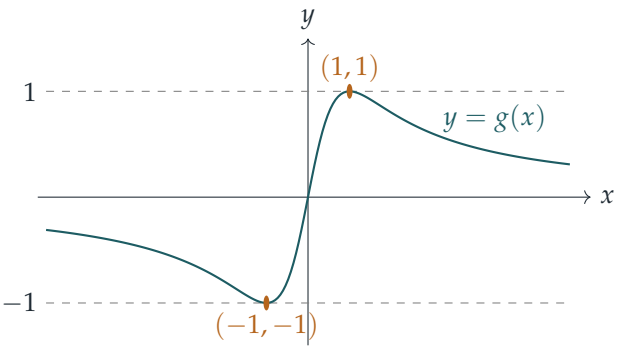
이 값은 $x = \pm 1$에서만 0이다. $|x| < 1$에서는 양수이고 $|x| > 1$에서는 음수이므로, $x = 1$에서 극댓값(maximum) $g(1) = 1$을, $x = -1$에서 극솟값(minimum) $g(-1) = -1$을 갖는다. 원점에서의 기울기(gradient)는 $g'(0) = 2$이다.

이 극점들이 전체에서의 최대, 최소라는 것은 미분 없이도 확인할 수 있다.

$$1 - g(x) = \frac{(1-x)^2}{1+x^2} \geq 0, \qquad 1 + g(x) = \frac{(1+x)^2}{1+x^2} \geq 0,$$

이므로 모든 x에 대하여 $-1 \leq g(x) \leq 1$이고, 등호는 $x = \mp 1$에서만 성립한다. g는 연속이고 -1과 1이라는 값을 가지므로, 그 사이의 모든 값을 갖는다(사잇값 정리(intermediate value theorem)에 의하여). 따라서

$$\text{함수} g\text{의 치역(range)은} -1 \leq g(x) \leq 1.$$



소문항 (ii)

소문항 (i)에 의하여 $\frac{2x}{1+x^2}$는 항상 $\sin^{-1}$의 정의역(domain)인 $[-1, 1]$에 속하므로, f는 모든 실수 x에 대하여 정의된다.

$\theta = \tan^{-1} x$라 하면 $-\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi$이고 $x = \tan\theta$이다. 그러면

$$\frac{2x}{1+x^2} = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{2\tan\theta}{\sec^2\theta} = 2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta,$$

이므로

$$f(x) = \sin^{-1}(\sin 2\theta).$$

생각해 보기 $\sin^{-1}(\sin 2\theta)$는 그냥 2θ가 아닌가?

2θ가 $\sin^{-1}$의 치역, 즉 $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$에 속할 때에만 그렇다. 정의에 의하여 $\sin^{-1} y$는 그 구간에 속하면서 사인값이 y인 **유일한** 각이다. 따라서 $f(x)$를 구하려면 $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$에 속하면서 2θ와 사인값이 같은 각을 찾아야 한다.

경우 $-1 \le x \le 1$**.** tan는 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$에서 증가하므로, 이는 $-\frac{1}{4}\pi \le \theta \le \frac{1}{4}\pi$를 뜻하고, 따라서 $-\frac{1}{2}\pi \le 2\theta \le \frac{1}{2}\pi$이다. 그러면 2θ 자체가 주치역에 속하면서 사인값이 $\sin 2\theta$인 각이므로

$$f(x) = 2\theta = 2\tan^{-1} x \qquad (-1 \le x \le 1).$$

경우 $x \ge 1$**.** 이제 $\frac{1}{4}\pi \le \theta < \frac{1}{2}\pi$이므로 $\frac{1}{2}\pi \le 2\theta < \pi$이고, 이는 주치역 밖이다. 그런데

$$\sin(\pi - 2\theta) = \sin 2\theta \qquad \text{이고} \qquad 0 < \pi - 2\theta \le \tfrac{1}{2}\pi,$$

이므로 $\pi - 2\theta$가 주치역에 속하면서 올바른 사인값을 갖는 각이다. 따라서

$$f(x) = \pi - 2\theta = \pi - 2\tan^{-1} x \qquad (x \ge 1).$$

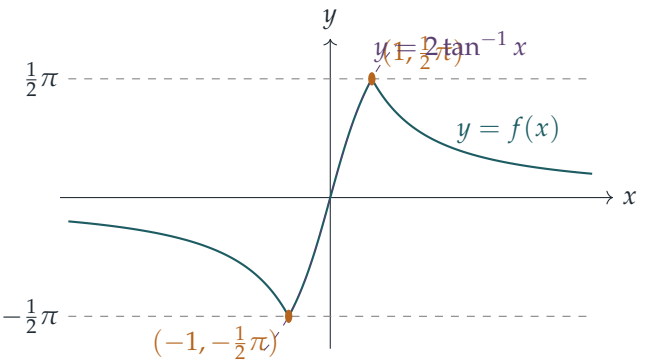
$x = 1$에서 두 공식은 모두 $\frac{1}{2}\pi$를 주며, 당연히 그래야 한다. 이것으로 "보여라" 부분이 끝난다.

그래프를 그리려면 $x \le -1$인 경우도 필요하다. g가 기함수이고 $\sin^{-1}$도 기함수이므로 f도 기함수이고, 따라서 $x \le -1$에 대하여 $f(x) = -f(-x) = -\pi - 2\tan^{-1} x$이다. (마찬가지로, 이 범위에서는 $-\pi < 2\theta \le -\frac{1}{2}\pi$이고, $-\pi - 2\theta$가 $[-\frac{1}{2}\pi, 0)$에 속하면서 사인값이 같은 각이다.)

그래프의 모양.

- $[-1, 1]$에서 $f(x) = 2\tan^{-1} x$는 $-\frac{1}{2}\pi$에서 $\frac{1}{2}\pi$까지 증가하며, 기울기 2로 원점을 지난다.
- $x \ge 1$에서 $f(x) = \pi - 2\tan^{-1} x$는 $\frac{1}{2}\pi$에서부터 감소하고, $x \to \infty$일 때 위쪽에서 $\pi - 2 \cdot \frac{1}{2}\pi = 0$으로 다가간다. 기함수 성질에 의하여 $x \le -1$에서는 $-\frac{1}{2}\pi$에서부터 올라가며, $x \to -\infty$일 때 아래쪽에서 0으로 다가간다. 따라서 여기서도 x축이 점근선이다.
- 기울기는 $|x| < 1$에서 $\dfrac{2}{1+x^2}$이고 $|x| > 1$에서 $-\dfrac{2}{1+x^2}$이다. $x = 1$에서 기울기는 $+1$에서 -1로 갑자기 바뀌므로(그리고 $x = -1$에서도 마찬가지이므로), 그래프는 $(\pm 1, \pm\frac{1}{2}\pi)$에서 뾰족한 꺾인 점을 갖는다. 즉 f는 그곳에서 연속이지만 미분가능(differentiable)하지 않다.

꺾인 점은 연쇄 법칙(chain rule)으로부터 직접 확인할 수 있다. $f'(x) = g'(x)/\sqrt{1 - g(x)^2}$이고, 소문항 (i)에서 $1 - g^2 = (1-x^2)^2/(1+x^2)^2$을 얻었으며, 그 제곱근은 $|1-x^2|/(1+x^2)$이다. 따라서 $f'(x) = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\,|1-x^2|} = \pm\dfrac{2}{1+x^2}$이고, 부호는 $1 - x^2$의 부호를 따른다.



점선 곡선은 $x = 1$을 지나서도 계속되는 $2\tan^{-1} x$를 나타낸다. 이 곡선은 $\frac{1}{2}\pi$보다 위로 올라가게 되는데, $\sin^{-1}$은 결코 그럴 수 없으므로 f는 대신 아래로 "반사"되어 내려온다.

검산

- $x = \sqrt{3}$일 때: $g(\sqrt{3}) = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $f(\sqrt{3}) = \frac{1}{3}\pi$이고, 공식은 $\pi - 2 \cdot \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{3}\pi$를 준다. 일치한다.
- $x = 10$일 때: $f(10) = \sin^{-1}(20/101) \approx 0.19934$이고, $\pi - 2\tan^{-1} 10 \approx 0.19934$이다. 컴퓨터로 $[-1, 1]$, $[1, 10^4]$, $[-10^4, -1]$ 각각에서 x의 무작위 값 10^5개를 시험한 결과 10^{-7}까지 일치하였고, $x = 1$에서의 한쪽 기울기는 $+1$과 -1로 나왔다.
- 만약 f가 모든 곳에서 $2\tan^{-1} x$라면 큰 x에 대하여 거의 π에 이르게 되는데, 이는 $\sin^{-1}$의 값으로는 불가능하다. 반사가 이 문제를 해결한다.

흔한 실수

- 2θ가 $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$에 속하는지 확인하지 않고 $\sin^{-1}(\sin 2\theta) = 2\theta$라고 쓰는 것.
- f를 $x = 1$에서 매끄럽고 둥근 꼭대기를 갖도록 그리는 것. $\sqrt{1 - g^2}$에는 $1 - x^2$가 아니라 $|1 - x^2|$가 들어가므로 그래프는 그곳에서 꺾인다.
- $x \to \pm\infty$일 때 f가 ($\pm\pi$가 아니라) 0으로 다가간다는 것을 잊는 것.

STEP 너머

역삼각함수(inverse trigonometric function)는 **분지**(branch)를 고르는 첫 번째 예이다. sin은 일대일(one-to-one)이 아니므로 역함수를 만들기 전에 정의역을 제한해야 하고, 그러면 $\sin^{-1}(\sin\phi) = \phi$ 같은 항등식은 그 분지에서만 성립한다. 같은 문제가 복소해석

학(complex analysis)에서는 핵심이 되는데, 거기서는 $\log z$와 $z^{1/2}$에 분지 절단(branch cut)이 필요하다. $x = 1$에서의 꺾인 점은 또한 매끄러운 조각들로 만들어졌지만 한 점에서 연속이면서 미분가능하지 않은 함수의 깔끔한 예이기도 하다. 분지와 다가함수를 풍부한 그림과 함께 다룬 책으로는 Needham, *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)를, 연속성과 미분가능성에 대해서는 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학의 이해)를 참고하라.

풀이

STEP III 2001, 문제 5

순수수학 • 포물선의 법선

> **STEP III 2001, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/01-s3-q5

핵심 아이디어

고정된 점 (h,k)를 지나는 법선(normal)이 어느 것인지 묻는 문제는 매개변수(parameter) t에 대한 삼차방정식(cubic)이 실근(real root)을 몇 개 갖는지 묻는 문제로 바뀐다. 이 삼차식에는 t^2 항이 없으므로, 첫 소문항에서 다룬 t^3+pt+q 꼴과 정확히 같다. 실근의 개수는 두 근이 합쳐져 중근(repeated root)이 될 때에만 바뀌므로, "법선이 하나"인 경우와 "법선이 셋"인 경우의 경계는 삼차식이 중근을 갖는 곳이다. 그 경계가 바로 우리가 구하려는 자취(locus)이다.

풀이

삼차식

$f(x)=x^3+px+q$라 하자. $p\geq 0$이면 모든 x에 대하여 $f'(x)=3x^2+p\geq 0$이고, $f'(x)=0$은 기껏해야 한 점 $x=0$에서만 성립할 수 있다($p=0$일 때에만). 따라서 f는 $\mathbb{R}$에서 강한 증가함수(strictly increasing)이다. 실제로 $x_1<x_2$이면 피적분함수(integrand)가 음이 아니고 많아야 한 점에서만 0이므로 $f(x_2)-f(x_1)=\int_{x_1}^{x_2} f'(x)\,\mathrm{d}x>0$이다.

또한 $x\to-\infty$일 때 $f(x)\to-\infty$이고 $x\to+\infty$일 때 $f(x)\to+\infty$이다. f는 연속(continuous)이므로 어딘가에서 값 0을 갖고, 강한 증가함수이므로 그런 곳은 단 한 번뿐이다. 따라서 실수해는 정확히 하나이다.

(h,k)를 지나는 법선

C 위에서 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \dfrac{2a}{2at} = \dfrac{1}{t}$이므로, 매개변수가 t인 점에서의 법선의 기울기(gradient)는 $-t$이다. (이는 $t=0$에서도 성립한다. 이때 접선(tangent)은 수직이고 법선은 x축이다.) 법선의 방정식은

$$y - 2at = -t\,(x - at^2), \qquad \text{즉} \qquad y + tx = 2at + at^3.$$

이 법선이 (h,k)를 지날 필요충분조건은 $k + th = 2at + at^3$, 즉

$$\boxed{at^3 + (2a-h)\,t - k = 0}$$

또는 양변을 다음으로 나누면$a > 0$, $\qquad t^3 + \dfrac{2a-h}{a}\,t - \dfrac{k}{a} = 0.$

> **생각해 보기** 서로 다른 두 t 값이 같은 법선을 주어서, 근을 세면 법선을 중복하여 세게 되는 일이 있을 수 있을까?

그렇지 않다. t에서의 법선의 기울기는 $-t$이므로, 서로 다른 t 값은 기울기가 서로 다른 법선을 주고, 이들은 서로 다른 직선이다. 따라서 (h,k)를 지나는 법선의 개수는 삼차식의 서로 다른 실근의 개수와 정확히 같다.

$h \le 2a$이면 계수 $p = \dfrac{2a-h}{a}$는 ≥ 0이므로, 첫 소문항에 의해 삼차식은 정확히 하나의 실근을 갖는다. 그러므로 요구한 대로 (h,k)를 지나는 C의 법선은 정확히 하나이다.

법선이 정확히 두 개인 점들의 자취

삼차식을 $P = \dfrac{2a-h}{a}$, $Q = -\dfrac{k}{a}$로 두고 $t^3 + Pt + Q = 0$으로 쓰자. 실계수 삼차식은 중복도(multiplicity)를 고려하여 세면 실근을 하나 또는 셋 갖는다. 따라서 서로 **다른** 실근을 정확히 두 개 가질 필요충분조건은 이중근 s와 그와 다른 단근(simple root)을 하나 갖는 것이다.

t^2 항이 없으므로 근의 합은 0이고, 따라서 단근은 $-2s$이다. $-2s \ne s$이려면 $s \ne 0$이어야 한다. 계수를 비교하면

$$t^3 + Pt + Q = (t-s)^2(t+2s) = t^3 - 3s^2t + 2s^3,$$

이므로 $P = -3s^2$, $Q = 2s^3$이다. 원래 변수로 되돌리면

$$h = 2a + 3as^2, \qquad k = -2as^3, \qquad s \ne 0.$$

s를 소거하기 위해 $(h-2a)^3 = 27a^3s^6$이고 $k^2 = 4a^2s^6$임에 주목하면, $4(h-2a)^3 = 108a^3s^6 = 27a\,k^2$이다.

역으로 $(h,k) \ne (2a,0)$이고 $27ak^2 = 4(h-2a)^3$이라 하자. 그러면 $h - 2a \ge 0$이고, 사실 $h > 2a$이다($h = 2a$이면 $k = 0$이기 때문이다). $2as^3 = -k$를 만족하는 실수를 s라 하자. 그

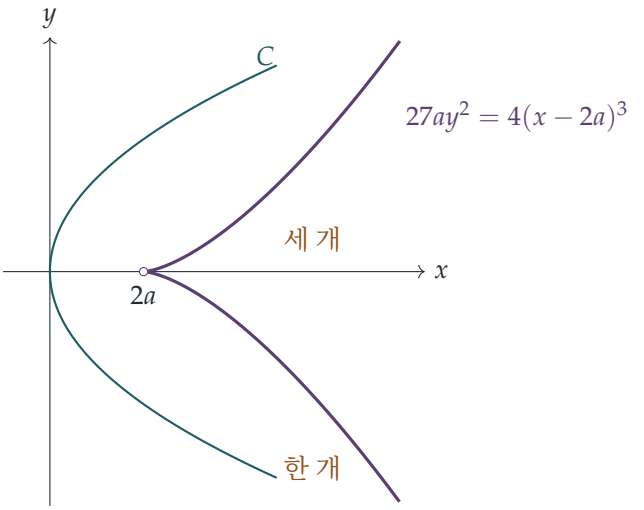
러면 $4a^2s^6 = k^2 = \frac{4}{27a}(h-2a)^3$이므로 $(h-2a)^3 = (3as^2)^3$이고, 따라서 $h-2a = 3as^2$이다. 그러므로 (h,k)는 $s \neq 0$인 위의 꼴이고, 이 점을 지나는 법선은 정확히 두 개이다. (이는 중근 조건 $4P^3 + 27Q^2 = 0$과 동치이다.)

점 $(2a, 0)$ 자체는 제외된다. 이 점에서는 $P = Q = 0$이고 삼차식은 삼중근을 갖는 $t^3 = 0$이 되어, 이 점을 지나는 법선은 하나(x축)뿐이다.

따라서 구하는 자취는

$$\boxed{27a\,y^2 = 4\,(x-2a)^3}, \qquad \text{단, 다음 점은 제외: } (2a, 0).$$

이것은 $(2a, 0)$에 첨점(cusp)을 갖는 반삼차 포물선(semicubical parabola)으로, x축에 대하여 대칭이고 $x \geq 2a$인 영역에 놓이며, $y = \pm\frac{2}{3\sqrt{3a}}(x-2a)^{3/2}$이다. 그 안쪽($2a$보다 오른쪽의 양의 x축을 포함하는 영역)에서는 삼차식이 서로 다른 세 실근을 가지므로, 각 점을 지나는 법선이 세 개이다. 바깥쪽에서는 법선이 하나뿐이다.



그림은 $a = 1$인 경우이다. 속이 빈 원은 제외되는 첨점을 나타내고, 각 영역의 표시는 그 영역의 점을 지나는 법선의 개수를 나타낸다.

검산

- $a = 1, s = 1$로 두면 점 $(5, -2)$를 얻는다. 삼차식은 $t^3 - 3t + 2 = (t-1)^2(t+2)$이므로, $(1, 2)$와 $(4, -4)$에서의 법선이 모두 $(5, -2)$를 지난다. 실제로 $t = 1$에서의 법선은 $y + x = 3$이고 $t = -2$에서의 법선은 $y - 2x = -12$이다. 둘 다 $(5, -2)$를 지나며, $27 \cdot 4 = 108 = 4 \cdot 27$이다.
- ($a = 1$일 때) $(5, 0.1)$에서는 $4P^3 + 27Q^2 = -108 + 0.27 < 0$이므로 법선이 세 개이다.

$(5,4)$에서는 $-108+432>0$이므로 법선이 하나이다. 이는 그림과 일치한다.

- 법선의 방정식과 실근이 하나라는 주장을 무작위로 고른 수백 가지 경우에 대해 수치적으로 확인하였다.

흔한 실수

- 첨점 $(2a,0)$을 제외하는 것을 잊는 실수. 이 점에서 방정식은 성립하지만 법선은 하나뿐이다.
- $p\geq 0$일 때 $f'(x)>0$이라고 주장하는 실수. $p=0$이면 $f'(0)=0$이므로, 그래도 f가 강한 증가함수라는 조금 더 강한 논증이 필요하다.
- 법선의 기울기를 $-t$가 아니라 $1/t$(접선의 기울기)로 쓰는 실수.

STEP 너머

이 자취는 포물선의 **축폐선**(evolute)이다. 즉 포물선의 곡률 중심(centre of curvature)들이 그리는 곡선이며, 동시에 포물선의 법선들의 포락선(envelope)이기도 하다. 축폐선을 가로지르면 한 점을 지나는 법선의 개수가 2만큼 바뀌는데, 이는 파국 이론(catastrophe theory)과 삼차식의 판별식(discriminant) 뒤에 있는 아이디어의 첫 번째 예이다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*에는 이런 정신의 STEP 문제가 더 실려 있다. Bruce와 Giblin의 *Curves and Singularities*는 축폐선과 포락선을 제대로 전개한다.

풀이

STEP III 2001, 문제 6

순수수학 • 벡터와 삼각형의 중심

STEP III 2001, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/01-s3-q6

핵심 아이디어

모든 것은 평면의 법선벡터(normal vector) $\mathbf{n} = \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$가 결정한다. 점 $\mathbf{r}$가 평면 위에 있을 필요충분조건은 $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = 1$이고, O와 M에서 평면에 내린 수선(perpendicular)은 모두 $\mathbf{n}$ 방향이다. 수심(orthocentre)과 외심(circumcentre)은 두 가지 3차원 기하 사실에서 나온다. 하나는 OA, OB, OC가 서로 수직이라는 것이고, 다른 하나는 M이 OA, OB, OC를 모서리로 하는 직육면체의 중심이어서 O, A, B, C로부터 같은 거리에 있다는 것이다. 마지막 부분에서는 두 수선이 평행하므로, 한 쌍의 닮은 삼각형(similar triangles)(또는 한 줄의 벡터 계산)으로 나머지가 해결된다.

풀이

풀이 전체에서 a, b, c는 0이 아니라고 한다(그렇지 않으면 평면이 세 축과 모두 만나지 않는다). 따라서

$$A = (a, 0, 0), \qquad B = (0, b, 0), \qquad C = (0, 0, c),$$

이고, $S = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} = |\mathbf{n}|^2 > 0$이라고 쓴다.

무게중심

직선 OM 위의 점은 $t\left(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b, \frac{1}{2}c\right)$ 꼴이다. 이를 평면의 방정식에 대입하면 $\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t = 1$이므로 $t = \frac{2}{3}$이고, 만나는 점은

$$G = \left(\tfrac{1}{3}a, \tfrac{1}{3}b, \tfrac{1}{3}c\right) = \tfrac{1}{3}(A + B + C),$$

이다. 이는 삼각형 ABC의 무게중심(centroid)이다. 나중을 위해 $\overrightarrow{OG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OM}$임을 기억해 두자.

O에서 내린 수선: 수심

O에서 내린 수선은 직선 $\lambda\mathbf{n}$이다. 이 직선은 $\lambda\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 1$, 즉 $\lambda = 1/S$일 때 평면과 만나며, 그 점은

$$H = \frac{1}{S}\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right).$$

이다. 이제 $AH \perp BC$임을 보인다. $\overrightarrow{BC} = (0, -b, c)$를 이용하면

$$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC} = \left(\frac{1}{aS} - a\right)\cdot 0 + \frac{1}{bS}\cdot(-b) + \frac{1}{cS}\cdot c = -\frac{1}{S} + \frac{1}{S} = 0.$$

생각해 보기 이 내적이 우연히 0이 된 것이 아니라 반드시 0이 되어야 하는 이유가 있을까?

있다. BC는 평면 위에 있으므로 법선 OH에 수직이다. 또한 BC는 yz-평면 위에 있으므로 x축 위에 놓인 OA에도 수직이다. 평행하지 않은 두 직선 OA와 OH에 모두 수직인 직선은 평면 OAH 전체에 수직이고, 특히 AH에 수직이다.

문자를 바꾸어 같은 논증을 적용하면 $BH \perp CA$, $CH \perp AB$이다. H는 삼각형이 놓인 평면 위에 있으므로, $AH \perp BC$는 H가 A에서 내린 높이선(altitude) 위에 있다는 뜻이고, 나머지 두 높이선에 대해서도 마찬가지이다. 따라서 H는 삼각형 ABC의 수심이다.

M에서 내린 수선: 외심

M에서 내린 수선은 $M + \mu\mathbf{n}$이다. 이 직선은 $\frac{3}{2} + \mu S = 1$, 즉 $\mu = -\dfrac{1}{2S}$일 때 평면과 만나며, 그 점은

$$P = M - \frac{1}{2S}\,\mathbf{n}.$$

이다. 그런데 M은 O, A, B, C 네 점 모두로부터 같은 거리에 있다. 예를 들어

$$MA^2 = \left(\tfrac{1}{2}a - a\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}b\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}c\right)^2 = \tfrac{1}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right),$$

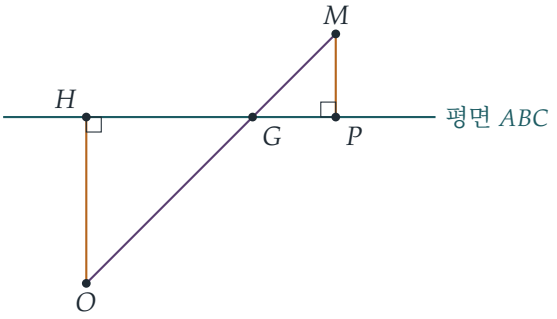
이고, 대칭성에 의해 MB^2, MC^2 (그리고 MO^2)도 같은 값이다. MP는 평면에 수직이고 PA는 평면 위에 있으므로 삼각형 MPA는 P에서 직각이다. 따라서 피타고라스(Pythagoras) 정리에 의해

$$PA^2 = MA^2 - MP^2,$$

이고, 마찬가지로 $PB^2 = MB^2 - MP^2$, $PC^2 = MC^2 - MP^2$이다. 우변이 모두 같으므로 $PA = PB = PC$이다. 평면 위에서 세 꼭짓점으로부터 같은 거리에 있는 점은 외심뿐이므로, P는 삼각형 ABC의 외심이다.

마지막 부분

수선 OH와 MP는 모두 $\mathbf{n}$에 평행하므로 O, H, M, P는 한 평면 위에 있고, 직선 OM은 삼각형의 평면과 G에서 만난다. 또한 $O \cdot \mathbf{n} = 0 < 1$이고 $M \cdot \mathbf{n} = \frac{3}{2} > 1$이므로 O와 M은 삼각형의 평면에 대해 서로 반대쪽에 있다. 다음은 이 네 점을 지나는 단면이다.



삼각형 OHG와 MPG는 각각 H와 P에서 직각이고 G에서의 맞꼭지각(vertically opposite angles)이 같으므로 닮음이며, 닮음비는 $OG : GM = 2 : 1$이다. 따라서 $HG : GP = 2 : 1$이고, G는 선분 HP 위에 있다.

같은 결론은 벡터로부터 바로 얻을 수도 있다. $H = \frac{1}{S}\mathbf{n}$, $P = M - \frac{1}{2S}\mathbf{n}$, $G = \frac{2}{3}M$이므로

$$\tfrac{1}{3}(H + 2P) = \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{S}\mathbf{n} + 2M - \tfrac{1}{S}\mathbf{n}\right) = \tfrac{2}{3}M = G.$$

따라서 G는 수심 H에서 외심 P까지의 선분 위에 있고, 이 선분을 $HG : GP = 2 : 1$의 비로 나눈다. 이로써 증명이 끝난다. (삼각형이 정삼각형이면 $H = P = G$이므로 증명할 것이 없다.)

생각해 보기 이것으로 모든 삼각형에 대해 결과가 증명된 것일까?

꼭 그렇지는 않다. 이 논증을 적용하려면 삼각형이 위와 같은 꼴의 어떤 삼각형 ABC와 합동(congruent)이어야 한다. 그러면 변의 길이가 $BC^2 = b^2 + c^2$, $CA^2 = c^2 + a^2$, $AB^2 = a^2 + b^2$를 만족하므로

$$AB^2 + AC^2 - BC^2 = 2a^2 > 0,$$

이고, B와 C에서도 마찬가지이다. 코사인 법칙(cosine rule)에 의해 모든 각은 예각이다. 역으로, 임의의 예각삼각형(acute triangle)은 이런 방식으로 실현할 수 있다. 위의 세 방정식을 a^2, b^2, c^2에 대해 풀면 모두 양수가 되기 때문이다. 따라서 이 방법은 예각삼각형에 대해 결과를 증명한다. 직각삼각형이나 둔각삼각형에 대해서는, 모든 경우를 포괄하는 다음의 짧은 평면 논증이 있다. 외심을 원점에 두면 꼭짓점 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$의 길이가 모두 같다. $\mathbf{h} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$라 하자. 그러면

$$(\mathbf{h} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{c}|^2 = 0,$$

이므로 $\mathbf{h}$는 $\mathbf{a}$에서 내린 높이선 위에 있고, 대칭성에 의해 나머지 두 높이선 위에도 있다. 즉 수심이다. 무게중심은 $\frac{1}{3}\mathbf{h} = \frac{1}{3}(\mathbf{h} + 2\cdot\mathbf{0})$이며, 이는 같은 $2:1$ 명제이다.

검산

$a = 1, b = c = 2$로 두면 $S = \frac{3}{2}$이다. 그러면 $H = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $P = \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{5}{6}\right)$, $G = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$이다. 각 점은 $x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 1$을 만족한다. $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$이고 $PA^2 = PB^2 = PC^2 = \frac{25}{12}$이며, $\frac{1}{3}(H + 2P) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = G$임을 확인할 수 있다. 또한 부호가 양과 음인 경우를 모두 포함하여 a, b, c를 무작위로 3000번 골라, 이 사실들을 모두 정확한 산술로 확인하였다.

흔한 실수

- $AH \perp BC$만 보이고 멈추는 것. 세 높이선을 모두 보이거나, 분명하게 "대칭성에 의해"라고 말해야 한다. 또한 H가 삼각형의 평면 위에 있다는 것도 말해야 한다. 평면 밖의 점은 높이선 위에 있지 않으면서도 $AH \perp BC$를 만족할 수 있다.
- 비를 거꾸로 쓰는 것. 무게중심에서 수심까지의 거리는 무게중심에서 외심까지의 거리의 두 배이다.
- "따라서(hence)" 부분이 모든 삼각형을 포괄한다고 주장하는 것. 위에서 보였듯이 이 방법은 예각삼각형에만 적용된다.

STEP 너머

수심, 무게중심, 외심을 지나는 직선을 **오일러 직선**(*Euler line*)이라 한다. (외심을 원점에 둘 때) $\mathbf{h} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$라는 사실은 구점원(nine-point circle)의 출발점이 되는데, 구점원의 중심 역시 오일러 직선 위에 있으며 H와 외심의 한가운데에 있다. 평면 도형을 간단한 3차원 도형의 단면으로 보는 기법은 기하학에서 거듭 등장하는 아이디어이다. 콕서터(Coxeter)의 *Introduction to Geometry*(기하학 입문)와 콕서터와 Greitzer의 *Geometry Revisited*(기하학 다시 보기)는 모두 오일러 직선과 구점원을 아름답게 다룬다.

풀이

STEP III 2001, 문제 7

순수수학 • 직교 궤적

> **STEP III 2001, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/01-s3-q7

핵심 아이디어

이 미분방정식(differential equation)은 변수분리형(separable)이므로, 직접 풀면 곡선족이 무엇인지 바로 드러난다. 직교(orthogonal)하는 곡선의 경우, 접선(tangent)이 서로 수직이라는 것은 두 기울기(gradient)의 곱이 -1이라는 뜻이다. 이로부터 두 번째 변수분리형 방정식을 얻고, 이를 적분하면 처음에 그린 함수가 다시 나타난다. 첫 번째 그래프를 미리 그려 두는 것은 마지막 곡선을 거의 공짜로 그리기 위해서이다.

풀이

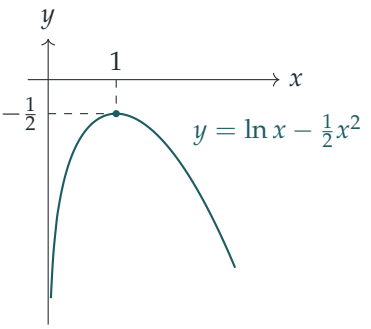
$\ln x - \frac{1}{2}x^2$의 그래프

$x > 0$에서 정의된 함수 $f(x) = \ln x - \frac{1}{2}x^2$을 생각하자. 그러면

$$f'(x) = \frac{1}{x} - x = \frac{1 - x^2}{x}, \qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2} - 1 < 0.$$

$x > 0$에서 정류점(stationary point)은 $x = 1$ 하나뿐이고, 이때 $f(1) = -\frac{1}{2}$이다. 모든 곳에서 $f'' < 0$이므로 이 점은 극대(maximum)이고, 그래프는 전체에서 위로 볼록(concave)하다. 따라서 모든 $x > 0$에 대하여 $f(x) \le -\frac{1}{2} < 0$이고, 그래프는 x축과 만나지 않는다.

정의역의 양 끝에서는, $x \to 0^+$일 때 ($\ln x \to -\infty$이므로) $f(x) \to -\infty$이고, 따라서 y축은 수직점근선(vertical asymptote)이다. 또 $\frac{1}{2}x^2$이 $\ln x$보다 훨씬 빠르게 커지므로 $x \to \infty$일 때도 $f(x) \to -\infty$이다.



포물선족

상수함수 $y = 0$은 해이다. 그 밖의 경우에는 방정식이 정의되지 않는 $x = \pm 1$을 피하여 변수를 분리한다.

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{2x}{x^2 - 1}\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \ln|y| = \ln|x^2 - 1| + c.$$

따라서 $|y| = \mathrm{e}^c\,|x^2 - 1|$이다. 부호를 상수에 흡수시키고 $y = 0$도 포함하면, 해는

$$y = A(x^2 - 1), \qquad A\text{는 상수.}$$

역으로, 이러한 곡선은 모두 방정식을 만족한다. 왜냐하면

$$y' = 2Ax = \frac{2x \cdot A(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = \frac{2xy}{x^2 - 1}.$$

$A \neq 0$이면 각 곡선은 포물선(parabola)이다. $(1, 0)$과 $(-1, 0)$에서 $x^2 - 1 = 0$이므로 이 곡선은 두 점을 지난다. 기울기 $2Ax$는 $x = 0$에서만 0이므로 꼭짓점(vertex)은 $(0, -A)$이고, 이는 y축 위에 있다. 이것이 구하는 곡선족이다.

직교하는 곡선

$x \neq \pm 1$이고 $y \neq 0$인 점 (x, y)를 잡자. 이 점을 지나는 곡선족의 포물선은 정확히 하나, 곧 $A = y/(x^2 - 1)$인 포물선이며, 그 점에서의 기울기는 $\dfrac{2xy}{x^2 - 1}$이다. 구하는 곡선이 이 포물선과 직각으로 만나려면 두 기울기의 곱이 -1이어야 하므로, 곡선은

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x^2 - 1}{2xy} = \frac{1 - x^2}{2xy}.$$

을 만족해야 한다.

생각해 보기 기울기를 구할 때 공식 $y = A(x^2 - 1)$ 대신 포물선족의 미분방정식을 써도 되는 이유는 무엇인가?

미분방정식은 (x,y)를 지나는 곡선족 구성원의 기울기를 A와 무관하게 x와 y만으로 나타낸다. 직교하는 곡선은 각 점에서 서로 다른 포물선과 만나므로, 바로 이것이 우리에게 필요한 것이다.

다시 변수를 분리하면

$$2y\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x} - x \quad\Longrightarrow\quad y^2 = \ln x - \tfrac{1}{2}x^2 + C,$$

이다. 여기서 곡선이 $(1,1)$을 지나므로 $x > 0$으로 잡았다. 우변은 처음에 그린 함수 $f(x) + C$이다. $(1,1)$에서 $1 = 0 - \frac{1}{2} + C$이어야 하므로 $C = \frac{3}{2}$이고, 곡선은

$$\boxed{y^2 = \ln x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{3}{2}} \qquad \text{또는 같은 말로} \qquad y^2 = f(x) + \tfrac{3}{2}.$$

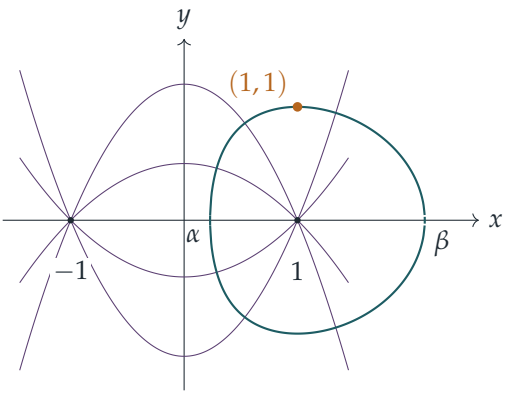
엄밀히 말하면, $(1,1)$을 지나는 미분방정식의 해는 위쪽 절반 $y = \sqrt{f(x) + \frac{3}{2}}$이다. 이를 x축에 대하여 대칭이동한 것도 모든 포물선과 직교하므로, 자연스러운 답은 닫힌 곡선 전체이다.

곡선 그리기

실수인 점이 존재하려면 $f(x) \geq -\frac{3}{2}$이어야 한다. 첫 번째 그래프에서 보았듯이 f는 $-\infty$에서 올라가 $x = 1$에서 최댓값 $-\frac{1}{2}$에 이른 뒤 다시 $-\infty$로 내려간다. 따라서 $f(x) = -\frac{3}{2}$는 $\alpha \in (0,1)$인 근 하나와 $\beta > 1$인 근 하나를 정확히 가진다. 수치적으로 $\alpha \approx 0.229$, $\beta \approx 2.123$이다. 그러므로

- 곡선은 띠 $\alpha \leq x \leq \beta$ 안에 놓이고 x축에 대하여 대칭이다.
- $x = 1$에서 y^2은 최댓값 1을 가지며, 이때 점 $(1,\pm 1)$을 얻고, 이 점들에서 접선은 수평이다.
- $(\alpha,0)$과 $(\beta,0)$에서는 $y^2 = 0$이지만 $\mathrm{d}(y^2)/\mathrm{d}x = f'(x) \neq 0$이므로, $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$가 무한대가 되어 접선이 수직이다.

따라서 곡선은 한쪽으로 치우친 닫힌 타원 모양이다. 왼쪽에서는 가파르게 솟고 오른쪽에서는 더 완만하게 내려간다. 비교를 위해 포물선 몇 개를 함께 그렸다.



$x < 0$을 허용하고 $\ln x$를 $\ln|x|$로 바꾸면, 같은 계산으로 왼쪽 반평면에 대칭인 타원 모양 곡선도 얻는다. 그 곡선은 $(1,1)$을 지나지 않으므로 답에 포함되지 않는다.

검산

- $(1,1)$에서 곡선의 기울기는 $\frac{1-1}{2} = 0$이다. 모든 포물선은 직선 $x = 1$과 $(1,0)$에서만 만나므로, $(1,1)$ 자체를 지나는 포물선은 없다. $x = 1$ 근처에서 포물선들은 거의 수직이며, 이는 곡선의 접선이 수평이라는 사실과 잘 맞는다.
- 수치적으로, $x = 0.5$에서 곡선은 $y = \sqrt{\ln 0.5 - 0.125 + 1.5} \approx 0.826$이고 기울기는 $\frac{0.75}{2(0.5)(0.826)} \approx 0.908$이다. 그 점을 지나는 포물선의 기울기는 $\frac{2(0.5)(0.826)}{-0.75} \approx -1.101$이고, $0.908 \times (-1.101) \approx -1$이다.
- 타원 모양 곡선 위의 무작위 점 수천 개에서 직교성을 확인하였고, 이분법(bisection)으로 근 $\alpha \approx 0.2291$과 $\beta \approx 2.1226$을 계산하였다.

흔한 실수

- 일반적인 점 (x,y)를 지나는 곡선족 구성원의 기울기 대신, 특정한 A에 대한 $2Ax$처럼 고정된 포물선 하나의 기울기를 쓰는 것.
- $y^2 = f(x) + \frac{3}{2}$이려면 $f(x) \geq -\frac{3}{2}$이어야 한다는 것을 잊고, 닫힌 타원 모양 대신 유계가 아닌 곡선을 그리는 것.

STEP 너머

주어진 곡선족과 직각으로 만나는 곡선족을 찾는 문제를 **직교궤적**(*orthogonal trajectories*) 문제라고 한다. 물리학에서는 이것이 전기력선(field lines)과 등전위선(equipotentials)으로

나타나는데, 정전기학이나 2차원 유체 흐름이 그 예이다. 해석적(analytic) 복소함수의 실수부와 허수부는 언제나 이러한 두 곡선족을 이루며, 이는 등각사상(conformal mapping)으로 들어가는 한 가지 길이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초미분방정식)는 변수분리형 방정식과 직교궤적을 다룬다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 복소변수의 관점에서 본 모습을 보여 준다.

풀이

STEP III 2001, 문제 8

순수수학 • 복소평면 위의 자취

STEP III 2001, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/01-s3-q8

핵심 아이디어

$z = x + \mathrm{i}y$로 놓고 전개하면 (i)의 두 방정식은 모두 같은 원으로 정리된다. (ii)의 편각(argument) 조건에 대해서는 $\frac{z-2}{z}$를 직접 계산한다. 편각이 $\frac{\pi}{4}$라는 것은 "실수부와 허수부가 같고, 둘 다 양수"라는 뜻이므로, 결국 다시 같은 원에 부등식 하나가 더해진 것이다. (iii)에서는 원의 여러 형태 중 계산이 가장 깔끔해지는 것에 $z = 2/w$를 대입한다. (i)의 두 번째 형태는 바로 이 목적을 위해 주어진 것이다.

풀이

소문항 (i)

$z = x + \mathrm{i}y$라 하자. 첫 번째 방정식은

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2 \iff x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0.$$

이다. 두 번째 방정식은

$$\begin{aligned} & (x-1)^2 + (y+1)^2 = 2\left[(x-1)^2 + y^2\right] \\ \iff\ & x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2 = 2x^2 + 2y^2 - 4x + 2 \\ \iff\ & 0 = x^2 + y^2 - 2x - 2y. \end{aligned}$$

이다. 각 단계는 거꾸로도 성립하므로, 두 방정식은 모두 $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$과 동치이고 같은 자취(locus)를 나타낸다. 이 자취는 중심이 $1 + \mathrm{i}$이고 반지름이 $\sqrt{2}$인 원이다. 이 원은 $0, 2, 2\mathrm{i}$ (그리고 $2 + 2\mathrm{i}$)를 지나며, 가장 낮은 점은 실수축 바로 아래에 있는 $1 + (1 - \sqrt{2})\mathrm{i}$이다.

소문항 (ii)

$z \neq 0$일 때,

$$\frac{z-2}{z} = \frac{(z-2)\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x^2+y^2-2x+2\mathrm{i}y}{x^2+y^2},$$

이다. 왜냐하면 $(z-2)\bar{z} = |z|^2 - 2\bar{z} = x^2+y^2-2x+2\mathrm{i}y$이기 때문이다.

> **생각해 보기** $\arg(\text{어떤 수}) = \frac{\pi}{4}$라는 것은 그 수의 실수부와 허수부에 대해 정확히 무엇을 말해 주는가?

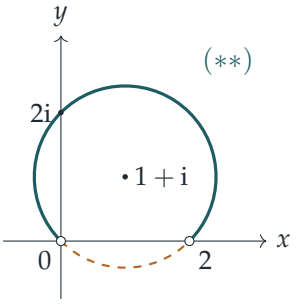
0이 아닌 복소수 $a+\mathrm{i}b$의 편각이 $\frac{\pi}{4}$인 것은 그 수가 반직선(ray) $a = b > 0$ 위에 있을 때, 그리고 그때에만이다. 같다는 것만으로는 충분하지 않다. $a = b < 0$이면 편각은 $-\frac{3\pi}{4}$가 된다. 분모 x^2+y^2은 양수이므로, $(**)$가 성립할 필요충분조건은

$$x^2+y^2-2x = 2y \quad \text{이고} \quad 2y > 0,$$

즉 z가 (i)의 원 위에 있으면서 $y > 0$인 것이다. 조건 $y > 0$은 몫이 정의되지 않는 $z = 0$과, 몫이 0이 되어 편각이 없는 $z = 2$를 자동으로 제외한다.

따라서 $(**)$는 원에서 실수축 위쪽 부분을 나타낸다. 즉 0에서 출발하여 2i와 $2+2\mathrm{i}$를 거쳐 2에 이르는 우호(major arc)이며, 양 끝점은 제외된다. 실수축 아래쪽의 짧은 호에서는 편각이 $-\frac{3\pi}{4}$가 된다.

이는 기하학적으로도 맞아떨어진다. $\arg\frac{z-2}{z}$는 z에서 0과 2로 그은 두 현 사이의 각이다. 0과 2를 잇는 현은 중심 $1+\mathrm{i}$에 대해 직각을 이루므로, 원주각과 중심각의 정리(angle-at-the-centre theorem)에 의해 우호 위의 모든 점에서 $\frac{\pi}{4}$의 각을 이룬다.



원 전체가 $(*)$이고, 실선으로 된 호(끝점 0과 2는 제외)가 $(**)$이며, 점선으로 된 호는 $(**)$에 속하지 않는다.

소문항 (iii)

$w = 2/z$이므로 $z \neq 0$이고 $z = 2/w$이다. 원의 두 번째 형태 $|z-(1-\mathrm{i})|^2 = 2|z-1|^2$을 이용하자. 대입하면

$$z-1 = \frac{2-w}{w}, \qquad z-(1-\mathrm{i}) = \frac{2-(1-\mathrm{i})w}{w} = \frac{(1-\mathrm{i})\left[(1+\mathrm{i})-w\right]}{w},$$

이다. 여기서 $\frac{2}{1-\mathrm{i}} = 1+\mathrm{i}$를 이용했다. $|1-\mathrm{i}|^2 = 2$이므로 방정식은

$$\frac{2\,|w-(1+\mathrm{i})|^2}{|w|^2} = \frac{2\,|w-2|^2}{|w|^2} \iff |w-(1+\mathrm{i})| = |w-2|.$$

이 된다. 따라서 w는 $1+\mathrm{i}$와 2에서 같은 거리에 있고, 그 자취는 두 점을 잇는 선분의 수직이등분선(perpendicular bisector)이다. 중점은 $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$이고 선분의 방향은 $1-\mathrm{i}$이므로, 수직이등분선의 방향은 $1+\mathrm{i}$이다. $w = u+\mathrm{i}v$로 놓으면 자취는 직선

$$v = u-1.$$

이다. 이 직선 위의 모든 점이 실제로 나타난다. 0은 이 직선 위에 있지 않으므로 직선 위의 각 w는 0이 아니며, 위의 가역적인 단계들에 의해 $z = 2/w$는 $(*)$를 만족한다. 원 위에서 상(image)이 없는 유일한 점은 $z = 0$이며, 이 점은 "무한대로 보내진다". 원점을 지나는 원은 $w = 2/z$에 의해 직선으로 옮겨지는데, 예상한 그대로이다.

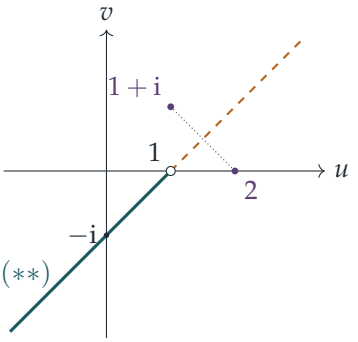
$(**)$에 대응하는 부분을 구하기 위해

$$\frac{z-2}{z} = 1-\frac{2}{z} = 1-w,$$

임에 주목하자. 따라서 $(**)$는 $\arg(1-w) = \frac{\pi}{4}$, 즉 $r>0$에 대해 $1-w = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$가 된다. 그러므로

$$w = 1-\frac{r}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{i}), \qquad r>0,$$

이고, 이것은 직선 $v = u-1$ 중에서 $w=1$ (제외)에서 시작하여 왼쪽 아래로 뻗는 반직선, 즉 $u<1$, 다시 말해 $v<0$인 점들이다. 이는 (ii)와 일치한다. $\operatorname{Im} w = -2y/|z|^2$이므로 $y>0$은 $v<0$에 대응한다. 예를 들어 $z = 2\mathrm{i}$는 $w = -\mathrm{i}$로 옮겨지고, $z=2$는 제외된 끝점 $w=1$로 옮겨진다.



직선 $v = u - 1$ 전체가 $(*)$의 상이고, 실선으로 된 반직선($u < 1$, $w = 1$은 제외)이 $(**)$의 상이다. 점선으로 된 선분은 이 직선이 이등분하는 두 점을 잇는다.

검산

- $z = 2\mathrm{i}$는 원 위에 있고 실수축 위쪽에 있다. $\frac{2\mathrm{i}-2}{2\mathrm{i}} = 1 + \mathrm{i}$이고, 그 편각은 $\frac{\pi}{4}$이다. 그 상 $w = -\mathrm{i}$는 $u < 1$이면서 $v = u - 1$을 만족한다.
- 원의 가장 높은 점 $z = 1 + (1 + \sqrt{2})\mathrm{i}$는 $w \approx 0.2929 - 0.7071\mathrm{i}$로 옮겨지며, 실제로 $0.2929 - 1 = -0.7071$이다.
- 실수축 아래의 점 $z = 1 + (1 - \sqrt{2})\mathrm{i}$에서는 $\arg \frac{z-2}{z} = -\frac{3\pi}{4}$이다. 그 상은 $u > 1$이어서 직선의 나머지 절반 위에 있다.

흔한 실수

- $\arg Z = \frac{\pi}{4}$를 단지 $\mathrm{Re}\, Z = \mathrm{Im}\, Z$로 보고 원 전체라고 주장하는 것. 두 부분이 모두 양수라는 조건도 필요하다.
- (ii)에서 $z = 0$과 $z = 2$를, 또는 (iii)에서 $w = 1$을 제외하는 것을 잊는 것.
- 원의 상이 또 다른 원일 것이라고 기대하는 것. $w = 2/z$에 의해 원점을 지나는 원은 직선으로 옮겨진다.

STEP 너머

사상 $w = 2/z$는 뫼비우스 변환(Möbius transformation)이다. 이러한 사상은 원과 직선을 원과 직선으로 옮기며, 원이 직선으로 옮겨지는 것은 그 원이 무한대로 보내지는 점을 지날 때, 그리고 그때에만이다. 여기서 호의 끝점 0과 2는 각각 ∞와 1로 옮겨진다. 이 두 끝점이 이루는 각을 재는 몫 $\frac{z-2}{z-0}$은 $1 - w$, 즉 상의 점에서 1을 향하는 방향이 된다. 이것이 (ii)의 호가 (iii)에서 반직선이 되는 이유이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이러한 기하학적 관점을 아름답게 전개한다.

풀이

STEP III 2001, 문제 9

역학 • 마찰과 단진동

> **STEP III 2001, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/01-s3-q9

핵심 아이디어

두 받침대(beam)는 수평면과 α의 각을 이루는 직선을 따라 d만큼 떨어져 있으므로, 판자는 각 α로 기울어져 놓인다. 판자가 미끄러지면 무게가 B_1에서 B_2로 옮겨 가고, 두 수직항력(normal reaction)은 무게중심(centre of gravity)의 위치에 따라 **선형으로** 변한다. 두 마찰계수(coefficient of friction)가 서로 다르므로 전체 마찰력도 선형으로 변하며, 변위에 비례하는 복원력이 작용하면 운동은 단진동(simple harmonic motion)이 된다. 조건 $\mu_1 + \mu_2 = 2\tan\alpha$는 바로 그 운동의 중심을 두 받침대의 한가운데에 놓는 조건이다.

풀이

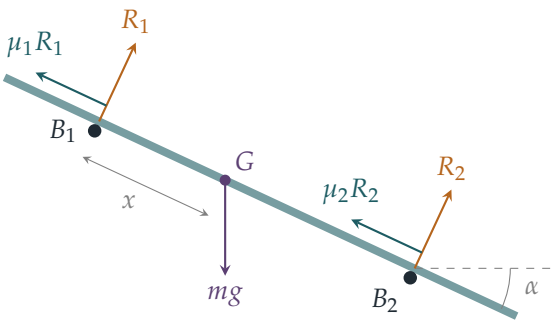
모형

판자를 질량 m인 강체 막대(rigid rod)로 보고, 두 받침대에 계속 닿아 있다고 하자. 받침대는 점으로 본다. B_1에서 B_2까지의 선분의 길이는

$$\sqrt{d^2\sin^2\alpha + d^2\cos^2\alpha} = d$$

이고 수평면과 각 α를 이루므로, 판자는 이 직선을 따라 B_1에서 B_2 쪽으로 내려가는 방향으로 놓인다. 무게중심 G의 B_1로부터의 거리를 판자를 따라 비탈 아래쪽으로 잰 값을 x라 하자. 그러면 놓는 순간 $x = 0$이고, $x = d$일 때 G는 B_2 바로 위에 있다.

$0 \le x \le d$인 동안 G는 두 받침대 사이에 있다. 작용하는 힘은 G에 작용하는 무게 mg, B_1, B_2에서 판자에 수직으로 작용하는 수직항력 R_1, R_2, 그리고 판자가 비탈 아래로 움직이는 동안 비탈 위쪽으로 작용하는 마찰력(friction) $\mu_1 R_1$과 $\mu_2 R_2$이다.



수직항력

판자는 자신에 수직인 방향으로는 움직이지 않으므로, 판자에 수직인 방향으로 힘을 분해하면

$$R_1 + R_2 = mg\cos\alpha.$$

또한 판자는 회전하지도 않으므로, G에 대한 모멘트(moment)를 구하면(무게와 두 마찰력은 G를 지나는 직선이나 판자를 따라 작용하므로 모멘트가 없다)

$$R_1 x = R_2(d - x).$$

이 두 식을 풀면

$$R_1 = \frac{mg\cos\alpha\,(d-x)}{d}, \qquad R_2 = \frac{mg\cos\alpha\,x}{d}.$$

$0 \le x \le d$에서 둘 다 음이 아니므로, 판자는 실제로 두 받침대 위에 계속 놓여 있다.

운동방정식

판자가 비탈 아래로 움직이는 동안 비탈 아래 방향으로 힘을 분해하면

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg\sin\alpha - \mu_1 R_1 - \mu_2 R_2 \\ &= mg\cos\alpha\left[\tan\alpha - \mu_1 - \frac{(\mu_2-\mu_1)x}{d}\right]. \end{aligned}$$

이제 주어진 조건을 쓰자. $\mu_1 + \mu_2 = 2\tan\alpha$에서 $\tan\alpha - \mu_1 = \frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1)$이다. 따라서

$$\ddot{x} = -\omega^2\left(x - \tfrac{1}{2}d\right), \qquad \text{여기서} \qquad \omega^2 = \frac{g(\mu_2-\mu_1)\cos\alpha}{d} > 0,$$

이고, 이 부등식은 $\mu_2 > \mu_1$이고 $\cos\alpha > 0$이기 때문에 성립한다.

생각해 보기 판자는 실제로 움직이기 시작하는가? 그리고 마찰력은 항상 비탈 위쪽을 향하는가?

$x = 0$에서 $\ddot{x} = \frac{1}{2}\omega^2 d > 0$이므로 판자는 실제로 아래로 미끄러지기 시작한다. 위의 방정식은 $x = \frac{1}{2}d$를 중심으로 하는 단진동이고, $t = 0$에서 $x = 0$, $\dot{x} = 0$이므로 그 해는

$$x = \tfrac{1}{2}d\,(1 - \cos\omega t), \qquad \dot{x} = \tfrac{1}{2}d\,\omega \sin\omega t.$$

$0 < t < \pi/\omega$에서 $\dot{x} > 0$이므로 판자는 그동안 내내 실제로 비탈 아래로 움직이며, 마찰력이 비탈 위쪽으로 작용한다는 가정은 옳았다. 또한 그동안 내내 $0 \le x \le d$이므로 G는 두 받침대 사이에 머물고, R_1, R_2에 대한 식도 계속 유효하다.

정지하기

속도는 $\omega t = \pi$일 때 처음으로 다시 0이 되고, 이때 $x = \frac{1}{2}d(1 - \cos\pi) = d$이다. 즉 무게중심이 B_2 바로 위에 있다. 이 순간 $R_1 = 0$이고 $R_2 = mg\cos\alpha$이므로 판자는 B_2 하나에만 얹혀 있다. 판자는 그 상태로 정지해 있는데, B_2에서의 마찰력은 최대 $\mu_2 mg\cos\alpha$까지 낼 수 있고 무게의 비탈 아래 방향 성분은 $mg\sin\alpha$이며

$$\mu_2 = \tfrac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2) + \tfrac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1) > \tfrac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2) = \tan\alpha.$$

이기 때문이다. 따라서 판자는

$$\frac{\pi}{\omega} = \pi\left(\frac{d}{g(\mu_2 - \mu_1)\cos\alpha}\right)^{\frac{1}{2}},$$

의 시간이 지난 뒤 무게중심이 B_2 위에 놓인 채로 정지하며, 이것이 증명하려던 것이다.

검산

- $\mu_2 - \mu_1$이 작으면 판자는 거의 감속하지 않고 시간이 오래 걸리는데, 공식도 그렇게 말해 준다. 이때 각 μ는 $\tan\alpha$에 가까우므로 알짜힘이 어디에서나 0에 가깝다.
- 임의의 α, d, μ_1(단, $\mu_2 = 2\tan\alpha - \mu_1$)에 대해 운동방정식을 수치적으로 단계별로 계산하고, 속도가 처음으로 다시 0이 될 때 멈추었다. 예를 들어 $\alpha = 0.7$, $d = 2$, $\mu_1 = 0.3$, $g = 9.8$이면 예측되는 시간은 약 1.56초이다. 모든 경우에 정지 시각과 위치는 π/ω 및 $x = d$와 (상대오차) 10^{-5} 이내로 일치했다.

흔한 실수

- $R_1 = R_2 = \frac{1}{2}mg\cos\alpha$로 놓는 것. 수직항력은 G의 위치에 따라 달라지며, 바로 그 의존성이 진동을 만들어 낸다.
- 판자가 그 뒤에도 정지해 있는지 확인하지 않고 "속도가 0이다"에서 멈추는 것. $\mu_2 \ge \tan\alpha$임을 보여야 한다.

STEP 너머

이 운동은 하중에 따라 변하는 마찰력이 “용수철” 역할을 하는 진동자의 반주기이다. 마찰력이 위치나 속도에 따라 달라지는 계는 풍부한 현상을 보이는데, 삐걱거리는 경첩이나 활로 켜는 바이올린 현 뒤에 숨은 스틱-슬립 진동(stick–slip oscillation)도 그중 하나이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 마찰, 강체의 평형, 단진동을 꼼꼼하게 다룬다.

풀이

STEP III 2001, 문제 10

역학 • 상대 속도

> **STEP III 2001, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/01-s3-q10

핵심 아이디어

상대 속도(relative velocity)는 차이다. C에 대한 A의 상대 속도는 $\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}$이다. 두 조건을 모두 내적(dot product)으로 쓰고 나면 모든 것을 중점 $\frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$를 기준으로 재게 되고, 두 조건은 두 제곱의 차가 된다. 기하학적으로 읽으면 이 방정식들은 원과 직선을 나타내며, 속도가 두 개라는 개수도 바로 여기에서 나온다.

풀이

조건

배들을 바다의 수평면 위에서 움직이는 입자로 취급하므로, 모든 속도는 2차원 벡터이다. C에 대한 A와 B의 상대 속도는

$$\mathbf{a} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{u}, \qquad \mathbf{b} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{u}.$$

이다. 크기가 같고 서로 수직이라는 것은

$$|\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}|^2 = |\mathbf{v}_2 - \mathbf{u}|^2 \qquad \text{그리고} \qquad (\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v}_2 - \mathbf{u}) = 0.$$

을 뜻한다.

두 방정식

다음과 같이 놓는다.

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} - \tfrac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2), \qquad \mathbf{d} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2).$$

그러면 $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \mathbf{d}$이고 $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) - \mathbf{d}$이므로

$$\mathbf{a} = \mathbf{d} - \mathbf{w}, \qquad \mathbf{b} = -\mathbf{d} - \mathbf{w}.$$

이다. 이제 $\mathbf{w} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{w}$를 이용하여 각 조건을 전개한다.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -(\mathbf{d} - \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{d} + \mathbf{w}) = |\mathbf{w}|^2 - |\mathbf{d}|^2,$$
$$|\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2 = (|\mathbf{d}|^2 - 2\mathbf{d} \cdot \mathbf{w} + |\mathbf{w}|^2) - (|\mathbf{d}|^2 + 2\mathbf{d} \cdot \mathbf{w} + |\mathbf{w}|^2) = -4\,\mathbf{w} \cdot \mathbf{d}.$$

따라서 수직 조건 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$은 정확히 $|\mathbf{w}|^2 = |\mathbf{d}|^2$, 즉

$$\left|\mathbf{u} - \tfrac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)\right|^2 = \left|\tfrac{1}{2}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)\right|^2,$$

과 같고, 크기가 같다는 조건 $|\mathbf{a}|^2 = |\mathbf{b}|^2$는 정확히 $\mathbf{w} \cdot \mathbf{d} = 0$, 즉 (2를 곱하면)

$$\left(\mathbf{u} - \tfrac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)\right) \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = 0.$$

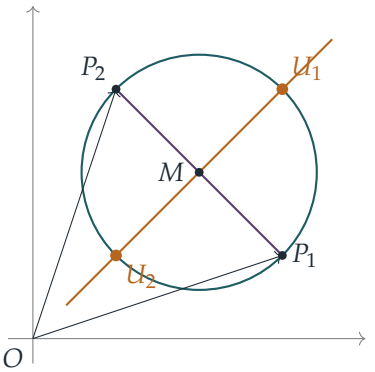
과 같다. 이것이 구하는 두 방정식이다. 위의 각 단계는 항등식이었으므로 논증을 거꾸로 따라갈 수도 있다. 즉 두 방정식이 성립하는 것은 두 조건이 성립할 **필요충분조건**(*if and only if*)이다.

C의 속도가 두 개인 이유

속도들을 공통의 원점에서 시작하는 위치 벡터로 그리고, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{u}$의 끝점을 각각 P_1, P_2, U라 하며, P_1P_2의 중점을 M이라 하자.

? **생각해 보기** 각 방정식은 점 U가 있을 수 있는 위치에 대해 무엇을 말해 주는가?

첫 번째 방정식은 U가 M으로부터 거리 $\frac{1}{2}|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$에 있다는 것, 즉 P_1P_2를 지름으로 하는 원 위에 있다는 것을 말한다. 두 번째 방정식은 MU가 P_1P_2에 수직이라는 것(또는 $U = M$), 즉 U가 P_1P_2의 수직이등분선(perpendicular bisector) 위에 있다는 것을 말한다.



평면에서 반지름이 양수인 원의 중심을 지나는 직선은 그 원과 정확히 두 점, 곧 한 지름의 양 끝점에서 만난다. 반지름은 $\frac{1}{2}|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$이고, 이 값은 바로 $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2$이기 때문에 양수이다. 따라서 C의 속도로 가능한 것은 정확히 두 개이다.

$$\mathbf{u} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \pm \tfrac{1}{2}\,\mathbf{d}^{\perp},$$

여기서 $\mathbf{d}^{\perp}$는 $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$를 직각만큼 회전시킨 벡터이다. ($\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$이면 원은 한 점 M으로 줄어들고, 이때 두 상대 속도가 모두 영벡터가 되므로 조건은 쓸모 있는 정보를 주지 못한다.) 그림에서 직각 P_1UP_2는 반원에 대한 원주각이며, U가 수직이등분선 위에 있으므로 $UP_1 = UP_2$이다.

마지막 부분

이제 $|\mathbf{v}_1| = |\mathbf{v}_2| = k$이고 $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$이며, $k > 0$이다(수직이라는 개념은 영벡터가 아닌 벡터에 대해서만 의미가 있다). 그러면 $\mathbf{v}_1$과 $\mathbf{v}_2$는 서로 수직이고 영벡터가 아니므로 평면을 생성(span)하며, 따라서 $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2$로 쓸 수 있다.

두 번째 방정식에 $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$과 $|\mathbf{v}_1|^2 = |\mathbf{v}_2|^2$를 이용하면

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = \tfrac{1}{2}\left(|\mathbf{v}_1|^2 - |\mathbf{v}_2|^2\right) = 0, \qquad \text{따라서} \qquad \alpha k^2 - \beta k^2 = 0,$$

을 얻고, 그러므로 $\beta = \alpha$이다. 첫 번째 방정식은 전개하면

$$|\mathbf{u}|^2 - \mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \tfrac{1}{4}|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2|^2 = \tfrac{1}{4}|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2.$$

이다. $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$이므로 $|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2|^2$와 $|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2$는 모두 $2k^2$와 같다. 따라서 이 두 항은 소거되고 $|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$가 된다. $\mathbf{u} = \alpha(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$를 대입하면 이 식은

$$2\alpha^2 k^2 = 2\alpha k^2 \quad \Longrightarrow \quad \alpha(\alpha - 1) = 0.$$

이 된다. 따라서 $\alpha = 0$이면 $\mathbf{u} = \mathbf{0}$이고, $\alpha = 1$이면 $\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$이다. 그러므로 $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$이면 요구한 대로 $\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$이다.

이는 물리적으로도 타당하다. C가 정지해 있으면 상대 속도는 $\mathbf{v}_1$과 $\mathbf{v}_2$ 자신이고, 이들은 이미 조건을 만족한다. $\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$이면 상대 속도는 $-\mathbf{v}_2$와 $-\mathbf{v}_1$이고, 이들 역시 길이가 같고 서로 수직이다.

검산

그림에서처럼 $\mathbf{v}_1 = (3,1)$, $\mathbf{v}_2 = (1,3)$으로 잡자. 공식에 따르면 $\mathbf{u} = (2,2) \pm (1,1)$, 즉 $(3,3)$ 또는 $(1,1)$이다. $\mathbf{u} = (3,3)$일 때 상대 속도는 $(0,-2)$와 $(-2,0)$이고, $(1,1)$일 때는 $(2,0)$과 $(0,2)$이다. 두 쌍 모두 길이가 같고 서로 수직이다. 컴퓨터로 무작위 쌍 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$를 10^4개 시험하여 두 항등식과 두 해를 확인했고, 길이가 같고 서로 수직인 무작위 쌍 10^3개에 대해서는 해가 정확히 $\mathbf{0}$과 $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$임을 확인했다.

흔한 실수

- C에 대한 A의 상대 속도를 $\mathbf{u} - \mathbf{v}_1$로 쓰는 것. 이 문제의 조건에서는 부호가 영향을 주지 않지만, 대부분의 상대 속도 문제에서는 부호가 중요하다.
- 속도가 **정확히** 두 개인 이유를 말하지 않는 것. 이 개수는 평면에서 다룬다는 점(3차원에서는 해가 원 전체를 이룬다)과 반지름이 0이 아니라는 점에 달려 있다.

STEP 너머

$\mathbf{u}$에서 $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$로 옮겨 가는 것은 기준계(reference frame)의 변환이며, 모든 속도를 같은 벡터만큼 평행이동해도 상대 속도가 변하지 않는다는 사실은 고전역학의 출발점인 갈릴레이 불변성(Galilean invariance)이다. 여기서 사용한, 속도를 점으로 그리는 "속도 그림" 관점은 충돌 문제와 추격 문제도 기하 문제로 바꾸어 준다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 상대 운동과 기준계를 꼼꼼하게 전개한다.

풀이

STEP III 2001, 문제 11

역학 • 회전 에너지 보존

STEP III 2001, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/01-s3-q11

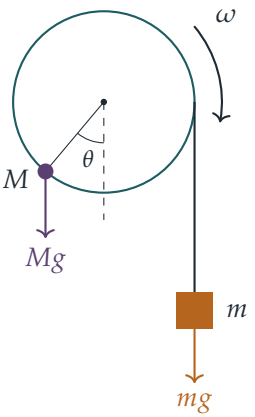
핵심 아이디어

모든 것이 매끄럽다(축은 마찰이 없고 줄은 가볍다). 따라서 역학적 에너지가 보존되며(conservation of mechanical energy), 장력(tension)이나 힘을 따질 필요 없이 에너지 방정식 하나로 ω를 θ의 함수로 얻는다. 원기둥은 정확히 ω^2이 0이 될 때 멈춘다. 그러므로 둘째 부분은 θ에 대한 함수 하나에 관한 질문이 된다. 매달린 질량이 잃는 위치 에너지(potential energy)가 언제나 입자가 얻는 위치 에너지보다 커야 한다. 식을 정리하면 이는 m/M과 $(1-\cos\theta)/\theta$의 최댓값을 비교하는 문제가 되고, 이는 간단한 최대화 문제이다.

풀이

각속도

m과 M을 입자로, 줄은 가볍고 늘어나지 않으며 원기둥 위에서 미끄러지지 않는 것으로, 축은 매끄러운 것으로 모형화한다. 원기둥이 m이 내려가는 방향으로 각 θ만큼 돌았다고 하고, $\omega = \dot{\theta}$라 하자.



원기둥이 θ만큼 돌면 길이 $a\theta$의 줄이 풀리므로, m은 $a\theta$만큼 내려가고 속력 $a\omega$로 움직인다. 입자 M은 테두리 위에 있으므로 속력 $a\omega$로 움직인다. 이 입자는 처음에 축보다 a만큼 아래에 있었고 지금은 $a\cos\theta$만큼 아래에 있으므로, $a(1-\cos\theta)$만큼 올라갔다.

운동 에너지(kinetic energy)는

$$\tfrac{1}{2}I\omega^2 + \tfrac{1}{2}M(a\omega)^2 + \tfrac{1}{2}m(a\omega)^2 = \tfrac{1}{2}\big(I + (M+m)a^2\big)\omega^2.$$

이다. 매끄러운 축은 일을 하지 않고, 가볍고 늘어나지 않는 줄은 에너지를 손실 없이 전달한다. 따라서 운동 에너지의 증가량은 위치 에너지의 알짜 감소량과 같다.

$$\tfrac{1}{2}\big(I + (M+m)a^2\big)\omega^2 = mga\theta - Mga(1-\cos\theta),$$

따라서

$$\boxed{\omega^2 = \frac{2ga\big(m\theta - M(1-\cos\theta)\big)}{I + (M+m)a^2}} \qquad \text{그리고} \qquad \omega = \sqrt{\frac{2ga\big(m\theta - M(1-\cos\theta)\big)}{I + (M+m)a^2}}.$$

이다.

모형화와 관련하여 확인할 점이 하나 있다. 줄이 계속 팽팽해야 한다. 에너지 방정식을 시간에 대해 미분하면 $\big(I + (M+m)a^2\big)\ddot{\theta} = ga(m - M\sin\theta)$를 얻고, 장력은 $T = m(g - a\ddot{\theta})$이다. 그런데 $a\ddot{\theta} < g$는 $a^2(m - M\sin\theta) < I + (M+m)a^2$, 즉 $-Ma^2\sin\theta < I + Ma^2$와 동치이고, 이는 항상 참이다. 따라서 운동하는 내내 $T > 0$이고, 에너지 방정식은 모든 θ에 대해 성립한다.

결코 멈추지 않음

처음에 $\ddot{\theta} = gam/(I + (M+m)a^2) > 0$이므로, 원기둥은 실제로 우리가 정한 방향으로 돌기 시작한다. ω는 연속이므로 0을 지나야만 부호가 바뀔 수 있다. 따라서 모든 $\theta > 0$에 대

해 $\omega^2 > 0$이면 원기둥은 영원히 계속 돈다. $k = m/M$이라 하면, ω^2의 식으로부터 이는 정확히 다음 조건이 성립할 때 일어난다.

$$k\theta > 1 - \cos\theta \quad \text{모든} \theta > 0, \qquad \text{즉} \qquad k > h(\theta) = \frac{1-\cos\theta}{\theta} \quad \text{모든} \theta > 0.$$

그러므로 $\theta > 0$에서 h의 최댓값을 구해야 한다.

정류점(stationary point).

$$h'(\theta) = \frac{\theta\sin\theta - (1-\cos\theta)}{\theta^2}.$$

이다. $\sin\theta = 2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta$와 $1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{1}{2}\theta$를 이용하면

$$h'(\theta) = \frac{2\sin\frac{1}{2}\theta\left(\theta\cos\frac{1}{2}\theta - \sin\frac{1}{2}\theta\right)}{\theta^2}.$$

이다. $0 < \theta < \pi$에서 $\sin\frac{1}{2}\theta$와 $\cos\frac{1}{2}\theta$는 모두 양수이므로, $h'(\theta)$의 부호는 $\theta - \tan\frac{1}{2}\theta$의 부호와 같다. $u(\theta) = \tan\frac{1}{2}\theta - \theta$라 하자. 그러면 $u(0) = 0$이고, $u'(\theta) = \frac{1}{2}\sec^2\frac{1}{2}\theta - 1$은 0 근처에서 음수이며, $u''(\theta) = \frac{1}{2}\sec^2\frac{1}{2}\theta\tan\frac{1}{2}\theta > 0$이므로 u는 $[0,\pi)$에서 볼록(convex)하다. u는 0 아래로 내려갔다가 $\theta \to \pi$일 때 $+\infty$로 발산한다. 볼록함수는 0과 많아야 두 번 만나므로, u는 $(0,\pi)$에서 정확히 하나의 영점을 가지며, 그것이 α이다. 따라서 h는 $(0,\alpha)$에서 증가하고 (α,π)에서 감소한다.

? **생각해 보기** 최댓값에서 h의 값은 무엇이며, 더 큰 θ에서는 어떠한가?

$\theta = \alpha$에서 h'의 분자가 0이 되므로 $1-\cos\alpha = \alpha\sin\alpha$이고, 따라서

$$h(\alpha) = \frac{1-\cos\alpha}{\alpha} = \sin\alpha.$$

이다. $\pi \le \theta \le 2\pi$에서는 $\sin\frac{1}{2}\theta \ge 0$이고 $\cos\frac{1}{2}\theta \le 0$이므로 $\theta\cos\frac{1}{2}\theta - \sin\frac{1}{2}\theta \le 0$이고 $h' \le 0$이다. 즉 h는 2π까지 계속 감소하므로, $(\alpha, 2\pi]$에서 $h < \sin\alpha$이다. $\theta > 2\pi$에서는 $h(\theta) \le 2/\theta < 1/\pi$이다. 끝으로 $u(\frac{3}{4}\pi) = \tan\frac{3}{8}\pi - \frac{3}{4}\pi \approx 2.414 - 2.356 > 0$이고 $u(\frac{2}{3}\pi) = \sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi < 0$이므로 $\frac{2}{3}\pi < \alpha < \frac{3}{4}\pi$이고, 따라서 $\sin\alpha > \sin\frac{3}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\pi}$이다. 그러므로 $\sin\alpha$는 $\theta > 0$에서 h의 최댓값이며, 이 값은 $\theta = \alpha$에서만 얻어진다.

결론. $m/M > \sin\alpha$이면 모든 $\theta > 0$에 대해

$$m\theta - M(1-\cos\theta) = M\theta\big(k - h(\theta)\big) \ge M\theta(k - \sin\alpha) > 0,$$

이므로 모든 $\theta > 0$에 대해 $\omega^2 > 0$이고, 원기둥은 멈추지 않고 회전한다. 이로써 증명이 끝났다.

(역으로, $m/M < \sin\alpha$이면 $\theta = \alpha$에서 $\omega^2 < 0$이므로 ω는 그 전에 0에 도달하고, 원기둥은 멈추었다가 되돌아간다. 경계인 $m/M = \sin\alpha$의 경우, 계는 평형 위치(equilibrium position) $\theta = \alpha$를 향해 아주 천천히 다가가지만 결코 그 위치에 완전히 도달하지는 않는다.)

검산

- $M = 0$이면 식은 $\omega^2 = 2gma\theta/(I + ma^2)$가 되는데, 이는 도르래에서 줄이 풀리며 내려가는 질량에 대한 표준적인 결과이다. 각가속도(angular acceleration)가 일정할 때처럼 ω^2이 선형으로 증가한다.
- 이분법(bisection)으로 $\alpha = \tan\frac{1}{2}\alpha$를 풀면 $\alpha \approx 2.3311$(약 133.6°)이고 $\sin\alpha \approx 0.7246$이다. $0 < \theta < 100$에서 $(1 - \cos\theta)/\theta$를 수치적으로 탐색해도 같은 최댓값 0.7246을 얻는다.
- 임의의 I, a, M, m에 대해 운동 방정식(equation of motion)을 수치적으로 단계별로 계산하면 ω^2의 식이 재현되며, $m/M = 0.735$일 때는 원기둥이 결코 멈추지 않고 $m/M = 0.715$일 때는 멈춘다.

흔한 실수

- M이나 m의 운동 에너지를 빠뜨리는 실수. 둘 다 속력 $a\omega$로 움직이므로, 유효 관성 모멘트(moment of inertia)는 $I + (M + m)a^2$이다.
- M의 높이를 잘못 구하는 실수. M은 $a\sin\theta$가 아니라 $a(1 - \cos\theta)$만큼 올라간다.
- h가 α에서 극댓값(local maximum)을 가진다는 것만 보이고, 그보다 큰 모든 θ에서 h가 더 작다는 것을 확인하지 않는 실수.

STEP 너머

이것은 퍼텐셜(potential) 안에서의 1자유도(one degree of freedom) 운동이다. 즉 $\frac{1}{2}J\omega^2 + V(\theta) = 0$이고 $V(\theta) = Mga(1 - \cos\theta) - mga\theta$이며, 이는 기울어진 "빨래판(washboard)" 퍼텐셜이다. 정지 상태에서 출발할 때, 모든 $\theta > 0$에 대해 V가 출발점의 값보다 계속 작게 유지되는 경우에 정확히 운동이 끝없이 이어진다. 같은 그림이 물리학에서 구동 진자(driven pendulum)와 조셉슨 접합(Josephson junction)도 설명한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)에서 이러한 종류의 에너지 도표를 다룬다.

풀이

STEP III 2001, 문제 12

확률과 통계 • 지시변수를 이용한 기댓값

STEP III 2001, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/01-s3-q12

핵심 아이디어

소문항 (i)에서는 검은 공의 개수의 분포를 구하려 하지 말고, 그 개수를 검은 공 하나마다 지시확률변수(indicator) 하나씩으로 쪼갠 뒤 기댓값의 선형성(linearity of expectation)을 이용한다. 주머니가 빌 때까지 비복원추출(drawing without replacement)을 하는 것은 모든 공을 무작위로 한 줄로 늘어놓는 것과 같으므로, 각 지시확률변수는 대칭성 논증으로 해결된다. 소문항 (ii)에서는 흰 공이 뽑히기 전까지 주머니의 구성이 전혀 바뀌지 않으므로, 각 흰 공을 기다리는 시간은 기하분포(geometric distribution)를 따른다. 그리고 "이를 이용하여" 부분은 흰 공 하나가 빠지고 나면 흰 공이 하나 적은 같은 상황으로 돌아온다는 점을 알아차리는 데서 나온다.

풀이

소문항 (i)

주머니가 빌 때까지 계속 공을 꺼낸다고 상상하자. 매번 무작위로 꺼내고 아무것도 되돌려 넣지 않으므로, $b+w$개의 공이 나오는 순서는 이 공들의 균등하게 무작위인 순열이다. 마지막 흰 공이 꺼내질 때까지 뽑힌 검은 공은 정확히 이 순서에서 마지막 흰 공보다 앞에 오는 검은 공들이다.

검은 공에 $1, 2, \ldots, b$의 번호를 붙이고, 검은 공 j가 마지막 흰 공보다 먼저 나오면 $I_j = 1$, 그렇지 않으면 $I_j = 0$이라 하자. 마지막 흰 공이 꺼내질 때까지 뽑힌 검은 공의 개수를 N이라 하면,

$$N = I_1 + I_2 + \cdots + I_b, \qquad \text{따라서} \qquad \mathrm{E}(N) = \sum_{j=1}^{b} \mathrm{P}(I_j = 1)$$

이다. 이는 기댓값의 선형성에 의한 것이며, 여기에는 I_j들 사이의 독립성이 전혀 필요하지 않다.

생각해 보기 검은 공 j가 모든 흰 공보다 뒤에 나올 확률은 얼마인가?

검은 공 j와 w개의 흰 공으로 이루어진 $w+1$개의 공만 살펴보자. 모든 공의 균등하게 무작위인 순열에서 이 $w+1$개 공의 상대적인 순서 역시 균등하게 무작위이므로, 검은 공 j는 이들 사이의 $w+1$개 자리 중 어느 자리에나 같은 확률로 놓인다. 검은 공 j가 이 무리에서 맨 마지막일 확률은 $\frac{1}{w+1}$이고, 이것이 바로 사건 $I_j = 0$이다. 따라서

$$\mathrm{P}(I_j = 1) = 1 - \frac{1}{w+1} = \frac{w}{w+1},$$

이고

$$\boxed{\mathrm{E}(N) = \frac{bw}{w+1}.}$$

이다.

소문항 (ii)

이제 검은 공은 다시 주머니에 넣으므로, 흰 공이 뽑힐 때까지 주머니에는 언제나 검은 공 b개와 흰 공 w개가 들어 있다. 주머니의 구성이 매번 같으므로, 각 시행은 이전 시행과 독립적으로 확률 $p = \frac{b}{b+w}$로 검은 공, 확률 $q = \frac{w}{b+w}$로 흰 공이 나온다.

첫 번째 흰 공이 나오기 전까지 검은 공이 뽑힌 횟수를 X라 하자. $X = n$은 검은 공이 n번 나온 뒤 흰 공이 나온다는 뜻이므로

$$\mathrm{P}(X = n) = p^n q, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

이다. $b = 0$이면 $X = 0$이므로 결과는 자명하다. 따라서 $b \geq 1$이라 하면 $0 < p < 1$이고, $|x| < 1$일 때 $\sum_{n\geq 1} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$(등비급수를 미분하면 얻는다)를 이용하면

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} np^n q = pq \sum_{n=1}^{\infty} np^{n-1} = \frac{pq}{(1-p)^2} = \frac{p}{q} = \frac{b/(b+w)}{w/(b+w)} = \frac{b}{w},$$

이다. 여기서 $1 - p = q$를 이용하였다. 이것이 구하려던 결과이다.

마지막 흰 공에 대해서는, 검은 공이 뽑힌 전체 횟수를 $X_w + X_{w-1} + \cdots + X_1$로 쓴다. 여기서 X_k는 주머니에 흰 공이 정확히 k개 남아 있는 동안 검은 공이 뽑힌 횟수이다. 흰 공이 k개 남아 있는 동안 주머니에는 검은 공 b개와 흰 공 k개가 들어 있으므로, 이 단계는 w를 k로 바꾼 첫 번째 흰 공 문제와 정확히 같고, 방금 증명한 결과에 의해 $\mathrm{E}(X_k) = \frac{b}{k}$이다. 기댓값의 선형성에 의해 마지막 흰 공이 꺼내질 때까지 검은 공이 뽑힌 횟수의 기댓값은

$$\boxed{\sum_{k=1}^{w} \frac{b}{k} = b\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{w}\right).}$$

이다.

검산

$w = 1$이면 두 소문항 모두 직접 쉽게 확인할 수 있다. (i)에서 각 검은 공은 하나뿐인 흰 공보다 확률 $\frac{1}{2}$로 앞에 오므로 $\frac{b}{2}$를 얻고, 이는 $\frac{bw}{w+1}$과 일치한다. (ii)에서는 단계가 하나뿐이므로 합은 그냥 $\frac{b}{1} = b$이다. (i)에서 $w \to \infty$이면 거의 모든 검은 공이 마지막 흰 공보다 먼저 나오는데, 실제로 $\frac{bw}{w+1} \to b$이다.

(i)은 모든 $b \le 4$, $w \le 4$에 대해 가능한 순서를 모두 나열하여 확인하였고, $b = 3$, $w = 4$일 때 정확히 $\frac{12}{5}$를 얻는다. (ii)는 $b = 3$, $w = 4$로 2×10^5회 모의실험을 한 결과 평균이 약 6.245였으며, 이는 $3\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{25}{4} = 6.25$와 비교된다.

흔한 실수

- (i)에서 뽑힌 검은 공들이 서로 독립이라고 가정하는 것. 기댓값의 선형성에는 독립성이 필요하지 않으며, 바로 그 때문에 지시확률변수가 이토록 잘 통한다.
- (ii)에서 흰 공이 뽑히는 시행까지 함께 세는 기하분포를 사용하는 것. 그러면 $\frac{1}{q} = \frac{b+w}{w}$를 얻는데, 이는 답보다 1만큼 크다.
- 마지막 부분의 모든 단계에서 분모에 $b + w$를 쓰는 것. 주머니 속 흰 공의 개수는 단계마다 하나씩 줄어든다.

STEP 너머

두 번째 소문항은 모습을 바꾼 쿠폰 수집가 문제(coupon collector's problem)이다. 단계별 기하분포 대기 시간을 모두 더하면 조화급수(harmonic sum)가 나오며, 이는 $\ln w$처럼 증가한다. 소문항 (i)에서처럼 개수를 지시확률변수의 합으로 나타내는 것은 확률론에서 가장 강력한 기법 가운데 하나이며, 무작위 순열(random permutation)의 고정점(fixed point), 기록(record), 순환(cycle)의 개수의 기댓값을 계산할 때 다시 만나게 될 것이다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)에는 두 아이디어의 예가 많이 실려 있다.

풀이

STEP III 2001, 문제 13

확률과 통계 • 동전 수열 게임

> **STEP III 2001, 13번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/01-s3-q13

이 문제는 *Beyond STEP*의 12.8 절 **페니의 게임**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch12/penney.html

핵심 아이디어

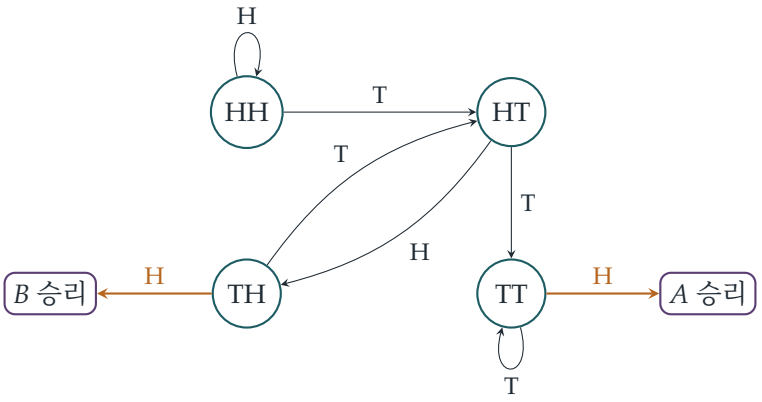
두 목표 수열의 길이가 모두 3이므로 세 번째 던지기 전에는 아무도 이길 수 없고, 그 이후로 앞으로의 진행에 영향을 주는 것은 **마지막 두 번의 결과**뿐이다. 따라서 "상태(state)"는 HH, HT, TH, TT의 네 가지뿐이며, 다음 던지기의 결과에 대해 조건을 걸면(conditioning) 게임은 각 상태에서의 승리 확률에 대한 작은 연립일차방정식(system of linear equations)이 된다. 소문항 (ii)와 (iii)도 같은 방법으로 풀 수 있지만, 네 게임 가운데 두 게임에서는 짧은 직접 논증이 더 빠르다.

풀이

이 풀이 전체에서 각 던지기는 독립이고, 각각 확률 $\frac{1}{2}$로 H 또는 T가 나온다. 적어도 두 번 던졌고 아직 아무도 이기지 않았다면, 다음 결과와 마지막 두 결과만으로 지금 누가 이기는지, 그리고 이기지 않았다면 새로운 마지막 두 결과가 무엇인지가 결정된다. 각 목표 수열의 길이가 3뿐이므로 그 이전의 결과는 관계가 없다. 따라서 어느 시점에서의 승리 확률은 마지막 두 결과에만 의존하며, 그 두 결과가 새 게임의 처음 두 결과였을 때의 승리 확률과 같다.

소문항 (i)

처음 두 결과가 XY일 때 A(TTH)가 B(THH)를 이길 확률을 p_{XY}라 하자. 아래 그림은 다음 결과에 따라 상태가 어떻게 바뀌는지를 보여 준다.



$p_{TT} = 1$인 이유. 마지막 두 결과가 TT라고 하자. 확률 1로 언젠가 앞면이 나온다(n번 연속 뒷면이 나올 확률은 $2^{-n} \to 0$이다). 그때까지는 모두 뒷면이므로 THH가 나타날 수 없고, 첫 앞면 앞에는 적어도 두 개의 뒷면이 있으므로 그 앞면이 TTH를 완성한다. 따라서 A가 반드시 이기며, $p_{TT} = 1$이다.

$p_{HT} = \frac{1}{2}p_{TH} + \frac{1}{2}p_{TT}$인 이유. HT 다음에 나오는 HTH와 HTT는 어느 쪽도 목표 수열이 아니므로 세 번째 던지기에서는 아무도 이기지 않는다. 세 번째 결과가 H이면(확률 $\frac{1}{2}$) 마지막 두 결과는 TH가 되고, T이면 TT가 된다. 세 번째 결과에 대해 조건을 걸고, 위에서 말한 대로 마지막 두 결과만 중요하다는 사실을 이용하면

$$p_{HT} = \tfrac{1}{2}p_{TH} + \tfrac{1}{2}p_{TT}.$$

나머지 두 상태. TH 다음에 앞면이 나오면 THH가 되어 B가 이기고, 뒷면이 나오면 HT가 남는다. HH 다음에 앞면이 나오면 HH가 남고, 뒷면이 나오면 HT가 남는다(여기서 HHH, HHT는 목표 수열이 아니다). 따라서

$$p_{TH} = \tfrac{1}{2}\cdot 0 + \tfrac{1}{2}p_{HT}, \qquad p_{HH} = \tfrac{1}{2}p_{HH} + \tfrac{1}{2}p_{HT}.$$

두 번째 식에서 $p_{HH} = p_{HT}$를 얻는다. p_{HT}에 대한 식에 $p_{TH} = \frac{1}{2}p_{HT}$와 $p_{TT} = 1$을 대입하면

$$p_{HT} = \tfrac{1}{4}p_{HT} + \tfrac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{3}{4}p_{HT} = \tfrac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad p_{HT} = \tfrac{2}{3}.$$

따라서 $p_{HH} = p_{HT} = \frac{2}{3}$이고 $p_{TH} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$이므로, 요구된 결과가 성립한다.

생각해 보기 예를 들어 TH가 실제로는 5번째와 6번째 던지기에서 나왔는데도, 마치 TH가 처음 두 결과인 것처럼 TH에서 게임을 "다시 시작"해도 되는 이유는 무엇일까?

게임의 앞으로의 진행은 앞으로의 던지기와 마지막 두 결과에만 의존하기 때문이다. 아직 완성되지 않은 TTH나 THH는 이미 나온 결과 가운데 많아야 마지막 두 개만 사용할 수 있

다. 그 이전의 기록은 어느 수열에도 도움이 되지 않으며, 앞으로의 던지기는 그것과 독립이다.

전체 확률. 처음 두 번의 던지기에서는 아무도 이길 수 없고, 가능한 네 쌍은 각각 확률 $\frac{1}{4}$를 가진다. 전확률 법칙(law of total probability)에 의해

$$\mathrm{P}(A \text{ 승리}) = \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3} + 1\right) = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{8}{3} = \tfrac{2}{3}.$$

소문항 (ii)

이제 B는 THH, C는 HHT를 가진다. 여기서는 직접 논증이 가장 깔끔하다.

처음 두 결과가 HH이면 C가 이긴다. 그 뒤에 처음 나오는 뒷면(확률 1로 나온다) 앞에는 HH가 있으므로 HHT가 완성되고, 그 전에는 모두 앞면이므로 THH가 나타났을 수 없다.

그렇지 않으면 처음 두 결과 가운데 뒷면이 있다. 확률 1로 패턴 HH가 언젠가 나타난다. 그 첫 번째 출현을 생각하자. 그것은 1번째 던지기에서 시작하지 않으므로 바로 앞의 결과가 존재하고, 그 결과는 H가 아니므로(그렇다면 더 이른 HH가 있었을 것이다) T이다. 따라서 첫 번째 HH는 THH를 완성한다. 한편 HHT가 그 전에 나타나려면 더 이른 HH가 필요하므로 HHT는 그 전에 나타났을 수 없다. 따라서 B가 이긴다.

그러므로 처음 두 결과가 HH가 아닌 한 B가 이긴다.

$$\mathrm{P}(B \text{ 승리}) = 1 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4}.$$

소문항 (iii)

$C(HHT)$ 대 $D(HTT)$. 마지막 두 결과가 XY일 때 C가 이길 확률을 q_{XY}라 하자. HH에서는 (ii)와 같은 이유로 C가 반드시 이긴다. 처음 나오는 뒷면이 HHT를 완성하고, HTT는 HT 뒤에 뒷면이 와야 하므로 먼저 나올 수 없다. 따라서 $q_{\mathrm{HH}} = 1$이다. 나머지 각 상태에서 다음 결과에 대해 조건을 걸면

$$\begin{aligned}
&\text{HT:} \quad \text{T이면 HTT } (D \text{ 승리}),\ \text{H이면 TH:} && q_{\mathrm{HT}} = \tfrac{1}{2} q_{\mathrm{TH}},\\
&\text{TH:} \quad \text{H이면 HH, T이면 HT:} && q_{\mathrm{TH}} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} q_{\mathrm{HT}},\\
&\text{TT:} \quad \text{H이면 TH, T이면 TT:} && q_{\mathrm{TT}} = \tfrac{1}{2} q_{\mathrm{TH}} + \tfrac{1}{2} q_{\mathrm{TT}}.
\end{aligned}$$

마지막 식에서 $q_{\mathrm{TT}} = q_{\mathrm{TH}}$를 얻는다. 첫 번째 식을 두 번째 식에 대입하면 $q_{\mathrm{TH}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} q_{\mathrm{TH}}$이므로 $q_{\mathrm{TH}} = \frac{2}{3}$, $q_{\mathrm{TT}} = \frac{2}{3}$, $q_{\mathrm{HT}} = \frac{1}{3}$이다. 따라서

$$\mathrm{P}(C \text{ 승리}) = \tfrac{1}{4}\left(1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{3}\right) = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{8}{3} = \tfrac{2}{3} > \tfrac{1}{2},$$

이므로 C가 D보다 이길 가능성이 크다.

$D(HTT)$ 대 $A(TTH)$. 이것은 소문항 (ii)에서 H와 T를 바꾼 것과 같다. 처음 두 결과가 TT이면 A가 이긴다. 처음 나오는 앞면이 TTH를 완성하고, HTT는 앞면 뒤에 뒷면 두 개가 와야

하므로 그 첫 앞면 전에는 나타날 수 없다. 그렇지 않으면 처음 두 결과 가운데 앞면이 있다. 확률 1로 패턴 TT가 언젠가 나타난다. 그 첫 번째 출현은 1번째 던지기에서 시작하지 않으며, 바로 앞의 결과는 T일 수 없으므로(그렇다면 더 이른 TT가 있었을 것이다) H이고, 따라서 첫 번째 TT는 HTT를 완성한다. TTH는 더 이른 TT가 필요하므로 그 전에 나타났을 수 없다. 따라서 D가 이기며,

$$\mathrm{P}(D \text{ 승리}) = 1 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4} > \tfrac{1}{2}.$$

그러므로 D가 A보다 이길 가능성이 크다.

> **생각해 보기** A는 B를, B는 C를, C는 D를, D는 A를 이긴다. 어떻게 이럴 수 있을까?

"이길 가능성이 더 크다"는 추이적(transitive) 관계가 아니므로 모순이 없다. 네 사람은 순환을 이루며, 각자의 게임에서 A, B, C, D가 이길 확률은 각각 $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$이다. 두 번째로 고르는 사람은 언제나 첫 번째 사람의 수열을 이기는 수열을 고를 수 있다.

검산

- 소문항 (i)에서 다시 대입해 보면 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{2}{3} = p_{\mathrm{HT}}$이고, $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3} = p_{\mathrm{TH}}$이다.
- 상태를 이용하는 방법은 소문항 (ii)와 D–A 게임에도 통한다. B 대 C에서 HH, HT, TH, TT로부터 B가 이길 확률은 $0, 1, 1, 1$이고, 그 평균은 $\frac{3}{4}$이다.
- 각 대결마다 200 000번의 게임을 시뮬레이션한 결과, 승리 빈도는 0.664, 0.752, 0.666, 0.749로 정확한 값 $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$과 잘 맞았다.

흔한 실수

- 세 번째 던지기에서 게임이 끝날 수 있다는 것을 잊는 실수. 예를 들어 TH 다음에 H가 나오면 B가 곧바로 이긴다는 것을 알아차리지 못하고 $p_{\mathrm{TH}} = \frac{1}{2}p_{\mathrm{HH}} + \frac{1}{2}p_{\mathrm{HT}}$라고 쓰는 경우이다.
- 처음 두 결과의 각 쌍이 확률 $\frac{1}{4}$를 가지며 세 번째 던지기 전에는 아무도 이길 수 없다는 것을 밝히지 않고 네 상태의 확률을 평균 내는 실수.

STEP 너머

이것은 페니 게임(Penney's game)으로, 비추이적(non-transitive) 확률의 유명한 예이다. 상태를 이용하는 방법은 흡수 마르코프 연쇄(absorbing Markov chain)의 이론이며, 여기서 흡수 확률은 이 풀이에서 푼 것과 정확히 같은 종류의 일차방정식을 만족한다. 임의의 두

수열 사이의 승산을 주는 닫힌 공식도 있는데, 바로 콘웨이(Conway)의 "선행 수(leading numbers)" 알고리즘이며, 이는 마팅게일(martingale)을 이용해 증명할 수 있다. 마르코프 연쇄와 첫 단계 분석(first-step analysis)에 대해서는 Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)이나 Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률 입문)를 참고하라.

풀이

STEP III 2001, 문제 14

확률과 통계 • 분산의 불편추정량

STEP III 2001, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/01-s3-q14

핵심 아이디어

이 문제는 모두 한 가지 사실에 달려 있다. "표본(sample)의 분산(variance)"은 나누는 수로 $n = 2$를 쓰므로 모분산(population variance)을 과소추정하고, 이를 두 배 하면 그 차이가 바로잡힌다. 두 값의 표본평균(sample mean)은 두 값의 중점이므로, 각 값은 표본평균에서 두 값 사이 간격의 절반만큼 떨어져 있다. 따라서 V는 차 $X_1 - X_2$ 하나만의 함수가 되고, 마지막 확률은 정사각형 $[0, a]^2$ 안의 넓이가 된다.

풀이

X의 분산

X의 확률밀도함수(density)는 $[0, a]$에서 $f(x) = \frac{1}{a}$이다. 대칭성(symmetry)에 의해 $\mathrm{E}(X) = \frac{1}{2}a$이고,

$$\mathrm{E}(X^2) = \int_0^a \frac{x^2}{a}\,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{3}.$$

따라서

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \big(\mathrm{E}(X)\big)^2 = \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{12},$$

이므로 요구된 결과를 얻는다.

표본분산

표본 X_1, X_2의 표본평균은 $\bar{X} = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$이고, 표본의 분산은 표본평균으로부터의 편차제곱의 평균이다.

$$V = \tfrac{1}{2}\big[(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2\big].$$

이제 $X_1 - \bar{X} = \frac{1}{2}(X_1 - X_2)$이고 $X_2 - \bar{X} = -\frac{1}{2}(X_1 - X_2)$이므로, 두 편차 제곱은 모두 $\frac{1}{4}(X_1 - X_2)^2$과 같다. 그러므로

$$V = \tfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot \tfrac{1}{4}(X_1 - X_2)^2 = \tfrac{1}{4}(X_1 - X_2)^2,$$

이고, 이것이 주어진 형태이다.

생각해 보기 이중적분 없이 $\mathrm{E}\big((X_1 - X_2)^2\big)$를 어떻게 구할까?

X_1과 X_2는 같은 분포를 따르므로 $\mathrm{E}(X_1 - X_2) = 0$이고, 따라서 $\mathrm{E}\big((X_1 - X_2)^2\big) = \mathrm{Var}(X_1 - X_2)$이다. X_1과 X_2는 독립(independent)이므로 분산끼리 더해진다($\mathrm{Var}(-X_2) = \mathrm{Var}(X_2)$이므로 빼기 부호는 상관없다).

$$\mathrm{Var}(X_1 - X_2) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) = \frac{a^2}{12} + \frac{a^2}{12} = \frac{a^2}{6}.$$

그러므로

$$\mathrm{E}(2V) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{E}\big((X_1 - X_2)^2\big) = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{6} = \frac{a^2}{12} = \mathrm{Var}(X).$$

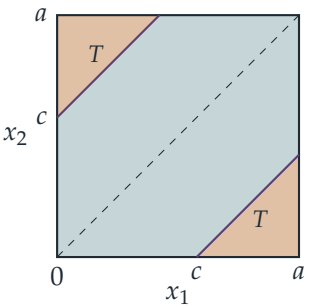
a의 값이 무엇이든 $2V$의 기댓값(expected value)은 $2V$가 추정하는 양과 같으므로, $2V$는 X의 분산의 불편추정량(unbiased estimator)이다. (이와 달리 $\mathrm{E}(V) = \frac{a^2}{24}$로, 참값인 분산의 절반밖에 되지 않는다.)

확률

$V \geq 0$이고 $\frac{1}{12}a^2 > 0$이므로 제곱근을 취할 수 있다.

$$V < \frac{a^2}{12} \iff (X_1 - X_2)^2 < \frac{a^2}{3} \iff |X_1 - X_2| < \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

X_1과 X_2는 독립이고 각각 균등분포(uniform distribution)를 따르므로, 순서쌍 (X_1, X_2)는 정사각형 $[0, a]^2$ 위에서 균등분포를 따른다. 따라서 구하는 확률은 $c = a/\sqrt{3} < a$라 할 때 정사각형의 넓이 가운데 띠 영역 $|x_1 - x_2| < c$에 놓인 부분의 비율이다.



여사건(complement)은 색칠된 두 모퉁이 삼각형 T로 이루어지며, 각각은 빗변이 아닌 두 변의 길이가 $a-c$인 직각이등변삼각형(right-angled isosceles triangle)이다. 두 삼각형의 넓이의 합은 $2\cdot\frac{1}{2}(a-c)^2=(a-c)^2$이므로

$$\mathrm{P}\left(V<\frac{a^2}{12}\right)=1-\frac{(a-c)^2}{a^2}=1-\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=1-\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3}.$$

즉, 정확한 확률은

$$\mathrm{P}\left(V<\frac{a^2}{12}\right)=\frac{2\sqrt{3}-1}{3}.$$

$\sqrt{3}\approx 1.732$를 쓰면 이 값은 $\frac{2.464}{3}\approx 0.821$이므로, 유효숫자(significant figure) 한 자리로 나타낸 확률은 0.8이다.

검산

- 답은 a에 의존하지 않으며, 마땅히 그래야 한다. X를 어떤 배율로 바꾸면 V와 $\frac{1}{12}a^2$가 모두 그 배율의 제곱만큼 바뀌기 때문이다.
- $a=3$으로 4×10^5개의 순서쌍을 시뮬레이션한 결과, $2V$의 평균은 0.751(목표값 0.75)이었고 $V<\frac{1}{12}a^2$인 비율은 0.821로 $\frac{1}{3}(2\sqrt{3}-1)=0.8214$와 잘 맞았다.
- 타당성 점검: 확률은 $(0,1)$ 안에 있고, $\frac{1}{12}a^2$를 $\frac{1}{4}a^2$(V가 가질 수 있는 가장 큰 값)로 바꾸면 $c=a$가 되어 공식 $1-(1-c/a)^2$이 1을 준다.

흔한 실수

- "표본의 분산"에 나누는 수로 $n-1$을 쓰는 것: 그러면 주어진 $\frac{1}{4}(X_1-X_2)^2$이 아니라 $\frac{1}{2}(X_1-X_2)^2$이 나온다. 이 문제는 나누는 수로 n을 쓰기를 요구한다.
- 절댓값(absolute value)을 빠뜨려서 두 삼각형 가운데 하나만 세는 것(그러면 확률이 $\frac{1}{2}$보다 작게 나온다).
- $\mathrm{Var}(X_1-X_2)=\mathrm{Var}(X_1)-\mathrm{Var}(X_2)=0$이라고 쓰는 것.

STEP 너머

여기서 얻은 결과는 일반적인 정리의 $n=2$인 경우이다. 분산이 σ^2인 분포에서 뽑은 크기 n인 임의의 표본에 대하여 $\sum(X_i-\bar{X})^2$의 평균은 $(n-1)\sigma^2$이다. 나누는 수로 $n-1$을 쓰면(베셀 보정(Bessel's correction)) 불편추정량이 되는 것은 이 때문이다. 대학 1학년 통계학에서는 더 나아가 불편추정량 가운데 어느 것의 분산이 가장 작은지를 묻는다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문), 그리고 Blitzstein과

Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)는 모두 여기서 쓴 방식으로 합의 기댓값과 분산을 다룬다.

Beyond STEP

STEP은 대부분의 학생이 학창 시절에 치르는 수학 시험 가운데 가장 어려운 시험이다. 또한 가장 훌륭한 시험 가운데 하나이기도 하다. 문제는 짧고 낯설며 깊이가 있고, 그중 가장 뛰어난 문제들은 대학 수학의 작은 조각이 모습을 감추고 있는 것이다.

이 책은 1987년 첫 시험에 앞서 나온 예시 시험지(specimen papers)부터 2025년 시험지까지 가운데 가장 흥미로운 STEP 문제들을 골라, 각 문제를 하나의 문으로 삼는다. 모든 문제는 뛰어난 학생이 풀어 가면서 던질 법한 질문들과 함께 꼼꼼하게 풀이하고, 그런 다음 책은 그 문을 지나 한 걸음 더 나아간다. 그 아이디어가 어디에서 왔는지, 대학에서는 무엇으로 발전하는지, 그리고 다음에는 무엇을 읽으면 좋은지를 살펴본다.

이 책은 STEP을 준비하면서 기출 문제 연습 이상의 것을 원하는 재능 있는 예비 수학자를 위해 쓰였다. 수학과 학부생처럼 생각하기 시작하고, 앞으로 무엇이 자신을 기다리고 있는지 알아보고 싶은 학생들을 위한 책이다.

- 순수수학(pure mathematics), 역학(mechanics), 확률(probability)과 통계(statistics)를 아우르는 13개의 장
- 이 36개의 STEP 기출 문제와 각 문제의 안내식 풀이
- 모든 문제 뒤에 숨은 대학 수학
- 답이 실린 후속 연습 문제와 더 읽을거리

2001년 풀이. 책 전체와 모든 장,
모든 풀이를 다음 주소에서 무료로 읽고, 내려받고, 공유할 수 있다.

beyondstep.keithmcnulty.org

본문은 퍼블릭 도메인(CC0 1.0)으로 공개한다. STEP 문제 © Cambridge University Press & Assessment.

